1 问题

交叠洗牌的操作流程如下：将牌堆分成相同数量的两半，上半部分置于左手，下半部分置于右手。接着将牌准确地交叉叠合，也就是说，将右手中的第一张牌放在左手中的第一张牌下方，将右手中的第二张牌放在左手中的第二张牌下方，依此类推。（注意这一操作并不改变原牌堆的第一张和最后一张牌的位置）

记 $s(n)$ 为对 n 张牌组成的牌堆连续进行交叠洗牌直至牌堆恢复原样所需的次数，其中 n 是一个正偶数。

令人惊奇的是，对于52张牌的标准牌堆，首次回复原样仅需要 8 次完美的交叠洗牌。可以验证对于 86 张牌的牌堆，恢复原样同样只需要 8 次洗牌，而所有满足的取值之和为 412。

求所有满足 $s(n) = 60$ 的 n 取值之和。

2 解法

2.1 暴力

一个比较自然的想法是，我们暴力枚举每个正偶数，然后暴力洗牌，统计洗牌次数来判断是否等于 60。比较容易计算出来的前几项是：$62, 144, 176, 184, \dots$，毫无疑问没有任何规律，所以我当时就卡在这个地方了。

2.2 解法

然后我就换了个想法，不得不说 $OEIS$ 大法好。不难找到A002326。

至于怎么从题目推导到这个序列，按下不表 ~~（因为我不会，嘿嘿）~~

至此，我们知道了对于每个有 n 张牌的洗牌来说，需要洗的次数是：找到最小的 x 使得 $2^x \equiv 1 \bmod (n-1)$。

例如：对于 $n = 52$ 来说，我们有：

$$
\begin{aligned}
2^1 &\equiv 2 \bmod 51 \\
2^2 &\equiv 4 \bmod 51 \\
2^3 &\equiv 8 \bmod 51 \\
2^4 &\equiv 16 \bmod 51 \\
2^5 &\equiv 32 \bmod 51 \\
2^6 &\equiv 13 \bmod 51 \\
2^7 &\equiv 26 \bmod 51 \\
2^8 &\equiv 1 \bmod 51
\end{aligned}
$$

所以，对于 $n = 52$ 来说，就需要洗 8 次牌就能回到原序列。

然后我们回到原问题，那么怎么找到所有的 $s(n) = 60$ 的 n 呢?

不难发现，原问题就转换成了找到所有的 n 使得 $2^{60} \equiv 1 \bmod (n-1)$ 也即 $2^{60} - 1 \bmod (n-1) = 0$。

这样的话，我们只需要枚举 $2^{60} - 1$ 的每个因子就能找到所有可能的答案。

为什么说【可能】呢? 是因为这只能说明 $2^{60} - 1 \equiv 0 \bmod (n-1)$，并不能说明 $s(n) = 60$，比如 $n = 2$，我们可以发现 $2^{60} - 1 \bmod 1 = 0$，但是对于大小为 $n = 2$ 的牌堆来说，显然 $s(2) = 1$。

那么怎么校验这些 n 是否合法呢? 一个简单的想法就是，对于每个需要校验的 n，我们判断是否存在 $x \in [1, 60)$ 满足 $2^x - 1 \equiv 0 \bmod (n-1)$，如果存在这样的 x，说明 $s(n) = x \neq 60$。排除掉这部分答案就是解了。