5、水道测量数据*

1. 问题与假设

(1)问题

本题水平方向的坐标 x,y 以 Yd (=0.914m)为单位,水深方向以 Ft (=30.48cm)为单位。

表 5-1 给出了水面直角坐标(x,y)处的水深 z. 这是在低潮时测得的。如果船的吃水深度为 $5Ft$, 试问在矩形域(75,200)×(−50×50)中行船应避免进入哪些区域?

表 5-1 水道数据

$x(Yd)$	129.0	140.0	108.5	88.0	185.5	195.5	105.5
$y(Yd)$	7.5	141.5	28.0	147.0	22.5	137.5	85.5
$z(Ft)$	4	8	6	8	6	8	8
$x(Yd)$	157.5	107.5	77.0	81.0	162.0	162.0	117.5
$y(Yd)$	−6.5	−81.0	3.0	56.5	−66.5	84.0	−38.5
$z(Ft)$	9	9	8	8	9	4	9

(2) 假设

1)海底是光滑的,无暗礁。

2)每个给定数据的点都影响着其它未知点的深度,且离得越近,影响越大。

3)任何两个数据点之间深度的变化都影响着其它未知点的深度。

* 本题为 1986 年美国大学生数学建模竞赛的 A 题,本文根据[1]的解答编译而成。

4)两个数据点深度的变化对某一未知点深度的影响，取决于三个距离：

(i)两个数据点的连线与该未知点的垂直距离；

(ii)该未知点与离它最近的那个数据点之间的距离；

(iii)两个给定数据点之间的距离。

5)两个数据点深度的变化对某一未知点的影响沿这两点连线线性传播。

6)每一个给定数据点对某一未知点的影响与它们之间距离的平方成反比。

2. 分析与建模

根据假设条件海底是光滑的，无暗礁，因此，很自然地想到利用光滑曲面来拟合海底曲面。例如可以用二维拉格朗日(Lagrange)插值或双三次样条函数来逼近。考虑到保凸性及光滑性要求，本文采用双三次样条函数来拟合。

为了用双三次样条来插值，必须知道 x-y 平面内所有网格点上的深度，而所给定数据的 14 个随机点并不构成任何网格。所以第一步先要生成网格。最容易的办法是过 14 个数据点分别作平行于 x，y 轴的直线，划分成不规则的 14×14 网格。

第二步是确定那些未知数据的网格点上的深度。应该说所有数据点对未知网格点的深度都有影响，只是越靠近的数据点影响越大。由于我们对海底面所知甚少，所以只能通过某种加权平均来逼近未知网格节点上的深度，采用距离平方的倒数作权重以反映出距离越小影响越大。

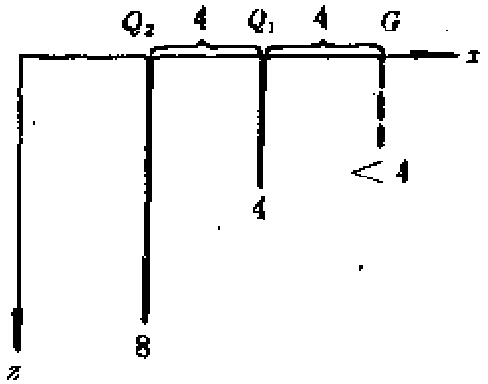


图 5-1

仅用加权平均来逼近未知点的深度是有缺陷的，它不能反映数据点深度的变化趋势。让我们先来看一个简

单的一维例子. 设 Q_1, Q_2 点的深度分别为 4, $8Ft$, G 是 Q_1Q_2 连线上未知深度的点(见图 5-1), $\overline{Q_1Q_2}=4Ft$, $\overline{GQ_1}=4Ft$, 求 G 点的深度 z_g。

根据光滑性假设, 由 Q_2 点经 Q_1 点到 G 点的深度应渐渐变浅, 因此, 未知点 G 的深度 z_g 应小于 4。

下面用三种外推公式加以分析:

(i)加权平均外推公式

$$z_g=\frac{z(Q_1,Q_1,G)/\overline{GQ_1^2}+z(Q_2,Q_2,G)/\overline{GQ_2^2}}{1/\overline{GQ_1^2}+1/\overline{GQ_2^2}}=4.8Ft$$

其[illegible], G) 和 $z(Q_2,Q_2,G)$ 分别为 Q_1, Q_2 点的深度 $4Ft$ 和 8[illegible]。显然 z_g 不符合小于 $4Ft$ 的期望。

(ii)线性外推公式

$$z_g=0$$

(见图 5-3)。这个外推值又太小, 也不符合实际情况。

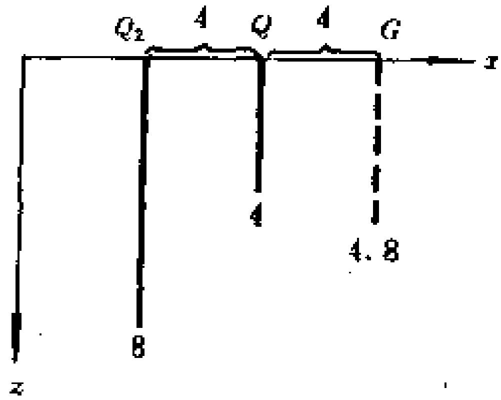


图 5-2

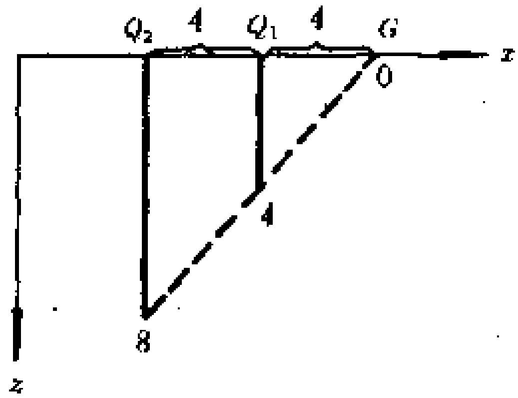


图 5-3

(iii)组合加权平均外推公式

由于上述两种公式, 一个偏大, 另一个又偏小, 现将两者结合起来, 给出一种组合加权平均外推公式如下:

$$z_g=\frac{z(Q_1,Q_1,G)/\overline{GQ_1^2}+z(Q_2,Q_2,G)/\overline{GQ_2^2}+z(Q_1,Q_1,G)/(\overline{GQ_1^2}+\overline{Q_1Q_2^2})}{1/\overline{GQ_1^2}+1/\overline{GQ_2^2}+(1/\overline{GQ_1^2}+\overline{Q_1Q_2^2})}$$

$$=\frac{4/16+8/64+0/(16+16)}{1/16+1/64+1/(16+16)}=3.4Ft$$

其中 $z(Q_1,Q_2,G)$ 为线性外推值。

这个外推值比较合理(见图 5-4)。

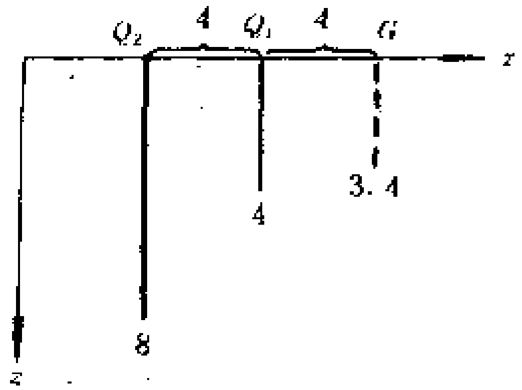


图 5-4

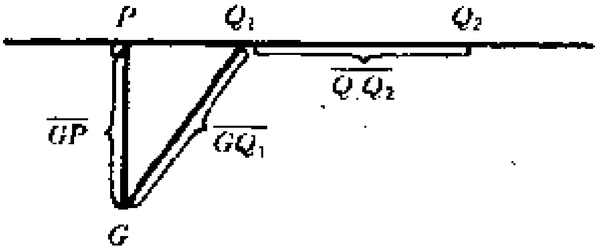


图 5-5

现将上述的一维情况变成二维情况(见图 5-5),即未知点 G 不在已知点 Q_1,Q_2 的连线上。根据假设 4),Q_1,Q_2 点对 G 点深度的影响取决于三个距离:$\overline{GP},\overline{GQ_1},\overline{Q_1Q_2}$,其中 P 是 G 到 Q_1Q_2 延长线的垂足。利用上面的分析结果,修改权因子,得到如下的加权平均:

$$z_g = \frac{z(Q_1,Q_1,P)/\overline{GQ_1}^2 + z(Q_2,Q_2,P)/\overline{GQ_2}^2}{1/\overline{GQ_1}^2 + 1/\overline{GQ_2}^2 + 1/(\overline{GP}^2 + \overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1Q_2}^2)}$$
$$+ \frac{z(Q_1,Q_2,P)/(\overline{GP}^2 + \overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1Q_2}^2)}{1/\overline{GQ_1}^2 + 1/\overline{GQ_2}^2 + 1/(\overline{GP}^2 + \overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1Q_2}^2)}$$

为了考虑所有给定点的影响,将上述加权平均推广到所有点对。设 G 是某一未知深度的网格点,Q_i,Q_j 是已知深度的点,记

$$\overline{GQ_{ij}} = \min\{\overline{GQ_i},\overline{GQ_j}\}$$

P_{ij} 是 G 到 Q_iQ_j 连线的垂足(见图 5-6).采用下面的加权平均来逼近 G 点的深度

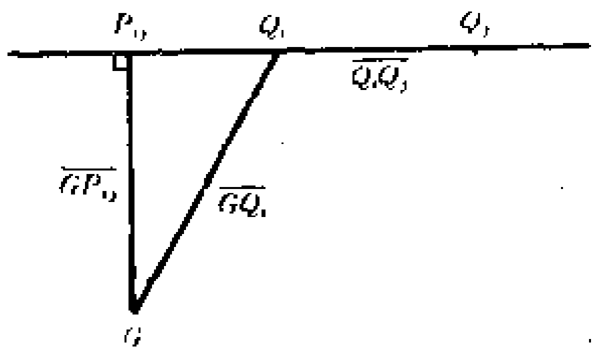


图 5-6

$$z_K = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} z(Q_i,Q_j,P_{ij})/(\overline{GP}_{ij}^2 + \overline{GQ}_{ij}^2 + \overline{Q_iQ_j}^2)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N}[1/(\overline{GP}_{ij}^2 + \overline{GQ}_{ij}^2 + \overline{Q_iQ_j}^2)]}$$

这里 $z(Q_i,Q_j,P_{ij})$ 是由 Q_i,Q_j 点的深度线性外推的 P_{ij} 点的深度。

这是一个广义加权平均公式，按此公式可以逼近出所有未知网格节点上的深度。

3. 求解与结果

求出所有 14×14 个网格点上的深度后，调用 IMST 中的双三次样条子程序，通过插值得到海底曲面；然后再加细网格，划分成 50×50 的网格，计算这加细网格节点上的深度；最后找出两个危险区分别在深度为 4 Ft 的两个点(129,75)和(162,84)的周围，并借助于 Mathlib 中的绘图程序，绘出海底的轮廓图(见图 5-7 至图 5-16)。

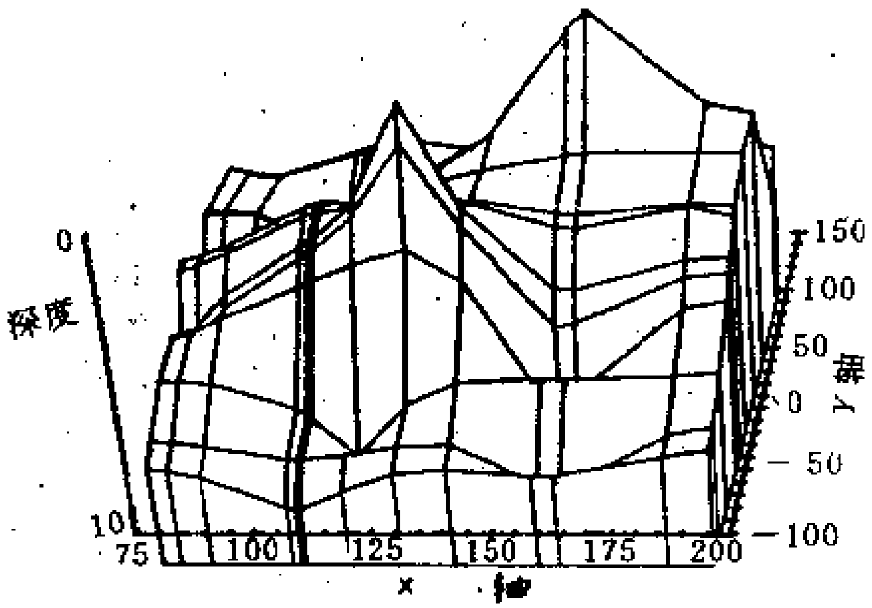


图 5-7

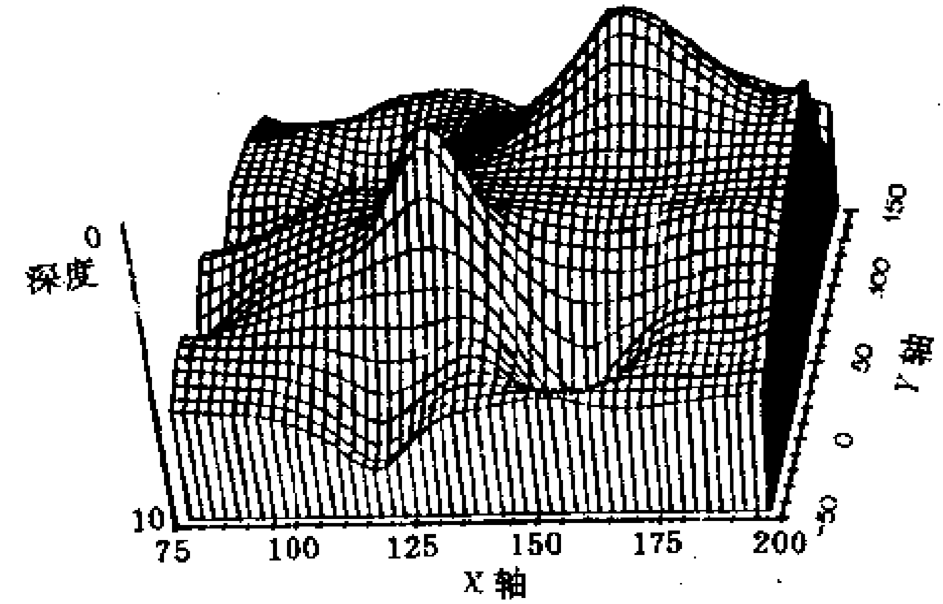

0
深度
10
75
100
125
150
175
200
X 轴
150
100
50
0
-50
Y 轴

图 5-8

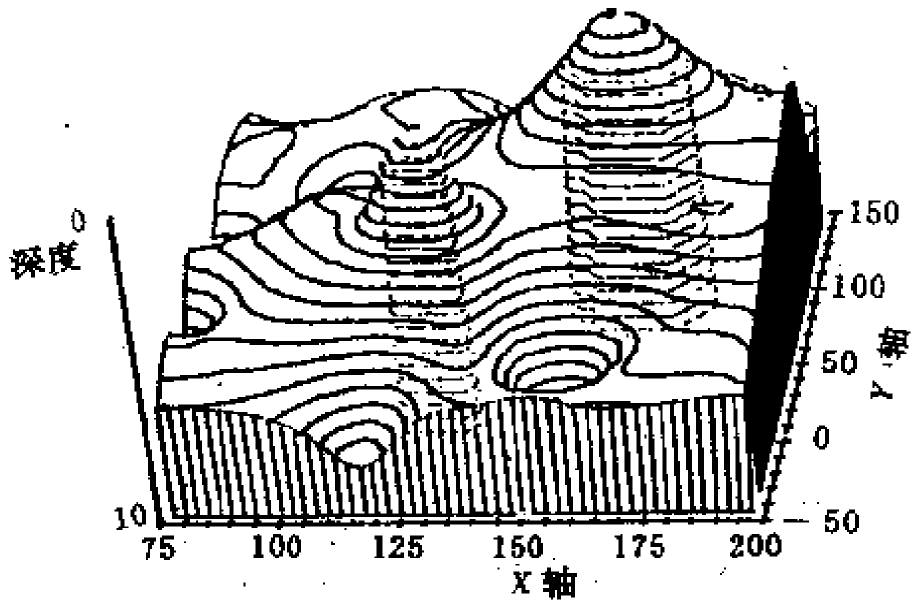

0
深度
10
75
100
125
150
175
200
X 轴
150
100
50
0
-50
Y 轴

图 5-9

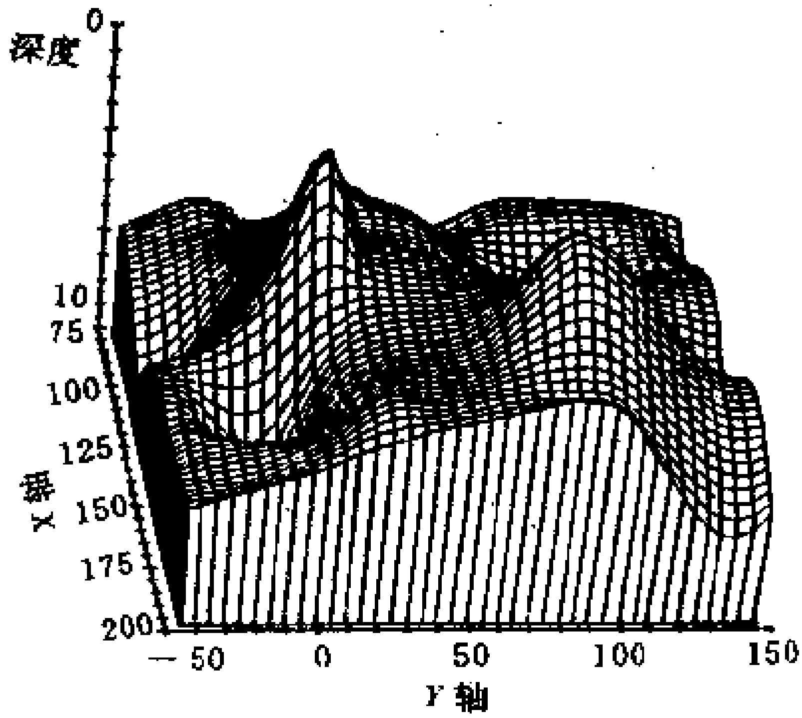

深度
0
10
75
100
125
150
175
200
X轴
— 50
0
50
100
150
Y 轴

图 5-10

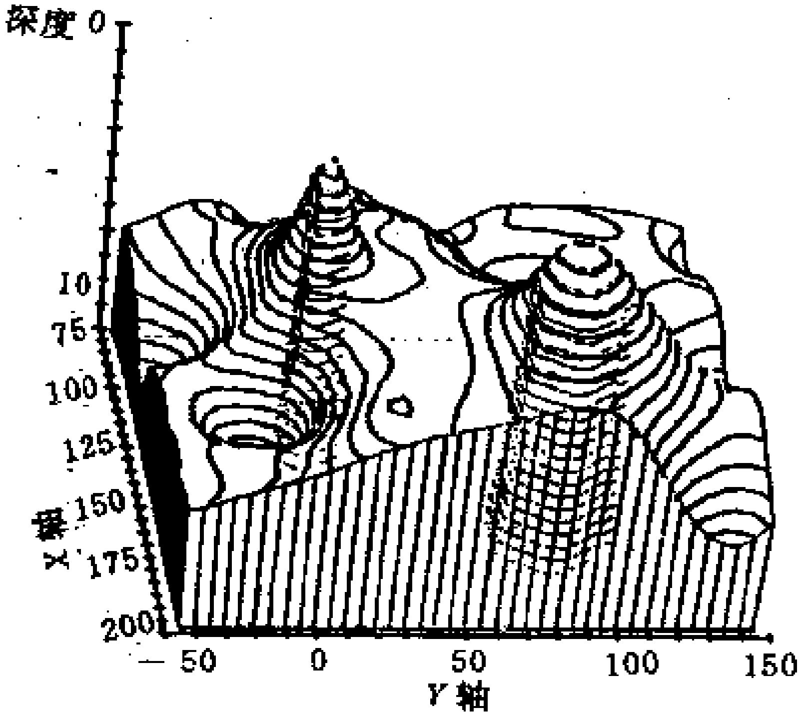
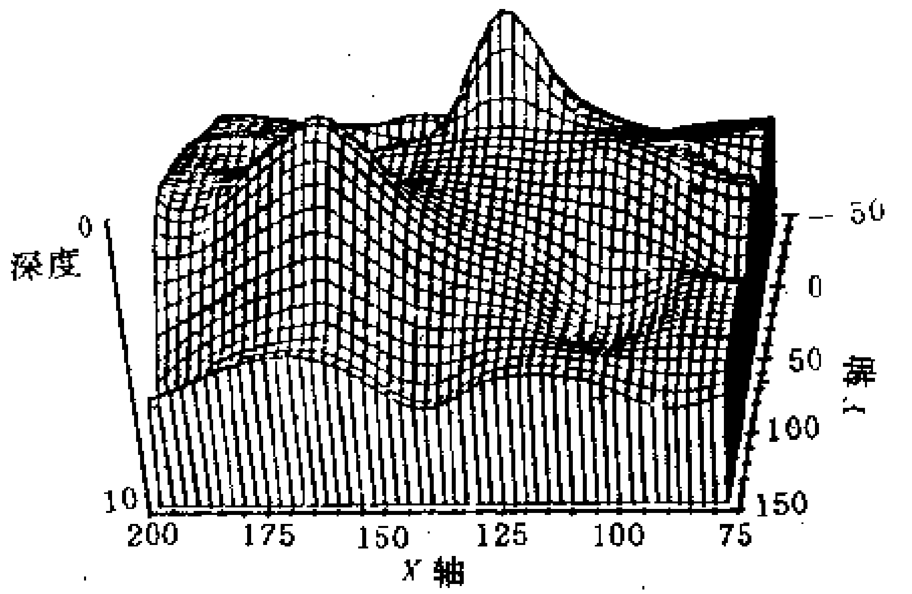
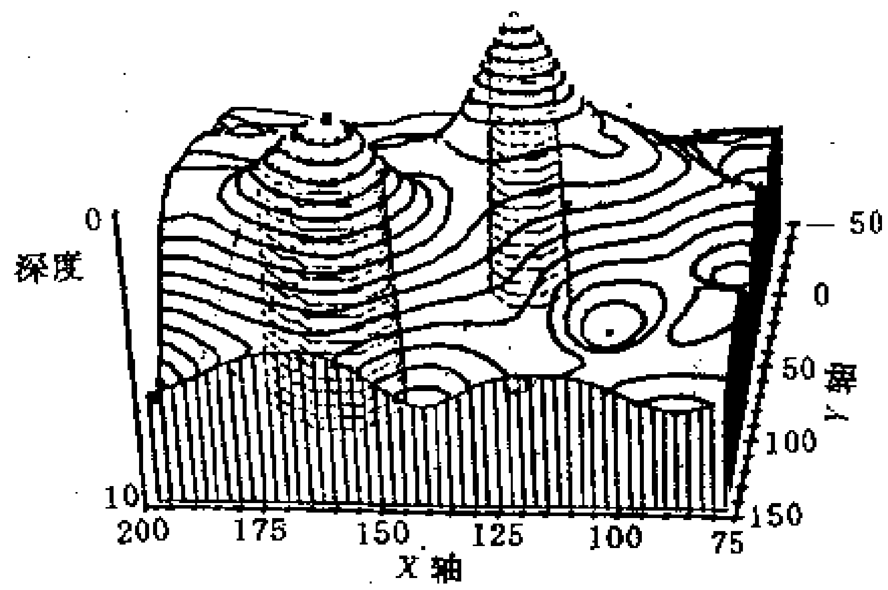

深度 0
10
75
100
125
150
175
200
X轴
— 50
0
50
100
150
Y 轴

图 5-11



深度
0
10
200 175 150 125 100 75
X 轴
50
0
50
100
150
Y 轴

图 5-12



深度
0
10
200 175 150 125 100 75
X 轴
50
0
50
100
150
Y 轴

图 5-13

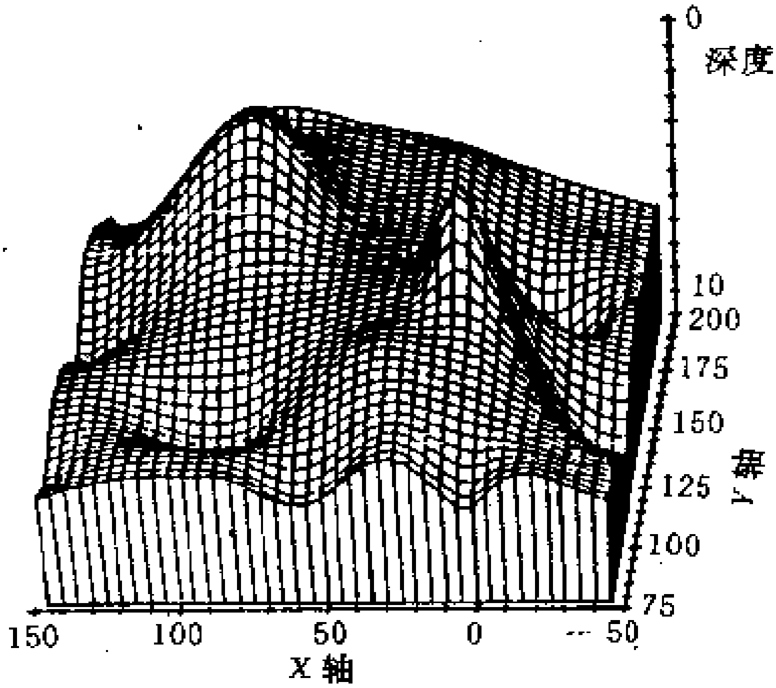

0
深度
10
200
175
150
125
100
75
Y轴
150
100
50
0
-50
X轴

图 5-14

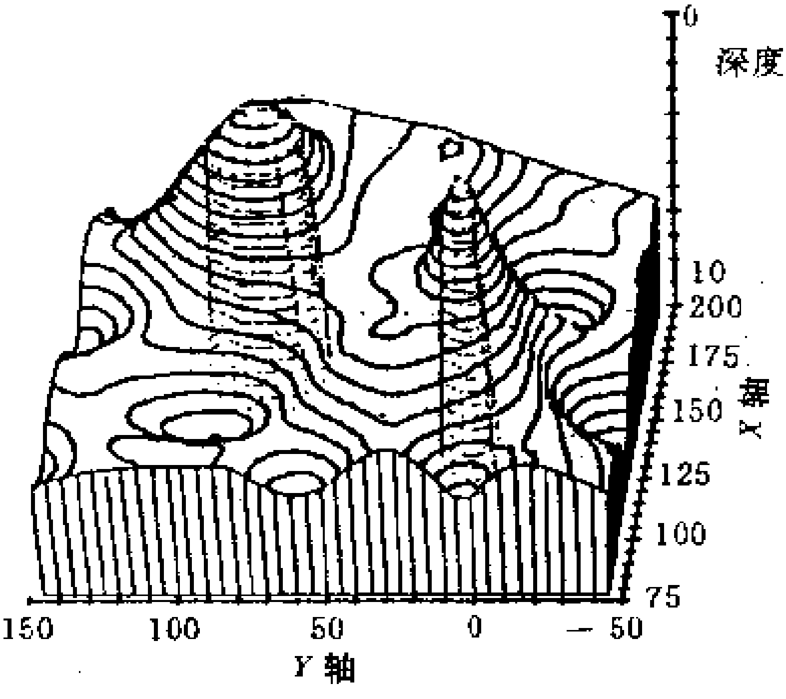

0
深度
10
200
175
150
125
100
75
X轴
150
100
50
0
-50
Y轴

图 5-15

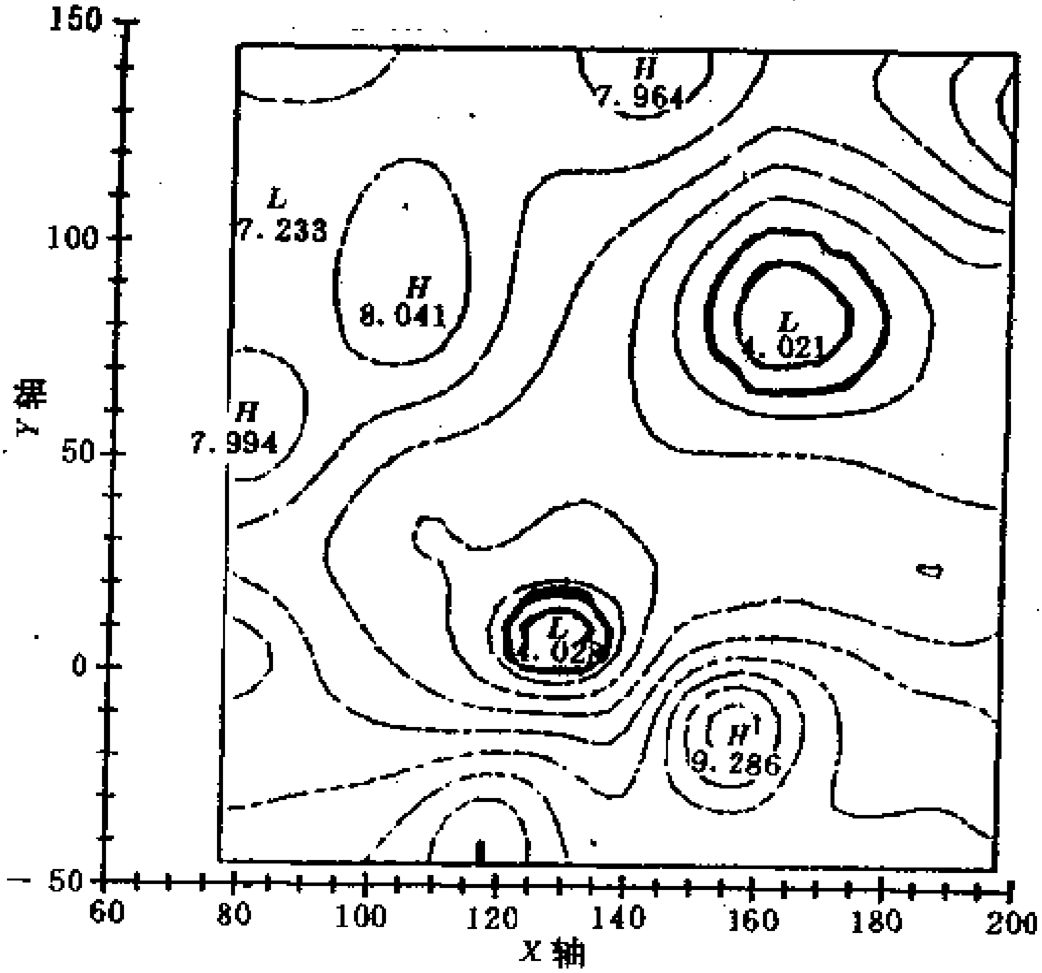


图 5-16

4. 模型评价

本模型充分利用了已知点的信息，给出了求未知网格点上深度的近似方法，用保凸性较好的双三次样条拟合了海底曲面，得到了比较满意的结果。但在实际计算中，三次样条可能会导致数值上不稳定，遇到这种情况，可以用加密网格点的办法来加以调整，也可以用稳定性较好的 B-样条来拟合。

参考文献

[1] DAVID HO, KURT OVERLEY LEE SHORT: Interpolating A Topographical Map of the Ocean Floor, *Mathematical Modelling*, VOL. 7, PP. 561-576, 1986