1 问题

莱昂哈德·欧拉出生于1707年四月15日。

考虑序列 $1504170715041707n \bmod 4503599627370517$。

该序列中的某个元素被定义为欧拉币，当且仅当它严格小于之前已经定义的所有欧拉币。

例如，序列的第一项是1504170715041707，这是第一枚欧拉币。序列的第二项是3008341430083414，因为它大于1504170715041707，因此它不是欧拉币。然后，序列的第三项是8912517754604，比第一项要小，因此是一枚新的欧拉币。

因此，前2枚欧拉币之和为1513083232796311。

求所有欧拉币之和。

2 解法

2.1 暴力

一个最直观的想法是，我们可以暴力枚举每个 n 来判断是否比之前的欧拉币要小，以此来判断当前是否是一个欧拉币。代码大概如下：

Algorithm 1 Calculate all euler coin

$n \leftarrow 1$
$step \leftarrow 1504170715041707$
$mod \leftarrow 4503599627370517$
$last\_euler\_coin \leftarrow mod$
$answer \leftarrow 0$
while $n \neq mod$ **do**
  if $n * step \% mod < last\_euler\_coin$ **then**
    $last\_euler\_coin \leftarrow n * step \% mod$
    $answer += last\_euler\_coin$
  end if
  $n \leftarrow n + 1$
end while

但是很遗憾，这个过程的复杂度是 $O(mod)$ 的，也即：即使 1s 能运算 $1e8$ 次，也需要 521 天。这远远超过了欧拉计划的 1 分钟原则。下面是我自己的暴力代码的速度：

n	euler_coin	时间花费
1	1504170715041707	1.3e-05
3	8912517754604	3.6e-05
506	2044785486369	4.5e-05
...	...	...
3732049906	10487287	2.08483
4015876927	10078122	2.23973
...	...	...
10260071389	1076492	5.668
10543898410	667327	5.82323
10827725431	258162	5.9797
21939277883	107159	12.0777
54990108218	63315	30.237

再之后的一个 euler-coin 的计算已经超过 60 s了。

2.2 推导

通过简单计算，我们能够得到 $gcd(1504170715041707, 4503599627370517) = 1$。所以一定有 1 是 euler-coin （因为 $1504170715041707n \equiv 1 (\mod 4503599627370517)$ 是有解的）。

那么一个有趣且自然的想法是，我们可以枚举每个值，来判断这个值是否是euler-coin，怎么判断是不是 euler-coin 呢？

首先，对于 euler-coin = 1 来说，我们需要找到对应的 n_1，不难发现 $n_1 = \frac{1}{1504170715041707} \mod 4503599627370517 = 3451657199285664$

然后，对于剩下的 x ，怎么判断 x 是否是 euler-coin 呢？我们只需要计算 $n_x = \frac{x}{1504170715041707} \mod 4503599627370517$，然后和上一个 euler-coin 对比下标，就能知道这个是不是 euler-coin 了。

然而，这个想法只能处理比较小的 x。

所以，我们将这个想法和暴力想法结合起来，对于比较大的 x 和 较小的n，我们暴力从小到大枚举 n 来找到 euler-coin，反之，我们从小到大枚举 x 来判断每个 x 是不是 euler-coin。