Coleção **olimpo**

IME ITA

Ondulatória

F01 MHS – Movimento Harmônico Simples

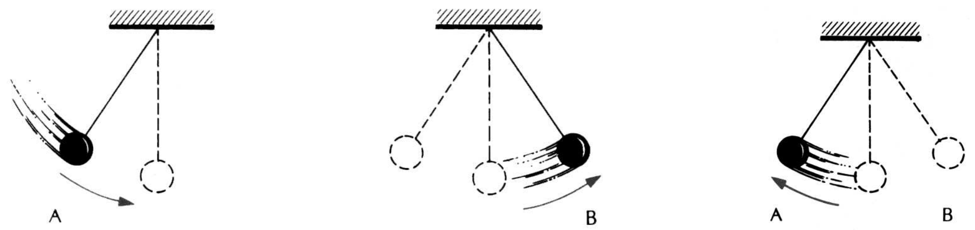
1.1 Movimentos Periódicos

Um fenômeno é periódico quando se repete, identicamente, em intervalos de tempo iguais. O período T é o menor intervalo de tempo da repetição do fenômeno.

Pêndulo simples

Desprezada a resistência do ar e forças dissipativas em geral, o pêndulo da figura abaixo oscila da posição A até B e retorna a A, repetindo a oscilação.

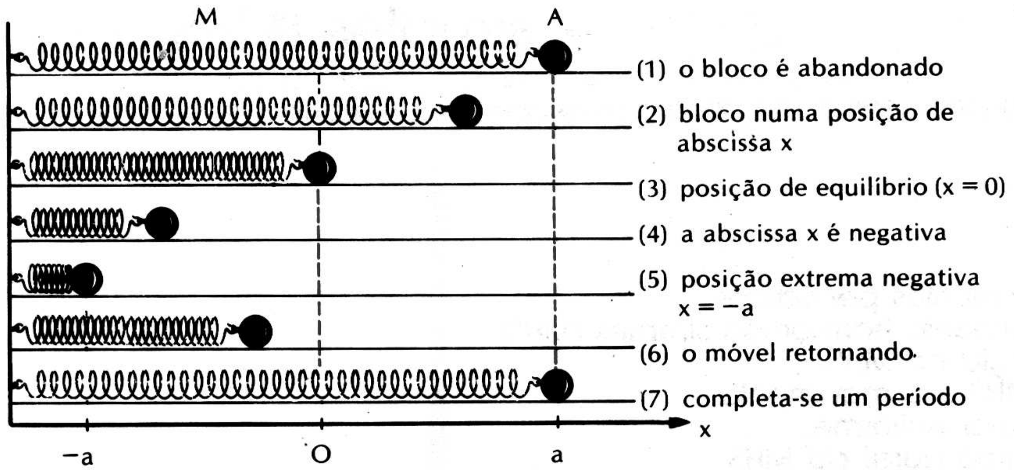
O fenômeno é periódico, pois se repete em intervalos de tempo iguais o período T é o intervalo de tempo para o pêndulo ir de A a B e retornar novamente a A.



O período T da oscilação é o intervalo de tempo para o pêndulo ir de A até B e retornar a A.

Mola

Desprezadas as forças dissipativas (atrito e resistência do ar), o bloco A da figura abaixo, preso à mola M, executa um movimento periódico cujo período é o intervalo de tempo para ir e voltar à posição (1).



O bloco e a mola anteriores constituem um conjunto denominado oscilador harmônico. O termo harmônico é aplicado às expressões matemáticas que contenham as funções trigonométricas seno e cosseno. Veremos adiante que a função horária desse movimento contém senos e cossenos.

A posição do bloco A pode ser dada com o auxílio de um eixo de abscissa Ox orientado da esquerda para a direita. Assim, quando o bloco está à direita de O, sua abscissa x é positiva e, quando está à esquerda de O, sua abscissa x é negativa.

O valor máximo da abscissa x é denominado amplitude a e corresponde às posições extremas do bloco A em que ocorreu inversão de sentido do movimento. Nessas posições a velocidade é nula. Considera-se a positivo.

A mola M, de constante elástica k (veja mecânica, energia), aplica ao bloco A a força F_{el} regida pela lei das deformações elásticas:

$$F_{el} = -k \cdot x$$

A intensidade da forças elástica é proporcional à deformação x da mola (ou à posição do bloco, considerando ponto material) e de sentido contrário ao eixo orientado, para valores positivos de x e com o sentido do eixo para valores negativos de x.

O oscilador harmônico da figura efetua um movimento periódico, cujo período T é o intervalo de tempo para o bloco efetuar uma oscilação completa.

Os fenômenos periódicos, além do período T, considera-se uma outra grandeza, a freqüência f. Chama-se freqüência f o número de vezes que o fenômeno se repete na unidade de tempo.

O período T e a freqüência f relacionam-se:

Intervalo de tempo	N° de vezes que o fenômeno se repete
(período) $\boldsymbol{T} \rightarrow$	1 (vez)
(unidade de tempo) $\boldsymbol{1} \rightarrow$	f (vezes) (freqüência)

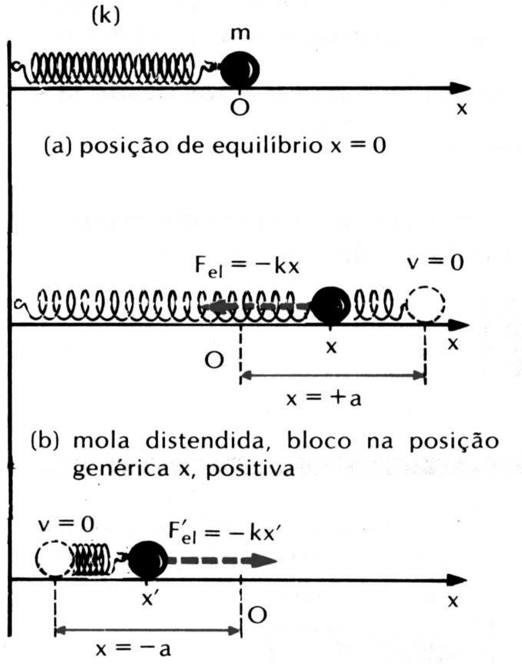
Por regra de três simples e direta:

$$f \cdot T = 1\ ,\ f = \frac{1}{T}\ ;$$

A unidade de freqüência no Sistema Internacional (ciclos por segundo) é denominado hertz (símbolo: **Hz**).

1.2 Movimento harmônico simples (MHS)

Diz-se que um ponto material efetua um movimento harmônico simples (MHS) quando, numa trajetória retilínea, oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio sob a ação de uma força cuja intensidade é proporcional à distância do ponto à posição de equilíbrio. Esta força é sempre orientada para a posição de equilíbrio e chama-se força restauradora.



(a) posição de equilíbrio x = 0

(b) mola distendida, bloco na posição genérica x, positiva

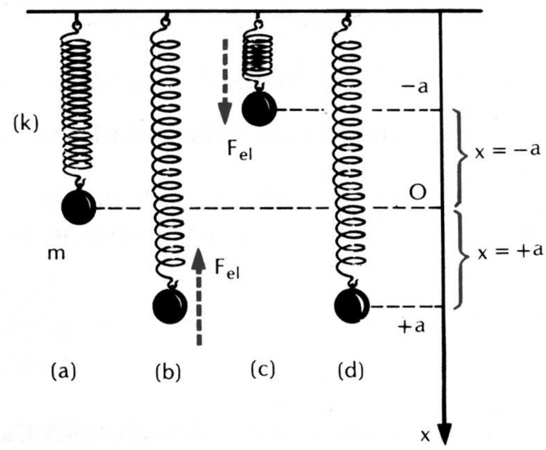
(c) mola comprimida, bloco na posição x′ negativa

O movimento do oscilador harmônico do item anterior é um MHS, onde a força elástica $F_{el} = -k \cdot x$ é a força restauradora. A esfera suspensa verticalmente à mola efetua em MHS, quando se desprezam as forças dissipativas. Como o MHS é um movimento de trajetória retilínea, a posição do móvel é dada pela abscissa x, medida num eixo orientado a partir da posição de equilíbrio.

A amplitude a é a distância da posição de equilíbrio até o extremo da oscilação. Nos extremos da oscilação, a abscissa é $x = +a$ ou $x = -a$.

Nestes extremos, há inversão de sentido do movimento e a velocidade se anula.

Durante a oscilação, o móvel passa pela posição de equilíbrio com velocidade máxima em módulo.



A esfera suspensa à mola efetua em MHS (desprezada a ação do ar).

a – A esfera está na posição de equilíbrio.
b – Puxamos a esfera e a abandonamos.
c – A esfera oscila, efetuando MHS de amplitude a em torno da posição de equilíbrio O.

No MHS, o período T é o intervalo de tempo para o fenômeno se repetir: na figura anterior, é o intervalo de tempo para a esfera, abandonada na posição (b), retornar novamente a essa mesma posição. Em outro intervalo igual a T, o fenômeno se repete. A repetição do fenômeno se faz em intervalos T tais que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

onde ω é uma constante que tem as mesmas dimensões da velocidade angular, exprimindo-se radianos por segundo. Essa constante ω é denominada pulsação do MHS.

Veremos adiante, no item *4*, que o MHS pode ser estudado a partir do movimento circular e uniforme (MCU) e daí concluiremos que a pulsação do MHS, ω, corresponde à velocidade angular ω do MCU associado ao estudo do MHS.

Por outro lado, conforme demonstraremos no item *5*, o período T do MHS depende da massa m do ponto material e da constante elástica k da mola ligada ao ponto material. Uma vez definidos a mola (e sua constante k) e o ponto material (e sua massa m), o período de oscilação se obtém pela expressão:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esse período é um **período próprio** da oscilação e independe da sua amplitude. A amplitude depende da energia que é cedida ao sistema: quando puxamos o corpo na Fig. 4b, estamos cedendo a ele e à mola energia potencial e, conseqüentemente, definindo uma amplitude a para a oscilação. Se a amplitude a for maior ou menor, cederemos mais ou menos energia; entretanto, em qualquer caso o período não se altera e é dado por $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$. Devido à importância dessa expressão, nós a usaremos desde já. As discussões sobre energia serão tratados no item seguinte. O período do MHS depende da massa m do ponto material em movimento e da constante elástica k, mas não depende da amplitude da oscilação.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Exercício resolvido

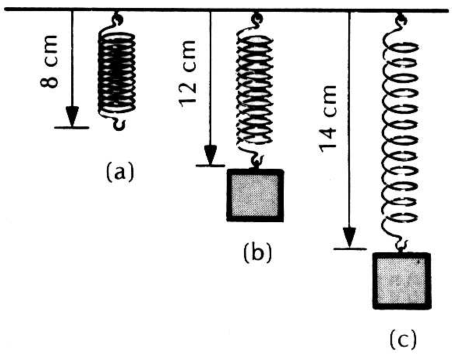
01. Uma mola tem o comprimento de 8 cm quando não solicitada (Fig. a). Coloca-se, em sua extremidade, um corpo de massa igual a 0,1 kg e o comprimento da mola passa a ser 12 cm (Fig. b). Por meio de uma ação extrema, puxa-se o corpo até que o comprimento da mola atinja 14 cm (Fig. c), abandonando-se em seguida o conjunto que passa a efetuar um MHS. Despreze as forças dissipativas e adote $g = 10\,\text{m/s}^2$.

    Determine:

    a) A constante elástica da mola;

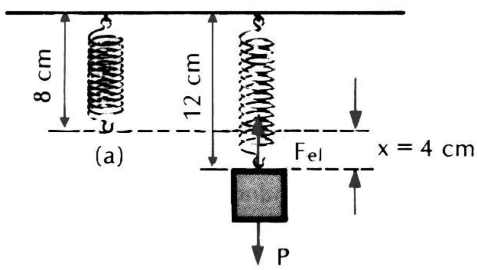
    b) O período e a freqüência do MHS;

    c) A amplitude do MHS.



Solução:

a) Da Fig. a à Fig. b, pela ação do peso P = mg do corpo de massa m, a mola sofre a deformação x = 12 cm – 8 cm = 4 cm.



Na Fig. b, o corpo está em equilíbrio após a deformação da mola. No corpo atuam: seu peso $P = mg = 0{,}1 \times 10 = 1$ N e a força elástica da mola, para cima, e de intensidade $F = kx$, onde x = 4 cm = 0,04 m.

Essas forças se equilibram:

$F_{el} = P : Kx = mg$

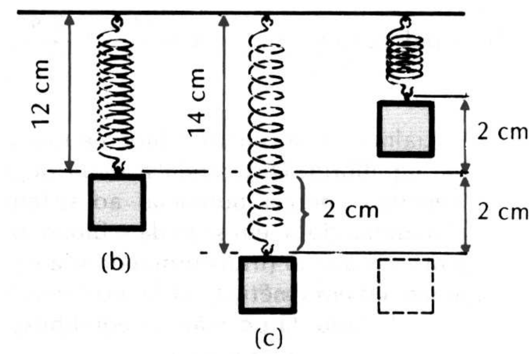
$k \,.\, 0{,}04 = 1\,,\ k = \dfrac{1}{0{,}04}\,,\ k = 25\ N/\text{m}$

b) O período do MHS, que independe da amplitude, é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{25}} = \frac{2\pi}{5}\sqrt{0,1} \cong \frac{2\pi}{5} \,.\, 0,32 \;, T \cong 0,4\,\text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} \cong \frac{1}{0,4} \,, \; f \cong 2,5\;Hz$$

c) Da Fig. b (posição de equilíbrio) à Fig. c (em que o sistema é abandonado) a mola foi distendida de 2 cm. Em relação à posição de equilíbrio, o sistema oscilarão de 2 cm acima e abaixo: daí a amplitude é 2 cm.



$a = 2$ cm

F02 Energia no MHS

2.1 Energia do MHS

A energia mecânica pode ser dividida em duas partes: a energia cinética E_c, associada à velocidade do ponto material, dada pela expressão:

$$E_c = \frac{\mathrm{m}v^2}{2}$$

E a energia potencial E_p, (veja quadro sombreado) associada à posição x do ponto material:

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot x^2,$$

A soma dessas energias é a energia total mecânica E:

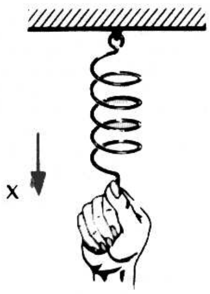
$$E = E_c + E_p$$

No MHS, as energias cinética e potencial variam, pois variam a velocidade v e a posição x do ponto material. Porém, a energia mecânica permanece constante, já que supomos inexistentes as forças dissipativas ao analisarmos o MHS (princípio da conservação da energia).

Energia potencial

A energia potencial está associada ao trabalho das forças conservativas que agem num ponto material. No estudo do MHS, interessa um tipo de energia potencial denominada energia potencial elástica, associada ao trabalho da força elástica de intensidade $F_{el} = -kx$, conforme já estudamos.

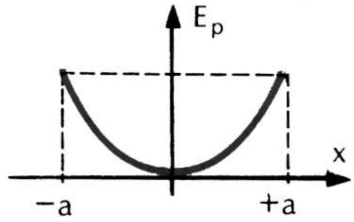
Quando alongamos uma mola, produzindo uma deformação x, as forças elásticas realizam um trabalho que fica incorporado à mola na forma de energia potencial elástica, de expressão:



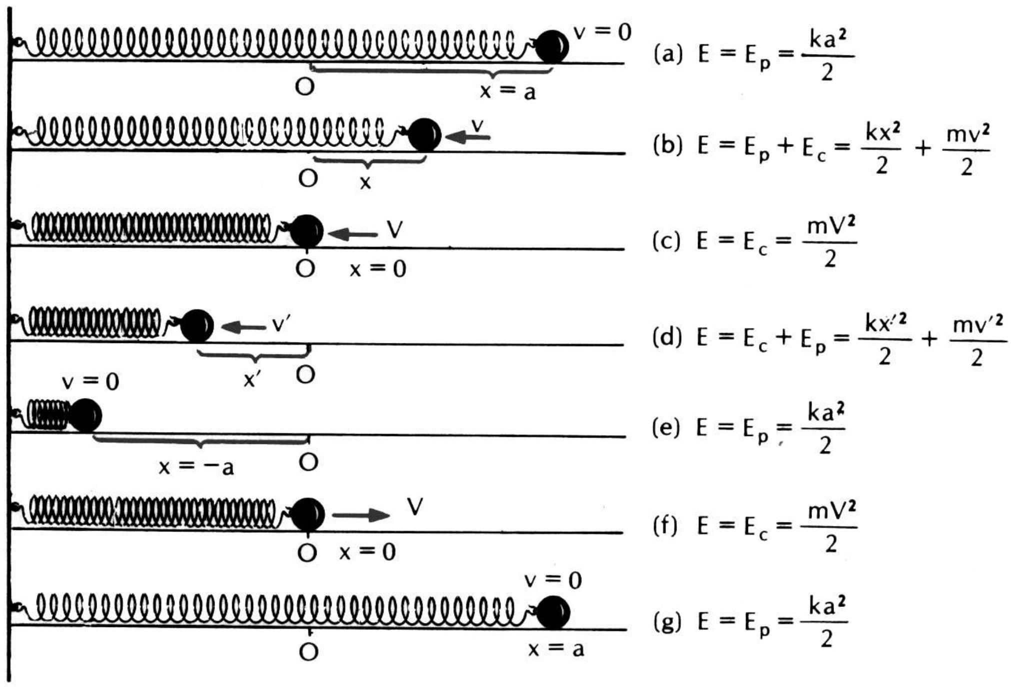
$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot x^2,$$

onde k é a constante elástica da mola.

Se a oscilação da mola da Fig. 5a efetuar-se em torno de uma posição de equilíbrio adotada como referencial, com elongação variando de $+a$ até $-a$, a energia potencial será representada graficamente por uma função do 2° grau.



Na figura adiante, reconsideremos o oscilador harmônico a partir da posição de máxima abscissa (amplitude). Nela pode-se perceber que a energia total se reduz à energia potencial elástica $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$, onde $x = \pm\, a$ (amplitude).



Energia no MHS.

Assim, para essas posições $E = E_p = \frac{kx^2}{2}$, onde $x = \pm\, a$

$$E = \frac{k \cdot a^2}{2}$$

Essa expressão permite determinar a amplitude do MHS através da energia:

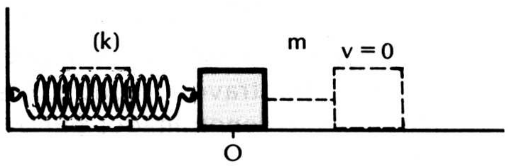
A amplitude do MHS depende da energia total mecânica cedida ao sistema.

Desse modo, na figura anterior, distendida a mola de $x = \pm a$, a energia potencial elástica é a total mecânica que define a amplitude do MHS. Abandonado o conjunto, essa energia se transforma, permanecendo a total mecânica constante, pois consideramos inexistentes as forças dissipativas. Se nessa figura tivéssemos distendido a mola de uma distância maior ou menor, teríamos cedido mais ou menos energia, alterando a amplitude de oscilação. Observe, porém, que em qualquer caso o período de oscilação já está definido $(T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k})$, independentemente da amplitude.

Exercício resolvido

01. Um ponto material de massa m = 0,1 kg oscila em torno da posição O, animado de MHS, na ausência de forças dissipativas. A energia total mecânica do sistema é 0,2 joule. Determine:
  a) A amplitude da oscilação;
  b) O valor máximo da velocidade do ponto material, em módulo;
  c) O período de oscilação.

  A constante elástica da mola é $k = 40$ N/m.



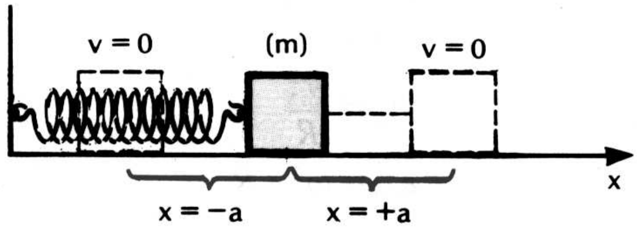
Solução:

a) A amplitude depende da energia total mecânica do sistema. Nos extremos da oscilação, a energia total é apenas potencial $(E_p = kx^2/2)$, em que a abscissa x é a amplitude. Assim.

$E = \dfrac{ka^2}{2}$ onde $E = 0,2J; k = 40\ N/\text{m}$

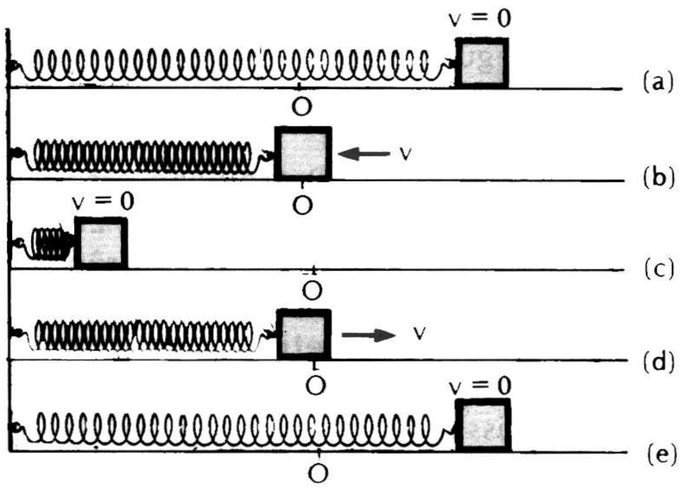
$0,2 = \dfrac{40a^2}{2}$

$a^2 = 0,01$, $a = 0,1\ \text{m}$



b) Durante a oscilação, a velocidade varia em módulo e sentido. Nos extremos (Figs. a/c/e), ela é nula, aumentando em módulo à medida que se aproxima da posição central. Nessa posição (Fig. b/Fig. d), a energia potencial é nula e o sistema só possui energia cinética: a velocidade é máxima em módulo.
Na posição central, a energia total é apenas cinética.

$$E = E_c = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 0,2 = \frac{0,1v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = 2m/s$$



c) O período independe da amplitude e da energia e é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{m}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{40}} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}, \; T \cong 0,3\,\text{s}$$

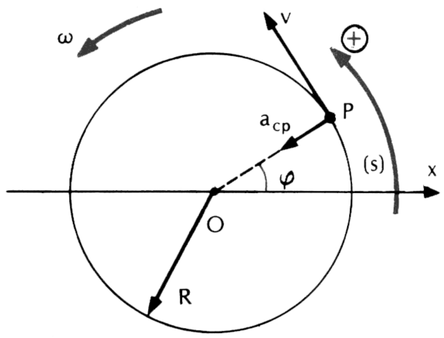
F03 MHS e MCU

3.1 O MHS e o movimento circular uniforme

O MHS e o movimento circular uniforme (MCU) estão relacionados, de modo que um pode ser estudado através do outro. Esse estudo nos ajuda a compreender o significado da grandeza ω que denominados pulsação e, através dele, chegaremos às equações cinemáticas do MHS.

Assim, seja o ponto P animado de MCU na circunferência de raio R. Os espaços s são medidos na própria circunferência e os espaços angulares φ são os ângulos centrais que determinam os arcos s. O móvel descreve a circunferência com velocidade escalar v e angular ω; a aceleração centrípeta a_{cp} é orientada para o centro. Se os ângulos φ estão em, temos:

$$s = \phi \cdot R$$
$$v = \omega \cdot R$$
$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$
$$a_{cp} = \omega^2 \cdot R$$

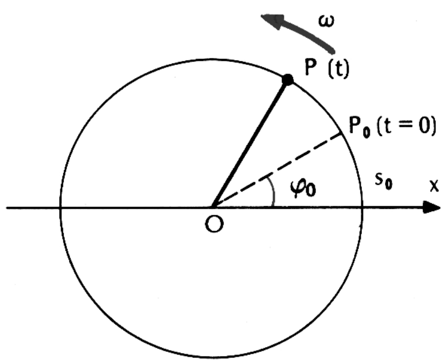


Considere que, no instante inicial $t = 0$, o espaço inicial seja s_0 (e φ_0, o espaço angular). A função horária do MCU é:

$$s = s_0 + vt$$

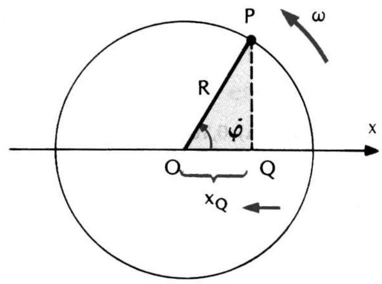
ou, na forma angular:

$$\phi = \phi_0 + \omega t$$



Seja, agora, o ponto Q projeção ortogonal de P no eixo orientado Ox. Enquanto o ponto P descreve a circunferência em MCU, o ponto Q se move num e noutro sentido no diâmetro horizontal orientado Ox. A posição de Q no eixo Ox é dada pela abscissa x_Q que pode ser obtida no triângulo sombreado OPQ pela definição do cosseno:

$$x_Q = R \cos \phi$$



O ângulo φ é o espaço angular do ponto P que realiza MCU.

Sendo $\phi = \phi_0 + \omega t$, resulta:

$$xQ = R \cos \varphi = R \cos (\varphi 0 + \omega t), \text{ ou, } xQ = R \cos \varphi = R \cos (\varphi 0 + \omega t) \ (1)$$

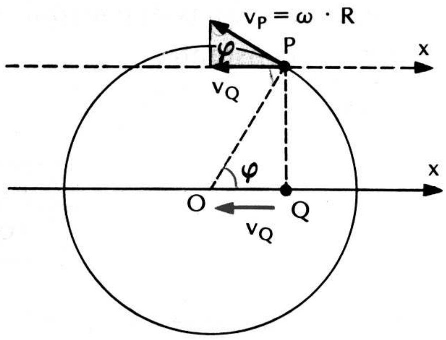
Enquanto P descreveu um MCU, o ponto Q oscila no diâmetro com um movimento não uniforme, cuja função horária é cossenoidal com o tempo (e, portanto, harmônica). Movimentos com função horária idêntica à anterior são MHS, como iremos demonstrar após analisarmos a aceleração e o tipo de força que gera o movimento.

Assim, P descreve a circunferência com MCU e Q oscila em torno de O com MHS. A velocidade angular ω do MCU é idêntica à pulsação ω do MHS. O período T do MCU é o mesmo do MHS pois a cada volta completa de P na circunferência corresponde uma oscilação completa de Q no diâmetro horizontal.

A velocidade de Q em MHS pode ser obtida a partir da velocidade de P em MCU. No triângulo sombreado da Fig. 10, a velocidade de Q, v_Q. é a projeção de v_p no contrário ao sentido positivo de Ox, acrescentamos o sinal menos (-).

$$v_Q = -v_p \text{ sen } \phi \text{ com } v_p = \omega \,.\, R \text{ e } \phi = \phi_0 + \omega t \text{ , obtemos:}$$

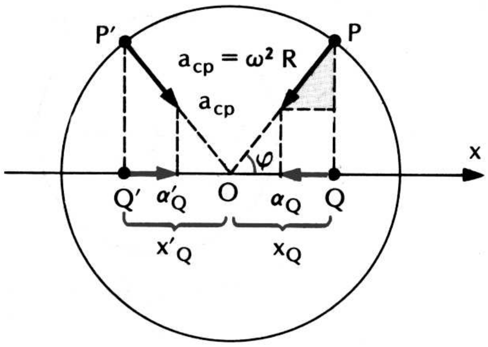
$$v_Q = -\omega R \cdot \text{sen}(\phi_0 + \omega t) \text{ ,} ou, v_Q = -\omega R \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0)$$



A aceleração de Q em MHS pode ser obtida a partir da aceleração centrípeta de P em MCU. No triângulo sombreado da próxima figura, a aceleração de Q, α_Q, é a projeção de a_{cp} no eixo Ox. Como o sentido dessa aceleração é contrário ao sentido positivo de Ox, acrescentamos o sinal menos (-):

$$\alpha_Q = -a_{cp} \cdot \cos\phi \text{ com } a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \ \ e \ \ \phi = \phi_0 + \omega t \text{, obtemos:}$$

$$\alpha_Q = \omega^2 R \cos(\phi_0 + \omega t),\ ou,\ \alpha_Q = \omega^2 R \cos(\omega t + \phi_0)$$



A expressão ①, $x_Q = R\cos(\omega t + \varphi_0)$, substituída na expressão ③ conduz a:

$$\alpha_Q = -\omega^2 \cdot x_Q \ (4)$$

Como a velocidade angular ω é constante, podemos enunciar a expressão anterior como se segue:

A aceleração no MHS é proporcional à abscissa que define a posição e de sinal contrário.

Nessa propriedade, a afirmação sinal contrário significa: quando x_Q é positivo, α_Q é negativo (ponto P e Q na figura anterior) e, quando x'_Q é negativo, α'_Q é positivo (pontos P' e Q' na figura anterior).

Analisemos agora a força que causa essa aceleração. Da equação Fundamental da Dinâmica:

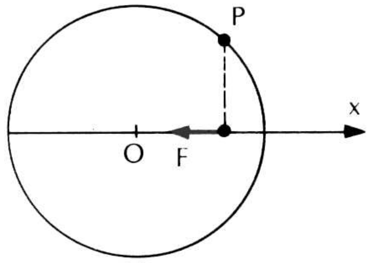
$$F = ma \text{ ,com } a = \alpha_Q = -\omega^2 x \text{ obtemos:}$$

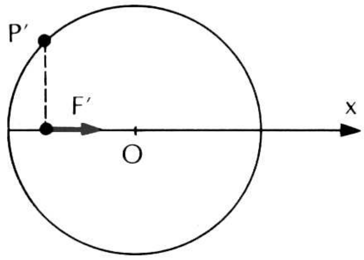
$$F = -\left(m\omega^2\right) \cdot x$$

No entanto, m (massa) e ω (pulsação) são constantes:

$$m\omega^2 = k = \text{constante.}$$

Daí concluímos que a força que atua em Q é do tipo elástica restauradora, isto é, está sempre tentando reconduzir o ponto para a posição de equilíbrio (quando x é positivo, $\vec{F}$ tem sentido oposto ao eixo Ox e vice-versa, e tem intensidade proporcional à abscissa x do ponto Q em relação à posição de equilíbrio. Assim sendo, Q executa um MHS, pois está submetido a uma força característica do MHS.

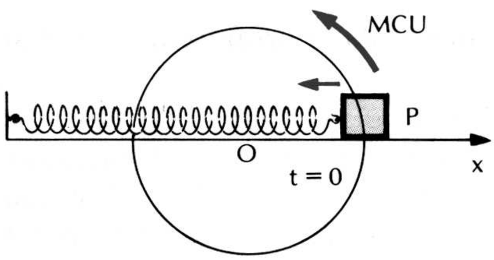




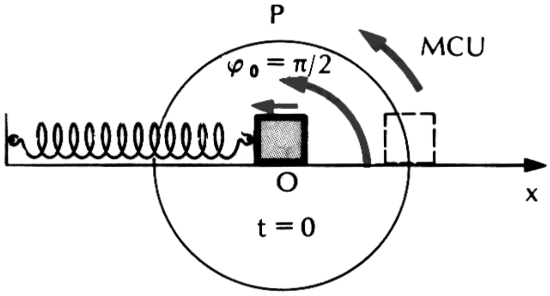
Desse modo, podemos concluir que as funções anteriores ①, ②, ③ são as expressões cinemáticas do espaço, velocidade e aceleração do MHS. Nessas expressões, o raio R corresponde à amplitude a do MHS, sendo que de agora em diante faremos essa substituição. A abscissa x que define a posição do móvel é chamada elongação.

Um método simples então para a determinação de φ_0 , válido para casos elementares, consiste em associar ao MHS um MCU em sentido anti-horário. No instante $t = 0$, a fase inicial do MHS corresponde ao espaço inicial angular no MCU, medido a partir do eixo Ox e orientado no sentido anti-horário.

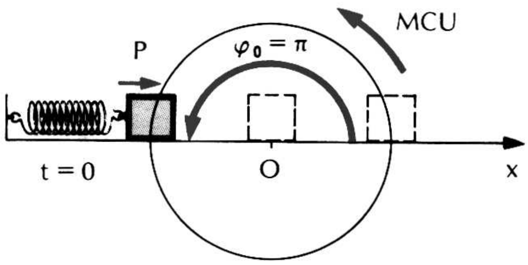
Nas próximas figuras, indicamos alguns casos de determinação de φ_0.



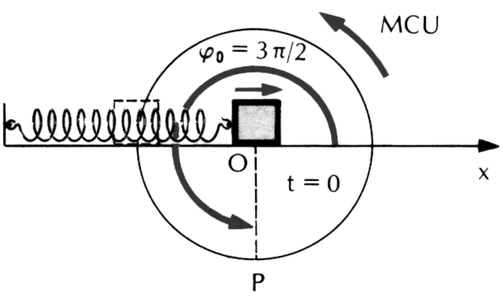
No MCU, $\varphi_0 = 0$



No MCU, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$

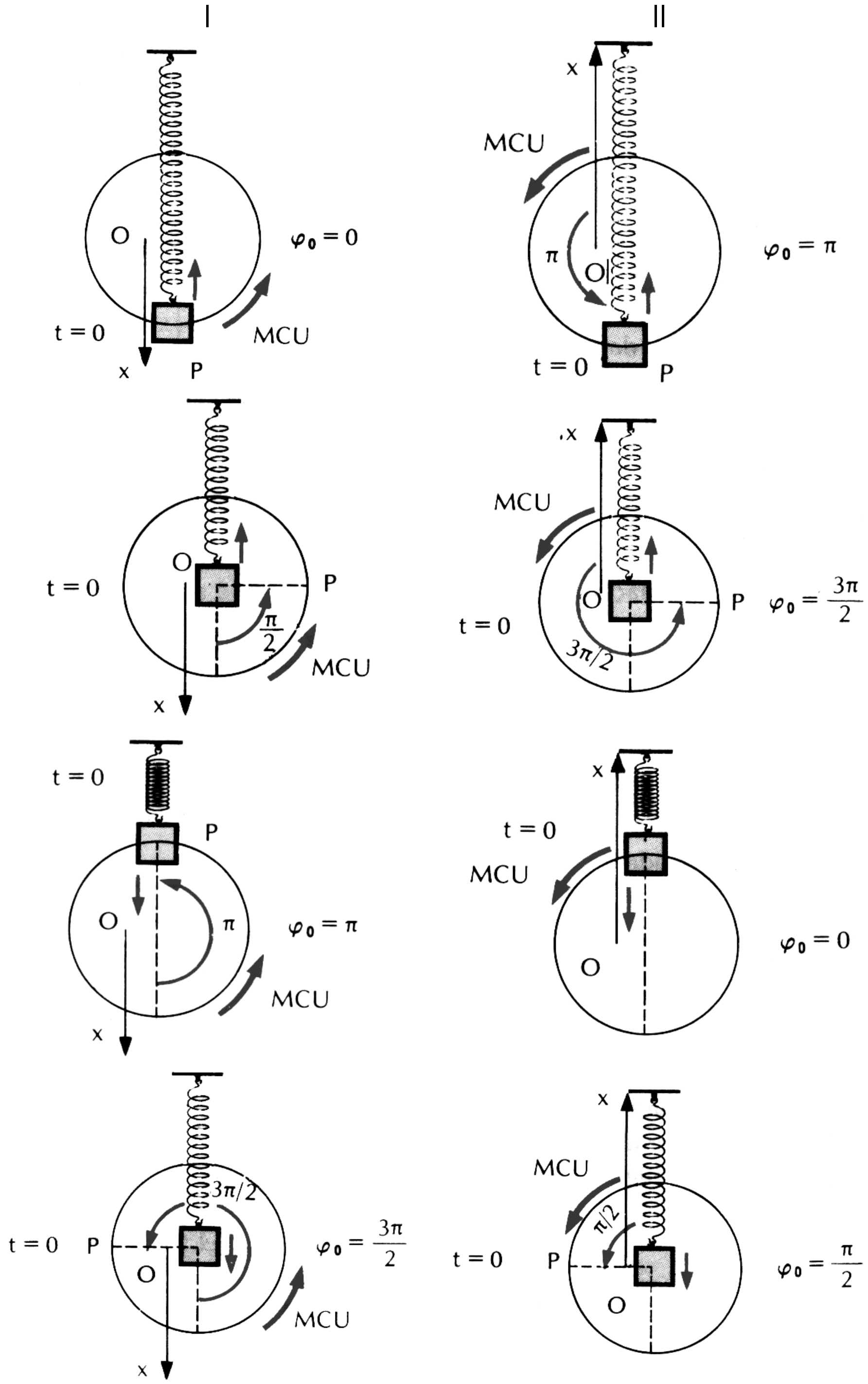


No MCU, $\varphi_0 = \pi$.



No MCU, $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}$

Enquanto o bloco descreve um MHS no diâmetro horizontal Ox, o ponto P descreve um MCU. Cada figura corresponde a um particular $t = 0$, determinando, portanto, um φ_0.



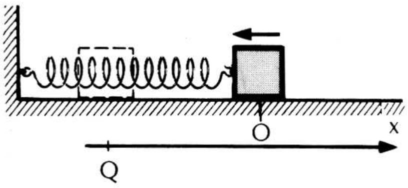
I – Eixo orientado para baixo.
II – Eixo orientado para cima

O bloco efetua um MHS vertical e o ponto P, imaginário, efetua o MCU contado no sentido anti-horário a partir do eixo Ox.

Uma vez determinado φ_0, seu valor comparece nas funções da posição x, velocidade v e aceleração α. Graficamente, essas funções são representadas por cossenóides ou senóides.

Exercício resolvido

01. Um ponto material de massa $m = 0{,}04$ kg oscila em torno da posição O de equilíbrio, com MHS. A energia total mecânica do sistema é $32 \times 10\text{-}4$ J.
Despreze ações dissipativas. Determine:
a) O período da oscilação.
b) A pulsação, em radianos por segundo.
c) A amplitude da oscilação.
d) A função horária da posição, velocidade e aceleração, adotando-se eixo Ox orientado para a direita e instante inicial $t = 0$ quando o móvel está na posição extrema Q, indicada na figura;
e) O gráfico da posição x em função do tempo t, a partir de $t = 0$ até $t = 2\ T$, onde T é o período.
Dado: constante elástica $k = 0{,}16\ N/m$



(t = 0)

Solução:

a) O período de oscilação independe da amplitude, sendo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,04}{0,16}} = \pi\ , T \cong 3{,}14\,\text{s}$$

b) A pulsação ω relaciona-se com o período pela expressão:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi}\ ,\ \ \omega = 2\ rad\,/\,\text{s}$$

c) A amplitude depende da energia mecânica total:

$$E = \frac{ka^2}{2}\ ;\ 32\ x\,10^{-4} = \frac{0{,}16\ a^2}{2}\ ;\ a = 0{,}2\,\text{m}$$

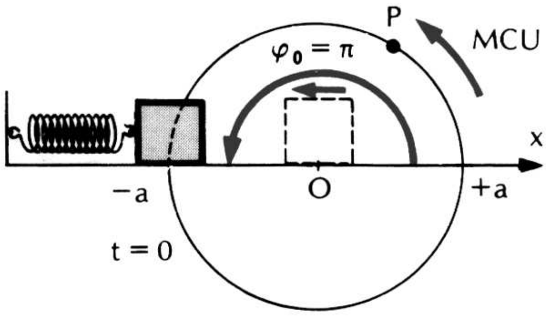
d) As funções horárias da posição x, velocidade v e aceleração α têm o aspecto:

$$x = a\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v = -\omega a \text{ sen } (\omega t + \phi_0)$$

$$\alpha = -\omega^2 a \cos (\omega t + \phi_0)$$

onde $a = 0,2\,\text{m}$ *e* $\omega = 2\ rad/\text{s}$



A fase inicial é determinada com auxílio de um MCU associado ao MHS, cujo ponto P gira no sentido anti-horário, com espaços angulares medidos a partir do eixo Ox.

O exercício adota $t = 0$ para a posição extrema à esquerda: daí, do MCU temos: $\phi_0 = \pi\ rad$

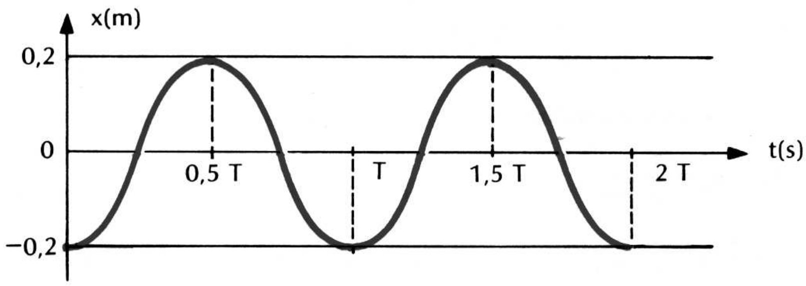
As funções ficam:

$$x = 0,2\cos(2t + \pi) \quad (\text{m})$$

$$v = -0,4\,\text{sen}(2t + \pi) \quad (\text{m/s})$$

$$\alpha = -0,8\cos(2t + \pi) \quad (\text{m/s}^2)$$

e) O gráfico da função $x = f(t)$, desde $t = 0$ até $t = 2\ T$, é indicado a seguir (função cossenoidal):



F04 Figuras de Lissajous

4.1 Combinações de movimentos harmônicos simples

Freqüentemente, dois movimentos harmônicos simples perpendiculares se combinam; o movimento resultante é a soma das duas oscilações independentes. Consideremos primeiro o caso em que as freqüências das oscilações são idênticas, como em

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \text{e} \quad y = y_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_y).$$

Os movimentos ao longo das direções x e y podem ter amplitudes e constantes de fase diferentes.

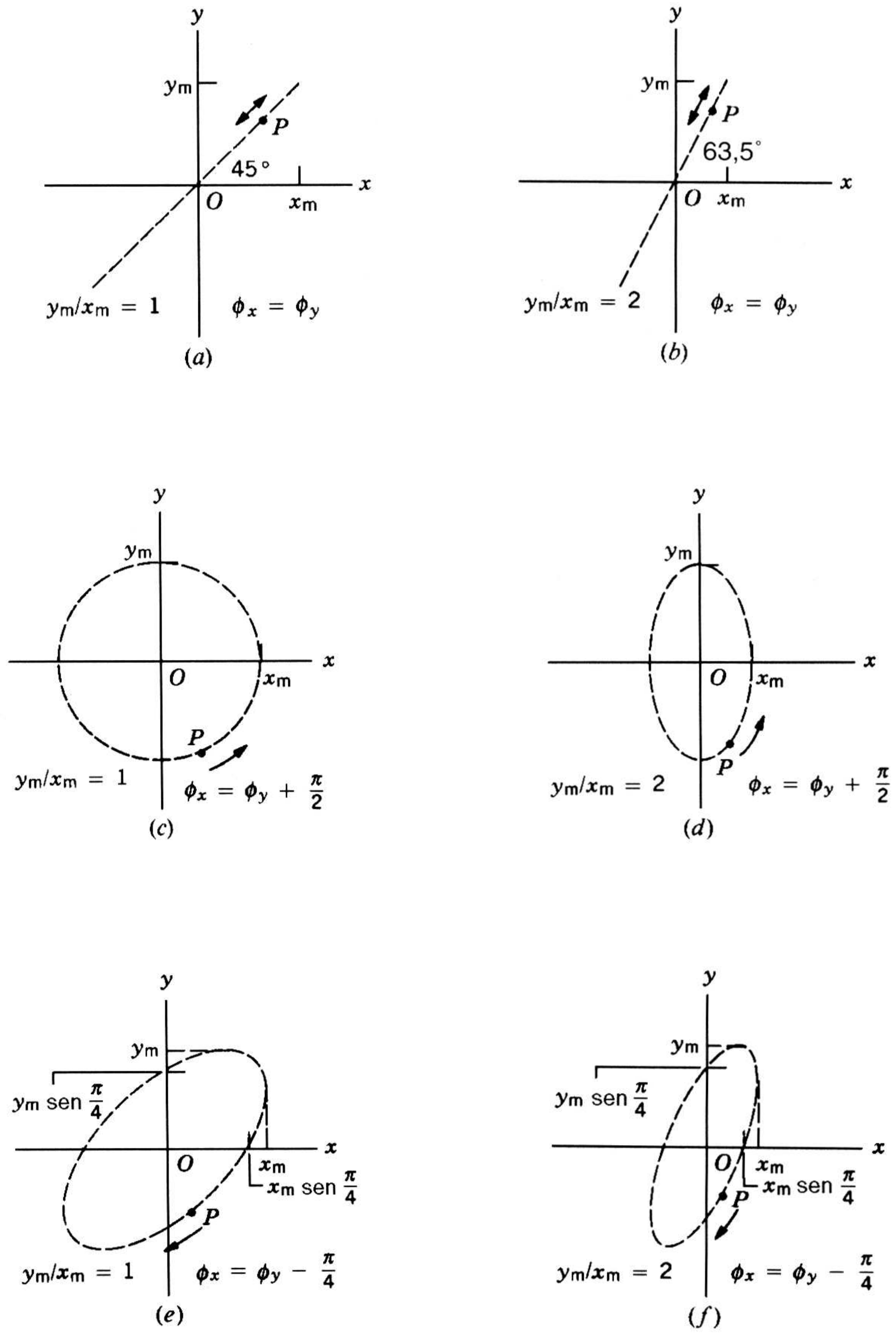
Se as constantes de fase forem iguais, o movimento resultante será uma linha reta. Isto pode ser visto analiticamente, tomando a razão entre as expressões para x e y nas Equações de movimento, quando $\phi_x = \phi_y$, o que leva a

$$y = (y_{\mathrm{m}} / x_{\mathrm{m}})x.$$

Trata-se da equação de uma reta de inclinação y_m/x_m. Nas Figs. a e b, mostramos o movimento resultante para dois casos, $y_m/x_m = 1$ e $y_m/x_m = 2$. Nestes casos, ambos os deslocamentos x e y atingem seus valores máximos simultaneamente; eles estão em fase. O ponto P se move para diante e para trás ao longo da linha tracejada (Figs. a e b), à medida que o tempo t passa.

Se as constantes de fase forem diferentes, o movimento resultante não será mais uma linha reta. Por exemplo, se a diferença de fase for $\pi/2$, o deslocamento x será máximo quando y for nulo e vice-versa. Quando as amplitudes forem iguais, o movimento resultante será circular; quando forem diferentes, teremos uma elipse. As Figs. c e d mostram dois casos, $y_m/x_m = 1$ e $y_m/x_m = 2$, para $\phi_x = \phi_y + \pi/2$. Os casos $y_m/x_m = 1$ e $y_m/x_m = 2$, para $\phi_x = \phi_y + \pi/4$, estão mostrados nas Figs. e e f.

Todas as combinações possíveis de dois movimentos harmônicos simples, perpendiculares entre si e de mesma freqüência, correspondem a trajetórias elípticas; o círculo e a linha reta são casos especiais de elipses. Isso pode ser visto analiticamente combinando as Equações do movimento e eliminando o tempo t; você pode ver que a equação resultante corresponde a uma elipse, cuja forma depende apenas da razão das amplitudes, y_m/x_m, e a diferença de fases, $\phi_x - \phi_y$, entre as duas oscilações. O movimento real pode ser tanto no sentido horário quanto no anti-horário, dependendo da componente que esteja em avanço de fase.



Combinações de movimentos harmônicos simples ao longo de duas direções perpendiculares entre si. Cada figura mostra o movimento do ponto P, quando as amplitudes e as fases dos movimentos têm as relações indicadas. Os movimentos x e y têm freqüências iguais.

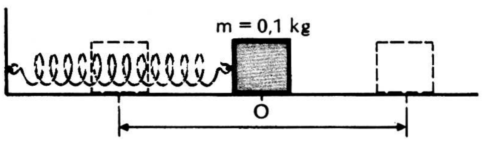
Se duas oscilações perpendiculares e de freqüência diferentes forem combinadas, o movimento resultante será mais complicado. Ele só será periódico se as freqüências componentes, ω_x e ω_y, estiverem na razão de dois inteiros. A análise matemática nestes casos é freqüentemente complicada, mas os padrões de oscilação podem ser produzidos graficamente ou na tela de um osciloscópio, onde um feixe de elétrons pode ser simultaneamente defletido nas direções vertical e horizontal por sinais eletrônicos cujas freqüências, amplitudes e fases relativas podem variar.

Nesta seção, consideramos somente combinações de movimentos harmônicos simples em direções diferentes (perpendiculares entre si). Entretanto, combinação de movimentos na mesma direção, com a mesma freqüência, mas com amplitudes e fases diferentes, são de interesse especial no estudo da difração e interferência da luz, do som e de radiações eletromagnéticas, que serão discutidas posteriormente neste compêndio. Podemos também combinar oscilações de freqüências diferentes na mesma direção.

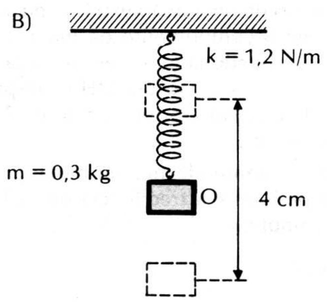
Exercícios Propostos

01. Determine o período, a freqüência e a amplitude dos MHS indicados a seguir. A posição de equilíbrio corresponde ao ponto O, sendo indicados os extremos da oscilação. Não há forças dissipativas:

A)



B)

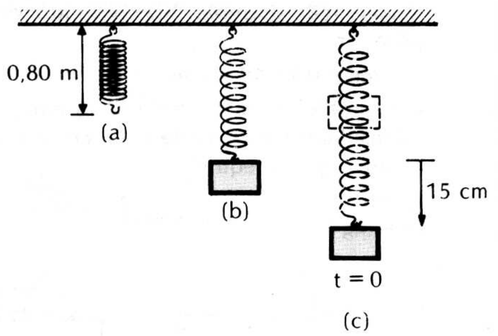


02. Uma mola tem constante elástica igual a 4 N/m e comprimento 0,80 m quando não solicitada (Fig. a). Coloca-se, em sua extremidade um corpo de massa $m = 0{,}10\,\text{Kg}$ (Fig. b).

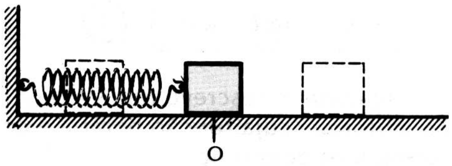
a) Determine a posição de equilíbrio da mola, medida em relação ao teto;

b) Puxa-se o corpo 15 cm da posição de equilíbrio, abandonando-o a seguir, no instante $t = 0$ (Fig. c). Após quanto tempo o corpo retorna a essa posição?

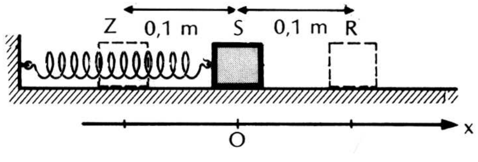
Qual a amplitude de seu movimento? Qual o comprimento mínimo por que passa a mola, medido a partir do teto? Adote $g = 10\ m/s^2$ e despreze as forças dissipativas.



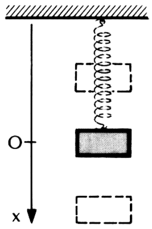
03. Um ponto material de massa $m = 0,2\ kg$ oscila em torno de uma posição de equilíbrio (posição O), em MHS. O módulo da máxima velocidade atingida é $1\ m/s$.
Determine:
a) a energia total mecânica do sistema;
b) a amplitude do MHS;
c) o período do movimento.
Dado: constante elástica da mola $k = 5\ N/m$.



04. Um ponto material de massa $m = 0,1\ kg$ oscila em torno da posição O de equilíbrio, com MHS. A constante elástica da mola é $k = 0,4\ N/m$.
a) Determine a pulsação ω, em radianos por segundo.
b) Determine as funções horárias da posição x, da velocidade v e da aceleração α, em função do tempo, adotando-se o eixo Ox orientado para a direita, como se indica na figura.
Adote $t=0$ quando o móvel se encontra na posição T.
c) Refaça o item anterior, adotando $t = 0$ quando o móvel se encontra na posição S, e no sentido do movimento de R a Z.
d) Refaça o item b adotando $t = 0$ quando o móvel se encontra na posição Z.
As posições indicadas pelas letras R e Z correspondem aos extremos da oscilação.



05. O ponto material da figura, preso no extremo da mola de constante elástica $k = 0{,}32\, N/\mathrm{m}$, oscila verticalmente, efetuando MHS. A energia mecânica total do movimento é $E = 16 \times 10^{-4}$ J. Determine as funções da posição, velocidade e aceleração, em função do tempo, orientando o eixo Ox para baixo e considerando $t = 0$ quando o móvel se encontra na posição de equilíbrio O, com movimento para baixo. A massa do ponto material é m = 0,02 kg.



06. (FAAP SP) Um móvel com movimento harmônico simples obedece à função $x = 7 \cos(0{,}5\,\pi \cdot t)$, onde x é medido em centímetros e t em segundos. Determine o menor tempo necessário para que este móvel vá da posição de equilíbrio para a posição de elongação máxima.

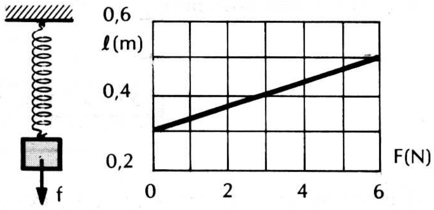
07. (MAPOFEI SP)

a) O gráfico indica a variação do comprimento de uma mola em função da força que a traciona. Determine a constante elástica da mola.

b) Coloca-se um corpo de massa 0,27 kg, cujo peso é 2,7 N, na extremidade da mola. Aplica-se uma força suplementar f, de forma que o comprimento total da mola seja 45 cm. Retirando-se f, determine o mínimo comprimento por que passa a mola.

c) Desprezando-se a dissipação da energia, ao fim de quanto tempo o corpo retornará à posição em que se retirou f?

d) Determine a função horária do movimento, adotando $t = 0$ s para o instante em que se retirou f e o sentido do eixo de ordenadas para cima.



08. (UCMG) Um corpo executa um movimento harmônico simples. Com relação à sua aceleração, afirma-se que:

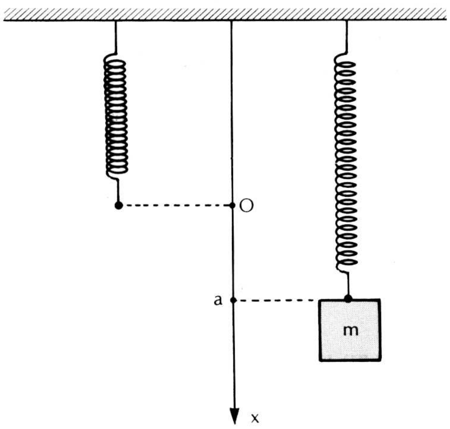
a) é máxima nos extremos do percurso.
b) é máxima no ponto médio do percurso.
c) é indeterminada.
d) é nula nos extremos do percurso.
e) tem o mesmo sentido em qualquer instante.

09. (FATEC SP) Para uma partícula em movimento harmônico simples:
  a) a trajetória é uma senóide.
  b) a trajetória é uma circunferência e a velocidade do ponto é constante em intensidade.
  c) a aceleração tem módulo diretamente proporcional ao da elongação, em cada instante.
  d) a aceleração é constante.
  e) as afirmações anteriores são falsas.

10. (U.E.MARINGÁ PR) Uma partícula realiza movimento harmônico simples em relação a um dado referencial. Nessa condição, podemos afirmar que:
  a) sua energia potencial é inversamente proporcional à abscissa que define sua posição.
  b) sua velocidade ênula quando a abscissa x é nula.
  c) sua aceleração varia linearmente com o tempo.
  d) sua velocidade é nula quando sua aceleração tem módulo máximo.
  e) sua velocidade máxima independe da amplitude do movimento.

11. (EPUSP) Um ponto material executa movimento harmônico simples. Sua energia cinética é máxima:
  a) nos pontos de abscissa máxima.
  b) nos pontos de aceleração máxima.
  c) nos pontos onde a aceleração é nula.
  d) em ponto nenhum: a energia cinética é constante pelo princípio da conservação da energia.
  e) nenhuma das anteriores.

12. (FATEC SP) Fixa-se, por uma das extremidades, uma mola helicoidal, de constante elástica k, de tal forma que a outra extremidade fique na posição $x = 0$, conforme a figura. Prende-se nessa extremidade um bloco de massa m, que distende a mola e oscila com movimento harmônico simples, sendo a velocidade nula em $x = \mathrm{a}$.
Considere as afirmativas:



I – A aceleração do bloco é nula em $x = 0$.

II – A máxima energia cinética é $\dfrac{ka^2}{2}$.

III – A máxima velocidade ocorre em $x = \dfrac{mg}{k}$

A(s) afirmativa(s) correta(s) é(são):
  a) III
  b) I
  c) II
  d) I, II e III
  e) II e III

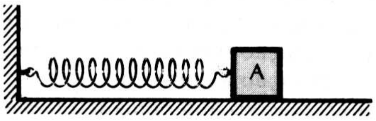
13. (F.M.CATANDUVA SP) Uma partícula de massa 200 g realiza um MHS de amplitude a, em torno da posição de equilíbrio O. Considerando nula a energia potencial para a partícula, em O, a elongação, para a qual a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial, é:

a) $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}\,.\,a}{3}$ b) $x = \pm\dfrac{a}{3}$

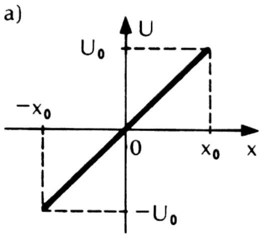
c) $x = \pm\dfrac{a}{2}$ d) $x = \pm\dfrac{a}{4}$

e) nenhuma das anteriores

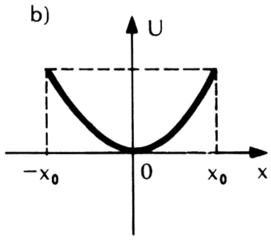
14. (CESCEM SP) O corpo A de massa M_A está preso à mola e oscila horizontalmente, sem atrito, segundo uma trajetória retilínea. Quando a mola não está sendo solicitada por forças, na posição $x = 0$, a energia potencial é igual a 0. Nestas condições, pode-se dizer que o gráfico da energia potencial U em função de x está melhor representado por:



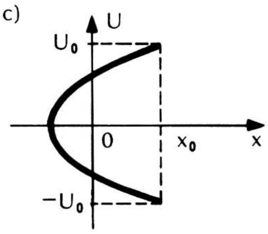
a)



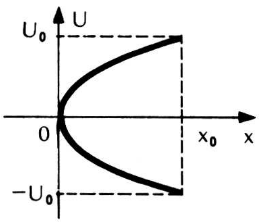
b)



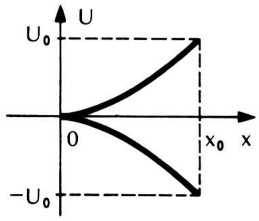
c)



d)



e)



15. (UFPA) A equação do movimento harmônico simples descrito por uma partícula é $x = 10 \cos (100\pi\ t + \pi/3)$ sendo x em centímetro e t em segundos. Qual será a amplitude e a freqüência do movimento respectivamente em centímetros e hertz?
    a) 10; 50
    b) 10; 100
    c) 50; 50
    d) 50; 100
    e) 10; $\pi/3$

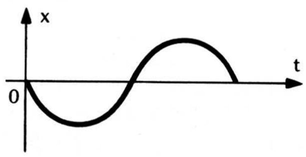
16. (UCMG) Um corpo oscila, executando movimento harmônico simples de equação $x = 6{,}0\cos(3\pi\, t + \pi/3)$ m.
    a) 0,5
    b) 1,0
    c) 2,0
    d) 2,5
    e) 3,0

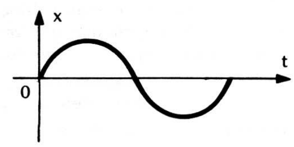
17. (UERJ) Uma vibração periódica satisfaz, no Sistema Internacional, à função:

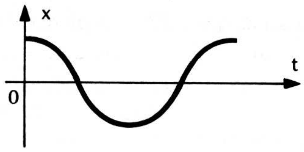
$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{20}\, t + \frac{\pi}{2}\right).$$ Logo,

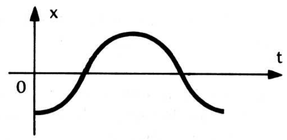
    a) a freqüência é de 20 vibrações por segundo.
    b) para $t = 0$, a velocidade é nula.
    c) para $t = 20$ s , a aceleração não é nula.
    d) a fase inicial é de 180°.
    e) todas as afirmativas estão erradas.

18. (PUC CAMPINAS SP) A massa oscilante de um oscilador harmônico realiza um MHS cuja equação é $x = 5 \cos (\pi\, t + \pi/2)$.
    O gráfico correspondente é:

a)


b)


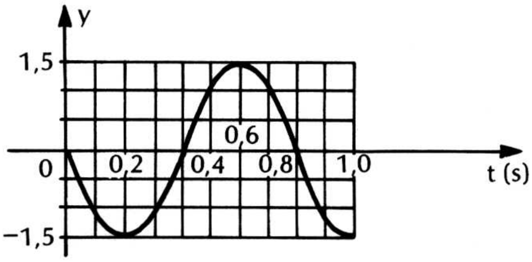
c)


d)


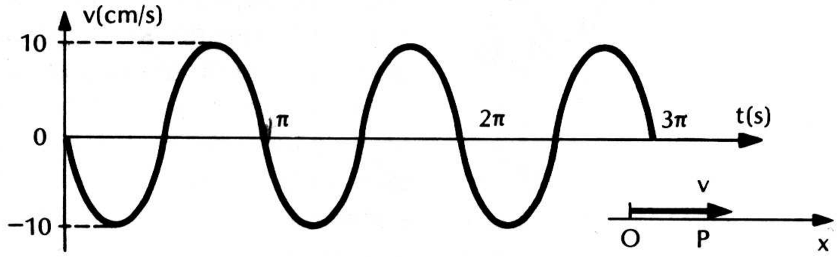
e) nenhuma das anteriores.

19. (CESGRANRIO) O gráfico mostra como varia o tempo a posição de uma partícula presa à extremidade de uma mola ideal (oscilador harmônico simples). Qual a amplitude da oscilação?
 a) 10 cm
 b) 40 cm
 c) 50 cm
 d) 60 cm
 e) 90 cm

20. (UNITAU SP) O gráfico mostra a posição de um ponto em função do tempo. Assim, o período e a freqüência são, respectivamente:
 a) 0,8 s e 1,25 Hz
 b) 2 s e 0,5 Hz
 c) 1,5 s e 2/3 Hz
 d) 4 s e 0,25 Hz
 e) 0,5 s e 2 Hz



(PUC SP) As questões seguintes de números 21 a 24 referem-se a uma senóide para $t > 0$, indicando a velocidade do ponto P móvel na trajetória (O, x) em função do tempo:



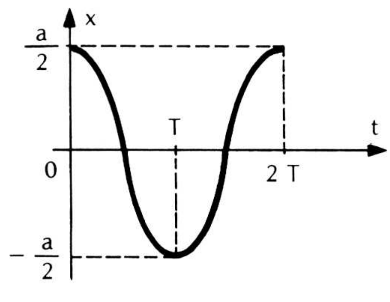
21. O movimento a que se refere o diagrama da figura é um movimento:
 a) uniforme
 b) uniformemente acelerado
 c) uniformemente retardado
 d) circular uniforme
 e) harmônico simples

22. Sendo a origem O o centro da trajetória do movimento a que se refere o diagrama de velocidade da questão anterior, temos que, nesse movimento, ponto móvel:
    a) parte da origem, com velocidade nula.
    b) parte da origem, mas não com velocidade nula.
    c) não parte da origem, mas a velocidade inicial é nula.
    d) não parte da origem, mas tem velocidade inicial não nula.
    e) nenhuma das respostas anteriores é correta.

23. No movimento a que se refere o diagrama acima, a maior distância que o móvel alcança da origem O é:
    a) infinita
    b) 10 cm
    c) 5 cm
    d) 1 cm
    e) 0,5 cm

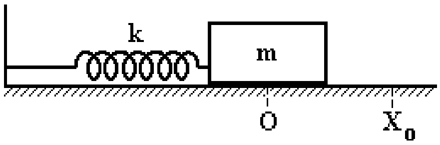
24. No movimento a que se refere o diagrama dado, a aceleração máxima que o móvel adquire é (em cm/s^2):
    a) zero
    b) 5
    c) 10
    d) 20
    e) 25

25. (UECE) O gráfico representa o comportamento, em função do tempo, do movimento da projeção sobre o diâmetro de uma partícula em movimento circular uniforme. A velocidade angular do móvel em questão é:



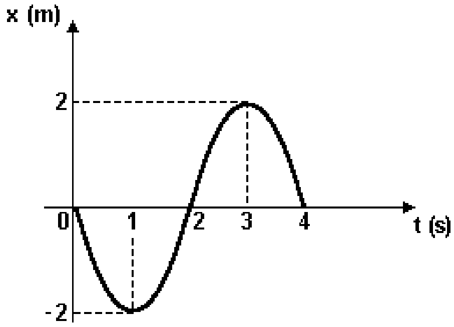
a) $\omega = \frac{2\pi}{T}$
b) $\omega = \frac{\pi}{T}$
c) $\omega = \frac{\pi}{2T}$
d) $\omega = \frac{\pi}{4T}$

26. (Vunesp 1990) Num sistema massa-mola, conforme a figura (superfície horizontal sem atrito) onde k é a constante elástica da mola, a massa é deslocada de uma distância x_0, passando a oscilar.



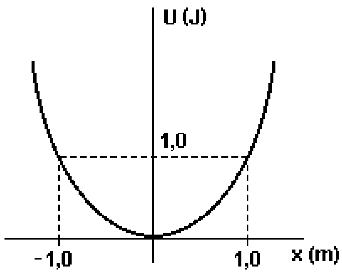
a) Em que ponto, ou pontos, a energia cinética da massa é igual a 7/9 da energia potencial do sistema?
b) A energia cinética pode ser superior à potencial em algum ponto? Explique sua resposta.

27. (UFG 2000) O gráfico abaixo mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4s.



A equação da posição em função do tempo para este movimento harmônico é dada por $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. A partir do gráfico, encontre as constantes A, ω e φ.

28. (PUC 2001) Uma partícula de massa 0,50kg move-se sob a ação apenas de uma força, à qual está associada uma energia potencial U(x), cujo gráfico em função de x está representado na figura adiante. Esse gráfico consiste em uma parábola passando pela origem. A partícula inicia o movimento a partir do repouso, em x=-2,0m. Sobre essa situação, é FALSO afirmar que:



a) a energia mecânica dessa partícula é 8,0J.
b) a velocidade da partícula, ao passar por x=0, é 4,0m/s.
c) em x=0, a aceleração da partícula é zero.
d) quando a partícula passar por x=1,0m, sua energia cinética é 3,0J.

29. (UFU 1999) Um bloco de massa m=1kg preso à extremidade de uma mola e apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila em torno da posição de equilíbrio, com uma amplitude de 0,1m, conforme mostra a figura (a) abaixo. A figura (b) mostra como a energia cinética do bloco varia de acordo com seu deslocamento.

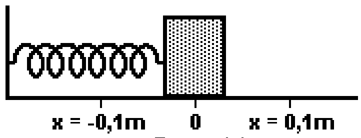


figura (a)

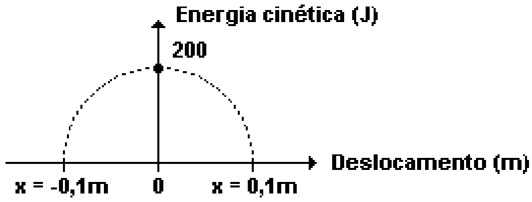
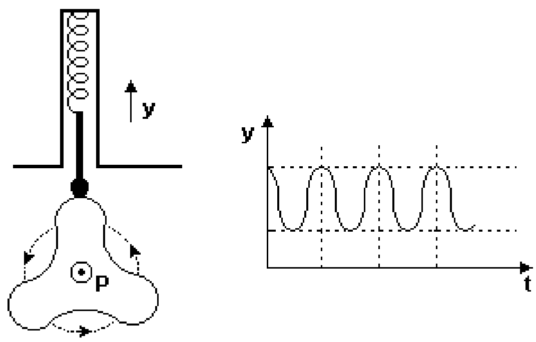


figura (b)

É CORRETO afirmar que
a) quando o bloco passa pelos pontos extremos, isto é, em x=± 0,1m, a aceleração do bloco é nula nesses pontos.
b) o módulo da força que a mola exerce sobre o bloco na posição +0,1m é $2{,}0 \cdot 10^3$N.
c) a constante elástica da mola vale $2{,}0.10^4$N/m.
d) a energia potencial do bloco na posição +0,05m vale 100J.
e) na posição de equilíbrio, o módulo da velocidade do bloco é 20m/s.

30. (Fuvest 2001)

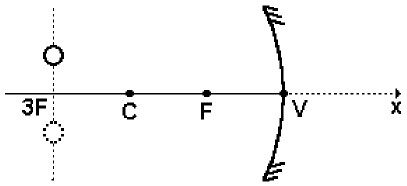


Uma peça, com a forma indicada, gira em torno de um eixo horizontal *P*, com velocidade angular constante e igual a π rad/s. Uma mola mantém uma haste apoiada sobre a peça, podendo a haste mover-se APENAS na vertical. A forma da peça é tal que, enquanto ela gira, a extremidade da haste sobe e desce, descrevendo, com o passar do tempo, um movimento harmônico simples *Y(t)* como indicado no gráfico. Assim, a freqüência do movimento da extremidade da haste será de:

a) 3,0 Hz
b) 1,5 Hz
c) 1,0 Hz
d) 0,75 Hz
e) 0,5 Hz

31. (UFES 1999) Uma partícula pontual realiza, na vertical, um movimento harmônico simples (MHS), dado por

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

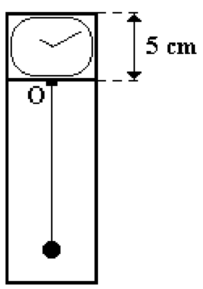


O plano de oscilação da partícula é perpendicular ao eixo principal (eixo *x*) de um espelho esférico côncavo Gaussiano e está a uma distância do vértice igual a três vezes a distância focal do espelho.

Determine:

a) A freqüência angular de oscilação da imagem da partícula;
b) A amplitude de oscilação da imagem;
c) A diferença de fase $\Delta\phi$ entre o movimento de oscilação da partícula e o da sua imagem.

32. (Vunesp 1996) Um estudante pretendia apresentar um relógio de pêndulo numa feira de ciências com um mostrador de 5cm de altura, como mostra a figura.

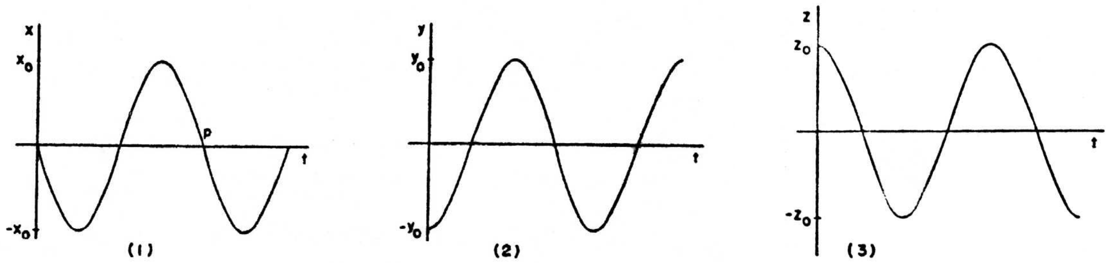


Sabendo-se que, para pequenas oscilações, o período de um pêndulo simples, é dado pela expressão $T = 2\pi\sqrt{(1/g)}$, pede-se:

a) Se o pêndulo for pendurado no posto O e tiver um período de 0,8 segundos, qual deveria ser a altura mínima do relógio? Para facilitar seus cálculos, admita $g = (\pi)^2$ m/s^2.
b) Se o período do pêndulo fosse de 5 segundos, haveria algum inconveniente? Justifique.

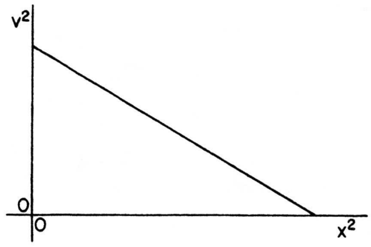
33. (Unicamp 1992) Um corpo de massa m está preso em uma mola de constante elástica k e em repouso no ponto O. O corpo é então puxado até a posição A e depois solto. O atrito é desprezível. Sendo m = 10 kg, k = 40 N/m, π =3,14, pede-se:
a) O período de oscilação do corpo;
b) O número de vezes que um observador, estacionário no ponto B, vê o corpo passas por ele, durante um intervalo de 15,7 segundos.

34. (ITA 1979) São dadas três grandezas físicas escalares, respectivamente, X, Y e Z que variam periodicamente com o tempo e cujos gráficos são dados abaixo:



Pode-se afirmar que:
a) as três grandezas têm mesmo período, com amplitudes de igual valor numérico e têm mesma fase inicial.
b) Y é uma função senoidal de t, com período P e fase inicial π rad.
c) as três têm mesma freqüência, sendo Z função senoidal com fase inicial $\frac{\pi}{2} rad$.
d) Y e Z são funções senoidais de t, de mesmo período P e suas freqüências angulares diferem de $\frac{3\pi}{2} rad.s^{-1}$.
e) se o gráfico (1) for o gráfico horário do movimento de um ponto material, o gráfico (2) será o gráfico da velocidade em função do tempo e o gráfico (3) será o gráfico da aceleração em função do tempo, para esse mesmo ponto material.

35. (ITA 1979) Um observador num referencial inercial estuda o movimento de uma partícula. A partir dos valores da velocidade v e da coordenada x, posição da partícula, obteve o seguinte gráfico abaixo:



X(m)	V(m.s^{-1})
0	$\pm\sqrt{\frac{k}{m}}.A$
±A	0

Dentre o valores obtidos acham-se os acima tabelados onde k, m e A são constantes positivas.

Pode-se afirmar que:

a) se trata do lançamento vertical de um foguete, na superfície da terra, com velocidade inicial k/m uma vez que, à medida que a altura x aumenta, tem-se uma variação constante da velocidade.

b) para um observador fixo à partícula, o movimento é circular com raio A^2 . (k/m + 1)

c) se trata de um movimento harmônico simples com amplitude A, constante elástica k, massa da partícula m e a aceleração $\left(-\frac{kx}{m}\right)$, para um observador na origem dos x .

d) para um outro observador inercial, o movimento é retilíneo com aceleração constante (- $\frac{kA}{m}$).

e) a partícula se move sob a ação de uma força constante.

36. (ITA 1980) Uma partícula de massa m realiza um movimento harmônico simples de amplitude A, em torno da posição de equilíbrio, 0. Considerando nula a energia potencial para a partícula em 0, calcular a elongação para a qual a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial.

a) $x = \pm\frac{A}{2}$ b) $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$ c) $x = \pm\frac{A}{\sqrt{3}}$

d) $x = \pm\frac{A}{3}$ e) $x = \pm\frac{A}{4}$

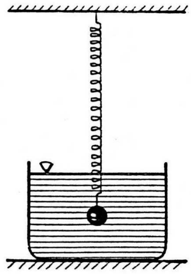
37. (ITA 1980) Uma partícula move-se no plano (x, y) de acordo com as equações:

$$\boldsymbol{x = v_0 t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = A\cos(\omega t)}$$

Onde $v_0 = 3{,}0$ m/s, $A = 1{,}00$ m e $\omega = 8{,}0$ *rad*/s. Calcular o módulo da velocidade da partícula no instante em que $\omega t = \frac{\pi}{6} rad$.

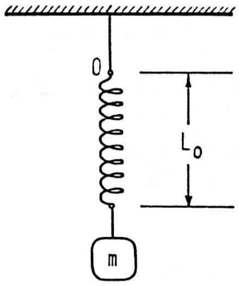
a) $v = 4{,}2$ m/s
c) $v = 7{,}6$ m/s
e) $v = 9{,}4$ m/s
b) $v = 5{,}0$ m/s
d) $v = 8{,}0$ m/s

38. (ITA 1982) Uma bolinha de massa m está oscilando livremente com movimento harmônico simples vertical, sob a ação de uma mola de constante elástica K. Sua amplitude de oscilação é A. num dado instante, traz-se um recipiente contendo um líquido viscoso e obriga-se a partícula a oscilar dentro desse líquido. Depois de um certo tempo, retira-se novamente o recipiente com o líquido e constata-se que a partícula tem velocidade dada pela expressão:
$V = V_0 \cos(wt + \gamma)$, onde V_0, w e γ são constantes. Desprezando as perdas de calor para o meio circundante e sabendo que o líquido tem capacidade calorífica C, podemos afirmar que a variação de sua temperatura foi de:



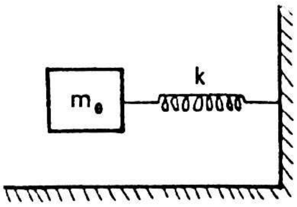
a) zero
b) é impossível calculá-la sem conhecer a amplitude do movimento final
c) $(KA^2 - m v_0^2)/2C$
d) KA^2/C
e) $(KA^2 - m v_0^2)/C$

39. (ITA 1984) Uma mola de massa desprezível tem constante elástica $\underline{K}$ e comprimento $\underline{L_O}$ quando não esticada. A mola é suspensa verticalmente por uma das extremidades e na outra extremidade é preso um corpo de massa m. Inicialmente o corpo é mantido em repouso numa posição tal que a força exercida pela mola seja nula. Em seguida, a massa m é abandonada com velocidade inicial nula. Desprezando as forças dissipativas, o comprimento máximo (L) da mola será dado por:



a) $L = L_0 + mo/K$
b) $L = mo/K$
c) $L = L_0 + 2mo/K$
d) $L = 2mo/K$
e) $L = 1/2\ (L_0 + mo/K)$

40. (ITA 1992) Uma forma de medir a massa ***m*** de um objeto em uma estação espacial com gravidade zero é usar um instrumento como mostrado na figura. Primeiro o astronauta mede a freqüência f_0 de oscilação de um sistema elástico de massa m_0 conhecida. Após, a massa desconhecida é adicionada a este sistema e uma nova medida da freqüência, ***f***, de oscilação é tomada. Como podemos determinar a massa desconhecida a partir dos dois valores de medida da freqüência?



a) $m = m_0 \dfrac{f_0^2}{f^2}$
b) $m = m_0 (f_0^2 - f^2)$
c) $m = m_0 (\dfrac{f_0^2}{f^2} - 1)$
d) $m = m_0 (\dfrac{f_0^2}{f^2} - 2)$
e) $m = m_0 (\dfrac{f_0^2}{f^2} + 1)$

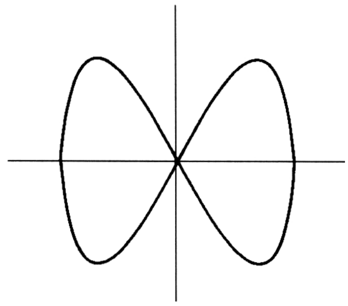
41. (ITA 2001) Uma partícula descreve um movimento cujas coordenadas são dadas pelas seguintes equações: $X(t) = X_o \cos(\omega t)$ e $Y(t) = Y_o \operatorname{sen}(\omega t + \pi/6)$, em que ω, X_0 e Y_0 são constantes positivas. A trajetória da partícula é:
a) Uma circunferência percorrida no sentido anti-horário.
b) Uma circunferência percorrida no sentido horário.
c) Uma elipse percorrida no sentido anti-horário.
d) Uma elipse percorrida no sentido horário.
e) Um segmento de reta.

42. (Resnick vol.2) Esquematize a trajetória de uma partícula que se move no plano xy, de acordo com as equações:

$$x = x_m \cos(\omega t - \pi/2) \quad \text{e} \quad y = 2x_m \cos(\omega t).$$

43. (Resnick vol.2) O diagrama mostrado na figura é o resultado da combinação de dois movimentos harmônicos simples

$x = x_m \cos(\omega_x t)$ e $y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y)$.



a) Qual o valor de x_m/y_m?
b) Qual é o valor de ω_x/ω_y?
c) Qual é o valor de ϕ_y?

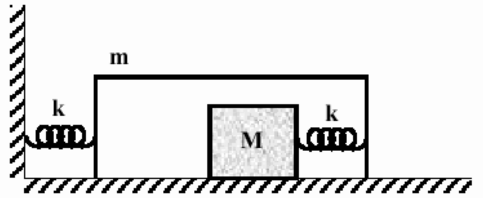
44. (Resnick vol.2) Os elétrons num osciloscópio são defletidos por dois campos de tal maneira que, em qualquer instante t, o deslocamento é dado por

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = A\cos(\omega t + \varphi_y)$$

Descreva a trajetória dos elétrons e determine sua equação quando

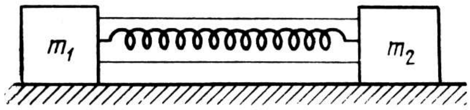
a) $\phi_Y = 0^o$,
b) $\phi_Y = 30^o$
c) $\phi_y = 90^o$

45. (OBF 2001) Um bloco de massa $\boldsymbol{M}$ é colocado no interior de uma caixa oca de massa $\boldsymbol{m} < M$, sem a tampa inferior, como mostra a figura a seguir. O sistema encontra-se inicialmente mantido em repouso. As molas são idênticas, com constantes elásticas $\boldsymbol{k}$ e distensões iniciais $\boldsymbol{x}0$. Não há atrito entre a caixa e a superfície. O atrito entre o bloco e a superfície é suficientemente intenso para mantê-lo sempre em repouso.

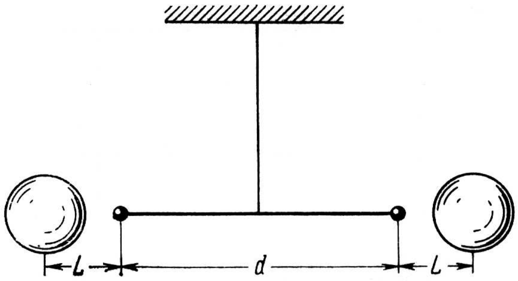


a) Nestas circunstâncias, calcule o menor valor do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície.
b) Após a caixa ser liberada do repouso, considere que jamais haja contato entre ela e o bloco, que permanece estático. Sabendo que a caixa oscilará em um movimento harmônico simples, determine a freqüência angular deste movimento.

46. (Saraeva 644) Dois blocos, de massas m_1 e m_2, são ligados por uma mola de rigidez k. A mola está comprimida com a ajuda de dois fios, como mostra a figura. Os fios são queimados. Determinar o período de oscilações dos blocos.

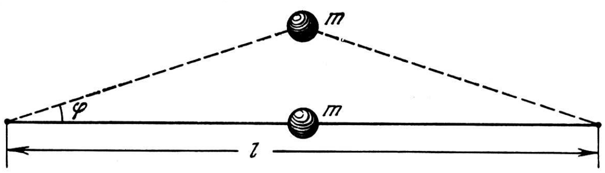


47. (Saraeva 650) Nos extremos de uma barra, de peso desprezível e de comprimento d = 1m, são fixas duas pequenas esferas de massas m = 1g. A barra é suspensa, por uma articulação, de tal modo, que pode girar sem atrito, junto de seu eixo vertical, que passa pelo meio da mesma. Em uma mesma reta que a barra, são fixas duas esferas grandes com massas M = 20 kg. A distância entre os centros das esferas grande e pequena é L=16 cm (figura). Determinar o período de pequenas oscilações descritas pelo pêndulo giratório.



48. (Saraeva 663) Suponhamos a existência de uma mina que penetre na terra por um de seus diâmetros. Depois de quanto tempo, um corpo lançado nesta mina, atingirá o centro da terra? Não existe resistência ao movimento.

49. (Saraeva 664) Uma corda, fixa nos extremos, é distendida com a força f. No meio da corda é fixo um peso pequeno de massa m. Determinar o período das oscilações pequenas do peso fixo. (Desprezar a massa da corda e a gravidade).



50. (Saraeva 675) Nas placas verticais de um oscilógrafo aplicou-se uma tensão $V_1 = V_{10}\cos(\omega t)$ e nas placas horizontais uma tensão $V_2 = V_{20}\cos(\omega t - \varphi)$. Achar a trajetória de um raio eletrônico, na tela do oscilógrafo, se as diferenças de fase entre as tensões nas placas são $\phi_1 = \pi/2$ e $\phi_2 = \pi$.

Gabarito

01 a) 1 s; 1 Hz; 5 cm

b) $\pi\,\text{s}; \frac{1}{\pi} Hz; 2\,\text{cm}$

02 a) 105 cm

b) $T \cong 1\,\text{s}; 15\,\text{cm}; 90\,\text{cm}$

03 a) 0,1 J

b) 0,2 m

c) 0,4 πs

04 a) 2 rad/s

b) $x = 0{,}1\cos 2t; v = -0{,}2\,\text{sen}\,2t; \alpha = -0{,}4\cos 2t$

c) $x = 0{,}1\cos(2t + \frac{\pi}{2}); v = -2\,\text{sen}(2t + \frac{\pi}{2}); \alpha = -0{,}4\cos(2t + \frac{\pi}{2})$

d) $\text{s} = 0{,}1\cos(2t + \pi); v = -0{,}2\,\text{sen}(2t + \pi); \alpha = -0{,}4\cos(2t + \pi)$

05 $x = 0{,}1\cos(4t + \frac{3\pi}{2}); v = -0{,}4\,\text{sen}(4t + \frac{3\pi}{2}); \alpha = -1{,}6\cos(4t + \frac{3\pi}{2})$

06 1 s

07 a) 30 N/m

b) 0,33 m

c) $T \cong 0{,}6$ s

d) $x = 0{,}06 \cos (10{,}4\, t + \pi)$

08 a

09 c

10 d

11 c

12 a

13 a

14 b

15 a

16 e

17 e

18 a

19 b

20 a

21 e

22 c

23 c

24 d

25 b

26 a) $x = 3x_0/4$ e $x = -3x_0/4$

b) Sim. Por exemplo no ponto O quando toda a energia mecânica estará na forma de energia cinética.

27 $A = 2$ m;
$\omega = \pi/2$ rad/s;
$\varphi = \pi/2$ rad;
28 a
29 e
30 b
31 a) ω
b) A/2
c) $\Delta\phi = \pi$ rad
32 a) 21 cm
b) O inconveniente é que o relógio teria mais de 6 metros de altura. Impróprio para salas convencionais.
33 a) 3,14 s
b) 10
34 c
35 c
36 c
37 b
38 c
39 c
40 c
41 c
42
43
44 a) Em linha reta, $y = \pm x$.
b) Elipse, $y^2 - \sqrt{3}\,xy + x^2 = A^2/4$.
c) Círculo, $x^2 + y^2 = A^2$.
45 a) $\mu_e = kx_o / Mg$;
b) $\omega = (2k/\mathrm{m})^{1/2}$
46 $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{m}_1\,\mathrm{m}_2}{k(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)}}$
47 $T = 2\pi\sqrt{d\,\mathrm{L}^2/\gamma^2 M} \approx 5{,}4$ horas;
48 ≈ 21 min;
49 $T = 2\pi\sqrt{\mathrm{m}\,\ell/4f}$
50 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2xy}{ab}\cos\phi = \operatorname{sen}\phi^2$, *para* $\phi = \pi/2$: $\quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (*elipse*)

Coleção **olimpo**
IME ITA

opirus
EDITORA