第三次上机作业 实验报告

袁雨 PB20151804

一、实验目的

实现带规范方法的反幂法，求得给定矩阵按模最小的特征值以及相应的特征向量。

二、实验要求

给定两个矩阵如下：

$$1.\ A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$$

$$2.\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 16 & -2 & -2 & 5 \\ 16 & -3 & -1 & 7 \\ 6 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

用带规范方法的反幂法求得上述两个矩阵的按模最小特征值和特征向量。

要求按照课本上的反幂法流程实现，即使用 LU 分解（Doolittle 分解）解迭代方程 $X^{k+1} = A^{-1}Y^k$（可使用第二次上机实验的实现代码）。初始向量取全 1 向量，应计算每次迭代时特征值的估计值，并在相邻两次迭代的特征值的差的绝对值小于 10−5 时停止迭代。
程序实现完毕后，应撰写实验报告。

三、实验结果

A1:

```
lambda1:0.000003
v1:(0.490420,-1.000000,0.659762,-0.152104,0.008047)
lambda1(0):1.000000     X(0):(1.000000      ,1.000000      ,1.000000      ,1.000000      ,1.000000      )     Y(0):(1.000000  ,1.000000  ,1.000000  ,1.000000  ,1.000000  )
lambda1(1):0.000893     X(1):(630.000000    ,-1120.000000 ,630.000000    ,-120.000000   ,5.000000      )     Y(1):(0.562500  ,-1.000000 ,0.562500  ,-0.107143 ,0.004464  )
lambda1(2):0.000003     X(2):(146252.812500,-297848.750000,196174.687500,-45114.375000,2377.254464  )     Y(2):(0.491030  ,-1.000000 ,0.658639  ,-0.151467 ,0.007981  )
lambda1(3):0.000003     X(3):(149112.770686,-304047.406171,200595.275176,-46244.691668,2446.559496  )     Y(3):(0.490426  ,-1.000000 ,0.659750  ,-0.152097 ,0.008047  )
lambda1(4):0.000003     X(4):(149157.105244,-304141.809927,200661.194040,-46261.122745,2447.536172  )     Y(4):(0.490420  ,-1.000000 ,0.659762  ,-0.152104 ,0.008047  )
lambda1(5):0.000003     X(5):(149157.584694,-304142.830585,200661.906514,-46261.300272,2447.546720  )     Y(5):(0.490420  ,-1.000000 ,0.659762  ,-0.152104 ,0.008047  )
lambda1(6):0.000003     X(6):(149157.589848,-304142.841558,200661.914173,-46261.302180,2447.546833  )     Y(6):(0.490420  ,-1.000000 ,0.659762  ,-0.152104 ,0.008047  )
lambda1(7):0.000003     X(7):(149157.589904,-304142.841675,200661.914255,-46261.302201,2447.546834  )     Y(7):(0.490420  ,-1.000000 ,0.659762  ,-0.152104 ,0.008047  )
lambda1(8):0.000003     X(8):(149157.589904,-304142.841677,200661.914256,-46261.302201,2447.546834  )
```

A2:

```
lambda1:0.123550
v1:(-0.115732,1.000000,-0.425695,0.624775)
lambda(0):1.000000      X(0):(1.000000  ,1.000000  ,1.000000  ,1.000000  )      Y(0):(1.000000  ,1.000000  ,1.000000  ,1.000000  )
lambda(1):0.500000      X(1):(0.000000  ,2.000000  ,-0.000000 ,1.000000  )      Y(1):(0.000000  ,1.000000  ,-0.000000 ,0.500000  )
lambda(2):0.177778      X(2):(-0.625000 ,5.625000  ,-2.375000 ,3.500000  )      Y(2):(-0.111111 ,1.000000  ,-0.422222 ,0.622222  )
lambda(3):0.123796      X(3):(-0.933333 ,8.077778  ,-3.433333 ,5.044444  )      Y(3):(-0.115543 ,1.000000  ,-0.425034 ,0.624484  )
lambda(4):0.123611      X(4):(-0.936210 ,8.089924  ,-3.443776 ,5.054333  )      Y(4):(-0.115725 ,1.000000  ,-0.425687 ,0.624769  )
lambda(5):0.123551      X(5):(-0.936712 ,8.093818  ,-3.445490 ,5.056811  )      Y(5):(-0.115732 ,1.000000  ,-0.425694 ,0.624774  )
lambda(6):0.123551      X(6):(-0.936719 ,8.093856  ,-3.445513 ,5.056838  )      Y(6):(-0.115732 ,1.000000  ,-0.425695 ,0.624775  )
lambda(7):0.123550      X(7):(-0.936720 ,8.093861  ,-3.445515 ,5.056841  )
```

四、结果分析

1. 对比两个迭代过程的迭代次数，分析是否有“A 的按模最小特征值越接近于 0，收敛越快”。

Ai	lambda1	v1	迭代次数
1	0.000003	(0.490420,-1.000000,0.659762,-0.152104,0.008047)	8
2	0.123550	(-0.115732,1.000000,-0.425695,0.624775)	7

相比A2，A1的按模最小特征值更接近0，但两个迭代过程的迭代次数相近。

反幂法是先通过幂法求出A^{-1}按模最大的特征值，再取倒数求出A^{-1}的按模最小的特征值。A的按模最小特征值越接近0，A^{-1}的按模最大特征值的模就越大，若精度控制放在A^{-1}的特征值上，则收敛速度不会更快，若精度控制放在A的特征值上，则A的按模最小特征值越接近于0，收敛可能会更快。

2. “估计每次迭代的特征值”中是否遇到问题，是如何解决的（提示：如 X^{k+1}/Y^k 时是否有数值问题）。

每次迭代的特征值并没有遇到问题，规范化运算保证了$||Y^k||$=1，在迭代过程中一般不会出现超过计算机实数的值域（上溢）或会被计算机当零处理（下溢）的情况。