

数字图像处理

指导教师： 胡晓雁

电子邮件： huxy@bnu.edu.cn

北京师范大学信息科学与技术学院

频率域图像处理

- ✓ 线性移不变系统
- ✓ 向量基础
- ✓ 基向量及坐标
- ✓ 多维空间——无限维空间
- ✓ 基函数合成任意函数
- ✓ 傅立叶变换
- ✓ 幅度谱和相位谱
- ✓ 傅立叶变换性质
- ✓ 频率域图像滤波处理

线性移不变系统

- ✓ 系统是一个能接受输入并进行输出的处理装置
- ✓ 输入信息与输出信息之间的关系决定了系统的特性
- ✓ 线性移不变系统：
 - ✓ 线性系统
 - ✓ 位移不变系统

线性移不变系统

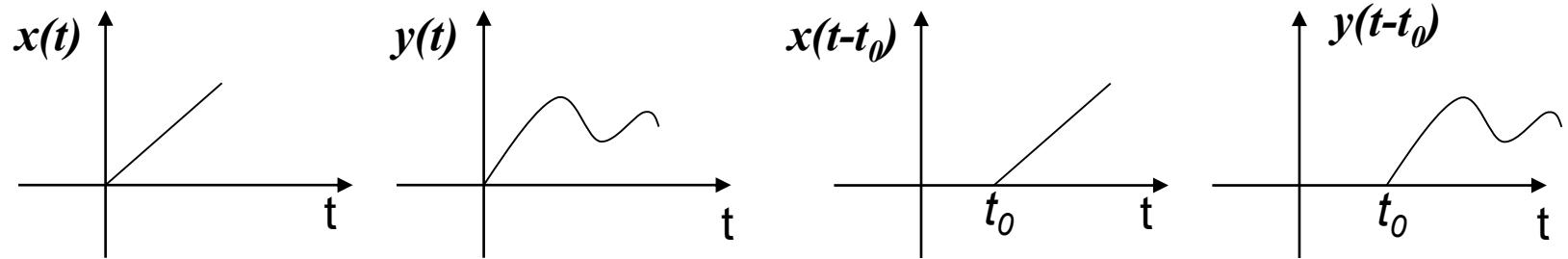
✓ 时不变（移不变）系统

如果一个系统当输入信号有一个时移时，输出响应也产生同样的时移。除此之外，输出响应无任何其它变化，则称该系统是时不变的 (time-invariant system)。否则就是时变的 (time-varying)。

线性移不变系统

✓ 时不变（移不变）系统

$$x(t) \rightarrow y(t), \quad x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$$



线性移不变系统

✓ 线性系统

如果一个系统当输入信号的叠加和成比例变化导致输出相应呈现成比例和叠加的变化则称该系统为线性系统 (linear system)

线性移不变系统

✓ 线性系统

如果 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

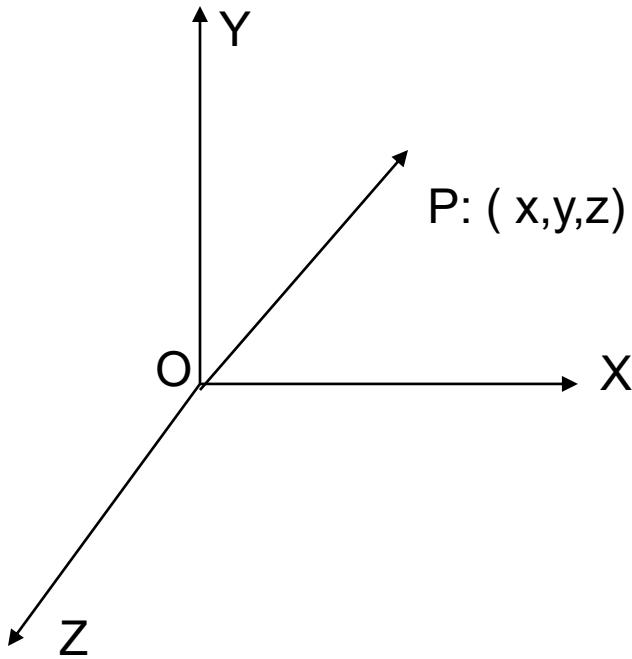
得到 $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

其中a, b都是常数, 则称该系统是线性的

令b=0, 以及a=b=1, 得到另外一种定义形式

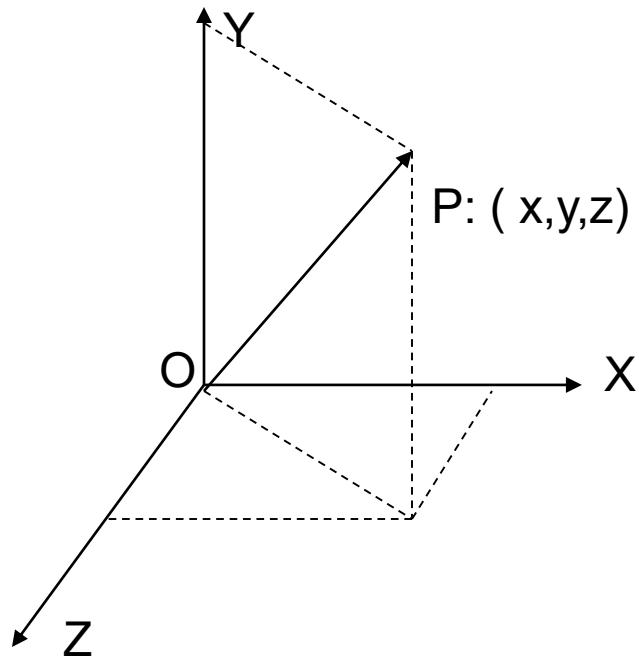
向量基础

- ✓ 三维空间：原点，三个坐标轴



向量基础

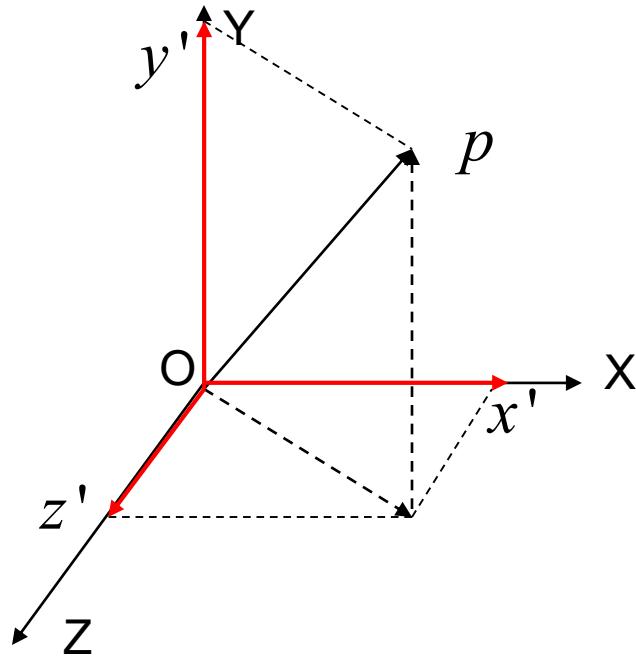
- ✓ 三维空间：原点，三个坐标轴



P的三个坐标值分别是该点在三个坐标轴上的投影长度

向量基础

✓ 三维空间：原点，三个坐标轴



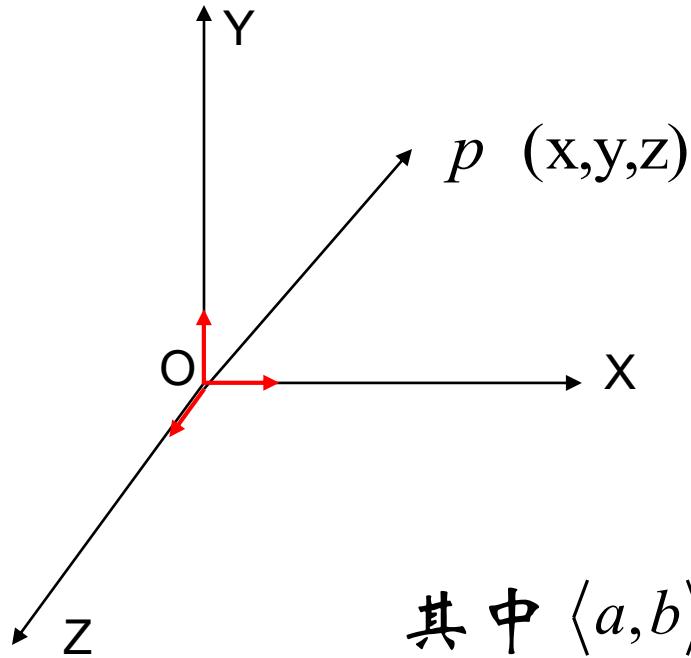
$$p = x' + y' + z'$$

矢量是只有大小和方向，没有起点的量，图中矢量也使用三个坐标值来表示，但是它可以平移到任何一点开始

矢量可以按照平行四边形法则进行合成，见矢量P

基向量及坐标

- ✓ 基向量 $x(1,0,0)$ $y(0,1,0)$ $z(0,0,1)$



$$p = xx + yy + zz$$

$$x = \langle p, x \rangle$$

$$y = \langle p, y \rangle$$

$$z = \langle p, z \rangle$$

其中 $\langle a, b \rangle$ 称为向量点积，也叫内积

$$\langle a, b \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

基向量及坐标

- 对于上述点积定义，容易得出如下式子

$$\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \langle z, z \rangle = 1$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, z \rangle = \langle z, x \rangle = 0$$

- 由 x, y, z 构成的基称为单位正交基，三维空间中的任意向量都可以由这组基的线性组合得到

多维空间——无限维空间

- ✓ 推广1：n维空间向量

$$v = (v_1, v_2, \dots)$$

- ✓ 基向量个数n个

$$e_1 = (1, 0, \dots) \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

- ✓ 点积：

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

- ✓ 任意向量可以表示成基向量的线性组合

$$p(p_1, p_2, \dots) \quad \dots$$

多维空间——无限维空间

- ✓ 推广1：无限维空间向量

$$v = v(u) \quad u \text{ 取实数}$$

- ✓ 推广2：基向量个数无限个

$$e_r \quad r \text{ 取实数}$$

- ✓ 点积：

$$\langle a, b \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a(u)b(u)du$$

- ✓ 任意向量可以表示成基向量的线性组合

$$p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u)e_r dr$$

基函数合成任意函数

- ✓ 底部的周期函数由四个不同频率的波函数线性组合而成
- ✓ 图中可以看出不同频率的波函数决定了最终函数的不同尺度细节信息

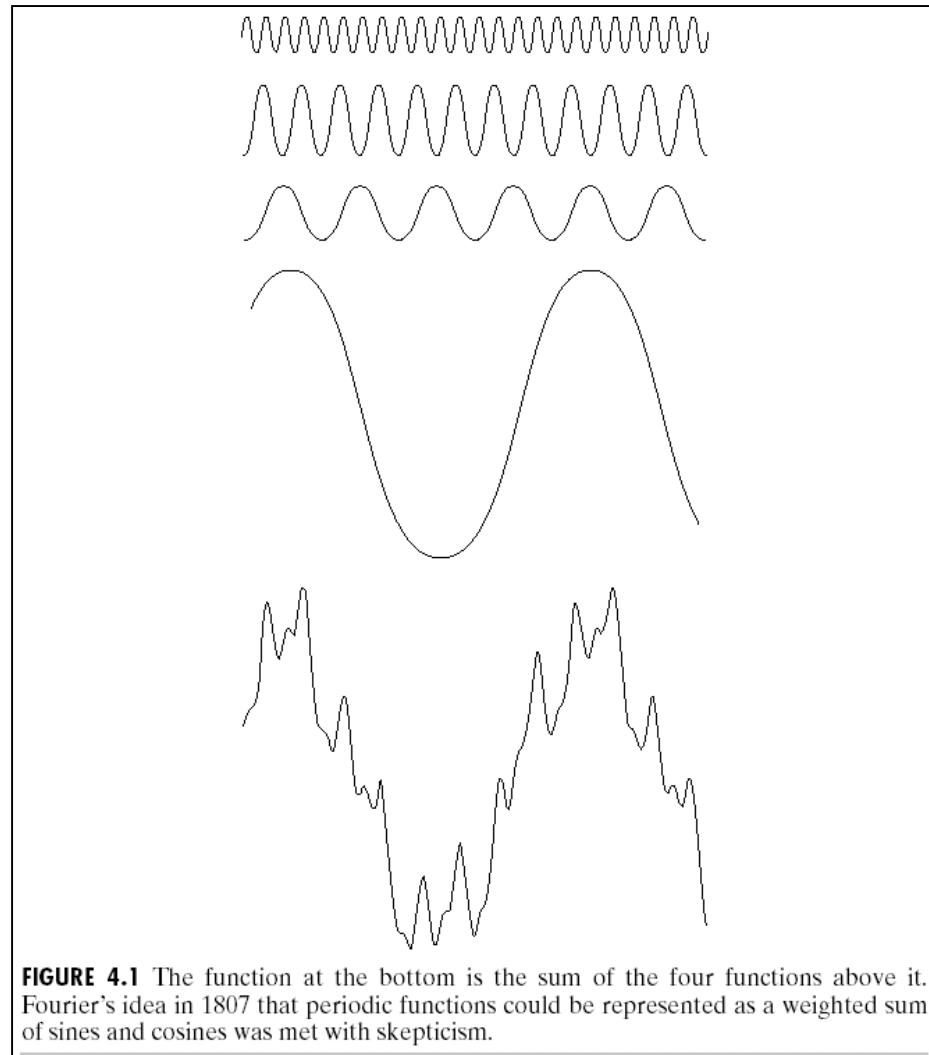
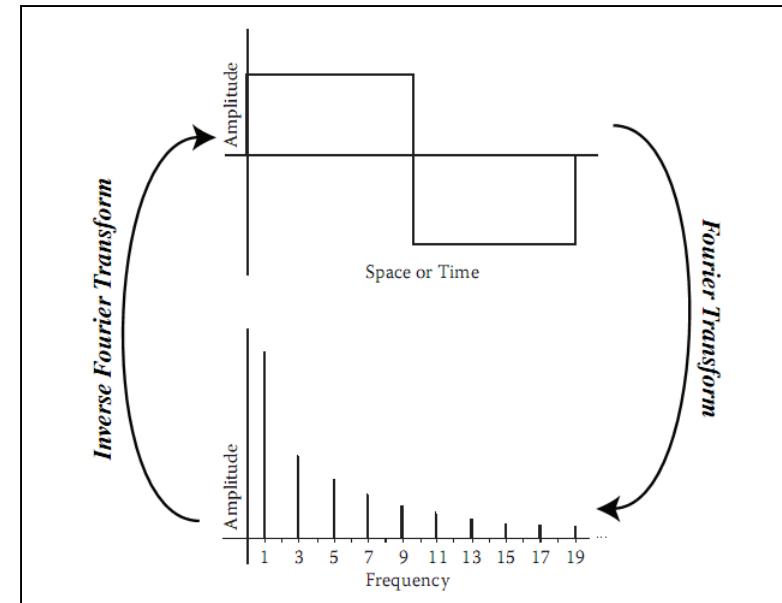
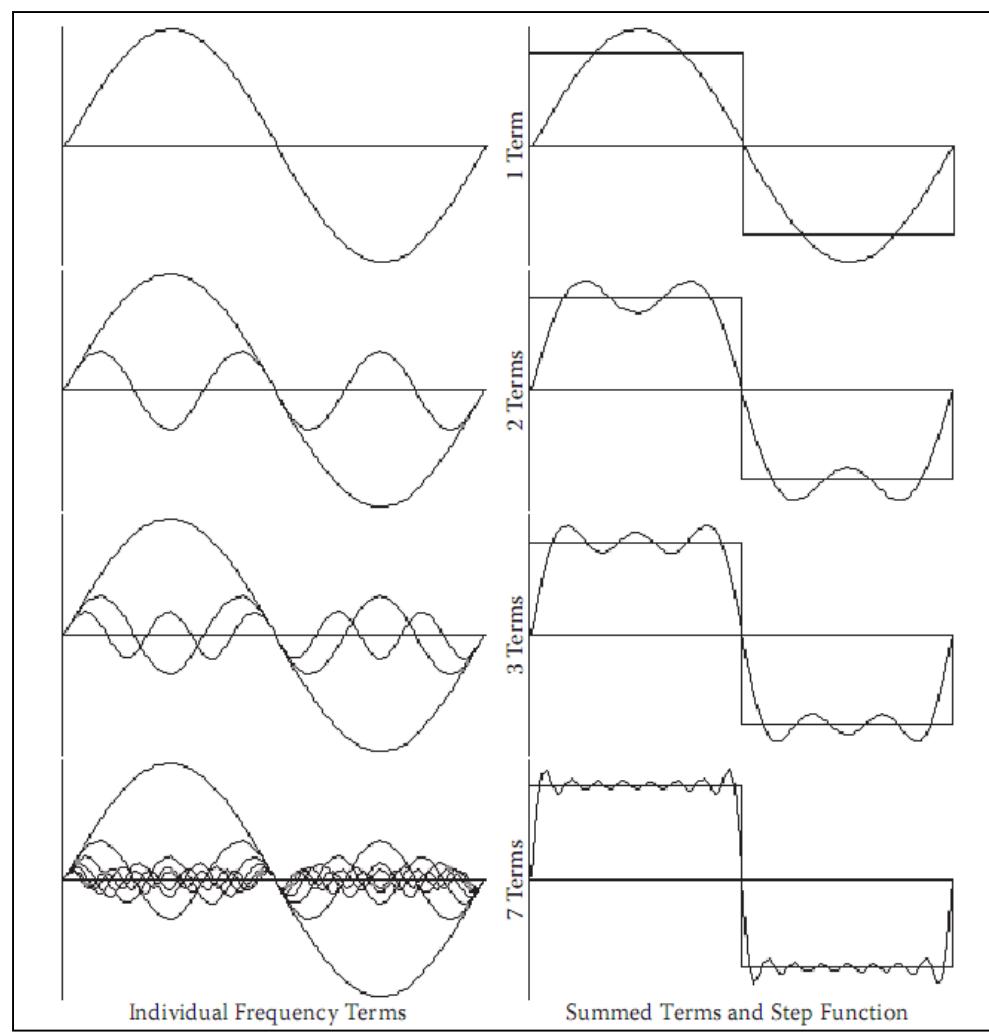


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

基函数合成任意函数



基函数合成任意函数

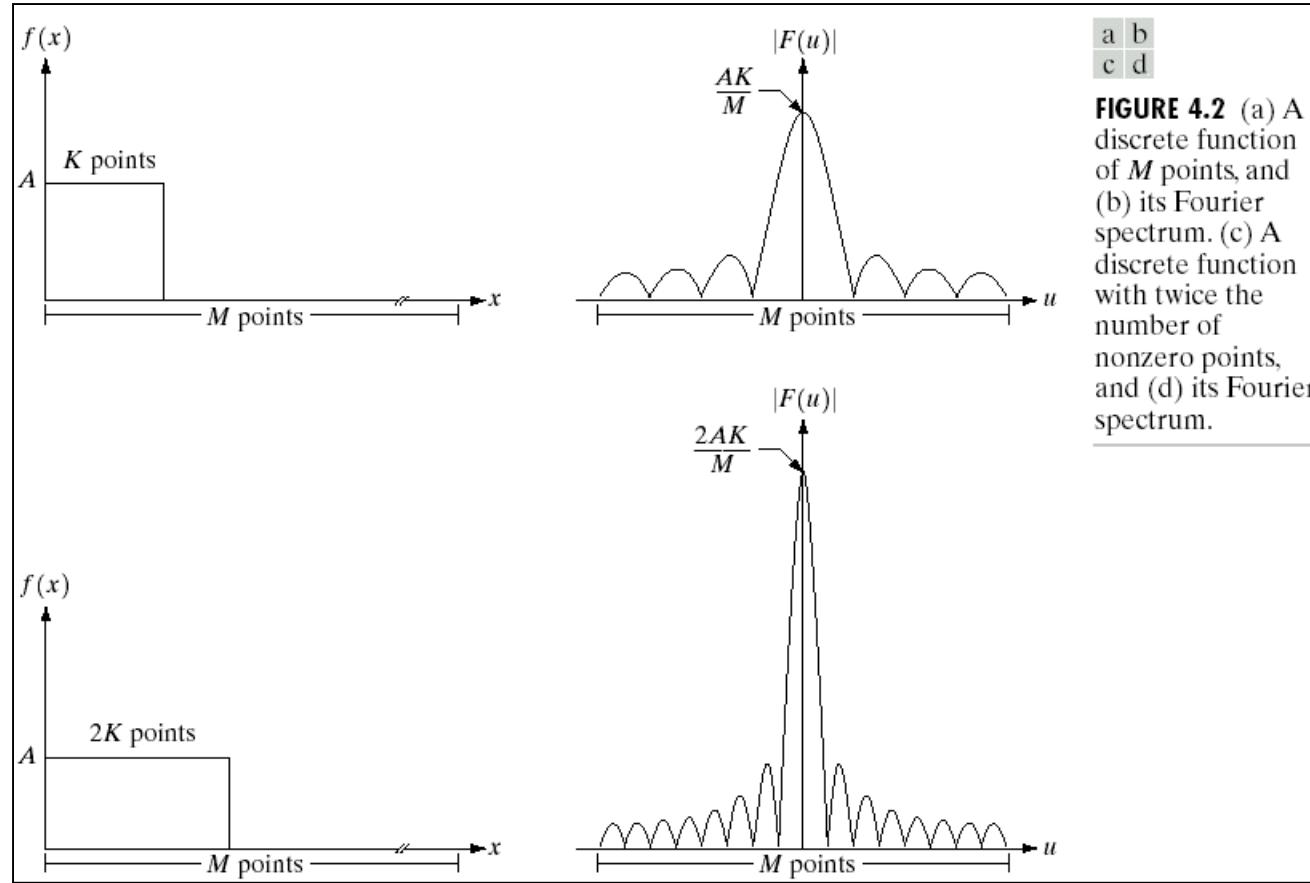
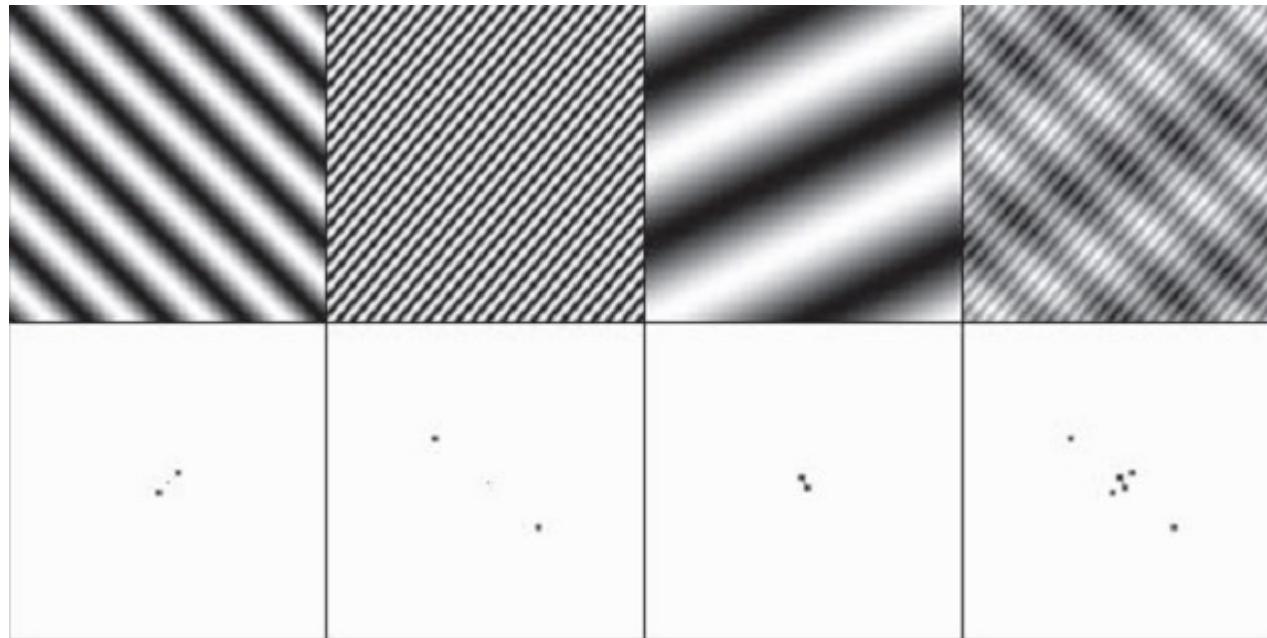
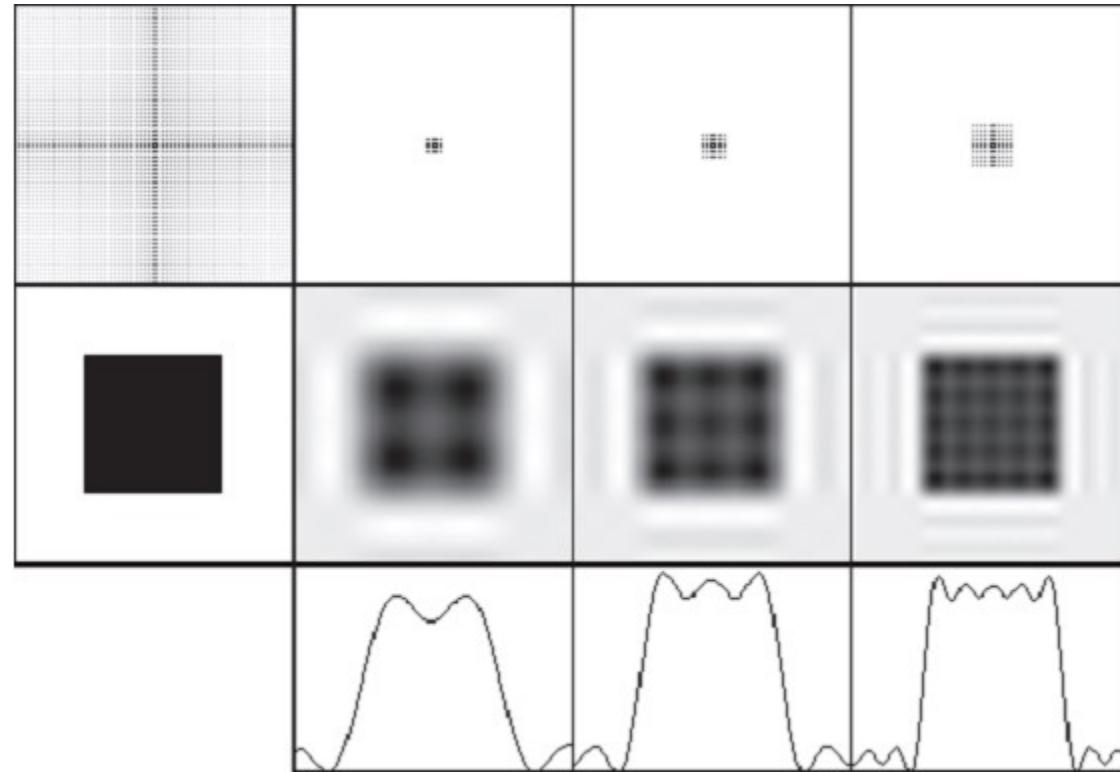


FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

基函数合成任意函数（二维情况）



基函数合成任意函数（二维情况）



图像变换

- 将空域中的信号变换到另外一个域，即使用该域中的一组基函数的线性组合来合成任意函数
- 单位正交基函数（相同基函数内积为1，不同基函数的内积为0）
- 使用这组基函数的线性组合得到任意函数 f ，每个基函数的系数就是 f 与该基函数的内积

图像变换

- ✓ 图像变换的目的在于：1. 使图像处理问题简化；
2. 有利于图像特征提取；3. 有助于从概念上增强对图像信息的理解
- ✓ 图像变换通常是一种二维正交变换。一般要求：
1. 正交变换必须是可逆的；2. 正变换和反变换的算法不能太复杂；3. 正交变换的特点是在变换域中图像能量将集中分布在低频率成分上，边缘、线状信息反映在高频率成分上，有利于图像处理
- ✓ 因此正交变换广泛应用在图像增强、图像恢复、特征提取、图像压缩编码和形状分析等方面

图像变换

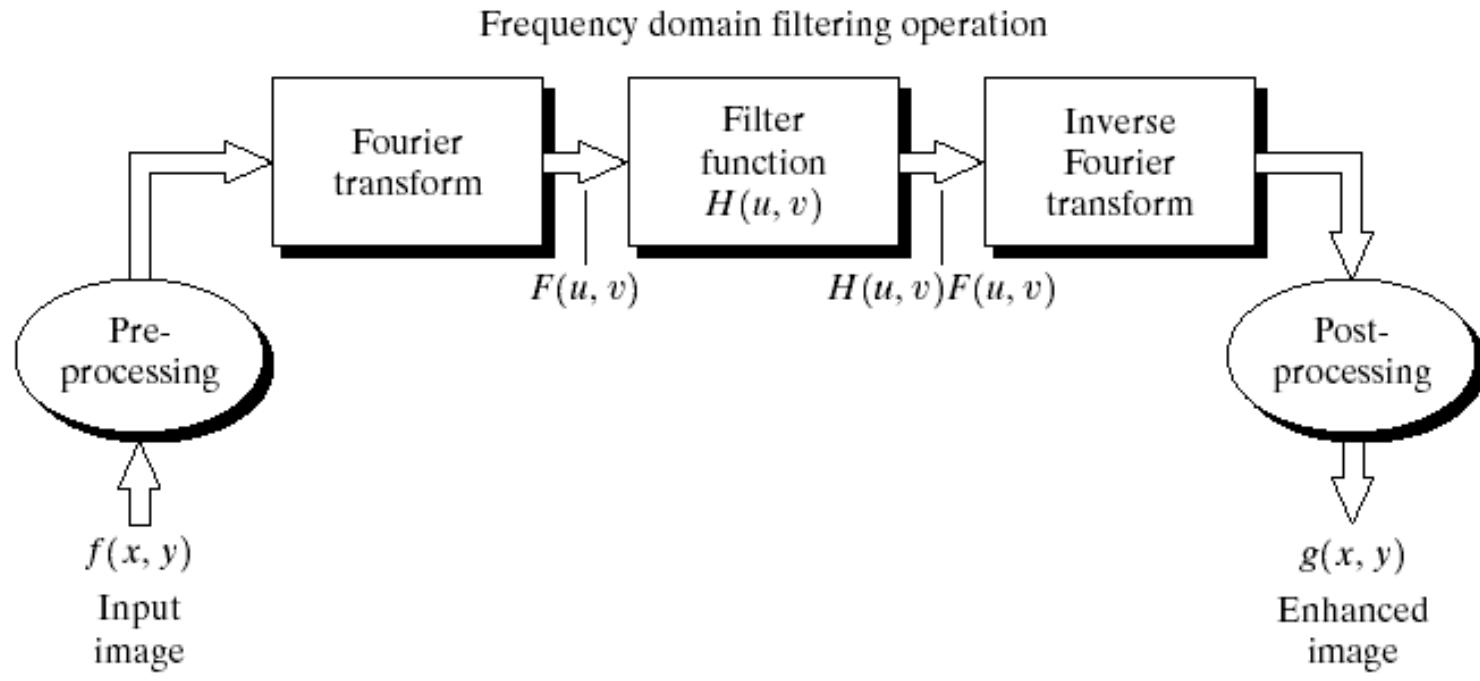


FIGURE 4.5 Basic steps for filtering in the frequency domain.

傅立叶变换

- 在学习傅立叶级数的时候，一个周期为T的函数 $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件，则在 $[-T/2, T/2]$ 可以展成傅立叶级数

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

傅立叶变换

- 其复数形式为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_t}$$

- 其中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jnwt} dt$$

- 傅立叶级数清楚地表明了信号由哪些频率分量组成及其所占的比重，从而有利于对信号进行分析与处理

连续函数傅立叶变换

- 令 $f(x)$ 为实变量 x 的连续函数， $f(x)$ 的傅立叶变换用 $F(u)$ 表示，则定义式为

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

- 若已知 $F(u)$ ，则傅立叶反变换为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

傅立叶谱

- 这里 $f(x)$ 是实函数，它的傅立叶变换 $F(u)$ 通常 是复函数。 $F(u)$ 的 实部、虚部、振幅、能量 和相位 分别表示如下：

实部 $R(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi ux) dx$

虚部 $I(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi ux) dx$

振幅 $|F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u) \right]^{\frac{1}{2}}$

傅立叶谱

能量 $E(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$

相位 $\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$

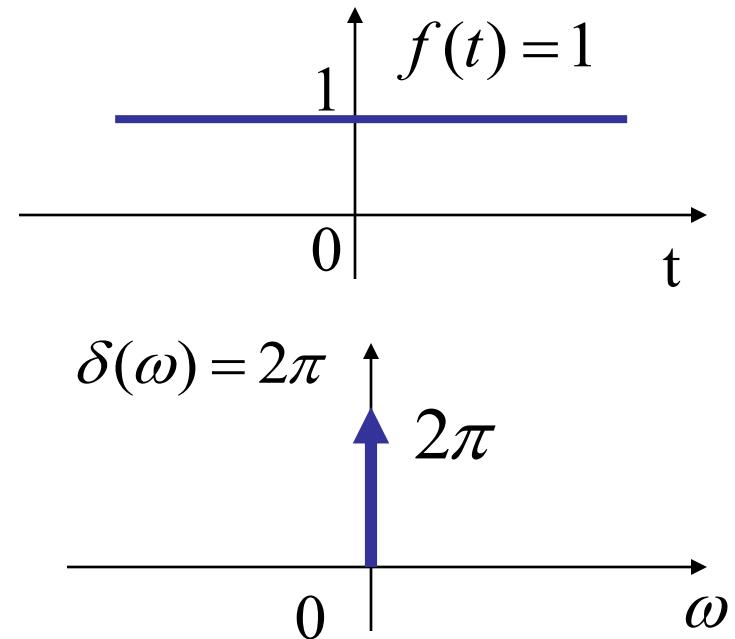
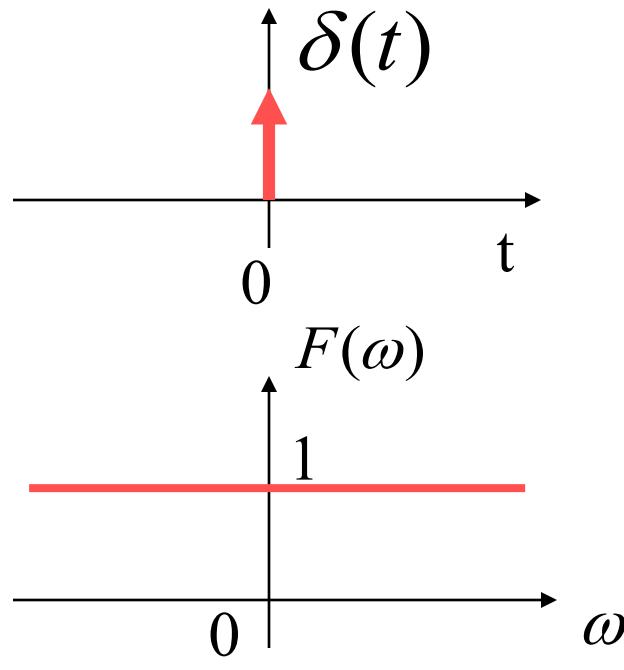
$$e^{-j2\pi ux} = \cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux$$

傅立叶变换中出现的变量 U 通常称为频率变量

冲激函数傅立叶变换对

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\begin{aligned}FT^{-1}[\delta(\omega)] \\= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$



二维连续函数的傅立叶变换

- 傅立叶变换很容易推广到二维的情况。如果 $f(x, y)$ 是连续和可积的，且 $F(u, v)$ 是可积的，则二维傅立叶变换对为

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

傅立叶谱

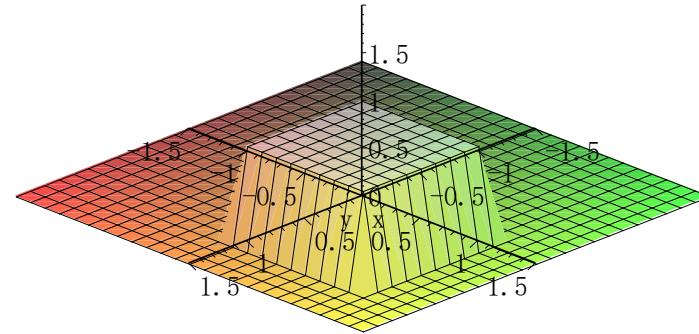
$$|F(u, \nu)| = [R^2(u, \nu) + I^2(u, \nu)]^{1/2}$$

$$\phi(u, \nu) = \tan^{-1} [I(u, \nu) / R(u, \nu)]$$

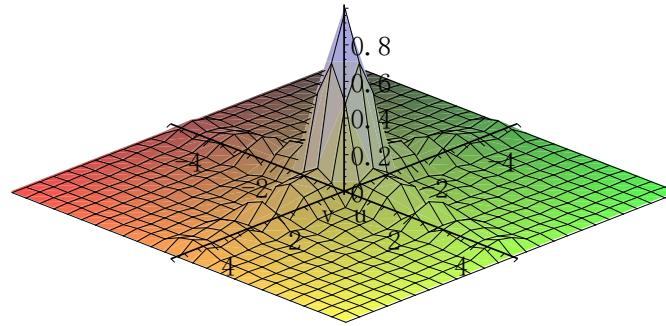
$$E(u, \nu) = R^2(u, \nu) + I^2(u, \nu)$$

例：

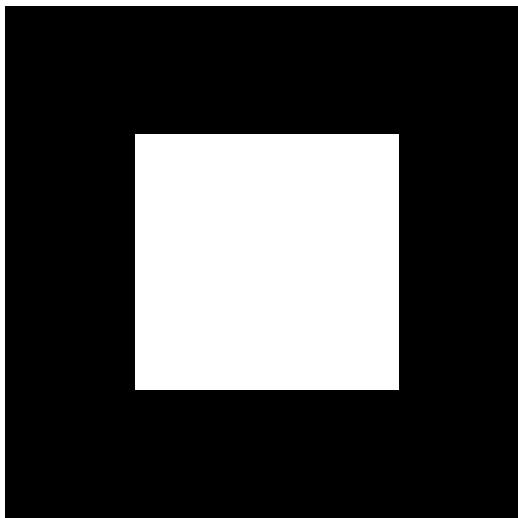
二维矩形 函数



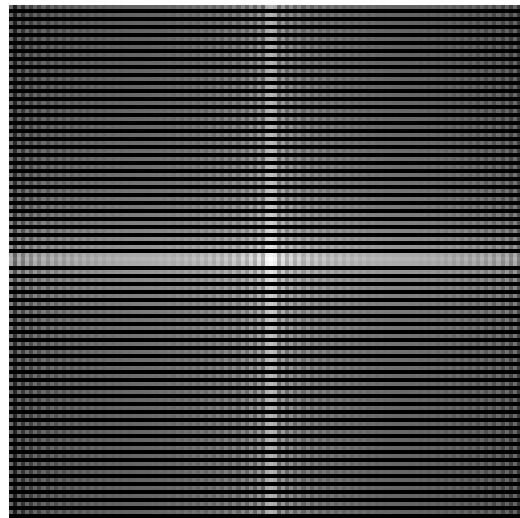
二维矩形 函数的傅 立叶谱



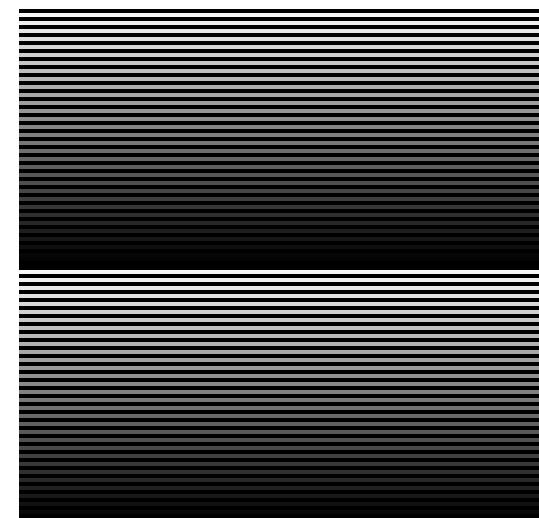
幅度谱和相位谱



原图像



幅度谱

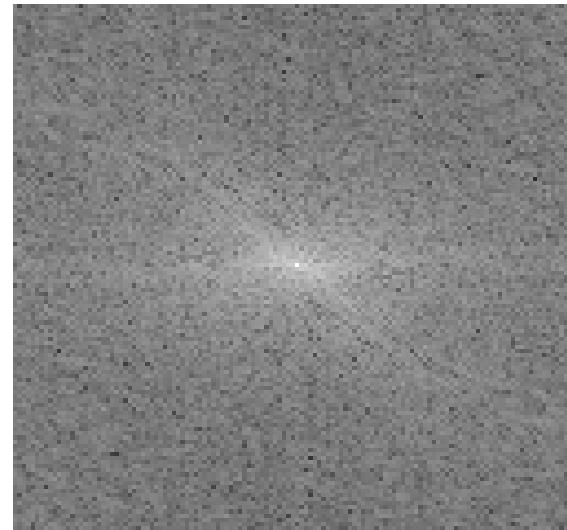


相位谱

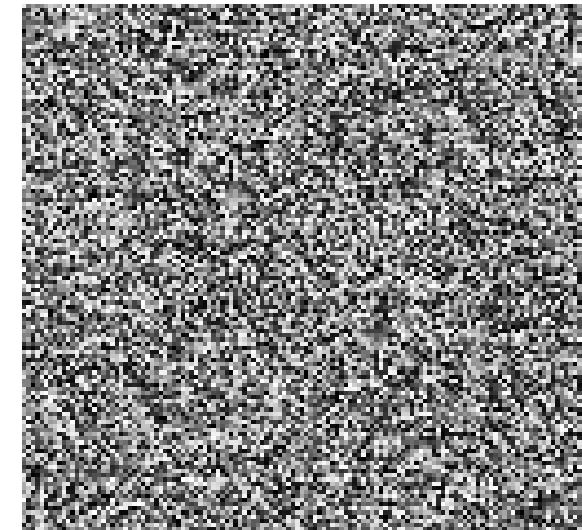
幅度谱和相位谱



原图像

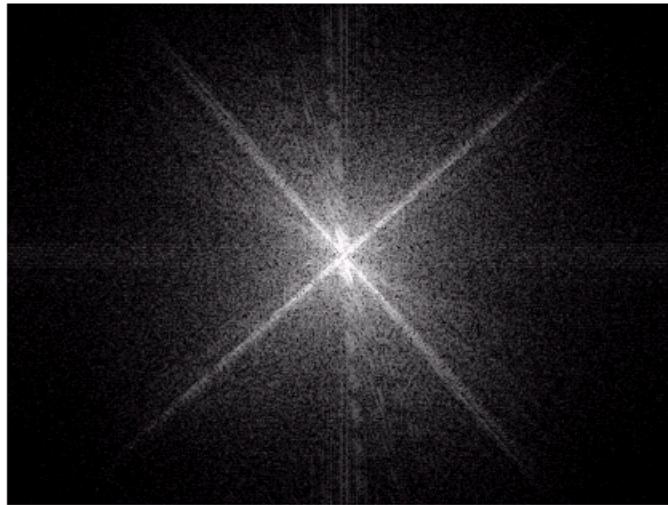
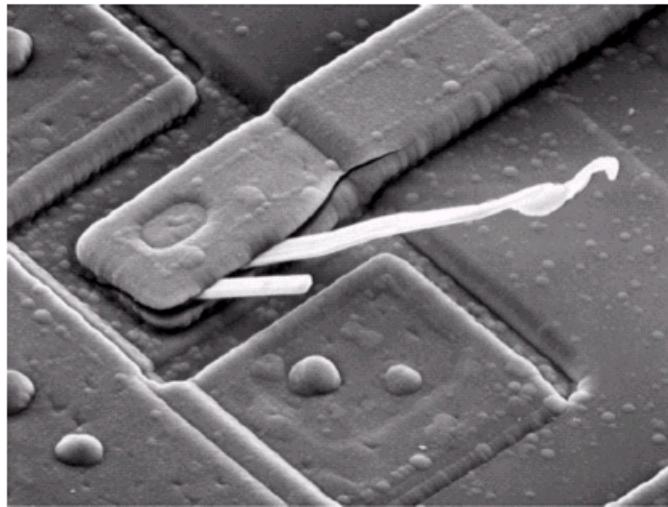


幅度谱



相位谱

幅度谱和相位谱

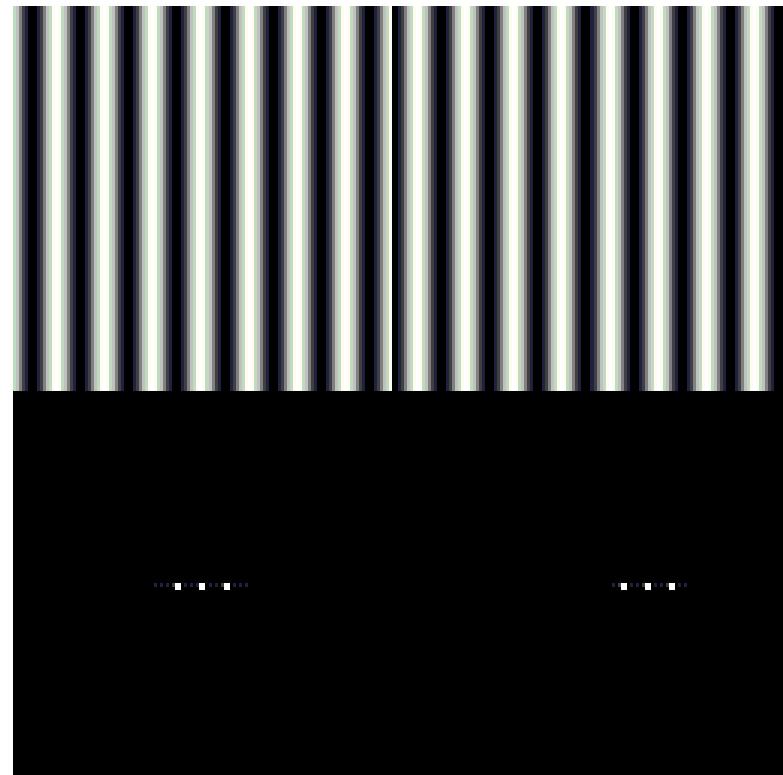


a
b

FIGURE 4.4
(a) SEM image of a damaged integrated circuit.
(b) Fourier spectrum of (a).
(Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

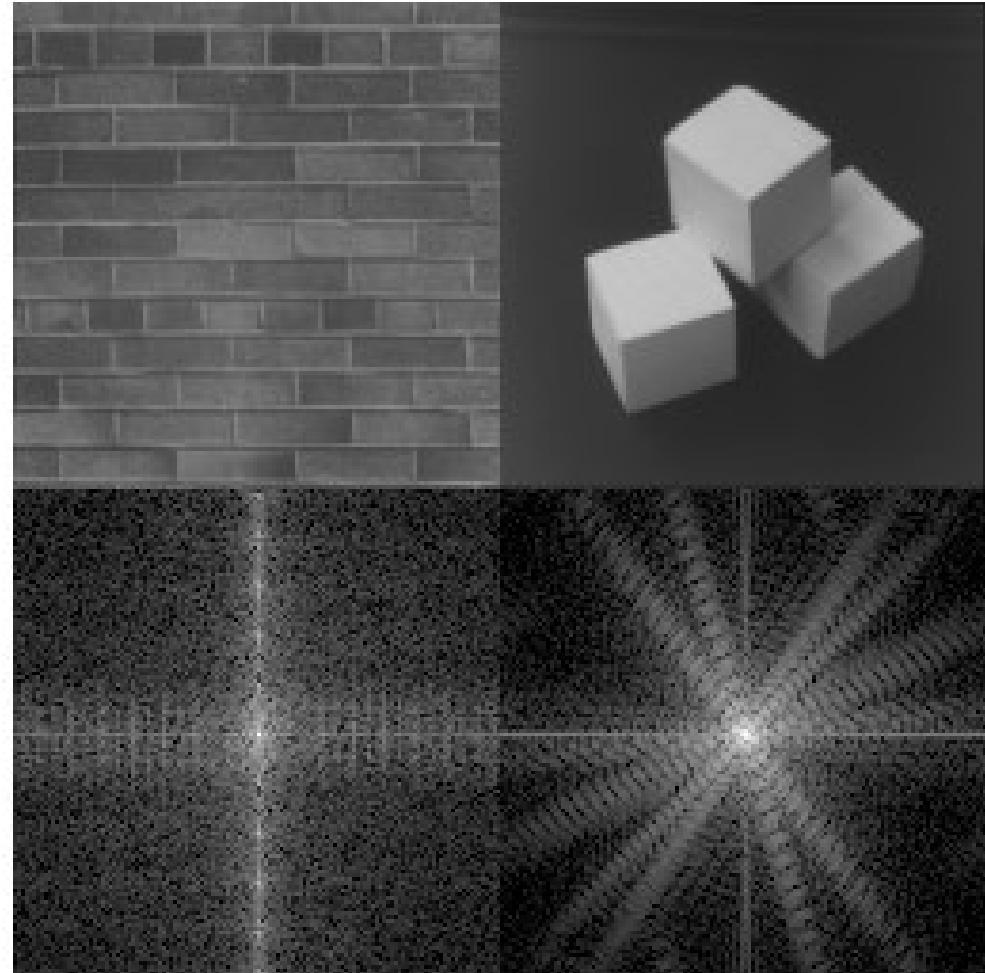
幅度谱和相位谱

- ✓ 幅度谱告诉我们图像中某种频率的成份有多少
- ✓ 相位谱告诉我们频率成份位于图像的什么位置
 - ✓ 通常我们只关心幅度谱
 - ✓ 下面两个图对应的幅度谱是一样（这里只显示了其幅度谱，当然相位谱是不一样的）



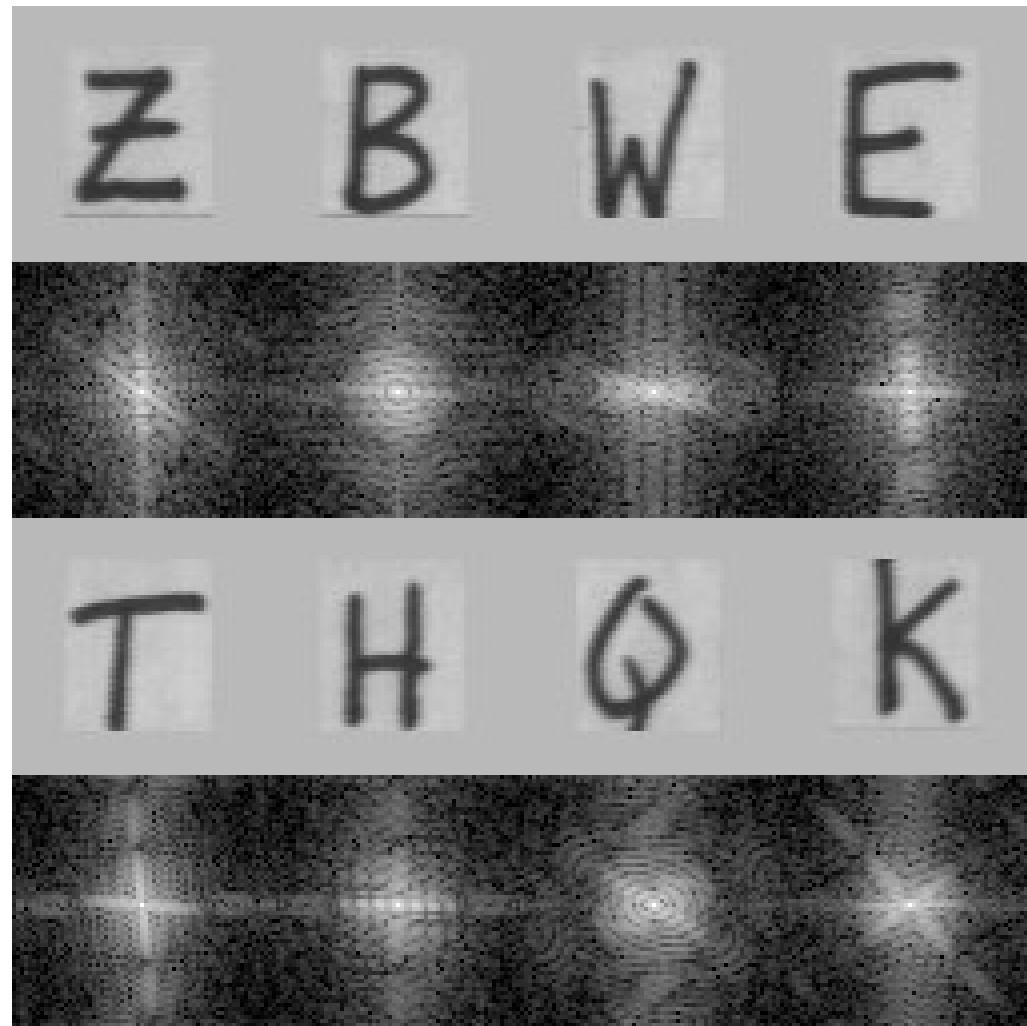
幅度谱和相位谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线反映出原始图像的灰度级变化，这正是图像的轮廓边



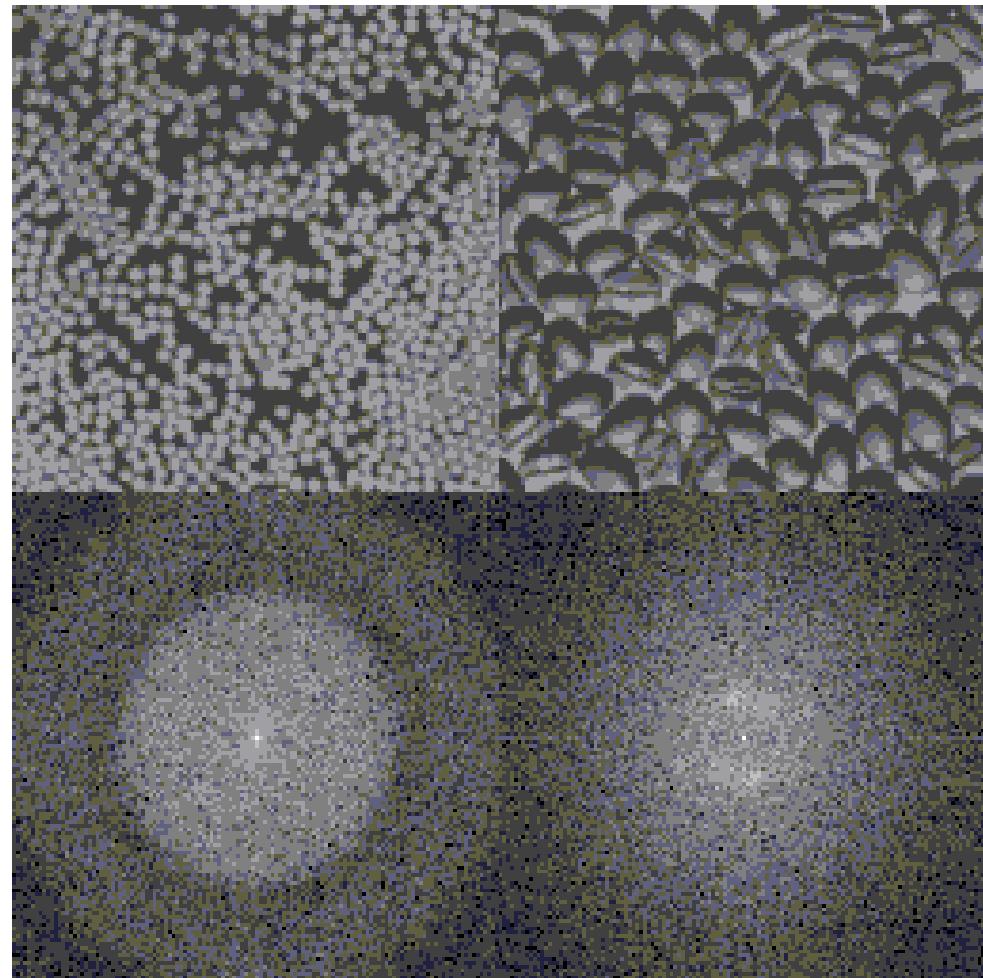
幅度谱和相位谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线和原始图像中对应的轮廓线是垂直的。如果原始图像中有圆形区域那么幅度谱中也呈圆形分布



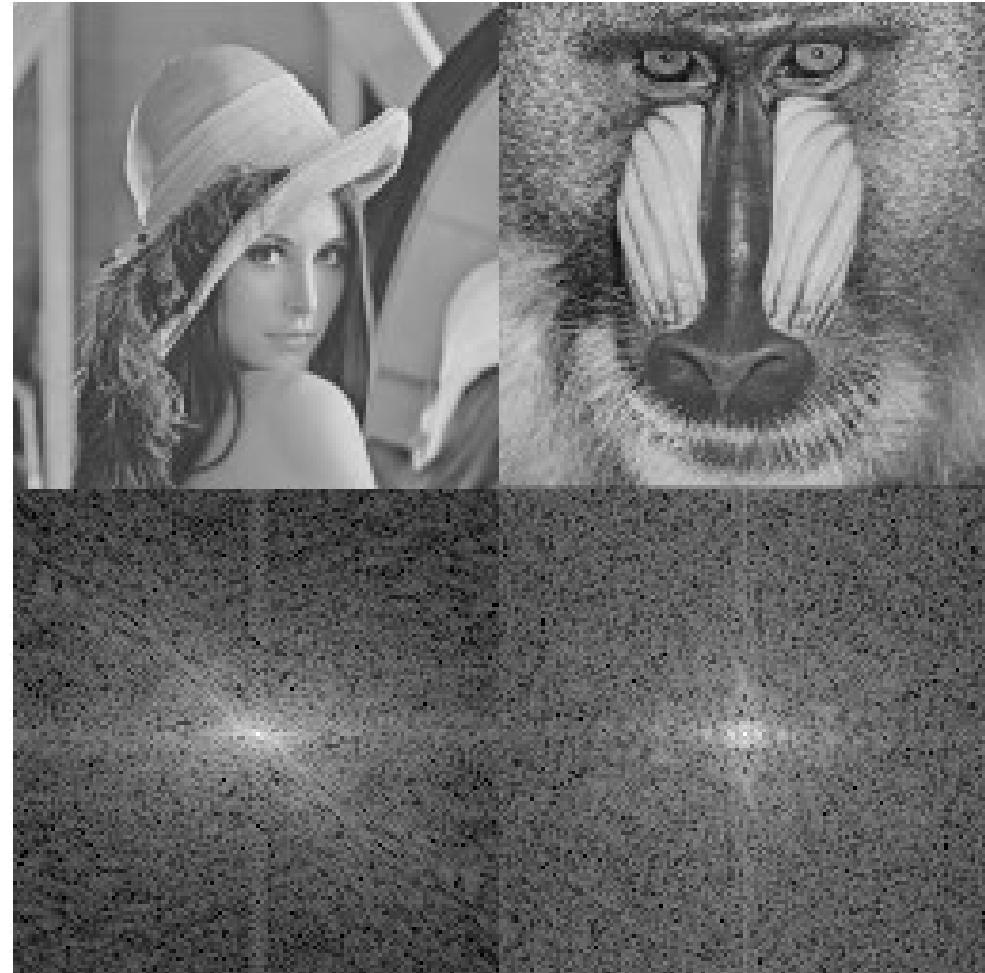
幅度谱和相位谱

- 图像中的颗粒状对应的幅度谱呈环状，但即使只有一颗颗粒，其幅度谱的模式还是这样。



幅度谱和相位谱

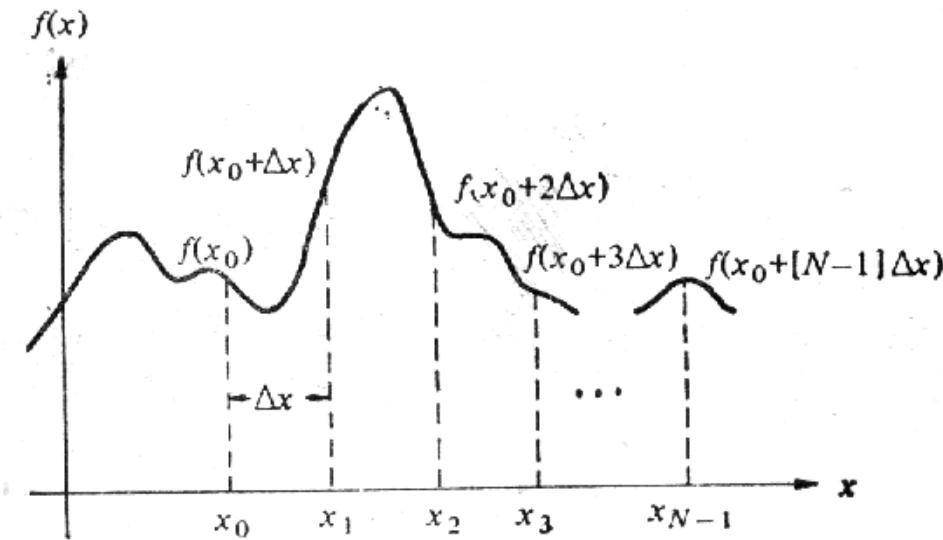
- ✓ 这些图像没有特定的结构，左上角到右下角有一条斜线，它可能是由帽子和头发之间的边线产生的
- ✓ 两个图像都存在一些小边界



离散函数的傅立叶变换

- 假定取间隔 Δx 单位的抽样方法将一个连续函数 $f(x)$ 离散化为一个序列 $\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), \dots, f[x_0 + (N-1)\Delta x]\}$

离散函数的傅立叶变换



将序列表示成 $f(x) = f(x_0 + x\Delta x)$

即用序列 $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\}$ 代替 $\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), \dots, f[x_0 + (N-1)\Delta x]\}$

离散函数的傅立叶变换

被抽样函数的离散傅立叶变换定义式为

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux / N}$$

式中 $u=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。反变换为

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux / N}$$

式中 $x=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

离散函数的傅立叶变换

- ✓ 例如：对一维信号 $f(x) = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$ 进行傅立叶变换

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi u x / N}$$

离散函数的傅立叶变换

$U=0$ 时

$$F(0) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-2\pi x \cdot 0 / 4} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) = \frac{1}{4} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = 1/2$$

$U=1$ 时

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j\pi x / 2} = \frac{1}{4} [1 \quad -j \quad -1 \quad j] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = 0$$

离散函数的傅立叶变换

$U=2$ 时

$$F(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j\pi x} = \frac{1}{4} [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = 1/2$$

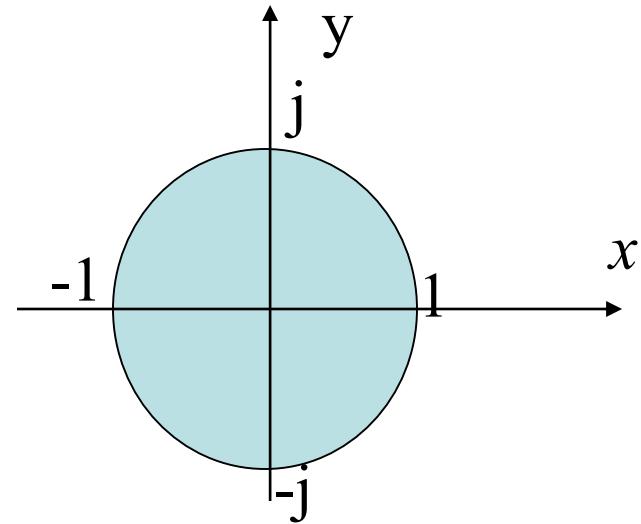
$U=3$ 时

$$F(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j3\pi x/2} = \frac{1}{4} [1 \quad j \quad -1 \quad -j] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = 0$$

离散函数的傅立叶变换

在 $N=4$ 时，傅立叶变换以矩阵形式表示为

$$F(u) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = Af(x)$$



二维离散函数的傅立叶变换

在二维离散的情况下，傅立叶变换对表示为

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

式中 $u=0, 1, 2, \dots, M-1; v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

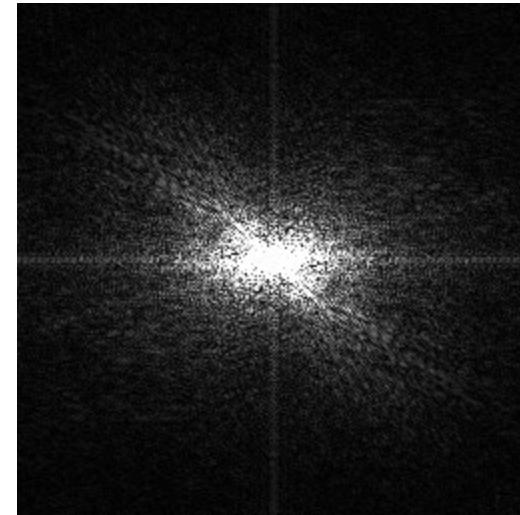
式中 $x=0, 1, 2, \dots, M-1; y=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

二维离散函数的傅立叶变换

例如 数字图像的傅立叶变换

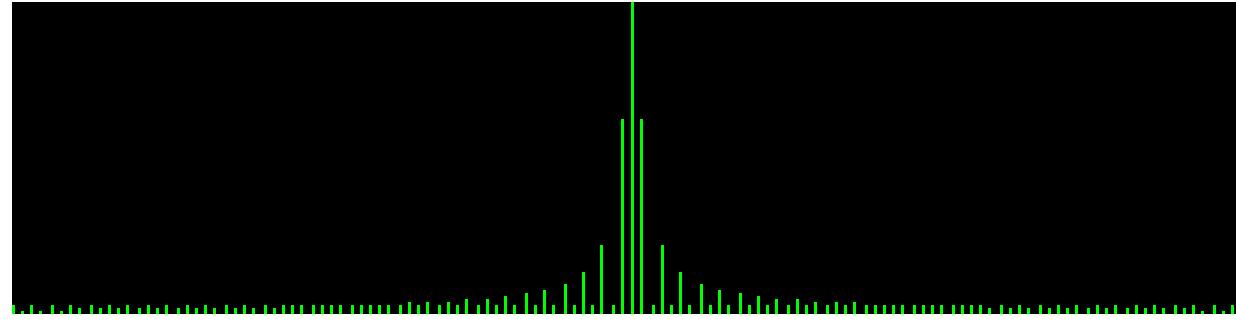
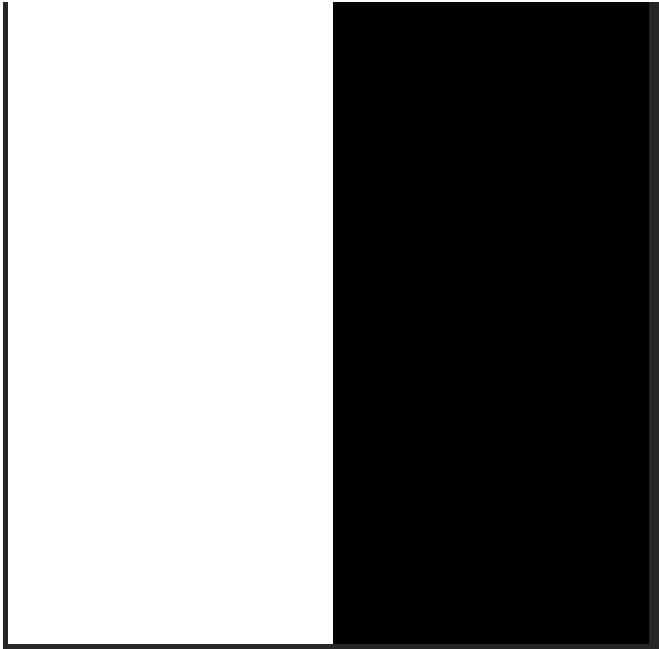


原图

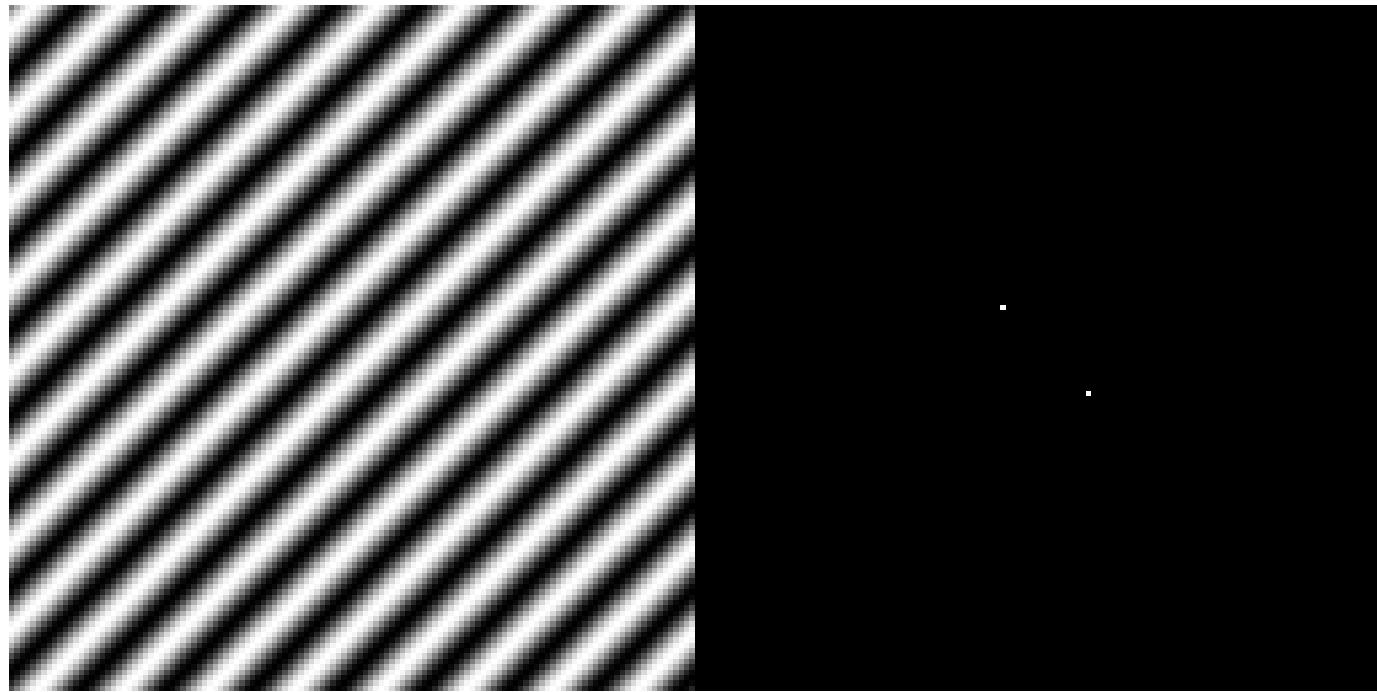


傅立叶变换后的频域图

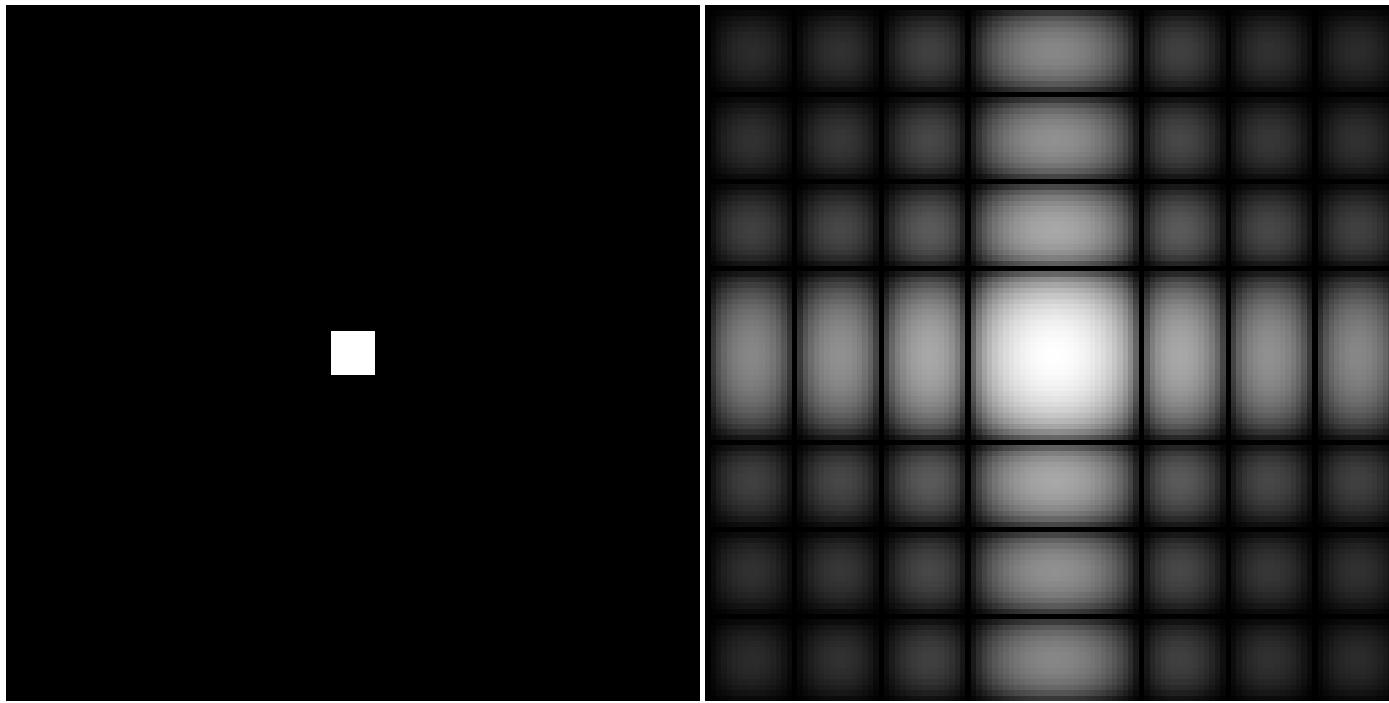
二维离散函数的傅立叶变换



Sinusoidal



Rectangle



二维离散傅立叶变换的若干性质

离散傅立叶变换建立了函数在空间域与频率域之间的转换关系。在数字图像处理中，经常要利用这种转换关系及其转换规律，下面将介绍离散傅立叶变换的若干重要性质。

周期性和共轭对称性

- 若离散的傅立叶变换和它的反变换周期为 N , 则有

$$F(u, v) = F(u+M, v) = F(u, v+N) = F(u+M, v+N)$$

- 傅立叶变换存在共轭对称性

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

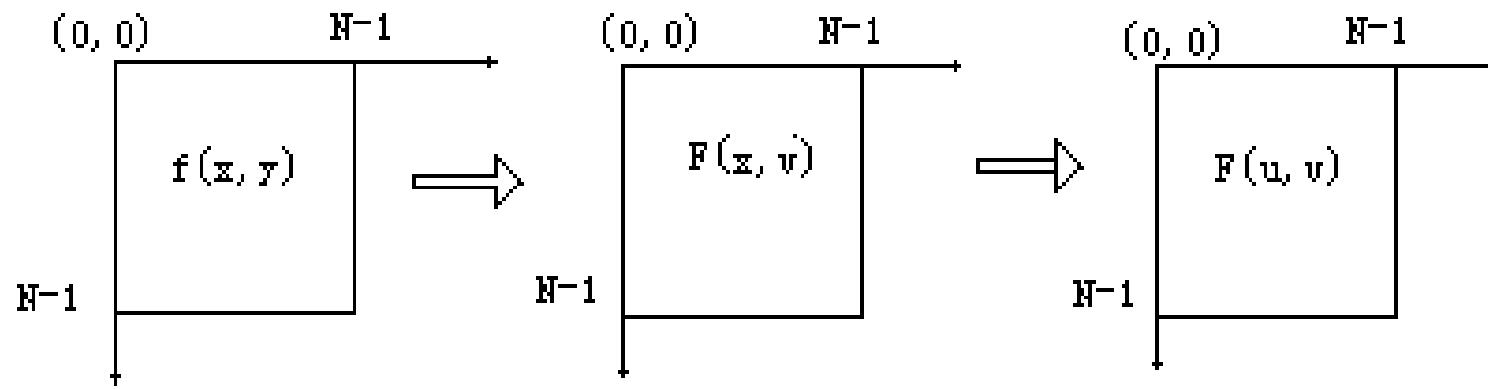
- 这种周期性和共轭对称性对图像的频谱分析和显示带来很大益处

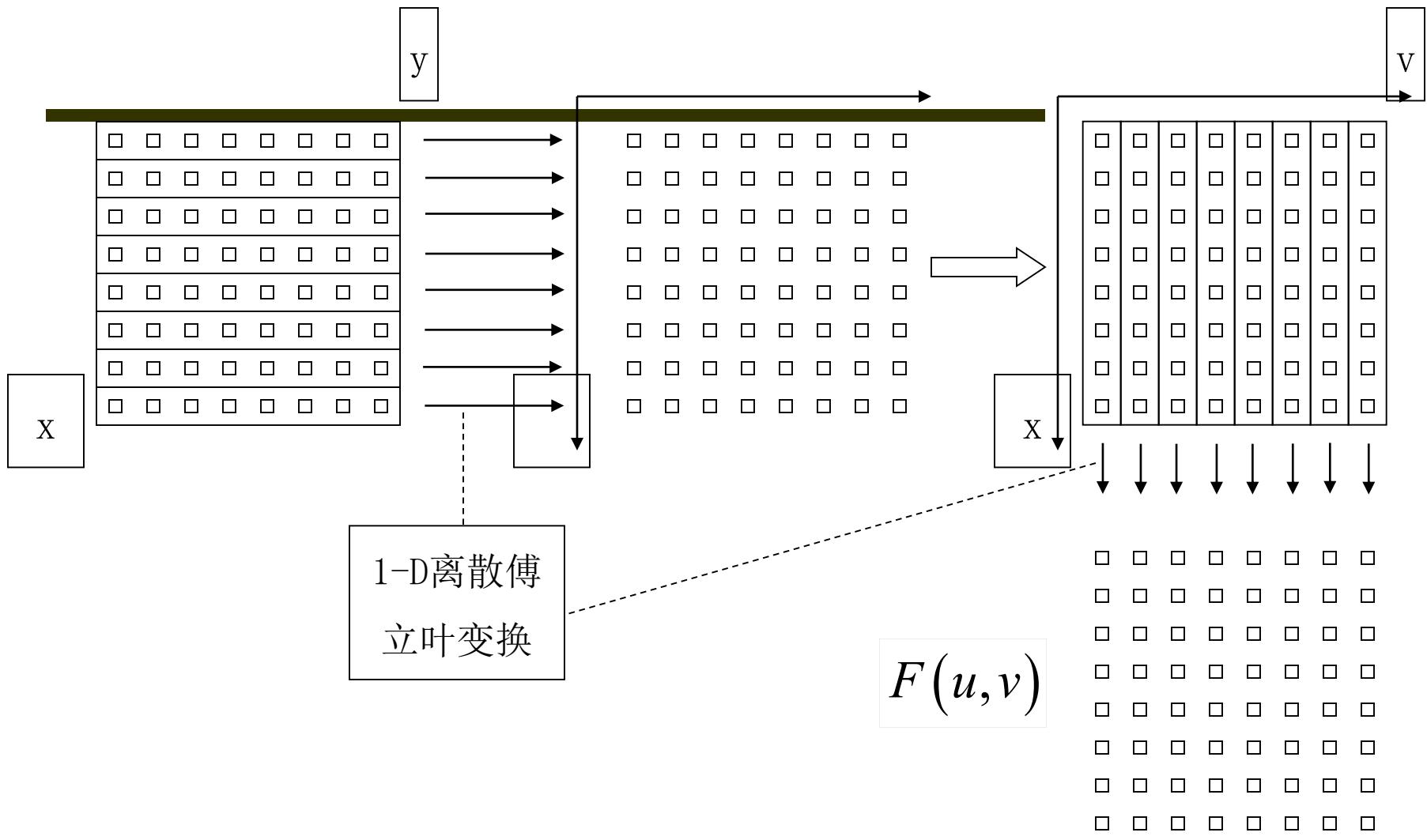
分离性

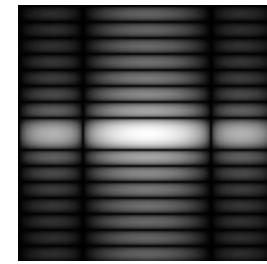
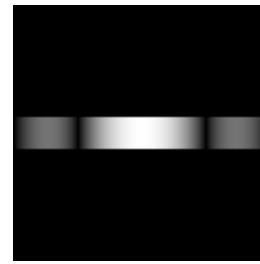
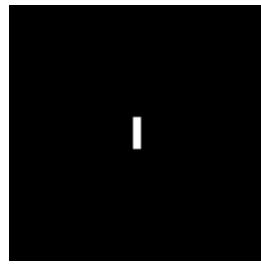
一个二维傅立叶变换可由连续两次
一维傅立叶变换来实现

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi vy / N]$$

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \exp[-j2\pi ux / N], \quad u, v = 0, 1, \dots, N-1$$







对图像的每一行施行一维离散傅立叶变换 $f(x, y) \rightarrow F(u, y)$
再对每一列施行一维离散傅立叶变换 $F(u, y) \rightarrow F(u, v)$

旋转性质

平面直角坐标改写成极坐标形式：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} u = \omega \cos \varphi \\ v = \omega \sin \varphi \end{cases}$$

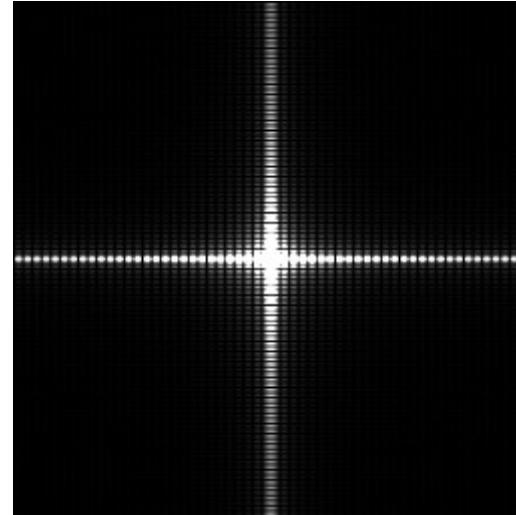
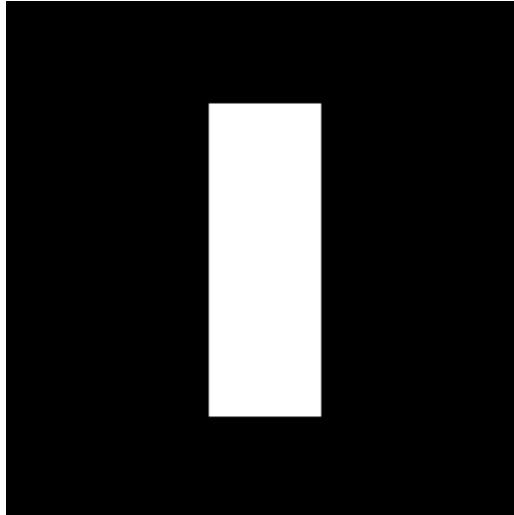
做代换有： $f(x, y) \rightarrow f(r, \theta) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi)$

旋转性质

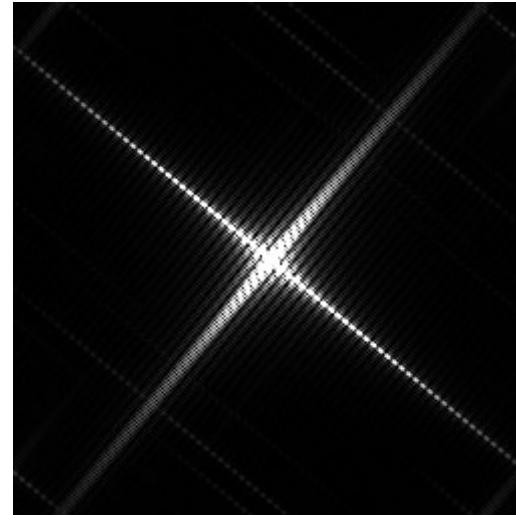
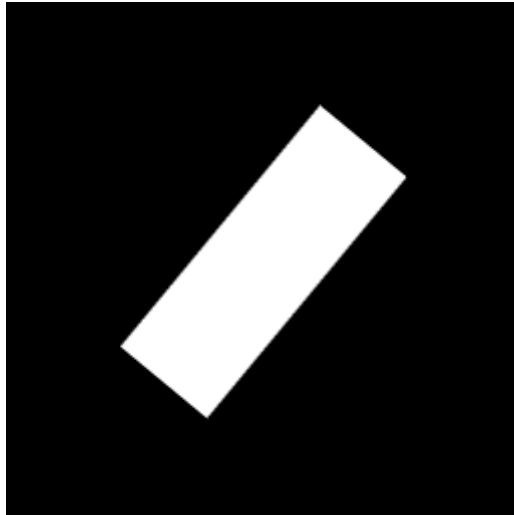
如果 $f(x, y)$ 被旋转 $F(u, v)$ ，则被旋转同一角度 θ_0 即有傅立叶变换对

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

旋转性质



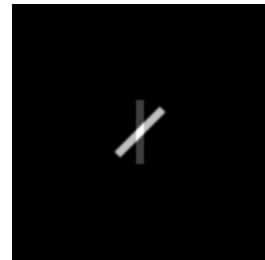
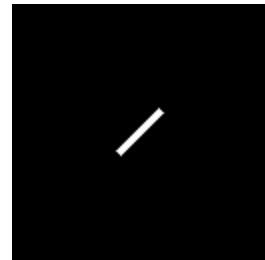
原图像及其
傅里叶变换



旋转后图像及
其傅里叶变换

线性叠加

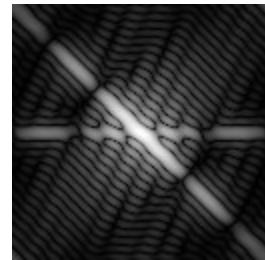
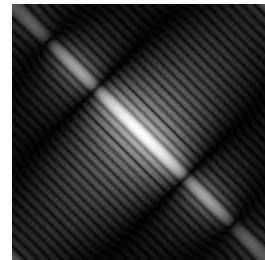
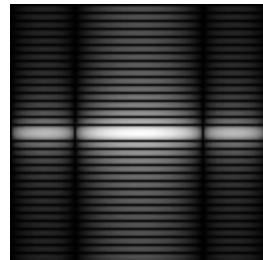
✓ $k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y) \iff k_1 F(u,v) + k_2 G(u,v)$



a) Image A;

b) Image B;

c) $0.25 * A + 0.75 * B$



a) spectrum A;

b) spectrum B;

c) $0.25 * A + 0.75 * B$

卷积定理

✓ 时域（或空域）中的卷积等价于频域的乘积。

$$\begin{aligned} F(f(t) * g(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx e^{-j2\pi ut} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)e^{-j2\pi ut} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)e^{-j2\pi ut} dt dx \\ &= F(u)G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)e^{-j2\pi u(t-x)+x} d(t-x) \\ \text{因为任何函数 } &= e^{-j2\pi ux} \int_{-\infty}^{\infty} g(r)e^{-j2\pi ur} dr \\ \text{因此可证明} & \end{aligned}$$

频谱的图像显示

- ✓ 谱图像加深对图像的视觉理解，如一幅遥感图像受正弦网纹的干扰，从谱图像中可看出干扰的空间频率并有效去除。

谱图象：就是把 $|F(u,v)|$ 作为亮度显示出来。

人的视觉可分辨灰度有限：

$$D(u,v) = \log(1 + |F(u,v)|)$$

实用公式常用K系数调整：

$$D(u,v) = \log(1 + K|F(u,v)|)$$

频谱的频域移中

☒ 2) 频谱的频域移中

傅立叶变换以零点为中心，导致谱图象最亮点在图象的左上角。

为符合正常习惯，将 $F(u, v)$ 的原零点从左上角移到显示屏的中心。

$$f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y) / N] \iff F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \iff F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0) / N]$$

频谱的频域移中

✓ 2) 频谱的频域移中

$$f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] \iff F(u - u_0, v - v_0)$$

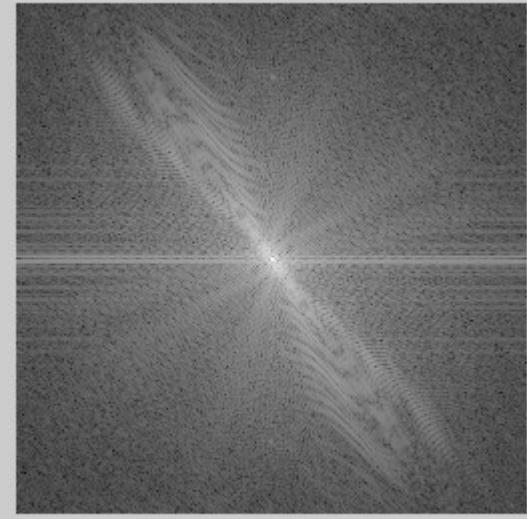
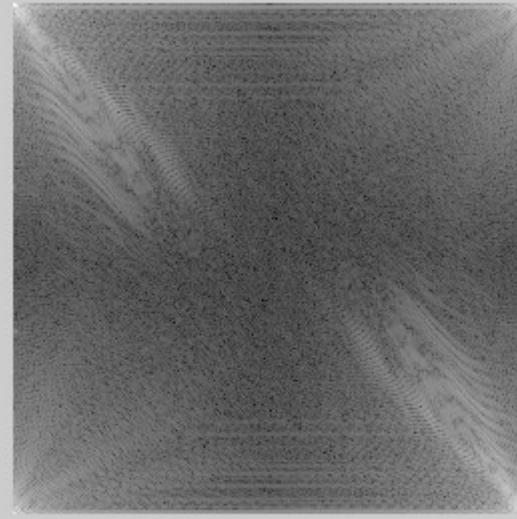
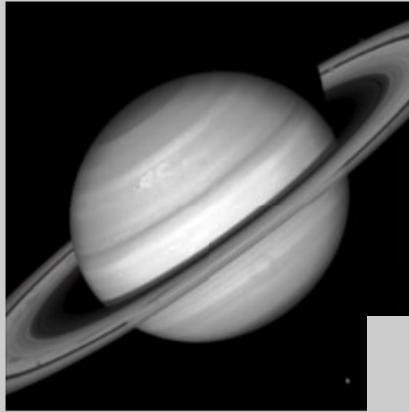
$$f(x - x_0, y - y_0) \iff F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N]$$

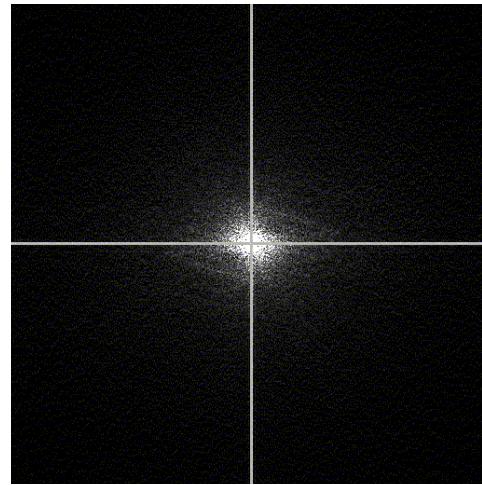
设: $u_0 = v_0 = N/2$

$$e^{j2\pi(u_0x + v_0y)/N} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \iff F(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2})$$

频谱的频域移中





频率域图像滤波处理

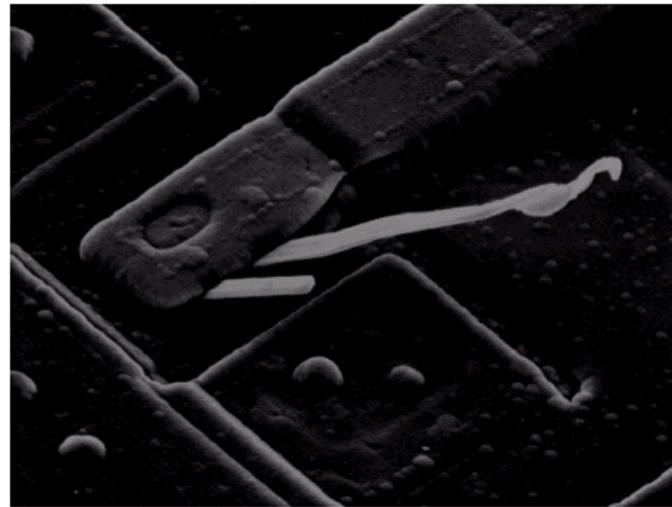
- ✓ 简单的滤波器
- ✓ 通过将傅立叶变换的原点设为0，达到去除图像平均值的效果

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = (m/2, n/2) \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

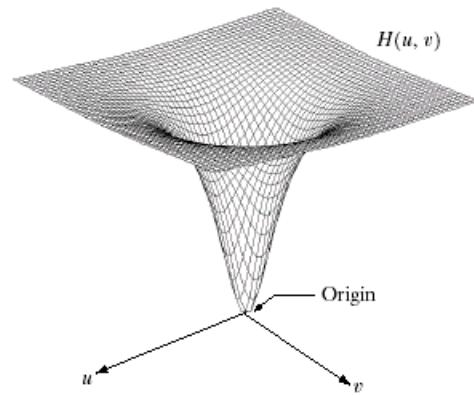
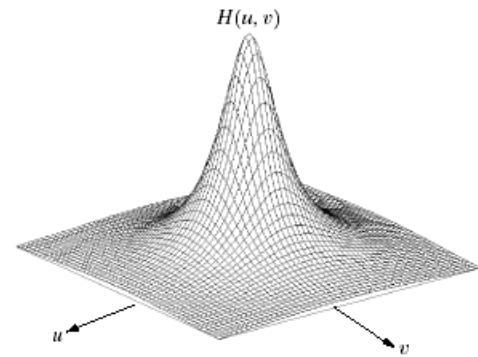
频率域图像滤波处理

FIGURE 4.6

Result of filtering the image in Fig. 4.4(a) with a notch filter that set to 0 the $F(0, 0)$ term in the Fourier transform.



频率域图像滤波处理



a b
c d

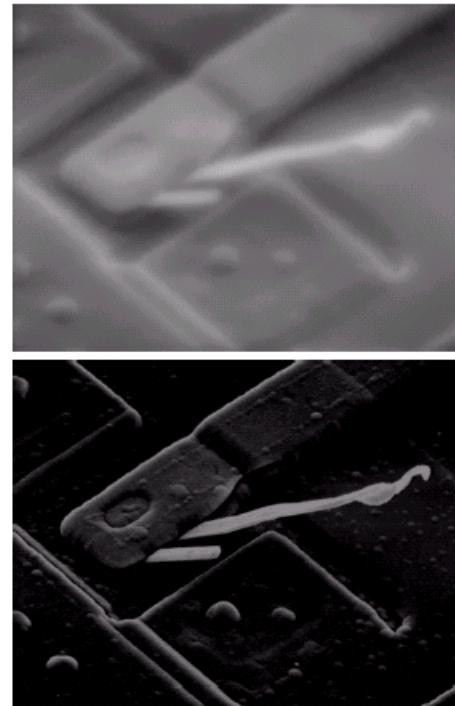


FIGURE 4.7 (a) A two-dimensional lowpass filter function. (b) Result of lowpass filtering the image in Fig. 4.4(a).
(c) A two-dimensional highpass filter function. (d) Result of highpass filtering the image in Fig. 4.4(a).

频率域图像滤波处理

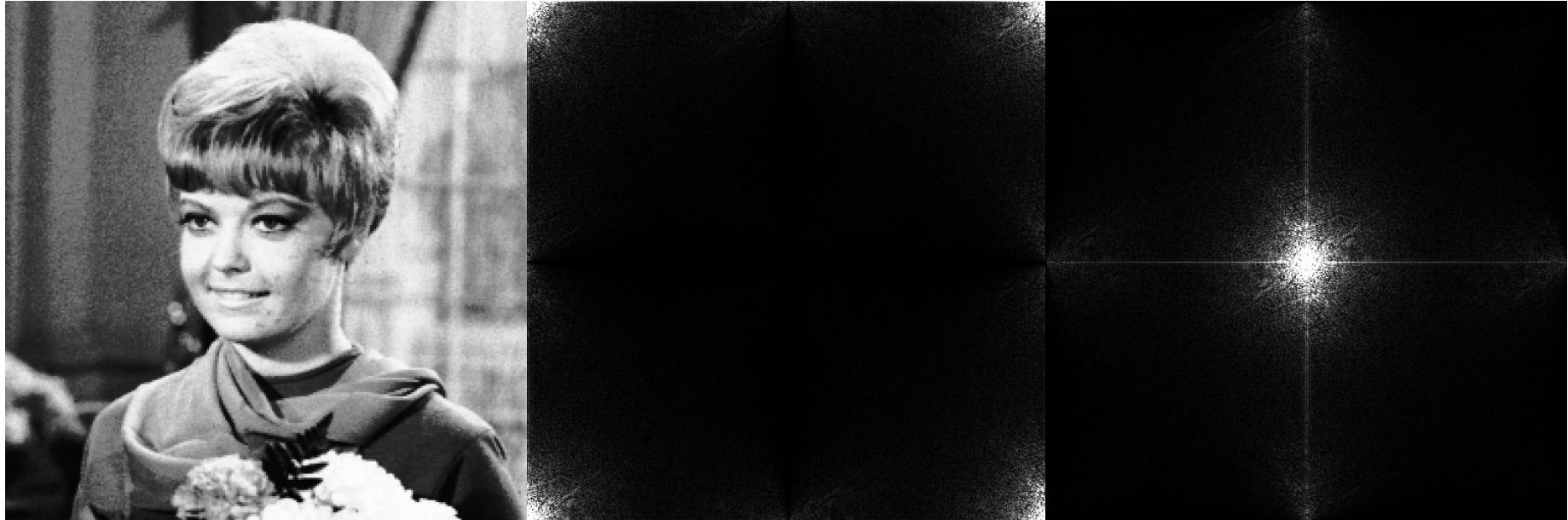
- ✓ 图像增强的目的主要包括：
- ✓ 消除噪声，改善图像的视觉效果；
- ✓ 突出边缘，有利于识别和处理

图像的频率域增强

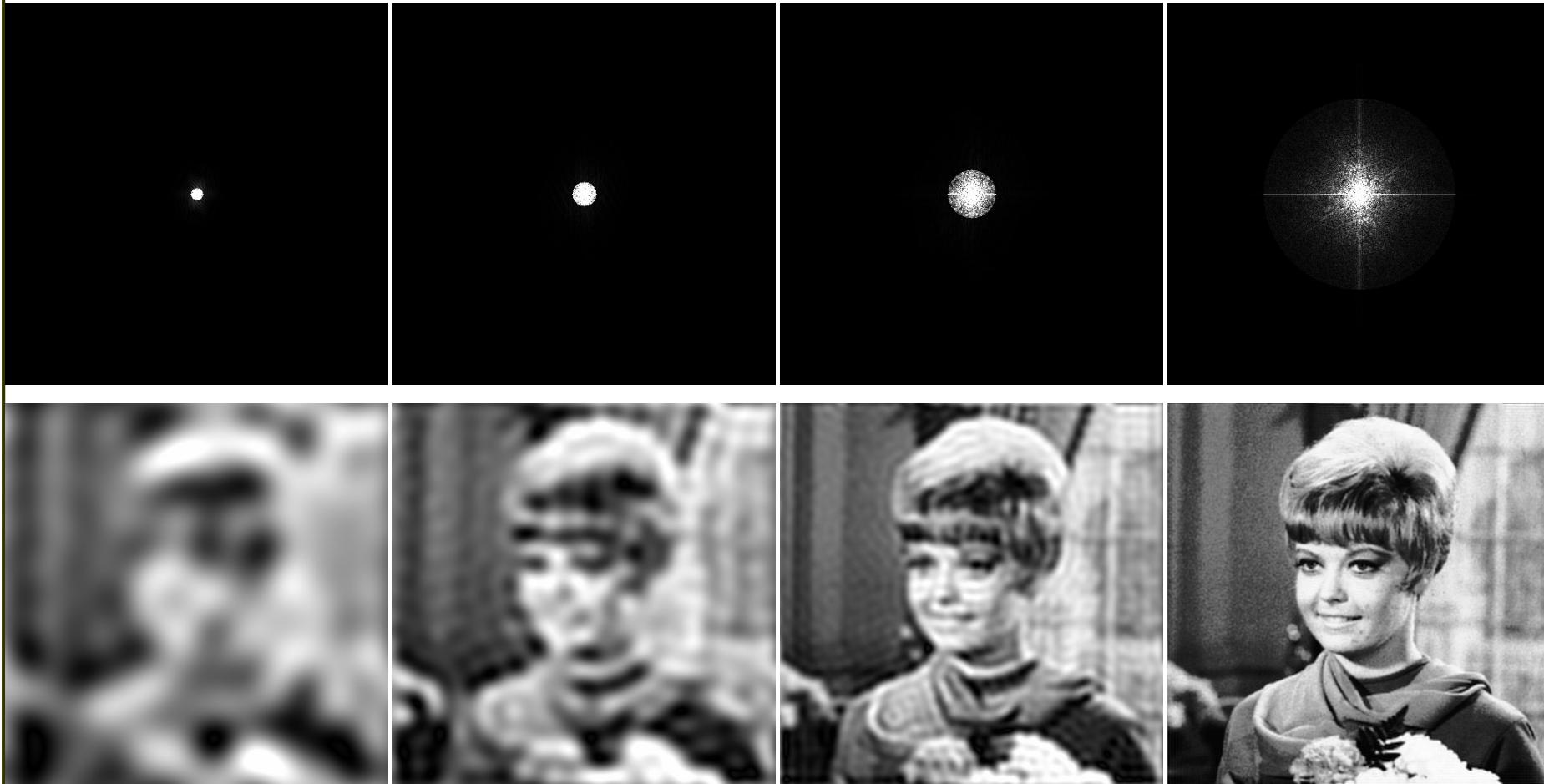
- 假定原图像为 $f(x, y)$, 经傅立叶变换为 $F(u, v)$ 。频率域增强就是选择合适的滤波器 $H(u, v)$ 对 $F(u, v)$ 的频谱成分进行处理, 然后经逆傅立叶变换得到增强的图像 $g(x, y)$, 频率域增强的一般过程如下:

$$f(x, y) \xrightarrow{\text{DFT}} F(u, v) \xrightarrow{H(u, v)} F(u, v) H(u, v) \xrightarrow{\text{IDFT}} g(x, y)$$

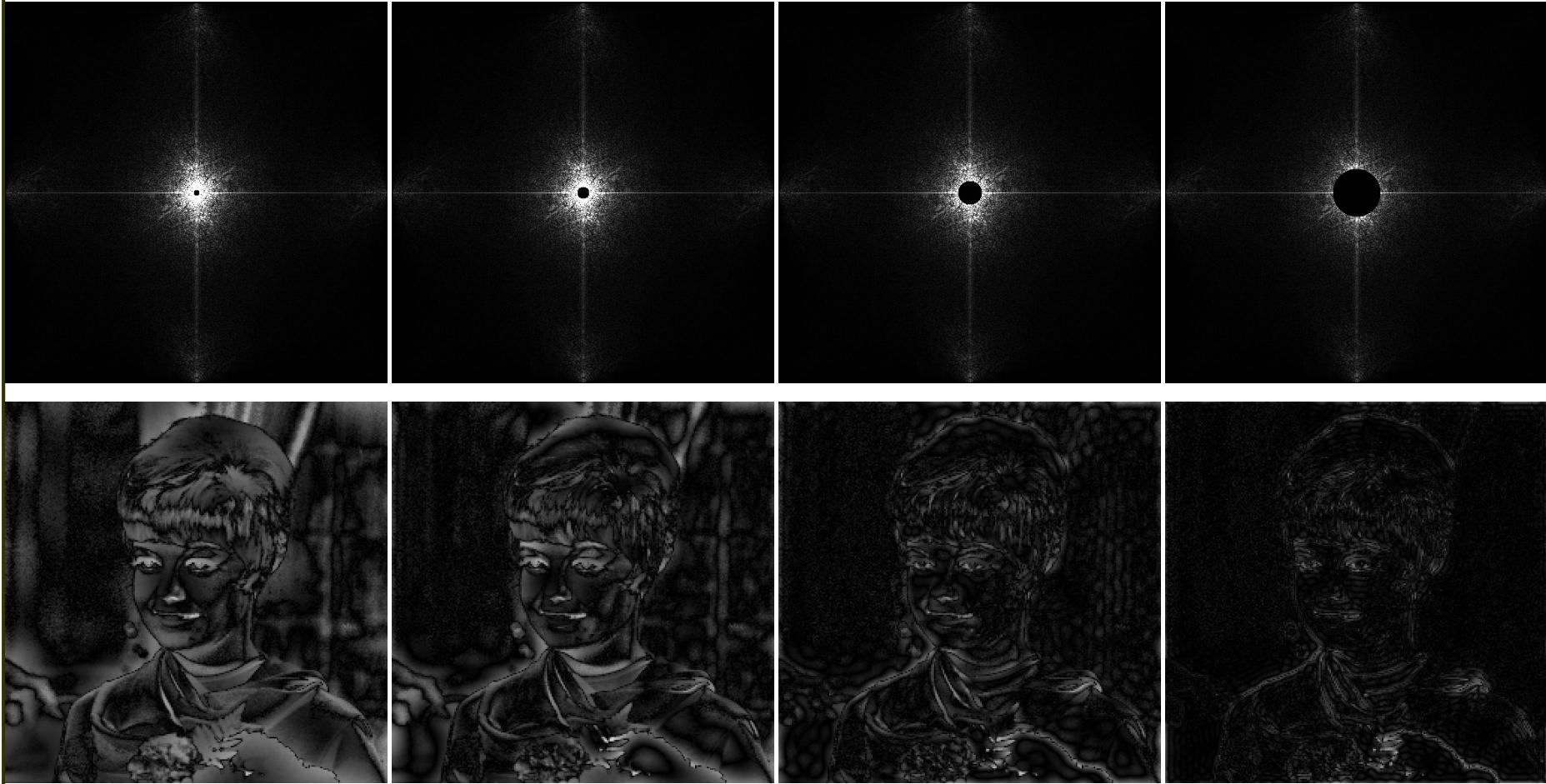
图像的频率域增强



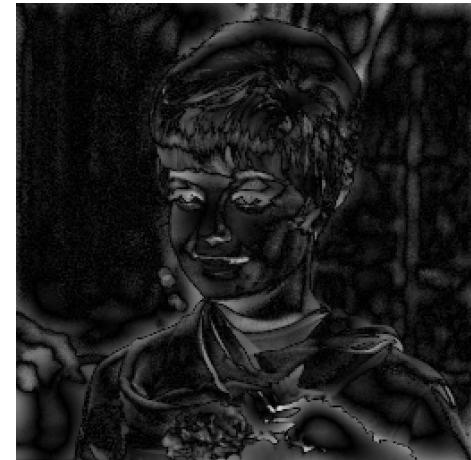
图像的频率域增强



图像的频率域增强



图像的频率域增强



(a) 原图



(b) 低通滤波（柔滑面部）



(c) 高通滤波（突出边界）

频率域平滑

- 图像的平滑除了在空间域中进行外，也可以在频率域中进行。由于噪声主要集中在高频部分，为去除噪声改善图像质量，滤波器采用低通滤波器 $H(u,v)$ 来抑制高频成分，通过低频成分，然后再进行逆傅立叶变换获得滤波图像，就可达到平滑图像的目的

频率域平滑

- ✓ 常用的频率域低通滤波器 $H(u,v)$ 有四种：
 - ✓ 理想低通滤波器
 - ✓ 巴特沃斯低通滤波器
 - ✓ 指数低通滤波器
 - ✓ 梯形低通滤波器

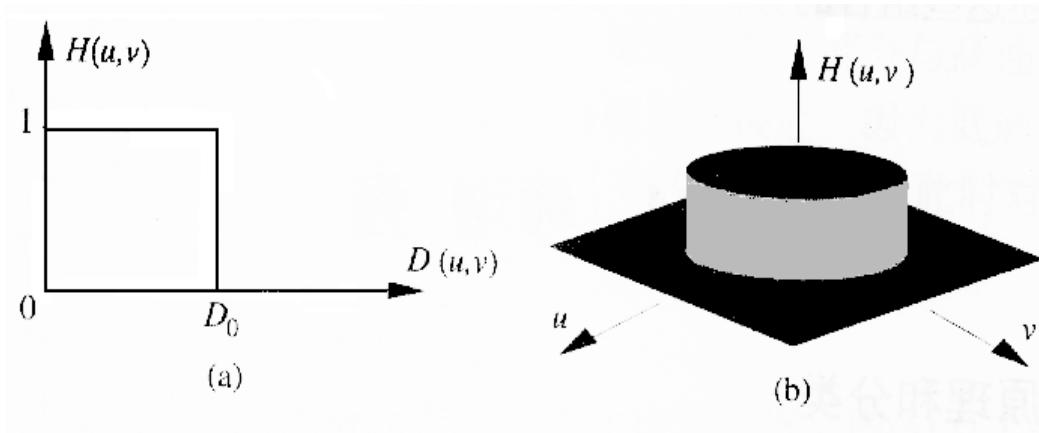
理想低通滤波器

- ✓ 理想低通滤波器
- ✓ 设傅立叶平面上理想低通滤波器离开原点的截止频率为 D_0 ，则理想低通滤波器的传递函数为

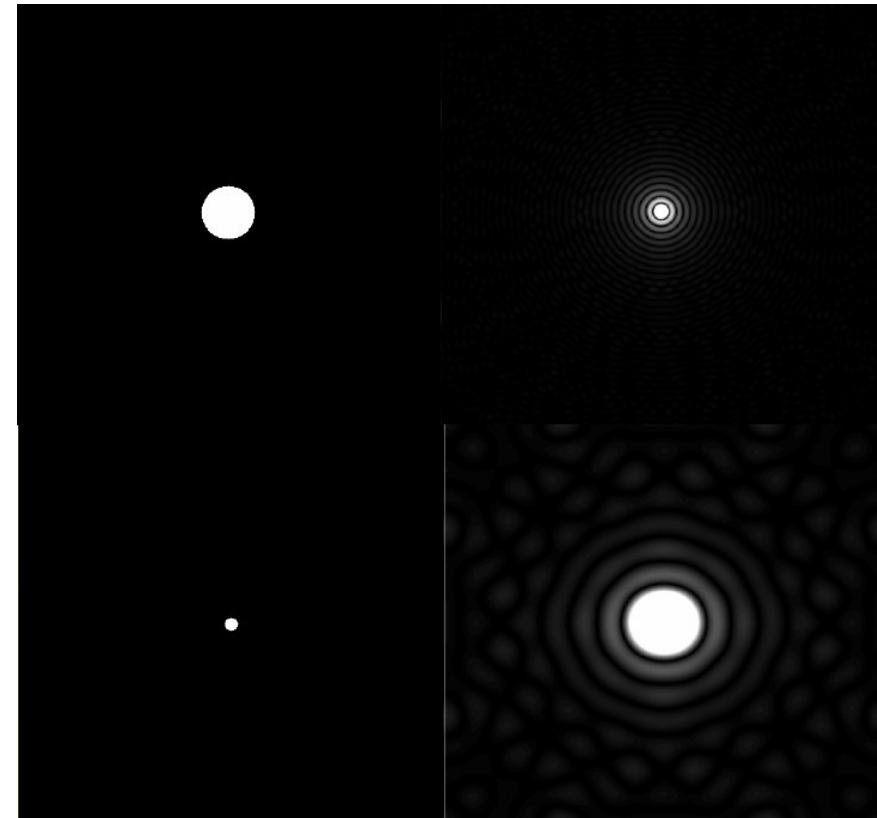
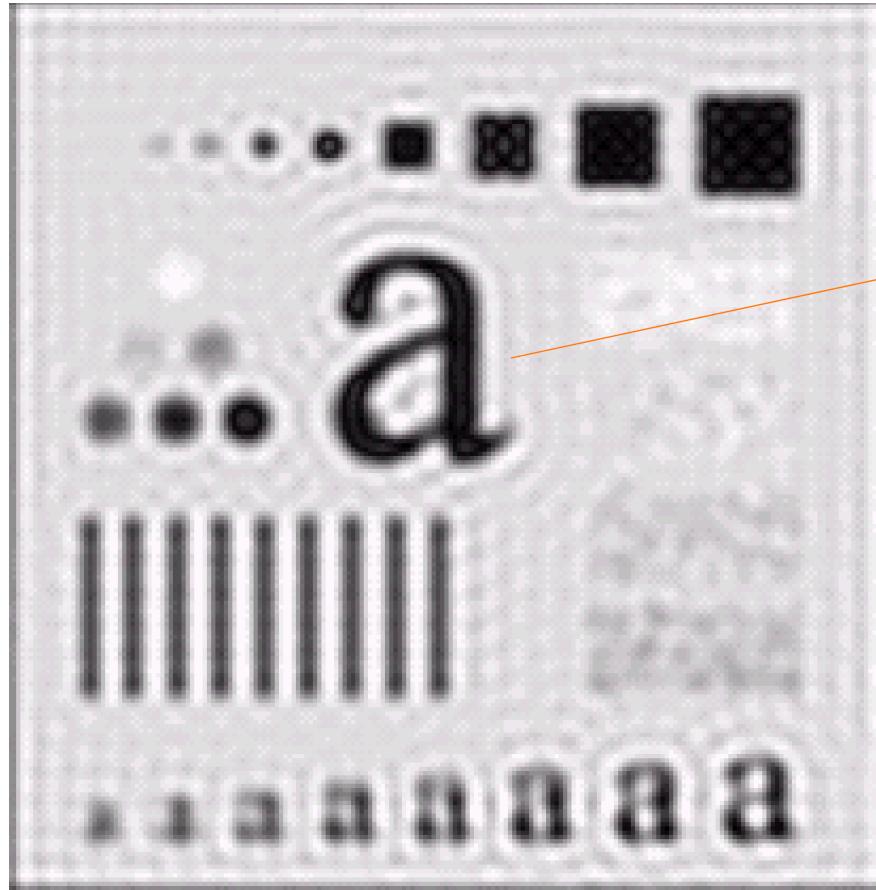
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

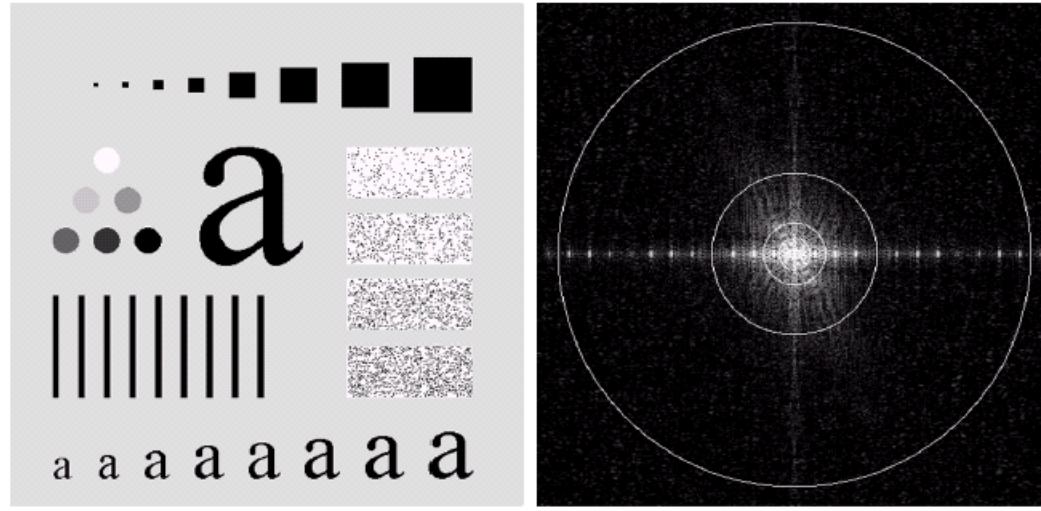
理想低通滤波器

- 由于高频成分包含有大量的边缘信息，因此采用该滤波器在去噪声的同时将会导致边缘信息损失而使图像边模糊



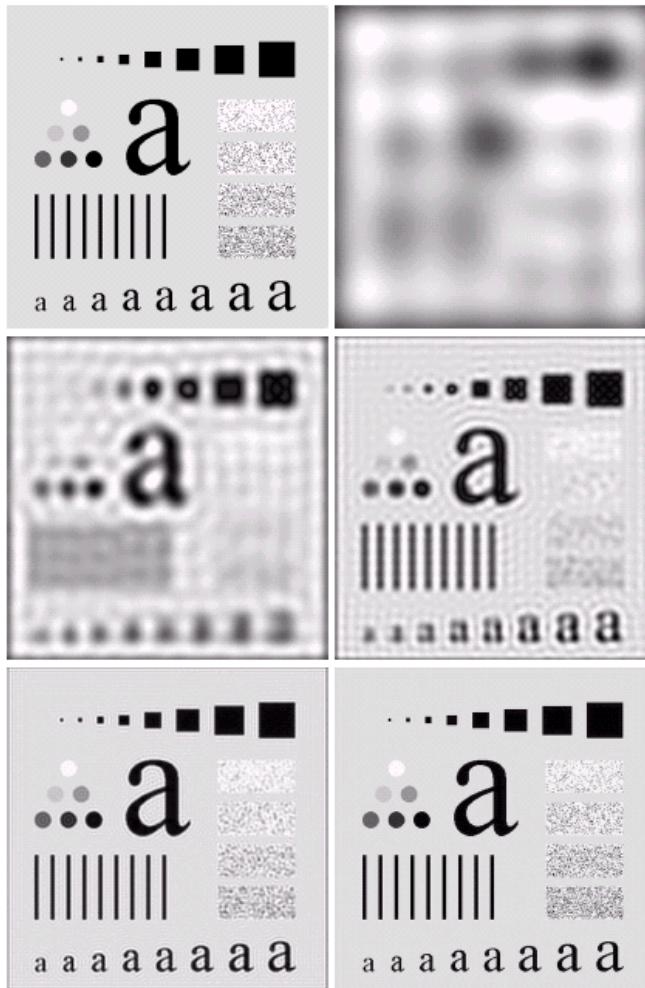
振铃现象



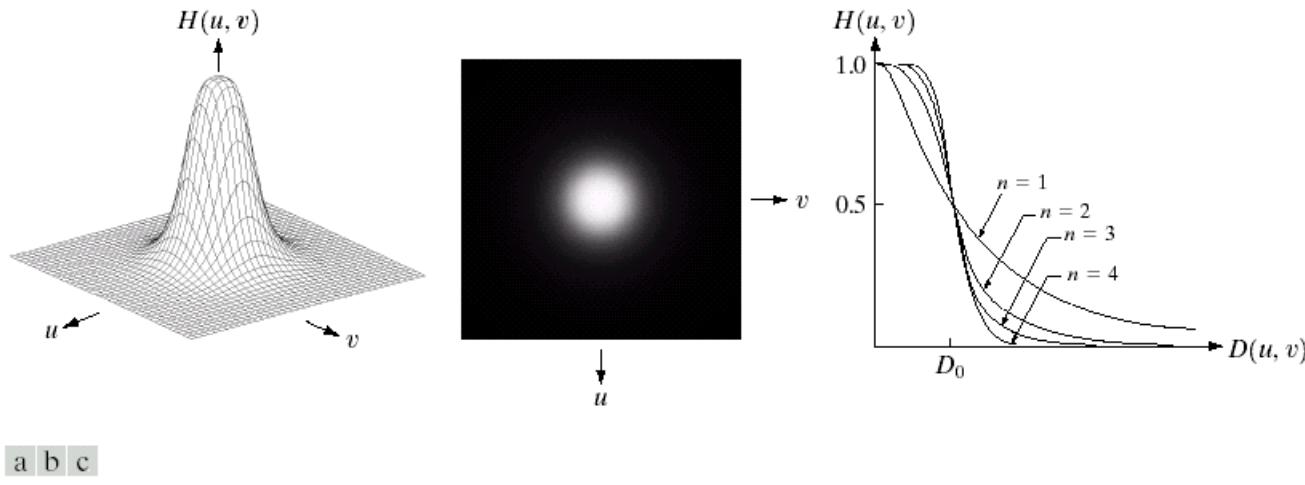


a b

FIGURE 4.11 (a) An image of size 500×500 pixels and (b) its Fourier spectrum. The superimposed circles have radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, which enclose 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, and 99.5% of the image power, respectively.



使用半径5, 15, 30, 80
和230的截止频率

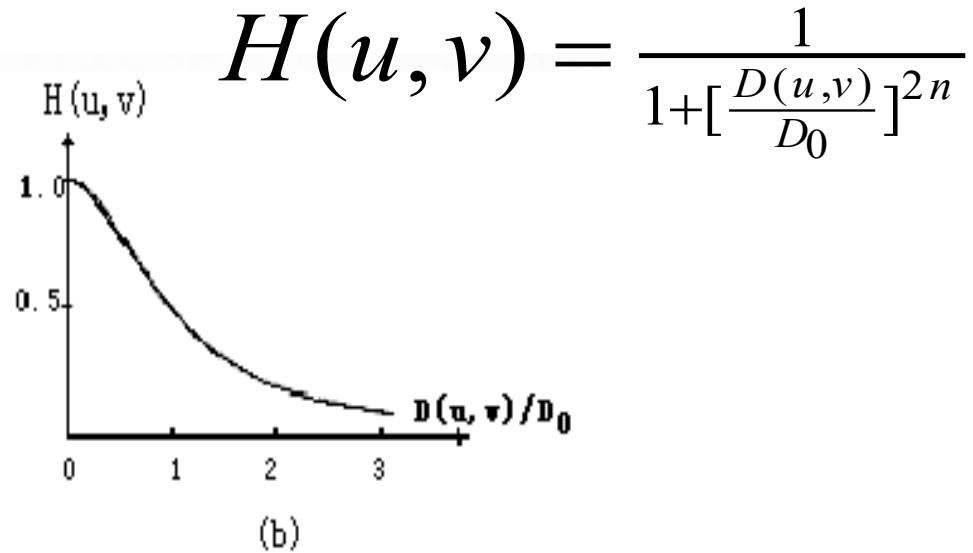
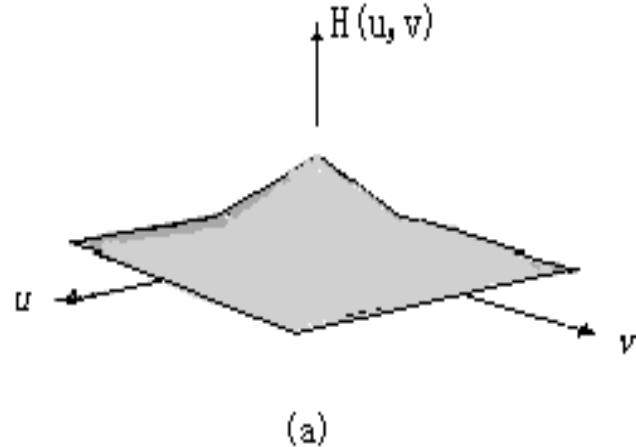


a b c

FIGURE 4.14 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Butterworth低通滤波器

- ✓ n阶Butterworth滤波器的传递函数为：



它的特性是连续性衰减，而不象理想滤波器那样陡峭变化，即明显的不连续性。因此采用该滤波器滤波在抑制噪声的同时，图像边缘的模糊程度大大减小，没有振铃效应产生

理想低通濾波器

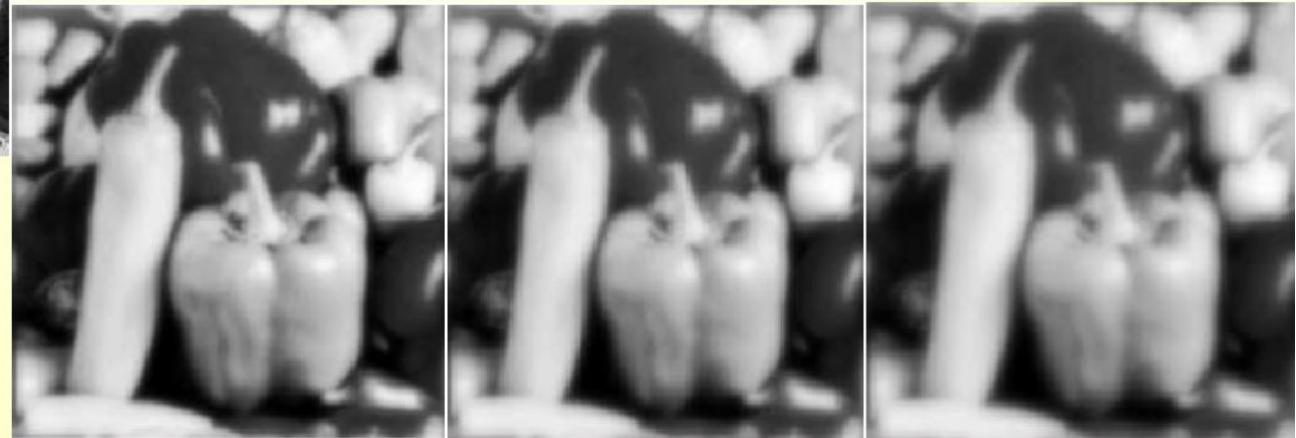


$r_0=57$

$r_0=36$

$r_0=26$

Butterworth
低通濾波器



$r_0=18$

$r_0=13$

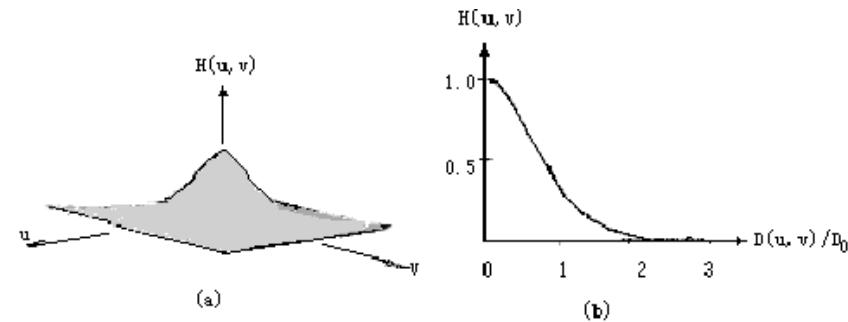
$r_0=10$

指数低通滤波器

- ✓ 指数低通滤波器是图像处理中常用的另一种平滑滤波器。它的传递函数为：

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^n}$$

采用该滤波器滤波在抑制噪声的同时，图像边缘的模糊程度较用Butterworth滤波产生的大些，无明显的振铃效应

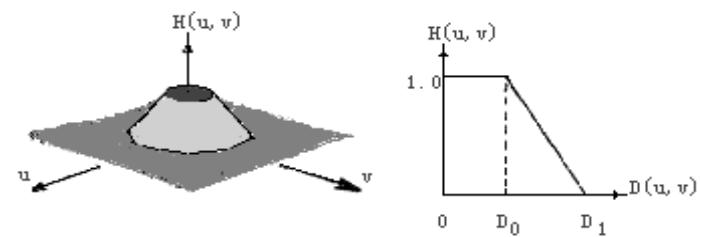


梯形低通滤波器

- ✓ 梯形低通滤波器是理想低通滤波器和完全平滑滤波器的折中。它的传递函数为：

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) < D_0 \\ \frac{D(u,v)-D_1}{D_0-D_1} & D_0 \leq D(u,v) \leq D_1 \\ 0 & D(u,v) > D_1 \end{cases}$$

它的性能介于理想低通滤波器和指数滤波器之间，滤波的图像有一定的模糊和振铃效应。



频率域锐化

- 图像的边缘、细节主要位于高频部分，而图像的模糊是由于高频成分比较弱产生的。频率域锐化就是为了消除模糊，突出边缘。因此采用高通滤波器让高频成分通过，使低频成分削弱，再经逆傅立叶变换得到边缘锐化的图像

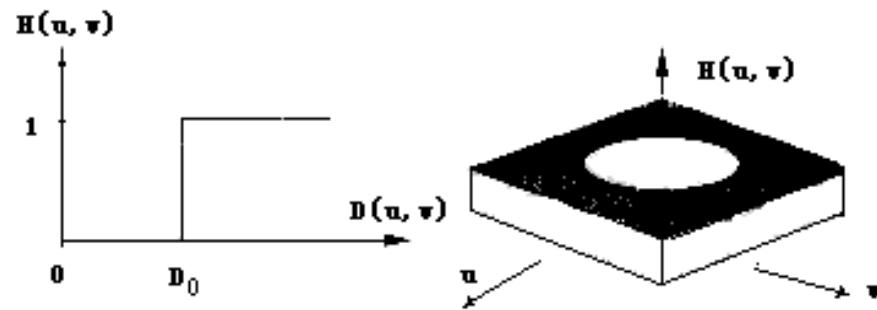
频率域锐化

- ✓ 常用的高通滤波器有：
 - ✓ 理想高通滤波器
 - ✓ 巴特沃斯高通滤波器
 - ✓ 梯形滤波器
 - ✓ 指数滤波器

理想高通滤波器

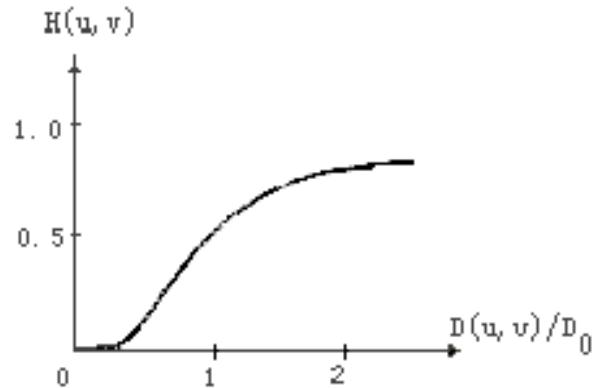
- 二维理想高通滤波器的传递函数为：

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



巴特沃斯高通滤波器

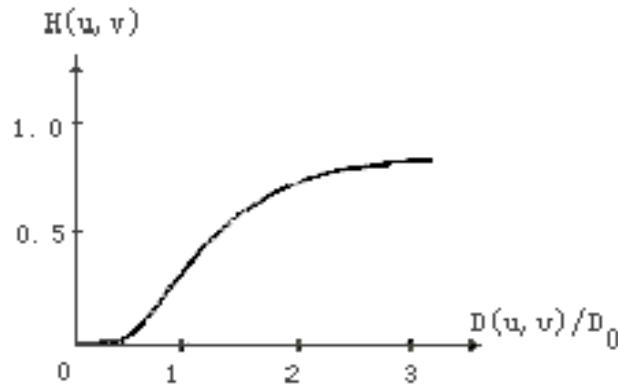
- ✓ n阶巴特沃斯高通滤波器的传递函数定义如下：
- ✓ $H(u, v) = 1 / [1 + (D_0/D(u, v))^{2n}]$



指数滤波器

- ✓ 指数高通滤波器的传递函数为：

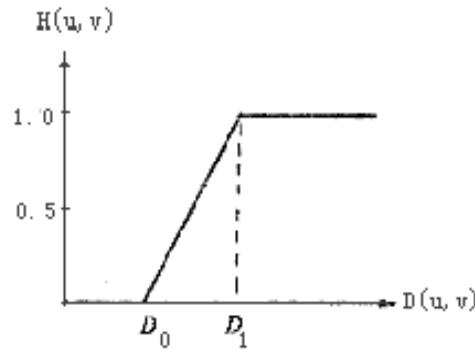
$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0}{D(u, v)}\right]^n}$$



梯形滤波器

✓ 梯形高通滤波器的定义为：

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) < D_1 \\ \frac{D(u,v)-D_1}{D_0-D_1} & D_1 \leq D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$



频率域锐化

- 四种滤波函数的选用类似于低通。理想高通有明显振铃现象，即图像的边缘有抖动现象；
Butterworth高通滤波效果较好，但计算复杂，其优点是有少量低频通过， $H(u, v)$ 是渐变的，振铃现象不明显；指数高通效果比Butterworth差些，振铃现象不明显；梯形高通会产生微振铃效果，但计算简单，较常用。一般来说，不管在图像空间域还是频率域，采用高频滤波不但会使有用的信息增强，同时也使噪声增强。因此不能随意地使用