线段树、树状数组

邓丝雨

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

引入1：

- 有n（n<=50000）个数，m（m<=50000）次询问，
- 每次询问区间Li到Ri的数的和
- 要求输出每一次询问的结果……

引入2： RMQ (Range Minimum/Maximum Query)问题

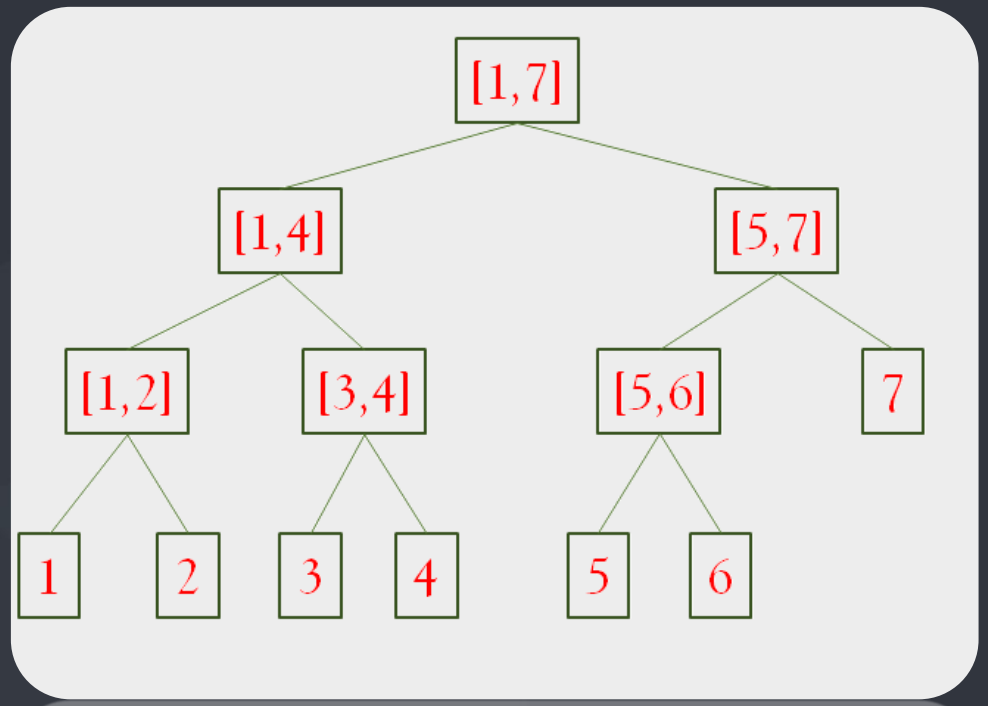
- 有n（n<=50000）个数，m（m<=50000）次询问，
- 每次询问区间L到Ri的数的最大值

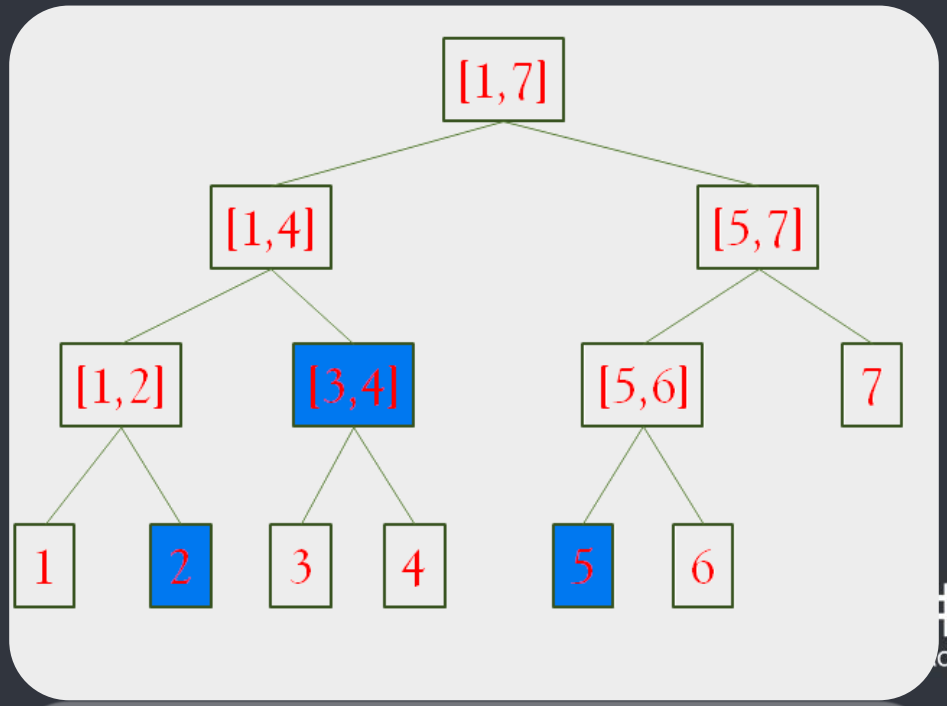
线段树

- 线段树是用一种树状结构来存储一个连续区间的信息的数据结构。
- 它主要用于处理一段连续区间的插入,查找,统计,查询等操作。
- 复杂度： 设区间长度是n,所有操作的复杂度是logn级别。

线段树

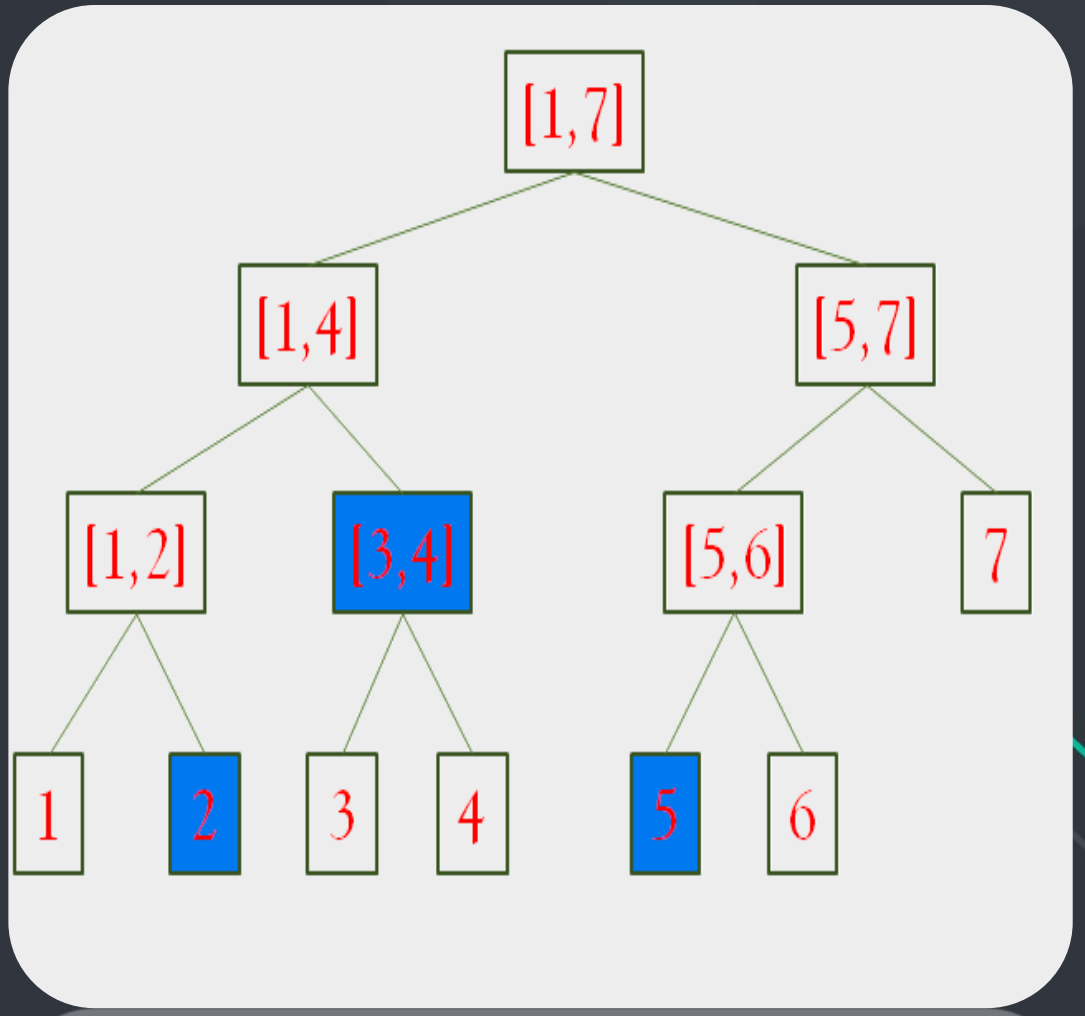
- 线段[1, 7]的线段树 和[2, 5]的分解





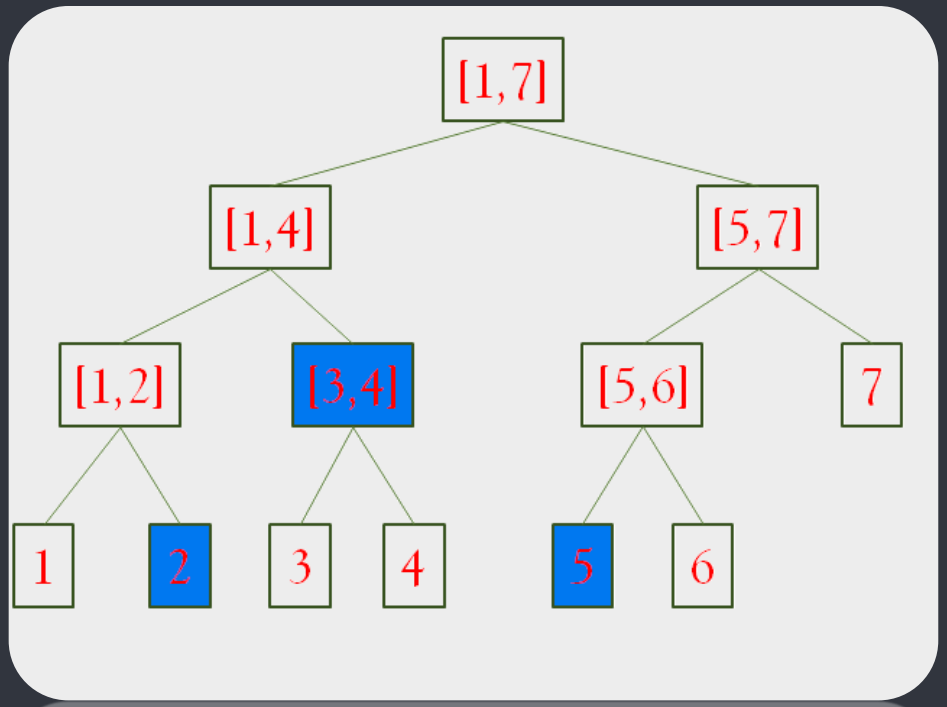
线段树的几点性质

- 线段树是平衡的2叉树,最大深度logn(n为线段树所表示区间的长度)
- 树中的每一个节点代表对应一个区间（叶子节点是一个点……）
- 每个节点（所代表的区间）完全包含它的所有子孙节点
- 对于任意两个节点（所代表的区间）：要么完全包含，要么互不相交



线段树的几点性质

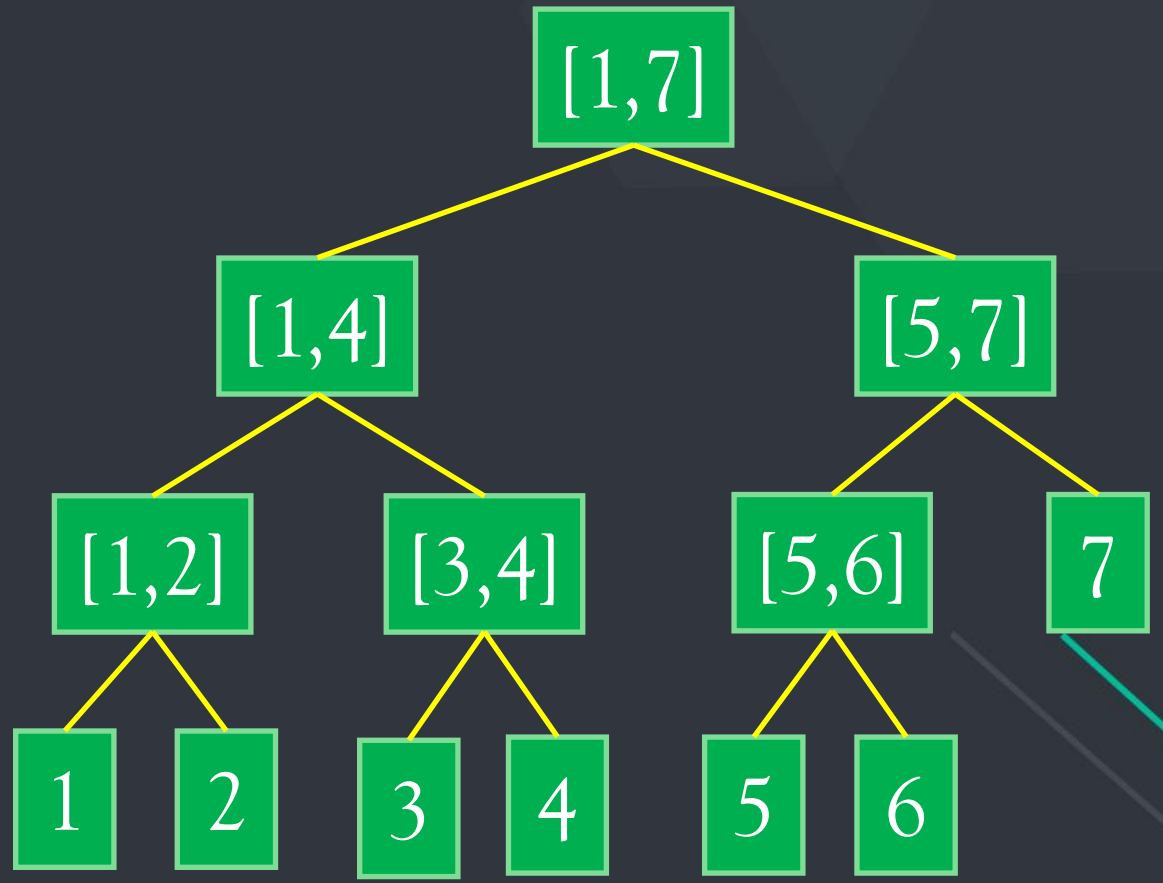
- 在进行区间操作和统计时把区间等价转换成若干个子区间(logn个)的相同操作。
- 任意的线段[a,b]在线段树的查询或查找过程中把这个线段最多分成log(b-a)份（显然每一层最多2个区间）
- So，线段树除建树外的操作都是log(n)级别的复杂度。



线段树的运用

- 线段树的每个节点上往往都增加了一些其他的域。在这些域中保存了某种动态维护的信息，视不同情况而定。这些域使得线段树具有极大的灵活性，可以适应不同的需求。

- 用线段树来维护每个区间的和
- For example：
- 7个数分别为
- 1 4 5 6 3 2 7



例1：

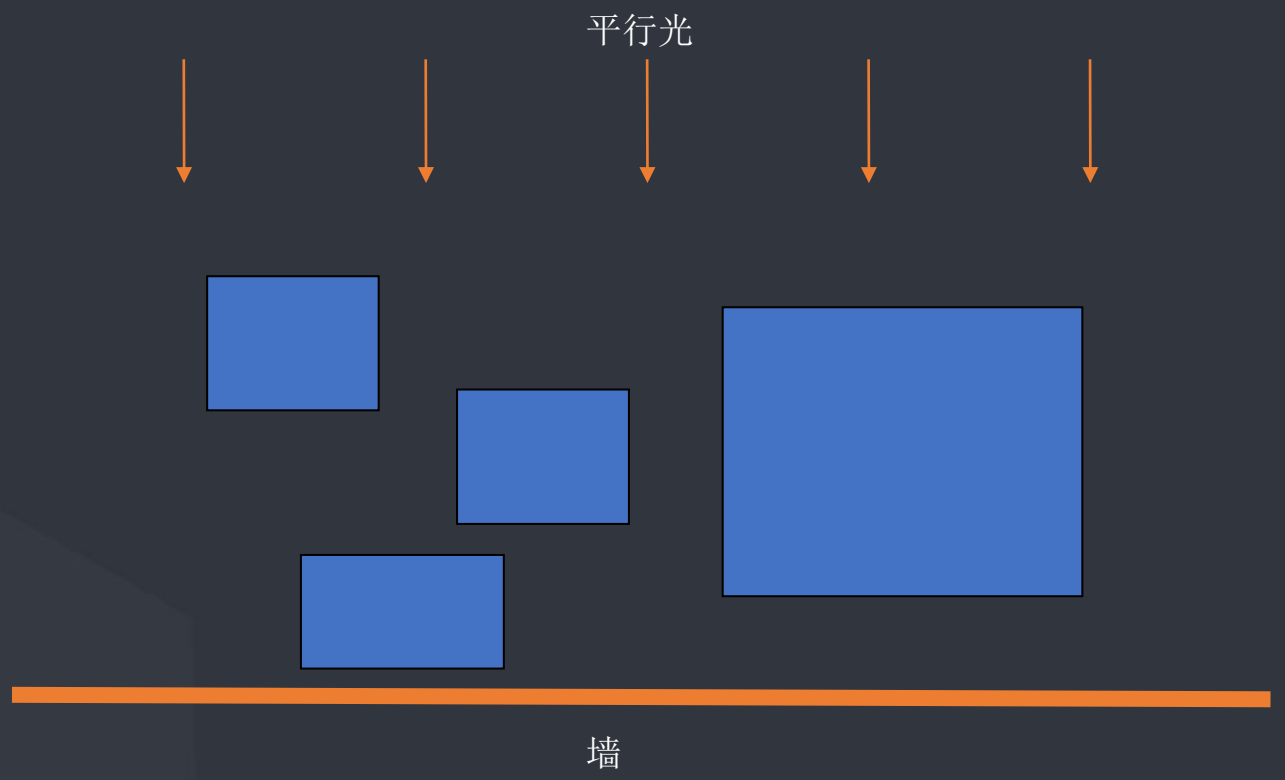
- 给你一个长度为n的序列
- 有如下操作
- 将第i个数加或减x
- 求区间Li到Ri的和

```
7  void build(int p, int l, int r)
8  {
9          if (l == r) {tree[p] = a[l]; return;}
10         int mid = (l + r) / 2;
11         build(p * 2, l, mid);
12         build(p * 2 + 1, mid + 1, r);
13         tree[p] = tree[p * 2] + tree[p * 2 + 1];
14 }
15 void change(int p, int l, int r, int x, int num)
16 {
17         if (l == r) {tree[p] += num; return;}
18         int mid = (l + r) / 2;
19         if (x <= mid) change(p * 2, l, mid, x, num);
20         else change(p * 2 + 1, mid + 1, r, x, num);
21         tree[p] = tree[p * 2] + tree[p * 2 + 1];
22 }
23 int find(int p, int l, int r, int x, int y)
24 {
25         if (x <= l && r <= y) return tree[p];
26         int mid = (l + r) / 2;
27         if (y <= mid) return find(p * 2, l, mid, x, y);
28         if (x > mid) return find(p * 2 + 1, mid + 1, r, x, y);
29         return (find(p * 2, l, mid, x, mid) + find(p * 2 + 1, mid + 1, r, mid + 1, y));
30 }
```

- 线段树很关键的一点：需要维护哪些区间的附加信息，怎样维护这个信息！
- 比如维护区间和，区间最大（小）值，等等。
- 关键是这个“等等”究竟是什么？

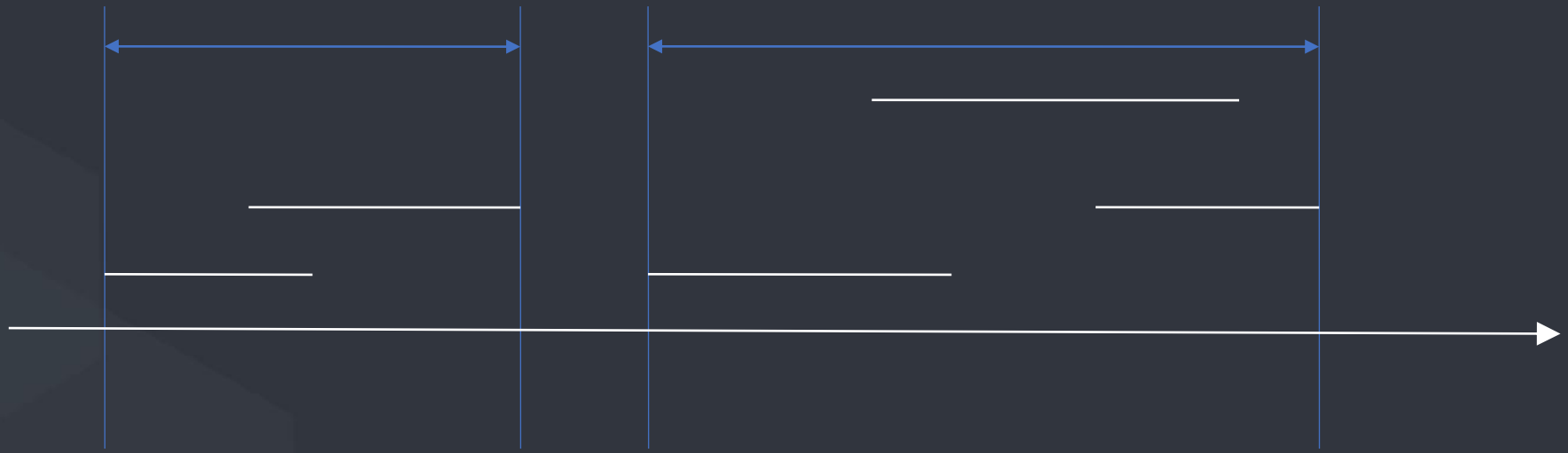
例2：

- 桌子上零散地放着若干个盒子，桌子的后方是一堵墙。如右图所示。现在从桌子的前方射来一束平行光， 把盒子的影子投射到了墙上。问影子的总宽度是多少？



例2：

- 这道题目是一个经典的模型。在这里，我们略去某些处理的步骤，直接分析重点问题，可以把题目抽象地描述如下：x轴上有若干条线段，求线段覆盖的总长度。

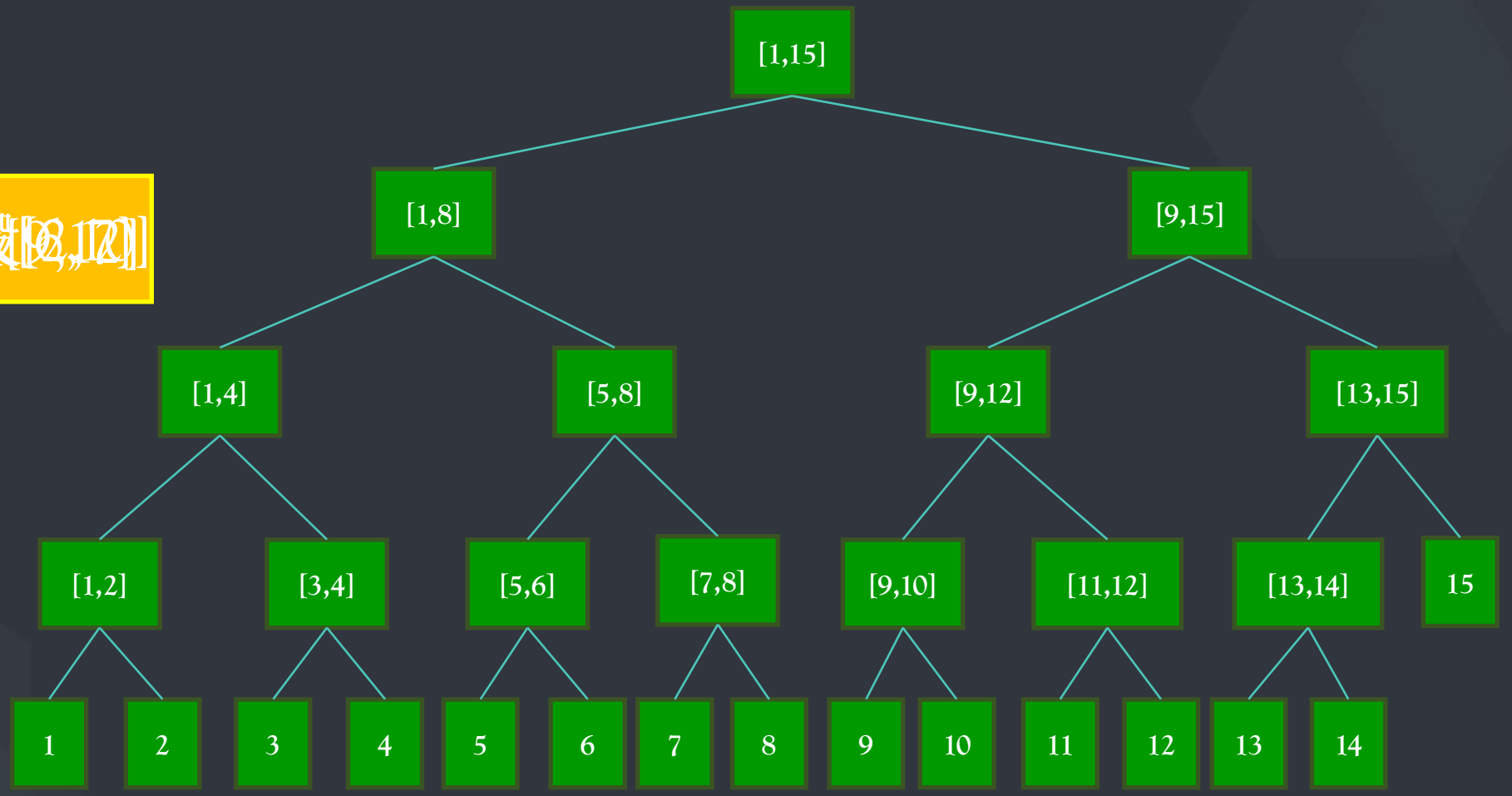


- 维护什么信息呢?
- 当前区间内被覆盖的长度是必然要维护的
- 但是如果只维护区间内被覆盖的长度，我们添加线段的时候就需要访问每一个叶子节点。。。于是复杂度是O（L*logL)
- 添加线段比朴素的时候还慢啊有木有……
- 这样的算法不被卡什么算法被卡?

- 给线段树每个节点增加一个附加信息cover。cover=1表示该结点所对应的区间被完全覆盖，cover=0表示该结点所对应的区间未被完全覆盖。
- 一旦当前区间已经被完全覆盖了，就不用更改他的儿子们的标记了……

例2：

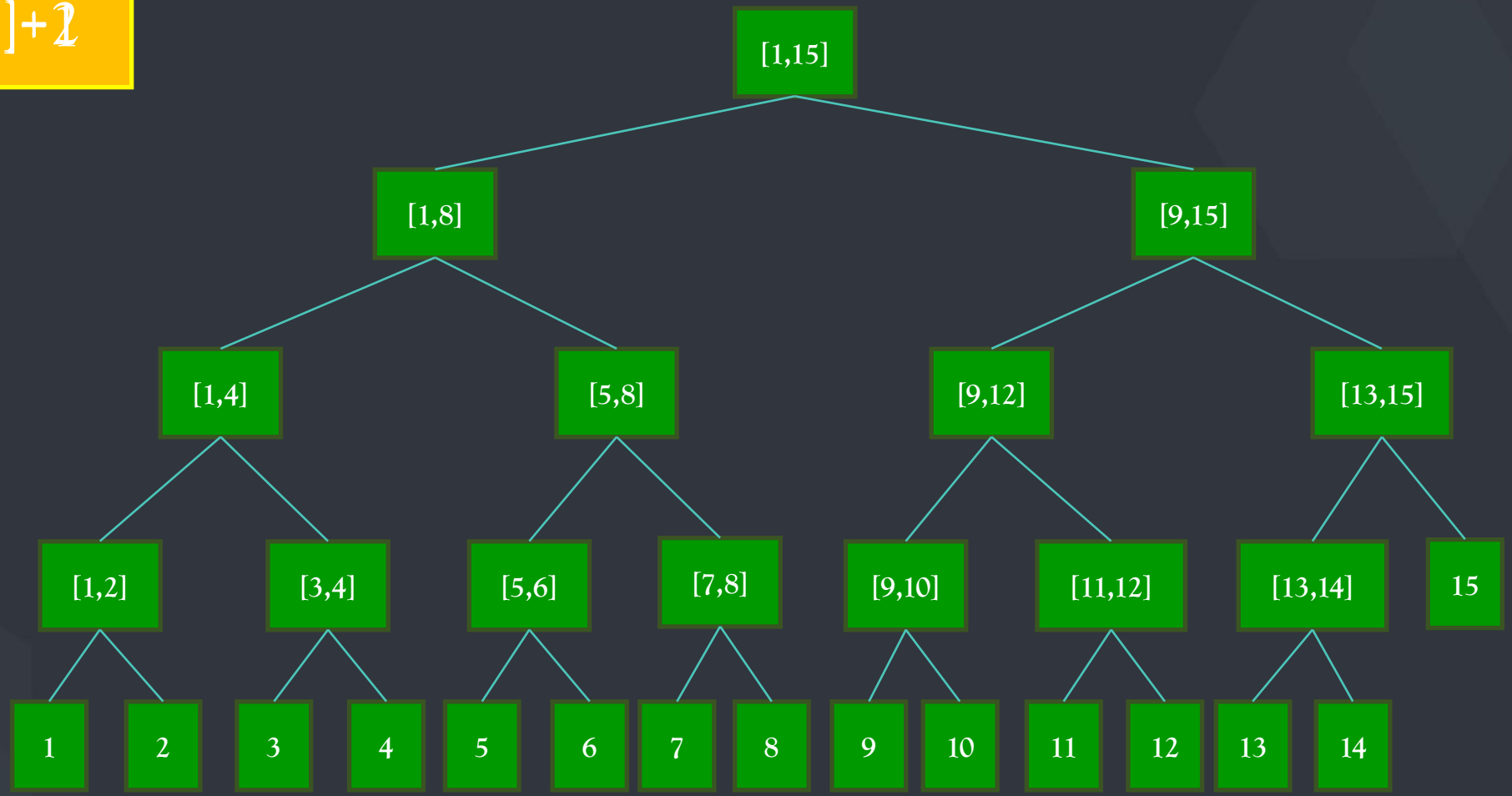
插入线段[9,10]



例3:

- 给你N个数，Q个操作，操作有两种，
- ‘Q a b’是询问a~b这段数的和，
- ‘C a b c’是把a~b这段数都加上c。

区间[6,7]+1



例3：

- 什么时候更新子区间？？
- 当已经标记过的区间有部分被更改——那么这个区间的整体更改就不是原来那么多了，标记就向下传一层
- 注意：只传一层，如果这一层的区间还有更改的话再往下传

```
13  void build(int p, int l, int r)
14  {
15      lazy[p] = 0;
16      if (l == r) {tree[p] = a[l]; return;}
17      int mid = (l + r) >> 1;
18      build(p * 2, l , mid);
19      build(p * 2 + 1, mid + 1, r);
20      tree[p] = tree[p * 2] + tree[p * 2 + 1];
21  }
22  void pushdown(int p,int tot)
23  {
24      lazy[p * 2 + 1] += lazy[p];
25      lazy[p * 2] += lazy[p];
26      tree[p * 2] += (tot - tot / 2) * lazy[p];
27      tree[p * 2 + 1] += (tot / 2) * lazy[p];
28      lazy[p] = 0;
29  }
30  void add(int p, int l, int r, int x, int y, int z)
31  {
32      if (x <= l && r <= y)
33      {
34          lazy[p] += z;
35          tree[p] += ((long long)(r - l + 1)) *z;
36          return;
37      }
38      pushdown(p, r - l + 1);
39      int mid = (l + r) >> 1;
40      if (x <= mid) add(p * 2, l ,mid, x, y, z);
41      if (y > mid) add(p * 2 + 1, mid + 1, r, x, y, z);
42      tree[p] = tree[p * 2] + tree[p * 2 + 1];
43  }
```

```
44  long long  find(int p, int l, int r, int x, int y)
45  {
46      if (x <= l && r <= y) return tree[p] ;
47      int mid = (l + r) >> 1;
48      long long re = 0;
49      if (lazy[p] != 0) pushdown(p, r - l + 1);
50      if (x <= mid) re += find(p * 2, l ,mid, x, y);
51      if (y > mid) re += find(p * 2 + 1, mid + 1, r, x, y);
52      return re;
53
54  }
```

例4：

- 区间平方和问题：给你一个长度为N的序列，之后有M次操作，操作包括两类：
- A L R 为给区间[L,R]的所有数都加上一个A的值
- S L R 为求区间[L,R]的所有数的平方的和

例5:

- 如题，已知一个数列，你需要进行下面三种操作：
- 1.将某区间每一个数乘上x
- 2.将某区间每一个数加上x
- 3.求出某区间每一个数的和

例6:

- 给你n个数，然后q次询问，t=0的时候把区间内的值都开根取整，t=1的时候就输出区间的和

例7：

- 给出n个点的平面二维坐标，对于每个坐标，如果这个坐标跟(0,0)形成的矩形内包含的点数为 k （包含边界，但不包含坐标本身），那么这个坐标就是 level k。输出level 0 – leveln-1的点数分别是多少。
- n个点按照纵坐标y升序给出

例7：

- 由于题目预先给出的坐标已经按照纵坐标y排序，所以线段树就建立在x上。然后按照给出点的顺序，我们先询问当前(0,x)区间有多少个点，再把这个点放到线段树里面（因为统计点数的时候不包含本身）。
- 这里很巧妙的是，因为放的点按照y排序，所以先放进线段树的点的纵坐标肯定小于当前询问的点，而且询问的区间是(0,x)的话，那么得到的点数就是就是对应矩形区域内的点数。

```
08. void build(int p, int l, int r, int x)
09. {
10.     if (l == r){tree[p]++; return;}
11.     int mid = (l + r) / 2;
12.     if (mid >= x) build(p * 2, l, mid, x);
13.     if (mid < x) build(p * 2 + 1, mid + 1, r, x);
14.     tree[p] = tree[p * 2] + tree[p * 2 + 1];
15. }
16. int find(int p, int l, int r, int x, int y)
17. {
18.     if ((x <= l) && (r <= y)) return tree[p];
19.     int mid = (l + r) / 2;
20.     if (mid >= y) return find(p * 2, l, mid, x, y);
21.     if (mid < x) return find(p * 2 + 1, mid + 1, r, x, y);
22.     int t = find(p * 2, l, mid, x, y)
23.             +find(p * 2 + 1, mid + 1, r, x, y);
24.     return t;
25. }
```

```
26. int main()
27. {
28.     //freopen("poj2352.in","r",stdin);
29.     //freopen("poj2352.out","w",stdout);
30.     scanf("%d", &n);
31.     for (int i = 1; i <= n; i++)
32.     {
33.         int y;
34.         scanf("%d%d", &b[i], &y);
35.         if (b[i] > maxn) maxn = b[i];
36.     }
37.     for (int i=1;i<=n;i++)
38.     {
39.         build(1, 0, maxn, b[i]);
40.         a[find(1, 0, maxn, 0, b[i]) - 1]++;
41.     }
42.     for (int i = 0; i != n; ++i)
43.         printf("%d\n", a[i]);
44.
45.     return 0;
46. }
```

例8:

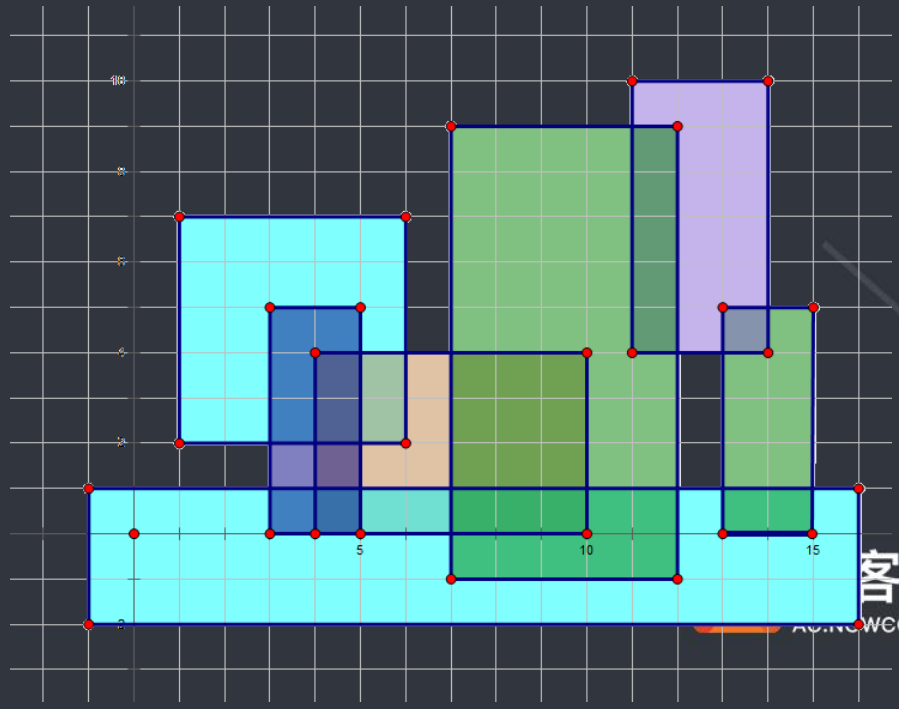
- 用线段树求逆序对数

例9:

- 有一个包含n个元素的数组，要求实现以下操作：
  DELETE k：删除位置k上的数。右边的数往左移一个位置。
  QUERY i j：查询位置i~j上所有数的最小值和最大值。

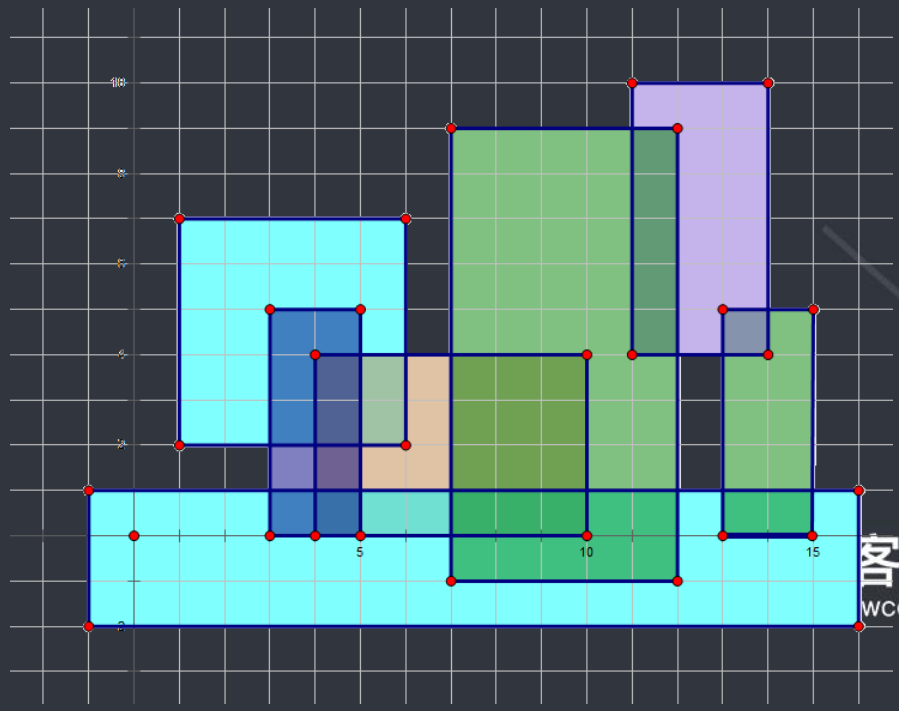
例10：

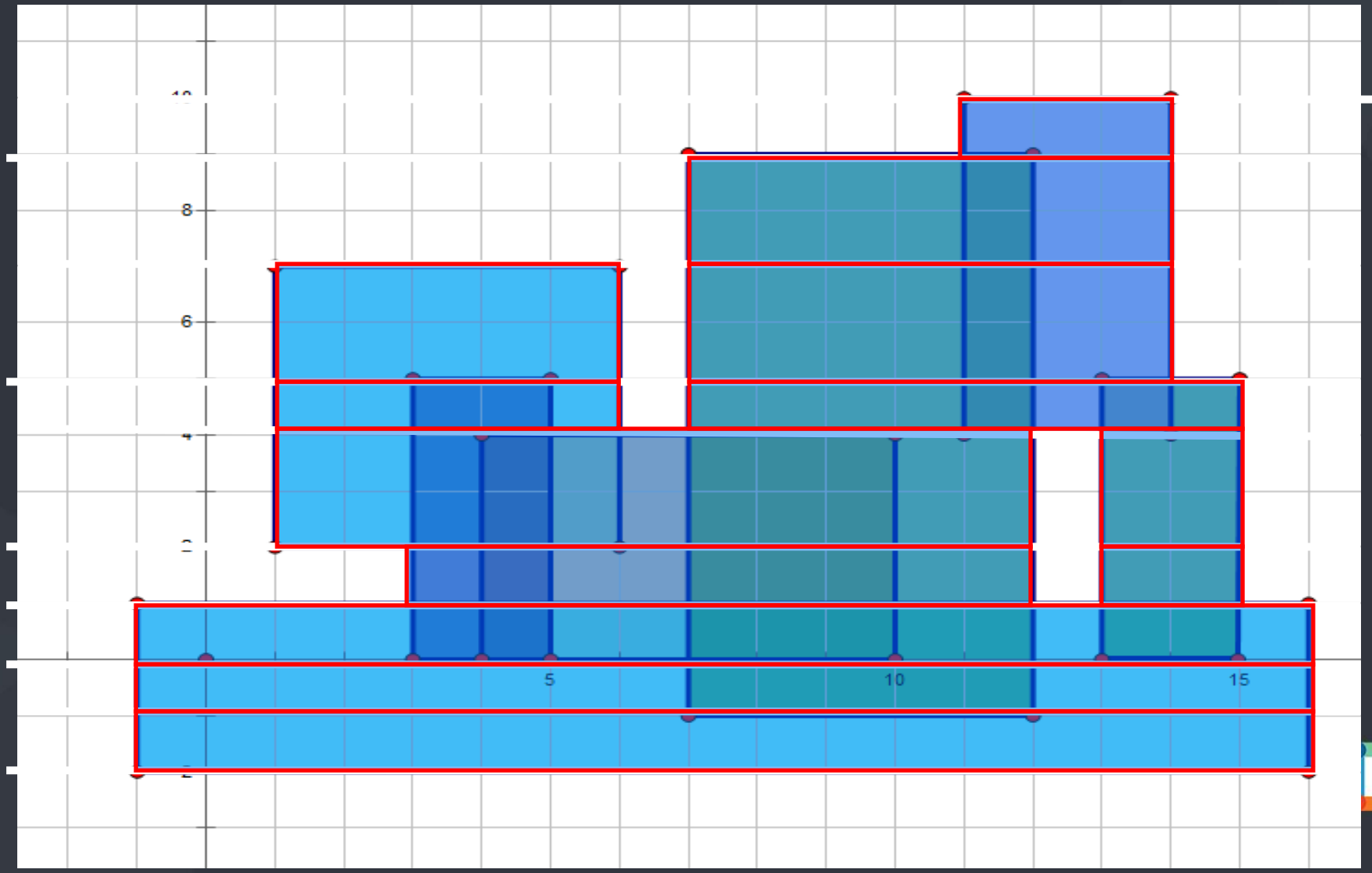
- 给出平面坐标系上若干个长方体的左上角和右下角的坐标，求这些矩形的互相覆盖后的面积……



例10：

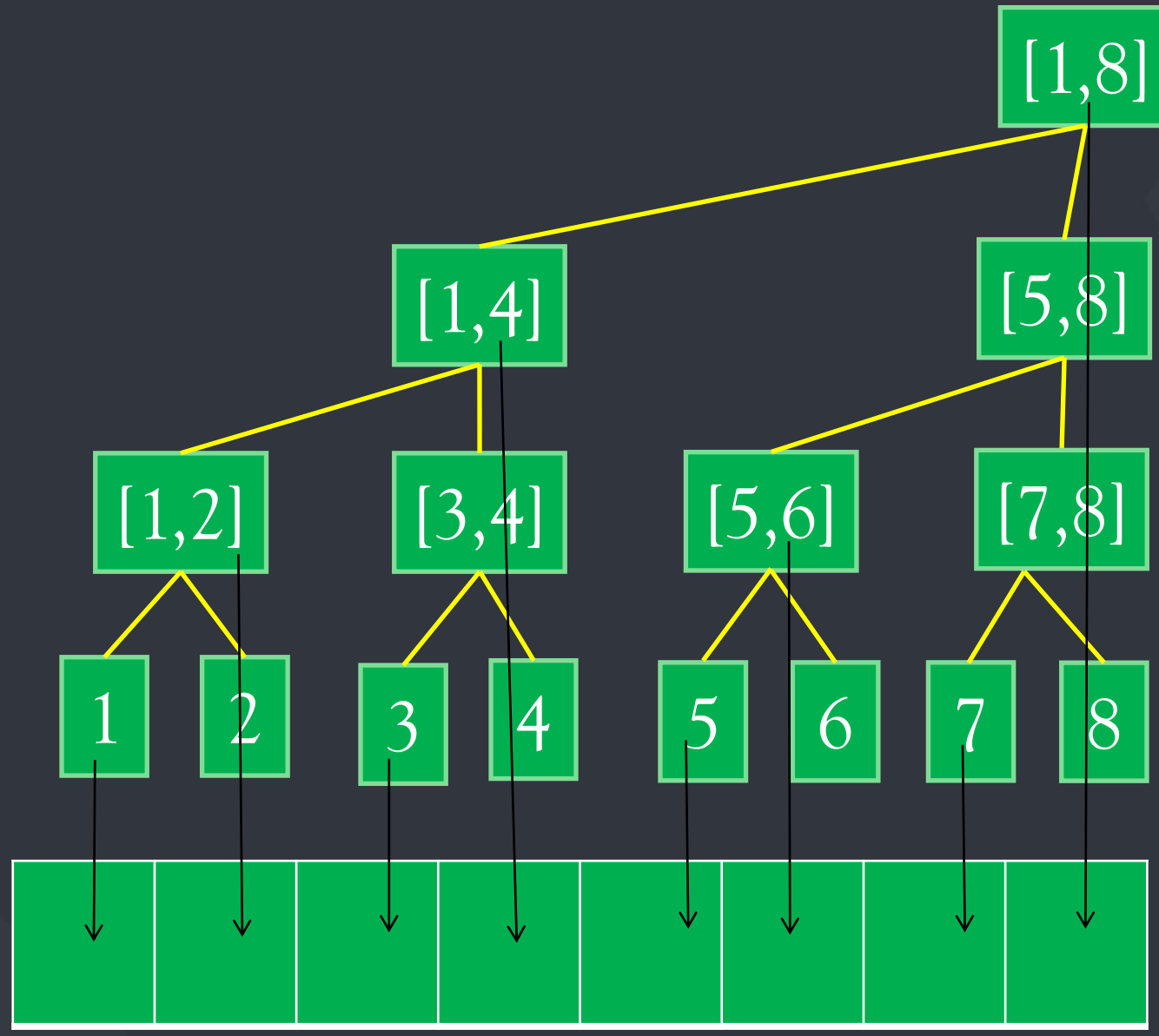
- 给出平面坐标系上若干个长方体的左上角和右下角的坐标，求这些矩形的互相覆盖后的面积……

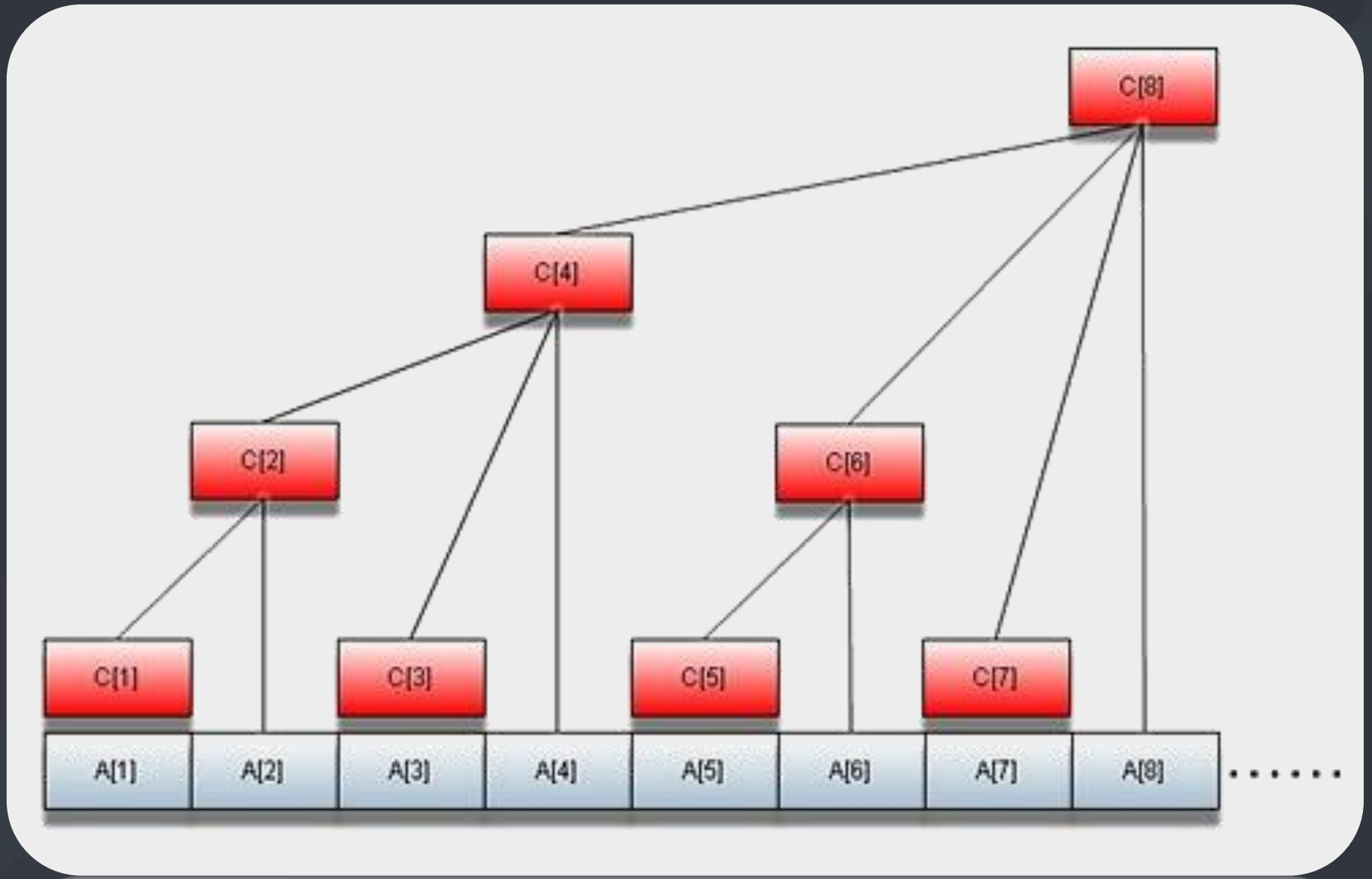




树状数组

- ——树状数组能做的题线段树都能，但线段树能做的题树状数组不一定能……
- 那为啥要学?
- 代码短啊，时空常数小啊!





C1 = A1　　C2 = A1 + A2

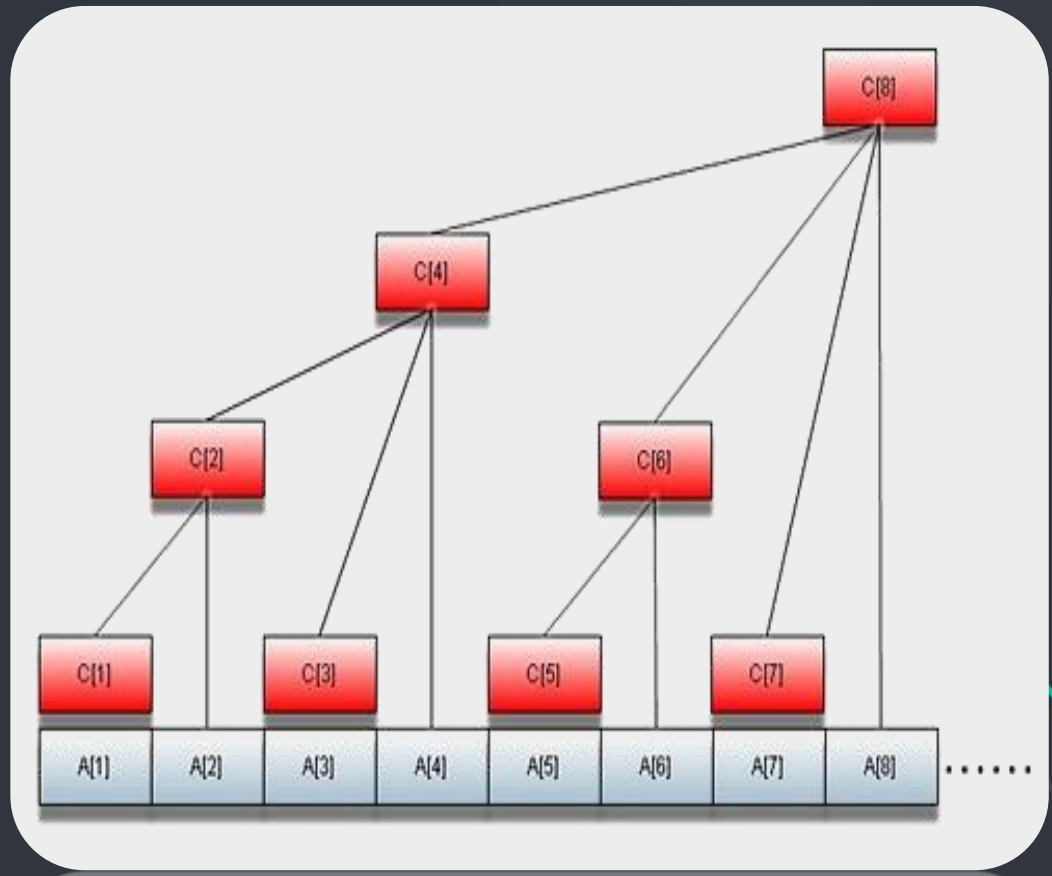
C3 = A3　　C4 = A1 + A2 + A3 + A4

C5 = A5　　C6 = A5 + A6

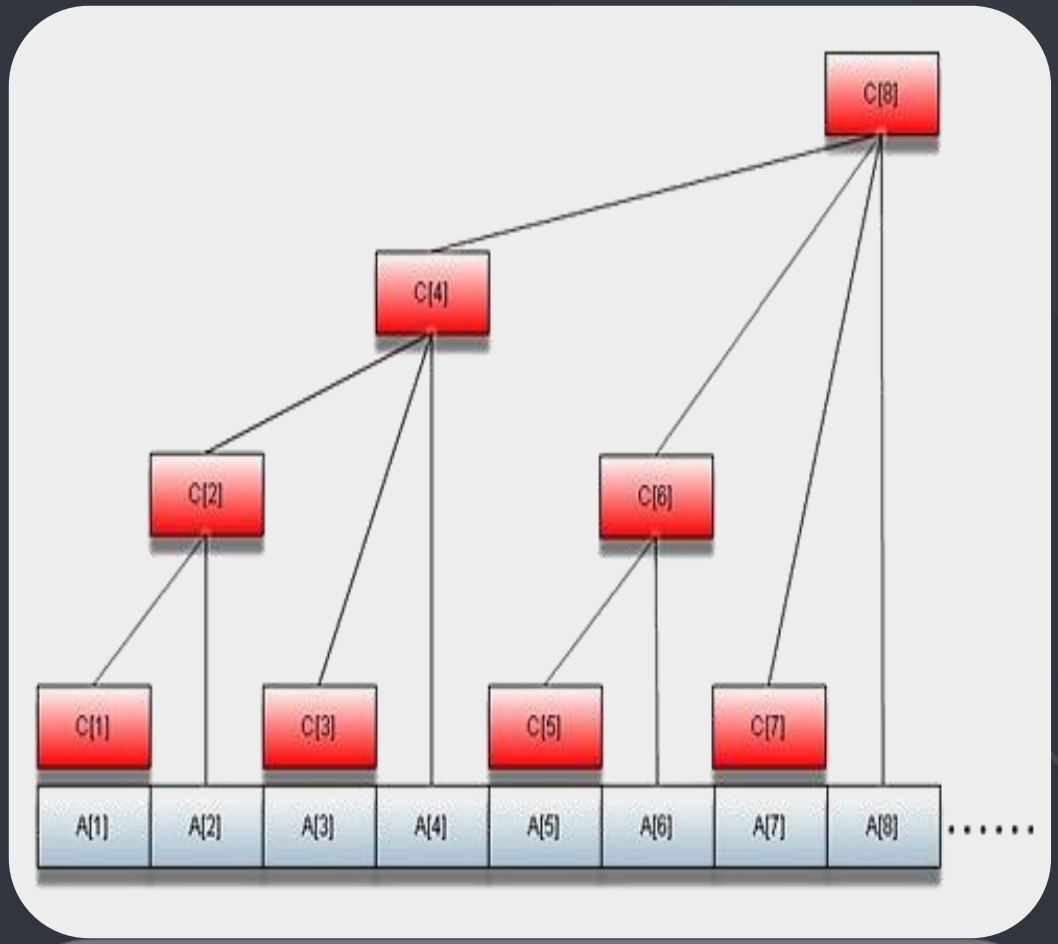
C7 = A7　　C8 = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8

...

C16 = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8 + A9 + A10 + A11 + A12 + A13 + A14 + A15 + A16



- 这里有一个有趣的性质：
- 设节点编号为x，那么这个节点管辖的区间为2^k（其中k为x二进制末尾0的个数）个元素。因为这个区间最后一个元素必然为Ax，
- 所以很明显：Cn = A(n – 2^k + 1) + … + An
- 算这个2^k有一个快捷的办法，定义一个函数如下即可：
- int lowbit(int x){ return x&(-x); }



```
int lowbit(int x)
{
    return x&(-x);
}

void add(int i,int val)
{
   while(i<=n)
   {
       c[i]+=val;
       i+=lowbit(i);
   }
}
```

```
int sum(int i)
{
    int s=0;
    while(i>0)
    {
        s+=c[i];
        i-=lowbit(i);
    }
    return s;
}
```

例1：

- 给定一个长度为N的序列A，所有元素初值为0。接下来有M次操作或询问：
- 操作：输入格式：1 D K，对于所有满足$1 \le i \le$且$i \equiv 0 \pmod{D}$的i，将Ai加上K。
- 询问：输入格式：2 L R，询问区间和。

- D比较大的时候——直接单点修改——改的点数较小
- D小的时候怎么办呢?
- 开个数组 add[i] 表示D=i 的数都加上了几
- 算区间和的时候 访问每个add[i] 算其对区间和的贡献即可

作业：

- https://ac.nowcoder.com/acm/problem/collection/1265

- POJ3264 Balanced Lineup
- POJ1990 MooFest
- NC51101 Lost Cows
- NC22593 签到题
- POJ3468 A Simple Problem with Integers
- POJ2352 Stars
- NC26253 小石的妹子
- NC25879 外挂
- NC21125 践踏
- NC20960 迪拜的超市
- NC19246 数据结构
- POJ2777 Count Color
- POJ2528 Mayor's posters
- NC14522 珂朵莉的数列
- NC15163 逆序数
- NC23054 华华开始学信息学
- NC200195 区区区间

- NC208250 牛牛的最美味和最不美味的零食
- NC20279 [SCOI2010]序列操作
- NC19429 红球进黑洞
- NC14402 求最大值
- NC53370 Forsaken的三维数点
- NC15557 连续区间的最大公约数
- NC15172 情人节的电灯泡
- NC19427 换个角度思考
- NC19428 树上求和
- NC26255 小阳的贝壳
- NC54585 小魂和他的数列
- NC54586 小翔和泰拉瑞亚
- CF786B Legacy
- NC15172 情人节的电灯泡
- NC19427 换个角度思考
- NC19428 树上求和
- NC26255 小阳的贝壳
- NC54585 小魂和他的数列
- NC54586 小翔和泰拉瑞亚
- CF786B Legacy