近等边三角形

yydaily

March 16, 2022

1 问题

很容易证明，不存在边长和面积都是整数的等边三角形，然而，近等边三角形 $5-5-6$ 的面积恰好是整数 12.

我们定义 近等边三角形 为等腰三角形，且非腰的边和腰相差不超过 1.

找到所有边长和面积都是整数，且周长不超过 $1e9$ 的所有近等边三角形，给出他们的周长之和。

2 解法

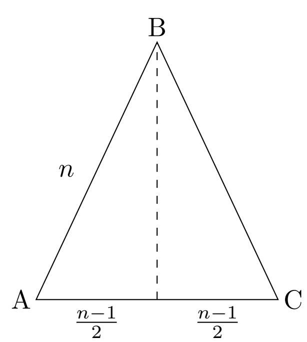
2.1 暴力

我们不妨设腰长为 a, 那么非腰边的长度为 $a-1$ 或者 $a+1$，这里以 $a-1$ 为例来推导。

如下图所示，我们有非腰边的高为 $h=\sqrt{n^2-(\frac{n-1}{2})^2}$，所以面积

$$S=\frac{n-1}{2}*h=\frac{n-1}{2}*\sqrt{n^2-(\frac{n-1}{2})^2}=\frac{n-1}{2}*\sqrt{\frac{3n^2+2n-1}{4}}$$

$$=\frac{n-1}{4}*\sqrt{3n^2+2n-1}$$



一个直观的想法就是我们枚举每个 $n \in [1, 10^9]$，然后判断 S 是否是整数即可。

2.2 更有趣的做法

虽然上述方法可以得出解，甚至在一分钟内，但是更有趣的做法是，我们可以继续推导 S，来得到一些有趣的性质。

结论 1　n 一定是奇数

反证法，我们假定 $n = 2k$，其中 k 是整数。那么我们有:

1. $(n-1)$ 一定是奇数
2. $3n^2 + 2n - 1$ 一定是奇数

那么显然有 $(n-1) * (3n^2 + 2n - 1)\%4 \neq 0$，也即 S 非整数，矛盾，所以 n 一定是奇数。

结论 2　**原**问题本质上是一个类pell方程

因为 n 一定是奇数，所以不妨设 $n = 2k + 1$，其中 k 是正整数数，我们将 $n = 2k + 1$ 带入 S 有:

$$S = \frac{k}{2} * \sqrt{12k^2 + 16k + 4} = k * \sqrt{3k^2 + 4k + 1}$$

因为 k 已经是正整数了，所以只需要满足 $3k^2 + 4k + 1$ 是个完全平方数即可。

不妨设 $3k^2 + 4k + 1 = t^2$，其中 t 是正整数。至此，我们得到了一个二元二次不定方程，求整数解。比较容易得到一组特解:

$$\begin{cases} k = 8 \\ t = 15 \end{cases}$$

对应的通解:

$$\begin{cases} k_{n+1} = -2k_n - t_n - 2 \\ t_{n+1} = -3k_n - 2t_n - 2 \end{cases}$$

对于非腰边长为 $n + 1$ 推导类似，这里不额外阐述了。