

数值试验报告

袁一杨 141110101

2016-11-19

考虑三对角矩阵

$$T_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

。矩阵阶数分别取为 $n = 100$ 和 $n = 101$ ，要求精确计算到准确特征值得小数点后第 6 位。

1 实验一

1.1 基本内容

取初始向量为 $v_0 = (1, 1, 1, \dots, 1)^\top$ ，用乘幂法计算主特征值及其相应的特征向量。请绘制主特征值误差的下降曲线，以及特征子空间距离的下降曲线。然后，请采用Atiken加速技巧和Rayleigh商技术分别对算法进行加速，并完成类似的工作。

1.1.1 乘幂法：

取任意初始向量 v_0 ，做

$$k = 1, 2, \dots \begin{cases} u_k = Av_{k-1}, \\ v_k = \frac{u_k}{m_k} \end{cases}$$

从而得到 $v_k \rightarrow \frac{x_1}{\max(x_1)}$ 为主特征值的特征向量, $m_k \rightarrow \lambda_1$ 为主特征值.

当 λ_1 , 与 λ_2 共轭时, 解方程

$$m_{k+2}m_{k+1}v_{k+1} + pm_{k+1}v_{k+1} + qv_k = 0$$

故 $\lambda_1 \simeq -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$, $v_k \rightarrow \beta_k x_1 + \bar{\beta}_k \bar{x}_1$, 解得 $x_1 = \sqrt{4q - p^2}v_k - i(pv_k + 2u_{k+1})$.

1.1.2 Atiken加速技巧:

$$\tilde{m}_k = m_k - \frac{(m_{k+1} - m_k)^2}{m_{k+2} - 2m_{k+1} + m_k}$$

1.1.3 Rayleigh商加速:

由于有

$$\frac{v_k^\top A v_k}{v_k^\top v_k} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)$$

故取 $\lambda_1 \simeq \frac{v_k^\top A v_k}{v_k^\top v_k}$

1.2 数据

1.2.1 乘幂法:

100阶迭代次数, 幂法, Atiken加速, Rayleigh商加速, 分别是57326、7689、56614次

101阶迭代次数, 幂法, Atiken加速, Rayleigh商加速, 分别是5289、1511、2934次

主特征值误差的下降曲线:

见图1、2

特征子空间的下降曲线:

见图3、4

1.2.2 Atiken加速:

主特征值误差的下降曲线:

见图5、6

特征子空间的下降曲线:

见图7、8

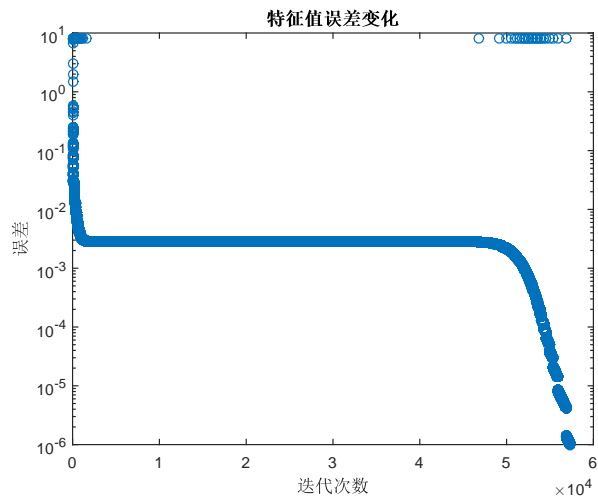


Figure 1: 100阶特征值误差下降曲线

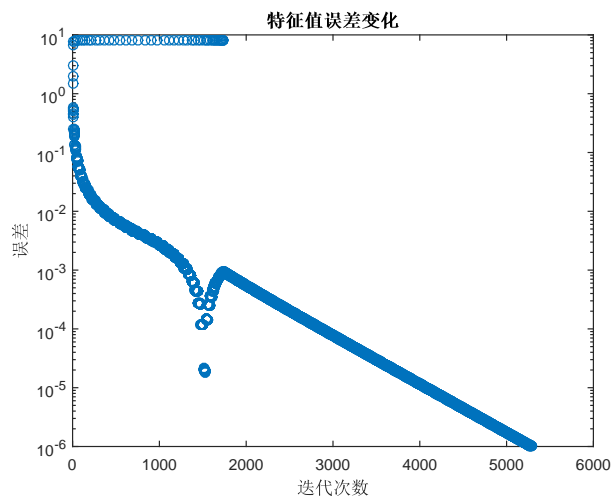


Figure 2: 101阶特征值误差下降曲线

1.2.3 Rayleigh商加速:

主特征值误差的下降曲线:

见图9、10

特征子空间的下降曲线:

见图11、12

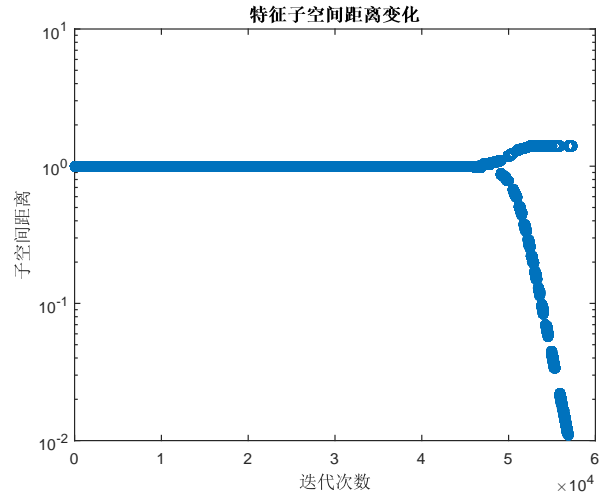


Figure 3: 100阶特征子空间距离下降曲线

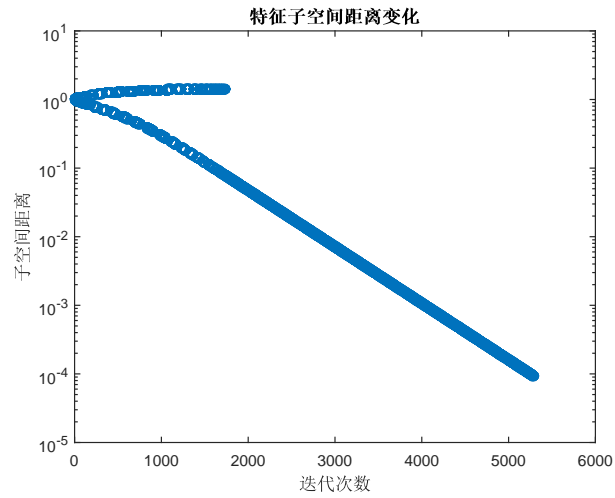


Figure 4: 101阶特征子空间距离下降曲线

1.3 结论

从运行的结果，可以得出以下一些结论：

1. 可以看出100阶和101阶的矩阵收敛的过程是大不相同的。100阶矩阵的收敛效果相比于101要差一些。

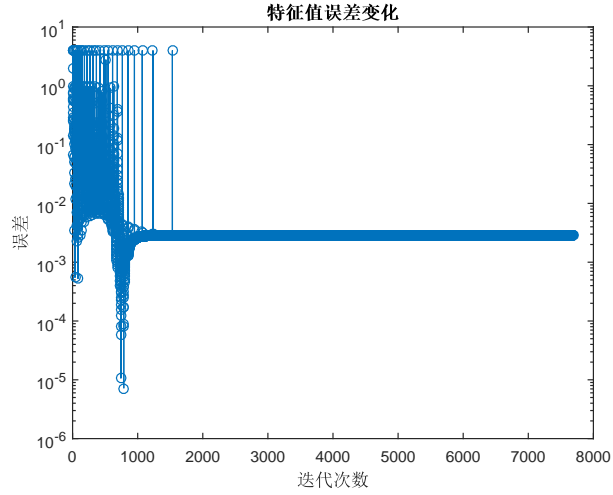


Figure 5: 100阶特征值误差下降曲线

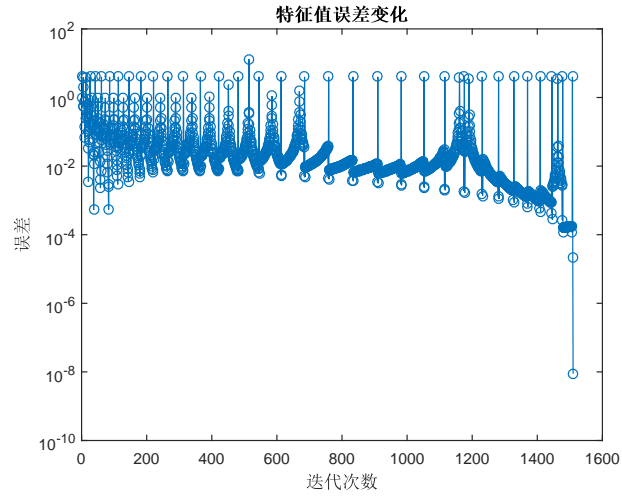


Figure 6: 101阶特征值误差下降曲线

2. 幂法中，100阶的收敛需要5万多，而101阶的只需要5千多次。从图1和图2的对比可以看出，100阶的在迭代的过程中出现了平台期，误差不再变化。此时，由图3可以观察到，特征子空间的距离起始为1，并且在一段时间内保持为一不变，也就是说初始向量在主特征空间的投影为0，也就导致了图一开始的收敛现象。之后在舍入误差的作用下，出现了平台期调

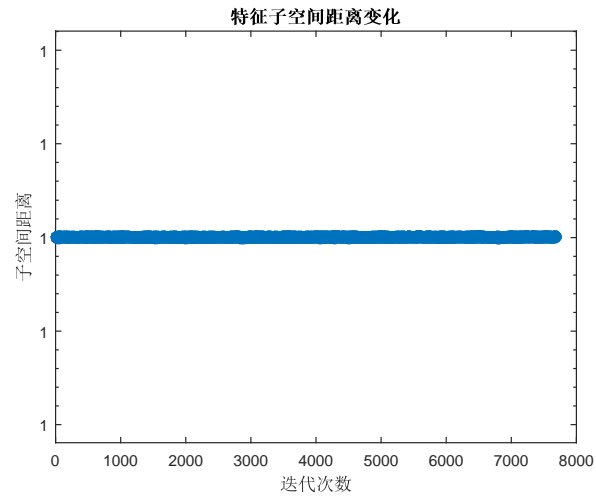


Figure 7: 100阶特征子空间距离下降曲线

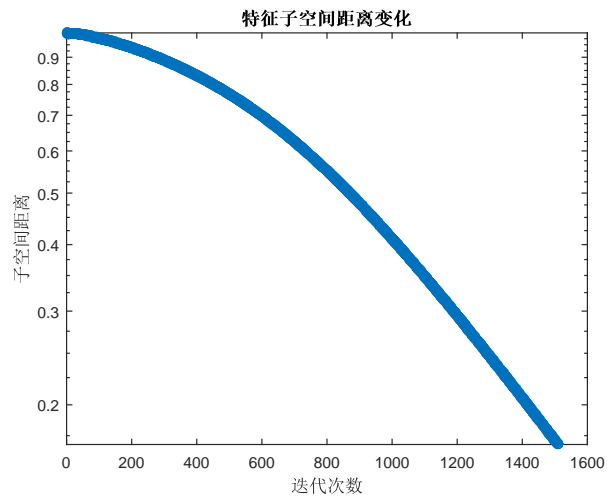


Figure 8: 101阶特征子空间距离下降曲线

整，此时舍入误差不断积累，最终当特征子空间的距离开始下降，此时再次进入收敛阶段。而对于101阶的矩阵T来说，迭代开始时，特征子空间的距离就出现一种不稳定的状态，特征值也不稳地。两种阶数的迭代过程都是在主特征值的优势产生之后，才稳定下来的。

3. Atiken加速中，对于100阶来说，尽管迭代次数明显减少，但是最终的

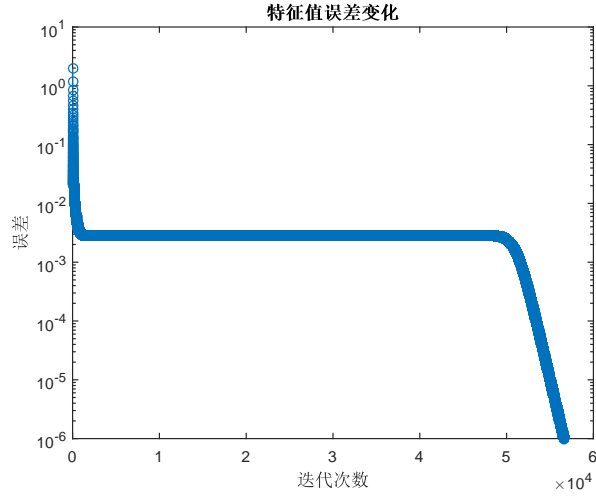


Figure 9: 100阶特征值误差下降曲线

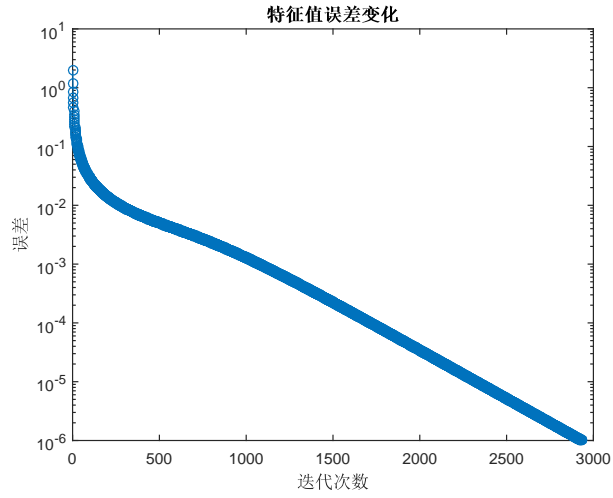


Figure 10: 101阶特征值误差下降曲线

误差也只是 10^{-3} 。观察图7可得，特征子空间的距离一直保持1不变，也就是说每次迭代过程中的 v_k 在主特征子空间的投影都为0。因此，我认为是初值的选取出现了问题。因此，在100阶下，将初始向量改为 $v = [1, 1, 0, 0, 0]$ 得到了如图17、18 的结果。尽管特征值在收敛过程中会有跳跃，但整体的收敛趋势已经十分明显。可见初始向量的选取对于收

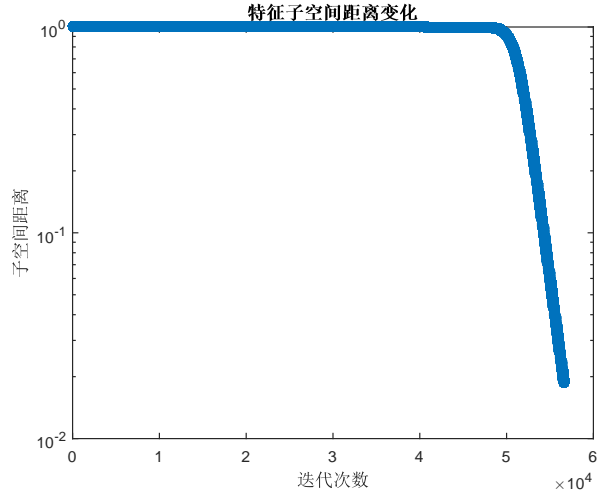


Figure 11: 100阶特征子空间距离下降曲线

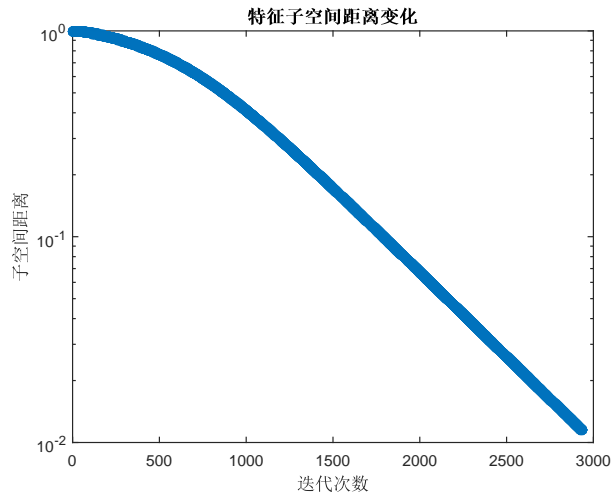


Figure 12: 101阶特征子空间距离下降曲线

敛效果是有影响的。对于101阶的来说，不以误差为停机标准，让幂法在Atiken加速下迭代更多次如图19，会发现，101阶Atiken的停机只是因为一个特征值的向下跳跃，之后误差还会维持在停机标准以上，再经过一段时间后才会出现真正的收敛现象。

4. 对于Rayleigh商加速，100阶的收敛过程和幂法时的相似，都是在特征子

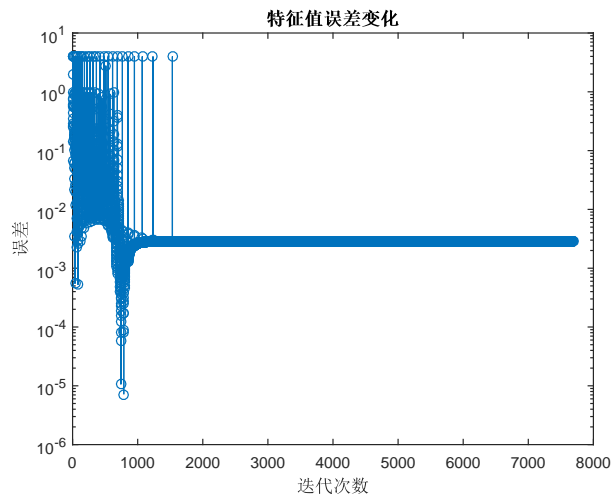


Figure 13: 100阶特征值误差下降曲线

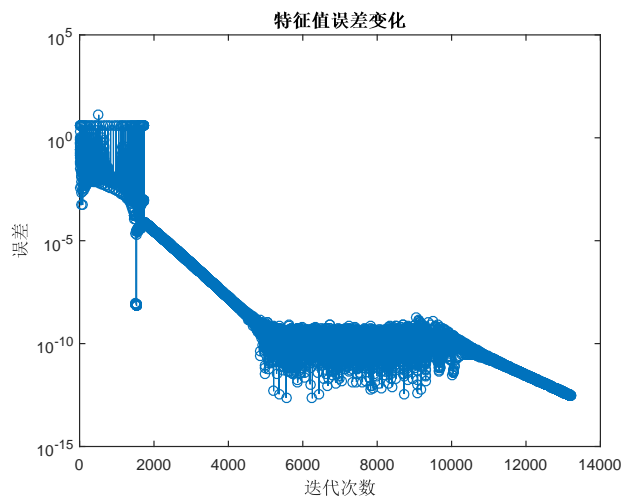


Figure 14: 101阶特征值误差下降曲线

空间的距离不再等于1时，出现了收敛现象。101阶的Rayleigh商加速得到了比较好的效果。这也是初始向量选取带来的结果。

5. 通过对101阶的观察，可以看出，Atiken和Rayleigh商都对幂法起到了加速的作用。

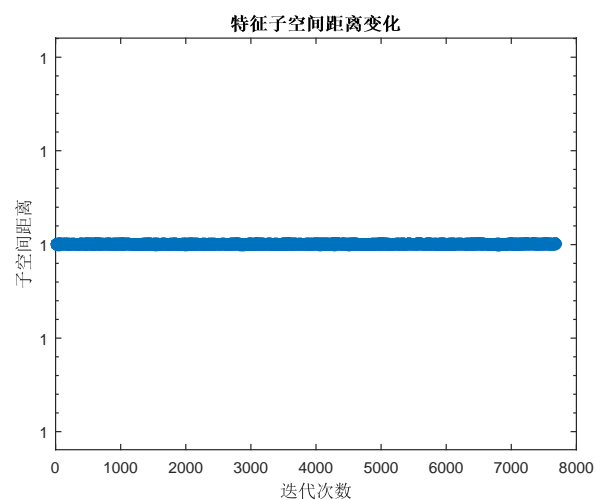


Figure 15: 100阶特征子空间距离下降曲线

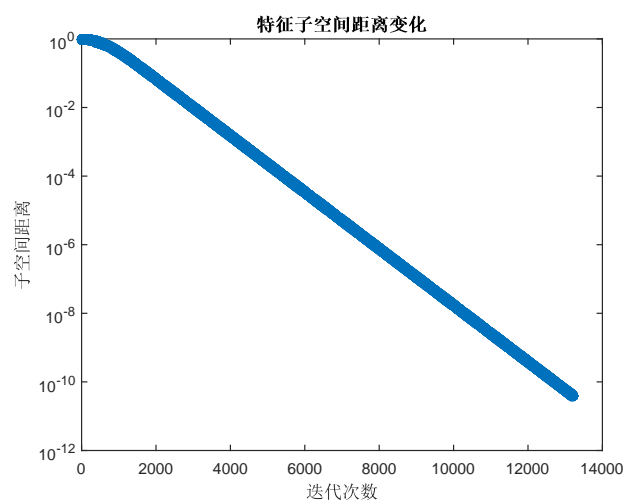


Figure 16: 101阶特征子空间距离下降曲线

2 实验二

2.1 基本内容

用反幂法求解最靠近2的特征值，及其对应的特征向量。观察是否有“一次迭代”的特性。

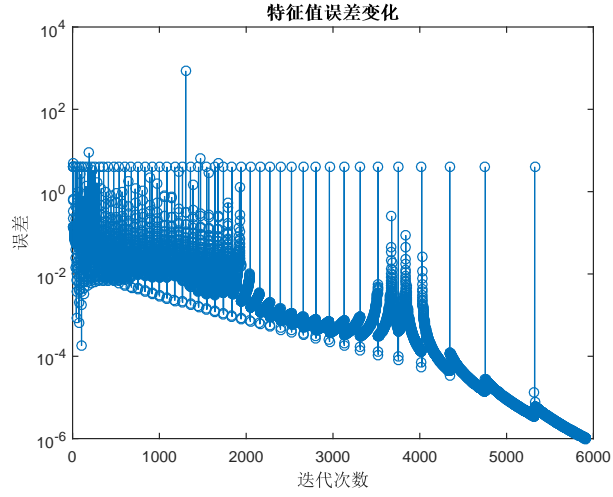


Figure 17: 100阶特征值误差下降曲线

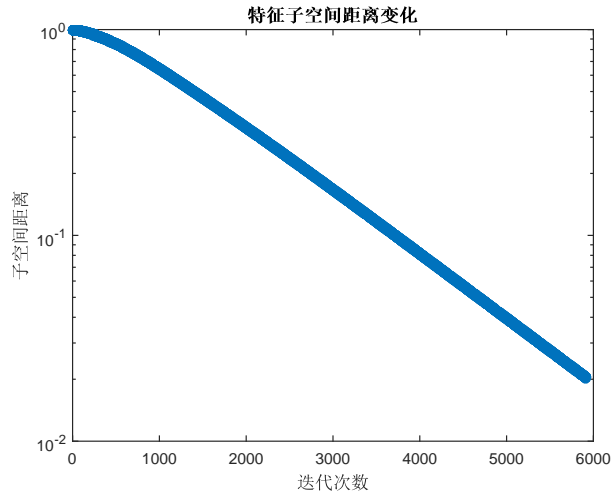


Figure 18: 100阶特征子空间距离下降曲线

2.1.1 反幂法:

$$k = 1, 2, \dots, (A - qI)u_k = v_{k-1}$$

$$v_k = \frac{u_k}{m_k}$$

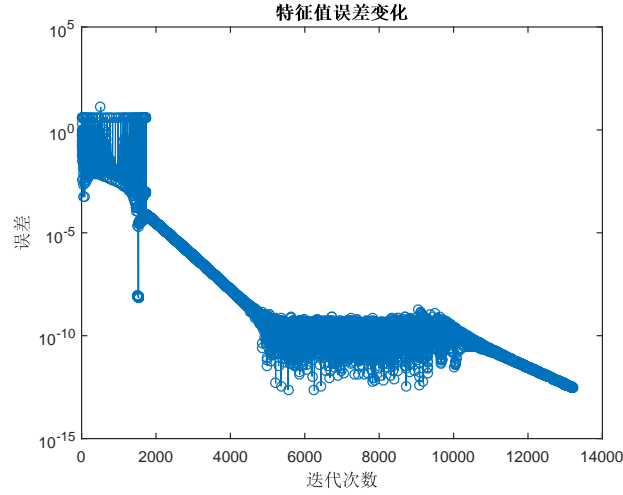


Figure 19: 101阶特征值误差下降曲线

其中 $m_k = \max(u_k)$ 。则不断地迭代过后， $m_k \rightarrow \frac{1}{\lambda_p - q}$ ， $v_k \rightarrow \frac{x_p}{\max(x_p)}$ 即 $q + \frac{1}{m_k} \rightarrow \lambda_p$

2.2 数据

1. $n = 100$ 时，收敛到离2最近的特征值 2.03171636371234
2. $n = 101$ 时，收敛到离2最近的特征值 1.99997999740010

见图20、21、22、23

2.3 结论

1. 在做T的反幂法时，由于T的主对角线元素全部为2，顾 $T - 2I$ 无法进行LU分解，因此可以对 $T - 2I$ 做一个小扰动，即取 $\varepsilon = 0.001$ ，对 $T - 2I + \varepsilon I$ 做反幂法。从结果可以看出，反幂法依然非常好的求出了接近于2的特征值。说明扰动项并没有影响矩阵的特征值。
2. 从20、21、22、23可以看出，在经过了前两次迭代后，特征值、误差基本上不再变化，误差停在 10^{-4} 量级体现了反幂法“一步迭代”的特点。

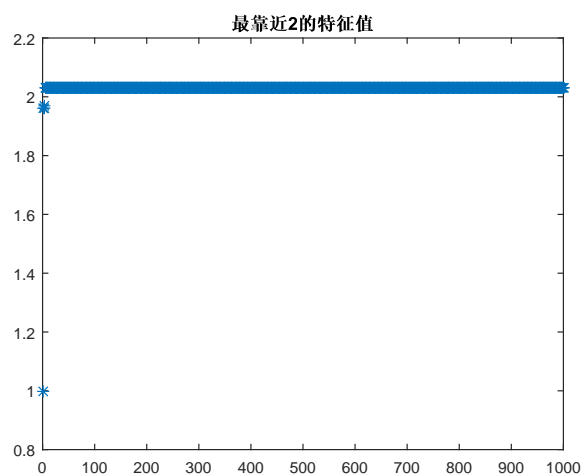


Figure 20: 100阶反幂法接近于2的特征值

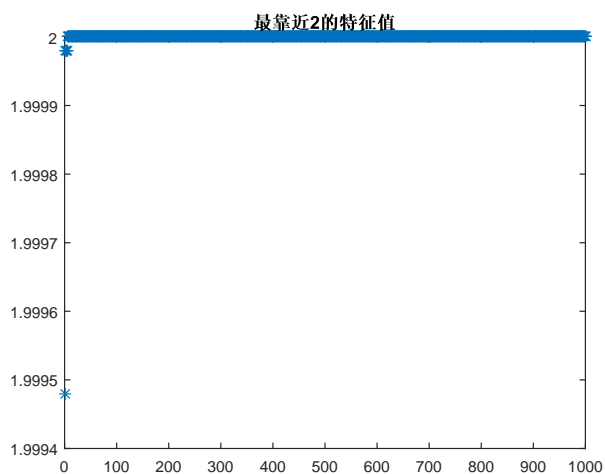


Figure 21: 101阶反幂法接近于2的特征值

3 实验三

3.1 基本内容

用幂法求解第二主特征值及其特征向量；用同时迭代方法求解 T_n 的两个主特征值。比较两者的计算效果。

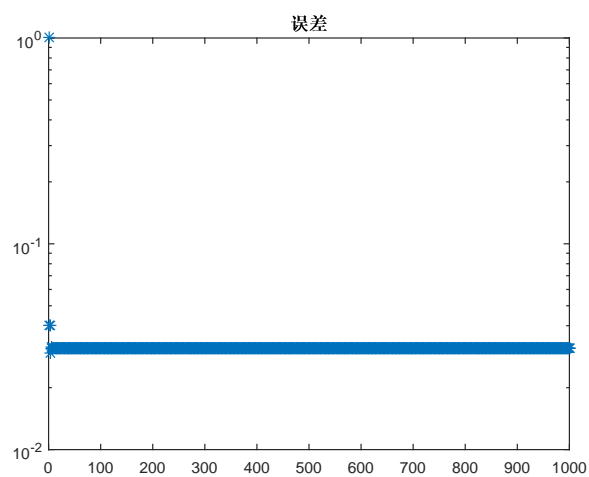


Figure 22: 100阶反幂法误差变化

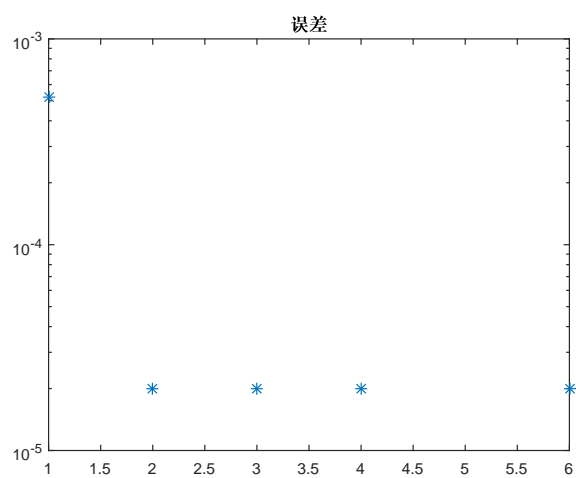


Figure 23: 101阶反幂法误差变化

3.1.1 幂法:

已知 λ_1 和 x_1 , 用Wiedlant法求解第二主特征值, 考虑

$$\tilde{A} = A - \lambda_1 x_1 x_1^T$$

若 A 是对称的, 则可以使得特征向量系 $\{x_j\}_{j=1}^n$ 直交, 因而有

$$\begin{aligned}\tilde{A}x_1 &= Ax_1 - \lambda_1 x_1 x_1^H x_1 = 0 \\ \tilde{A}x_j &= Ax_j - \lambda_1 x_1 x_1^H x_j = \lambda_j x_j \quad j \geq 2\end{aligned}$$

即是, $\lambda_1 = 0$, 其余特征值保持不变。因而对 \tilde{A} 执行幂法即可。

3.1.2 同时迭代法:

步骤如下:

1. 给定初始列直交阵 V_0 , $V_0 \in R^{n \times m}$
2. 利用同时迭代法循环 $U_k = AV_{k-1}$
 $B_k = V_{k-1}^T AV_{k-1} \in R^{m \times m}$
3. 计算 B_k 的特征信息 $|\mu_1^k| \geq |\mu_2^k| \geq \dots \geq |\mu_m^k|$
 $W_k = [W_1^k, W_2^k, \dots, W_m^k]$
4. 恢复到大矩阵上去 $U_k W_j = AV_{k-1} W_k$
5. 直交化 $U_k W_k = V_k R_k$ (V_k 列直交, R_k 上三角形)
6. 判断 $|\mu_j^k - \mu_j^{k-1}|_{j=1:m} < TOL$

3.2 数据及分析

3.2.1 幂法:

100阶:7655次, 101阶:6567次。

误差变化见图24、25

3.2.2 同时迭代法:

100阶次, 101阶次。

误差变化见图26、27

3.3 结论

1. 由24、25, 可以看出, 不管是100阶还是101阶, 幂法的收敛效果都很好, 因为是在标准的主特征值的情况下进行计算的。
2. 由26、27, 可以看出, 同时迭代法在起始阶段收敛得很快, 整体的收敛速度和幂法相近, 但是其不受主特征值计算的影响。。
3. 幂法的误差下降时是连续的, 而同时迭代法有一个断点, 具体原因未知。

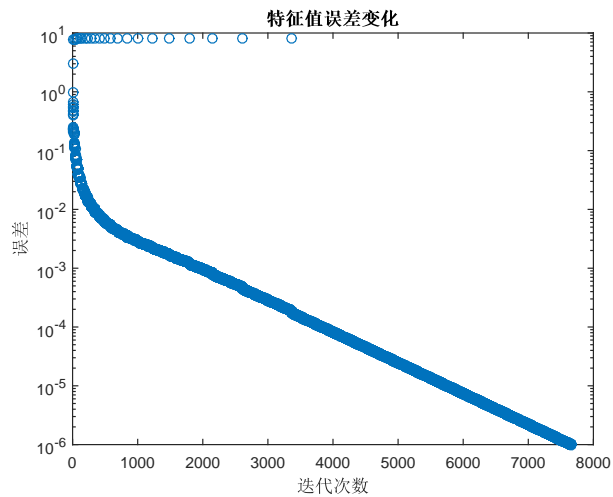


Figure 24: 100阶幂法第二主特征值误差下降曲线

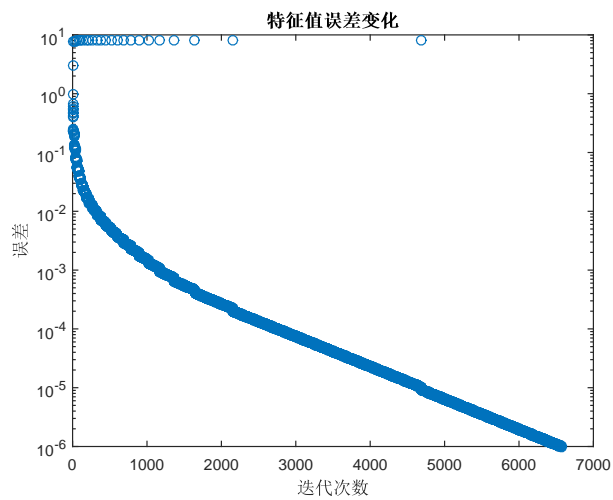


Figure 25: 101阶幂法第二主阶特征值误差下降曲线

4 实验四

4.1 基本内容

分别用古典Jacobi方法、循环Jacobi和阈值Jacobi方法求解 T_n 的全部特征值；绘制相应的收敛过程。

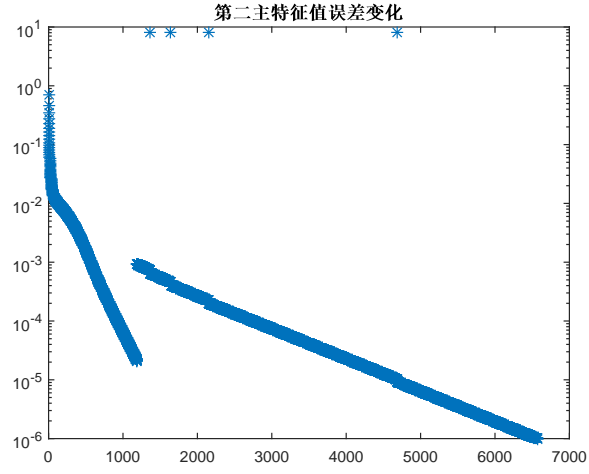


Figure 26: 100阶同时迭代法第二主特征值误差下降曲线

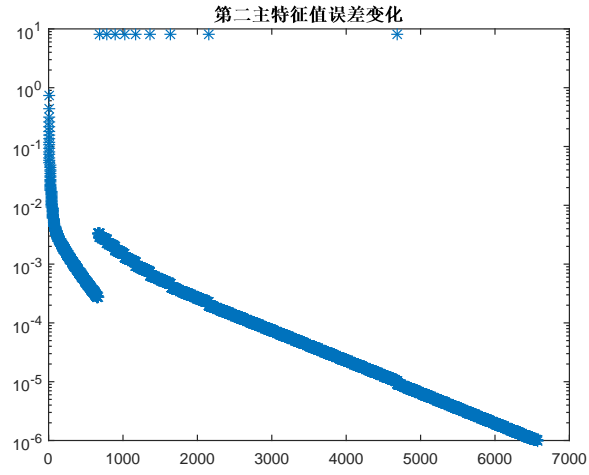


Figure 27: 101阶同时迭代法第二主阶特征值误差下降曲线

4.1.1 古典Jacobi:

1、选主元，记其为 $a_{pq}^{(k)}$ ，满足 $|a_{pq}^{(k)}| < \max_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|$ 。其中， $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{i=1:n}^{j=1:n}$ ， $A^{(0)} = A$ 。

2、构造旋转矩阵 $G(p, q)$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}} \\
 \text{if } b == 0, c &= \frac{\sqrt{2}}{2}, s = \text{sgn}(a_{pq}c) \\
 \text{if } b >> 1, t &= \frac{1}{2b} \text{ or } \text{else } t = \frac{1}{b + \text{sgn}(b)\sqrt{b^2 + 1}} \\
 c &= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, s = tc \\
 G(p, q) &= \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3、进行Jacobi旋转: $A^{(k+1)} = G(p, q)A^{(k)}G(p, q)^\top$

4、终止准则: $|a_{pq}^{(k)}| < \varepsilon \sqrt{a_{pp}a_{qq}}$, 其中 $\varepsilon = 10^{-6} \sim 10^{-8}$ 。

4.1.2 循环Jacobi:

依次扫描所有非对角线元素, 对每一个元素都做一次Jacobi旋转。停机标准选为 $\max(A - \lambda I) < TOL$ 。

4.1.3 阈值Jacobi:

在每一轮扫描的过程中, 给定一个控制量 σ , 若 (p, q) 元素的绝对值小于 σ , 就跳过这一步的扫描。控制量的选取方法如下:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{1}{n} \|E\|_F \\
 \sigma_m &= \frac{\sigma_{m-1}}{n}
 \end{aligned}$$

停机标准选为 $\max(A - \lambda I) < TOL$ 。

4.2 数据

4.2.1 古典Jacobi:

100阶14356次, 101阶14668次见图28、29

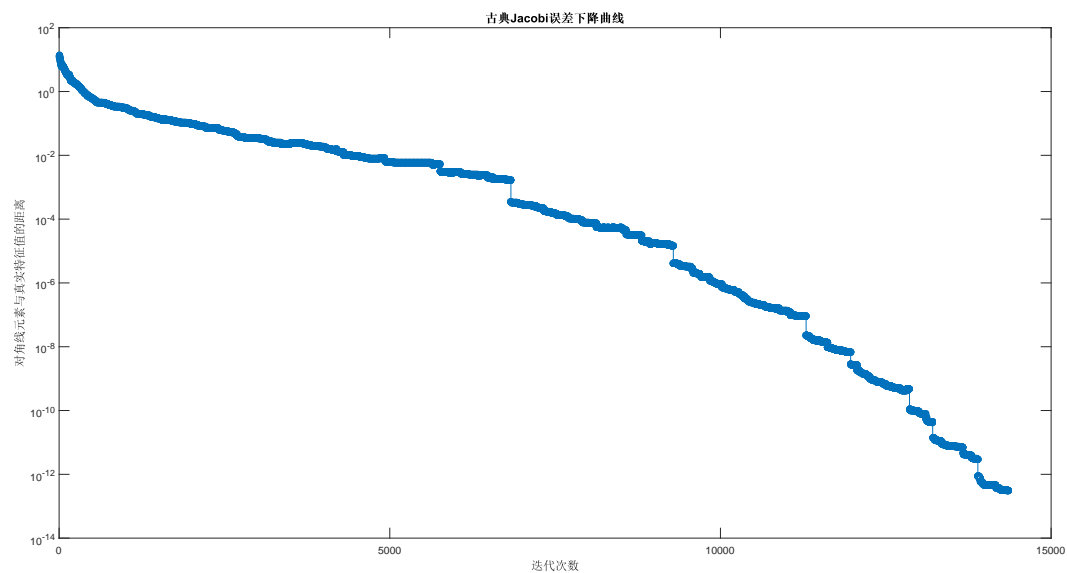


Figure 28: 经典Jacobi法100阶特征值误差下降曲线

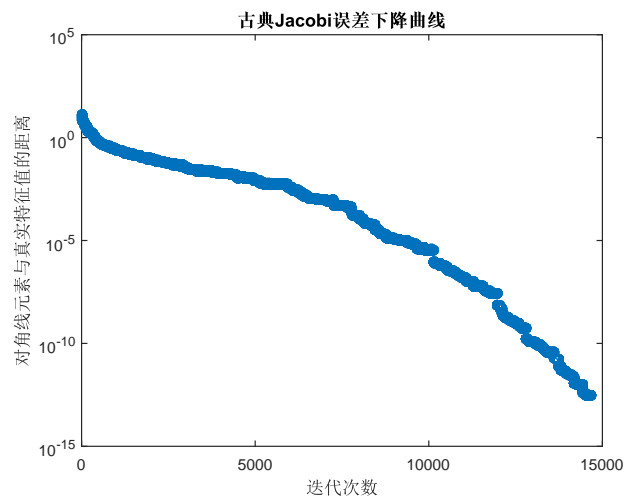


Figure 29: 经典Jacobi法101阶特征值误差下降曲线

4.2.2 循环Jacobi:

100阶10轮, 101阶10轮这里的误差记录的是每一轮循环之后的误差。见
图30、31

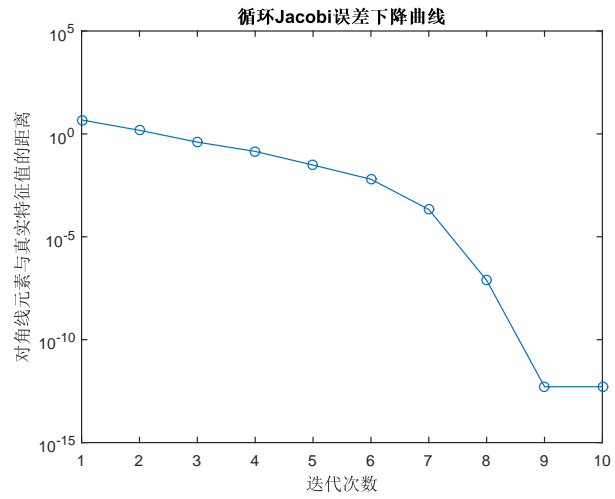


Figure 30: 循环Jacobi法100阶特征值误差下降曲线

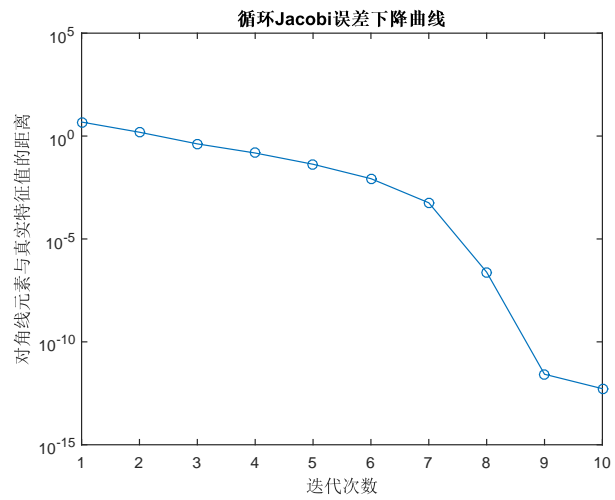


Figure 31: 循环Jacobi法101阶特征值误差下降曲线

4.2.3 阈值Jacobi:

100阶9轮, 101阶9轮这里的误差记录的是每一轮循环之后的误差。见图32、33

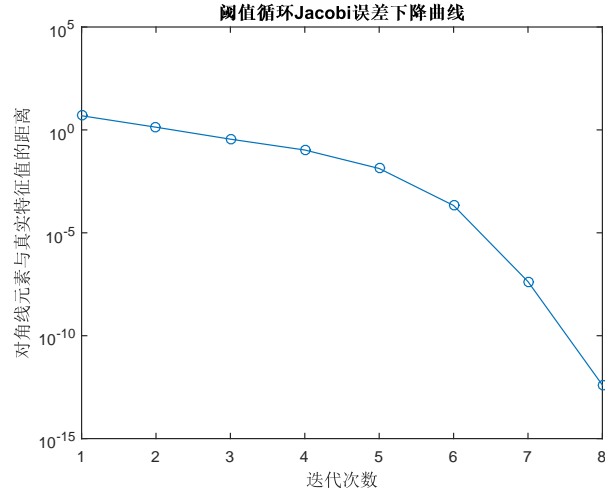


Figure 32: 阈值Jacobi法100阶特征值误差下降曲线

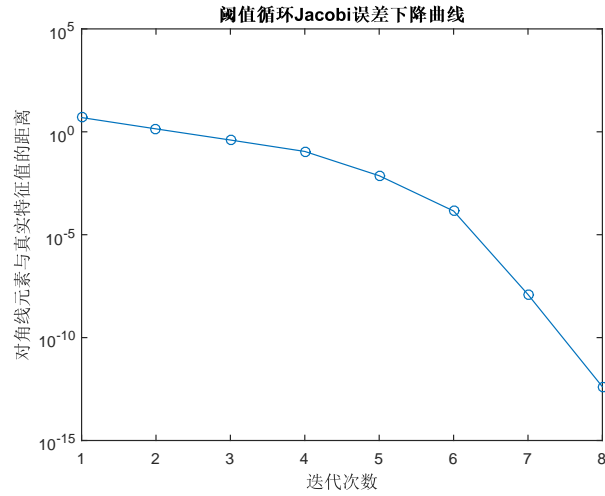


Figure 33: 阈值Jacobi法101阶特征值误差下降曲线

4.3 结论

1. 由28、30、32可以看出，矩阵的对角线是逐渐趋于特征值向量的。
2. 以100阶时的古典Jacobi为例，通过34、36可以看出，矩阵对角线的第一个和最后一个值都是逐渐趋于一个定值，没有跳动。这说明，对于矩

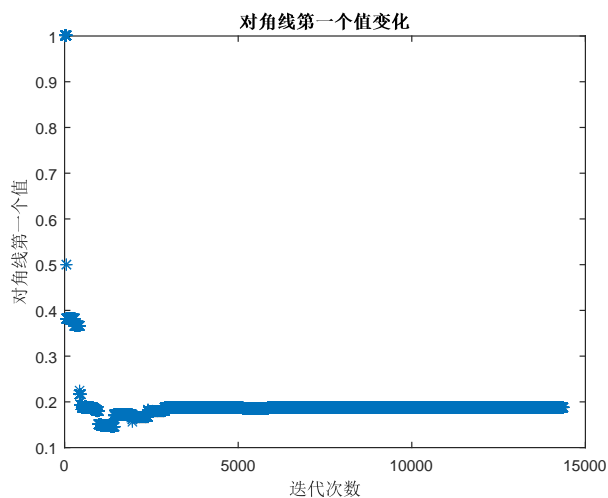


Figure 34: 古典Jacobi法100阶对角线第一个元素变化曲线

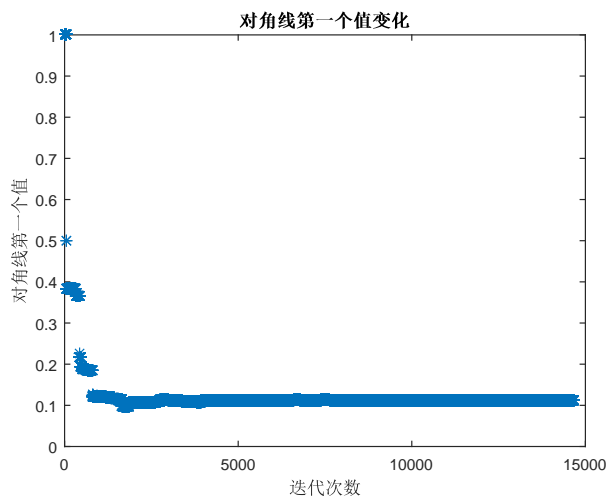


Figure 35: 古典Jacobi法101阶对角线第一个元素变化曲线

阵T的收敛是本质的。其他情况也可以从图中看出，皆为本质收敛。

3. 在我的试验中，阈值Jacobi和经典Jacobi相比，并没有明显加快的收敛速度。这也许和停机标准有关，对于阈值Jacobi和经典Jacobi我都采用了相同的停机标准，对于这两中相差很多的算法，这样显然是不合理的，可能会导致本已经收敛的矩阵依然在做阈值Jacobi迭代。但若采用矩阵除去对

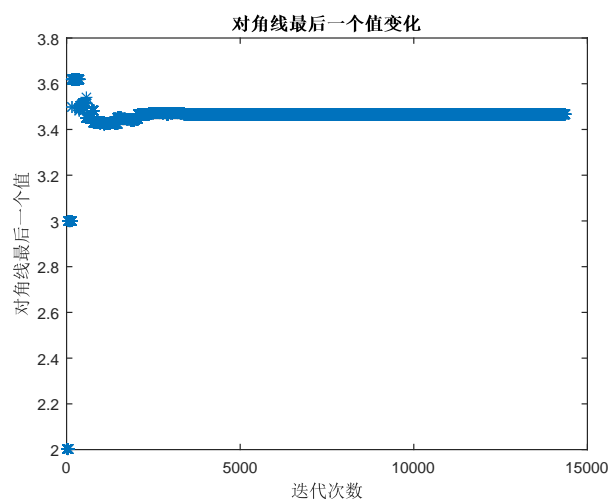


Figure 36: 古典Jacobi法100阶对角线最后一个元素变化曲线

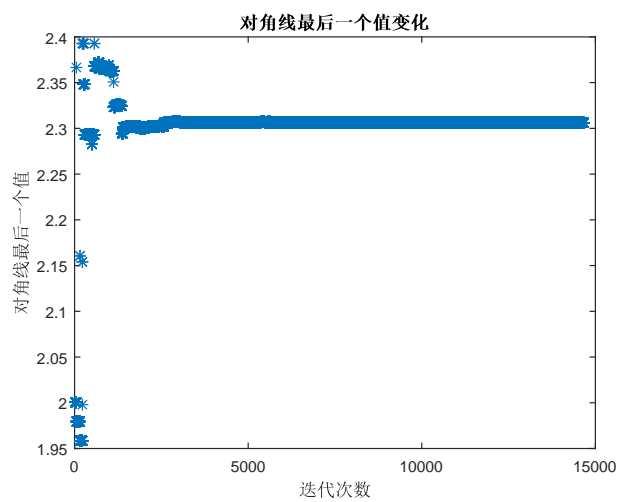


Figure 37: 古典Jacobi法101阶对角线最后一个元素变化曲线

角线元素的FRo范数，将会大大增加运行时间。至此我还未想出好的停机标准。

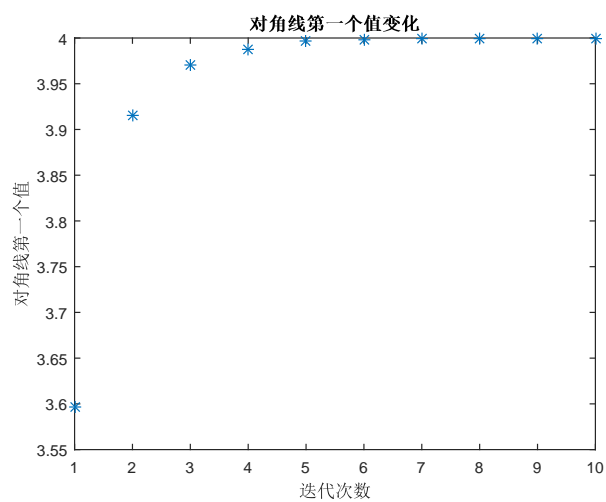


Figure 38: 循环Jacobi法100阶对角线第一个元素变化曲线

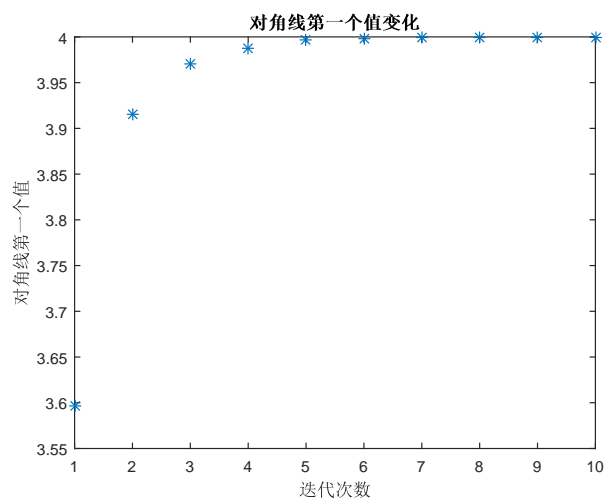


Figure 39: 循环Jacobi法101阶对角线第一个元素变化曲线

5 实验五

5.1 基本内容

用二分法和加原点位移反幂法求解在 $(1, 2)$ 间的特征值。

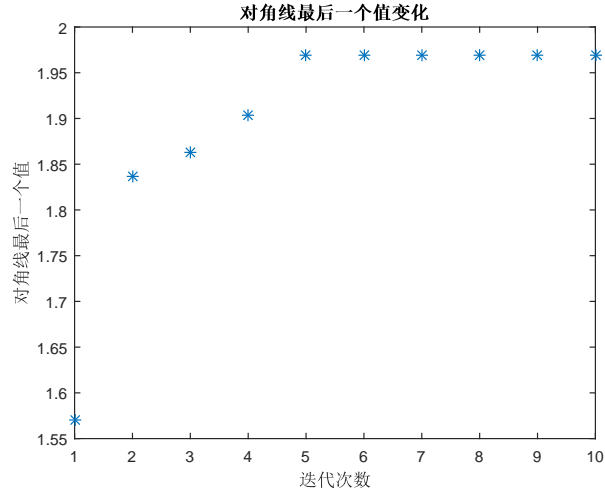


Figure 40: 循环Jacobi法100阶对角线最后一个元素变化曲线

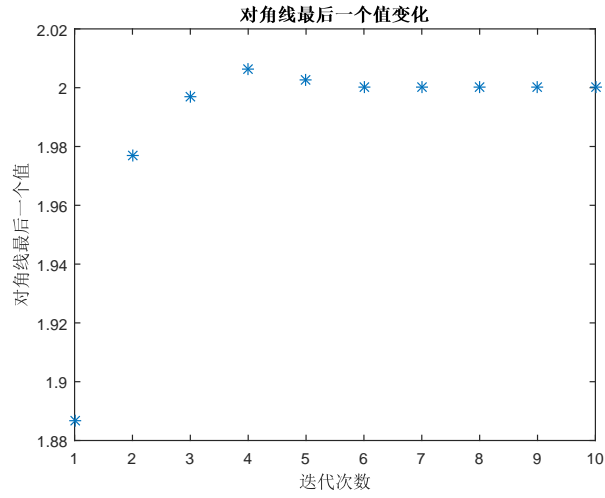


Figure 41: 循环Jacobi法101阶对角线最后一个元素变化曲线

5.1.1 Sturn方法

对对称三对角矩阵 T_n 的前 k 间主阵 T_k 定义 $P_k(\lambda) = \det[T_k - \lambda I]$, $k = 1 : n$, 则 $P_n(\lambda)$ 满足递推公式

$$P_k(\lambda) = (a_k - \lambda)P_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}^2 P_{k-2}(\lambda)$$

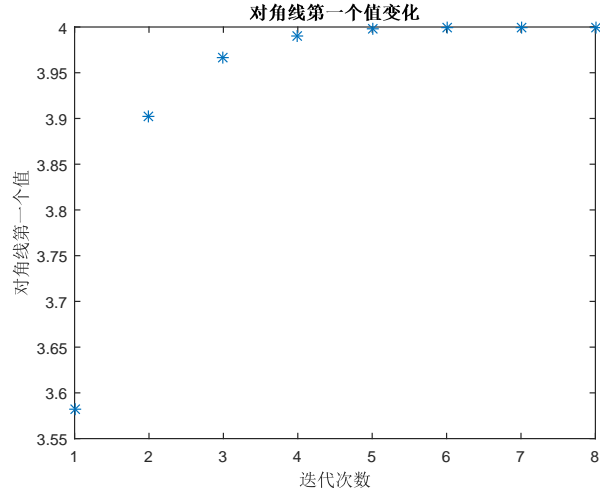


Figure 42: 阈值Jacobi法100阶对角线第一个元素变化曲线

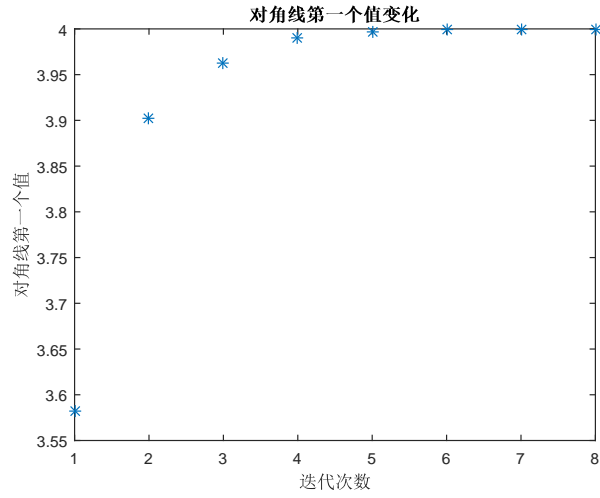


Figure 43: 阈值Jacobi法101阶对角线第一个元素变化曲线

对任意常数 c ，对于Strun序列 $\{P_k(c)\}_{k=0}^n$ ，相邻符号相同的次数记为 $S_n(c)$ ，则 $P_n(\lambda)$ 在 $(c, +\infty)$ 内的根的个数即为 $S_n(c)$ ，即利用递推关系式即可方便地求得对于某一个常数 c ，其右侧特征根的个数。

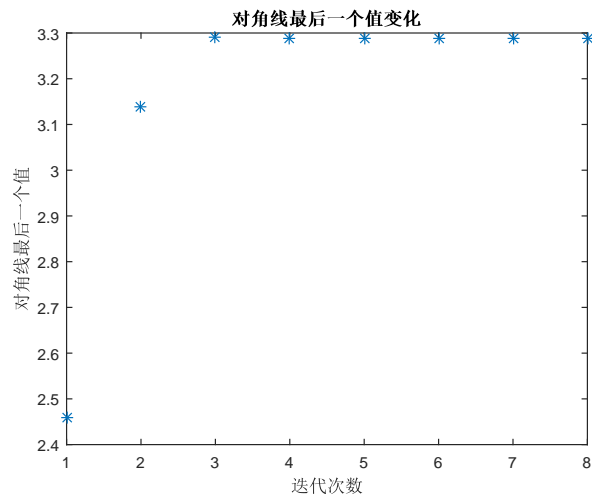


Figure 44: 阈值Jacobi法100阶对角线最后一个元素变化曲线

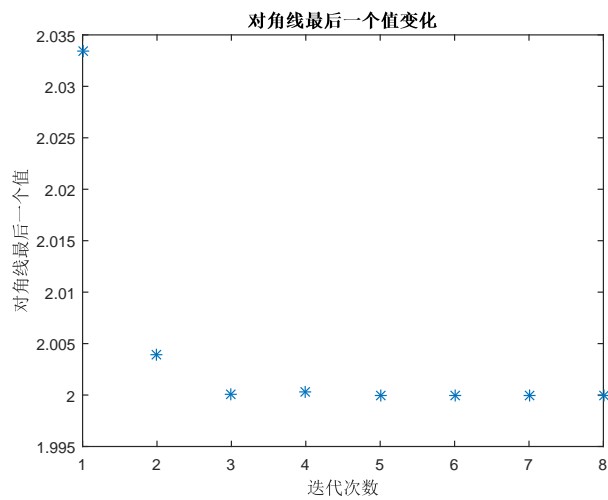


Figure 45: 阈值Jacobi法101阶对角线最后一个元素变化曲线

5.1.2 二分法

由Strun序列知，若给定两点 c , d ，其 S_n 值相差恰为 1 时，这两点间恰有一个特征值，因而可以利用二分法缩短特征值所在区间的范围。

5.2 数据

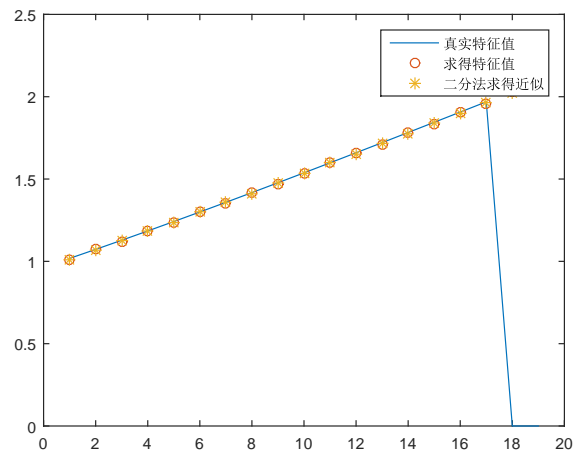


Figure 46: 100阶时特征近似值与真实值的比较

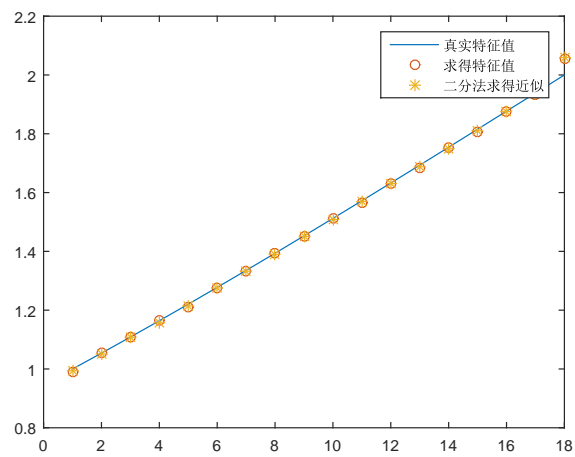


Figure 47: 101阶时特征近似值与真实值的比较

求得特征值比较见图47、46

5.3 结论

不论是100阶还是101阶，由47、46，通过二分法求得特征值已经很接近真实值了，再经过原点位移反幂法，可以看到此时的特征值几乎和真实值完全重合。

6 实验六

6.1 基本内容

用对称隐式QR方法求解全部特征值。

6.1.1 对称隐式QR方法：

利用wilkinson位移策略和“驱逐出境”策略在迭代过程中对A进行正交化。

- 1、计算Wilkinson位移 μ ；令 $x = T(1, 1) - \mu, y = T(2, 1)$ ；
- 2、For $k=1:n-1$, Do
- 3、计算 $[c, s] = GIVENS(x, y)$ ，将列向量 $(x, y)^T$ 中的y旋转消灭；相应的旋转阵记为 $G(k, k+1)$ ；
- 4、计算 $T = G(k, k+1)TG(k, k+1)^T$ ；
- 5、若 $k < n-1$ ，令 $x = T(k+1, k), y = T(k+2, k)$
- 6、Enddo

对A进行如上的迭代，迭代结束标准为 $|a_{n,n-1}^{(k)}| < \varepsilon(|a_{n,n}^{(k)}| + |a_{n-1,n-1}^{(k)}|)$ 。迭代结束后，矩阵的最后一行非对角线元素为零，对角线元素为某个特征值，取其n-1阶的主子式继续进行如上的迭代，知道n个特征值全部求出。

6.2 数据

（由于特征向量阶数较大，就不再展示，收敛效果通过误差来体现）

阶数	误差	迭代次数
100	$1.043196243882171e-09$	376
101	$4.799453915592099e-09$	8536

6.3 结论

1. 在误差相近的情况下，100阶的迭代次数明显小于101阶的，推测和矩阵的结构以及舍入误差有关系。
2. 与Jacobi比较，QR方法使用与更广泛的矩阵，当矩阵为实对称时，比较两者的误差和迭代次数，QR收敛的更快。因为在QR算法中，充分利用了T矩阵的三对角特性。

7 实验七

7.1 基本内容

阈值Jacobi方法具有求解小特征值的优势。考虑对称正定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 10^{40} & 10^{29} & 10^{19} \\ 10^{29} & 10^{20} & 10^9 \\ 10^{19} & 10^9 & 1 \end{bmatrix}$$

直接计算可知其特征值为 10^{40} ， 9.9×10^{19} ， 9.81818×10^{-1} 。请用阈值Jacobi方法求解三个特征值。在Matlab中，我们可以利用eig（）计算矩阵的特征值。请比较它们的数值结果。

7.2 数据

方法	最接近最小特征值的值	误差
阈值Jacobi	0.981818181818182	$1.81818181e - 07$
eig函数	0.990004199983373	$8.2e - 03$

对角线最小值的变化如图48

7.3 结论

1. 由图48可以看出，对角线上的最小值时稳定地收敛于最小的标准特征值得。这也说明了，迭代的收敛不是偶然，是一个收敛的过程。
2. 从表中可以很清楚地看到，阈值Jacobi法比Matlab自带的函数求得的小特征值更准确。而matlab 的内嵌函数eig()除最大的特征值吻合得较好外，其他的两个特征值都有较大偏差。

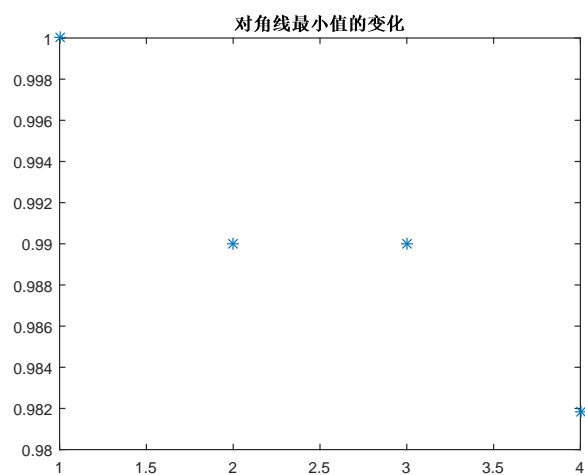


Figure 48: 对角线最小值变化

3. 由于阈值的存在，矩阵A中的小的值在其他元素较大时可以保持不变，这也就保证了在求小特征值时的稳定性。有A的低阶性质可以推出，eig采用的是对称QR分解的算法，又有A的各元素阶数相差较大，会导致在分解的过程中损失有效位数。这也就是为什么在计算A矩阵的小特征值时，阈值Jacobi的优势更加明显。