第一次作业

1929401206 丁誉洋

2022.4.4

题目 1: 对于方程 $f(x)=x^3-7.84x-7.68=0$，取步长 $h=1$ 搜索正根所在区间，并对求出的含根区间估计用二分法求正根时所需的步数（精度要求为 $\epsilon=10^{-4}$）

解:

因为 $f(0)=-7.68, f(1)=-14.52, f(2)=-15.36, f(3)=-4.2, f(4)=24.96$ 故可取初始区间 $[a_0,b_0]=[3,4]$

此时，$K=[\frac{\lg(4-3)+4}{\lg(2)}]=[13.29]=13$

所需步数为 13

题目 2: 用二分法求解方程 $f(x)=x^2-2\sin x-2=0$ 在 $[1.5,2]$ 内的根（精度要求 $\epsilon=10^{-3}$）。

解:

步数 $K=[\frac{\lg(2-1.5)+3}{\lg(2)}]=[8.97]=8$

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	1.5	2.0	1.75	-
1	1.75	2.0	1.875	-
2	1.875	2.0	1.9375	-
3	1.9375	2.0	1.9688	+
4	1.9375	1.9688	1.9531	-
5	1.9531	1.9688	1.9609	-
6	1.9609	1.9688	1.9648	+
7	1.9609	1.9648	1.9629	+
8	1.9609	1.9629	1.9619	+

所以 $\widetilde{x}=\frac{(a_8+b_8)}{2}=1.962$ 即为所求近似值

题目 3 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的一个根，将方程改写为下列等价形式，并建立相应的迭代格式。

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$，迭代格式为 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$

(2) $x^3=1+x^2$，迭代格式为 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$

(3) $x^2=\frac{1}{x-1}$，迭代格式为 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

讨论每种形式的收敛性，并用格式 (2) 求出精度为 10^{-2} 的根的近似值。

解:

(1)

因为 $g(x)=1+\frac{1}{x^2}, g'(x)=-\frac{2}{x^3}, |g'(1.5)|=0.59<1$

所以取 $x_0=1.5$ 该迭代形式收敛

(2)

因为 $g(x)=\sqrt[3]{1+x_k^2}, g'(x)=\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}, |g'(1.5)|=0.46<1$

所以取 $x_0=1.5$ 该迭代形式收敛，迭代结果如下

k	x_k
1	1.481
2	1.473
3	1.469
4	1.467
5	1.466
6	1.465
7	1.465

所以近似值为 1.47

(3)

因为 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}, g'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}, |g'(1.5)|=1.42>1$

所以取 $x_0=1.5$ 该迭代形式不收敛

问题 4 给定代数方程 $f(x)=x^3+2x-3=0$

(1) 取 $x_0=0$ 用牛顿迭代法球其正根 $x^*=1$ 的近似值（精度要求为 $\epsilon=10^{-2}$）；

解 @

(1)

$f(x)=x^3+2x-3, f'(x)=3x^2+2$，所以该方程的牛顿迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3+2x_k-3}{3x_k^2+2}$

取 $x_0=0$，计算结果如下

k	x_k
1	1.5
2	1.114
3	1.007
4	1.000
5	1.000

所以近似值为 1.00

问题 5 给定代数方程 $x^2-0.1x-3.06=0$，取 $x_{-1}=1, x_0=2$，用弦截法求解正根。$\epsilon=10^{-3}$

解:

对于该方程的弦截法公式为

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 0.1x_k - 3.06}{(x_k^2 - 0.1x_k - 3.06) - (x_{k-1}^2 - 0.1x_{k-1} - 3.06)}(x_k - x_{k-1})$
取 $x_{-1} = 1, x_0 = 2$，结果见下表

k	x_k
1	1.7448
2	1.7970
3	1.8000
4	1.8000

所以近似值为 1.800