C-transform

2023 年 2 月 11 日

1　Convex hull (Convex envelope)

1. $f(x)$ を離散化する.
2. $l = [0, -\infty]$(点と 2 点の傾きを保存する.)
3. 傾き更新 (繰り返し)
   (a) ” 一つ前の傾き”$<$” 現在の傾き”$\Rightarrow$ OK l に点と傾きを追加
   (b) ” 一つ前の傾き”$>$” 現在の傾き”$\Rightarrow$ 一つ前の点と傾きを消去
   傾き計算：$c_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$

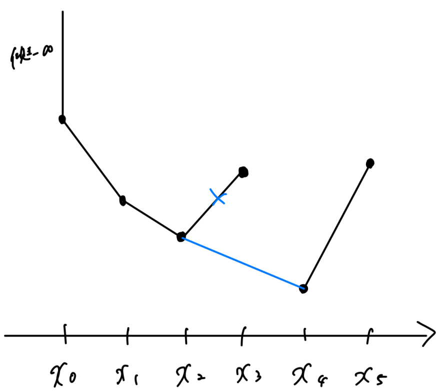

図 1　convex hull-1

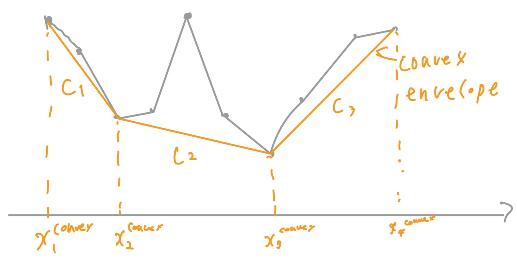

図 2　convex hull-2

2　Legendre Fenchel transform

Legendre Fenchel transform とは、凸関数のある点 $chi[i]$ における接線の傾き (微分)$p[j]$ を求めるもの。$s[i]$: $chi[i]$ と $chi[i+1]$ を結んでできる線分の傾きとすると, 一般に以下が成り立つ。

$$s[i] < p[j] \leq s[i+1]$$

1. $p[j]$(x 座標を分割した値) を固定 (微分の値)

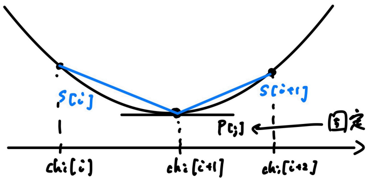

図 3　Legendre Fenchel-1

2. 分割を十分小さくすると、$\nabla f(x) \approx s[i]$ となるので、i を大きくすることで, $p[j] \leq s[i]$ となる s[i] を探す。
   $s[i] < p[j] \leq s[i+1]$ となるものを見つける。この $p[j]$ が $chi[i]$ での微分に当たる.
3. 1,2 を繰り返す。(j を大きくすることにより)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$
$f^*(x) = \sup_{y \in \Omega} [x \cdot y - f(y)]$
狭義凸関数ならば, $f^*(x)$ が単調増加なので、$s[i]$ は常に増加. よって、 $s[i] < p[j] \leq s[i+1]$ となるものを見つけることができる.

Example 2.1. $f(x) = \alpha |x|^2$

$$
\begin{aligned}
f^*(x) &= \sup_{y \in \Omega} [x \cdot y - f(y)] \quad (g(y) = x \cdot y - f(y)) \\
&= \sup_{y \in \Omega} [x \cdot y - \alpha |y|^2] \\
&= \sup_{y \in \Omega} [-\alpha (y^2 - \frac{1}{\alpha} xy)] \\
&= \sup_{y \in \Omega} [-\alpha (y - \frac{1}{2\alpha} x)^2 + \frac{1}{4\alpha} x^2] \\
&= \frac{1}{4\alpha} |x|^2 + \sup_{y \in \Omega} [-\alpha (y - \frac{1}{2\alpha} x)^2] \\
&= \frac{1}{4\alpha} |x|^2 \qquad (\because y = \frac{1}{2\alpha} x \text{ のとき,} g(y) \text{ は sup.} \Rightarrow f^* \text{ は } y = \frac{1}{2\alpha} x \text{ のとき成立}) \\
&= \frac{1}{4\alpha^2} f(x)
\end{aligned}
$$

よって、$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、$f^*(x) = f(x)$.
また、$g(y)$ が最大になるのは $y = \frac{1}{2\alpha} x$ のとき。($g(\frac{1}{2\alpha} x) = x \cdot \frac{1}{2\alpha} x - \alpha \frac{1}{4\alpha^2} x^2 = \frac{x^2}{4\alpha} = f^*(x)$)
$g(y) = x \cdot y - f(y) = x \cdot y - \alpha |y|^2$
$g'(y) = 0 \Leftrightarrow x - 2\alpha y = 0 \Leftrightarrow x - f'(y) = 0 \, (\because f'(x) = 2\alpha x) \Leftrightarrow f'(y) = x$
一般に, $f(x) = \alpha |x|^2$ のとき, $f^*(x)$ となる x は $f'(y) = x$ より, ある点 y での f の微分になる. かつ $x = f'(y) = 2\alpha y$.
つまり,” $f^*(x)$ を求めること” は “$f'(y)$ を求めること” に等しい. よって, Legendre Fenchel transform とは, 凸関数のある点 $chi[i]$ における接線の傾き (微分)$p[j]$ を求めるもの.

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき, $f^*(x) = f(x)$, かつ $f'(y) = x = 2\alpha y = y$.

従って, $s[i]$:"$chi[i+1]$ と $chi[i]$ を結んだ線の傾き" = "$chi[i]$ での接線の傾き (微分)". つまり, 以下のプログラムで, $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき, p は x 座標の分割であるので, $p[j] = s[i]$ となる p が必ず存在する.

$\Rightarrow f_d^*(y) = f^*(y) = f(y)$, if $\alpha = \frac{1}{2}$. (f_d^* : f^* を離散化したもの)(Legendre-Fenchel is an identity for 0.5x**2 の意味)

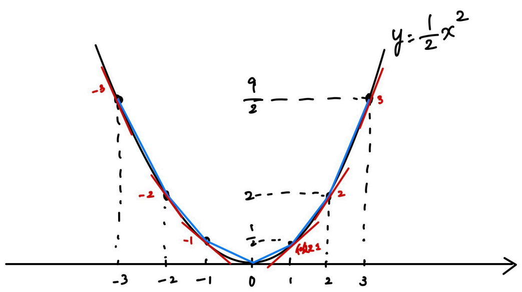

図 4　convex hull-1

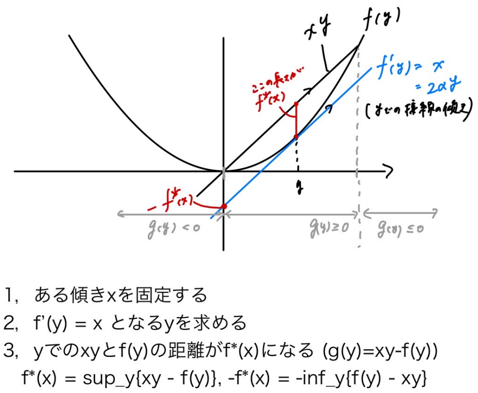

図 5　convex hull-2

Listing 1　キャプション

```
import numpy as np
from convex_hull import convex_hull
import matplotlib.pyplot as plt

def legendre_fenchel(x, y, p):
    #y = f(x)で与えられる input(x, y)に対し、Legendre-Fenchel を計算する transform
    #(f^*(p)=sup_x(px - f(x)) = inf_x(f(x)-px), 傾きを固定し v,x[i] p - y[iが最大となる
        ]x[iを探す。すなわち、傾き]がある点 vx[iでの∇]f(x[i])となる x[iを探す]

    #print(p) #x = p: 座標を分割した添字 x
    chi, v = convex_hull(x, y) #chi:になった convex_hullx,座標の添字 y(conv) v現在と次の
        点を結んだ線の傾き現在の点での接戦の傾き（微分）:()
    #print(chi, v)
    v.append(np.Inf)

    t = []
    iopt = np.zeros_like(p, dtype=int) #x = v = np.linspace(-10, 10, 100), np.
        zeros_like()要素全てに初期化
        :0
    i = 0
    for j, p in enumerate(p):
        while p > v[i]: #v[i現在と次の点を結んだ線の傾きは単調増加より、]:pを等分…
            :[-10,10]99(-10,,10)したものに対し、v[iを大きくしていき、]^
```

```
            #print(v, s[i]) 傾き#が pv[i分割を小さく取れば∇](f(x)と等しい)と等しいもしくは大きくなる時までを大きくする v
            i += 1
        iopt[j] = chi[i]
        t.append(x[chi[i]] * p - y[chi[i]]) #p=v[i∇]=f(x)となる座標 x=ipot[jと]f^*(v)=を保存 t

    return t, iopt

if __name__ == '__main__':


    x = [1, 2, 3, 4, 5]
    y = [0, 1, -2, 1, 0]

    plt.plot(x, y, label=r'y = f(x)')

    p = np.linspace(-1,1,50)
    t, _ = legendre_fenchel(x, y, p)

    plt.plot(p, t, 'o', label=r'$f^*(p) = \sup_{x}\{xp - f(x)\}$')

    t, iopt = legendre_fenchel(x, y, p)
    print(t, iopt)
    # f** gives the convex hull
    yss, _ = legendre_fenchel(p, t, x)
    plt.plot(x, yss, label=r'$f^{**}(x) = \sup_{p}\{xp - f(p)\}$')
    plt.legend()
    plt.show()
    #----------------------------------------------------------------

    # Legendre-Fenchel is an identity for 0.5 x**2

    x = np.linspace(-10, 10, 101) を等分…#[-10,10]100(-10,,10), numpy.linspace最初の値最後の値要素数 (,,)
    y = 0.5*x**2

    p = x
    t, _ = legendre_fenchel(x, y, p) #の関数の帰りから、だけをとってくる legendre_fenchelt
    #print(t, _)
    #print(np.abs(t - y))
    assert np.max(np.abs(t - y)) == 0. #assert 条件式, 条件式がの場合に出力するメッセージ (条件式がではない時に、例外を投げる) FalseTrue
    plt.plot(x, y, label=r'$y = \frac{1}{2}x^2$')
    plt.plot(p, t, label=r'$f^*(p) = \sup_{x}\{xp - f(x)\}$')
    plt.legend()
    plt.show()
```

```
#-----------------------------------------------



# L-F of double well
x = np.linspace(-2, 2, 1001)
y = (x - 1)**2 * (x + 1)**2

plt.plot(x, y)
#plt.show()
p = np.linspace(-1000, 1000, 1001)
t, _ = legendre_fenchel(x, y, p)
plt.plot(p, t)

# f** gives the convex hull
yss, _ = legendre_fenchel(p, t, x)
plt.plot(x, yss)
plt.xlim(-2,2)
plt.ylim(0,10)
plt.show()
```

3 C-transform

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$C : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, C = C(x, y) := \frac{1}{2}|x - y|^2$

$\phi = \phi(y), \phi : \Omega \to \mathbb{R}$

$\phi^c(x) = \inf_{y \in \Omega} [C(x, y) - \phi(y)]$

$$C(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2 = \frac{|x|^2}{2} - x \cdot y + \frac{|y|^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\phi^c(x) &= \inf_{y \in \Omega} [C(x, y) - \phi(y)] \\
&= \inf_{y \in \Omega} [\frac{|x|^2}{2} - x \cdot y + \frac{|y|^2}{2} - \phi(y)] \\
&= \frac{|x|^2}{2} + \inf_{y \in \Omega} [-(x \cdot y - \frac{|y|^2}{2} + \phi(y))] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y \in \Omega} [x \cdot y - (\frac{|y|^2}{2} - \phi(y))]
\end{aligned}$$

ここで、 $f(y) := \frac{|y|^2}{2} - \phi(y), f^*(x) := \sup_{y \in \Omega} [x \cdot y - f(y)]$ とすると、

$$= \frac{|x|^2}{2} - f^*(x)$$

4 Property of L-F transform and C-transform

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$f^*(x) = \sup_{y \in \Omega} [x \cdot y - f(y)]$

Example 4.1. If $f(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $f^*(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - f(y)] \\ &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \frac{|y|^2}{2}] \\ &= \sup_{y\in\Omega} [-\frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{x^2}{2}] \\ &= \frac{x^2}{2} + \sup_{y\in\Omega} [-\frac{1}{2}(y-x)^2] \\ &= \frac{x^2}{2} + 0 = \frac{x^2}{2} = f(x) \end{aligned}$$

Lemma 4.1. *$f^{**}(x) \le f(x)$ for every $x \in \Omega$.*

Proof. $f^*(x) = \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - f(y)], -f^*(x) = \inf_{y\in\Omega} [f(y) - x \cdot y]$.

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - f^*(y)] \\ &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \sup_{z\in\Omega} [y \cdot z - f(z)]] \\ &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y + \inf_{z\in\Omega} [f(z) - y \cdot z]] \\ &\le \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - x \cdot y + f(x)] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Consider $f(x)$ is affine map $s.t. f(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - f(y)] \\ &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - (ay + b)] \\ &= \sup_{y\in\Omega} [(x-a)y] - b \\ &= \begin{cases} -b & \text{if } x = a, \\ +\infty & \text{if } x \ne a. \end{cases} \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - f^*(y)] \\ &= ax + b \qquad (\because \sup_{y\in\Omega} [-f^*(y)] = b \quad \text{if } y \ne a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 4.2. *$\phi^{cc}(x) \geq \phi(x)$ for every $x \in \Omega$.*

Proof. $\phi^c(x) = \inf_{y\in\Omega} [C(x,y) - \phi(y)]$.

$$\begin{aligned}
\phi^{cc}(x) &= \inf_{y\in\Omega} [C(x,y) - \phi^c(y)] \\
&= \inf_{y\in\Omega} [C(x,y) - \inf_{z\in\Omega} [C(y,z) - \phi^c(z)]] \\
&\geq \inf_{y\in\Omega} [C(x,y) - (C(y,x) - \phi^c(x))] \\
&= \phi^c(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Example 4.2. $C(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 = \frac{|x|^2}{2} - x \cdot y + \frac{|y|^2}{2}$ とするとき, Lemma 4.2. は

$$\begin{aligned}
\phi^c(x) &= \inf_{y\in\Omega} [C(x,y) - \phi(y)] \\
&= \inf_{y\in\Omega} [\frac{1}{2}|x-y|^2 - \phi(y)] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - (\frac{|y|^2}{2} - \phi(y))] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - f^*(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{cc}(x) &= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - (\frac{|y|^2}{2} - \phi^c(y))] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \{\frac{|y|^2}{2} - \inf_{z\in\Omega} [\frac{1}{2}|y-z|^2 - \phi(z)]\}] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \{\frac{|y|^2}{2} + \sup_{z\in\Omega} [\phi(z) - \frac{1}{2}|y-z|^2]\}] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \{\frac{|y|^2}{2} + \sup_{z\in\Omega} [\phi(z) - \frac{|y|^2}{2} + y \cdot z - \frac{|z|^2}{2}]\}] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \{\frac{|y|^2}{2} - \frac{|y|^2}{2} + \sup_{z\in\Omega} [y \cdot z - (\frac{|z|^2}{2} - \phi(z))]\}] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - \sup_{z\in\Omega} [y \cdot z - (\frac{|z|^2}{2} - \phi(z))]] \geq \frac{|x|^2}{2} - \sup_{y\in\Omega} [x \cdot y - x \cdot y + \frac{|x|^2}{2} - \phi(x))] \\
&= \frac{|x|^2}{2} + \inf_{y\in\Omega} [\sup_{z\in\Omega} [y \cdot z - (\frac{|z|^2}{2} - \phi(z))] - x \cdot y] \geq \frac{|x|^2}{2} + \inf_{y\in\Omega} [x \cdot y - \frac{|x|^2}{2} + \phi(x) - x \cdot y] \\
&= \frac{|x|^2}{2} - \frac{|x|^2}{2} + \phi(x) \\
&= \phi(x)
\end{aligned}$$