Proof. (Thm 2.2.)

定理から、C が凸であるので

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \qquad \forall x_1 x_2 \in C,\ \forall \theta_1, \theta_2, \in [0,1]$$

を満たす。すなわち、C が凸であることは、C が $n=2$ の凸結合で閉じていることと同値である。したがって、$n>2$ のときであっても、C が $n>2$ の凸結合で閉じていることを示せばよい。

帰納法で示す。

凸結合 $y = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in C$ を考える。ここで凸結合の定義から、$\exists i = 1, ..., n,\ \theta_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,\ x_i \in C$ である。

$n=1$ のとき

$$\theta_1 = 1,\ x_1 \in C \quad \Rightarrow \quad \theta_1 x_1 \in C$$

$n>2$ のときを考える。

$n=k$ のとき $\Rightarrow$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$\theta_{k+1} \neq 1$ であるので、$\theta_i' = \frac{\theta_i}{1-\theta_{n+1}} \in [0,1]$ を考えると、$(\because \theta_i \geqq 0,\ 1-\theta_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \geqq 0,\ \theta_i \leqq 1-\theta_{n+1})$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \theta_i' x_i \in C, (\because n=k \text{ のとき、全ての凸結合は C に含まれるという仮定})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i}{1-\theta_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}{\sum_{i=1}^{n} \theta_i} = 1,$$

となる。

よって、

$$y = (1-\theta_{n+1})y' + \theta_{n+1} x_{n+1}, \quad y' \in C,\ x_{n+1} \in C$$

$n=2$ のとき、C が凸であることと、C が $n=2$ の凸結合で閉じていることは同値なので、$y \in C$ である。

よって任意の n で C が凸であることと、C の元からなる全ての凸結合で閉じていることがわかる。

□

Proof. (thm convex hull(3))

$S = \{\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists m \in \mathbb{N}, \exists x_1, ..., x_m \in X, \exists \theta_1, ..., \theta_m \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1\}$ とする。2 つの凸結合 $x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i,\ y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i\ (x_1, ..., x_n \in S, y_1 ..., y_m \in S, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1)$ を考える。ここで、

$$(1-\theta)x + \theta y = (1-\theta)\theta_1 x_1 + ... + (1-\theta)\theta_n x_n + \theta\lambda_1 y_1 + \theta\lambda_m y_m, \quad \theta \in [0,1]$$

を考えると、$(1-\theta)x + \theta y$ は S の $n+m$ 個の元からなる別の凸結合になる。

係数の和を考えると、$(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} \theta_i + \theta \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \theta + 1 - \theta = 1$ となるので、S の定義より、$(1-\theta)x + \theta y \in S$ がわかる。

よって凸集合の定義から X の元からなる凸結合の全体の集合 S は凸集合になる。

次に S が X を含む最小の凸集合であることを示す。

$i = 1$ のとき、$\forall x \in X, 1 \cdot x \in S$ より明らかに $X \subset S$ である。

$convX$ は X を含む最小の凸集合であり、X を含む凸集合であるので、$(X \subset)convX \subset S$ である。

一方、

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in S, \quad x_i \in X, \theta_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$$

を考えると、一つ上の定理から、凸集合 $convX$ は $convX$ の元からなる全ての凸結合を含むので、

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in X, \quad x_i \in X \subset convX, \theta_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$$

よって、$S \subset convX$。したがって $S = convX$ となり、S が X を含む最小の凸集合である。 □

Proof. (thm convex hull(4)$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $convX$ に含まれる任意の点 x は X の $n+1$ 個の元の凸結合で表される)

$$convX = \{\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i x_i \quad | \quad n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \theta_i > 0, \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i = 1\}$$

$x \in convX \subset \mathbb{R}^n$ となる任意の凸結合 $x = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i (k > n+1)$ を考える。係数 $\theta_i > 0$

と仮定する。$k > n+1$ 個の x_i はアフィン従属である ($\because$ Definition 1.5)。すなわち $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ は線形従属である。

つまり、少なくとも一つは 0 でない $\lambda_i (i = 2, \ldots, k)$ が存在し、

$$\sum_{i=2}^{k} \lambda_i (x_i - x_1) = 0,$$

が成り立つ。$\lambda_1 := -\sum_{i=2}^{k} \lambda_i$ と定義すると、

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

であり、λ_i 全てが 0 になることはない、従って少なくとも 1 つ $\lambda_i > 0$ となるものが存在する。任意の実数 t を用い、

$$\theta_i' := \theta_i - t^* \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\begin{aligned} t^* := \max\{t \geq 0 \,|\, \theta_i - t\lambda_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, k\} &= \cap_{i=1}^{k} \{t \geq 0 \,|\, \theta_i - t\lambda_i \geq 0\} \\ &= \cap_{\lambda_i > 0} \{t \geq 0 \,|\, \theta_i - t\lambda_i \geq 0\} \\ &= \cap_{\lambda_i > 0} \{0 \leq t \leq \frac{\theta_i}{\lambda_i}\} \\ &= \max[0, \min_{\lambda_i > 0} \frac{\theta_i}{\lambda_i}] \\ &= \min_{\lambda_i > 0} \frac{\theta_i}{\lambda_i} = \frac{\theta_j}{\lambda_j} \end{aligned}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \theta_i' &= \sum_{i=1}^{k} (\theta_i - t^* \lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \theta_i - t^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \\ &= 1 - t^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \theta'_i x_i &= \sum_{i=1}^{k} (\theta_i - t^* \lambda_i) x_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i - t^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \\
&= x - t^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \\
&= x
\end{aligned}
$$

が成り立つ。t^* の定義より、$\theta_j - t^*\lambda_j = 0$ である。x の係数 θ' を考える。

$\lambda_i < 0$ のとき、$\theta_i > 0, t^* > 0$ より、$\theta'_i = \theta_i - t^*\lambda_j > 0$。 $\lambda_i > 0$ の とき、$\theta'_i = \theta_i - t^*\lambda_j \geq \theta_j - \frac{\theta_j}{\lambda_j}\lambda_j = 0$。従って、

よって x は係数 $\theta' > 0$ で和が 1、$\theta_j - t^*\lambda_j = 0$ である。すなわち x は $k-1$ 個の凸結合で表される。これを $k = n+1$ 個まで繰り返せばよい。

$\square$

Proof. (Thm2.4)

Let $K_i \subset \mathbb{R}^n$: convex cone, $\forall x, y \in \cap_{i \in I} K_i$, $\theta \in [0,1]$. Then

$$\{\theta x + (1-\theta)y\} \subset K_{i \in I}, \quad \forall i \in I$$

Thus

$$\{\theta x + (1-\theta)y\} \subset \cap_{i \in I} K_1, \quad \forall i \in I$$

$\square$

Proof. (Cor2.4.1)

Let $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b_i \rangle \leq 0, i \in I, b \in \mathbb{R}^n\}$. Fix $\lambda x, \lambda y \in K_i$, $\lambda > 0$, $\theta \in [0,1]$,.

$$
\begin{aligned}
\langle \theta\lambda x + (1-\theta)\lambda y, b_i \rangle &= \langle \theta\lambda x, b_i \rangle + \langle (1-\theta)y, b_i \rangle \\
&= \theta \langle \lambda x, b_i \rangle + (1-\theta)\langle \lambda y, b_i \rangle \\
&\leq \theta 0 + (1-\theta)0 = 0
\end{aligned}
$$

Thus $\theta\lambda x + (1-\theta)\lambda y \in K_i$, so K_i is *convex cone*, and $K = \cap_{i \in I} K_i$.

$\square$

Proof. (Thm 3.1)

($\Rightarrow$)

Suppose that f is convex function. Fix x, y s.t. $(\boldsymbol{x}, \alpha), (\boldsymbol{y}, \beta) \in \text{epi} f$, $\lambda \in [0,1]$. Then

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\alpha + \lambda\beta &\geq (1-\lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}) \\ &\geq f((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

Then $((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}\ ,\ (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta) \in \text{epi} f$, and epi f is convex set.

($\Leftarrow$)

Suppose that epi$f$ is convex set. Fix $(\boldsymbol{x}, \alpha), (\boldsymbol{y}, \beta) \in \text{epi} f$.

Case 1)

$f(\boldsymbol{x}) = \alpha < +\infty$ and $f(\boldsymbol{y}) = \beta < \infty$, $\lambda \in [0,1]$. From the convexity of epi$f$,

$$(1-\lambda)(\boldsymbol{x}, \alpha) + \lambda(\boldsymbol{y}, \beta) \in \text{epi} f.$$

Then $((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}\ ,\ (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta) \in \text{epi} f$.

From the definition of epi f,

$$(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}) = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta \geq f((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}).$$

Thus $f(\boldsymbol{x})$ is convex funtion.

Case 2) "$f(\boldsymbol{x}) = +\infty$ and $f(\boldsymbol{y}) < +\infty$, $\lambda \in [0, 1''$ or "$f(\boldsymbol{x}) < +\infty$ and $f(\boldsymbol{y}) = +\infty$, $\lambda \in [0,1]''$. From the convexity of epi f,

$$(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}) \geq f((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}).$$

Thus $f(\boldsymbol{x})$ is convex funtion.

Case 3) Same as Case 2.

□

Proof. 帰納法で示す。$k = 1$ のとき、$\lambda_1 = 1$ となり、

$$f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$$

であるので不等式を満たす。$k = 2$ のとき、$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ より、

$$f((1-\lambda_1)x_2 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda_1)f(x_2) + \lambda_1 f(x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in [0,1].$$

□

Proof. (Prop 3.3.)

(i)⇒(iii)

$(x_i, \mu_i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} (x', \mu)$ となるエピグラフの数列を考える。すなわち全ての i に対し、$\mu_i \geq f(x_i)$ となる。よって

$$\mu = \lim_{i \to +\infty} \mu_i \geq \liminf_{i \to +\infty} f(x_i) \geq \liminf_{x \to x'} f(x) \geq f(x')$$

. したがって $(x', \mu) \in \mathrm{epi}\ f$ でありエピグラフは closed である.

(iii)⇒(ii)

(i)⇒(iii) の条件条件下で、全ての i に対し $\alpha = \mu = \mu_i$ となる α を固定する。全ての i に対し、$\alpha \geq f(x_i)$ となるので、$(x_i \alpha) \in \mathrm{epi}\ f$、かつ $(x_i, \alpha) \to (x', \alpha)$.

よって、$(x', \alpha) \in \mathrm{epi}\ f$ かつ $x' \in L$.

(ii)⇒(i)

$x' \in \mathbb{R}^n$, $x_i \to x'$ となる $\{x_i\}$ を考える。

f がある x' において lower semi-continuous ではないと仮定する。すなわち、

$$\liminf_{x \to x'} f(x) < f(x')$$

となる。したがって

$$f(x_{i_j}) \leq \mu < f(x')$$

となる $\mu \in \mathbb{R}$, 部分列 $\{x_{i_j}\} \subset \{x_i\} \subset L$ が存在する。

$\{x_i\} \to x'$ かつ L は closed なので $x' \in L$. よって $f(x') \leq \mu$ に反する。

$$\liminf_{x \to x'} f(x) \geq f(x')$$

□