幾何光學

朱士維
台大物理系

大綱

3-1 幾何光學的概念

3-2 如何用數學描述一道光線的前進？

3-3 以光線追蹤法看球面成像 – 矩陣幾何光學

3-4 以矩陣幾何光學分析薄透鏡成像

3-5 厚透鏡與反射鏡

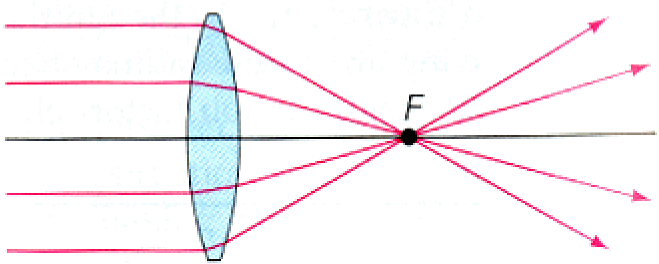
3-1 幾何光學的概念

幾何光學 (geometrical optics)

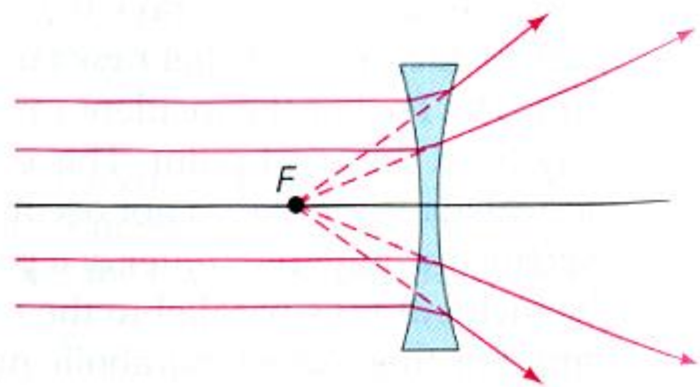
- 適用於當波長遠小於光學系統的尺度時
  - 忽略光的波長，以「光線」分析光傳播特性
  - 又稱為「射線光學」(ray optics)
  - 例如一般成像系統（相機，眼睛等）
- 當所分析的尺度接近光波長時，則須考慮光的波動特性，稱之為波動光學
  - 例如光學顯微鏡的焦點
  - 在光學導論（二）中會提到

光學透鏡

- 可讓光偏折並成像的元件
  - 將穿透的能量在空間上重新分配
  - 是一個我們每天都在用的光學元件
    - 眼睛



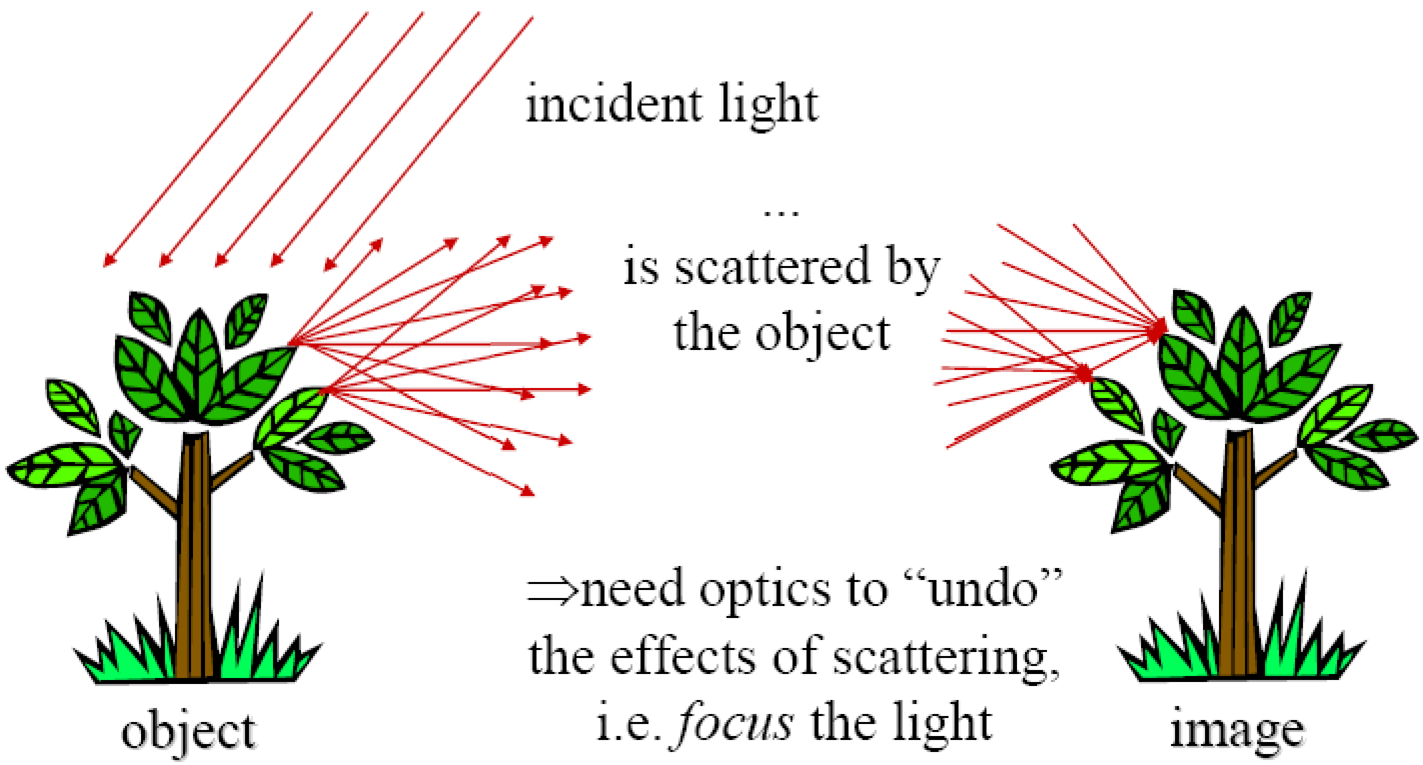
凸透鏡
光線匯聚



凹透鏡
光線發散

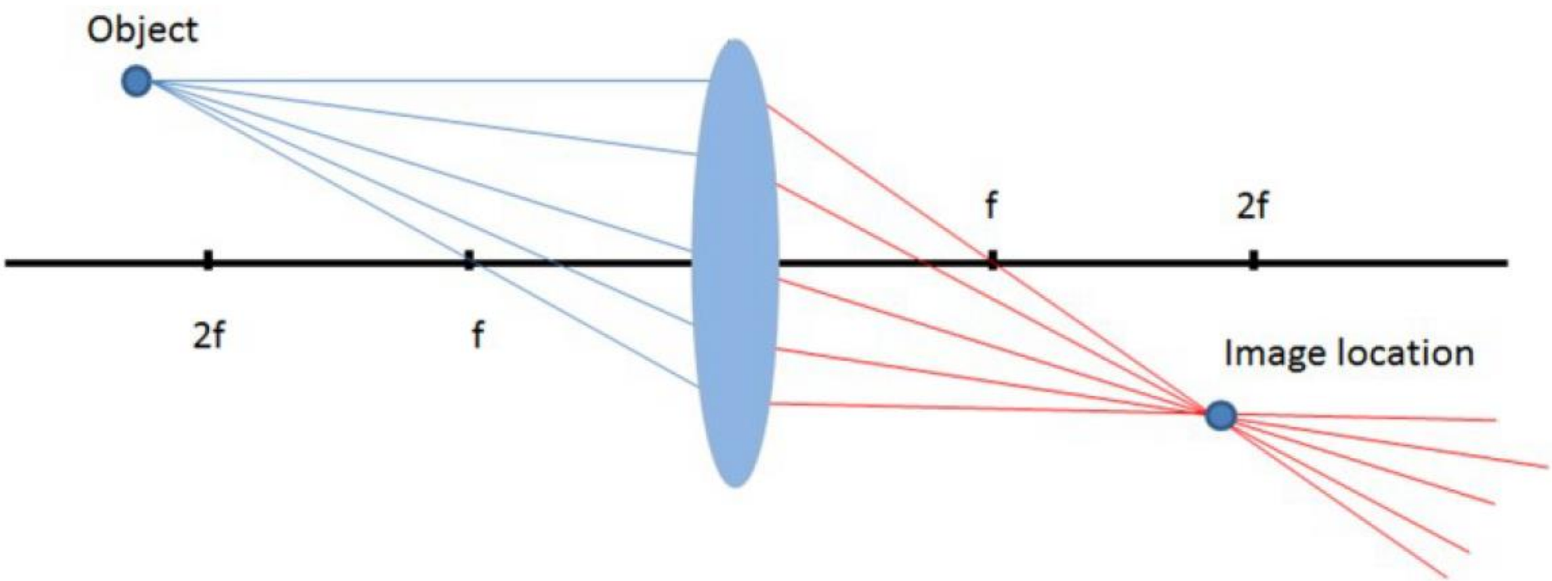
透鏡的成像概念

- 入射光在物體上散射
- 透鏡就像進行了相反的作用，把物體上散射的光重新匯聚到同一個點上 ➔ 成像

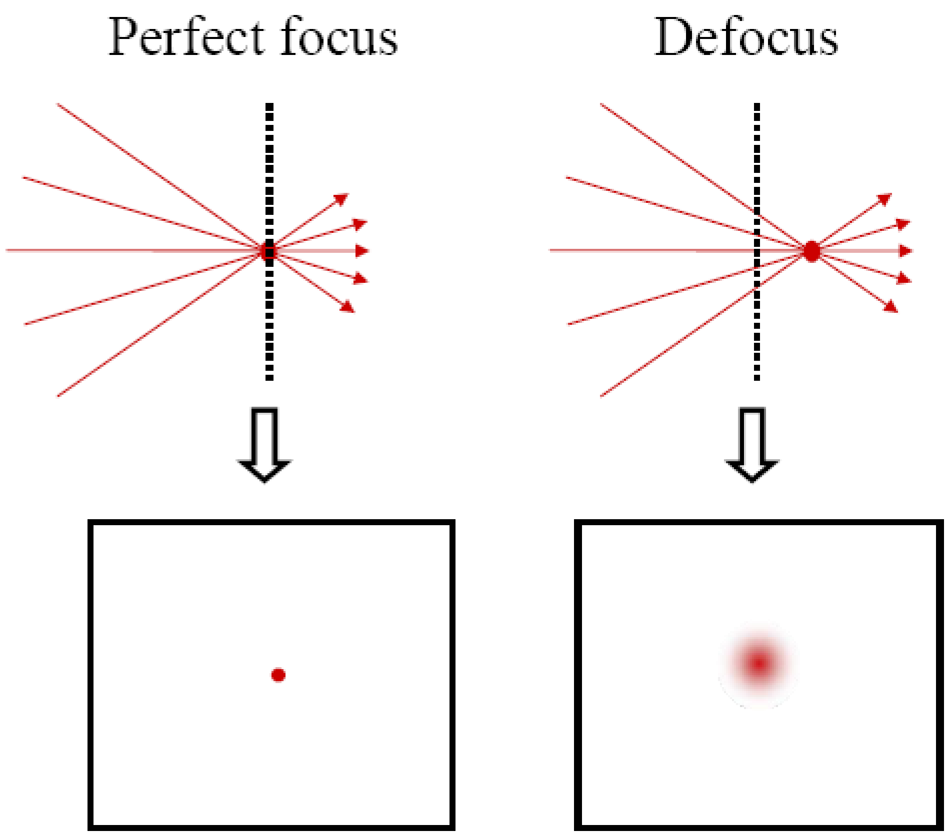


理想透鏡

- 由點光源發出不同方向的光經過透鏡會匯聚到同一點
  - 成像與實物方向會上下左右相反
  - 但真實的成像系統並無法匯聚到一無限小點



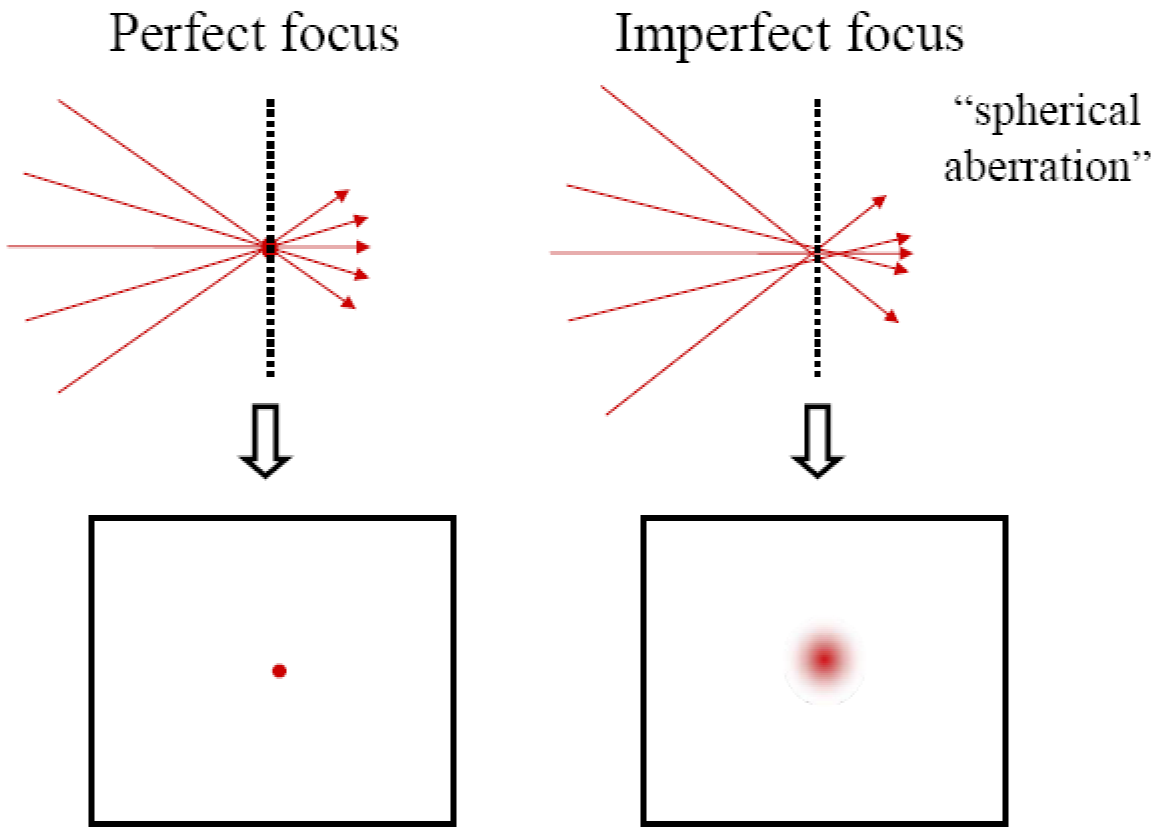
不完美的成像 – 失焦 (defocus)



- 光有匯聚到同一點，但此點不在成像面上
- 此即近視與遠視的成因

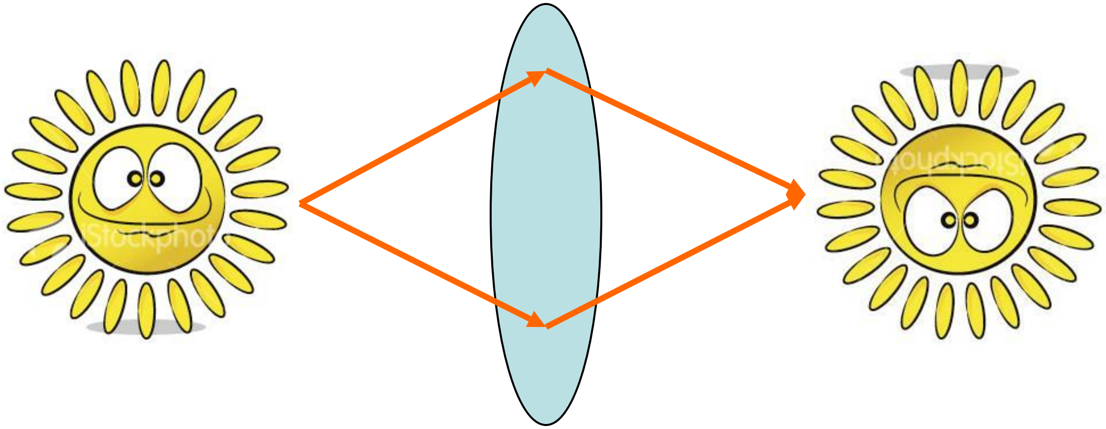
不完美的成像 – 像差 (aberration)

- 不同角度的光無法匯聚到同一點
- 影像變模糊



概念問題

- 請問當凸透鏡成實像投影在屏幕上時，若將透鏡的右半部遮起來，影像會
  1. 右半邊消失
  2. 左半邊消失
  3. 整個影像都消失
  4. 右半邊變暗
  5. 左半邊變暗
  6. 整個影像變暗

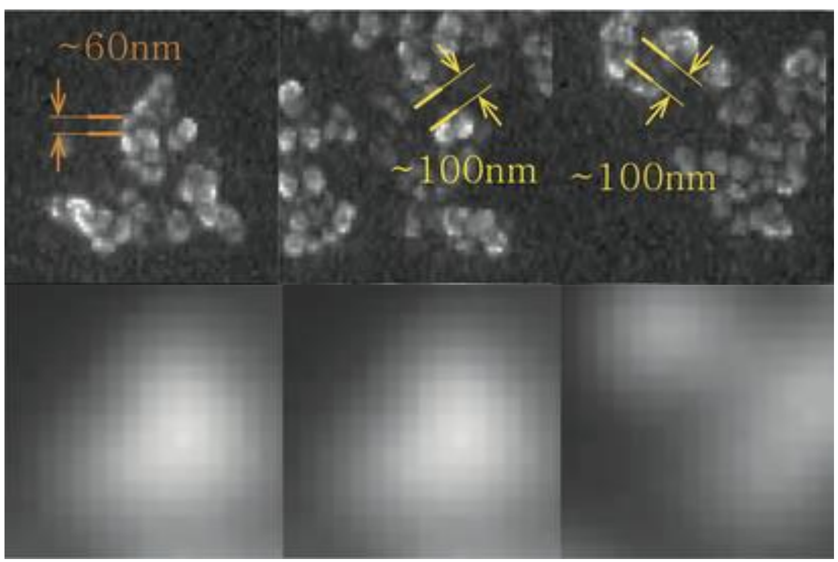


完美的成像，不完美的焦點
– 繞射 (diffraction)

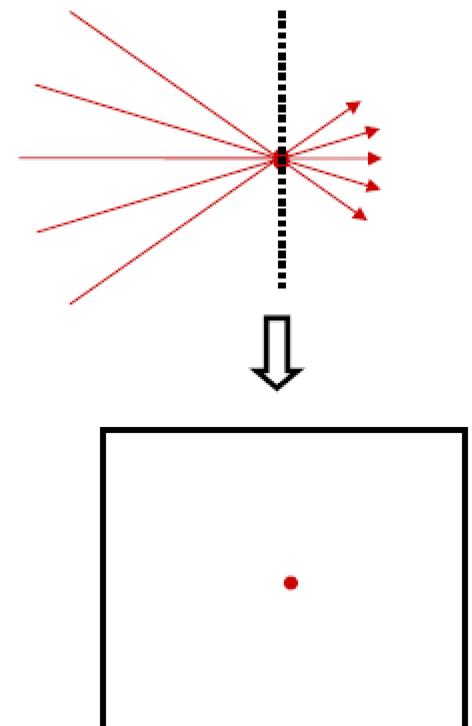
- 即使是完美的聚焦，其焦點也是有限大小
- 影像變模糊

電子顯微鏡

光學顯微鏡



Perfect focus



http://www.nature.com/srep/2013/130625/srep02075/full/srep02075.html

National Taiwan University

在目前的課程中

- 基於幾何光學加上近軸近似，我們暫時先將光學系統的聚焦視為完美
  - 失焦只需調整成像面位置即可
- 為何成像焦點並不完美？
  - 像差：需要非近軸近似（第六講）
  - 繞射：需要波動光學（下一期課程）

何謂近軸近似？

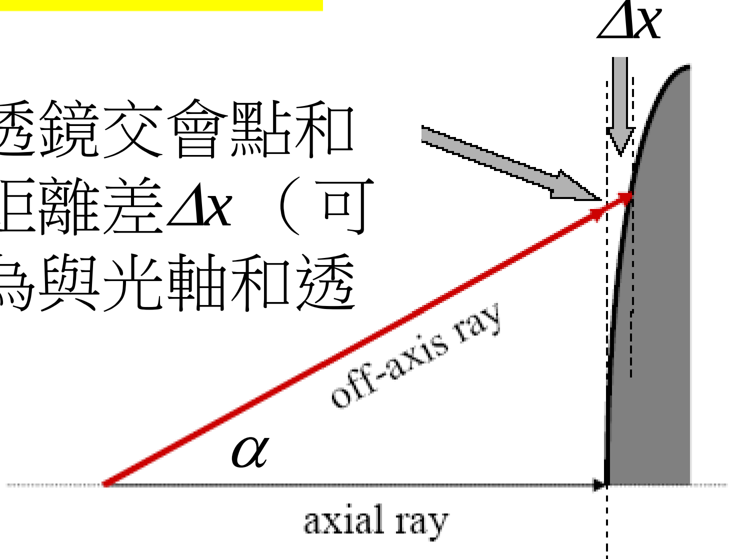
- 光軸：透鏡入射面上圓柱對稱的中心軸
  - 完美的對光：入射光線平行且對稱於光軸
  - 近軸近似：入射光線很靠近光軸
    1. 夾角很小：可用下列近似方程式來處理角度α

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha$$

$$\cos\alpha \approx 1$$

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\tfrac{1}{2}\alpha$$

    2. 距離很近：可忽略離軸光與透鏡交會點和光軸與透鏡交會點間的橫向距離差Δx（可將離軸光開始折射的位置視為與光軸和透鏡交會處同一位置）



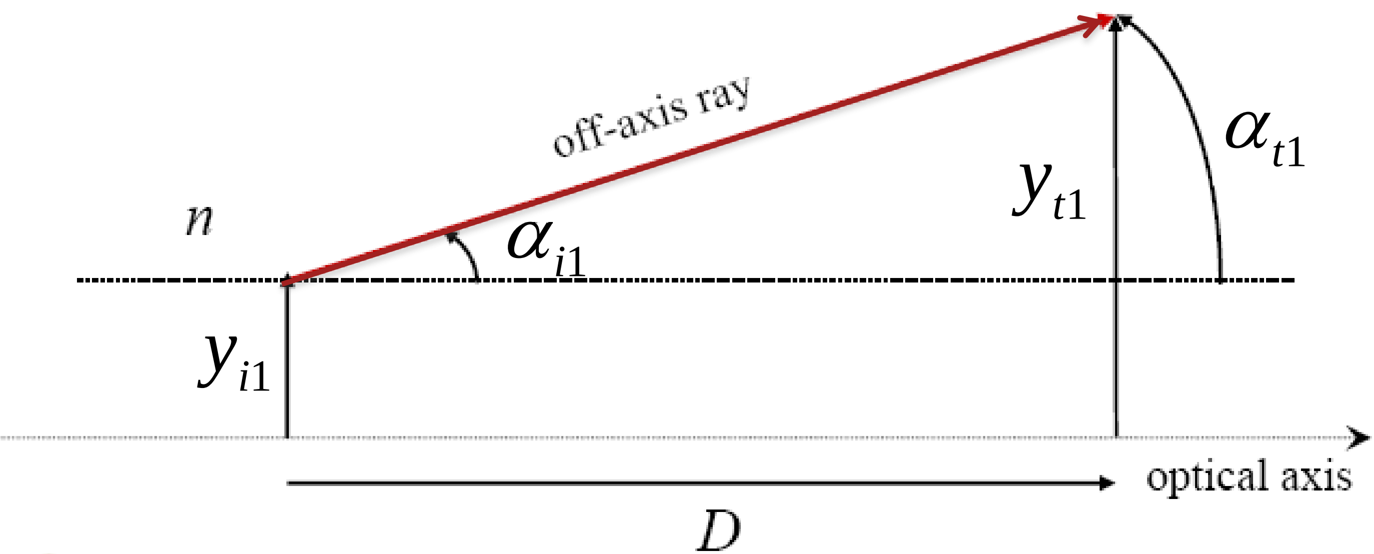
隨堂測驗

- 請問造成近視會看不清楚的原因是
  1. 失焦：視網膜的位置不在成像焦點上
  2. 像差：角膜和水晶體的成像不完美
  3. 繞射：角膜和水晶體的聚焦效果受繞射影響，無法聚焦到更小的點
  4. 其他

3-2 如何用數學描述一道光線的前進？

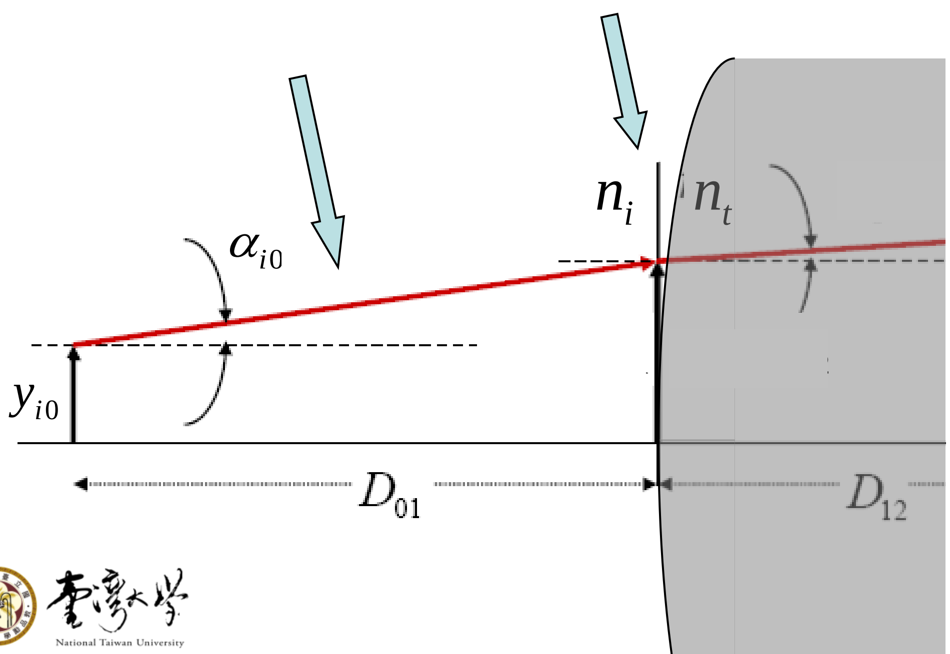
如何描述一道「光線」？

- 請問，若要描述一道光線，需要哪些物理參數的組合？
  - 光線離光軸的高度 y
  - 光線前進的角度 α



如何描述「光線」的行進？

- 光線追蹤法
  - 將 (y, α) 看成一組座標
  - 在均勻介質中，y 變 α 不變
  - 在產生折射界面，α 變 y 不變



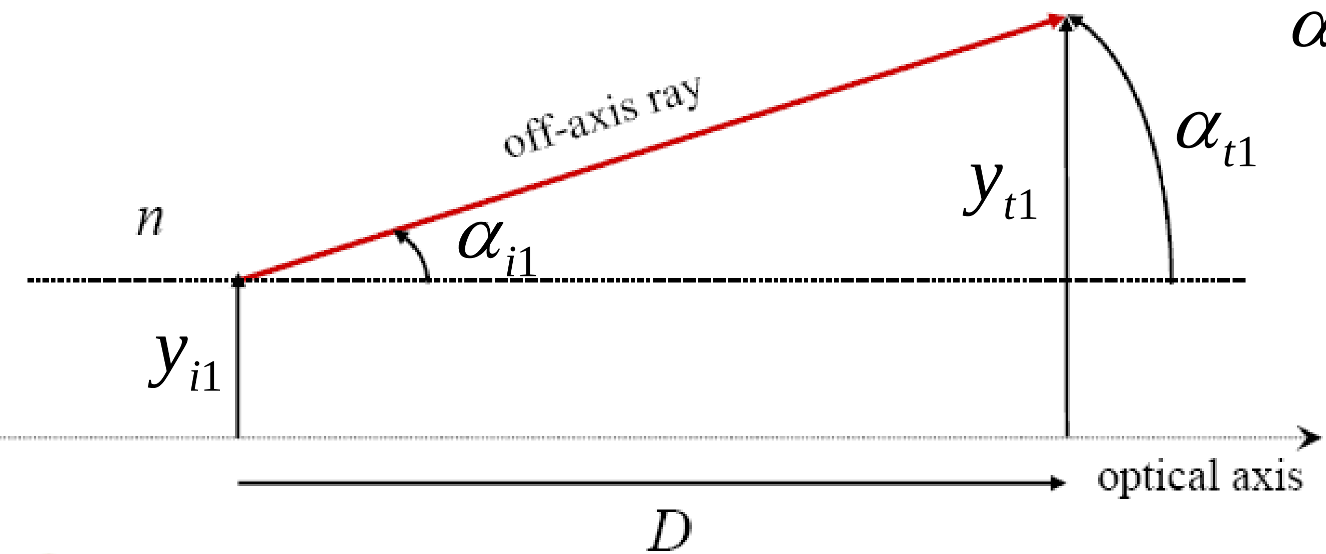
例一：光線在均勻介質中傳播

- 傳播距離為D

近軸近似 $\tan\alpha \approx \alpha$

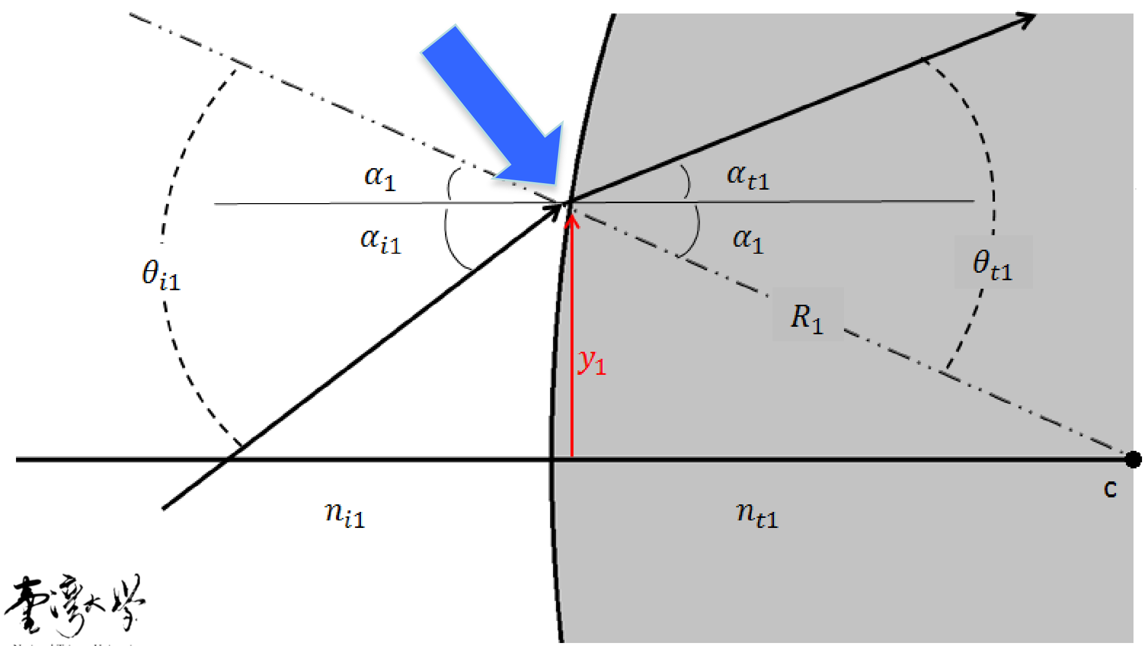
$$\begin{cases} y_{t1} = y_{i1} + D\alpha_{i1} \\ \alpha_{t1} = \alpha_{i1} \end{cases}$$

y_{i1}: 入射光線高度
α_{i1}:入射光線角度
y_{t1}: 出射光線高度
α_{t1}:出射光線角度



例二：光線在球面折射

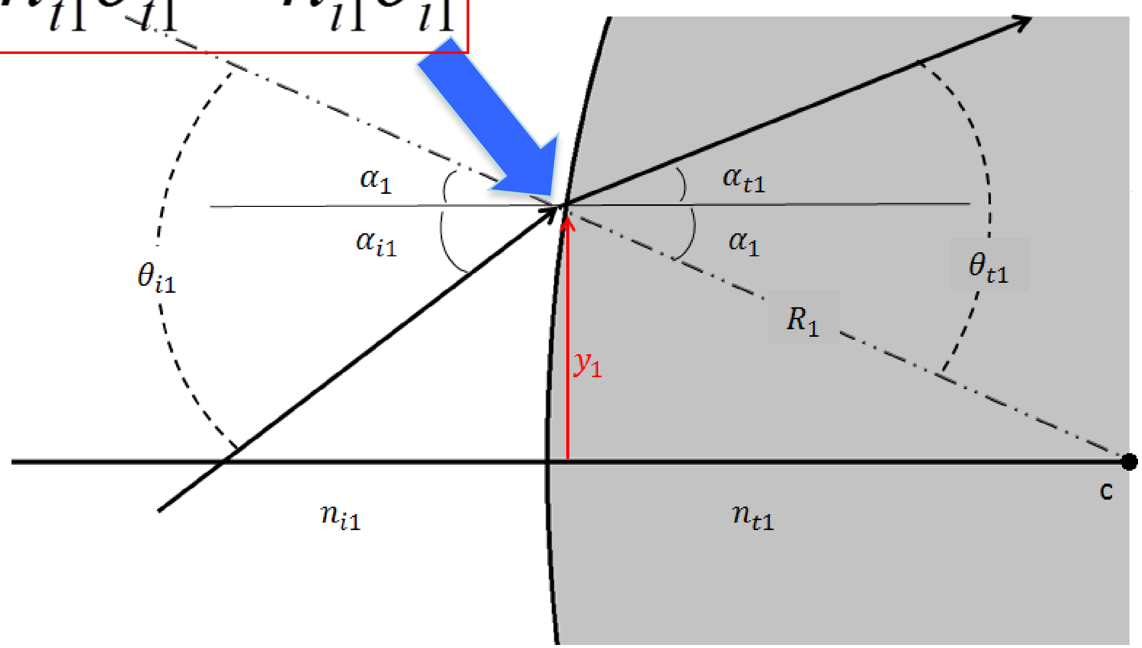
- 在折射點上
  - 光的高度不會改變 $y_{t1} = y_{i1}$
  - 光的角度會按照斯涅爾定律轉變 $\boxed{n_{t1}\theta_{t1} = n_{i1}\theta_{i1}}$



例二：光線在球面折射

- 入射角與反射角取決於法線角度
- 法線角度和光的入射點高度有關
- 該如何計算角度與高度的關係？

$$n_{t1}\theta_{t1} = n_{i1}\theta_{i1}$$



例二：光線在球面折射

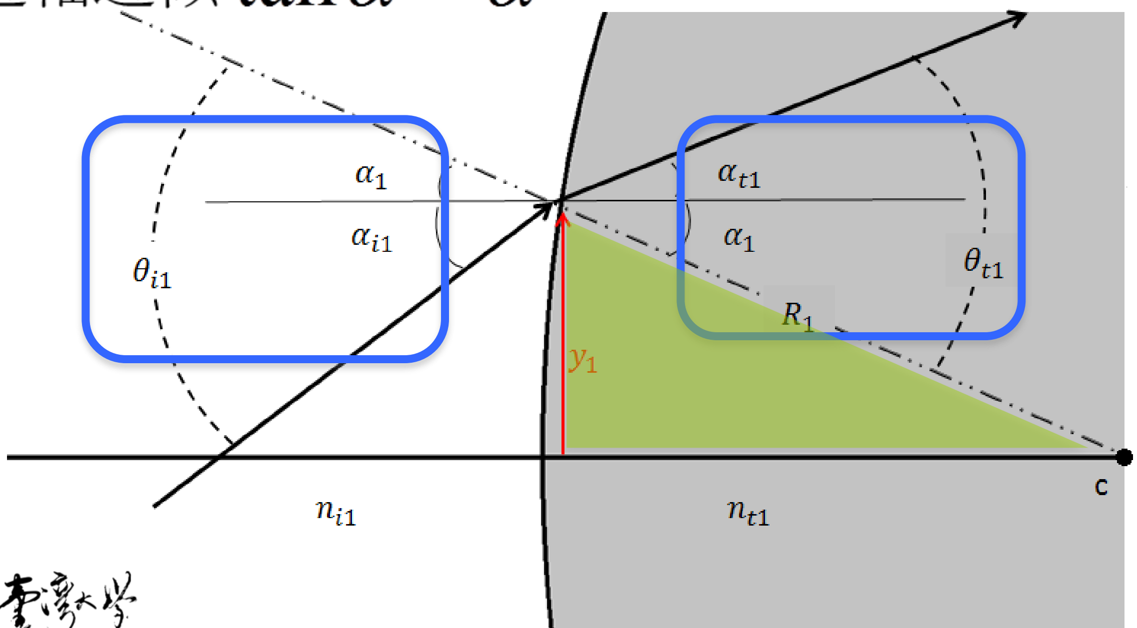
聰明的解法

$$\boxed{n_{t1}\theta_{t1} = n_{i1}\theta_{i1}}$$

$$\underline{n_{t1}\left(\alpha_{t1}+\alpha_{1}\right)} = \underline{n_{i1}\left(\alpha_{i1}+\alpha_{1}\right)} \Rightarrow n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \frac{\left(n_{t1}-n_{i1}\right)}{R_1} y_{i1}$$

$\alpha_1 \approx \underline{y_1 / R_1}$ R是球面的曲率半徑

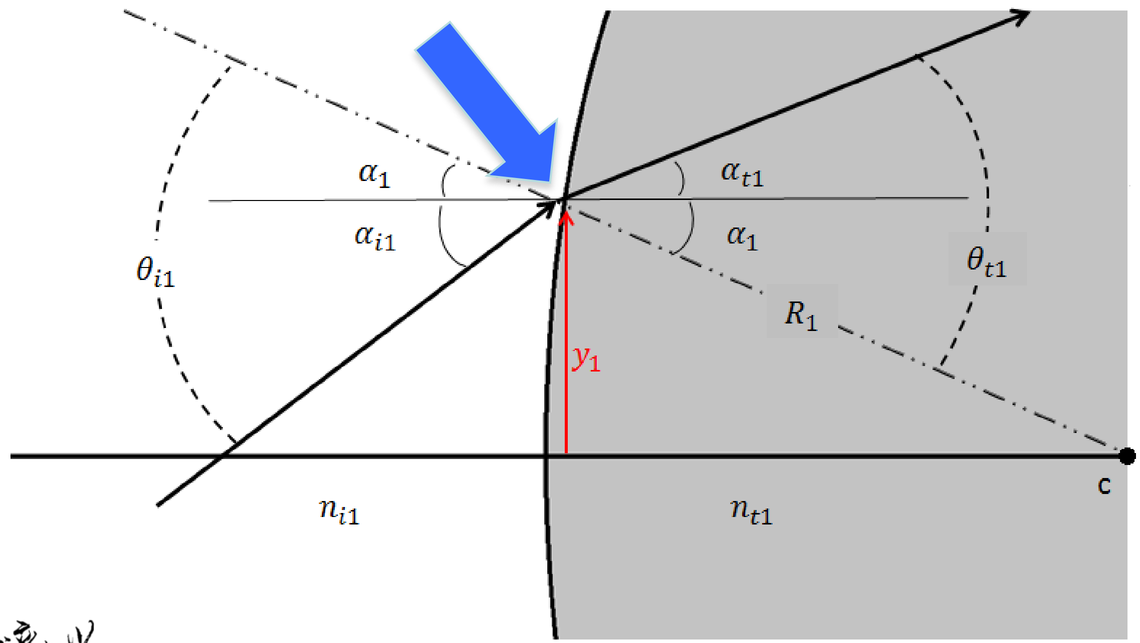
近軸近似 $\tan\alpha \approx \alpha$



例二：光線在球面折射

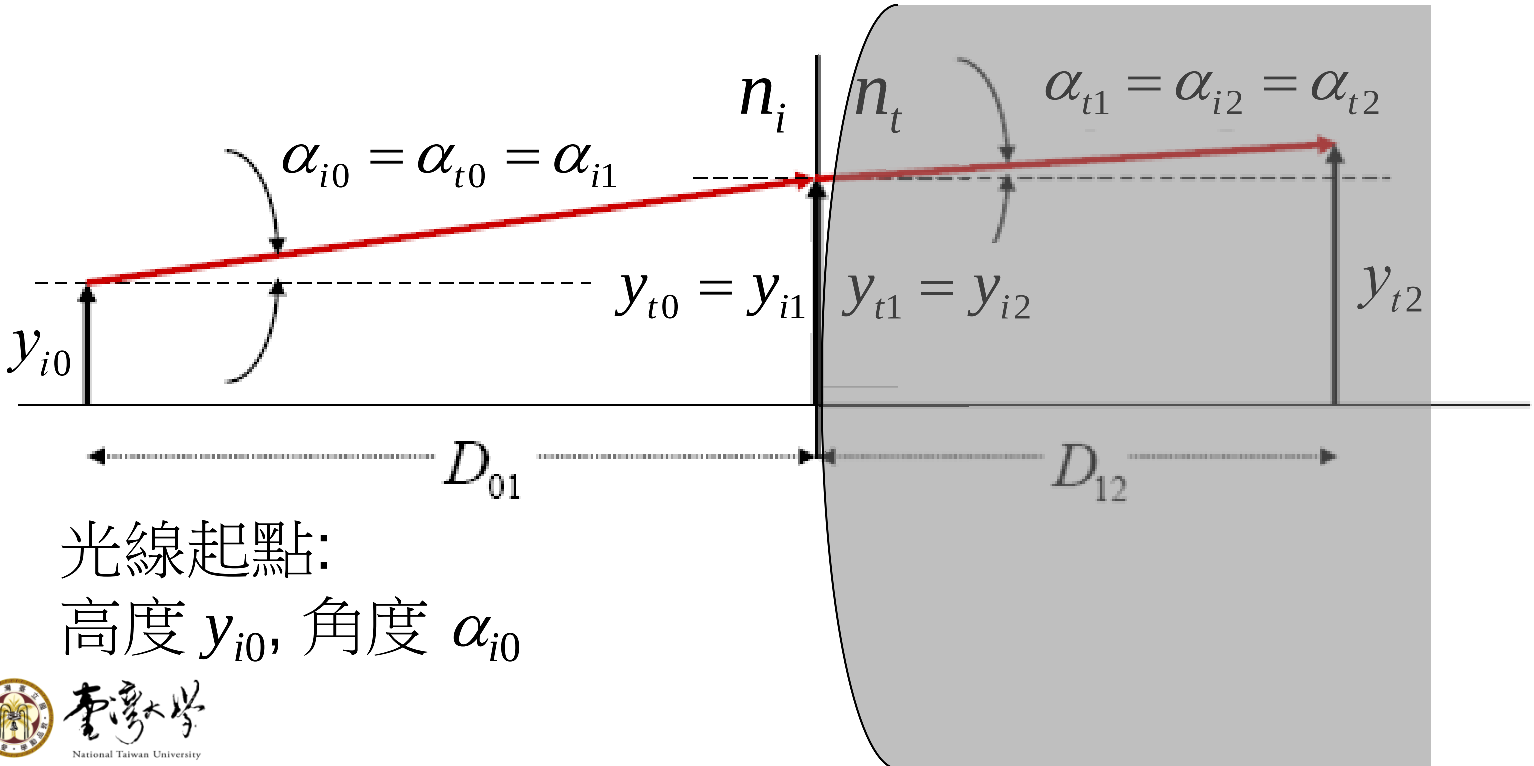
$$\begin{cases} y_{t1} = y_{i1} & \text{出射高度與入射高度的關係} \\ n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \dfrac{(n_{t1} - n_{i1})}{R_1} y_{i1} & \end{cases}$$

出射角度與入射角度的關係，但和高度也有關



例三：光線經過球面聚焦

1. 空氣中傳播D_{01}距離，y 變 α 不變
2. 界面折射，α 變 y 不變
3. 介質中傳播D_{12}距離，y 變 α 不變



光線起點:
高度 y_{i0}, 角度 α_{i0}

例三：光線經過球面聚焦

1. 空氣中傳播D_{01}:
$$\begin{cases} y_{t0} = y_{i0} + D_{01}\alpha_{i0} \\ \alpha_{t0} = \alpha_{i0} \end{cases}$$

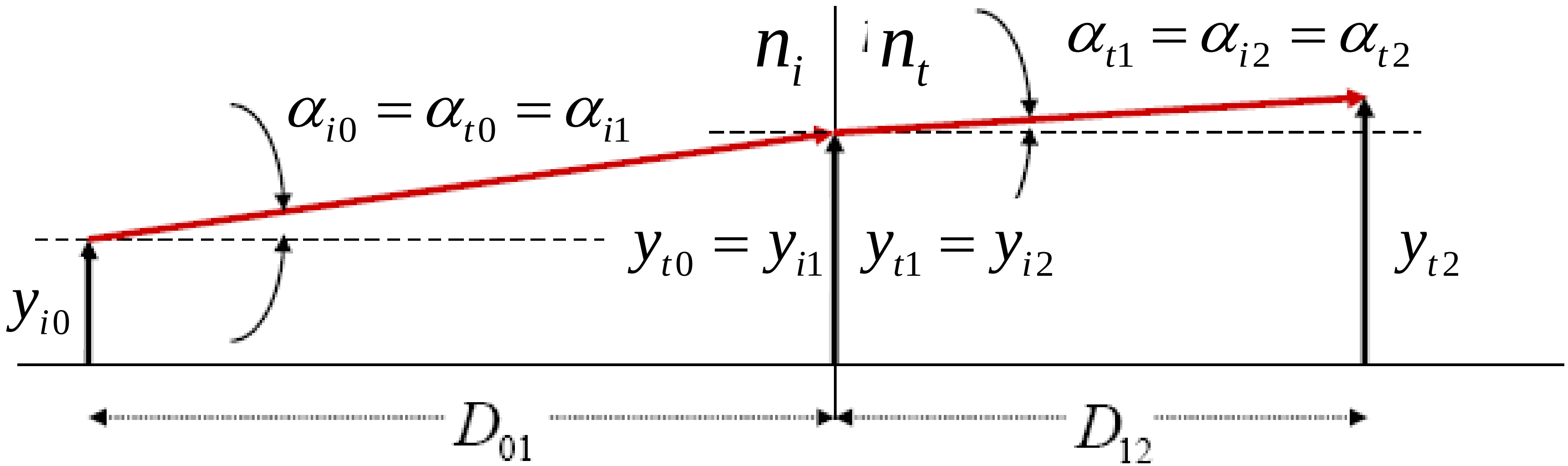
2. 界面折射:
$$\begin{cases} y_{t1} = y_{i1} \\ n_t\alpha_{t1} = n_i\alpha_{i1} - \dfrac{(n_t - n_i)}{R_1} y_{i1} \end{cases}$$

3. 介質中傳播D_{12}:
$$\begin{cases} y_{t2} = y_{i2} + D_{12}\alpha_{i2} \\ \alpha_{t2} = \alpha_{i2} \end{cases}$$

三組方程式結合，可求得最後的光線高度與角度

➔ <u>光線追蹤法</u>

例三：光線經過球面聚焦



$$
\begin{cases}
y_{t2} = \left[\dfrac{(n_i - n_t)D_{12}}{n_t R} + 1\right] y_{i0} + \left[D_{01} + \dfrac{n_i}{n_t} D_{12} + \dfrac{(n_i - n_t)D_{01}D_{12}}{n_t R}\right]\alpha_{i0} \\
\alpha_{t2} = \left(\dfrac{n_i - n_t}{n_t R}\right) y_{i0} + \left[\dfrac{n_i}{n_t} + \dfrac{(n_i - n_t)D_{01}}{n_t R}\right]\alpha_{i0}
\end{cases}
$$

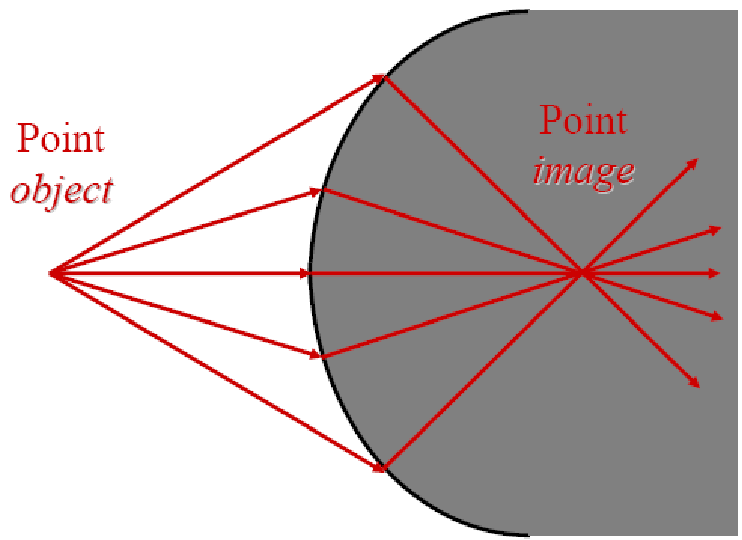
隨堂測驗

- 請問下列何者「不」正確
  1. 光在空氣中傳播時，角度不會改變
  2. 光在玻璃中傳播時，高度不會改變
  3. 光在空氣玻璃界面折射，高度不會改變
  4. 光在空氣玻璃界面折射，角度改變滿足斯涅爾定律。

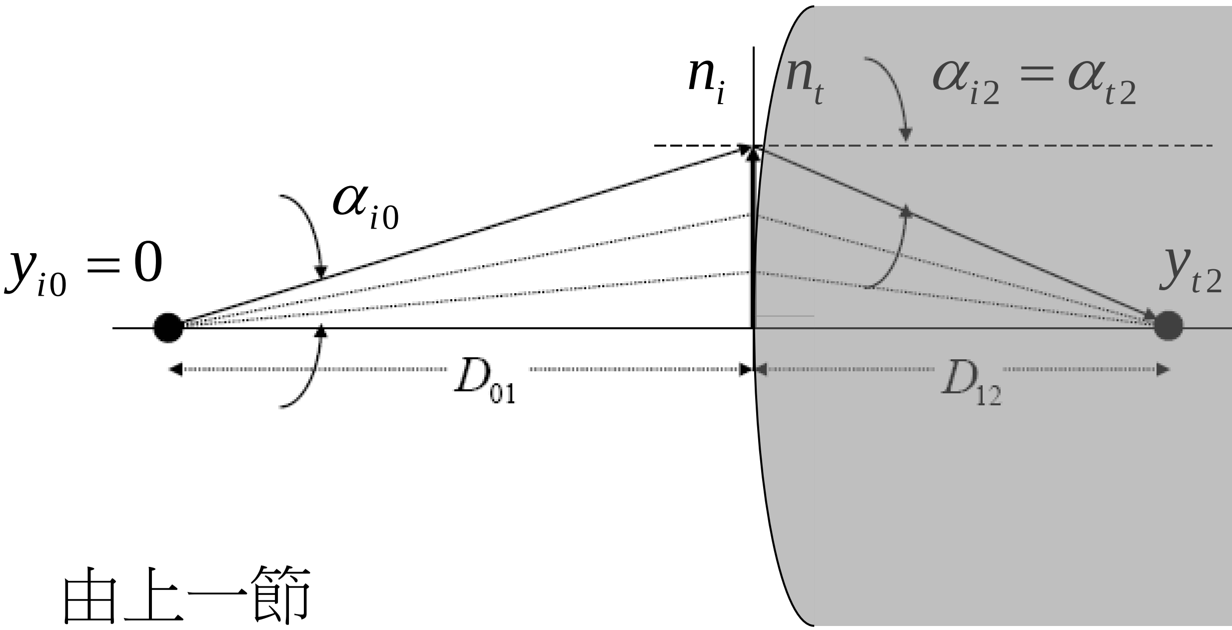
3-3 以光線追蹤法看球面成像
– 矩陣幾何光學

以光線追蹤法看球面成像

- 說了這麼多數學，光線追蹤法到底可以告訴我什麼？
- 例如，如果在球面前面有一個點光源，要如何求出這個點光源成像的位置？



球面折射成像（物在光軸上）



成像的意義：所有由 y_{i0} 發出來的光線不論角度為何，都能會聚在 y_{t2} 形成聚焦點。

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial y_{t2}}{\partial \alpha_{i0}} = 0}$$

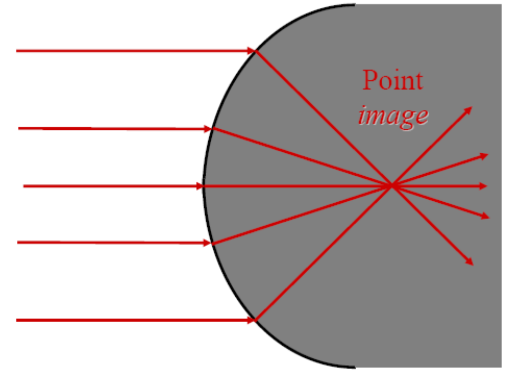
由上一節

$$\left(y_{t2} = [\ldots] y_{i0} + \left[D_{01} + \frac{n_i}{n_t} D_{12} + \frac{(n_i - n_t) D_{01} D_{12}}{n_t R} \right] \alpha_{i0} \right)$$

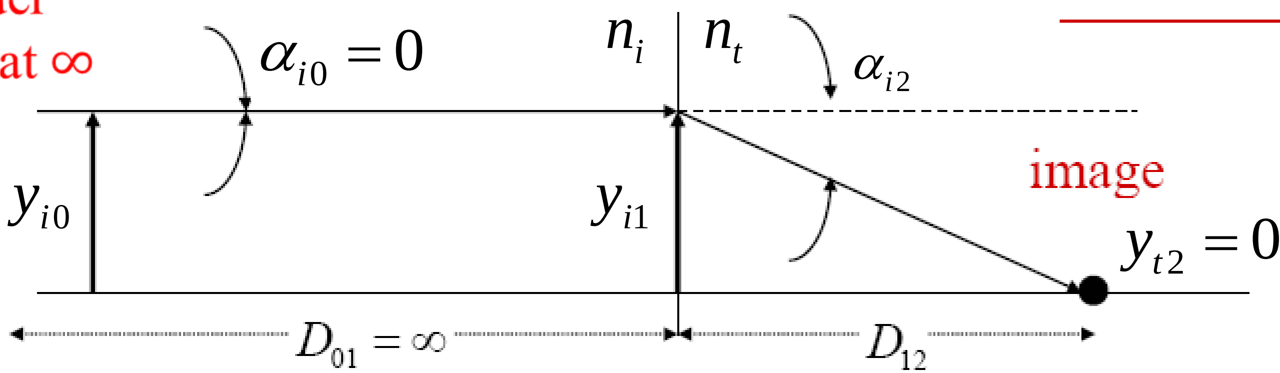
$$\Rightarrow \frac{n_t}{D_{12}} + \frac{n_i}{D_{01}} = \frac{n_t - n_i}{R}$$

像距　物距　球面曲率半徑

平行光通過球面聚焦



Consider
object at ∞



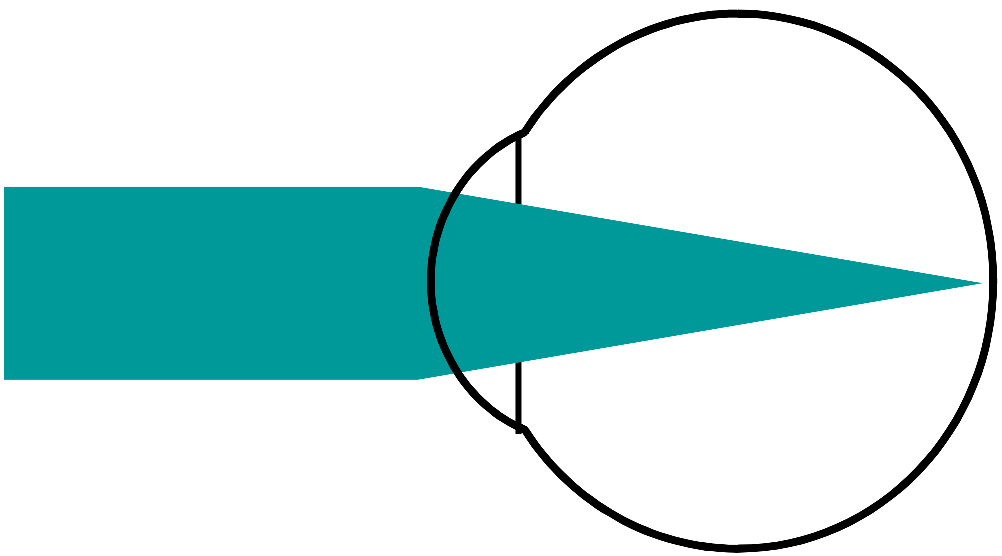
$$\frac{n_t}{D_{12}} = \frac{n_t - n_i}{R} \Rightarrow D_{12} = \frac{n_t R}{n_t - n_i} \equiv f$$ 球面的等效焦距

$$\text{屈光力 P} = \boxed{\frac{1}{\text{focal length in air}} = \frac{\text{refractive index}}{\text{focal length}} = \frac{n_t}{f} = \frac{n_t - n_i}{R}}$$

[單位: 屈光度
diopter D, 1D = 1 m^{-1}]

球面聚焦成像

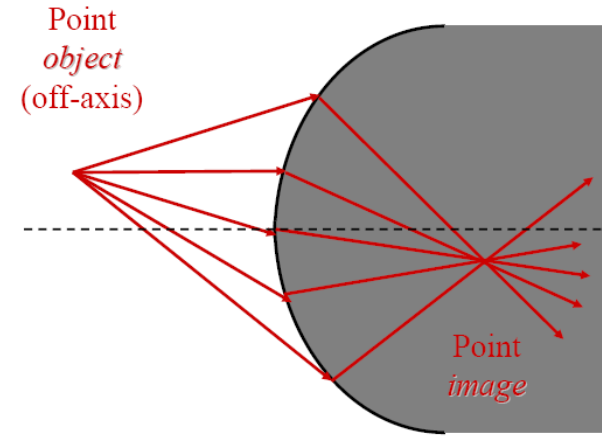
- 生活中有看過球面聚焦成像的例子嗎？
- 我們的眼睛就是！！

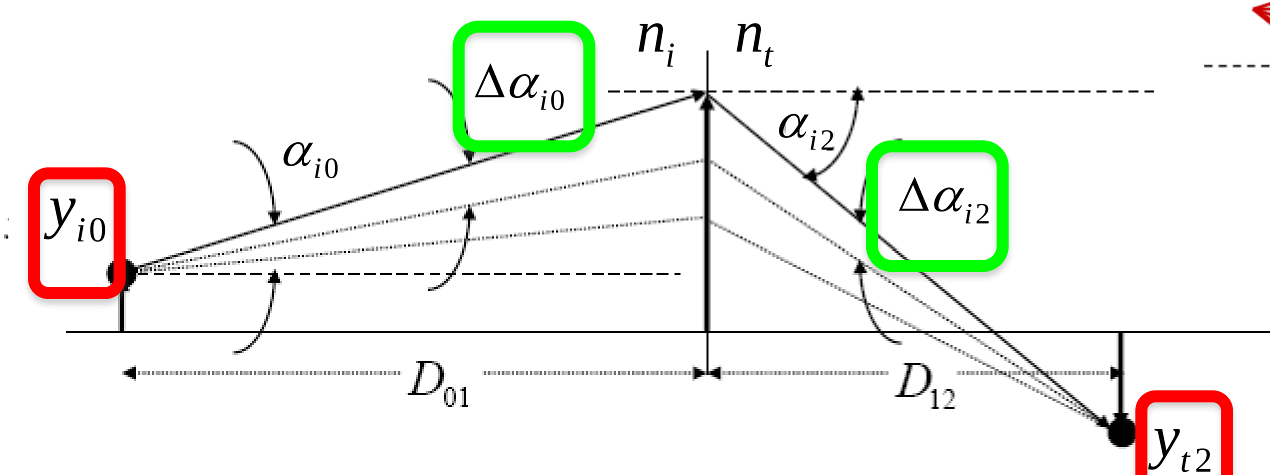


Diopter (屈光度) vs. 近視度數

- 近視度數/100 ＝ 屈光度
- 近視100度意即需要一個焦距1 m的透鏡來校正
  - 猜猜看是凸透鏡或是凹透鏡？
  - （解答在下一講）

球面折射成像（物在光軸外）

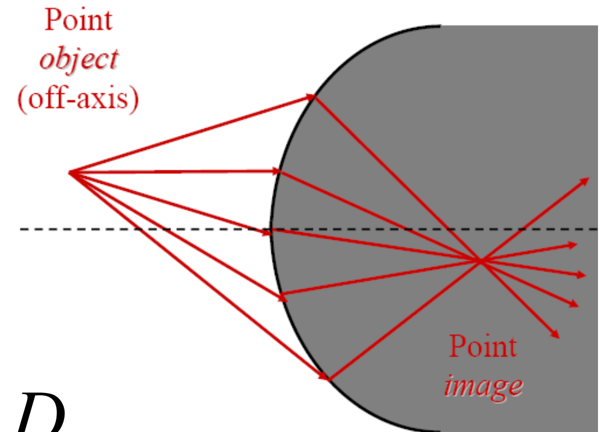




- 成像條件同上 $\dfrac{\partial y_{t2}}{\partial \alpha_{i0}} = 0 \Rightarrow \dfrac{n_t}{D_{12}} + \dfrac{n_i}{D_{01}} = \dfrac{n_t - n_i}{R}$
- 由上一節例三的式子，可求出放大率

$$\begin{cases} y_{t2} = \left[\dfrac{(n_i - n_t)D_{12}}{n_t R} + 1 \right] y_{i0} + \left[D_{01} + \dfrac{n_i}{n_t} D_{12} + \dfrac{(n_i - n_t) D_{01} D_{12}}{n_t R} \right] \alpha_{i0} \\ \alpha_{t2} = \left(\dfrac{n_i - n_t}{n_t R} \right) y_{i0} + \left[\dfrac{n_i}{n_t} + \dfrac{(n_i - n_t) D_{01}}{n_t R} \right] \alpha_{i0} \end{cases}$$

球面折射成像（物在光軸外）



- 橫向距離的放大率

$$\boxed{M_T = \frac{\Delta y_{t2}}{\Delta y_{i0}}} = \frac{(n_i - n_t) D_{12}}{n_t R} + 1 = \ldots = -\frac{n_i D_{12}}{n_t D_{01}}$$

- 角度的放大率

$$\boxed{M_\alpha = \frac{\Delta \alpha_{t2}}{\Delta \alpha_{i0}}} = \frac{\partial \alpha_{t2}}{\partial \alpha_{i0}} = \left[\frac{n_i}{n_t} + \frac{(n_i - n_t) D_{01}}{n_t R} \right] = \ldots = -\frac{D_{01}}{D_{12}}$$

矩陣幾何光學

- 以高度和角度的矩陣來表達方程式
  - 解析光學系統非常方便

光在介質中傳播

$$\begin{aligned} y_{t0} &= y_{i0} + D_{01}\alpha_{i0} \\ \alpha_{t0} &= \alpha_{i0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_{t0} \\ n_{t0}\alpha_{t0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D_{01}/n_{t1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i0} \\ n_{i0}\alpha_{i0} \end{bmatrix}$$

光在球面折射

$$\begin{aligned} y_{t1} &= y_{i1} \\ n_t\alpha_{t1} &= n_i\alpha_{i1} - \frac{(n_t - n_i)}{R_1} y_{i1} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_{t1} \\ n_{t1}\alpha_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_t - n_i)}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i1} \\ n_{i1}\alpha_{i1} \end{bmatrix}$$

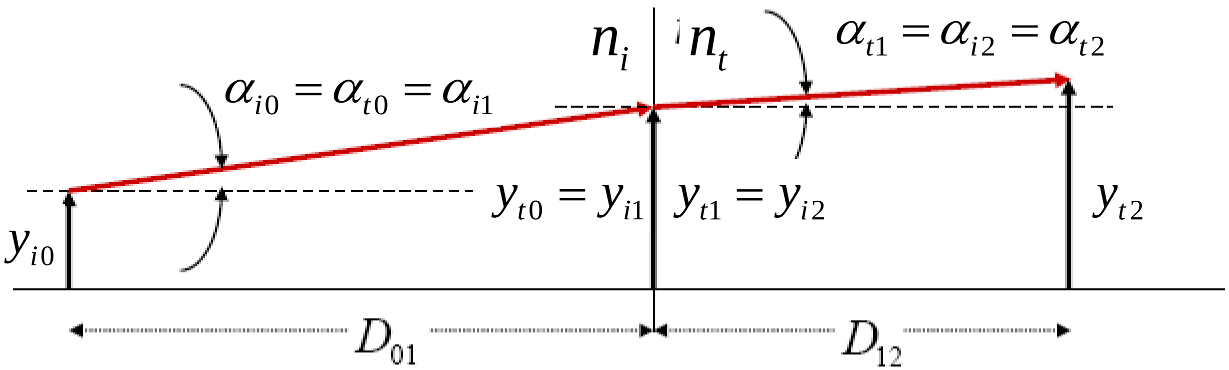
屈光力

$$\begin{bmatrix} y_{t1} \\ n_{t1}\alpha_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{(n_t - n_i)}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i1} \\ n_{i1}\alpha_{i1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i1} \\ n_{i1}\alpha_{i1} \end{bmatrix}$$

這就是屈光力
(Power)

矩陣幾何光學範例：分析球面折射成像



$$\begin{bmatrix} y_{t2} \\ n_{t2}\alpha_{t2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{在均勻介質} \\ n_t\text{中傳遞}D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{在曲率半徑R} \\ \text{的曲面折射} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{在均勻介質}n_i \\ \text{中傳遞}D_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i0} \\ n_{i0}\alpha_{i0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{t2} \\ n_{t2}\alpha_{t2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D_{12}/n_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{(n_t-n_i)}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & D_{01}/n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i0} \\ n_i\alpha_{i0} \end{bmatrix}$$

矩陣幾何光學範例：分析球面折射成像

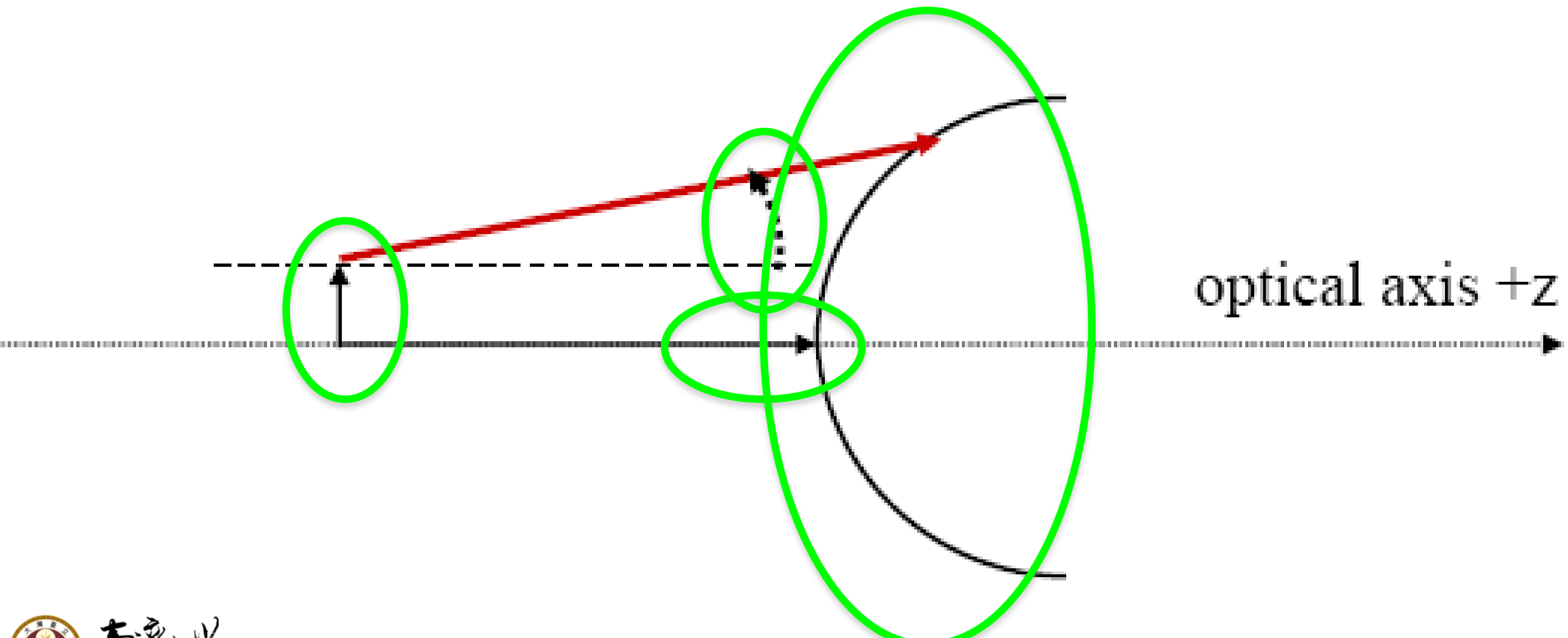
$$\begin{bmatrix} y_{t2} \\ n_{t2}\alpha_{t2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D_{12}/n_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{(n_t - n_i)}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & D_{01}/n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i0} \\ n_i\alpha_{i0} \end{bmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{cases} y_{t2} = \left[\dfrac{(n_i - n_t)D_{12}}{n_t R} + 1\right] y_{i0} + \left[D_{01} + \dfrac{n_i}{n_t} D_{12} + \dfrac{(n_i - n_t)D_{01}D_{12}}{n_t R}\right] \alpha_{i0} \\ n_t \alpha_{t2} = \left(\dfrac{n_i - n_t}{R}\right) y_{i0} + \left[n_i + \dfrac{(n_i - n_t)D_{01}}{R}\right] \alpha_{i0} \end{cases}$$

- 可用矩陣的組合求得基本光學元件的成像情況！

光線追蹤法中的正負號定義

- 一般習慣，假設光線由左向右傳播
- 則傳播距離向右為正。
- 垂直光學軸方向，向上為正。
- 角度定義為由光學軸出發，逆時針旋轉為正
- 對於向左突出的曲面，其曲率半徑為正。



隨堂測驗

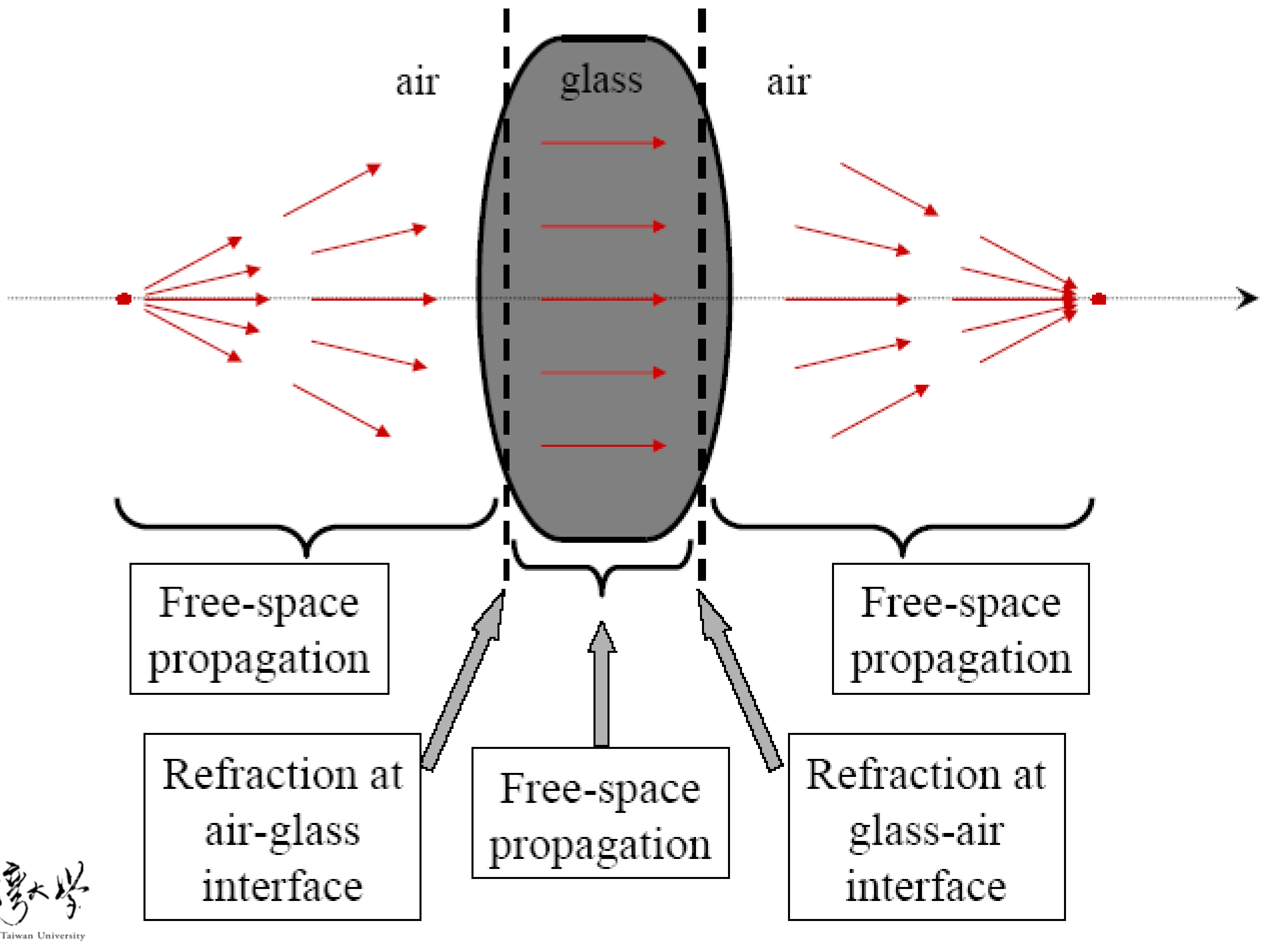
- 請問在矩陣幾何光學中，哪一項代表屈光力？
  1. A
  2. B
  3. C
  4. D

$$\begin{bmatrix} y_t \\ n_t\alpha_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ n_i\alpha_i \end{bmatrix}$$

3-4 以矩陣幾何光學分析薄透鏡成像

透鏡成像過程分析

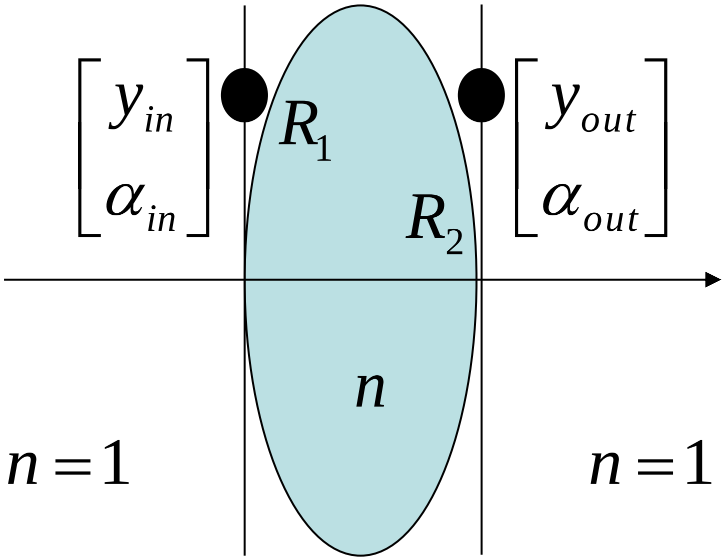
- 由點光源出發 → 空氣傳播 ＋ 折射 ＋透鏡傳播 ＋ 折射 ＋ 空氣傳播 → 焦點



臺灣大學
National Taiwan University

透鏡成像分析：近軸光線追蹤法

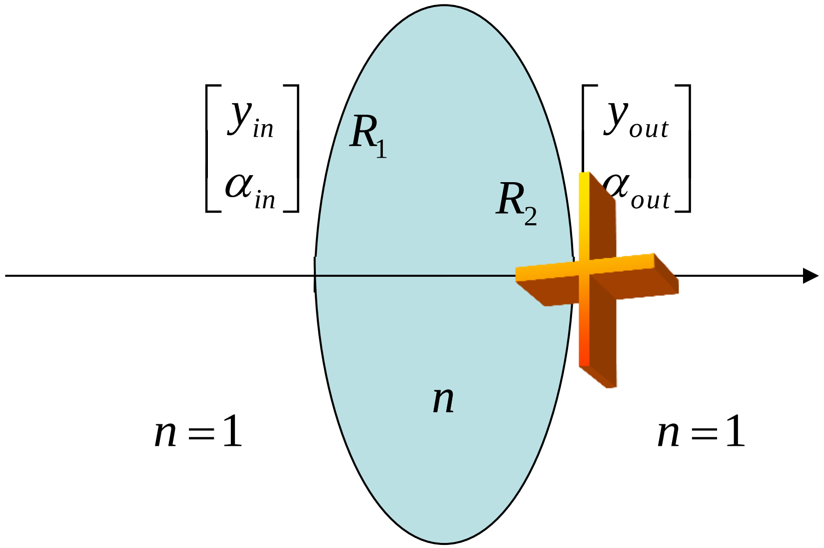
- 先針對單一透鏡中的光路分析
  - 亦即求出連結入射與出射的矩陣



$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

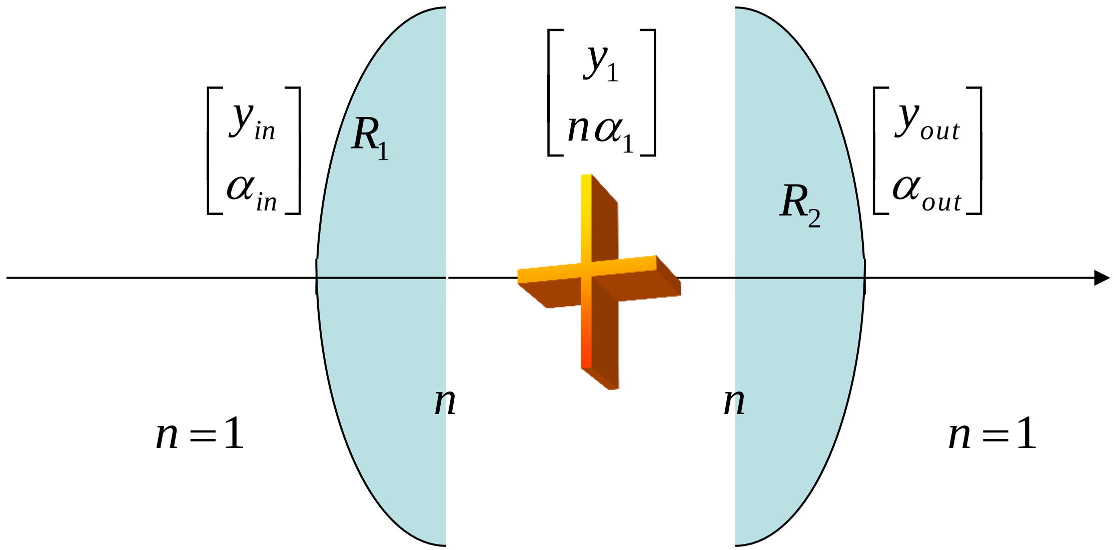
此處 R_2 為負值

薄透鏡近似



- 可忽略透鏡中傳播距離
- 只考慮前後介面的折射

薄透鏡 ＋ 近軸光線追蹤法

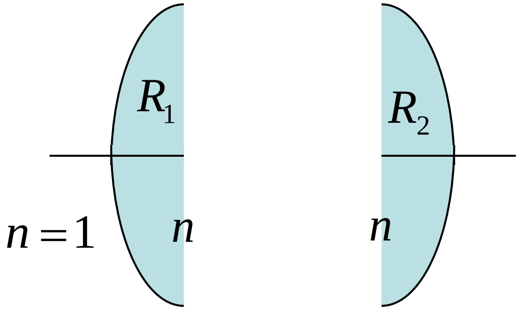


$$\begin{bmatrix} y_1 \\ n\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1-n}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ n\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1-n}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

薄透鏡成像方程式

- 由上一節已知 $\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$ $\quad P$: 屈光力 $= \dfrac{1}{f}$



$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} \qquad P_2 = \frac{1-n}{R_2}$$

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

$$P_{\text{thinlens}} = P_1 + P_2 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

薄透鏡方程式

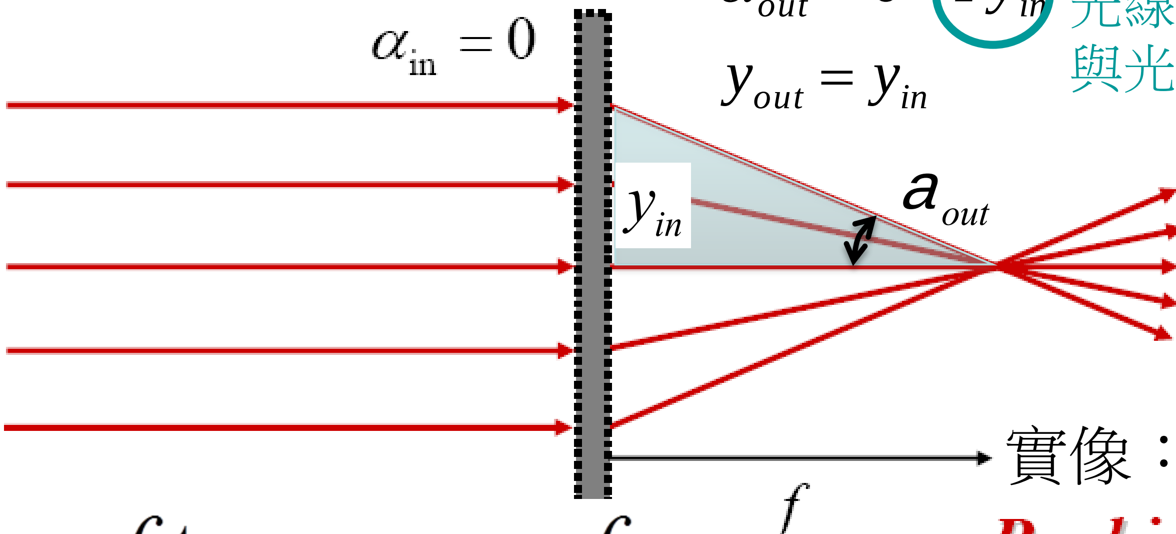
聚焦薄透鏡

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{out} = 0 - Py_{in}$$

光線屈折的角度和光線與光學軸的距離成正比

$$y_{out} = y_{in}$$



實像：光線實際匯聚成像

Real image

$$y_{in} = -f \tan \alpha_{out} \sim -f \alpha_{out}$$

$$\Rightarrow f = -\frac{y_{in}}{\alpha_{out}} = \frac{1}{P}$$ 成像在右邊，為實像

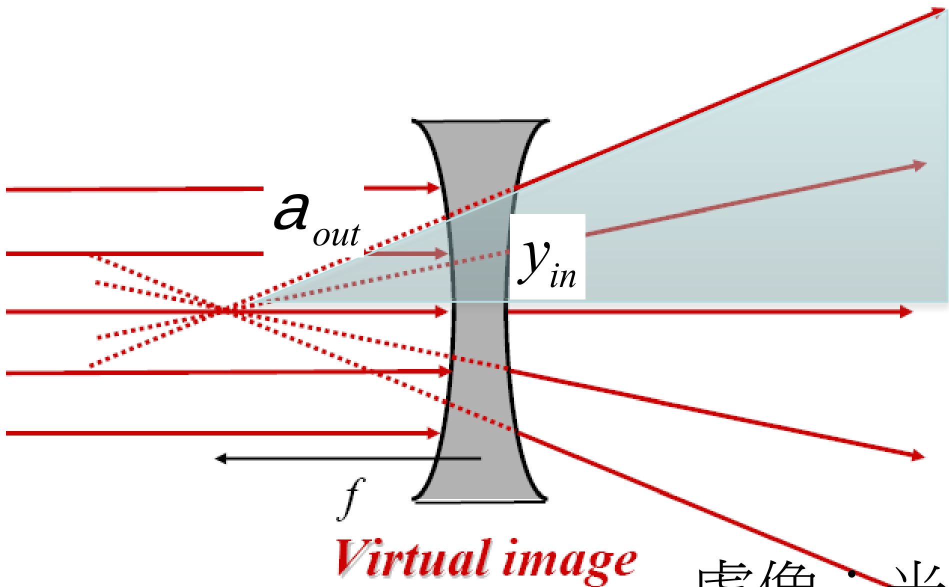
- 焦點：無限遠物體（平行光）成像的位置
- 焦距：透鏡和焦點間的距離

發散薄透鏡

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{out} = 0 - P y_{in}$$

$$y_{out} = y_{in}$$



光線屈折的角度和光線仍然與光學軸的距離成正比

虛像：光線的延長線反向匯聚成像

$$f = -\frac{y_{in}}{\alpha_{out}} = \frac{1}{P}$$ 仍然成立

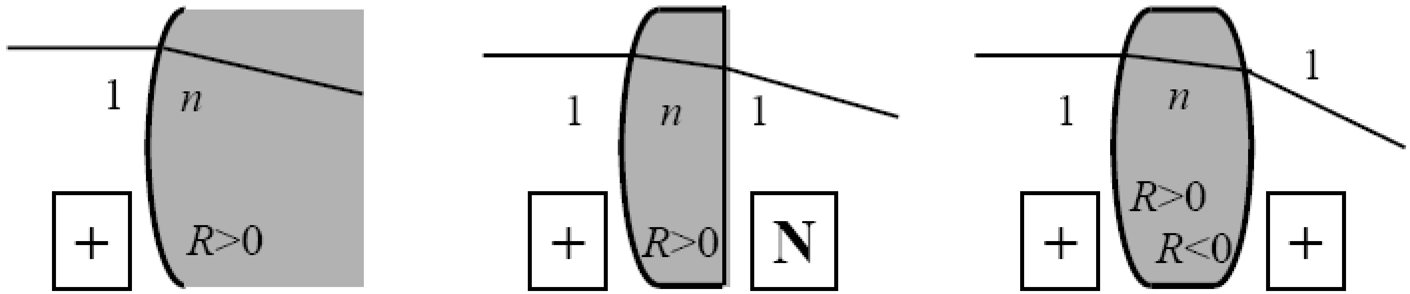
但是此時 $P < 0$，所以焦距 $f < 0$

成像在左邊，為虛像

折射面的屈光力

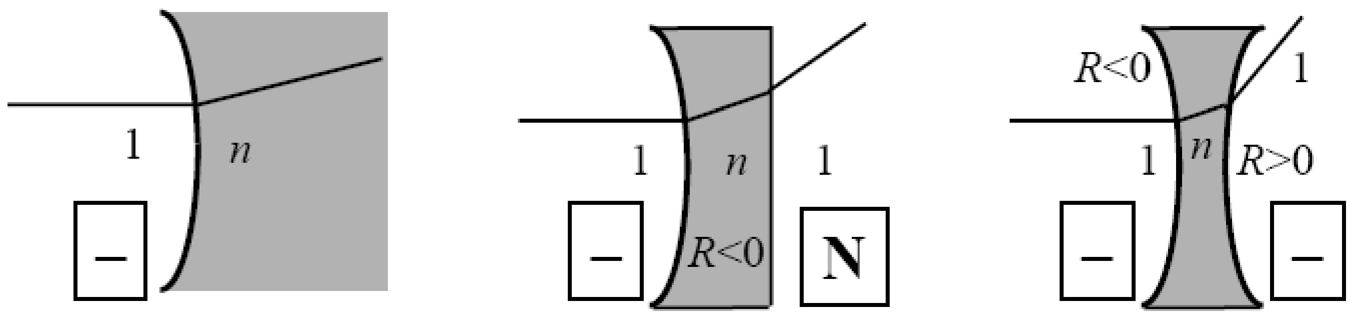
$$P = \frac{(n_t - n_i)}{R}$$

- 屈光力為正：出射光向內收斂



Simple spherical refractor (positive) | Plano-convex lens | Bi-convex lens

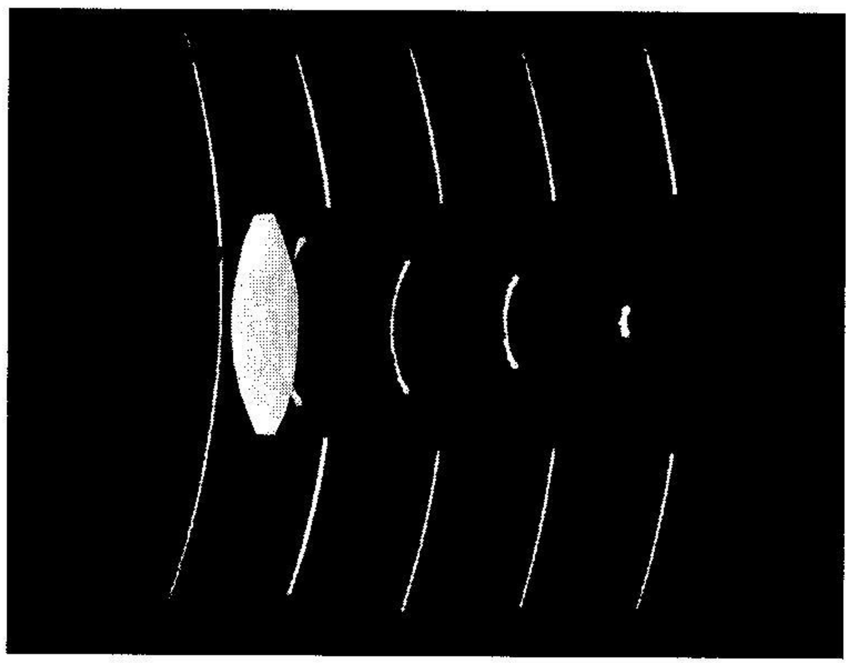
- 屈光力為負：出射光向外發散



Simple spherical refractor (negative) | Plano-concave lens | Bi-concave lens

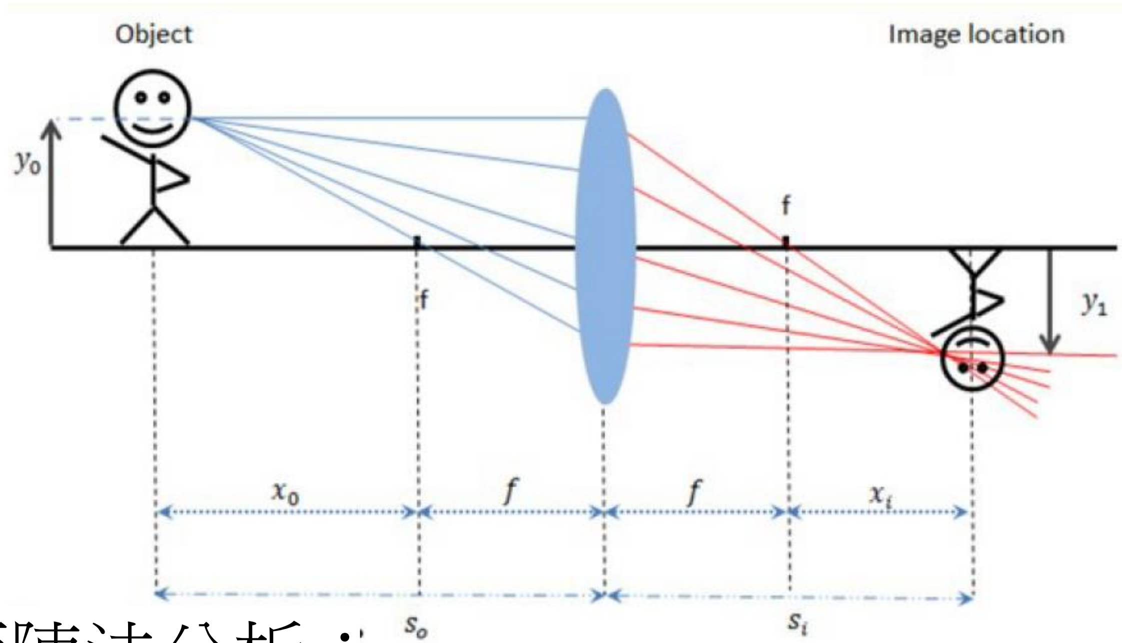
光通過透鏡折射而聚焦

- 以高速影像拍攝光波前穿過透鏡的改變



Abramson, Appl. Opt. 22, p. 215 (1983)

薄透鏡成像

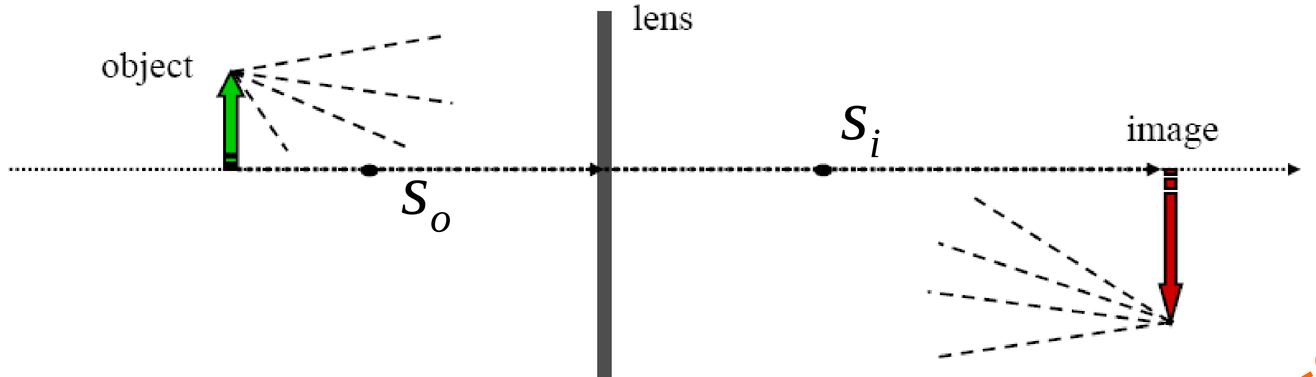


- 以矩陣法分析：
  - 成像的條件即為由物體同一點發出的光，不論角度都應該會聚到同一點

$$\frac{\partial y_{out}}{\partial \alpha_{in}} = 0$$

薄透鏡成像

傳播 ＋ 透鏡 ＋ 傳播



傳播 ＋ 透鏡 ＋ 傳播

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{s_i}{f} & \overbrace{s_o + s_i - \frac{s_o s_i}{f}}^{=0} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{s_o}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

高斯透鏡方程式
(透鏡成像條件)

薄透鏡成像

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{s_i}{f} & s_o+s_i-\frac{s_o s_i}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{s_o}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

橫向距離放大率 $\boxed{M_T} = \frac{\Delta y_{out}}{\Delta y_{in}} = 1-\frac{s_i}{f} = \boxed{-\frac{s_i}{s_o}}$

角度放大率 $M_\alpha = \frac{\Delta \alpha_{out}}{\Delta \alpha_{in}} = 1-\frac{s_o}{f} = -\frac{s_o}{s_i}$

隨堂測驗

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

- 在薄透鏡成像的矩陣中共有四項，請問下列哪一個物理意義不正確？
  1. A 相當於橫向距離放大率
  2. B = 0時可求出成像條件
  3. C 相當於焦距
  4. D 相當於角度放大率

ABCD 矩陣光學

橫向距離放大率　　成像條件

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

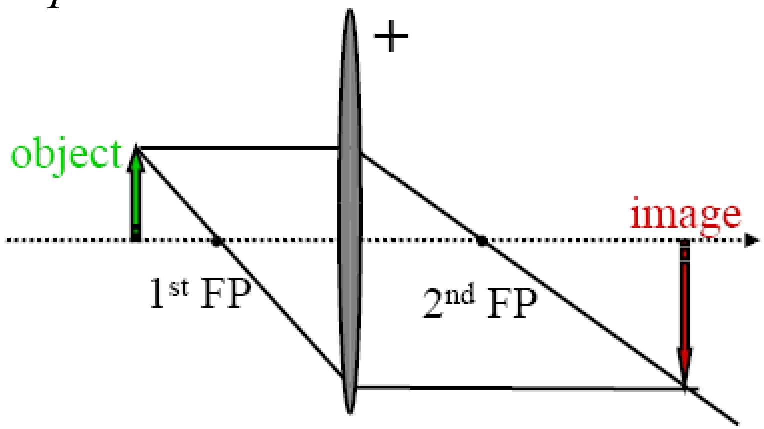
屈光力　　角度放大率

幾種薄透鏡成像情況

凸透鏡

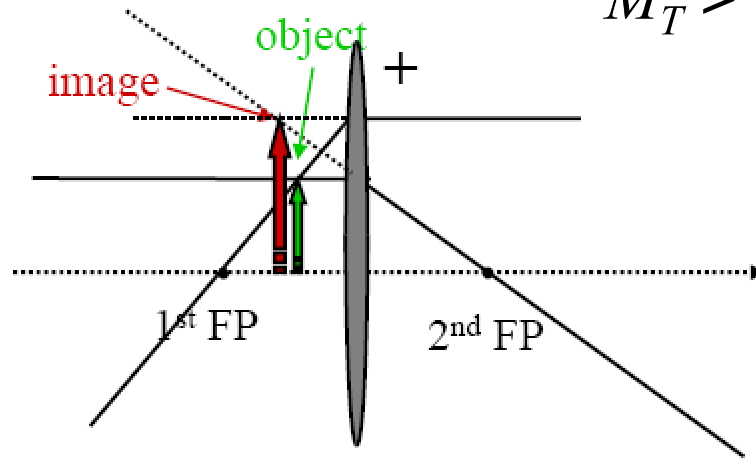
物在焦點外，成倒立實像

$M_T < 0$



物在焦點內，成正立虛像

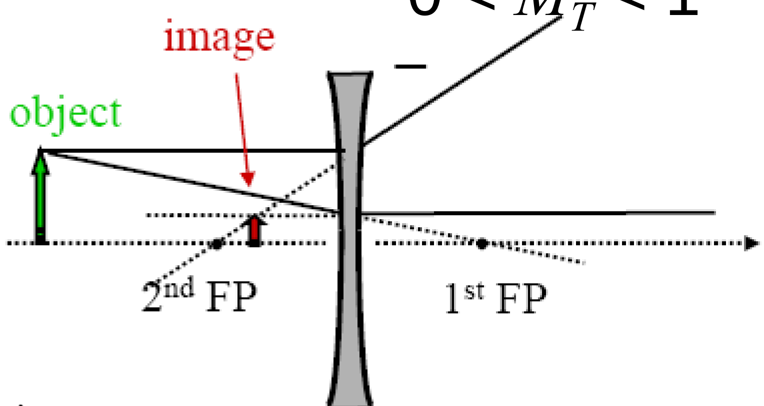
$M_T > 1$



凹透鏡

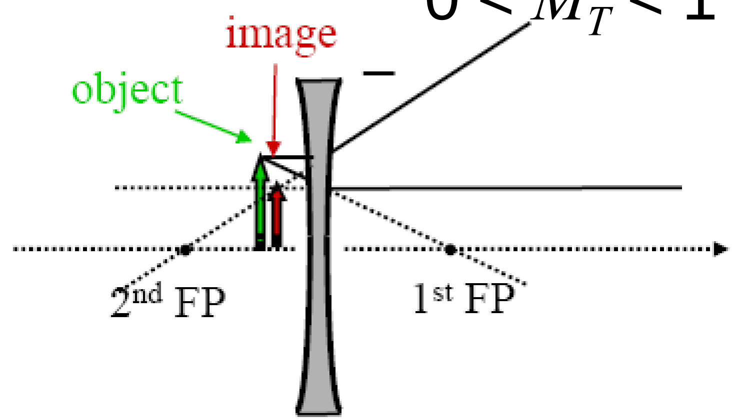
物在焦點外，成正立虛像

$0 < M_T < 1$



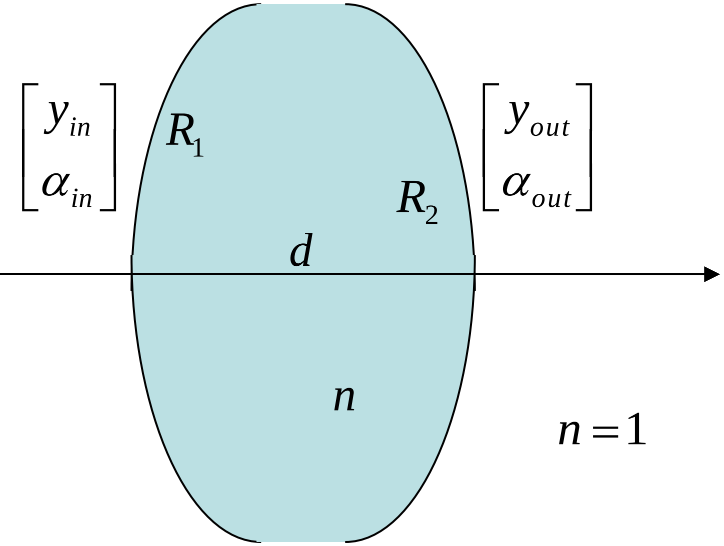
物在焦點內，成正立虛像

$0 < M_T < 1$



3-5 厚透鏡與反射鏡

厚透鏡



- 需要多考慮在透鏡中傳播

折射 ＋ 傳播 ＋ 折射

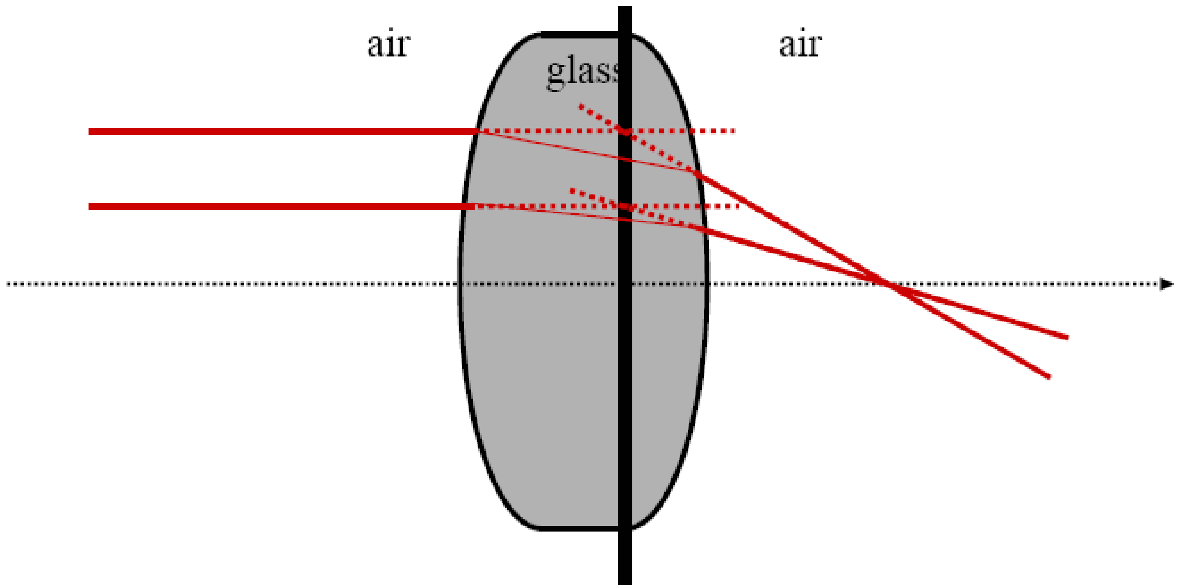
$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1-n}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{n-1}{n}\dfrac{d}{R_1} & \dfrac{d}{n} \\ -\boxed{\left[(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)+\dfrac{(n-1)^2 d}{nR_1R_2}\right]} & 1+\dfrac{n-1}{n}\dfrac{d}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

Power $P = \dfrac{1}{f}$

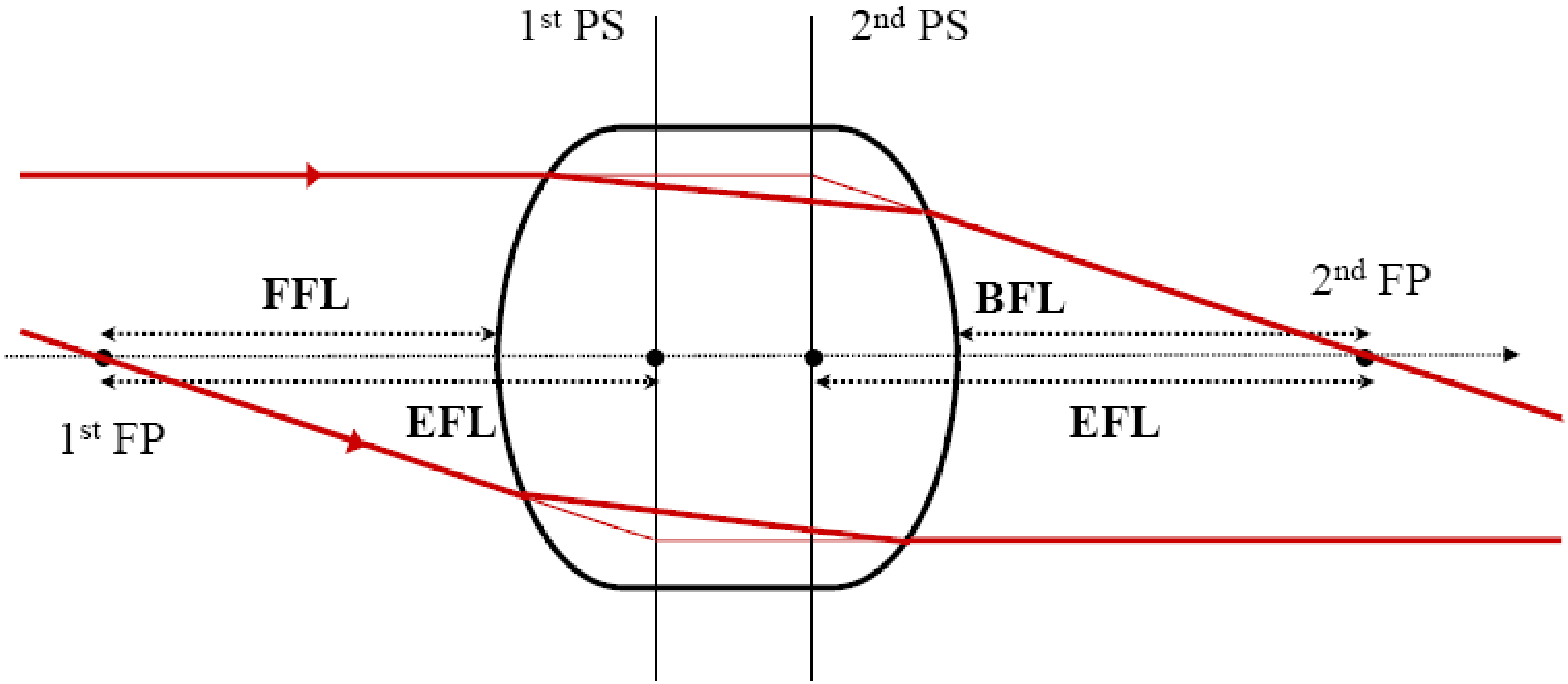
f: EFL: effective focal length

EFL等效焦距的意義



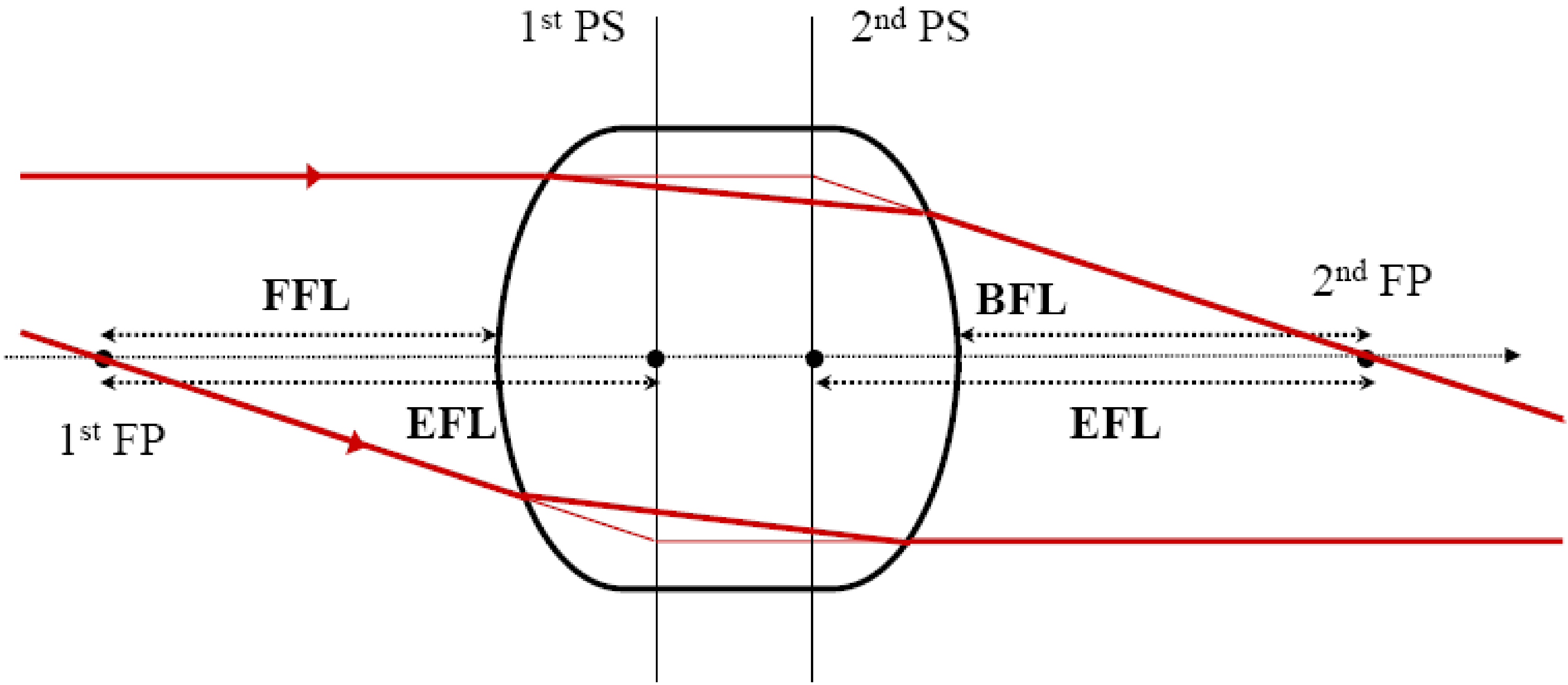
- 在厚透鏡中，光線有兩階段偏折
  - 可以等效看成一個在厚透鏡中「某處」的薄透鏡造成的偏折
  - 這個等效薄透鏡的位置就稱為主平面 (**Principal Plane**)

厚透鏡的聚焦：名詞定義



焦點 (FP)：平行光入射匯聚的位置
主點 (PS)：等效薄透鏡所在的位置（主平面和光學軸的交點）
等效焦距 (EFL)：由主點到焦點的距離
前側焦距 (FFL)：入射面的焦點到透鏡前表面的距離
後側焦距 (BFL)：出射面的焦點到透鏡後表面的距離

厚透鏡的聚焦

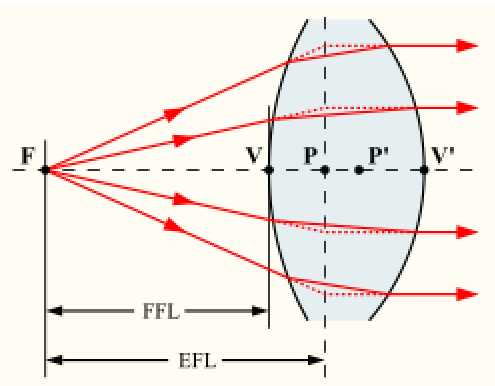


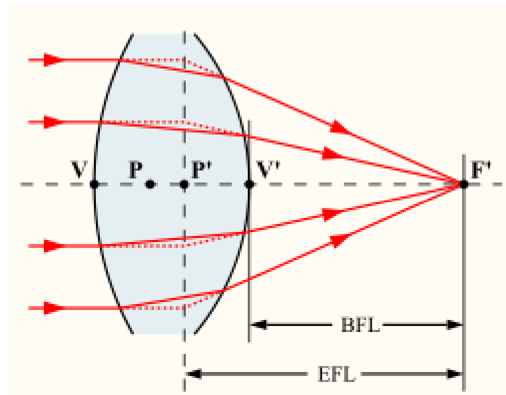
- 平行光入射，可視為在第二主點折射，會穿過右側的第二焦點
- 入射光通過第一焦點，可視為在第一主點折射

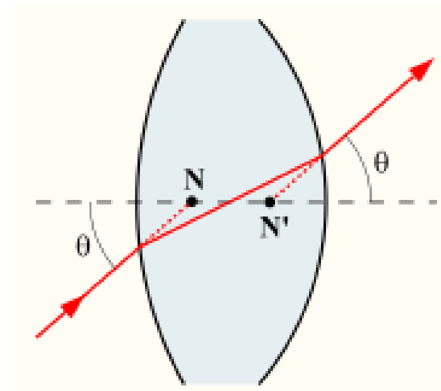
National Taiwan University

透鏡的主要點 (Cardinal points)

- 三對與成像有關的點





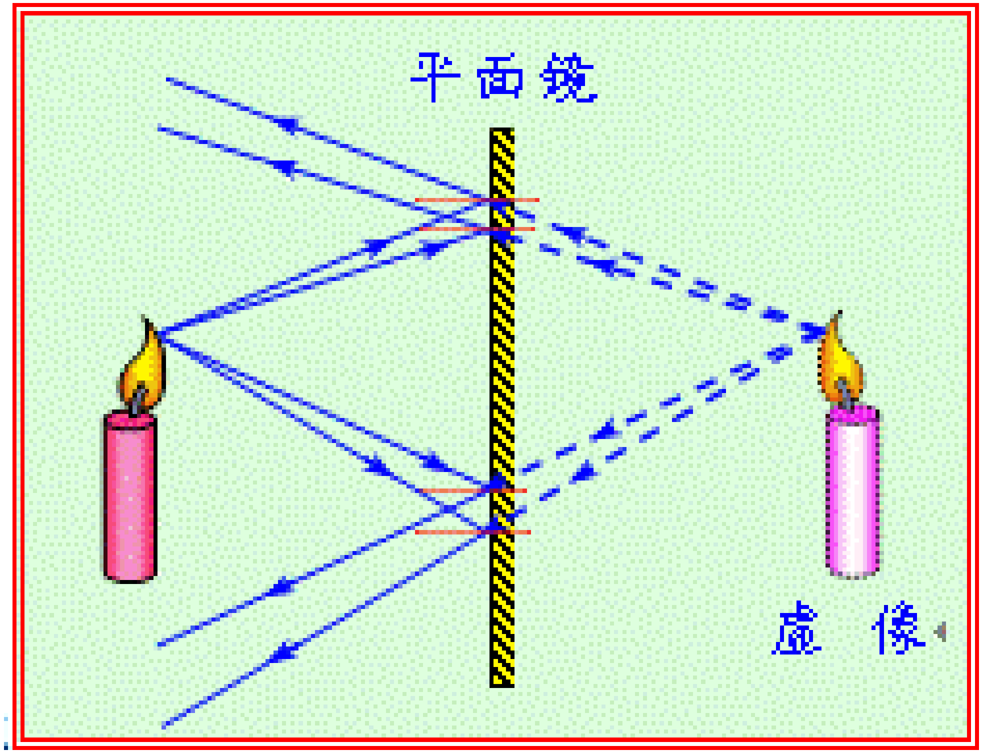


前側焦點和後側焦點 (focal points) F, F’
前側主點和後側主點 (principal points) P, P’
前側節點和後側節點 (nodal points) N, N’
　　使入射光不偏折的點

http://en.wikipedia.org/wiki/Cardinal_point_(optics)

反射鏡

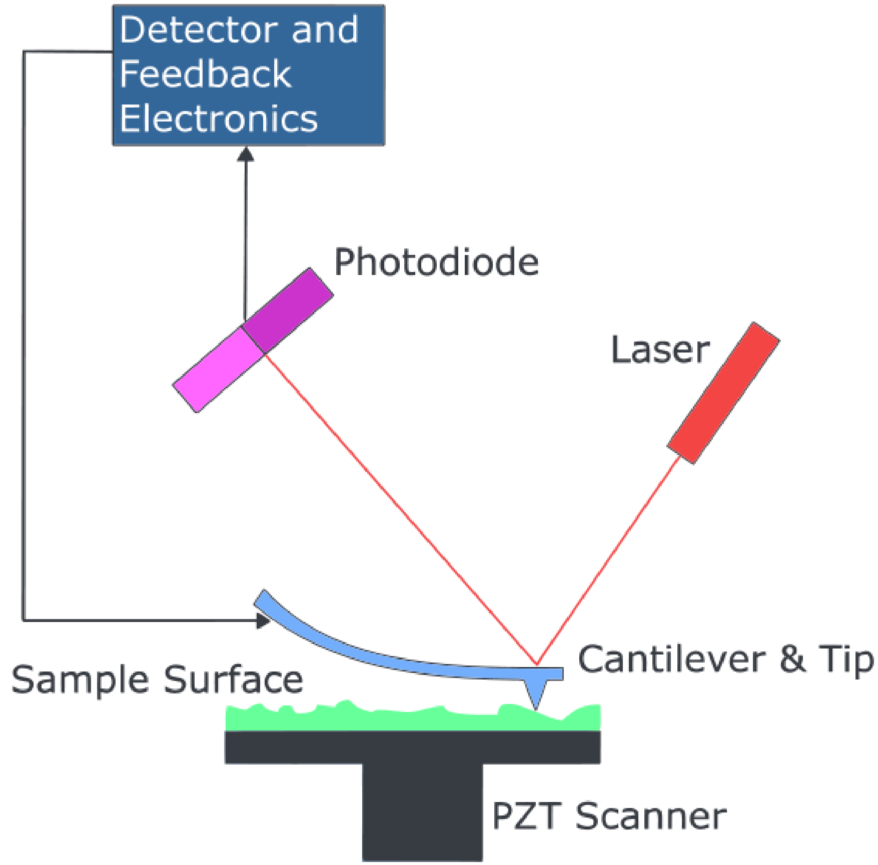
- 平面鏡
  - 成虛像

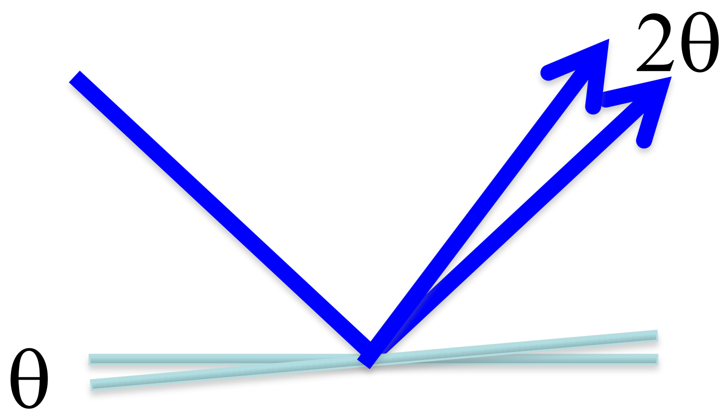


http://siro.moe.edu.tw/teach/query.php?action=read_content&p=824&d=1261828900

反射鏡的應用

- 角度放大器
- 偵測小角度改變
  - 例如原子力顯微鏡

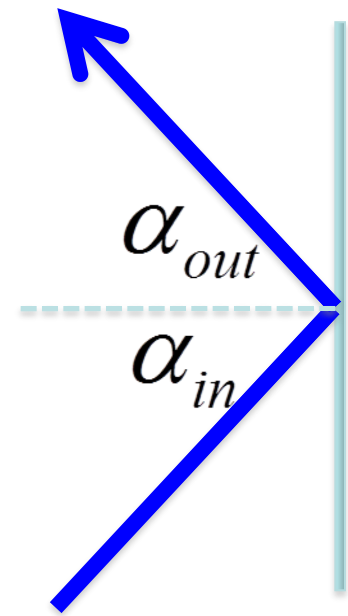




http://en.wikipedia.org/wiki/Atomic_force_microscopy

如何用矩陣描述平面鏡？

- 在反射點上
  - 光的高度不會改變 $y_{out} = y_{in}$
  - 入射角＝反射角 $\alpha_{out} = -\alpha_{in}$



$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

那如何用矩陣描述球面反射鏡呢？

$$y_{out} = y_{in}$$

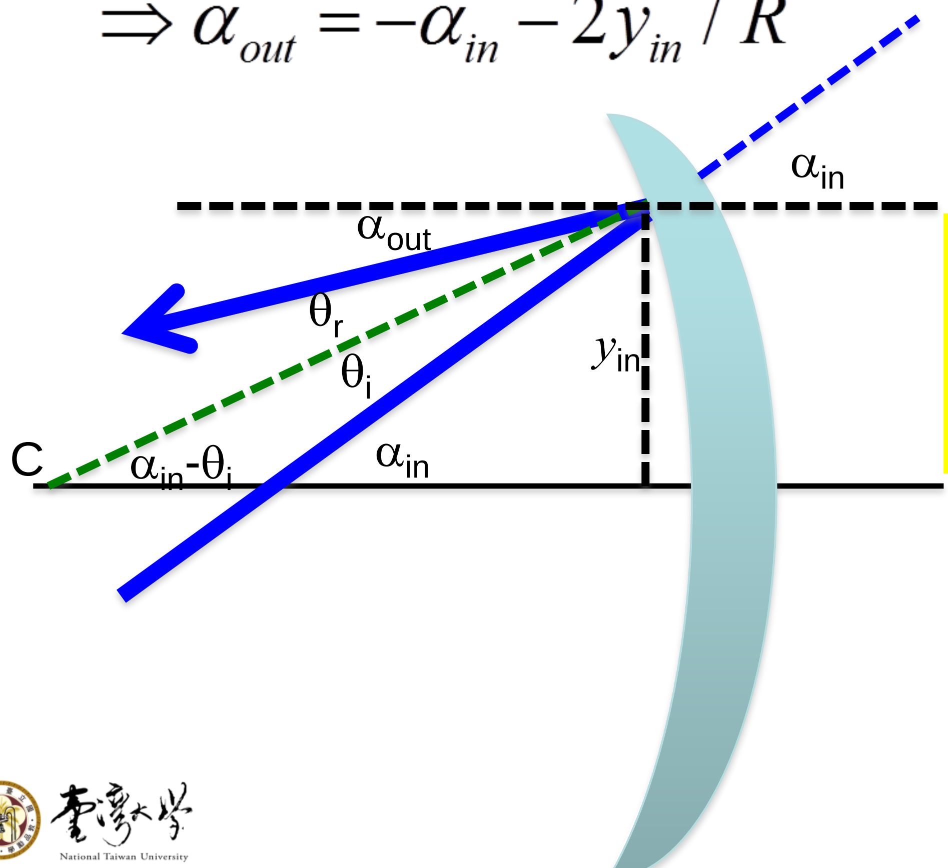
∵凹面鏡的R為負值

$$\alpha_{in} = \alpha_{out} + 2\theta_{in}$$

$$\sin(\alpha_{in} - \theta_i) \approx \alpha_{in} - \theta_i = -y_{in} / R$$

$$\Rightarrow \alpha_{out} = -\alpha_{in} - 2y_{in} / R$$

$$\theta_i = \alpha_{in} + y_{in} / R$$



$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

挑戰自我

- 有了上述這些矩陣，請問你/妳可以按照推導透鏡成像的方式，推導出球面反射鏡成像的條件嗎？
- 何時成實像，何時成虛像？

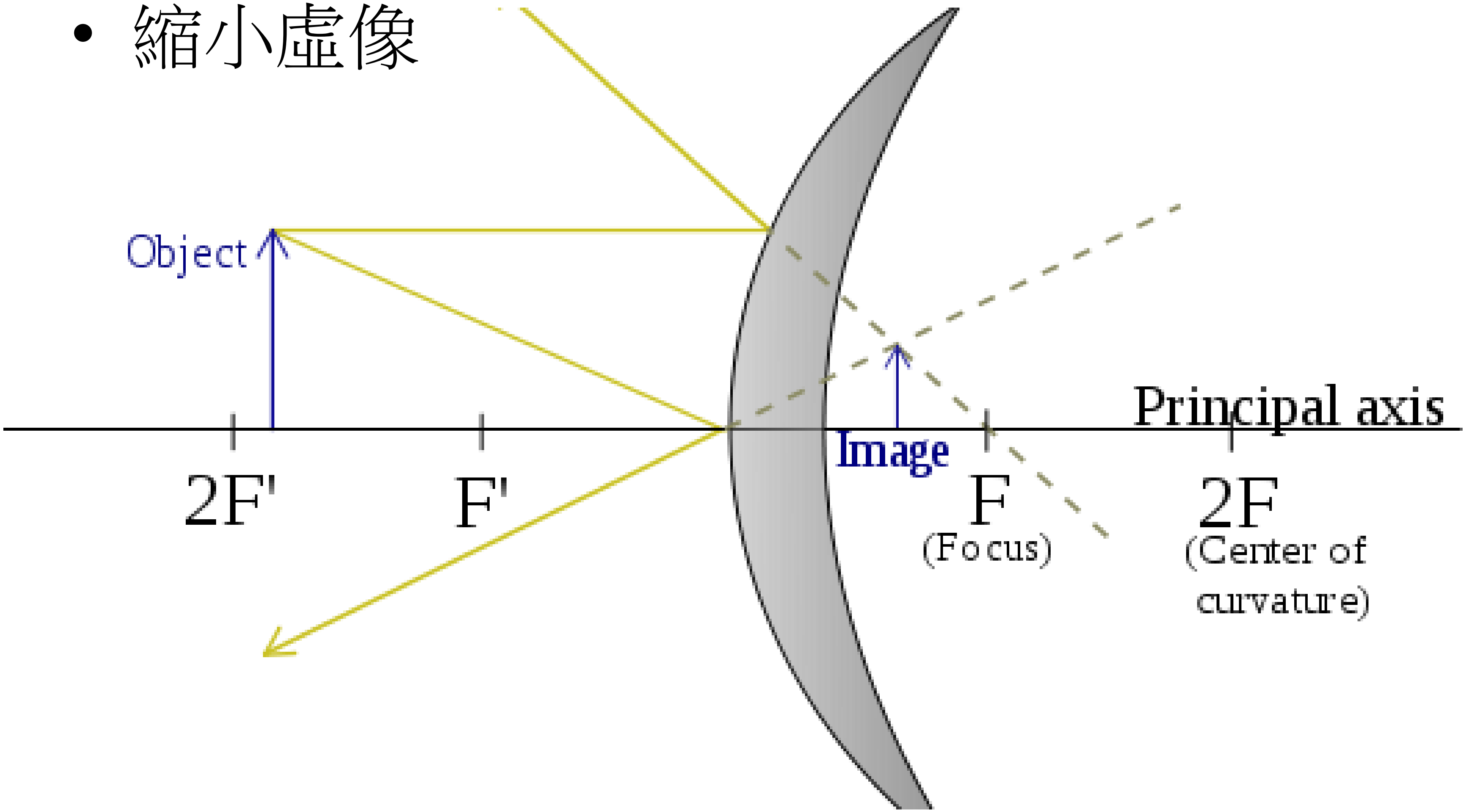
球面反射鏡參數正負號

Sign convention for spherical mirror

Quantity	Sign	
	+	−
s_o	Left of V, real object	Right of V, virtual object
s_i	Left of V, real image	Right of V, virtual image
f	Concave mirror	Convex mirror
R	C right of V, convex	C left of V, concave
y_o	Above axis, erect object	Below axis, inverted object
y_i	Above axis, erect image	Below axis, inverted image

凸面鏡成像

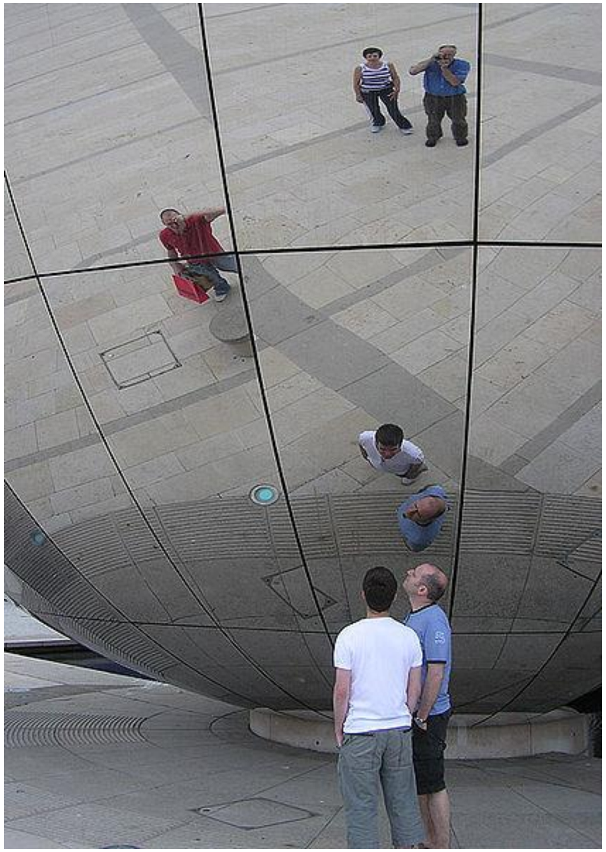
- 縮小虛像



http://en.wikipedia.org/wiki/Curved_mirror

凸面鏡成像

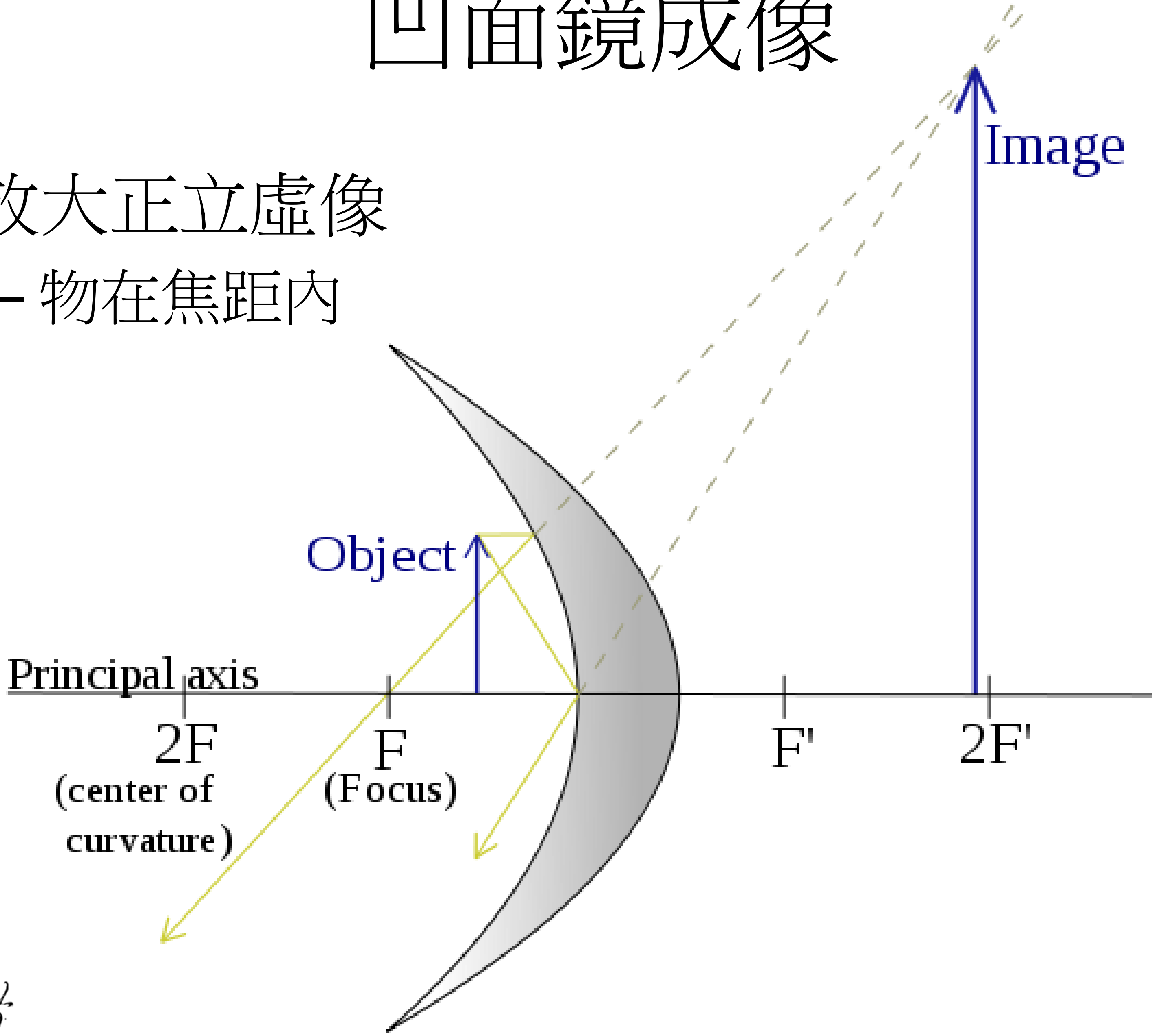
- 縮小虛像
  - 可看到較大範圍
  - 常用於後照鏡或是公路轉彎處



http://en.wikipedia.org/wiki/Curved_mirror

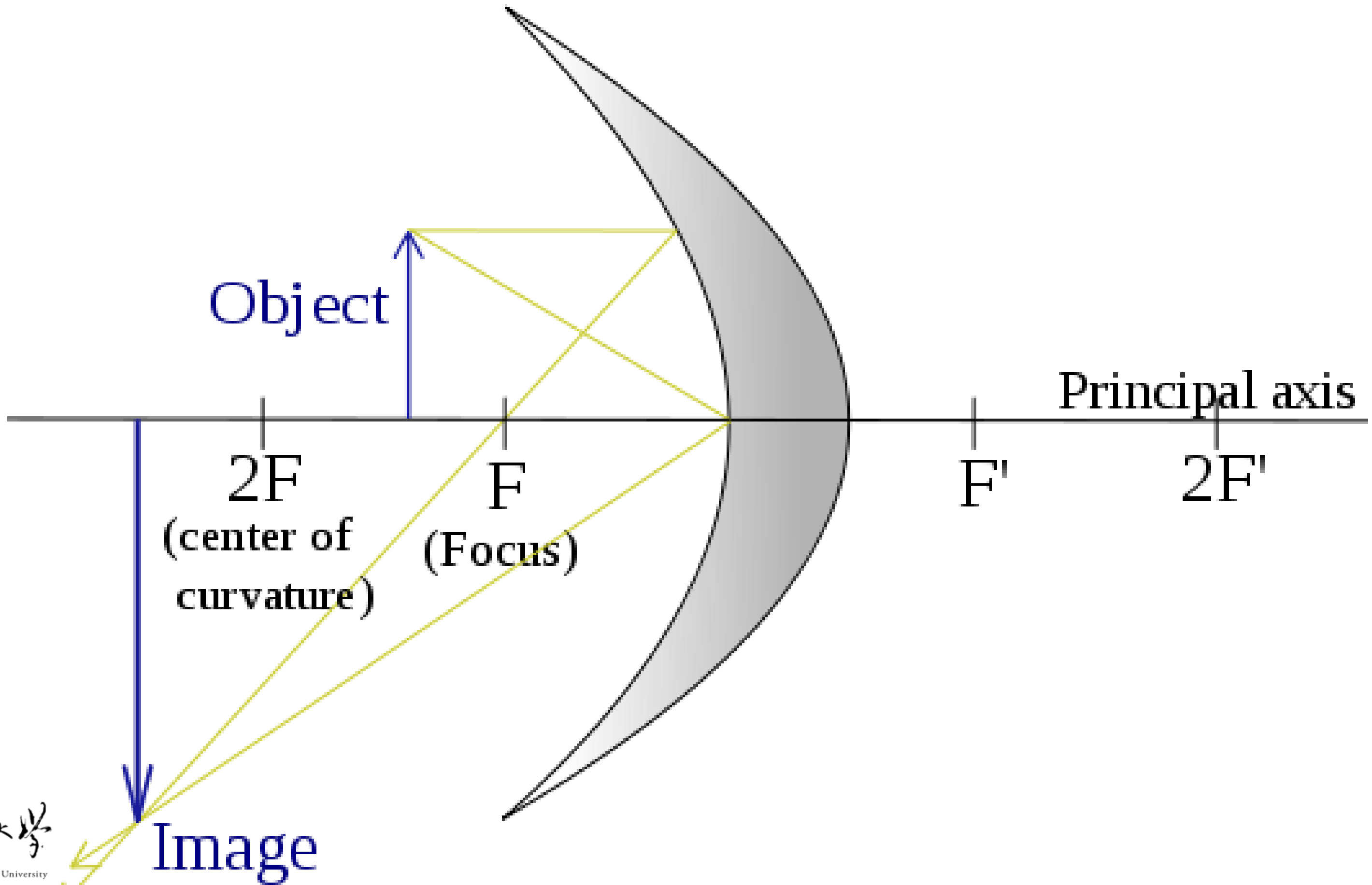
凹面鏡成像

- 放大正立虛像
  - 物在焦距內



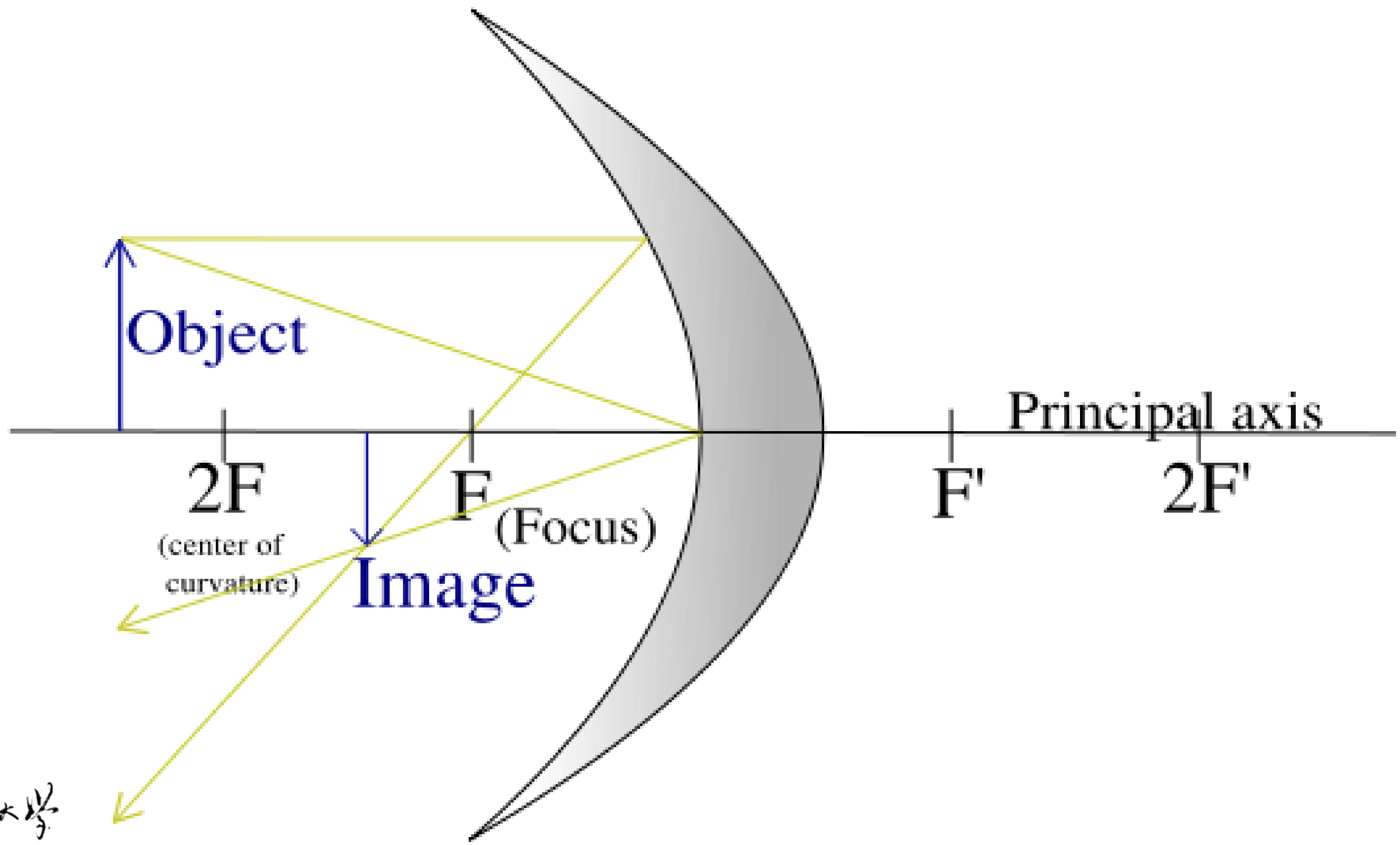
凹面鏡成像

- 放大實像
  - 物在一倍焦距與兩倍焦距間



凹面鏡成像

- 縮小實像
  - 物在兩倍焦距外



課堂demo

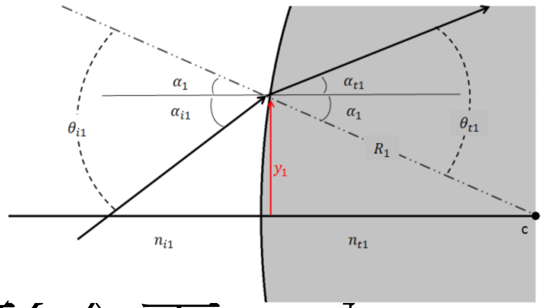
- 有趣的小青蛙
  - 凹面鏡成實像

隨堂測驗

- 請問下列何者為誤
  1. 厚透鏡可以成實像和虛像
  2. 平面鏡只能成虛像
  3. 凹面鏡只能成虛像
  4. 凸面鏡只能成虛像

作業

作業 1



- 考慮一個曲率半徑為5公分的球形介面，內部充滿水（折射率1.33），請問如何用矩陣描述這個介面的折射？

$$\begin{bmatrix} y_{out} \\ \alpha_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}$$

作業 1-1

- 承上題，若是從空氣端入射一道垂直球面且平行於光學軸的光束（相當於光源在很遠的地方），請問這道平行光聚焦的位置，離球面多遠（以公尺為單位）？

作業 1-2

- 再承上題，若有一點光源放在此球面空氣端的光學軸上，距離球面25公分，請問此點光源在水中成像的位置離球面多遠（以公尺為單位）？

作業 2

- 考慮一個薄雙凸透鏡，其折射率為1.5，兩個介面的曲率半徑均為10公分。請問如何用矩陣描述這個透鏡的折射？

作業 2-1

- 承上題，若是從空氣端入射一道垂直透鏡且平行於光學軸的光束（相當於光源在很遠的地方），請問這道平行光聚焦的位置，離透鏡多遠（以公尺為單位）？

作業 2-2

- 再承上題，若有一點光源放在此透鏡的光學軸上，距離透鏡表面25公分，請問此點光源成像的位置離透鏡多遠（以公尺為單位）？

作業 2-3

- 承上題，若此透鏡與光源都浸泡在水中（折射率1.33），請問此時成像的位置會變成離透鏡多遠？（成像也在水中）（以公尺為單位）

作業 2-4

- 承上題，若此透鏡與光源都浸泡在折射率為1.7的油中，請問此時會成哪一種像？（成像也在油中）
  1. 放大實像
  2. 縮小實像
  3. 放大虛像
  4. 縮小虛像

作業 2-5

- 承上題，若此透鏡與光源都浸泡在折射率為1.7的油中，請問此時成像的位置離透鏡多遠？（成像也在油中）

作業 3

- 考慮一個焦距為10公分的透鏡，若將一根長5公分的蠟燭放在此透鏡前15公分處，蠟燭底部在光學軸上，且蠟燭垂直光學軸。請問此時成像為
  1. 放大實像
  2. 縮小實像
  3. 放大虛像
  4. 縮小虛像

作業 3-1

- 承上題，請問蠟燭成像的位置離透鏡多遠？

作業 3-2

- 承上題，請問成像的蠟燭長度為何？

- 上面描述的，和我們人眼的構造有非常大的關係
  - 球面折射
  - 透鏡浸泡在水中
- 我們將在下一章為各位介紹。