第四次作业

1929401206 丁誉洋

2022.6.12

题目 1: 把区间 $[0,2]$ 分为八等分，采用分点上的函数值，分别以复合梯形公式，复合 Simpson 公式和复合 Cotes 公式计算以下定积分。

$\int_0^2 (xe^{-x}+1)dx$

按照 4 位小数计算

解:

x	$f(x)=xe^{-x}+1$
0.00	1.0000
0.25	1.1947
0.50	1.3033
0.75	1.3543
1.00	1.3679
1.25	1.3581
1.50	1.3347
1.75	1.3041
2.00	1.2707

$T_8 = \frac{2}{2}\frac{1}{8}[f(0)+f(2)+2\sum\limits_{k=1}^{7} f(\frac{k}{4})] = 2.5881$

$S_4 = \frac{2}{6}\frac{1}{4}[f(0)+f(1)+2\sum\limits_{k=1}^{3} f(\frac{k}{2})+4\sum\limits_{k=1}^{4} f(\frac{2k-1}{4})] = 2.5939$

$C_2 = \frac{2}{90}\frac{1}{2}[7(f(0)+f(2))+14f(1)+12(f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{2}))+32(f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})+f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4}))] = 2.5940$

题目 2: 取步长 $h=0.1$ 用改进欧拉公式求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'+xy=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

在 $x=0.4$ 处的近似值。按照四位小数计算。

由改进欧拉公式得

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i - 0.1\times x_i y_i \\ y_{i+1} = y_i - \dfrac{h}{2}(x_i y_i + x_{i+1}\tilde{y}_{i+1}) \end{cases}$$

所以

$$
\begin{aligned}
y(0) &= 1 \\
\tilde{y}(0.1) &= 1 - 0.1 \times 0 \times 1 = 1 \\
y(0.1) &= 1 - 0.05 \times (0 \times 1 + 0.1 \times 1) = 0.995 \\
\tilde{y}(0.2) &= 0.995 - 0.1 \times 0.1 \times 0.995 = 0.9851 \\
y(0.2) &= 0.995 - 0.05 \times (0.1 \times 0.995 + 0.2 \times 0.9851) = 0.9802 \\
\tilde{y}(0.3) &= 0.9802 - 0.1 \times 0.2 \times 0.9802 = 0.9606 \\
y(0.3) &= 0.9802 - 0.05 \times (0.2 \times 0.9802 + 0.3 \times 0.9606) = 0.9560 \\
\tilde{y}(0.4) &= 0.9560 - 0.1 \times 0.3 \times 0.9560 = 0.9273 \\
y(0.4) &= 0.9560 - 0.05 \times (0.3 \times 0.9560 + 0.4 \times 0.9273) = 0.9231
\end{aligned}
$$

近似值为 $y(0.4) = 0.9231$