第三次作业

1929401206 丁誉洋

2022.5.27

题目 1: 对以下数据表分别用线性和二次拉格朗日插值多项式求 $y(0.3)$ 的近似值

x	-0.1	0.1	0.2	0.4	0.9
y	-2	1	2	7	14

解:

(1) 线性插值

选取 $x_0 = 0.2, x_1 = 0.4$，得到

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x-0.4}{0.2-0.4} \times 2 + \frac{x-0.2}{0.4-0.2} \times 7 \\ \therefore y(0.3) &\approx \frac{0.3-0.4}{0.2-0.4} \times 2 + \frac{0.3-0.2}{0.4-0.2} \times 7 \\ &\approx 4.5 \end{aligned}$$

(2) 二次插值

选取 $x_0 = 0.1, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4$，得到

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0.1-0.2)(0.1-0.4)} \times 1 + \frac{(x-0.1)(x-0.4)}{(0.2-0.1)(0.2-0.4)} \times 2 + \frac{(x-0.1)(x-0.2)}{(0.4-0.1)(0.4-0.2)} \times 7 \\ \therefore y(0.3) &\approx \frac{(0.3-0.2)(0.3-0.4)}{(0.1-0.2)(0.1-0.4)} \times 1 + \frac{(0.3-0.1)(0.3-0.4)}{(0.2-0.1)(0.2-0.4)} \times 2 + \frac{(0.3-0.1)(0.3-0.2)}{(0.4-0.1)(0.4-0.2)} \times 7 \\ &\approx 4.0 \end{aligned}$$

题目 2: 给定数据表

x	0	2	5	8
$f(x)$	-5	15	0	3

(1) 试建立相应的三次拉格朗日插值多项式

解:

(1)

由题，$x_0=0,x_1=2,x_2=5,x_3=8$，得到

$$\begin{aligned}L_3(x)=&\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(0-2)(0-5)(0-8)}\times(-5)+\frac{(x-0)(x-5)(x-8)}{(2-0)(2-5)(2-8)}\times 15\\&+\frac{(x-0)(x-2)(x-8)}{(5-0)(5-2)(5-8)}\times 0+\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(8-0)(8-2)(8-5)}\times 3\\=&\frac{1}{2}(x-5)(x^2-8x+2)\end{aligned}$$

题目 3: 给定数据表

x	0	3	5	6
$f(x)$	5	128	430	665

用三次插值函数求 $f(2)$ 的值

解:

$$\begin{aligned}N_3(2)&=f[3]+f[3,0](2-3)+f[3,0,5](2-3)(2-0)+f[3,0,5,6](2-3)(2-0)(2-5)\\&=128+41\times(-1)+22\times(-1)\times 2+1\times(-1)\times 2\times(-3)\\&=49\\\therefore f(2)&\approx N_3(2)=49\end{aligned}$$

题目 4: 设 $l_i(x)(i=0,1,\ldots,n)$ 为基本拉格朗日插值多项式，节点 $x_0,x_1,...,x_n$ 互异，证明

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k \equiv x^k \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

解:

等式左边 $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k$ 可等价转化为对 $(x_0,x_0^k),(x_1,x_1^k),\ldots,(x_n,x_n^k)$ 的差值结果，

即 $L_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x)y_i$,

容易看出 $L_n(x)=x^k$ 是一种可行的差值结果

因为 $k\le n$，根据定理 4.1，即：在 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上满足插值条件 $P(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\ldots,n)$ 的次数不超过 n 次的插值多项式 $P_n(x)$ 存在且惟一。

所以 $L_n(x)=x^k$ 存在且唯一

所以

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k \equiv x^k \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

题目 5: 设 $f(x)=2x^4-4x^2+4x-1$，求

(1) $f[3^0,3^1,3^2,3^3,3^4]$；

(2) $f[4^1,4^2,4^3,4^4,4^5,4^6]$；

(3) $f[0,1,2,3]$。

解:

(1)

由题

$$\begin{aligned}
&\because N_4(x) = N_3(x) + f[3^0,3^1,3^2,3^3,3^4](x-3^0)(x-3^1)(x-3^2)(x-3^3) \\
&\quad N_4(x) = f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 4x - 1 \\
&\therefore N_3(x) + f[3^0,3^1,3^2,3^3,3^4](x-3^0)(x-3^1)(x-3^2)(x-3^3) = 2x^4 - 4x^2 + 4x - 1
\end{aligned}$$

两边 x^4 的系数分别为 $f[3^0,3^1,3^2,3^3,3^4]$ 和 2

所以 $f[3^0,3^1,3^2,3^3,3^4] = 2$

(2)

$N_4(x)$ 为 4 次多项式，其 6 阶均差函数 $f[4^1,4^2,4^3,4^4,4^5,4^6]$，因为 $6>4$，所以均差为 0

即 $f[4^1,4^2,4^3,4^4,4^5,4^6] = 0$

(3)

$$\begin{aligned}
&f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 23, f(3) = 137 \\
&f[0,1,2] = \frac{f[0,2]-f[0,1]}{2-1} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} - \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 12 - 2 = 10 \\
&f[0,1,3] = \frac{f[0,3]-f[0,1]}{3-1} = \frac{1}{2}(\frac{f(3)-f(0)}{3-0} - \frac{f(1)-f(0)}{1-0}) = \frac{1}{2}(46-2) = 22 \\
&f[0,1,2,3] = \frac{f[0,1,3]-f[0,1,2]}{3-2} = 12
\end{aligned}$$

题目 6: 试给出以下数据最合理的拟合曲线。

x	0	2	4	6	8
y	-0.2	10.1	19.9	30.1	40.1

解:

描点，确定 $m=1$。

令 $P(x) = a_0 + a_1 x$，计算得

$S_0 = 5, S_1 = 20, S_2 = 120$

$T_0 = 100, T_1 = 601.2$

从而建立法方程组

$$\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 601.2 \end{pmatrix}$$

解得 $a_0 = -0.12, a_1 = 5.03$

故 $P(x) = -0.12 + 5.03x$

题目 7: 用最小二乘法求形如 $y = ax + bx^2$ 的多项式，使与下列数据拟合（得数保留四位小数）。

x	-3	-1	0	2	4
y	-8.2	-9.2	0	38.1	102.1

解:

$\because S_2 = 30, S_3 = 44, S_4 = 354, T_1 = 518.4, T_2 = 1703$

$\therefore$ 相应的方程组为

$$\begin{pmatrix} 30 & 44 \\ 44 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 518.4 \\ 1703 \end{pmatrix}$$

解得 $a \approx 12.5036, b \approx 3.2566$

$\therefore$ 所求拟合多项式为 $y = 12.5036x + 3.2566x^2$

题目 8: 测得单摆振动的振幅随时间 t 变化的数据表如下，试用指数拟合求解衰减变化规律 $y = ae^{bt}$（得数保留三位小数）。

t	0	1	2	3	4	5	6
y	9.00	4.47	2.22	1.10	0.55	0.27	0.13

解:

$y = ae^{bt} \Longrightarrow z = \ln y = \ln a + bt$

首先根据 y_i 的值算出 $z_i = \ln y_i \quad (t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

t	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y$	2.1972	1.4974	0.7975	0.0953	-0.5978	-1.3093	-2.0402

令 $z(t) = a_0 + a_1 t$ 对数据 (t_i, z_i) 进行拟合

$S_0 = 7, S_1 = 21, S_2 = 91, T_0 = 0.6401, T_1 = -17.8006$

建立法方程组

$$\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6401 \\ -17.8006 \end{pmatrix}$$

解出 $a_0 = 2.204, a_1 = -0.704$

所以 $z(t) = 2.204 - 0.704t$，$y(t) = e^{z(t)} = 9.064e^{-0.704t}$

题目 9: 试求以下超定方程组的最小二乘解（得数保留三位小数）。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 18 & -10 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}, A^T b = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

所以法方程为

$$\begin{pmatrix} 18 & -10 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

解得 $x_1 = -2.808, x_2 = -4.154$