数值试验报告

袁一杨　141110101

2016-12-11

1　实验一

1.1　基本内容

用Newton法求解方程 $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$的根，并绘制误差下降曲线。然后，试用割线法重复上述工作。

1.1.1　Newton法：

$$k = 0, 1, 2, \ldots \begin{cases} \vec{f}'(\vec{x}_k)(\triangle \vec{x}_k) = -\vec{f}(\vec{x}_k) \\ \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \triangle \vec{x}_k \end{cases}$$

每一步迭代均需解牛顿方程组 $\vec{f}'(\vec{x}_k)(\triangle \vec{x}_k) = -\vec{f}(\vec{x}_k)$。它是一个线性方程组，可以用crout方法等求解。

1.1.2　割线法：

一元函数的割线法为：

$$x_{k+1} = x_k - [\frac{f(x_k + h_k) - f(x_k)}{h_k}]^{-1} f(x_k)$$

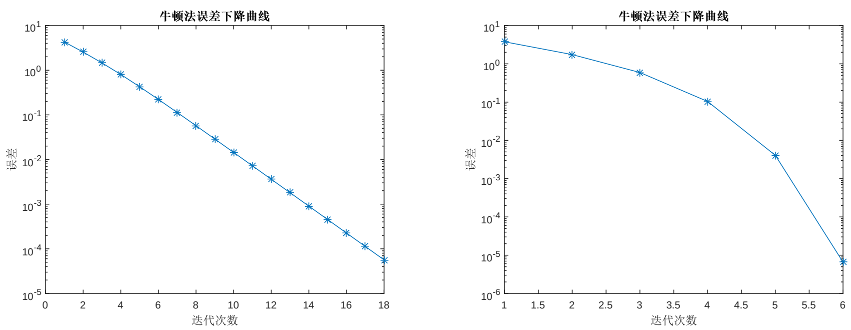
1.2　数据

1.2.1　Newton法：

根	根的重数	初始值	近似值	迭代次数	收敛阶数	误差变化
2	2	9	2.000028255667712	18	1	如图1(a)
-3	1	-10	-3.000000000017459	6	2	如图1(b)

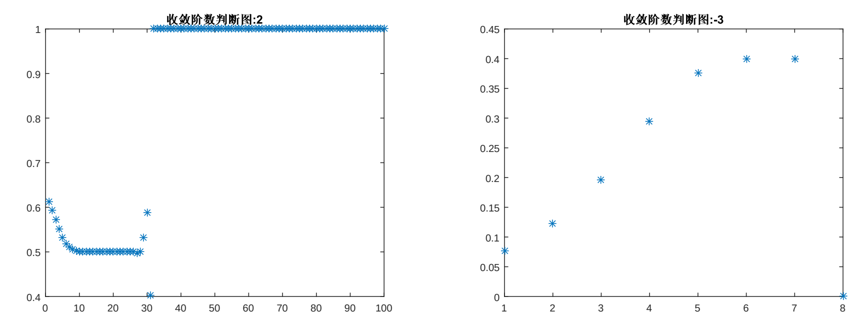
其中收敛阶数的判断：

1. 当收敛到2时，令Newton法迭代100次，观察 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$ 的变化曲线，如图2(a)
2. 当收敛到-3时，令Newton法迭代100次，观察 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}$ 的变化曲线，如图2(b)（分子太小，上溢出，所以只画到了8）



(a) $x_* = 2$ (b) $x_* = -3$

Figure 1: Newton法误差下降曲线

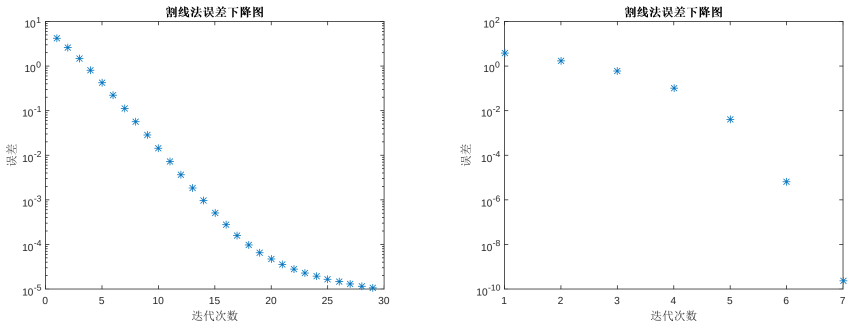


(a) $x_* = 2$ (b) $x_* = -3$

Figure 2: Newton法收敛阶数判断图

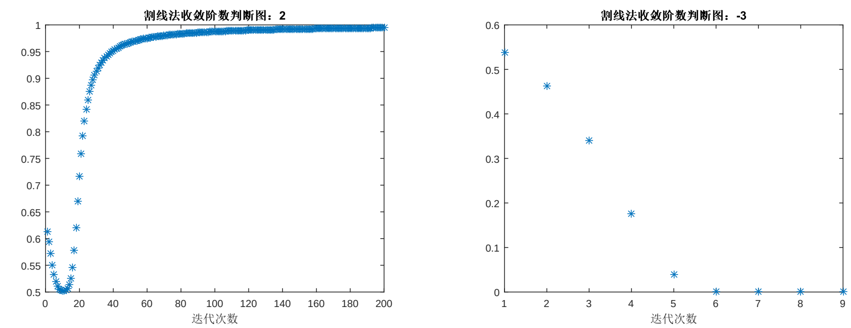
1.2.2 割线法：

根	根的重数	初始值	近似值	迭代次数	收敛阶数	误差变化
2	2	9	2.000009619434918	29	1	如图3(a)
-3	1	-10	-3.000000000000010	7	超线性	如图3(b)



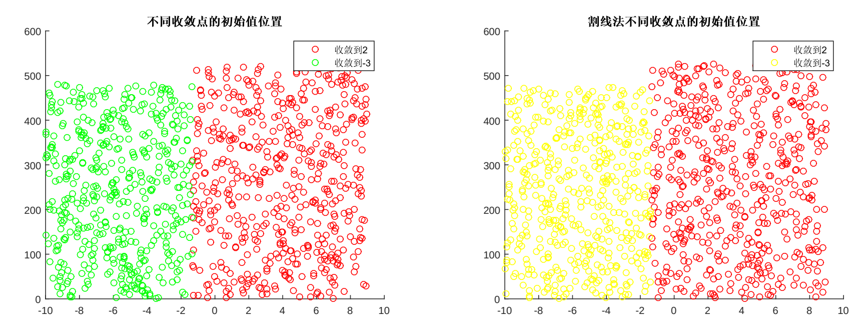
(a) $x_* = 2$ (b) $x_* = -3$

Figure 3: 割线法误差下降曲线



(a) $x_* = 2$ (b) $x_* = -3$

Figure 4: 割线法收敛阶数判断图



(a) Newton法 (b) 割线法

Figure 5: 不同收敛点的初始值区间位置

其中收敛阶数的判断：

1. 当收敛到2时，令割线法迭代200次，观察 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$ 的变化曲线，如图4(a)
2. 当收敛到-3时，令割线法迭代200次，观察 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$ 的变化曲线，如图4(b)

1.3 结论

从运行的结果，可以得出以下一些结论：

1. 通过图1和3，可以看出，无论是Newton法还是割线法，对于重根的情况都没有好的收敛效果，这是因为重根使得当 x_k趋近于精确值时，分母 $f'(x_k)$也趋近于零。对于重根，Newton法的收敛阶数为1，割线法的收敛阶数最后要比线性的更差一些。对于单根 $x=-3$，由图2知，Newton法为2阶收敛；由图4知，割线法为超线性收敛，但不到2阶。
2. 图5对两种方法的不同初值的收敛点的分类。可以看出（忽略纵坐标），两种方法均在 $[-2,-1]$区间内出现了划分。

2 实验二

2.1 基本内容

编制Newton方法和Broydon方法求解非线性方程组

$$\begin{cases}(x+3)(y^2-7)+18=0\\ \sin(y\exp x-1)=0\end{cases}$$

取相同的初值 $(-0.15,1.4)$，比较两者的迭代次数；若初值为 $(0,1)$呢？观察Broydon中的 B_k是否收敛到Jacobi矩阵呢？若非线性方程组为

$$\begin{cases}x+y-3=0\\ x^2+y^2-9=0\end{cases}$$

呢？初值取为 $(2,4)$，观察Broydon中的 B_k是否收敛到Jacobi矩阵呢？

2.1.1 Newton法：

$$k=0,1,2,\dots\begin{cases}\vec{f}'(\vec{x}_k)(\triangle\vec{x}_k)=-\vec{f}(\vec{x}_k)\\ \vec{x}_{k+1}=\vec{x}_k+\triangle\vec{x}_k\end{cases}$$

每一步迭代均需解牛顿方程组 $\vec{f}'(\vec{x}_k)(\triangle\vec{x}_k) = -\vec{f}(\vec{x}_k)$。它是一个线性方程组，可以用crout方法等求解。

2.1.2 Broyden:

$$k = 0,1,2,\ldots \begin{cases} x_{k+1} = x_k - H_k f(x_k) \\ H_{k+1} = H_k + \frac{(\triangle x_k - H_k y_k)d_k^\top}{d_k^\top y_k} \\ d_k^\top y_k \neq 0 \end{cases}$$

其中 $d_k = H_k^\top v_k$。若取定 v_k或 d_k，便得到一个特殊的方法。例如，令 $v_k = \triangle x_k$，若 $(\triangle x_k)^\top H_k y_k \neq 0$，则Broyden方法可表示为

$$k = 0,1,2,\ldots \begin{cases} x_{k+1} = x_k - H_k f(x_k) \\ H_{k+1} = H_k + \frac{(\triangle x_k - H_k y_k)(\triangle x_k)^\top H_k}{(\triangle x_k)^\top H_k y_k} \\ (\triangle x_k)^\top H_k y_k \neq 0 \end{cases}$$

2.2 数据

误差容限 $tol = 1e-6$

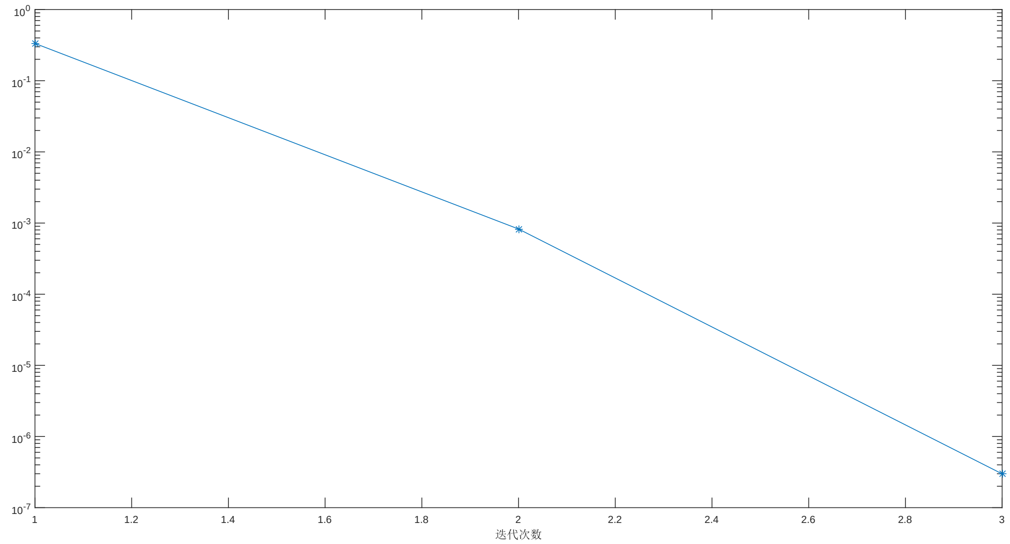
2.2.1 非线性方程一

精确解为 $(0,1)$
初始值取 $(-1.5,1.4)$时

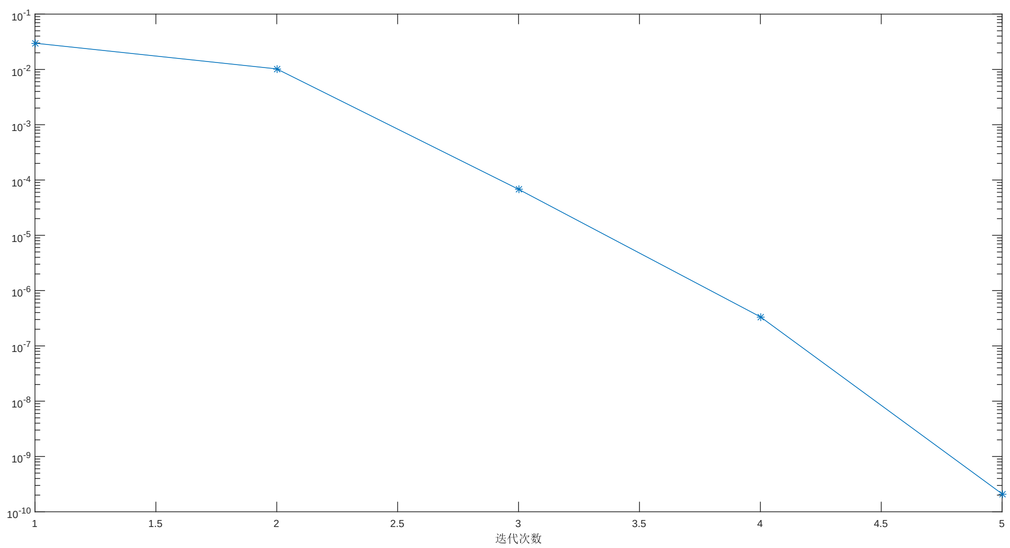
方法	近似值	迭代次数	误差变化
Newton法	(3.66922831316696e-08,1.00000008231398)	3	如图6(a)
Broyden法	(-3.77323809580814e-12,1.00000000003102)	5	如图6(b)

2.2.2 非线性方程二

精确解为 $(0,3),(3,0)$
初始值取 $(2,4)$时



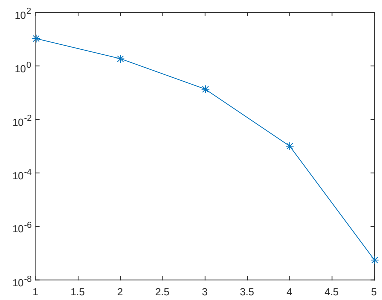
(a) Newton法



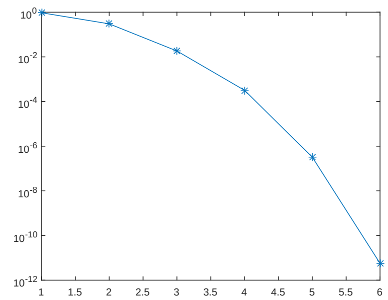
(b) Broyden法

Figure 6: 误差下降曲线

方法	近似值	迭代次数	误差变化
Newton法	(-9.40716089943040e-09,3.00000000940716)	5	如图7(a)
Broyden法	(-9.46147385338017e-13,3.00000000000095)	6	如图7(b)



(a) Newton法



(b) Broyden法

Figure 7: 误差下降曲线

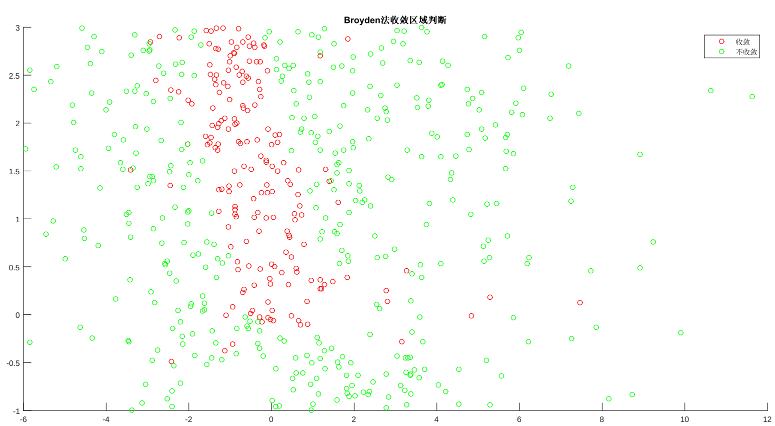
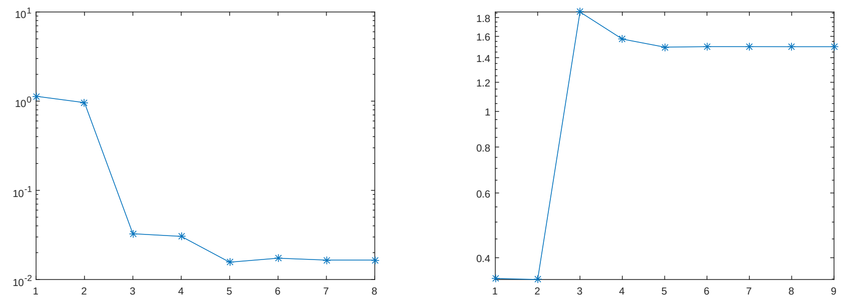


Figure 8: 非线性方程一Broyden法收敛域估计

2.3 结论

1. 两种方法都是超线性收敛的。本次试验中，Newton法比Broyden法快一些。



(a) 非线性方程一 (b) 非线性方程二

Figure 9: B_k收敛到Jacobi矩阵判断图

2. Broyden是局部收敛的，因此我对其收敛域做了一个判断如图。Newton法也可以做这样的一个判断。

3. 增加循环迭代次数（尽管已经收敛，也要循环下去），通过观察 B_k与原矩阵差的f范数的变化，来判断 B_k是否收敛到零点对应的Jacobi矩阵。由图9可以非常直观的看出，第一个非线性方程的 B_k是收敛到零点对应的Jacobi矩阵的，而第二个 B_k虽然趋于稳定，但并不收敛到Jacobi矩阵。（尽管随着迭代次数的增多，f范数会取值NaN，但这并不影响我们对收敛的判断）。

4. 对于非线性方程组二，带入多个初值均收敛，其中包括 $[100, 200]$这样的取值较大的初值。由此猜测，非线性方程组二是全局收敛的。

3 实验三

3.1 基本内容

编制修正Newton法（与m的关系）、离散Newton法和两点序列割线法求解

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

3.1.1 修正Newton法：

$$k=0,1,2,\ldots\begin{cases}x_{k,0}=x_k\\x_{k,j}=x_{k,j-1}-f'(x_k)^{-1}f(x_{k,j-1}),j=1,2,\ldots,m\\x_{k+1}=x_{k,m}\end{cases}$$

3.1.2 离散Newton法：

记

$$\triangle_{ij}(x,h)=\frac{f_i(x+h_{ij}e_j)-f_i(x)}{h_{ij}}$$

或

$$\triangle_{ij}(x,h)=\frac{f_i(x+\sum_{k=1}^{j}h_{ik}e_k)-f_i(x+\sum_{k=1}^{j-1}h_{ik}e_k}{h_{ij}}$$

代替偏导数 $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$，表示其的一种差商逼近，使得 $\lim_{h\longrightarrow 0}\triangle_{ij}(x,h)=\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$。令

$$J(x,h)=[\triangle_{ij}(x,h)]_{n\times n}$$

$$k=0,1,2,\ldots\begin{cases}J(x_k,h_k)=[\triangle_{ij}(x_k,h_k)]_{n\times n}\\x_{k+1}=x_k-J(x_k,h_k)^{-1}f(x_k)\end{cases}$$

3.1.3 两点序列割线法：

取辅助点为 $x_{k,j}=x_k+\sum_{i=1}^{j}(x_i^{(k-1)}-x_i^{(k)})e_i, j=1,2,\ldots,n$，记 $h_j^{(k)}=x_j^{(k-1)}-x_j^{(k)}$，则

$$H_k=[h_1^{(k)},\sum_{i=1}^{2}h_i^{(k)}e_i,\ldots,\sum_{i=1}^{n}h_i^{(k)}e_i]$$

若 $h_j^{(k)}\neq 0$，则 H_k非奇异，而

$$\Gamma_k=[f(x_k+h_1^{(k)})-f(x_k),f(x_k+\sum_{i=1}^{2}h_i^{(k)}e_i)-f(x_k),\ldots,f(x_k+\sum_{i=1}^{n}h_i^{(k)}e_i)-f(x_k)]$$

从而

$$A_k=[\frac{1}{h_1^{(k)}}(f(x_k+h_1^{(k)})-f(x_k)),\ldots,\frac{1}{h_n^{(k)}}(f(x_k+\sum_{i=1}^{n}h_i^{(k)}e_i)-f(x_k+\sum_{i=1}^{n-1}h_i^{(k)}e_i))]$$

将以上公式带入到迭代公式

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - A_k^{-1} f(x_k) \\ A_k^{-1} = H_k \Gamma_k^{-1} \end{cases}$$

便得到了两点序列割线法。

3.2 数据及分析

初始值取 $(5,1)$，停机标准为相邻误差 $\|x_1 - x_0\| < tol, tol = 1e-5$。

方法	近似值	迭代次数	误差
修正Newton法(m=2)	(3,1.49932037578826e-16)	4	1.4993e-16
离散Newton法	(3.00000243718895,-2.43718895406907e-06)	5	3.4467e-06
两点序列割线法	(3.00000127380995,-1.27380995069114e-06)	5	1.8014e-06

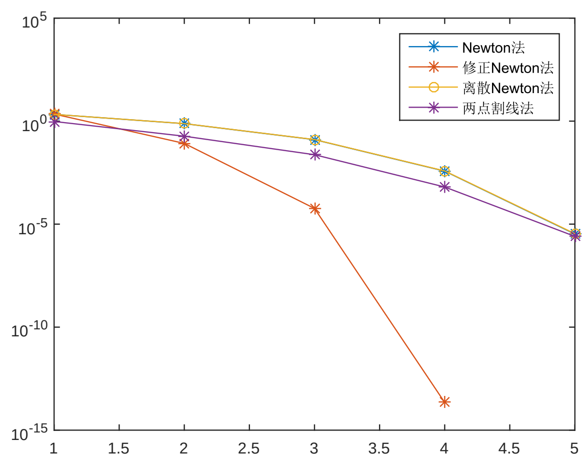


Figure 10: 四种方法的误差下降曲线

四种方法的误差下降曲线比较如图10

四种m取值的收敛效果比较，如图11

3.3 结论

1. 由图11，在修正Newton法中，随着m从1增加到4，收敛过程越来越快，

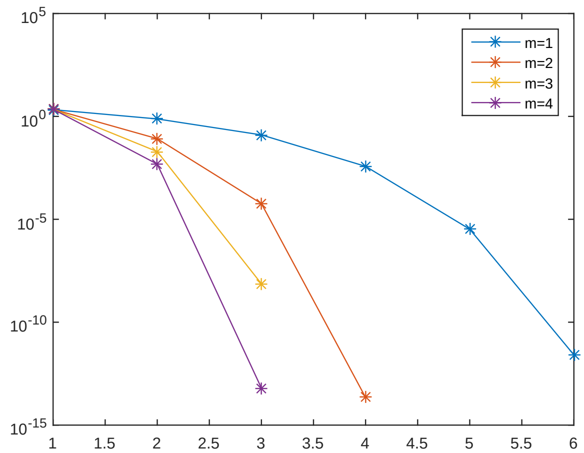


Figure 11: 修正牛顿法迭代效果与m的关系

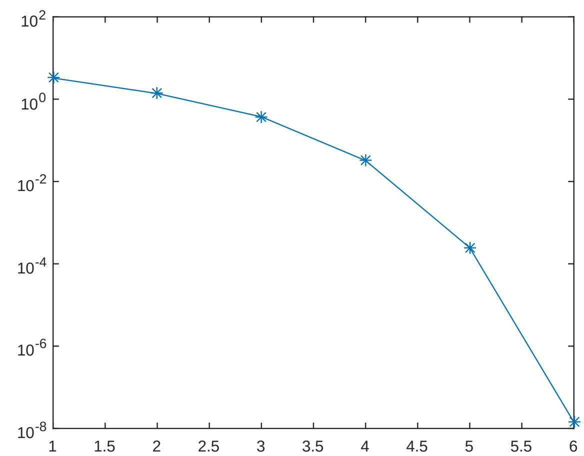


Figure 12: 离散牛顿法取初值为（2,4）时的误差下降曲线

收敛阶数越来越大。这也验证了，修正Newton法的收敛阶数一般为$O(m+1)$。

2. 离散Newton法的相邻误差tol不能取过小，取到 $1e-6$时，就会出现上溢出现象，所以最后结果的真实误差相比其他方法也会小很多。

3. 由图10，割线法的效果和Newton法的效果接近，说明割线法在减少了导

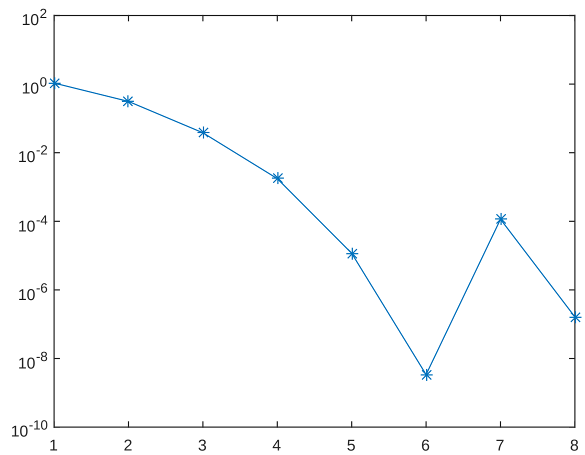


Figure 13: 两点割线法取初值为（0,0）时的误差下降曲线

数的计算，并且有很好的逼近效果。但还是修正Newton法 $m > 1$时收敛效果好。

4. 初值的选取对于算法的效果也有一定的影响。改变离散Newton法的初值，取 $(2,4)$，误差下降曲线如图12，此时的真实误差为 $1.4233e-08$要小很多，收敛到 $(0,3)$。初值取 $(0,0)$时，离散Newton法不收敛，两点序列割线法的收敛不稳定，如图13。

4 实验四

4.1 基本内容

非线性方程组的应用：Newton法可应用于特征值问题的求解，方式如下

$$\begin{cases} Tx - \lambda x = 0 \\ x^\top x = 0 \end{cases}$$

取T为以前的三对角矩阵，阶数为 $n = 5$；取任意的初值 x_0和 $\lambda_0 = x_0^\top T x_0$，做Newton迭代。将得到的结果与幂法做比较。

4.2 数据

用Matlab自带函数eig()求得T的特征值为

$$\begin{bmatrix} 0.2679 & 1.0000 & 2.0000 & 3.0000 & 3.7321 \end{bmatrix}$$

利用Newton法求T的特征值，带入不同的初始 x_0

初始向量	近似值	真值
[0,-10,-10,-10,-10]	3	3
[0.3,0.3,0,0.3,0.3]	0.267949192431123	0.267949192431123
[0.1,0.1,0,0.1,0.1]	2.00000000000001	2
[1,1,0,1,1]	3.73205080756888	3.73205080756888
[$\sqrt{2}$,-1,0,$\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$]	1	1

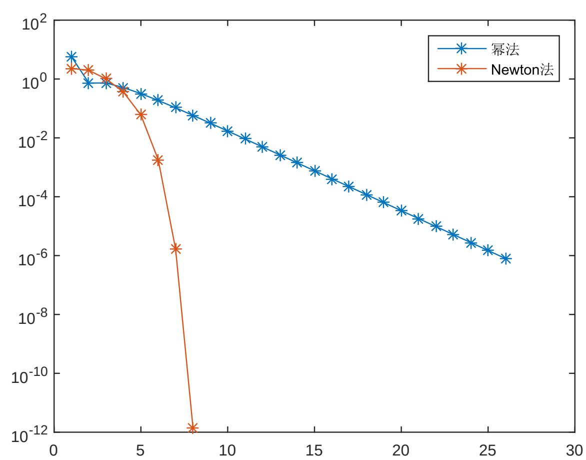


Figure 14: 幂法、Newton法求特征值3.732误差下降曲线

4.3 结论

1. 可以看出，解非线性方程组的方法求解特征值是一个很有效的方法，通过近似值和真值（相对准确）比较，可以看出，误差很小，且只需很少的迭代次数。
2. 由图14，可以看出Newton法为超线性收敛，而幂法为线性收敛的。

3. 通过实验可以知道，幂法所求得是矩阵T的模最大的特征值，而Newton法对于不同的初值，求得的特征值不同。当然，幂法也可以通过平移法近似求得相应的特征值和特征向量。因此，可以通过幂法找到近似的特征值和特征向量，再将此近似值作为初值带入牛顿法，即可求得更加精确的特征值和特征向量。

5 备注

本次实验中有三个方程是有不唯一的解的。在实验一中进行的收敛点的初值区间的判断在另外两个方程中同样可以使用，即在给定区间内随机生成1000组初始值进行迭代，对这些初值进行归类即可。