# 1 问题

两个人均绝对理智的玩一个取石子游戏。游戏定义如下:

1. 初始状态有两堆石子，分别有 $[a,b]$ 个。
2. 二人轮流操作，每次分别要从两堆里面取出 $[c,d]$ 个，并且需要满足 $ad-bc=\pm 1$
3. 首先将某一堆取空的判定为胜。
4. 游戏可以继续下去的前提是 $a,b$ 互质

定义 $H(N)$ 表示满足 $gcd(a,b)=1, a>0, b>0, a+b\le N$ 的所有必胜局面 $(a,b)$ 的数量。并且 $(a,b)$ 和 $(b,a)$ 表示不同的局面。

求 $H(10^9)$

# 2 解法

通过归纳法，不难证明，对于局面 $(a,b)$ 是一个必胜态，当且仅当 $min(a,b)$ 是一个奇数，并且 $gcd(a,b)=1$。所以原问题转换为:

$$H(N) = -1 + 2\sum_{\substack{a=1 \\ a\ is\ odd}}^{N}\sum_{b=a}^{N-a}[gcd(a,b)=1]$$

这里有个 $-1$ 是因为 $(1,1)$ 被算了两次。
然后我们令

$$\begin{aligned}
F(N) &= \sum_{\substack{a=1 \\ a\ is\ odd}}^{N}\sum_{b=a}^{N-a}[gcd(a,b)=1] \\
&= \sum_{\substack{a=1 \\ a\ is\ odd}}^{N}\sum_{b=a}^{N-a}\sum_{d|(i,j)}\mu(d) \\
&= \sum_{\substack{d=1 \\ d\ is\ odd}}^{N}\mu(d)\sum_{\substack{a=1 \\ a\ is\ odd}}^{\lfloor N/d\rfloor}\sum_{b=a}^{\lfloor N/d\rfloor -a} 1 \\
&= \sum_{\substack{d=1 \\ d\ is\ odd}}^{N}\mu(d) + u*(a+1) - \sum_{\substack{a=1 \\ a\ is\ odd}}^{\lfloor\lfloor N/d\rfloor/2\rfloor} 2a
\end{aligned}$$

这样，对于 $F(N)$ 我们只需要预处理出所有的 $\mu(i)$ 就可以 $O(N)$ 的求所有的 $F(N)$.

## 3 扩展

上面其实已经是我的解法了，对于这个题 $O(N)$ 已经足够了，但是看完 thread 发现，大部分并不是 $O(N)$ 过的，有一个更快的做法，推导也不麻烦，我列在这里。

$$
\begin{aligned}
F(N) &= \sum_{\substack{a=1 \\ a \text{ is odd}}} \sum_{b=a+1}^{N-a} [\gcd(a,b)=1] \\
&= \sum_{\substack{a=1 \\ a \text{ is odd}}} \sum_{b=a+1}^{N-a} 1 - \sum_{\substack{g=3 \\ g \text{ is odd}}}^{N} \sum_{\substack{a=1 \\ a \text{ is odd}}} \sum_{b=a+1}^{N-a} [\gcd(a,b)=g] \\
&= \sum_{\substack{a=1 \\ a \text{ is odd}}}^{N} \sum_{b=a+1}^{N-a} 1 - \sum_{\substack{g=3 \\ g \text{ is odd}}} \sum_{\substack{x=1 \\ x \text{ is odd}}}^{\lfloor \frac{N}{g} \rfloor} \sum_{y=x+1}^{\lfloor \frac{N}{g} \rfloor - x} [\gcd(x,y)=1] \\
&= \left\lfloor \frac{N^2}{8} \right\rfloor - \sum_{\substack{g=3 \\ g \text{ is odd}}}^{N} F\left( \left\lfloor \frac{N}{g} \right\rfloor \right) \\
&= \left\lfloor \frac{N^2}{8} \right\rfloor - \sum_{\substack{g=3 \\ g \text{ is odd}}}^{z} F\left( \left\lfloor \frac{N}{g} \right\rfloor \right) - \sum_{x=1}^{\lfloor \frac{N}{z+1} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{N}{2x} + \frac{1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \cdot F(x)
\end{aligned}
$$

其中 $z = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$。

这样的话，可以做的 $O(N^{\frac{3}{4}})$ 的时间，$O(\sqrt{N})$ 的空间。