

热水澡问题

彭程 时光 袁宇昊

摘要

首先，我们对浴缸的几何形状进行简化，将浴缸简化为一个 $1.4 \times 0.8 \times 0.7$ 大小的长方体并设置了入水口和出水口。接着对应用傅里叶方程和能量守恒定律得到水中热量的传递方程。通过计算出水口和入水口的温度差 $T_r - T_c$ 得到总体的能量变化值，再根据热源加热对浴缸中每点的效果关于距离递减，得到单位时间内每一点的吸收的热量。其次考察水在三种接触面，即水空气，水浴缸壁，水人的传导系数 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ ，这三种情况对热量传导方程的影响。最后运用元胞自动机的方法对每个时刻整个浴缸的温度分布。最终我们得到了对于给定参数的在 $t = 1$ 和 $t = 300s$ 时仿真结果如图2，图3；并且我们考察仿真结果对于浴缸体积 V_Ω 和热传导系数 λ_1 的灵敏度检验，结果如图4，图5。

关键词：热传导模型、偏微分方程、元胞仿真

Contents

1	问题重述	3
2	假设	3
3	参变量声明	3
4	模型建立	4
4.1	基本模型	4
4.2	考虑人的情况	4
4.3	傅里叶定律	4
4.4	热传导方程	5
4.5	边界条件	5
4.6	最终方程	6
4.7	元胞仿真	6
5	仿真结果	8
6	灵敏度分析	9
6.1	改变浴缸体积	9
6.2	改变介质间热导率	10

1 问题重述

本文所要解决的问题是：建立一个浴缸水温度关于时间和空间的模型，以确定保持水温的最佳加热水策略，并且尽可能接近初始温度而不浪费太多的水。考虑浴缸的形状和体积，浴缸中的人的形状、体积、温度，以及人的运动，使用你的模型制定的策略在多大程度上取决于这些因素。如果最初就使用泡泡剂，会如何影响模型的结果？

2 假设

1. 初始时刻浴缸所有位置处水温相等
2. 房间足够大，所以房间的温度是恒定的，不会随着时间和空间而改变。
3. 浴缸的壁是隔热的，因此它与水之间的传热被忽略；因为大多数浴缸的材料是陶瓷的，保温效果更好。
4. 以热水注入点（热源）在水的表面；因为加入的水是涓涓细流的，不会影响浴缸中的水。
5. 热水注入浴缸时，不考虑热对流，只有考虑热传导；因为我们加入的水是涓涓细流，它的流动是可以忽略的。
6. 不管热水进入浴缸过程中的热量散失；因为热水流入浴缸的时间是短的。
7. 函数 $T(x, y, z, t)$ 对每个独立变量有二阶连续偏导数（函数 $T(x, y, z, t)$ ）表示水在位置 (x, y, z) 处和时间 t 时刻 的温度。
8. 浴缸内的水是各向同性的，均质的；由于水的差别不大，所以我们可以看到水的密度在各个方向都是一样的。
9. 加入浴缸的人可以被看作是两个人长方体拼接在一起；因为一般来说，人的身体是均匀的。

3 参变量声明

符号	含义
$T(x, y, z, t)$	t 时刻在 (x, y, z) 位置处的温度 T
$F(x, y, z, t)$	单位时间单位体积内加入的热水
Ω	浴缸总的边界所包围的区域
Ω_1	热水入水口的区域
V_p	单位时间注入水的体积
T_c	流出水的温度
T_r	流入水的温度
Γ	浴缸总的表面积
$\Gamma_i, i \in 1, 2, 3$	水和空气的接触面；水和浴缸的接触面；水和人的接触面
V_Ω	浴缸总体积
T_0	适宜的初始温度

4 模型建立

在这一部分中，我们首先构建了包括一个浴缸、水的出口、水的入口、热水的温度和流速的系统。然后建立了一个用热传导方程来描述浴缸中的水温分布的模型。在这一部分，我们考虑两个边界（水表面与空气接触的边界和与浴缸底部、侧面接触的水的边界，得到两个边界条件。在此基础上，我们在系统中添加了一个人。当人泡澡时，人与系统间存在热交换。我们可以把人看作另一个介质，并在热传导方程中增加另一个边界条件。

4.1 基本模型

为了简化这个问题，我们先设置长方体浴缸，大小为 $1.4 \times 0.8 \times 0.7$ ，然后先把水装入浴缸。除此之外，这个基本模型还没有考虑人的因素。

4.2 考虑人的情况

此外，我们考虑把一个人加入系统中。洗澡时人会与水之间发生热交换。为了研究人对浴缸内水的温度分布的影响，我们将人的形状看作两个立方体拼接在一起，两个长方体尺寸分别为 $1.1 \times 0.45 \times 0.25 \text{ m}$ 和 $0.5 \times 0.3 \times 0.45 \text{ m}$ 。综合上述，可以得到如图1所示的浴缸模型

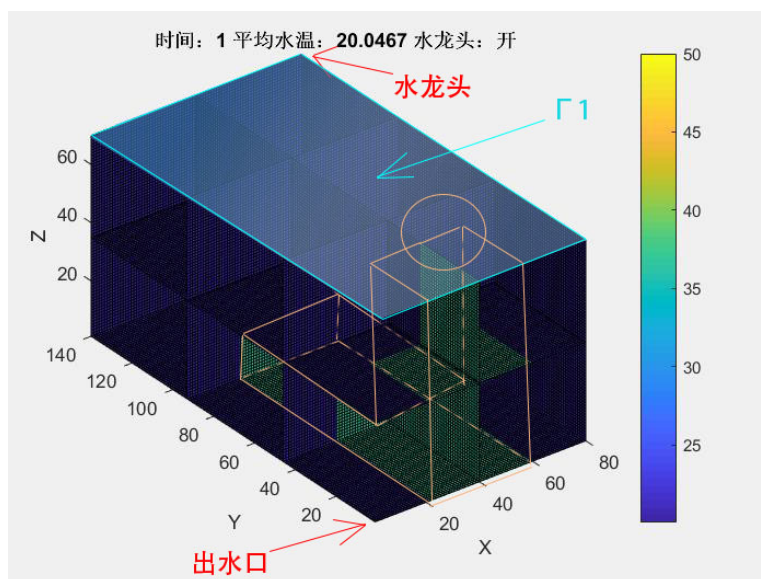


图1 浴缸的模型

4.3 傅里叶定律

傅里叶定律[1]指在导热过程中，单位时间内通过给定截面的导热量，正比于垂直于该截面方向上的温度变化率和截面面积，而热量传递的方向

则与温度升高的方向相反，即：

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} dS dt \quad (1)$$

其中， $T(x, y, z, t)$ 描述物体在位置 (x, y, z) 和时间 t 的温度； λ 是热导率； dQ 是导热量； $\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n}$ 是温度沿表面法线方向的方向导数； dS 是截面面积， dt 是极小时间。

4.4 热传导方程

对于在水中又热源的热传导问题,结合能量守恒定律[2]和傅里叶定律(1)得到下列式子：

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} [c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})] dx dy dz dt - H = 0 \\ H = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega_1} (F_1(x, y, z, t)) dx dy dz dt - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega_2} (F_2(x, y, z, t)) dx dy dz dt \end{cases} \quad (2)$$

由于初始时刻浴缸灌满了水所以新流入的水和流出的水体积相同，就得到了

$$\int_{t_1}^{t_2} F_1 V_p dt - \int_{t_1}^{t_2} F_2 V_p dt = \int_{t_1}^{t_2} F V_p dt \quad (3)$$

其中 $F(x, y, z, t)$ 表示热源单位时间单位体积所释放的热量，关于 t 是常数可由如下方程计算得到整个浴缸 F 之和：

$$F = c\rho \frac{T_r}{T_c} \quad (4)$$

而热水的加热效果随距离衰减故得到每个元胞单位时间内从热源传来的热量

$$f(x, y, z) = K(x, y, z) \frac{(T_r - T_c) V_p}{V_{\Omega}} \quad (5)$$

其中 $K(x, y, z)$ 与该元胞到热源的距离成反比。

4.5 边界条件

我们把边界分为三部分，即与空气接触面、与浴缸壁接触面和与人体接触面，即：

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \quad (6)$$

再利用傅里叶定律得到边界 $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ 处的热传导方程：

$$\begin{cases} \lambda_1 T + \lambda \frac{\partial T}{\partial n_1} \\ \frac{\partial T}{\partial n_2} = 0 \\ \lambda_3 T + \lambda \frac{\partial T}{\partial n_3} \end{cases} \quad (7)$$

λ 是水之间的热导率； λ_1 是水与空气之间的传热系数， λ_2 是水与浴缸之间的传热系数； λ_3 是水与人之间的传热系数； Γ_1 是空气的温度， Γ_2 是浴缸的温度， T 是水面的温度； \vec{n}_1 和 \vec{n}_2 是 Γ_1 和 Γ_2 面的法向量；

4.6 最终方程

联立(2)(3)(5)(7) 并简化可得最终方程如下

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} = f + \frac{\lambda}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) & (x, y, z) \in \Omega \\ f(x, y, z) = K(x, y, z) \frac{(T_r - T_c)V_p}{V_\Omega} & (x, y, z) \in \Omega \\ K(x, y, z) = \frac{\alpha}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} & (x, y, z) \in \Omega \\ T(x, y, z, 0) = T_0 & (x, y, z) \in \Omega \\ \lambda_1 T + \lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_1} = \lambda_1 T_1 & (x, y, z) \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_2} = 0 & (x, y, z) \in \Gamma_2 \\ \lambda_3 T + \lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_3} = \lambda_3 T_3 & (x, y, z) \in \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (8)$$

其中 $\alpha = \frac{|\Omega|}{\sum_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}}$ 为标准化系数

4.7 元胞仿真

将整个浴缸的体积分为 $140 \times 80 \times 70$ 个元胞，用 $\text{tem_hub}(x, y, z)$ 表示在 t 时刻 (x, y, z) 处的元胞的温度，并根据8式 可以得到

```

for x=(1:len_max_x)
for y=(1:len_max_y)
for z=(1:len_max_z)

    %判断是否是人区域
    if (x<person_x && y>person_y_l && y<person_y_r)
        tem_hub(x,y,z)=36.5;
        continue;
    end
    if (x<person_x_foot && y>person_y_l && y<person_y_r && z<=person_z)
        tem_hub(x,y,z)=36.5;
    end

```

```

        continue;

%计算离出水口的距离 以算出K值
dis=(x-position_hot(1,1))^2+
(y-position_hot(1,2))^2+
(z-position_hot(1,3))^2;

if(dis==0) %如果是进水口 跳过
    continue;
end

if(tem_hub(x,y,z)>tem_initail_hot)
%如果太靠近进水口 跳过
    continue;
end

%计算傅里叶定律里的温度改变
change_k=0;
if(x>1)
    change_k=change_k-K*(tem_hub_pre(x,y,z)-
        tem_hub_pre(x-1,y,z));
end
if(y>1)
    change_k=change_k-K*(tem_hub_pre(x,y,z)-
        tem_hub_pre(x,y-1,z));
end
if(z>1)
    change_k=change_k-K*(tem_hub_pre(x,y,z)-
        tem_hub_pre(x,y,z-1));
end
if(x<len_max_x)
    change_k=change_k-K*(tem_hub_pre(x,y,z)-
        tem_hub_pre(x+1,y,z));
end
if(y<len_max_y)
    change_k=change_k-K*(tem_hub_pre(x,y,z)-
        tem_hub_pre(x,y+1,z));
end
if(z<len_max_z)
    change_k=change_k-K*(tem_hub_pre(x,y,z)-
        tem_hub_pre(x,y,z+1));
end
if(z==len_max_z)
    change_k=change_k-K_air*(tem_hub_pre(x,y,z)-

```

```

tem_initail_air);
end

```

5 仿真结果

在特定的情况下，对于给定大小为 $1.4 \times 0.8 \times 0.7$ 的长方体浴缸，并设置参数如表1 运用元胞自动机的方法模拟在某一时刻浴缸中水中温度分布，其

表1

参数	λ_1	T_r	T_0	c	ρ	λ
值	$15\text{J}/(\text{K} \cdot \text{s} \cdot \text{m})$	323(K)	293(K)	$4.2(\text{J}/\text{g} \cdot \text{K})$	$1000\text{kg}/\text{m}^3$	$0.6\text{J}/(\text{K} \cdot \text{s} \cdot \text{m})$

中初始时刻的温度分布图如图2所示， $t = 300\text{s}$ 时的温度分布如图3所示

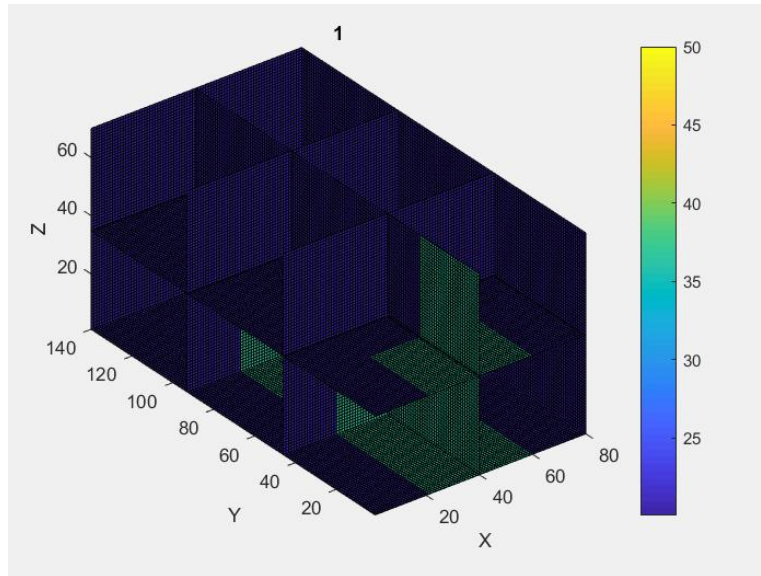


图2 初始时刻温度分布图

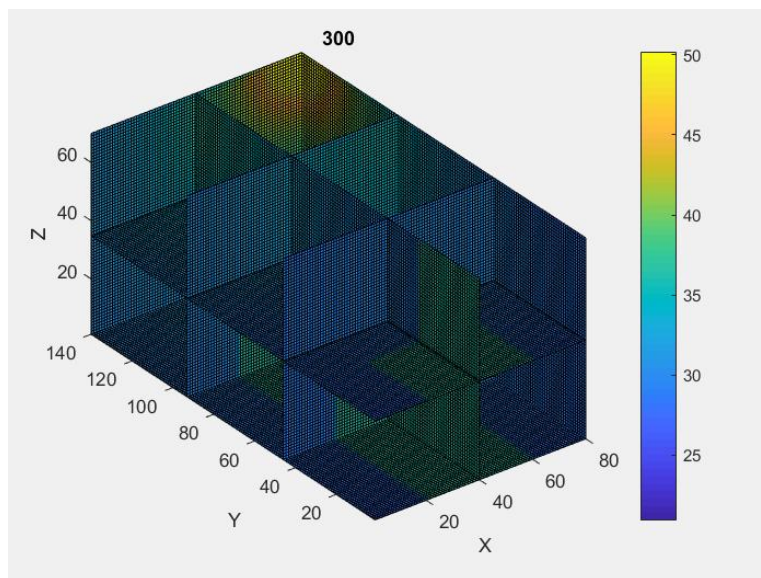


图3 初始时刻温度分布图

6 灵敏度分析

6.1 改变浴缸体积

改变浴缸的体积 V_{Ω} ，采取原有方案加水，找到水温达到 37°C 的时刻 t ；绘制出 $V_{\Omega} - t$ 曲线，如图4所示

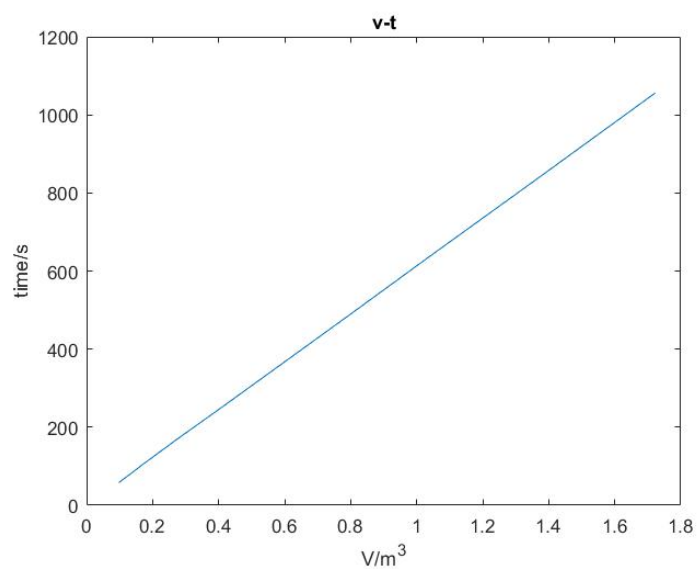


图4 $V_{\Omega} - t$ 曲线

由此我们可以看出体积越大加热到预期温度时间的时间越长。

6.2 改变介质间热导率

改变水和空气之间的热导率 λ_1 ，变动比例为百分之 p ，采用原有方案加水，找到水温达到 37°C 的时刻 t ；绘制出 $p-t$ 曲线，如图5所示

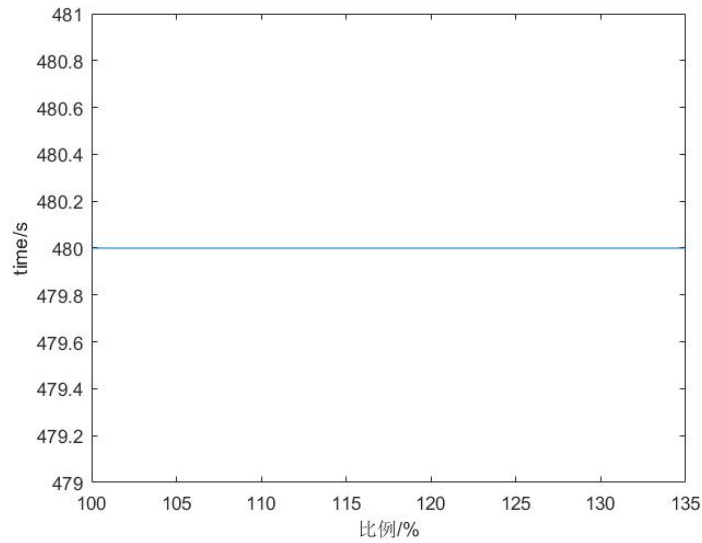


图5 $p-t$ 曲线

可知结果对于 λ 不敏感。

参考文献

- [1] Fourier' s Law. (2011). Encyclopedia of Earth Sciences Series: Encyclopedia of Agrophysics.
- [2] 陈才生, 李刚, 周继东, 王文初. (2008). 数学物理方程. 北京: 科学出版社.