

# 两轮自平衡机器人的 LQR 实时平衡控制

张金学, 掌 明

(淮海工学院 电子工程学院, 连云港 222005)

**摘要:**两轮平衡机器人已经成为能够为日常机器人提供未来运动方式的一个研究领域。两轮平衡机器人区别于传统形式的机器人,它需要必须具有一个独特的稳定控制系统来保持其直立。为了平衡系统该文利用平衡机器人的动态模型设计控制器,测试LQR在平衡系统的实用性并评估其性能。仿真结果表明LQR控制器可以稳定系统,并且在平衡基于倒立摆模型的两轮自平衡机器人时表现出满意的结果。

**关键词:**两轮平衡机器人;LQR;平衡;倒立摆

**中图分类号:**TP273 **文献标志码:**A

## Real-time Balance Control for Self-balancing Two-wheeled Robot with LQR

ZHANG Jin-xue, ZHANG Ming

(Department of Electronic Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005, China)

**Abstract:**Two wheeled balancing robots has become an field of research that may well provide the future locomotion for everyday robots. The unique stability control that was required to keep its upright and the two wheeled balancing robot was upright differentiates from traditional forms of robotics. In order to balance the system, the LQR controller has been designed utilising the dynamics model developed for the balancing robot in this paper. The paper examines the suitability and evaluates the performance of the LQR controller in balancing the system. The simulation results show that LQR controller can stabilize the system and have good effect in balancing self-balancing two-wheeled robot based on the inverted pendulum model.

**Key words:**two wheeled balancing robots;LQR;balance;inverted pendulum

过去十年中,在世界各地的一些机器人实验室中,平衡机器人的研究上已经得到了很大的上涨势头。两轮平衡机器人<sup>[1-3]</sup>是众所周知的能够以两个轮子保持直立平衡的机器人。两轮平衡机器人具有绕一点自由转动和易于操纵的能力,这使得两轮平衡机器人能够在狭窄的区域和交通应用中成为理想

的选择。两个轮子适合在基座之下,无论机器人向前或向后移动,都能够通过向移动方向倾斜而使得机器人机架保持直立。车轮还提供其他的运动,从而允许机器人横向跨越各种地形和环境。这种类型的机器人提供了一个具有挑战性的问题,并产生了许多有用和有趣的设计和开发。

收稿日期:2012-10-16;修订日期:2012-12-05

基金项目:国家自然科学基金面上项目(61174013);江苏省高校自然科学基金项目(BK20110398);江苏省高校自然科学基金项目(08KJD520003)

作者简介:张金学(1974—),男,硕士,实验师,研究方向为机器人运动规划与控制 and 机器人技术;掌明(1970—),男,博士,副教授,研究方向为无线传感器网络与机器人技术。

由美国发明家狄恩-卡门发明的两轮平衡运输车“Segway”<sup>[4]</sup>是得到很好的商业应用的两轮机器人, Segway 使用 5 个陀螺仪和其它的倾斜传感器用于保持自身的平衡,当使用者使用 Segway 穿过某一区域时,能够使得站在其平台上的人保持平衡。

由于两轮平衡机器人的机械不稳定性,有必要探索并找到可能的方法对机器人实施控制,以保持系统处于平衡状态。本文探讨线性二次型调节器(LQR)<sup>[5]</sup>的适用性和计算性能,然后应用 LQR 设计控制器对 LEGO 两轮自平衡机器人进行实时平衡控制。

## 1 两轮自平衡机器人实验平台

本文开发的 LEGO 两轮自平衡机器人使用的是 LEGO Mindstorm NXT<sup>[6]</sup>套件并基于倒立摆模型构建了一个自平衡机器人作为实验平台,NXT 两轮自平衡机器人如图 1 所示。

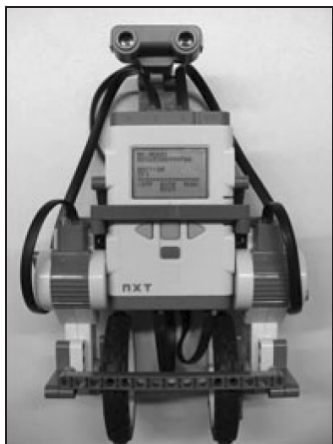


图 1 NXT 两轮自平衡机器人

Fig.1 Self-balancing two-wheeled NXT robot

LEGO Mindstorm NXT 是由乐高公司推出的新一代 LEGO 机器人套件,该套件包括可编程控制器 NXT、USB 传输线、光传感器、超声波传感器、声音传感器、触碰传感器、互动式伺服马达。NXT 采用 32 位微处理器,内建 USB 和蓝牙,NXT 内置的程序编辑工具支持 PC 和 Mac,NXT 的马达采用伺服控制,能让程序精确地控制机器人的速度。为了吸引更多的玩家参与扩充与改造 NXT,乐高公司开放了源代码,微软公司在此基础上推出了 Microsoft Robotics Studio 开发工具,美国的卡内基大学也针对 LEGO NXT 开发了专门在 NXT 上编程的程序设计工具 RobotC。

## 2 系统动态性

为了方便为平衡机器人开发高效的控制系统,需要应用一个数学模型描述机器人的动态性。倒立摆的原理为自然不稳定系统提供了数学建模。倒立摆系统具有不稳定性质,由于其独特之处已经引起了许多研究者的兴趣,本小节主要描述两轮倒立摆的运动方程。

由于机器人的行为会受到转矩以及电机的干扰,两轮式倒立摆动态数学模型必须克服这些因素产生的影响。

首先需要获得左轮和右轮的运动方程。图 2 为左轮与右轮的自由体图。

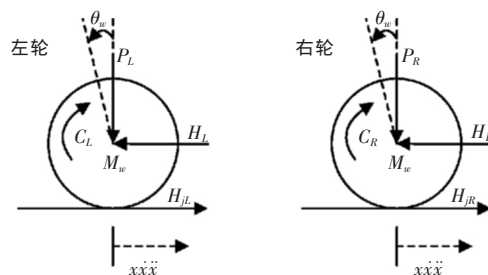


图 2 左右轮自由体图

Fig.2 Free body diagram of the wheels

使用牛顿的运动定律,水平  $x$  方向上的力之和为

$$\sum F_x = Ma, M_w \ddot{x} = H_{fR} - H_R \quad (1)$$

其中:  $H_{fR}$  为右轮边缘水平扭矩;  $H_R$  为右轮中心水平扭矩;  $M_w$  为轮子质量。

绕车轮中心的力之和为

$$\sum M_O = Ia, I_w \ddot{\theta}_w = C_R - H_{fR} r \quad (2)$$

其中:  $\theta_w$  为轮子转角;  $C_R$  为右轮输出力矩;  $r$  为轮子半径;  $a$  为倒立摆转动角加速度;  $I$  为倒立摆转动惯量;  $I_w$  为角度转动惯量。

根据直流电动机的动态性,电机转矩可以表示为

$$\tau_m = I_R \frac{d\omega}{dt} + \tau_a \quad (3)$$

其中:  $I_R$  为右轮转动惯量;  $\tau_a$  为联轴器承受的转矩。

通过重新排列方程并且将直流电动机的参数代入进行推导,可以获得车轮的输出力矩如下:

$$C = I_R \frac{d\omega}{dt} = \frac{-k_m k_e}{R} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{R} V_a \quad (4)$$

其中:  $k_m, k_e$  为电机粘性摩擦系数;  $R$  为电阻;  $V_a$  为电枢电压。

将方程(4)代入到方程(2),可以得到:

$$H_{fR} = \frac{-k_m k_e}{R} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w \quad (5)$$

将方程(4)代入到方程(1),可以得到左右轮的方程分别为方程(6)和方程(7)。

$$M_w \ddot{x} = \frac{-k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_L \quad (6)$$

$$M_w \ddot{x} = \frac{-k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_R \quad (7)$$

其中:  $H_L$  为左轮中心水平扭矩。

由于作用于车轮中心的是直线运动,因此可以通过简单的转换将角旋转转化为直线运动。

$$\ddot{\theta}_w r = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{\theta}_w = \frac{\ddot{x}}{r}, \dot{\theta}_w r = \dot{x} \Rightarrow \dot{\theta}_w = \frac{\dot{x}}{r}$$

将方程(6)和(7)进行线性变换,可以得到左右轮的方程分别为方程(8)和方程(9)。

$$M_w \ddot{x} = \frac{-k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{x} - H_L \quad (8)$$

$$M_w \ddot{x} = \frac{-k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{x} - H_R \quad (9)$$

将方程(8)和方程(9)相加,可以得到:

$$2 \left( M_w + \frac{I_w}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{-2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2k_m}{Rr} V_a - (H_L + H_R) \quad (10)$$

将机器人的机体建模为一个倒立摆<sup>[7-8]</sup>,图3为机体自由体图。

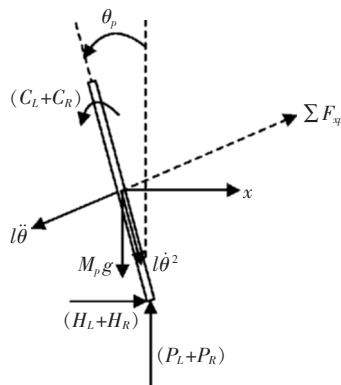


图3 机体自由体图

Fig.3 Free body diagram of the chassis

再次使用牛顿运动定律,水平方向的力之和为

$$\sum F_x = M_p \ddot{x} (H_L + H_R) - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p = M_p \ddot{x} \quad (11)$$

其中:  $l$  为倒立摆长度。

作用于垂直摆的力之和为

$$\sum F_{xp} = M_p \ddot{x} \cos \theta_p (H_L + H_R) \cos \theta_p + (P_L + P_R) \sin \theta_p - M_p g \sin \theta_p - M_p l \ddot{\theta}_p \sin \theta_p = M_p \ddot{x} \cos \theta_p \quad (12)$$

其中:  $P_L$  为左轮垂直扭矩;  $P_R$  为右轮垂直扭矩。

作用于倒立摆质量中心的力矩之和如下:

$$\sum M_o = I_a - (H_L + H_R) l \cos \theta_p - (P_L + P_R) l \sin \theta_p -$$

$$(C_L + C_R) = I_p \ddot{\theta}_p \quad (13)$$

其中:  $C_L$  为左轮输出力矩。

方程(4)定义了电动机施加在倒立摆上的转矩,通过线性化,可以得到:

$$C_L + C_R = \frac{-2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a \quad (14)$$

将方程(14)代入到方程(13)可以得到:

$$-(H_L + H_R) l \cos \theta_p - (P_L + P_R) l \sin \theta_p = I_p \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a \quad (15)$$

将方程(12)两边同时乘以  $-l$ , 然后代入到方程(15), 可以得到:

$$I_p \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a + M_p g l \sin \theta_p + M_p l^2 \ddot{\theta}_p = -M_p l \ddot{x} \cos \theta_p \quad (16)$$

将方程(10)代入到方程(11),

$$2 \left( M_w + \frac{I_w}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{-2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2k_m}{Rr} V_a - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p - M_p \ddot{x} \quad (17)$$

重新排列方程(16)和(17)可以得到系统运动的非线性方程:

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a + M_p g l \sin \theta_p = -M_p l \ddot{x} \sin \theta_p \quad (18)$$

$$\frac{2k_m}{Rr} V_a = 2 \left( M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right) \ddot{x} + \frac{-2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (19)$$

将方程(18)和(19)进行线性化, 设  $\theta_p = \pi + \phi$ , 其中  $\phi$  垂直向上方向的小角度。所以,

$$\cos \theta_p = -1, \sin \theta_p = -\phi, \left( \frac{d\theta_p}{dt} \right) = 0$$

系统运动的线性方程为

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\phi} - \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a - M_p g l \phi = M_p l \ddot{x} \quad (20)$$

$$\frac{2k_m}{Rr} V_a = 2 \left( M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right) \ddot{x} + \frac{-2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} - M_p l \ddot{\phi} \quad (21)$$

为了得到该系统的状态空间表达式, 重新排列方程(20)和(21)。

$$\ddot{\phi} = \frac{M_p l}{(I_p + M_p l^2)} \ddot{x} + \frac{2k_m k_e}{Rr(I_p + M_p l^2)} \dot{x} - \frac{2k_m}{R(I_p + M_p l^2)} V_a +$$

$$\frac{M_p g l}{(I_p + M_p l^2)} \phi \quad (22)$$

$$\ddot{x} = \frac{2k_m}{Rr \left( M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right)} V_a - \frac{2k_m k_e}{Rr^2 \left( M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right)} \dot{x} + \frac{M_p l}{\left( M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right)} \ddot{\phi} \quad (23)$$

将方程(22)代入方程(21),将方程(23)代入方程(20),经过一系列的代数运算得到系统的状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2k_m k_e (M_p l r - I_p - M_p l^2)}{Rr^2 \alpha} & \frac{M_p g l^2}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2k_m k_e (r\beta - M_p l)}{Rr^2 \alpha} & \frac{M_p g l \beta}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2k_m (I_p + M_p l^2 - M_p l r)}{Rr \alpha} \\ 0 \\ \frac{2k_m (M_p l - r\beta)}{Rr \alpha} \end{bmatrix} V_a \quad (24)$$

其中:  $\beta = 2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p$ ,  $\alpha = I_p \beta + 2M_p l^2 \left( M_w + \frac{I_w}{r^2} \right)$

在上述模型中,假定机器人的轮子永远与地面接触,并且轮子没有滑移,转向力可以被认为是忽略不计的。

### 3 控制系统设计

线性二次型调节器(LQR)控制是一种用于设计最佳动态调节器的现代状态空间技术。根据方程(25)和(26),LQR指的是一个线性系统并且具有二次性能指标。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (25)$$

$$x(0) = x_0 \quad (26)$$

LQR系统的性能可以通过一个整体的性能指标来表示(方程27)。当给出初始状态  $x_0$  时,LQR通过性能指标使调节性能和控制工作之间进行权衡。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (27)$$

LQR控制方法为

$$u = -R^{-1}B' \bar{p}x \quad (28)$$

其中  $\bar{p} = -\bar{p} \geq 0$

主要解决下面的黎卡提(Ricatti)方程。

$$0 = PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q \quad (29)$$

增益向量  $K = R^{-1}B' \bar{p}$  定义反馈到系统的控制量。矩阵  $R$  和  $Q$  将会平衡控制输入端的相对重要性并且成本函数  $J$  的状态也将被优化,条件是  $R$  和  $Q$  矩阵中的元素是正值。 $Q$  矩阵的大小依赖系统的状态矩阵,矩阵  $R$  依赖于系统控制输入端的数目。LQR控制器的框图如图4所示。

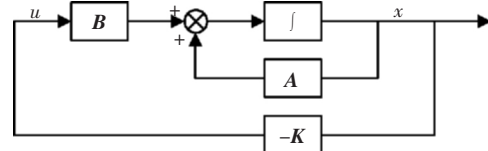


图4 LQR控制框图

Fig.4 LQR control block diagram

根据方程(24),给出平衡机器人的状态空间模型如式(30):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0097 & 11.1594 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0293 & 172.1160 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0815 \\ 0 \\ 0.2456 \end{bmatrix} V_a \quad (30)$$

要实现一个线性控制系统,该系统必须是可控的。这就要求  $n \times n$  的可控性矩阵的秩  $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  为  $n$  或  $|C| \neq 0$ 。

设  $Q$  矩阵的形式为

$$Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

其中:  $a, b, c, d$  是  $x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}$  各自状态的权重,而加权矩阵  $R$  是一个标量的值,因为该系统只有一个控制输入。 $Q$  矩阵中的值可以根据该系统所需的响应进行调整,较高的权重值表示该状态与其他的状态相比要重要。

### 4 实验与仿真结果

由于两轮平衡机器人系统本质上是不稳定的,当施加一个脉冲输入到开环系统时将会导致机器人的倾斜角和位置无限制上升。图5所示为当有一个脉冲输入施加到非控制系统时的仿真结果。

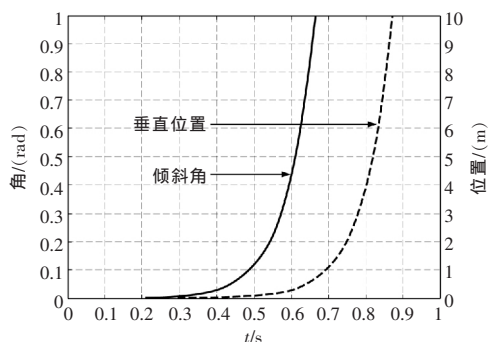


图5 开环系统的脉冲响应

Fig.5 Open loop impulse response of the system

控制系统的主要目的是使所有的系统状态在最短的时间内收敛到零。这一目标将是不可能实现的,因为一个无限大的控制力是不存在的,因此对系统的响应需要做一些折中。 $R$  矩阵的高权重表示较少的电机控制用来平衡系统。为了平衡系统,线性位置,  $x$  和线性速度的低增益值将导致机器人继续移动。这种情况的仿真结果如图 6 所示。

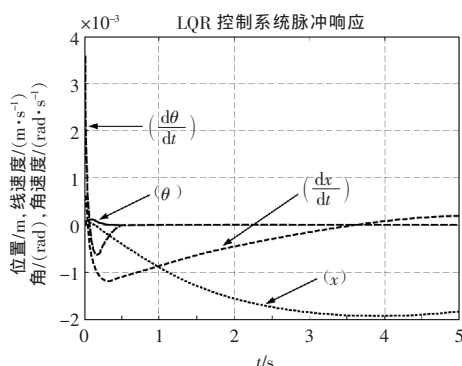

 图6 具有高权  $R$  矩阵的系统响应

 Fig.6 Response of the system with a high  $R$  weighting

图 7 所示以高增益增加  $x$  状态权重的仿真结果,这将减少机器人位置的稳定时间。但是电机不能与理想的响应相匹配,因为所需的转矩超过了最大电机的转矩。

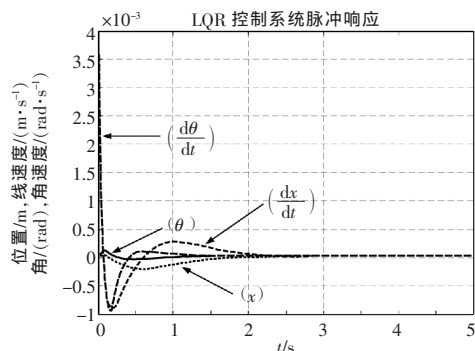


图7 具有高位置权重的系统响应

Fig.7 Response of the system with a high position weighting

图 8 所示为以高增益为倾斜角加权的仿真结果,这将损害其他状态的稳定时间和响应。

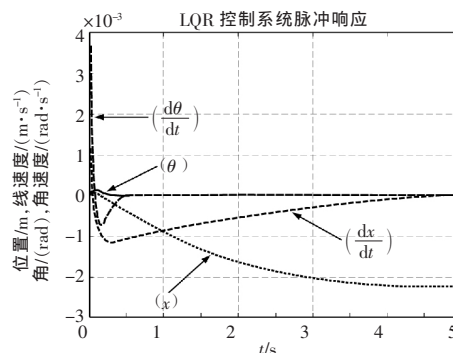


图8 具有高倾斜角的增益的系统响应

Fig.8 Response of the system with a high tilt angle gain

## 5 结语

本文探讨了基于倒立摆模型的两轮自平衡机器人系统的动态性,设计了 LQR 控制器用于平衡机器人。从 LQR 仿真中获得的增益矩阵在 LEGO 两轮自平衡机器人中实现了实时控制。LQR 控制器在平衡两轮自平衡机器人时表现出了令人满意的结果,在测试过程中,通过微调机器人轮子能够保持其垂直位置。

## 参考文献:

- [1] R Ooi. Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot[D]. University of Western Australia, 2003.
- [2] 秦勇, 闫继宏, 王晓宇, 等. 两轮自平衡机器人运动控制研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(5): 721-726.
- [3] 阮晓钢, 任红格. 两轮自平衡机器人动力学建模及其平衡控制[J]. 计算机应用研究, 2009, 26(1): 99-101.
- [4] Self-balancing two-wheeled transporters, [Online], 2010. Available: <http://www.segway.com>.
- [5] Kim Y H, Kim S H and Kwak Y K. Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot[J]. Artificial Life and Robotics, 2003(7): 415-418.
- [6] LEGO MindStorms Webpage [Online]. Available: <http://mindstorms.lego.com/>.
- [7] Pathak, Kaustubh. Franch, Jaume. Agrawal, et al. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005 (6): 505-513.
- [8] Nawawi S W, Ahmad M N and Osman J H S. Development of Two-wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot. SCORED07, Malaysia, 2007(12): 153-158.