PINN 求解一维热传导方程研究报告

易扬迪

4 月 17 日

目录

一．摘要

本项目基于物理信息神经网络（PINN）实现了一维热传导方程的数值求解，探究了网络结构、学习率（lr）和热扩散系数（alpha）对求解精度的影响。通过参数优化，在 lr=0.01 和 alpha=2.0 时，模型预测误差降至 0.0191，验证 PINN 在偏微分方程求解中的有效性。

二．研究背景

热传导方程是描述热量传递的经典偏微分方程，传统数值方法（如有限差分法）依赖网格离散化，计算成本较高。PINN 通过将物理方程嵌入神经网络损失函数，无需网格划分即可求解 PDE，具有以下优势：

1. 无网格求解：避免离散化误差。
2. 端到端优化：直接学习连续解函数。
3. 灵活边界处理：通过损失函数自然嵌入边界条件。

三．方法

3.1 问题定义

一维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [-1,1], t \in [0,1]$$

初始条件：$u(x,0) = \sin(\pi x)$

边界条件：u(-1,t)=u(1,t)=0

3.2 PINN 模型设计

网络结构：7 层全连接网络（输入层 2 节点，隐藏层每层 50 节点，激活函数为 tanh）。

损失函数：

1. 物理残差损失：$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2$

2. 边界条件损失：$\| u(-1,t)\|^2 + \| u(1,t)\|^2$

3. 初始条件损失：$\| u(x,0) - \sin(\pi x)\|^2$ $lr \in \{0.01, 0.001, 0.0001\}$

损失权重：物理残差（1.0）、边界条件（0.5）、初始条件（0.5）。

3.3 参数探索

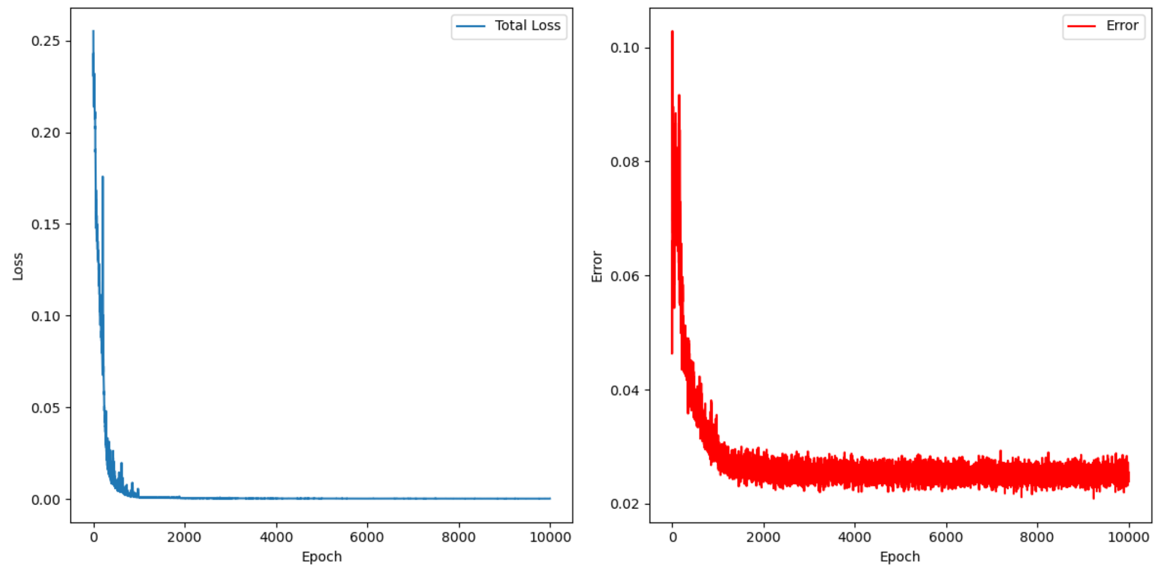
1. 学习率：$lr \in \{0.01, 0.001, 0.0001\}$

2. 热扩散系数：$\alpha \in \{0.5, 1.0, 2.0\}$

3. 训练轮次：5000 轮（参数探索）和 10000 轮（主训练）。

四. 实验结果

4.1 训练曲线分析



图表 1 训练损失曲线

4.2 参数优化结果

学习率（lr）	热扩散系数（alpha）	最终误差（Final Error）
0.01	0.5	0.0851
0.01	1.0	0.0250
0.01	**2.0**	**0.0191**
0.001	0.5	0.0889
0.001	1.0	0.0251
0.001	2.0	0.0255
0.0001	0.5	0.0885
0.0001	1.0	0.0476
0.0001	2.0	0.0374

表格 1 参数优化结果

4.3 关键结论

1. 最优参数：$0.01+\alpha=2.0$，误差最低（0.0191）。
2. 学习率影响：lr=0.01 在较大 alpha（2.0）时表现最佳，但需配合学习率调度以避免发散。
3. alpha 影响：较大 $\alpha(2.0)$ 有助于降低残差损失。
4. 低学习率局限：lr=0.0001 收敛缓慢，误差较高（0.0374）。

4.4 参数敏感性

1. 学习率（lr）：高学习率（0.01）在合理调度下收敛更快，但需谨慎选择 alpha。
2. 热扩散系数（alpha）：较大 alpha（2.0）显著降低残差损失。

五．结论

本研究成功利用 PINN 求解了一维热传导方程，验证了其在无网格 PDE 求解中的高效性。实验表明，通过合理选择学习率和热扩散系数，模型预测误差可降至 0.0191，为复杂物理场建模提供了新思路。

附录

代码仓库：https://github.com/yydjya/PINN-solves-the-one-dimensional-heat-conduction-equation.git