1 實數

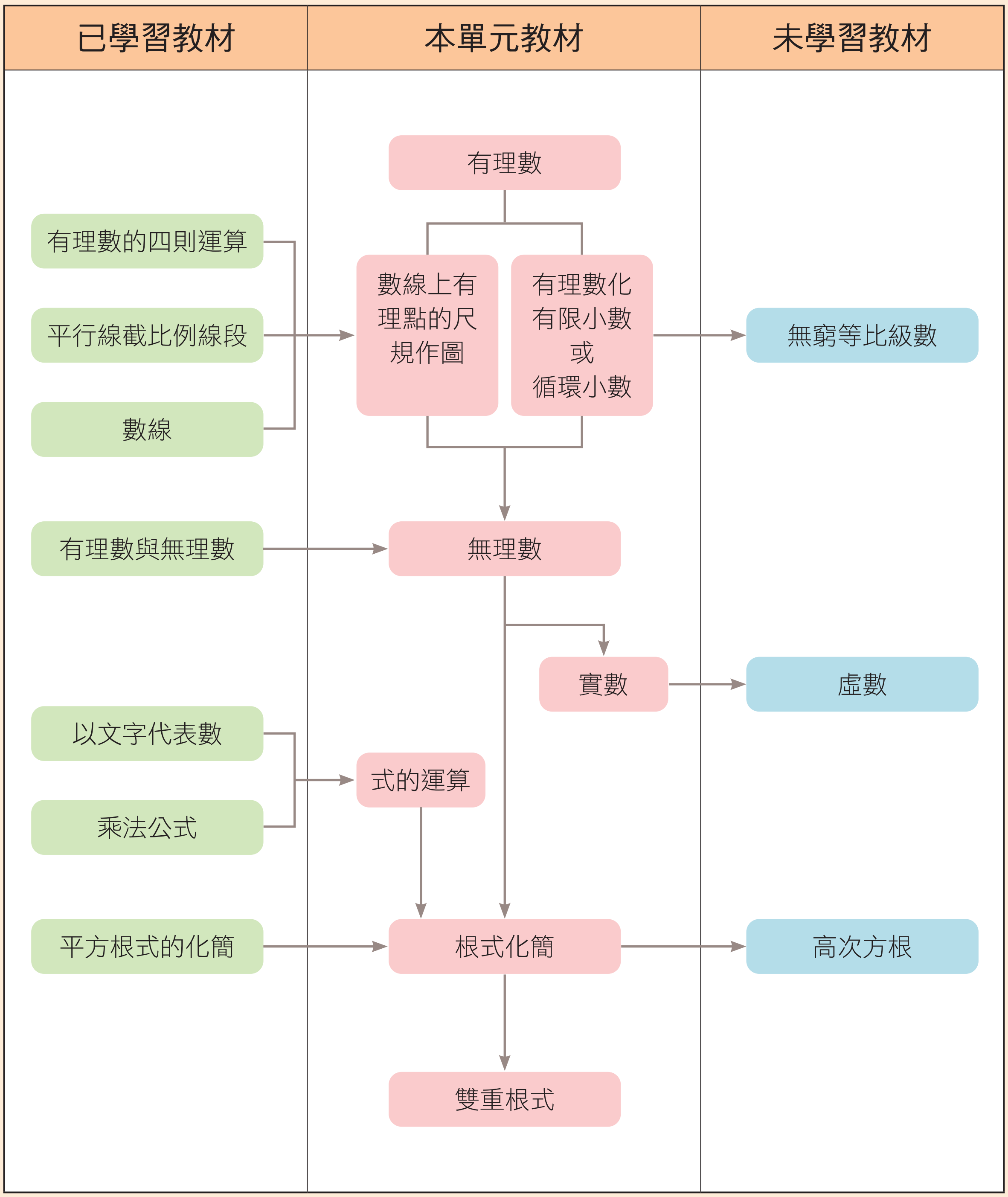
一 教材摘要

首先由學過的有理數延伸到無理數，並由十分逼近法介紹實數可用有限或無限小數表示，複習實數的四則運算、次序關係等性質。接著介紹利用乘法公式進行因式分解與練習根式運算及雙重根式的化簡。最後介紹算幾不等式與其相關之應用問題。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 認識有理數，能將有理數化成有限小數或循環小數。 2. 能在數線上標出給定的有理數。 3. 了解有理數稠密性的意義。 4. 知道無理數的定義。 5. 了解實數系的組成關係。 6. 了解實數的運算性質與次序關係。 7. 對文字符號所組成的代數式能進行展開、分解及化簡等情形。 8. 能熟練公式並應用。 9. 能作根式運算與有理化。 10. 能作雙重根式的化簡。 11. 能了解算幾不等式及其應用。	6

三 教材地位分析


已學習教材
本單元教材
未學習教材
有理數
有理數的四則運算
平行線截比例線段
數線
數線上有理點的尺規作圖
有理數化有限小數或循環小數
無窮等比級數
有理數與無理數
無理數
實數
虛數
以文字代表數
乘法公式
式的運算
平方根式的化簡
根式化簡
高次方根
雙重根式

1 實數

數字與生活息息相關，例如物品個數、比例等，都有數的蹤跡。在國中時，透過畢氏定理引進形如 $\sqrt{2}$ 、$2-\sqrt{3}$ 等含有二次方根的數。而科學中有許多更為複雜含有根號的式子，例如愛因斯坦提及：當太空船以光速的 x 倍（$0<x<1$）飛行 t 年時，地球上已經過了 $\dfrac{t}{\sqrt{1-x^2}}$ 年。

以上分母中有根號的式子是什麼呢？本單元先從分數談起，進一步討論根式，最後延伸至根式的運算。

▲圖1

教學要點

❶認識有理數並可做分數與小數之間的轉換。能夠在數線上標示有理數並了解有理數的稠密性。

甲 有理數 ❶

圖 2 的麵包食譜中有許多常見的數字形式，例如整數 320、小數 25.6、分數 $\dfrac{1}{3}$ 等，這些數都可以寫成分數的形式。數學上，凡是可以寫成分數的形式的數都稱為**有理數**。

▲圖2

有理數的定義

可以表示成 $\dfrac{q}{p}$ 的數，稱為有理數（其中 p,q 為整數，且 $p\neq 0$）。

2

關於有理數，補充說明如下：

(1) 所有的整數都是有理數，例如整數 2 可以寫成 $\frac{2}{1}$ 。

(2) 有理數的表示方法並不是唯一的，例如 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\cdots$ 等。

(3) 任意兩個有理數作加、減、乘、除（除數不可以是 0）運算後仍然是有理數。

例如：$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5+6}{10}=\frac{11}{10}$，$\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$，…等。

利用除法，可將有理數化成整數或小數，我們以下面例題來說明。

例題 1

將下列各有理數化成小數：

(1) $\frac{11}{40}$ 。　　(2) $\frac{2}{11}$ 。

解

(1) 可利用直式除法，將 11 除以 40，得

$$
\begin{array}{r}
0.275\\
40\overline{)11.000}\\
\underline{0}\\
11\,0\\
\underline{8\,0}\\
3\,00\\
\underline{2\,80}\\
200\\
\underline{200}\\
0
\end{array}
$$

故 $\frac{11}{40}=0.275$ 。或利用擴分，將分母化成 10 的次方，得

$$\frac{11}{40}=\frac{11}{2^3\times5}=\frac{11\times5^2}{2^3\times5^3}=\frac{275}{10^3}=0.275 \text{ 。}$$

教學小提醒

1 任意兩個有理數加、減、乘、除（0 不能當除數）後的結果，仍為有理數，稱此為有理數的封閉性。有理數的加、減、乘、除（0 不能當除數）等運算具有封閉性，但整數只有對加、減、乘具有封閉性，對除法沒有。

素養題組 菊版紙規格（請見享備課/教學光碟）

(2) 利用直式除法，將 2 除以 11，得

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.1818\cdots \\
11 \big) & 2.0000\cdots \\
 & 0 \\ \hline
\text{餘數}2 \rightarrow & 2\;0 \\
 & 1\;1 \\ \hline
\text{餘數}9 \rightarrow & 9\;0 \\
 & 8\;8 \\ \hline
\text{餘數}2 \rightarrow & 2\;0 \\
 & 1\;1 \\ \hline
\text{餘數}9 \rightarrow & 9\;0 \\
 & 8\;8 \\ \hline
 & \cdots
\end{array}
$$

故 $\dfrac{2}{11} = 0.1818\cdots$ 。

由例題 1 可發現，將 $\dfrac{2}{11}$ 化成小數時，小數點以後的數字 1 與 8 依序不斷的循環出現，這種小數稱為**循環小數**，記為

$$\frac{2}{11} = 0.181818\cdots = 0.\overline{18}\ ,$$

讀作「零點一八，一八循環」。在循環小數中，小數點之後重複出現的那一段數字稱為**循環節**，如上述例子的循環節為 18。將 $\dfrac{2}{11}$ 化成小數的過程中，因為除數為 11，所以餘數只可能是 0, 1, 2, ⋯, 10 之中的一數。這表示最多經過 11 次運算，餘數就會重複地出現。像這樣利用除法將有理數化成小數，如果不能除盡成為有限小數，就一定可以化成循環小數。

隨堂練習

1 將有理數 $\dfrac{5}{8}$ 與 $\dfrac{1}{7}$ 化成小數。

$0.625,\ 0.\overline{142857}$

教學小提醒

1 若最簡分數的分母只有 2 或 5 的質因數，則必可化成有限小數；若含有 2 或 5 以外的質因數，則必可化成循環小數。

隨堂練習解答

1 利用直式除法分別將 5 除以 8, 1 除以 7，如下：

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.625 \\
8\big) & 5.000 \\
 & 0 \\ \hline
 & 5\;0 \\
 & 4\;8 \\ \hline
 & 20 \\
 & 16 \\ \hline
 & 40 \\
 & 40 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 0.142857 \\
7\big) & 1.000000 \\
 & 0 \\ \hline
 & 1\;0 \\
 & 7 \\ \hline
 & 30 \\
 & 28 \\ \hline
 & 20 \\
 & 14 \\ \hline
 & 60 \\
 & 56 \\ \hline
 & 40 \\
 & 35 \\ \hline
 & 50 \\
 & 49 \\ \hline
 & 1
\end{array}
$$

故 $\dfrac{5}{8} = 0.625$ ，

$\dfrac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ 。

那麼，是不是每個有限小數與循環小數也都可以化成有理數的形式呢？來看下面的例題。

例題 2

將下列各小數化成最簡分數：

(1) 0.28 。　(2) $0.\overline{32}$ 。　(3) $1.4\overline{5}$ 。

解

(1) $0.28=\dfrac{28}{100}=\dfrac{7}{25}$ 。

(2) 設 $x=0.\overline{32}$ ，則 $100x=32.\overline{32}$ 。

將兩式相減，$100x-x=32.\overline{32}-0.\overline{32}$ ，

得 $99x=32$ ，因此 $x=\dfrac{32}{99}$ 。

(3) 設 $x=1.4\overline{5}$ ，則 $10x=14.\overline{5}$, $100x=145.\overline{5}$ ，

將兩式相減，$100x-10x=145.\overline{5}-14.\overline{5}$ ，

得 $90x=145-14$ ，因此 $x=\dfrac{145-14}{90}=\dfrac{131}{90}$ 。

隨堂練習

將下列各小數化成最簡分數：

(1) $\dfrac{183}{250}$　(2) $\dfrac{169}{33}$　(3) $\dfrac{157}{990}$

(1) 0.732 。　(2) $5.\overline{12}$ 。　(3) $0.1\overline{58}$ 。 1

仿照例題 2 及其隨堂練習的方式，每個有限小數與循環小數都可以化成有理數的形式。事實上，

(1) 任意有理數都可化成整數、有限小數或循環小數。

(2) 整數、有限小數與循環小數都是有理數。

綜合上面討論有以下性質。

教學小提醒

1 ❶循環小數化成分數可先直觀說明，待極限章節再行證明。

隨堂練習解答

❶(1) $0.732=\dfrac{732}{1000}=\dfrac{183}{250}$ 。

(2) 設 $x=5.\overline{12}$ ，則 $100x=512.\overline{12}$ 。

將兩式相減，$100x-x=512.\overline{12}-5.\overline{12}$ ，得 $99x=507$ ，因此 $x=\dfrac{507}{99}=\dfrac{169}{33}$ 。

(3) 設 $x=0.1\overline{58}$ ，

則 $100x=15.8\overline{58}$ ，

將兩式相減，

$100x-x=15.8\overline{58}-0.1\overline{58}$ ，

得 $99x=15.8-0.1=15.7$

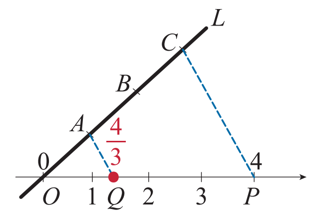
$=\dfrac{157}{10}$ ，因此 $x=\dfrac{157}{990}$ 。

數線上標出有理點
（請見享備課/教學光碟）

有理數的成員

有理數恰包含整數、有限小數和循環小數。

每個整數都可以在數線上找到對應的點，但是否所有的有理數都可在數線上找到對應的點呢？我們以 $\dfrac{4}{3}$ 為例：$\dfrac{4}{3}$ 就是把 4 平分成 3 等分。首先，取 O 為數線原點，在數線上取 P 點坐標為 4，過 O 點另作一線 L，並在 L 上取 $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}$，連接 $\overline{CP}$ 並做 $\overline{AQ}$ 平行 $\overline{CP}$，如圖 3。藉由相似三角形邊長成比例性質，得 $\dfrac{\overline{OQ}}{4}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\dfrac{1}{3}$，即 $\overline{OQ}=\dfrac{4}{3}$。因此可以在數線上找到坐標為 $\dfrac{4}{3}$ 的點。



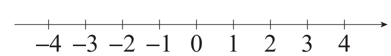
▲圖3

仿照上述的作圖法，任意有理數都可以在數線上找到對應的點，稱為**有理點**。

1

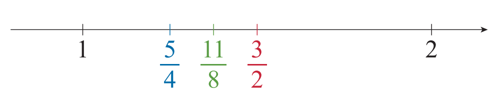
隨堂練習

仿照上述的作圖法，在數線上分別標出 $\dfrac{3}{5}$ 及 $-\dfrac{3}{5}$ 所代表的點。



見解析

1 在數線上，任意兩個整數的點之間不一定存在其他整數的點，例如兩連續整數 1, 2 之間就不存在其他整數；但是任意兩個有理點之間，一定還可以找到其他有理點，例如 1 與 2 的中點 $\dfrac{3}{2}$、1 與 $\dfrac{3}{2}$ 的中點 $\dfrac{5}{4}$、$\dfrac{3}{2}$ 與 $\dfrac{5}{4}$ 的中點 $\dfrac{11}{8}$ 都是有理點，如圖 4 所示。



▲圖4

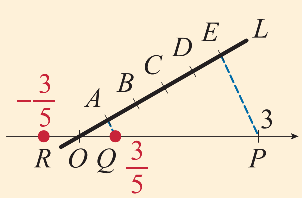
6

教學小提醒

1 之後分點公式學過後，亦可以用分點公式說明。

隨堂練習解答

1 首先，取 O 為數線原點，在數線上取 P 點坐標為 3，過 O 點另作一線 L，並在 L 上取 $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$，連接 $\overline{EP}$ 並做 $\overline{AQ}$ 平行 $\overline{EP}$。藉由相似三角形邊長成比例性質，得 $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OE}}=\dfrac{1}{5}=\dfrac{\overline{OQ}}{3}$，即 $\overline{OQ}=\dfrac{3}{5}$。因此可以在數線上找到坐標為 $\dfrac{3}{5}$ 的點。以 O 點為圓心、$\overline{OQ}$ 長為半徑，在數線負向畫弧得 R 點為 $-\dfrac{3}{5}$。



因為任意兩個有理點之間，一定還可以找到其他有理點，所以任意兩相異的有理數 a 和 b 之間，都至少存在一個有理數（例如 $\dfrac{a+b}{2}$ 就是），這就是有理數的**稠密性**。

有理數的稠密性

任兩個相異有理數之間，至少存在一個有理數。

事實上，根據有理數的稠密性，不難看出任意兩個相異有理數之間都存在無限多個有理數。來做一道練習。

隨堂練習

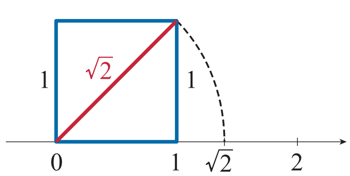
試找出一個介於 $\dfrac{3}{2}$ 和 $\dfrac{5}{3}$ 之間的有理數。

$\dfrac{19}{12}$

乙 無理數與實數

(一) 無理數

有理點在數線上的分布雖然是密密麻麻的，但仍有許多點對應到的數無法用有理數的形式表示，

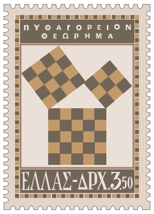


▲圖5

例如邊長是 1 的正方形，其對角線的長 $\sqrt{2}$ 對應到數線上的點就不是有理點，我們將這些數線上不是有理點所對應的數稱為**無理數**。也就是說，在數線上的數不是有理數就是無理數。

根據有理數的定義，將無理數定義如下。

畢達哥拉斯（Pythagoras，約西元前572～492），古希臘數學家，並創立畢氏學派。其名言「萬物皆數」指的是宇宙萬物皆由數字所主宰。



教學小提醒

1 整數不具有稠密性，兩相異整數的距離大於或等於 1。

教學要點

1 認識無理數並能進行根式的化簡，能作平方根的作圖。能理解十分逼近法的概念並利用計算機進行小數的估算。

數學知識家

1 有關「數學家小傳——畢達哥拉斯」請見補充教材。

隨堂練習解答

1 $\dfrac{3}{2}$ 和 $\dfrac{5}{3}$ 的中點 $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{3}}{2}=\dfrac{9+10}{12}=\dfrac{19}{12}$ 是一個位於其間的有理數。

無理數

不能表示成 $\frac{q}{p}$ 的數（p, q 為整數，$p \neq 0$）稱為無理數。

之前提過，任意有理數都可化成整數、有限小數或循環小數，而無理數不能化成以上三種形式。事實上，所有的無理數都是不循環的無限小數。

那麼，怎麼知道 $\sqrt{2}$ 不是有理數呢？如果 $\sqrt{2}$ 是有理數，那麼 $\sqrt{2}$ 可表為 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（最簡分數），其中 p, q 為正整數。將上式整理可得 $2p^2=q^2$，可推得 $2p^2-pq=q^2-pq$，即 $p(2p-q)=q(q-p)$，移項可得

$$\frac{2p-q}{q-p}=\frac{q}{p}=\sqrt{2}\text{。} \quad ①$$

又因為 $1<\frac{q}{p}=\sqrt{2}<2$，即 $p<q<2p$，所以

$$0<q-p<p\text{。}$$

也就是說，式子 ① 中的分數 $\frac{2p-q}{q-p}$ 是由分數 $\frac{q}{p}$ 約分得來，但這與 $\frac{q}{p}$ 為 $\sqrt{2}$ 的最簡分數矛盾。因此 $\sqrt{2}$ 是無理數。

像上述的證明方法稱為**反證法**，其原理為：從「假設結論不成立」出發，通過一系列的推理，導出矛盾的結果；因此，「假設結論不成立」是錯誤的，也就是說，「結論成立」才是正確的。

事實上，以上 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明有其幾何上的意義，同學可自行參閱附錄一。

教學小提醒

❶ 無理數的四則運算不具有封閉性，例如：$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$。

❶ 有了無理數 $\sqrt{2}$，就可以衍生出更多個無理數，如 $3\sqrt{2}$ 也是無理數。原因是：若 $3\sqrt{2}$ 是有理數 a，則 $\sqrt{2}=\frac{a}{3}$ 也是有理數，這與「$\sqrt{2}$ 是無理數」的事實不符，故 $3\sqrt{2}$ 是無理數。同理可知道 $5\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$ 也都是無理數。

一般而言，$\sqrt{2}$ 具有以下的性質。而且將此性質中的 $\sqrt{2}$ 換成任意無理數，這個性質還是成立。

無理數 $\sqrt{2}$ 的性質

若 a,b 為有理數，且 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=b=0$。

這是因為若 $b\neq 0$，則 $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$ 為一有理數，這與「$\sqrt{2}$ 是無理數」的事實不符。因此 $b=0$，從而 $a=0$。

上述的性質中，應特別注意 a,b 均為有理數的條件。因為當沒有此一條件時，若 $a+b\sqrt{2}=0$，則結論「$a=b=0$」未必成立。例如取 $a=\sqrt{2}$，$b=-1$ 時，$a+b\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ 亦可成立。

例題 3

已知 a,b 是有理數，且 $(3+5\sqrt{2})a+(2-\sqrt{2})b=-1+7\sqrt{2}$，求 a,b 的值。

解

由題意可知 $3a+5\sqrt{2}a+2b-\sqrt{2}b+1-7\sqrt{2}=0$，整理得

$$(3a+2b+1)+(5a-b-7)\sqrt{2}=0,$$

因為 a,b 都是有理數，所以 $3a+2b+1$ 和 $5a-b-7$ 也都是有理數，由性質得

$$\begin{cases}3a+2b+1=0\\5a-b-7=0\end{cases},$$

解得 $a=1,\ b=-2$。

隨堂練習

已知 a,b 是有理數，且 $(3+2\sqrt{2})a+(2-\sqrt{2})b=7\sqrt{2}$，求 a,b 的值。

$a=2,\ b=-3$

補充例題

1 下列何者正確?

(1)若 a^3 為有理數，且 a^5 是有理數，則 a 是有理數

(2)若 a^3 為有理數，且 a^6 是有理數，則 a 是有理數

(3)若 a,b 都是無理數，則 $a+b$ 也是無理數

(4)若 a 是有理數，b 是無理數，則 ab 是無理數

(5)若 a,b 均為實數，$a+b$ 為有理數，且 ab 為無理數，則 $a-b$ 必為無理數。

解：

(1) $a^3\in\mathbb{Q},\ a^5\in\mathbb{Q}$,

$\dfrac{(a^3)^2}{a^5}=a\in\mathbb{Q}$。

(2)不成立，反例 $\sqrt[3]{2}=a$。

(3)不成立，反例 $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$。

(4)不成立，反例 $a=0$, $b=\sqrt{3}$。

(5)假設 $a-b\in\mathbb{Q}$，

因為 $a+b\in\mathbb{Q}$，

所以

$(a+b)+(a-b)=2a\in\mathbb{Q}$，

又

$(a+b)-(a-b)=2b\in\mathbb{Q}$，

即 $a,\ b\in\mathbb{Q}$，得 $ab\in\mathbb{Q}$，

矛盾。故 $a-b$ 是無理數。

故選(1)(5)。

教學小提醒

1 若 a,b,c,d 為有理數，

且 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，

則 $a=c$ 且 $b=d$。

隨堂練習解答

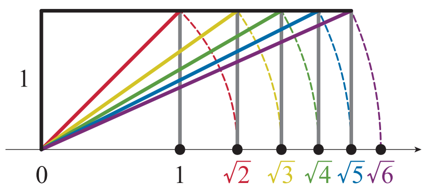
1 由題意可知 $3a+2\sqrt{2}a+2b-\sqrt{2}b-7\sqrt{2}=0$，整理得 $(3a+2b)+(2a-b-7)\sqrt{2}=0$，

因為 a,b 都是有理數，所以 $3a+2b$ 和 $2a-b-7$ 也都是有理數，由性質得 $\begin{cases}3a+2b=0\\2a-b-7=0\end{cases}$，

解得 $a=2,\ b=-3$。

事實上，對任意正整數 n，當 n 不是完全平方數時，形如 $\sqrt{n}$ 的數皆為無理數。

利用畢氏定理，便可逐一作出 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots$ 等線段的長度與其在數線上的位置，如圖 6 所示。此外，圓周率 $\pi = 3.14159\cdots$ 也是一個無理數。



▲圖6

❶ 由數線上可看出 $\sqrt{2}$ 介於 1 和 2 之間，但 $\sqrt{2}$ 到底是多少呢？我們可以用國中時介紹過的十分逼近法來求 $\sqrt{2}$ 的近似值。

判斷 2 所在的範圍 ⟶	$\sqrt{2}$ 的範圍
(1) 由 $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ 可得 $1^2 < 2 < 2^2$。	$1 < \sqrt{2} < 2$
(2) 由 $1.1^2 = 1.21$, $1.2^2 = 1.44$, $1.3^2 = 1.69$, $1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25$ 可得 $1.4^2 < 2 < 1.5^2$。	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$
(3) 由 $1.41^2 = 1.9881$, $1.42^2 = 2.0164$ 可得 $1.41^2 < 2 < 1.42^2$。	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$
(4) 由 $1.411^2 = 1.990921$, $1.412^2 = 1.993744$, $1.413^2 = 1.996569$, $1.414^2 = 1.999396$, $1.415^2 = 2.002225$ 可得 $1.414^2 < 2 < 1.415^2$。	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$
⋮	⋮

因為 $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$，所以 $\sqrt{2} = 1.414\cdots \approx 1.41$，其中符號「$\approx$」表示近似的意思。

GGB 平方根的作圖

教學小提醒

❶ 此部分的教學內容建立在學生對計算機的先備知識如下：

(1) 已知道四則運算的功能鍵。

(2) 尚未學到根號的功能鍵。

因此，教學活動的設計上，引導學生利用十分逼近法先求出 $\sqrt{2}$ 的近似值，也呼應以前沒有計算機時的操作模式，再學習利用根號鍵以求出 $\sqrt{2}$ 的近似值。

10

隨堂練習

以十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值。（無條件捨去到小數點後第二位）

1.73

❶

利用計算機也可以快速地得到 $\sqrt{2}$ 的近似值：只要依序按下

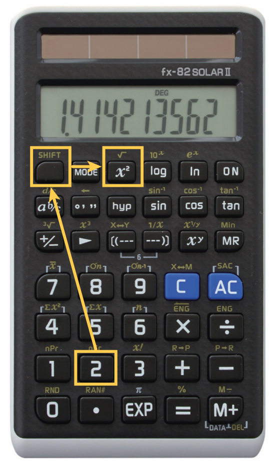
2 SHIFT √

如圖 7，就可得到

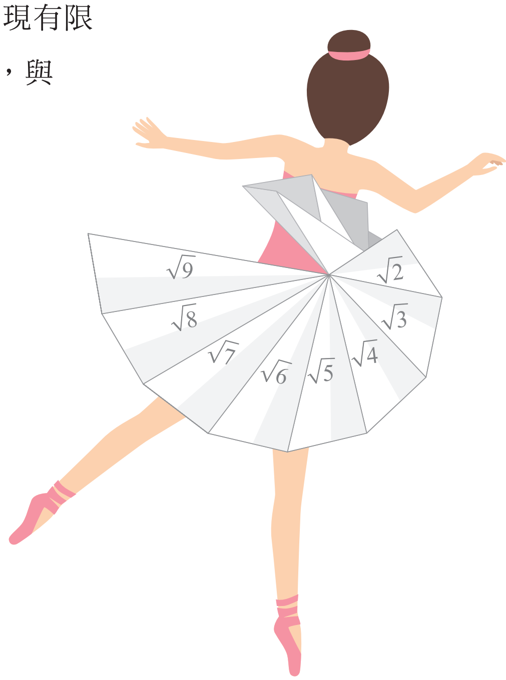
$$\sqrt{2} \approx 1.414213562 \text{ 。}$$

不同的計算機機型按鍵的順序可能有些許差別，同學可自行參照各計算機的使用說明書。

因為 $\sqrt{2}$ 不是有理數，所以它既不是有限小數也不是循環小數。因此，它是一個不循環的無限小數。須特別留意的是，因為計算機的螢幕僅能呈現有限位數，所以計算機產生的結果只是近似值，與 $\sqrt{2}$ 必定有誤差。



▲圖7



隨堂練習解答

❶

判斷 3 所在的範圍 ⟶	$\sqrt{3}$ 的範圍
$1^2 < 3 < 2^2$	$1 < \sqrt{3} < 2$
$2.89 = (1.7)^2 < 3 < (1.8)^2 = 3.24$	$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$
$2.9929 = (1.73)^2 < 3 < (1.74)^2 = 3.0276$	$1.73 < \sqrt{3} < 1.74$

故 $\sqrt{3} \approx 1.73$ 。

教學小提醒

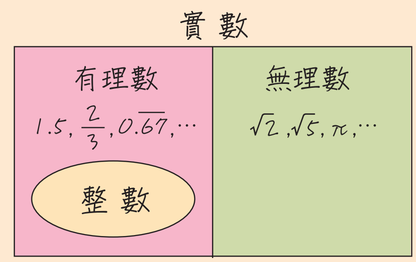
1. 每個實數都可在數線上找到唯一的點對應，反之，數線上每個點都對應唯一的實數。
2. 實數的加、減、乘、除（0 不能當除數）等運算具有封閉性。

(二) 實數

我們將有理數和無理數統稱為**實數**。

實數的組成

- 實數
  - 有理數
    - 整　　數
      - 正整數
      - 零
      - 負整數
    - 有限小數
    - 循環小數
  - 無理數（不循環的無限小數）



任意兩個實數作加、減、乘、除（除數不可以是 0）運算後仍然是實數，且實數在運算上有下列性質。

1. **實數的運算性質**：設 a, b, c 是任意實數。

(1) 交換律：$a+b=b+a$，$ab=ba$。

(2) 結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$。

(3) 分配律：$a(b+c)=ab+ac$。

(4) 消去律：若 $a+c=b+c$，則 $a=b$。

若 $ac=bc$ 且 $c\neq 0$，則 $a=b$。

任意實數都可以在數線上找到對應的點，而且愈往右邊的點所對應的實數愈大。實數的大小關係有下列性質。

2. **實數的次序關係**：設 a, b, c 是任意實數。

(1) 三一律：「$a<b$，$a=b$，$a>b$」三式中恰有一個成立。

(2) 遞移律：若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$。

(3) 不等量加法：若 $a<b$，則 $a+c<b+c$。

(4) 不等量乘法：若 $a<b$ 且 $c>0$，則 $ac<bc$；

若 $a<b$ 且 $c<0$，則 $ac>bc$。

(5) 對任一實數 a，$a^2\geq 0$ 恆成立。（$a^2=0$ 僅在 $a=0$ 時成立）

丙 乘法公式

國中時，我們曾學過的二次乘法公式如下：

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。 【和的平方公式】

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。 【差的平方公式】

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。 【平方差公式】

透過分配律也可得到三數和的平方公式：

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$$

$$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 \text{，}$$

整理得

(4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ 。 【三數和的平方公式】

例題 4

利用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a-2b)^2+(2a+b)^2$ 。 (2) $(a-b+1)(a-b-1)$ 。 (3) $(a-2b+3c)^2$ 。

解

(1) $(a-2b)^2+(2a+b)^2=(a^2-4ab+4b^2)+(4a^2+4ab+b^2)=5a^2+5b^2$ 。

(2) $(a-b+1)(a-b-1)=[(a-b)+1][(a-b)-1]$

$$=(a-b)^2-1^2=a^2-2ab+b^2-1 \text{ 。}$$

(3) $(a-2b+3c)^2=[a+(-2b)+(3c)]^2$

$$=a^2+(-2b)^2+(3c)^2+2a(-2b)+2(-2b)(3c)+2a(3c)$$

$$=a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ac \text{ 。}$$

教學要點

1 對文字符號所組成的代數式能進行展開，分解及化簡等運算。

教學小提醒

1 和或差的 n 次方展開之係數為巴斯卡三角形。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

此處無須提到二項式定理。

隨堂練習

1 利用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a+1)^2+(a-1)^2$。　(2) $(a-b-c)(a+b+c)$。　(3) $(a-b+2)^2$。

(1) $2a^2+2$　(2) $a^2-b^2-c^2-2bc$

(3) $a^2+b^2-2ab+4a-4b+4$

數學知識家

1 有關「乘法公式的無字證明」請見補充說明。

1 透過和的平方公式及分配律，可導出和的立方公式：

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=\underline{a^3+2a^2b+ab^2}+\underline{ba^2+2ab^2+b^3}\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\text{。}\end{aligned}$$

利用和的立方公式，將 b 置換成 $-b$，也可導出 $(a-b)^3$ 公式如下：

$$\begin{aligned}(a-b)^3&=[a+(-b)]^3\\&=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3\\&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\text{。}\end{aligned}$$

將和與差的立方公式整理如下。

教學小提醒

1 兩個 n 次方數之差：

a^n-b^n

$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$，

兩個奇數次方數之和：

a^n+b^n

$=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$。

1

和與差的立方公式

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。　【和的立方公式】

(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。　【差的立方公式】

隨堂練習解答

1 (1) $(a+1)^2+(a-1)^2=(a^2+2a+1)+(a^2-2a+1)=2a^2+2$。

(2) $(a-b-c)(a+b+c)=[a-(b+c)][a+(b+c)]=a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-c^2-2bc$。

(3) $(a-b+2)^2=a^2+(-b)^2+2^2+2a(-b)+2(-b)\cdot 2+2a\cdot 2=a^2+b^2+-2ab+4a-4b+4$。

透過上述的立方公式來練習一道題目。

例題 5

利用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a+2b)^3$。　　　(2) $(2a-3b)^3$。

解

(1) $(a+2b)^3=(a)^3+3(a)^2(2b)+3(a)(2b)^2+(2b)^3$

$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$。

(2) $(2a-3b)^3=(2a)^3-3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2-(3b)^3$

$=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$。

隨堂練習

利用乘法公式，展開下列各式：❶

(1) $(3a+2b)^3$。　　　(2) $(2a-1)^3$。

(1) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$
(2) $8a^3-12a^2+6a-1$

事實上，除了和與差的立方公式外，透過分配律還可以驗證兩個與立方相關的乘法公式。

立方和與立方差公式

(1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。　【立方和公式】

(2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。　【立方差公式】

隨堂練習解答

❶ (1) $(3a+2b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2+(2b)^3=27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$。

(2) $(2a-1)^3=(2a)^3-3(2a)^2\times 1+3(2a)\times 1^2-1^3=8a^3-12a^2+6a-1$。

15

以下來練習一道題目。

例題 6

利用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$。 (2) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$。

解

(1) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)=(a+2b)\left[a^2-a(2b)+(2b)^2\right]$

$=a^3+(2b)^3$

$=a^3+8b^3$。

(2) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a-b)\left[(2a)^2+(2a)b+b^2\right]$

$=(2a)^3-b^3$

$=8a^3-b^3$。

隨堂練習

利用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$。 (2) $(a+1)(a^2-a+1)$。

(1) a^3-27b^3 (2) a^3+1

補充例題

1 利用乘法公式，因式分解 x^6-1。

解：

x^6-1

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x-1)\cdot(x^2-x+1)(x^2+x+1)$。

透過乘法公式也可以用來處理一些特殊多項式的因式分解。

例題 7

利用乘法公式，因式分解下列各式：

(1) x^3+1。 (2) $27x^3-1$。 (3) $x^3+9x^2+27x+27$。

解

(1) $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\times1+1^2)=(x+1)(x^2-x+1)$。

隨堂練習解答

1 (1) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)=(a-3b)\left[a^2+a\times(3b)+(3b)^2\right]=a^3-(3b)^3=a^3-27b^3$。

(2) $(a+1)(a^2-a+1)=(a+1)\left[a^2-a\times(1)+(1)^2\right]=a^3+(1)^3=a^3+1$。

(2) $27x^3-1=(3x)^3-1^3=(3x-1)\left[(3x)^2+(3x)\times1+1^2\right]$

$=(3x-1)(9x^2+3x+1)$ 。

(3) $x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\times x^2\times3+3\times x\times3^2+3^3=(x+3)^3$ 。

隨堂練習

因式分解下列各式：❶

(1) $8x^3+1$ 。　(2) x^3-125 。　(3) $x^3-6x^2+12x-8$ 。

(1) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$　(2) $(x-5)(x^2+5x+25)$　(3) $(x-2)^3$

透過乘法公式，有時可以處理一些分式的求值問題。

例題 8

已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，求下列各式的值：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 。　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 。

解

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=3^2-2=9-2=7$ 。

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=3\times(7-1)=3\times6=18$ 。

隨堂練習

已知 $x-\dfrac{1}{x}=-2$，求下列各式的值：❷

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 。　(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ 。

(1) 6　(2) -14

隨堂練習解答

❶ (1) $8x^3+1=(2x)^3+1^3=(2x+1)\left[(2x)^2-(2x)\times1+1^2\right]=(2x+1)(4x^2-2x+1)$ 。

(2) $x^3-125=x^3-5^3=(x-5)(x^2+5x+25)$ 。

(3) $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3=(x-2)^3$ 。

❷ (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=(-2)^2+2=4+2$

$=6$ 。

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=(-2)\times(6+1)$

$=(-2)\times7$

$=-14$ 。

教學要點

1 此處根式的化簡以雙重根式為主。

教學小提醒

1 此處分母的有理化著重於利用平方差進行有理化，利用立方和及立方差公式有理化的題目可視學生程度補充。在此不涉及 3 次方根的有理化。

補充例題

1 $\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}$ 等於下列哪一個選項？

(1) 1.01
(2) 1.05
(3) 1.1
(4) 1.15
(5) 1.21。　　【101學測】

解：$\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}$

$=\sqrt{\dfrac{4^2+5^2+5^2\times4^2}{5^2\times4^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{21^2}{20^2}}$

$=\dfrac{21}{20}=1.05$。

丁 根式與分式的運算

(一) 根式的化簡與分式的有理化

給定 a 為正實數或 0，當實數 x 滿足 $x^2=a$ 時，稱 x 為 a 的平方根。例如：3 有兩個平方根，分別為 $\sqrt{3}$ 與 $-\sqrt{3}$（其中 $\sqrt{3}$ 為正平方根，$-\sqrt{3}$ 為負平方根）。含有根號的式子稱為**根式**，來複習一下國中學過的兩個性質：設 $a\geq0$ 且 $b\geq0$，則

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。　　(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，$b\neq0$。

習慣上，我們會將平方根寫成 $\dfrac{q\sqrt{n}}{p}$ 的形式，其中 $\dfrac{q}{p}$ 為最簡分數，n 為大於 1 的正整數，且不是任何完全平方數的倍數。例如：

$$\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{2^2\times3}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{5}。$$

例題 9

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{75}$。　(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$。　(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$。

解

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{75}=\sqrt{2^2\times3}+\sqrt{5^2\times3}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$。

(2) 利用平方差公式，可得

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2=7-2=5。$$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

隨堂練習解答

1 (1) $3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{45}+\sqrt{75}=3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3}=11\sqrt{3}$。

(2) $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1=8$。

(3) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{\sqrt{4\times5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $11\sqrt{3}$　(2) 8　(3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(1) $3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{45}+\sqrt{75}$。　(2) $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2$。　(3) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$。

❶ 算幾封信（請見享備課/教學光碟）素養題組

一般而言，我們會將根式的分母化成正整數，這個過程稱為**有理化分母**，以下面的例子來說明。

例題 10

化簡下列各式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$。　(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$。

解

(1) 利用平方差公式，得

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\text{。}$$

(2)
$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{1}+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=3\text{。}$$

隨堂練習

化簡下列各式：

❷

(1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$。　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$。

(1) $2-\sqrt{3}$　(2) 4

隨堂練習解答

❷ (1) 利用平方差公式，得 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{6-2\sqrt{12}+2}{4}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{4}{1}=4$。

教學小提醒

1 此處可不做太多其他技巧性運算的例題。

隨堂練習解答

1 分別將各數有理化後平方，得

$a^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{4}}\right)^2$

$=\left(\sqrt{6}+\sqrt{4}\right)^2$

$=10+2\sqrt{24}$，

$b^2=\left(\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}\right)^2$

$=\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)^2$

$=11+2\sqrt{24}$，

$c^2=\left(\dfrac{10}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}\right)^2$

$=\left(\sqrt{12}+\sqrt{2}\right)^2$

$=14+2\sqrt{24}$，

因為 $14>11>10$，

所以 $c^2>b^2>a^2$，

即 $a<b<c$。

再來看一道例題。

例題 11

比較下列各數的大小：

$a=\sqrt{2}+\sqrt{11}$, $b=\sqrt{3}+\sqrt{10}$, $c=\sqrt{6}+\sqrt{7}$。

解

解法一

分別將各數平方，得

$$a^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2=13+2\sqrt{22}，$$

$$b^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2=13+2\sqrt{30}，$$

$$c^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=13+2\sqrt{42}。$$

因為 $\sqrt{22}<\sqrt{30}<\sqrt{42}$，所以 $a^2<b^2<c^2$，又 a, b, c 皆為正數，

可得 $a<b<c$。

解法二

利用計算機，可得

$$a=\sqrt{2}+\sqrt{11}\approx 4.73,\ b=\sqrt{3}+\sqrt{10}\approx 4.89,\ c=\sqrt{6}+\sqrt{7}\approx 5.10。$$

故 $a<b<c$。

隨堂練習

1 比較下列各數的大小：

$a=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{4}}$, $b=\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$, $c=\dfrac{10}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$。

$a<b<c$

來看一道與引言相關的例題。

例題 12

愛因斯坦認為極大的飛行速度會使得飛行物體的時間減慢，並提出：「太空人以光速的 x 倍（$0<x<1$）進行 t 年的太空旅行（太空人老了 t 歲）；旅行結束後返回地球，地球上已經過了 $\dfrac{t}{\sqrt{1-x^2}}$ 年（地球上的人老了 $\dfrac{t}{\sqrt{1-x^2}}$ 歲）。」根據上述理論，試回答下列問題：

(1) 某太空人以光速的 $\dfrac{5}{13}$ 倍進行 60 年的太空旅行，旅行結束後返回地球，地球上過了__________年。

(2) 某年，一太空人 27 歲，他有位 3 歲的兒子。此年，該太空人以光速的 $\dfrac{4}{5}$ 倍進行 t 年的太空旅行；旅行結束後返回地球，太空人發現他跟兒子的年紀竟然一樣。試問：太空人旅行了多少年？

解

(1) 因為由題意可得，$t=60$, $x=\dfrac{5}{13}$，所以地球上過了

$$\frac{t}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{60}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}}=65\text{（年）。}$$

(2) 由題意可得，太空人老了 t 歲，即太空人變為

$$27+t\text{ 歲；}$$

因為 $x=\dfrac{4}{5}$，所以地球上過了

$$\frac{t}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}=\frac{5}{3}t\text{（年），}$$

21

即太空人的兒子變為

$$3+\frac{5}{3}t \text{ 歲。}$$

又因為返回地球後，太空人發現他跟兒子的年紀竟然一樣，所以

$$27+t=3+\frac{5}{3}t,$$

解得 $t=36$。

故太空人旅行了 36 年。

隨堂練習

1 承例題，某太空人想進行 10 年的太空旅行，並希望旅行結束後返回地球時，地球上已經過了 20 年，試問此次太空旅行的速度應該要達到光速的幾倍？ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍

數學超展開

愛因斯坦的時間膨脹效應提及「太空旅行時，極大的速度會使得飛行物體與裡面所有物體的時間變慢。」也就是說，飛行的太空船裡時鐘走了一圈，地球上的時鐘可能走了好多圈，速度愈快這個效應愈明顯，這給予了人類到未來旅行的夢想。然而，目前科技上最快的飛行器是 2018 年發射的派克太陽探測器，它預計在 2025 年最靠近太陽，並預估屆時速度會達到光速的 0.00064 倍。若以這個速度飛行 1 年，則地球過了

$$\frac{1}{\sqrt{1-0.00064^2}}\approx 1.000000205 \text{ 年} \approx 1 \text{ 年又 } 6.5 \text{ 秒。}$$

也就是說，即便以目前最快的飛行器飛行 1 年，地球上的時間也只比飛行器裡的時間快大約 6.5 秒而已。

隨堂練習解答

1 設此次旅行為光速的 x 倍（$0<x<1$）。

依題意可得 $\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}=20$，移項後整理解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

故此次太空旅行的速度應該要達到光速的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍。

(二) 雙重根式

形如 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 的根式稱為**雙重根式**。有些雙重根式可以利用平方公式來化簡：因為

$$5-2\sqrt{6}=5-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2，$$

所以 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

一般而言，當 $a\geq b\geq 0$ 時，因為

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=(a+b)-2\sqrt{ab}，$$

所以

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}。$$

同理可得 $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

來練習雙重根式的化簡。

例題 13

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$。　(2) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$。　(3) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$。

解

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times 1}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{1}\right)^2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$。

(2) $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{(5+2)-2\sqrt{5\times 2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$。

(3) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\times 2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$。

補充例題

1 化簡(1) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$。

(2) $\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$。

解：

(1) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$。

(2) $\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$

$=\sqrt{10+8\left(\sqrt{2}+1\right)}$

$=\sqrt{18+2\times 4\sqrt{2}}$

$=\sqrt{18+2\sqrt{32}}$

$=\sqrt{\left(4+\sqrt{2}\right)^2}$

$=4+\sqrt{2}$。

隨堂練習

1 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$。　(2) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$。　(3) $\sqrt{12+4\sqrt{5}}$。

(1) $\sqrt{5}-1$　(2) $\sqrt{7}+1$　(3) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

接著作一道不同形式的練習。

例題 14

已知 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a-\dfrac{1}{b}$ 的值。

解

仿照例題 13 的作法，可得

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(2+1)+2\sqrt{2\times 1}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1\text{。}$$

因為 $1<\sqrt{2}<2$，所以 $2<\sqrt{2}+1<3$，即

$$a=2,\ b=\left(\sqrt{2}+1\right)-2=\sqrt{2}-1\text{。}$$

故 $a-\dfrac{1}{b}=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=2-\left(\sqrt{2}+1\right)=1-\sqrt{2}$ 。

隨堂練習

2 已知 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a+\dfrac{1}{b}$ 的值。

$\sqrt{5}+3$

24

隨堂練習解答

1 (1) $\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\times 1}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{1}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{1}=\sqrt{5}-1$。

(2) $\sqrt{8+\sqrt{28}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{(7+1)+2\sqrt{7\times 1}}=\sqrt{7}+\sqrt{1}=\sqrt{7}+1$。

(3) $\sqrt{12+4\sqrt{5}}=\sqrt{12+2\sqrt{20}}=\sqrt{(10+2)+2\sqrt{10\times 2}}=\sqrt{10}+\sqrt{2}$ 。

2 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\times 1}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{1}$

$=\sqrt{5}-1$。

因為 $2<\sqrt{5}<3$，

所以 $1<\sqrt{5}-1<2$，

即 $a=1,\ b=\left(\sqrt{5}-1\right)-1$

$=\sqrt{5}-2$，故 $a+\dfrac{1}{b}$

$=1+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=1+\left(\sqrt{5}+2\right)$

$=\sqrt{5}+3$。

(三) 算幾不等式

設 a, b 為兩非負的實數，稱 $\frac{a+b}{2}$ 為 a 與 b 的**算術平均數**，且稱 $\sqrt{ab}$ 為 a 與 b 的**幾何平均數**。底下我們探討這兩者間的關係：

因為 a, b 是非負實數，所以 $a=(\sqrt{a})^2, b=(\sqrt{b})^2$，且 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$。我們有

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0，$$

即

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}。$$

上述的等號在 $a=b$ 時成立；反之，當等號成立時，$a=b$。

上述的不等式告訴我們：任意兩非負實數的算術平均數恆大於或等於它們的幾何平均數，這個不等式稱為**算幾不等式**。

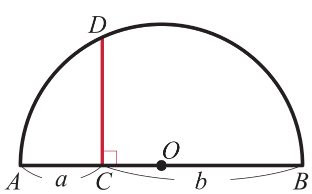
算幾不等式

若 a, b 為非負實數，則

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}，$$

其中當 $a=b$ 時，等號成立；反之，當等號成立時，$a=b$。

此外，亦可用幾何圖形觀察出算幾不等式：設 a, b 為兩個給定的正數。如圖 8，作一線段 AB 並取線段上一點 C，使得 $\overline{AB}=a+b$, $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$；接著，以 $\overline{AB}$ 為直徑做一半圓，並令其圓心為 O；最後，作 $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$，其中 D 為圓周上一點。

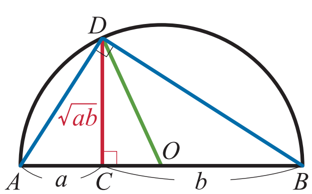


▲圖8

(1) 當 $a\neq b$ 時，連接 $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ 與 $\overline{OD}$，如圖 9 所示。

因為 $\triangle ACD\sim\triangle DCB$，所以 $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$，可得

$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}\times\overline{BC}}=\sqrt{ab}。$$



▲圖9

數學知識家

1 有關「算幾不等式」另一種證明，請見補充教材。

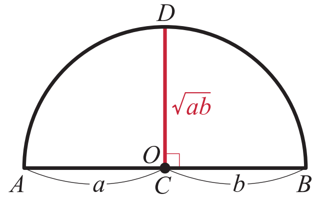
教學小提醒

1 n 個（$n\geq 2$）非負實數的算術平均數恆大於或等於其幾何平均數：若 a_1, a_2, …, a_n 為非負實數，則 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$，其中等號成立的條件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

25

又因為在 $\triangle CDO$ 中，圓半徑 $\overline{OD} > \overline{CD}$，所以

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}\text{。}$$



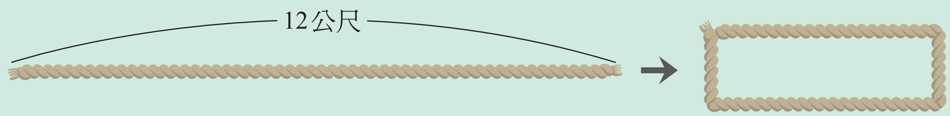
▲圖10

(2) 當 $a=b$ 時，C 點與 O 點重合，即 $\overline{OD}=\overline{CD}$，如圖 10 所示，因此可得 $\frac{a+b}{2}=a=\sqrt{ab}$。

算幾不等式的其他證明方法，請參見附錄二。來看一道例題。

例題 15

用一條長度為 12 公尺的繩子圍成一矩形，求所圍矩形的最大面積。



解

設矩形的長邊為 a 公尺，短邊為 b 公尺，可得矩形面積為 ab 平方公尺。

依題意可得 $2(a+b)=12$，即

$$a+b=6\text{。}$$

利用算幾不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，得

$$\frac{6}{2}\geq\sqrt{ab}\text{。}$$

平方得

$$ab\leq 9\text{。}$$

又因為上式等號成立的條件為 $a=b$，且 $a+b=6$，所以

當 $a=b=3$ 時，ab 有最大值 9。

故所圍矩形的最大面積為 9 平方公尺。

隨堂練習

❶ 已知 $a>0$, $b>0$ 且 $ab=8$，求 $a+2b$ 的最小值。

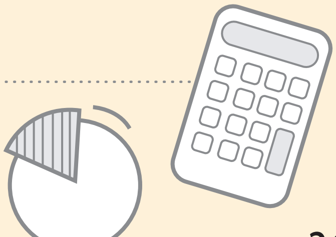
8

隨堂練習解答

❶ 利用算幾不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，得 $\frac{a+2b}{2}\geq\sqrt{2ab}=\sqrt{16}=4$，移項得 $a+2b\geq 8$。

又因為等號成立的條件為 $a=2b$，且已知 $ab=8$, $a>0$, $b>0$，

所以當 $a=2b=4$ 時，$a+2b$ 有最小值 8。



習題解答

觀念澄清

(1) ×：$1.414=\dfrac{1414}{1000}=\dfrac{707}{500}$ 是一個有理數。

(2) ×：$0.\overline{4}+0.\overline{6}=\dfrac{4}{9}+\dfrac{6}{9}=\dfrac{10}{9}>1$ 。

(3) ×：根據有理數的稠密性，任兩個相異有理數之間，至少有一個有理數存在，又 $\dfrac{21}{13}$ 與 $\dfrac{35}{21}$ 皆為有理數，其中至少有一個有理數存在。

(4) ○。

(5) ×：$\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 。

一、基礎題

1. (1)(2)(3)(5)。
2. 利用長除法分得

(1) $\dfrac{1}{37}=0.\overline{027}$ 。

(2) $\dfrac{9}{22}=0.4\overline{09}$ 。

1 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「〇」，錯的打「×」。

☐ (1) 1.414 是一個無理數。

☐ (2) $0.\overline{4}+0.\overline{6}=1$。

☐ (3) $\dfrac{21}{13}$ 與 $\dfrac{35}{21}$ 之間沒有有理數。

☐ (4) $\sqrt{5}$，$-2\sqrt{5}$，$3\sqrt{5}$ 均為無理數。

☐ (5) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$。

(4)

一、基礎題

1 下列何者為有理數？

(1) $-\dfrac{4}{9}$　(2) 0　(3) 3.14159　(4) $3+\sqrt{2}$　(5) $\dfrac{12}{11}+\dfrac{11}{12}$。

(1)(2)(3)(5)

2 將下列各分數化成小數：

(1) $\dfrac{1}{37}$。　(2) $\dfrac{9}{22}$。

(1) $0.\overline{027}$　(2) $0.4\overline{09}$

3 將下列各循環小數化成最簡分數：

(1) $0.\overline{27}$ 。　　(2) $5.4\overline{38}$ 。

(1) $\frac{3}{11}$　(2) $\frac{2692}{495}$

4 已知有理數 a, b 滿足 $\left(a+2\sqrt{3}\right)^2 = b+4\sqrt{3}$ ，求 a, b 的值。

$a=1$, $b=13$

5 利用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a+2b+3)^2$ 。

(2) $(3a-2b)^3$ 。

(3) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{9}\right)$ 。

(1) $a^2+4b^2+4ab+6a+12b+9$

(2) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(3) $\frac{a^3}{8}-\frac{b^3}{27}$

6 利用乘法公式，因式分解下列各式：

(1) $27x^3-y^3$ 。

(2) x^3+8y^3 。

(3) x^3+3x^2+3x+1 。

(1) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

(2) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(3) $(x+1)^3$

3. (1) 設 $x=0.\overline{27}$，則 $100x=27.\overline{27}$。

將兩式相減得 $99x=27$，因此 $x=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}$。

(2) 設 $x=5.4\overline{38}$，則 $100x=543.8\overline{38}$。

將兩式相減得 $99x=538.4=\dfrac{5384}{10}=\dfrac{2692}{5}$，因此 $x=\dfrac{2692}{495}$。

4. 由題意可知 $a^2+4\sqrt{3}a+12=b+4\sqrt{3}$，

整理得 $\left(a^2-b+12\right)+(4a-4)\sqrt{3}=0$，

因為 a, b 都是有理數，所以 a^2-b+12 和 $4a-4$ 也都是有理數，

由性質得 $\begin{cases} a^2-b+12=0 \\ 4a-4=0 \end{cases}$，

解得 $a=1, b=13$。

5. (1) $(a+2b+3)^2=a^2+(2b)^2+3^2+2a(2b)+2(2b)\times 3+2a\times 3$

$=a^2+4b^2+4ab+6a+12b+9$。

(2) $(3a-2b)^3=(3a)^3-3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2-(2b)^3$

$=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$。

(3) $\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}\right)\left(\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{ab}{6}+\dfrac{b^2}{9}\right)=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}\right)\left(\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{b}{3}\right)+\left(\dfrac{b}{3}\right)^2\right)$

$=\left(\dfrac{a}{2}\right)^3-\left(\dfrac{b}{3}\right)^3=\dfrac{a^3}{8}-\dfrac{b^3}{27}$。

6. (1) $27x^3-y^3=(3x)^3-y^3=(3x-y)\left[(3x)^2+(3x)y+y^2\right]=(3x-y)\left(9x^2+3xy+y^2\right)$。

(2) $x^3+8y^3=x^3+(2y)^3=(x+2y)\left[x^2-x(2y)+(2y)^2\right]=(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$。

(3) $x^3+3x^2+3x+1=x^3+3x^2\times 1+3x\times 1^2+1^3=(x+1)^3$。

7. (1) $x+\dfrac{1}{x}=2-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$ 。

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=4^2-2=16-2=14$ 。

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=4\times(14-1)=4\times13=52$ 。

8. (1) $\sqrt{3}+\sqrt{12}-2\sqrt{48}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$ 。

(2) $\dfrac{1}{7+\sqrt{41}}+\dfrac{1}{\sqrt{41}+\sqrt{33}}+\dfrac{1}{\sqrt{33}+5}=\dfrac{7-\sqrt{41}}{8}+\dfrac{\sqrt{41}-\sqrt{33}}{8}+\dfrac{\sqrt{33}-5}{8}=\dfrac{7-5}{8}=\dfrac{1}{4}$ 。

(3) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}+\dfrac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=\dfrac{\left(3+\sqrt{6}\right)^2+\left(3-\sqrt{6}\right)^2}{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)}=\dfrac{9+6\sqrt{6}+6+9-6\sqrt{6}+6}{3}=10$ 。

9. 移項得 $\sqrt{a}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$ ，兩邊平方得 $a=15+10\sqrt{2}\approx15+10\times1.414=29.14$ 。

故最接近 a 的整數為 29。

10. (1) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)-2\sqrt{5\times3}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 。

(2) $\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{(6+1)+2\sqrt{6\times1}}=\sqrt{6}+\sqrt{1}=\sqrt{6}+1$ 。

(3) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{(9+2)-2\sqrt{9\times2}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$ 。

7 已知 $x=2-\sqrt{3}$，求下列各式的值：

(1) $x+\dfrac{1}{x}$。

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$。

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$。

(1) 4　(2) 14　(3) 52

8 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{12}-2\sqrt{48}$。

(2) $\dfrac{1}{7+\sqrt{41}}+\dfrac{1}{\sqrt{41}+\sqrt{33}}+\dfrac{1}{\sqrt{33}+5}$。

(3) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}+\dfrac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$。

(1) $-5\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) 10

9 已知 a 為實數且 $\sqrt{a}-\sqrt{5}=\sqrt{10}$，求最接近 a 的整數。

29

10 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$。

(2) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$。

(3) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$。

(1) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{6}+1$　(3) $3-\sqrt{2}$

二、進階題

11 已知 $a^3=2$，求 $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$ 的值。

3

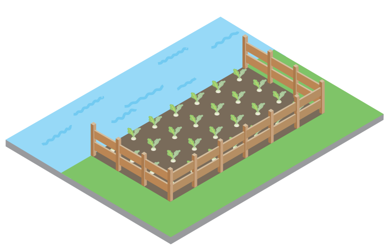
12 已知正方形面積為 $14+6\sqrt{5}$，求正方形的邊長（將其化至最簡）。

$3+\sqrt{5}$

13 已知 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a-\dfrac{1}{b}$ 的值。

$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

14 用圍籬沿著筆直的河岸圍一個矩形菜圃，其中靠河岸一邊不圍，只圍三邊，如右圖所示。已知圍籬的總長為 40 公尺，求此菜圃的最大面積為多少平方公尺？又此時的長、寬分別為多少公尺？



當長為 20 公尺，寬為 10 公尺時，有最大面積 200 平方公尺

二、進階題

11. $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

$=(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$

$=(a^3-1)(a^3+1)=(2-1)(2+1)=3$。

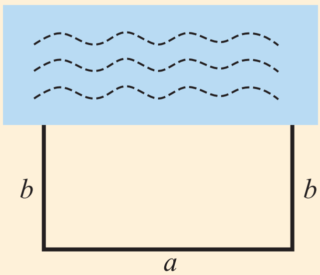
12. 正方形的邊長為 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{14+2\sqrt{45}}=\sqrt{(9+5)+2\sqrt{9\times5}}=\sqrt{9}+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$。

13. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times1}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$。

因為 $1<\sqrt{3}<2$，所以 $2<\sqrt{3}+1<3$，即 $a=2$, $b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$。

故 $a-\dfrac{1}{b}=2-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=2-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$。

14. 設矩形的長、寬分別為 a,b（a,b 是非負實數），如下圖所示，



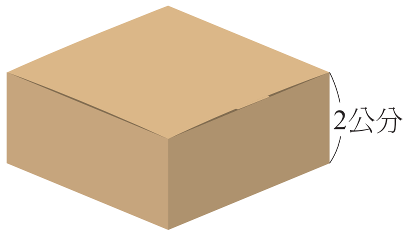
即 $a+2b=40$。利用算幾不等式得 $\dfrac{a+2b}{2}\geq\sqrt{a\times(2b)}$，

將 $a+2b=40$ 代入，得 $\dfrac{40}{2}\geq\sqrt{2ab}$，

即 $20\geq\sqrt{2ab}$，平方得 $ab\leq200$，且當 $a=2b$（即 $a=20$，$b=10$）時，ab 有最大值為 200。故當長為 20 公尺，寬為 10 公尺時，所圍的菜圃有最大面積 200 平方公尺。

15. 設長方體的長、寬分別為 a, b（a, b 是非負實數），依題意得 $a \times b \times 2 = 32$，即 $ab = 16$。
想用紙最少，即求紙盒表面積 $2ab + 2 \times 2a + 2 \times 2b = 2ab + 4a + 4b = 4(a+b) + 32$ 之最小值。
利用算幾不等式得 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \times b}$，
將 $ab = 16$ 代入，得 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{16} = 4$，
即 $a + b \geq 8$，紙盒表面積 $4(a+b) + 32 \geq 64$，且當 $a = b = \sqrt{16} = 4$ 時，$4(a+b) + 32$ 有最大值為 64。
故當長為 4 公分，寬為 4 公分時用紙最少。

15 王師傅想為公司設計一個長方體紙盒，如下圖所示。已知長方體的高為 2 公分，體積為 32 立方公分，若想用紙最少，則長方體的底面之長與寬應設計為多少公分？



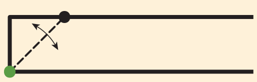
當長為 4 公分，寬為 4 公分時，用紙最少

補充教材

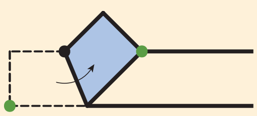
● 摺出 $\sqrt{n}$

準備星星紙或代長條形紙張一張，以寬邊為 1 單位長，依照以下步驟摺出 $\sqrt{n}$：

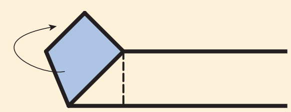
① 沿虛線折後打開



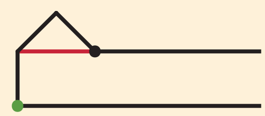
② 將左下角折到長條紙上邊（固定黑點將綠點對齊長條紙上邊）



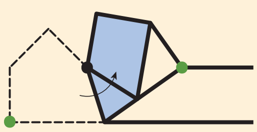
③ 沿虛線向後折



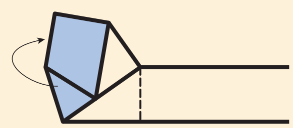
④ 出現 $\sqrt{2}$（紅色線段）



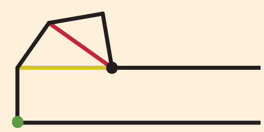
⑤ 將左下角折到長條紙上邊（固定黑點將綠點對齊長條紙上邊）



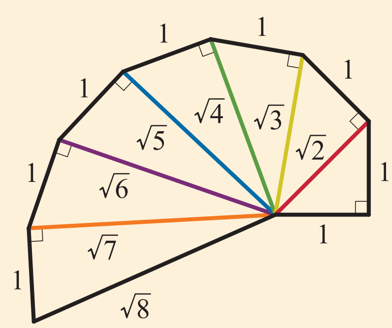
⑥ 沿虛線向後折



⑦ 出現 $\sqrt{3}$（黃色線段）



重複以上步驟，陸續出現 $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, …，完成以下圖形。



● 神奇的 142857

將 $\frac{1}{7}$ 化成小數，得 $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$ 。下列的計算會讓學生覺得驚奇：

$142857 \times 1 = 142857$，

$142857 \times 2 = 285714$，

$142857 \times 3 = 428571$，

$142857 \times 4 = 571428$，

$142857 \times 5 = 714285$，

$142857 \times 6 = 857142$，

學生會驚訝於這些數都繞著 142857 旋轉排列，更神奇的是：

$142857 \times 7 = 999999$ 。

另外還有一些有趣的計算：$14+28+57=99$, $142+857=999$，
且 $1+4+2+8+5+7=27$；$2+7=9$。

● 圓周率 π

圓周率就是指圓周長和直徑的比率，而希臘字母 π 則是用以表達它的符號。中國最古老的數學書《周髀算經》記載了「周三徑一」，這顯示中國人認為 $\pi=3$，後來歷代許多數學家如西漢的劉歆、東漢的張衡，都分別提出新的數值，而真正求出較精確圓周率的，是魏晉時代（約西元263年）的劉徽。他所用的方法叫做「割圓術」，他發現：當圓內接正多邊形的邊數不斷增加後，多邊形的周長會越來越逼近圓周長，而多邊形的面積也會越來越逼近圓面積。於是劉徽從正六邊形開始，逐步把邊數加倍，從正十二邊形、正二十四邊形、正四十八邊形、正九十六邊形直到正一百九十二邊形的面積，求得 $3.141024<\pi<3.142704$。

祖沖之是南北朝（西元429～500年）范陽 薊縣人，他在劉徽研究的基礎上，進一步地發展，一直算到圓內接正24576邊形，而得到一個結論：圓周率 π 的值介於3.1415926和3.1415927之間；同時他還找到了圓周率 π 的約率：$\dfrac{22}{7}$、密率：$\dfrac{355}{113}$。後面這個密率（日本數學史家三上義夫 Y. Mikami 曾建議稱之為「祖率」）是一個很特殊的分數，按照連分數的漸近分數理論，它是分母不大於 113 的所有分數中，最接近 π 的數。在沒有算盤、計算機，甚至沒有阿拉伯數字的當時，實在是了不起的成就。

● 數學家小傳——畢達哥拉斯

畢達哥拉斯（Pythagoras，西元前六世紀），生於愛琴海上的摩斯島，他一生充滿傳奇和神秘。他發展了數學的邏輯思想，對於數學發展史上的第一個黃金時期影響甚鉅。他認識到數是獨立於有形世界而存在的，數不是僅用於計算和記帳而已。

畢氏早年受教於泰利斯（Thales，公元前625～547），從泰利斯身上畢氏獲益匪淺，後來接納泰利斯的建議到埃及留學，在埃及停留了一段相當長的時間。當他回到摩斯島後即建立學校，致力於哲學與數學研究。

「一個直角三角形中，斜邊的平方是兩股平方和。」這個定理中國人（周朝的商高）和巴比倫人早在畢氏提出前一千年就已使用，但一般人仍將定理稱為畢氏定理，是因為他證明了定理的普遍性。

「萬物皆數！」對畢達哥拉斯而言，數學之美在於有理數能解釋一切自然現象。他與學生成立的畢氏學派崇拜整數、分數，他們認為透過對數的了解，可以揭示宇宙神秘，使他們更接近神。這種觀點使畢氏對無理數的存在視而不見，他一個學生希帕索斯試圖找出 $\sqrt{2}$ 的等價分數，最終他認識到根本不存在這個分數，也就是說 $\sqrt{2}$ 是無理數，希帕索斯對這發現喜出望外，但是他的老師畢氏卻始終不願承認自己的錯誤，卻又無法經由邏輯推理推翻希帕索斯的論證，直到他死後無理數才得以安全的被討論著。後來，歐幾里得以反證法證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

● $\sqrt{2}$ 的連分數化法

$\sqrt{2}$ 介於 1 和 2 之間，我們取 $x>1$，並令 $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{x}$，則

$$\frac{1}{x}=\sqrt{2}-1=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}。$$

因此，$\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，右式裡的 $\sqrt{2}$ 我們可以再換成 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，如此重複代換下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的連分數表示式：

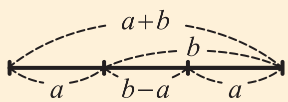
$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}\text{ 。}$$

用線段表四則運算

古希臘人習慣用線段表示數量，連同數量的運算也都用線段表示。設下列兩線段分別表示 a,b，

則 $a+b$, $b-a$, $a\times b$ 和 $b\div a$ 都可用線段表示如下：

(1)以線段表示 $a+b$ 和 $b-a$ ：



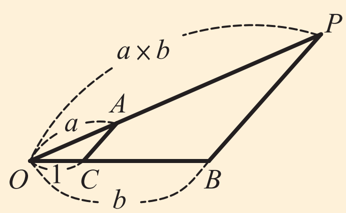
(2)以線段表示 $a\times b$ ：

$\overline{AC}//\overline{PB}$ ，

$\overline{OC}:\overline{OB}=\overline{OA}:\overline{OP}$ ，

$1:b=a:x$ ，

$x=a\times b$ 。



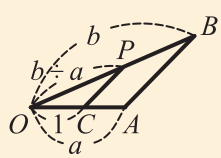
(3)以線段表示 $b\div a$ ：

$\overline{PC}//\overline{AB}$ ，

$\overline{OC}:\overline{OA}=\overline{OP}:\overline{OB}$ ，

$1:a=x:b$ ，

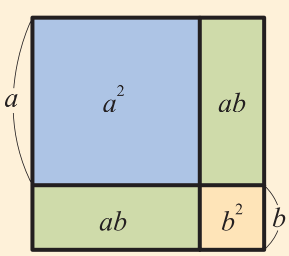
$x=b\div a$ 。



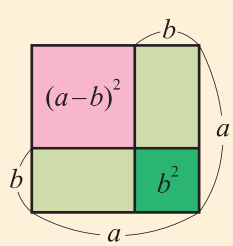
乘法公式的無字證明

乘法公式除了代數展開之外，亦有利用圖形的幾何證明，以下列舉幾個本節提過的乘法公式之證明。

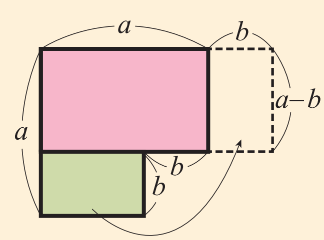
(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。



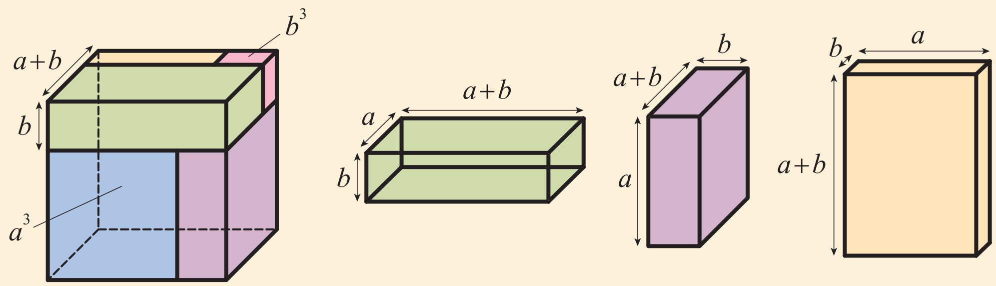
(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。



(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 。



(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 。



參考資料與網站：

◆ 數學知識網站http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_08/index.html

◆ 昌爸工作坊http://www.mathland.idv.tw/

◆ 黃敏晃（2003），人間處處有數學，臺北：天下文化

◆「摺紙學無理數」教案
http://www.hkgyou.com/attachments/article/488/%E6%95%99%E6%A1%88_%E6%91%BA%E5%87%BA%E7%84%A1%E7%90%86%E6%95%B8.pdf

◆ 蔡宗佑（2016），按圖索驥一無字的證明，三民書局。

◆ 維基百科https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%8B%E6%96%B9%E5%92%8C