1 问题

存在一些有理数 x 使得 $\sum_{i=1}^{\infty} F_i * x^i$ 是个整数。其中 F_i 是第 i 个斐波那契数（$F_1 = F_2 = 1$）。

例如 $x_1 = \frac{1}{2}$ 时，有 $\sum_{i=1}^{\infty} F_i * (\frac{1}{2})^i = 2$。

求第十五个这样的有理数 x_{15}.

2 解法

首先你需要了解一个叫【生成函数】的东西。然后就可以得到:

$\sum_{i=1}^{\infty} F_i * x^i = \frac{x}{1-x-x^2}$

也即 $\frac{x}{1-x-x^2}$ 是个整数，不妨设为 n。

所以我们有 $nx^2 + (n+1)x - n = 0$, 也即 $x = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2+4n^2}}{2n}$。

因为 x 是有理数，所以 $\sqrt{(n+1)^2 + 4n^2}$ 得是个有理数，也即 $5n^2 + 2n + 1$ 得是个完全平方数。

那么不妨设 $5n^2 + 2n + 1 = t^2$，可以得到:

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ t_0 = -1 \end{cases} \text{or} \begin{cases} n_0 = 0 \\ t_0 = 1 \end{cases} \text{or} \begin{cases} n_0 = -1 \\ t_0 = -2 \end{cases}$$

且有 $\begin{cases} n_{i+1} = -9n_i - 4t_i - 2 \\ t_{i+1} = -20n_i - 9t_i - 4 \end{cases}$

3 附加

如果你不会解二元二次不定方程也没关系，还有一个很trick但是有用的办法，你可以暴力出前几个数据 $2, 15, 104, 714, 4895, 33552, 229970, 1576239$, 然后打开神奇的OEIS，你会得到 OEIS A081018，然后 $x_i = F_{2i} * F_{2i+1}$