

# 数值试验报告

袁一杨 141110101

2016-12-16

## 1 实验一

### 1.1 基本内容

ODE:

$$\begin{cases} u' = 1 - \frac{2tu}{1+t^2} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

采用Euler折线法、梯形法、RK3、RK4、三步三阶Adams方法求解。

要求:

1. 绘制误差下降曲线
2. 确定每个方法的“数值阶”

#### 1.1.1 Euler折线法:

在区间  $[a, b]$  中, 令  $h = (b - a)/N$ ,  $N$  是一个整数

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$y_0 = \eta$$

由上式, 从  $y_0 = \eta$  出发, 可依次计算出  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , 它们分别为初值问题

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

的解  $y(t)$  在  $t_1, t_2, \dots, t_N$  的值  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$  的近似值，其中  $t_0 = a, t_n = a + nh, n = 1, 2, \dots, N$

### 1.1.2 梯形法：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

由于左端含有所求值，故运用迭代法来计算  $y_{n+1}$ 。在应用迭代法时，需要取  $y_{n+1}$  的初始近似值  $y_{n+1}^{(0)}$  方法如下：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(0)} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(1)} &= y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] \end{aligned}$$

### 1.1.3 RK3：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}(2K_1 + 3K_2 + 4k_3), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n) \\ K_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 &= f(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hK_2) \\ y_0 &= \eta \end{aligned}$$

### 1.1.4 RK4：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2k_3 + K_4), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n) \\ K_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 &= f(t_n + h, y_n + hK_3) \\ y_0 &= \eta \end{aligned}$$

### 1.1.5 三步三阶Adams方法:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中

$$\begin{aligned} y_0 &= \eta \\ f_m &= f(t_m, y_m) \end{aligned}$$

$y_1, y_2$ 由其他方法算得。

## 1.2 数据

不妨取  $t \in [0, 1]$

通过几次实验可以发现, 由于图像的重叠程度较高, 因此为了观察出明显差异, 采取以问题的真实解作为参照, 对于每种方法, 作出两幅图像, 一幅是绘制方法的结果曲线与真实的解曲线, 如图1; 为了更精确地显示出肉眼无法判断的额误差值, 将五种方法的误差曲线图画在一起, 如图2。

### 数值阶

取6个不同的步长, 分别是  $0.1, 0.01, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6$ 。考虑到舍入误差对整体离散误差的影响, 去  $\max(|e_k|)$ 。故误差和步长满足如下关系:

$$\ln \max(|e_k|) = \alpha \ln h + c$$

。其中  $\alpha$ 即为数值阶。因此采用线性最小二乘拟合的方式, 拟合直线的斜率即为数值阶。

可能是舍入误差的存在, 使得误差不能一直随着步长h的减小而减小。由原图可以看出, 但是随着h的值越来越小(量级意义上), 算法的在部分点的误差反而在增大, 这种现象对于收敛阶数较高的算法比如RK3, RK4尤为明显。因此, 对于高阶的算法, 选取线性性质较好的点进行拟合, 过程由图6、7、8可得。

方法	数值阶(求得)	标准	图例
Euler	1.0021	1	图4
梯形法	1.9943	2	图5
RK3	2.9643	3	图6
RK4	3.9873	4	图7
Adams	2.9185	3	图8

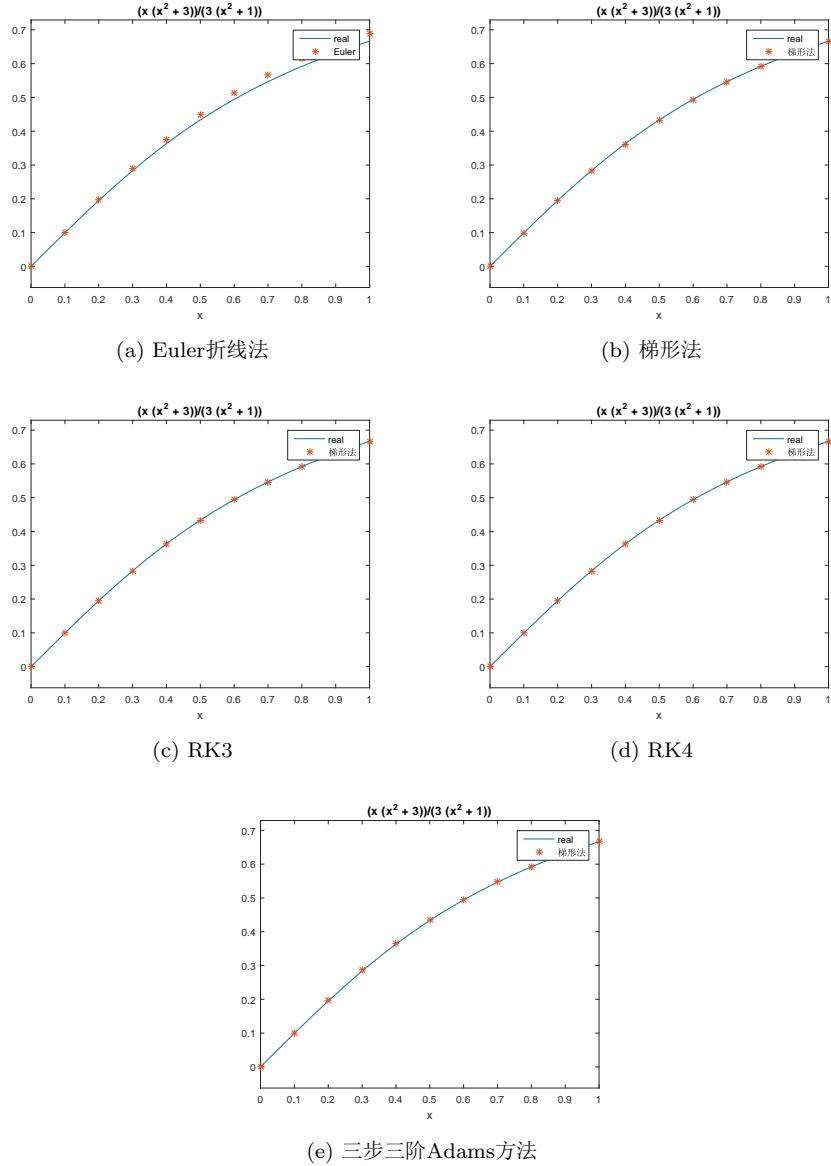


Figure 1: 五种方法求得近似值与真实值的比较[0,1]

### 1.3 结论

从运行的结果，可以得出以下一些结论：

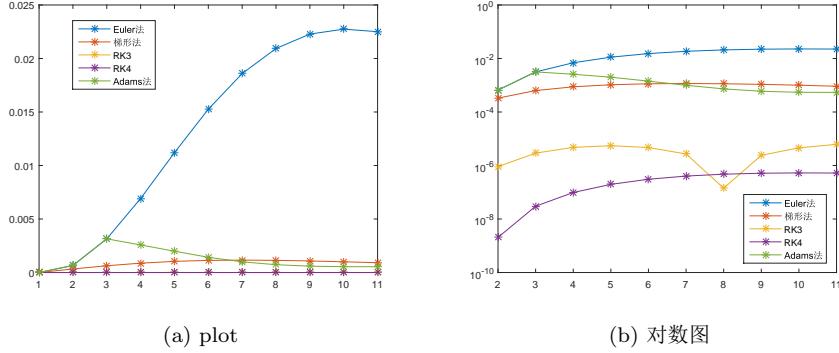


Figure 2: 五种方法误差变化曲线( $h=0.1$ ), $[0,1]$

- 从图1可以看出，除了Euler折线法在尾部与真实值有一定的分离，其他方法的近似效果都是很好的，肉眼无法区别。更加精准的误差比较看图2。可以很清楚地看到，五种方法的误差从大到小依次是：Euler、Adams和梯形法误差差别不大、RK3、RK4。与求得的数值阶进行比较，发现误差和数值阶有一定的线性关系。
- 图3对每一种方法在不同步长下的误差表现进行了展示。理论上，误差的最大值往往在差分区间的一个端点处达到。但在实验当中，误差先增大后减小，最后趋于稳定。猜测是由于机器舍入误差的积累对计算产生了积极的影响，使得偏离的近似值又回到真实值附近。
- 将图3中三步三阶Adams方法的误差变化曲线与其他四种比较，发现其浮动范围小，相对比较平缓、稳定。这也体现了Adams方法的强稳定性。
- 通过表格中的对比，求得的数值阶和相应数值方法的整体误差的阶数是接近的。
- 在求数值阶的几幅图中，可以发现，并不是步长越小，误差越小。对于数值阶较高的方法：RK3、RK4、Adams 这三种方法中，误差在步长 $h$ 达到某一个值时开始反弹。猜测是因为阶数较高，过小的步长可能会引起较大的舍入误差。故对于数值阶数较高的算法，取合适的步长即可。

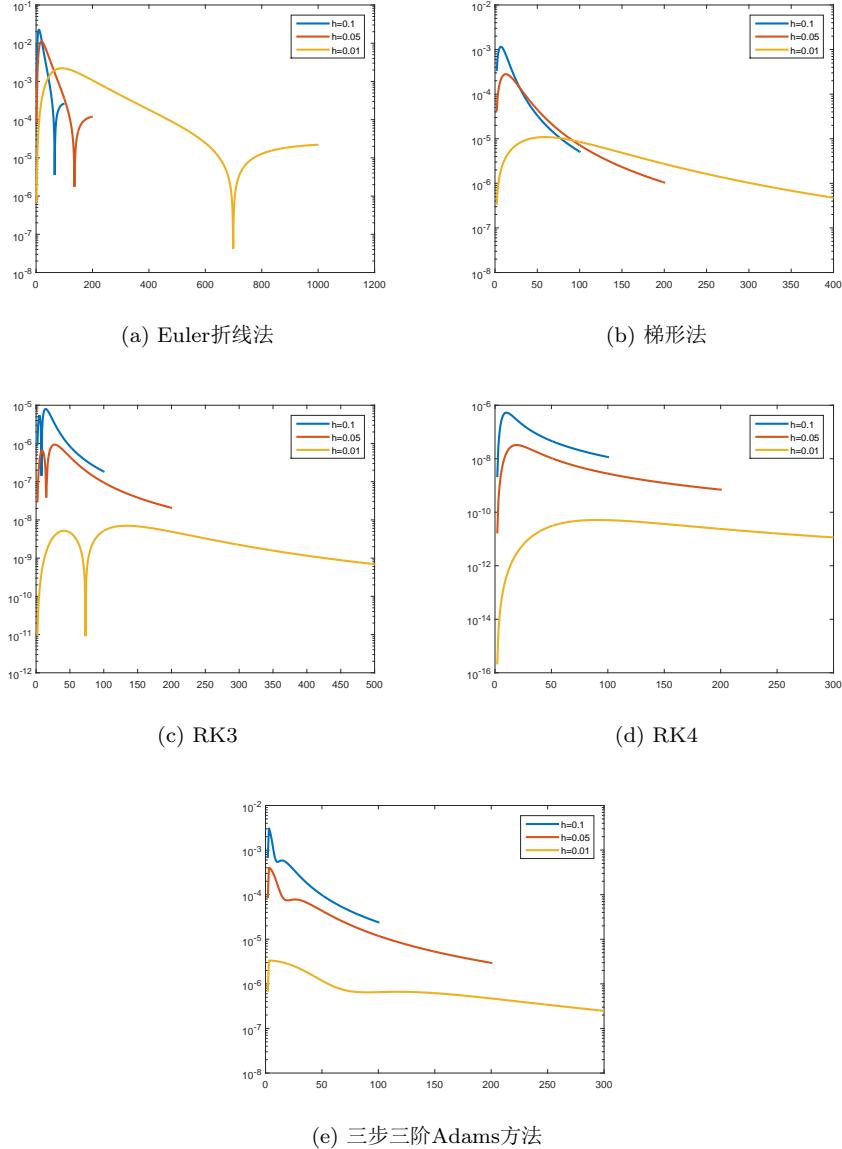


Figure 3: 五种方法取不同的步长误差比较[0,10]

## 2 实验二

### 2.1 基本内容

ODE:

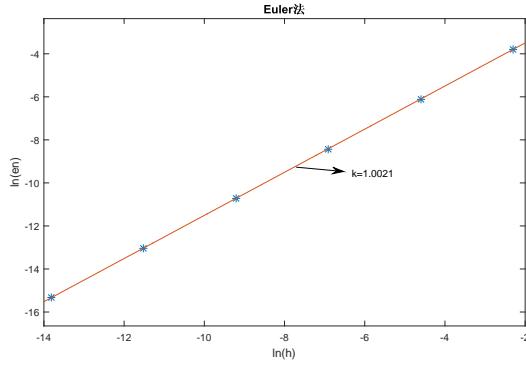


Figure 4: Euler法数值阶

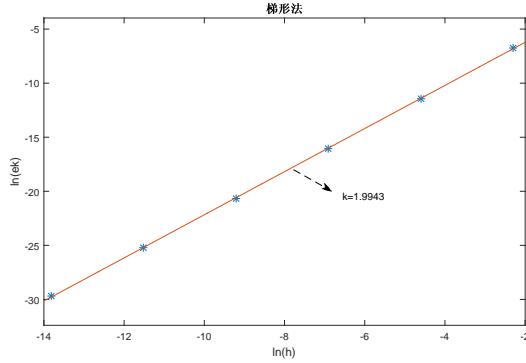


Figure 5: 梯形法数值阶

$$\begin{cases} u' = xu(u-2) \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

采用如上方法计算。若  $u(0) = 2 + \varepsilon$ , 结果如何?

## 2.2 数据

当初始值  $u(0) = 2$ 时, 用五种方法求得的近似解几乎和真解  $u \equiv 2$ 一致。如图9所示。

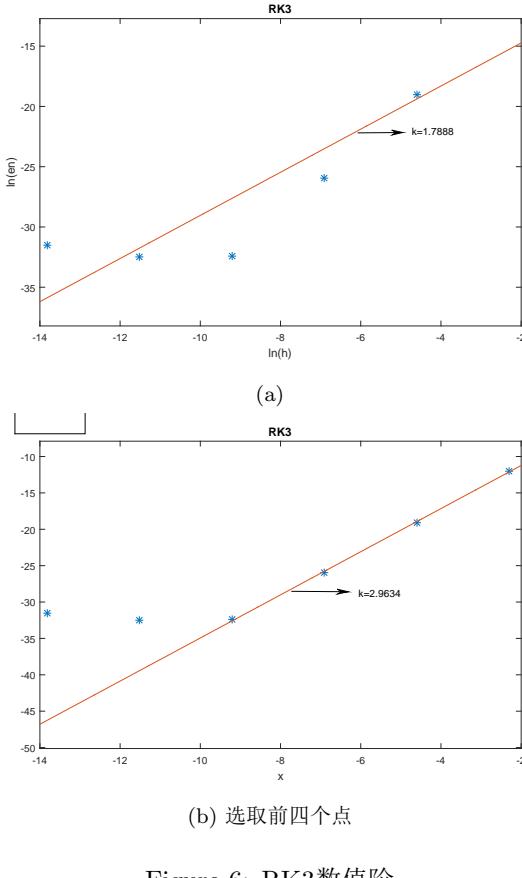


Figure 6: RK3数值阶

当初始值为  $u(0) = 2 + \varepsilon$  时, 真解为

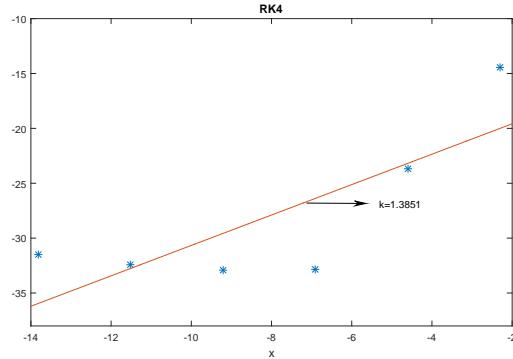
$$u(x) = \frac{2}{1 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} e^{x^2}}$$

当  $\varepsilon > 0$  时,  $u \rightarrow \infty$ , as  $x \rightarrow \sqrt{\ln(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon})}$

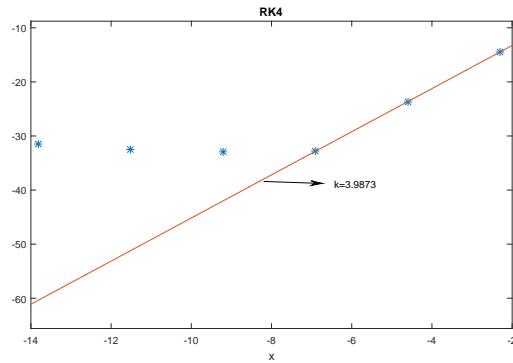
当  $\varepsilon < 0$  时,  $u \rightarrow \infty$ , as  $x \rightarrow \infty$

### 2.3 结论

1. 当  $\varepsilon > 0$  时, 由于奇异点的存在, 使得近似解在趋向于无穷时不能和真解保持相同的速率, 从而产生了较大的误差, 由图11(b)、(d)可以看出, 数值阶越大的数值方法, 近似解出现偏离的时间节点越靠后, 说明高阶数



(a)

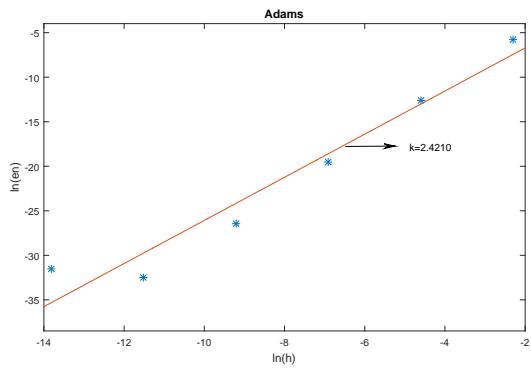


(b) 选取前三个点

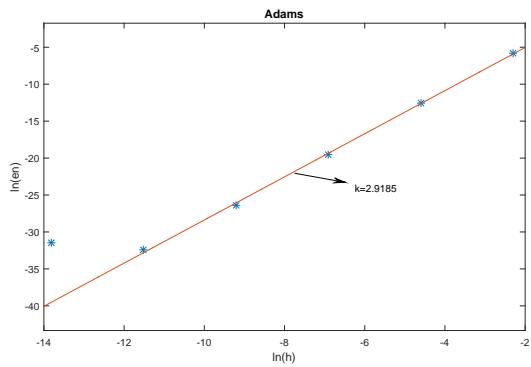
Figure 7: RK4数值阶

值方法相对于低阶的精确性。也可以说,  $f$ 不是全局Lip连续, 而是满足局部Lip条件, 所以很有可能出现解不稳定的情况。

2. 当  $\varepsilon < 0$ 时, 除Euler法以外的其它方法与真解都吻合的比较好, 由图11中semilogy可以看出, 误差变化幅度不大, 相对平缓。对于Euler法, 在中间解曲线快速下降的过程中, 产生了一定的误差, 由图11的(e)、(g)可以看出。而当图10(c)、(d)中的解曲线变得平缓时, Euler法又吻合的比较好。猜测是因为, 中间过程真实解的导数绝对值较大时,  $f$ 在一段区间(非小邻域)内不满足Lip条件, 使得数值阶较小的Euler方法出现了较大的误差。



(a)



(b) 选取前五个点

Figure 8: Adams方法数值阶

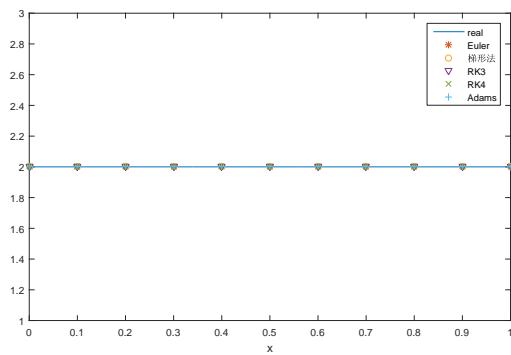


Figure 9: 初值为  $u(0) = 2$  时近似值与真解比较

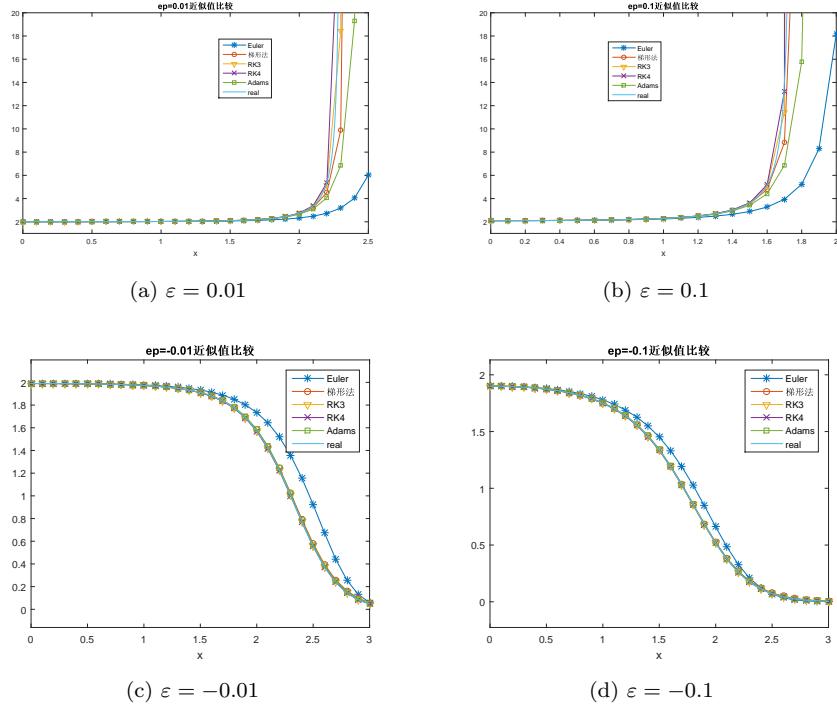


Figure 10: 初值为  $u(0) = 2 + \varepsilon$  时近似值与真解比较

### 3 实验三

#### 3.1 基本内容

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p + \beta pq \\ \frac{dq}{dt} = \gamma q + \delta pq \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \beta = 0.01, \gamma = 0.25, \delta = -0.01$$

初值  $(p(0), q(0)) = (30 \pm 1, 80 \pm 1)$ , 绘制相图  $(p(t), q(t))$ 。

##### 3.1.1 方法:

实现方法和单个ODE方程一样, 只是将 $y$ 看做由  $[p, q]$  组成的向量  $\vec{y}$  即可。  
不再赘述。

## 3.2 数据及分析

解的精确图形通过隐式解

$$e^{\delta(p(t)-p(0))} \left(\frac{p(t)}{p(0)}\right)^\gamma = e^{\beta(q(t)-q(0))} \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^\alpha$$

画出。考虑六组初始向量

$$\begin{bmatrix} 31 & 31 & 29 & 29 & 30 & 30 \\ 81 & 79 & 81 & 79 & 80 & 79 \end{bmatrix}$$

得到的近似解的结果如图12、13、14、15、16、17

由六个初值得到的结果，我们可以看出，只有Euler方法对应的近似解的图像和真解差别较大。因此，我们考虑Euler方法在不同的步长  $h = [0.10.010.0010.0001]$  下的解，如图18。

## 3.3 结论

1. 由图12、13、14、15、16、17 不难看出，除了Euler法的误差越来越大，其他方法与真解的吻合度都比较高。对于这种相位图成循环状态的解，我们可以很容易看出误差造成的不精确解以及误差积累的现象。
2. 通过比较，也可以发现，初始值也会影响到误差的大小，即近似解曲线的形状。固定  $q(0)$ ，随着  $p(0)$  的增大，竖直方向上  $q$  的误差越来越大；固定  $p(0)$ ，随着  $q(0)$  的增大，水平方向上  $p$  的误差越来越大。
3. 由图18可知，随着误差的不断增大，图像呈现出扩张和内缩趋势，并且根据初值的选取，决定“螺旋图”的具体形态（水平方向拉长还是竖直方向拉长）。并且，对于Euler方法，可以通过适当地减小步长来获得更加精确的解。

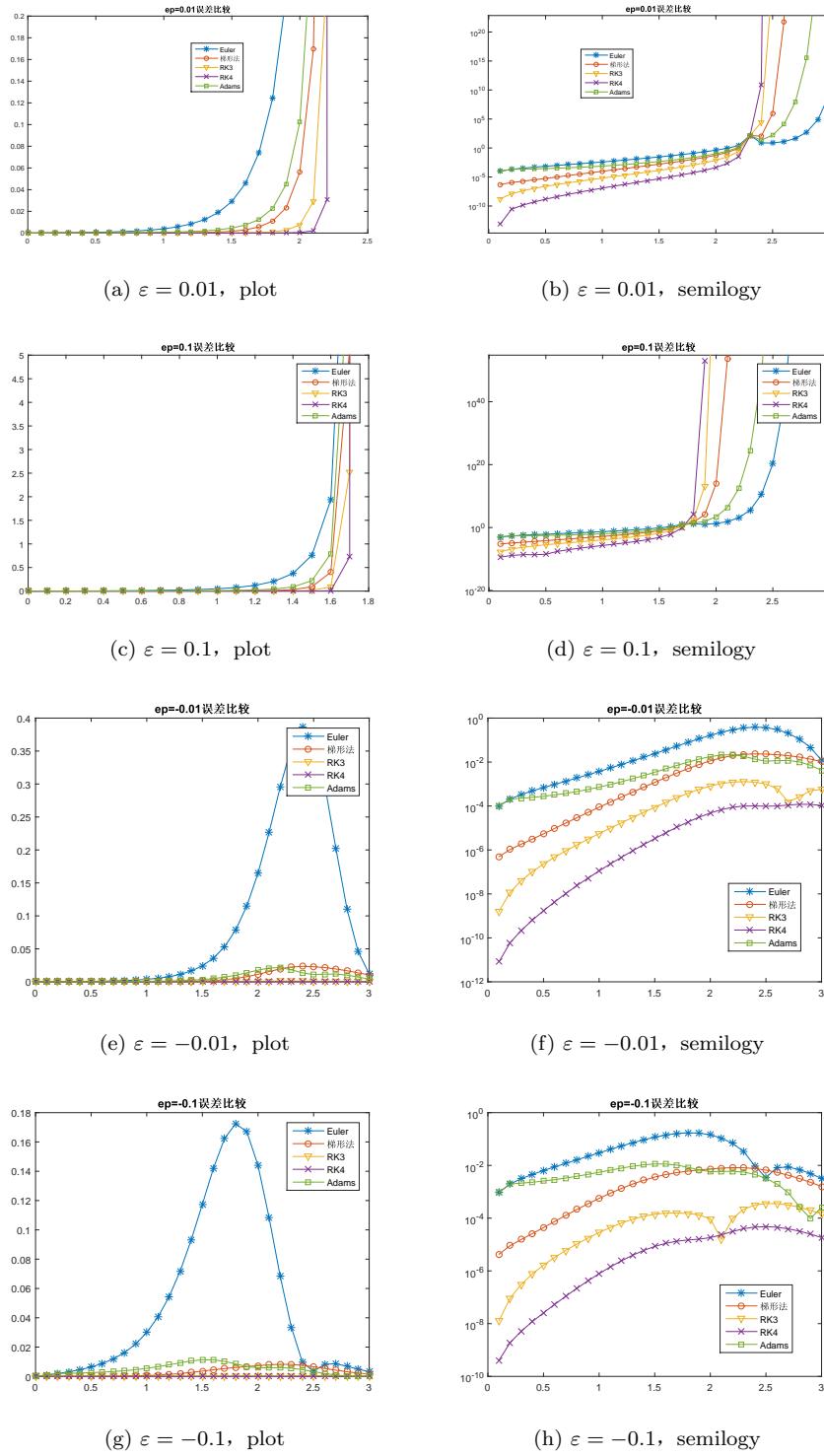


Figure 11: 初值为  $u(0) = 2 + \varepsilon$  时误差比较

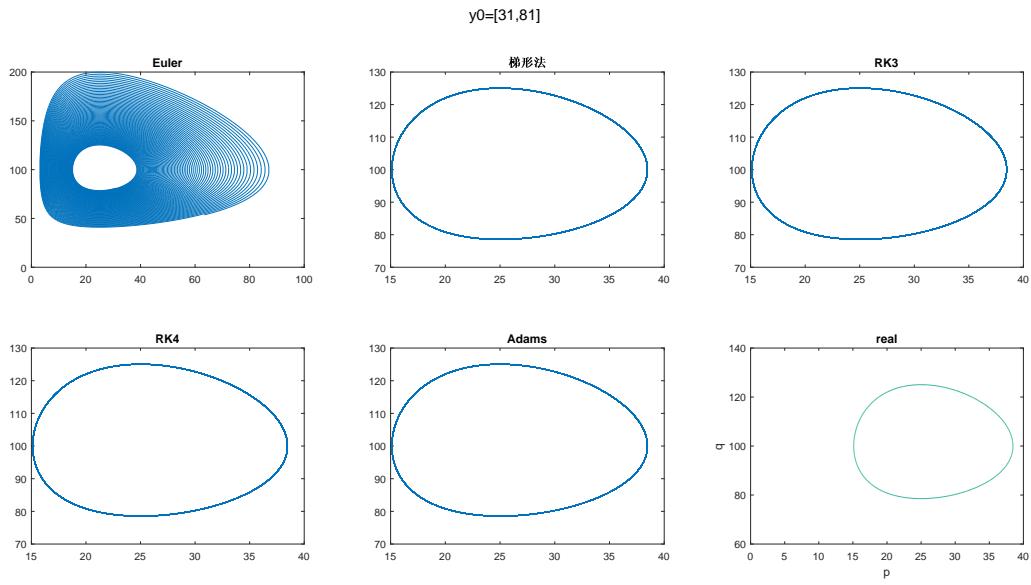


Figure 12: 取不同初值时( $p(t),q(t)$ )相位图比较

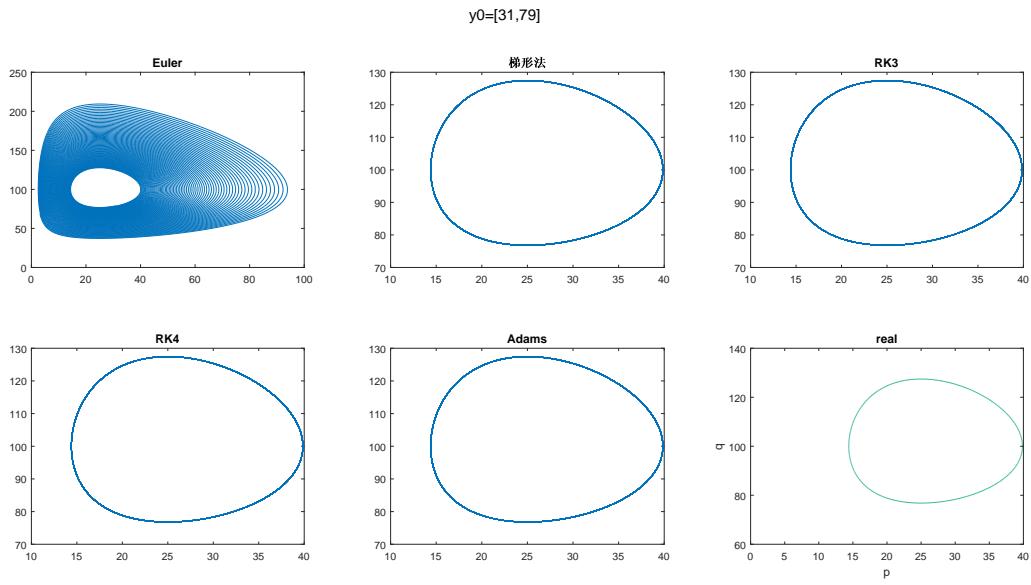


Figure 13: 取不同初值时( $p(t),q(t)$ )相位图比较

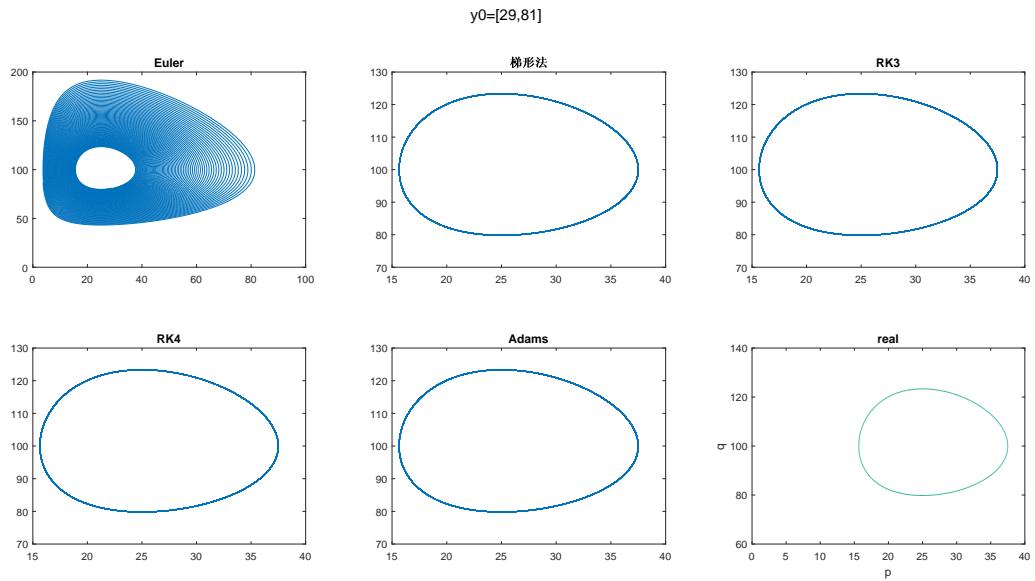


Figure 14: 取不同初值时( $p(t), q(t)$ )相位图比较

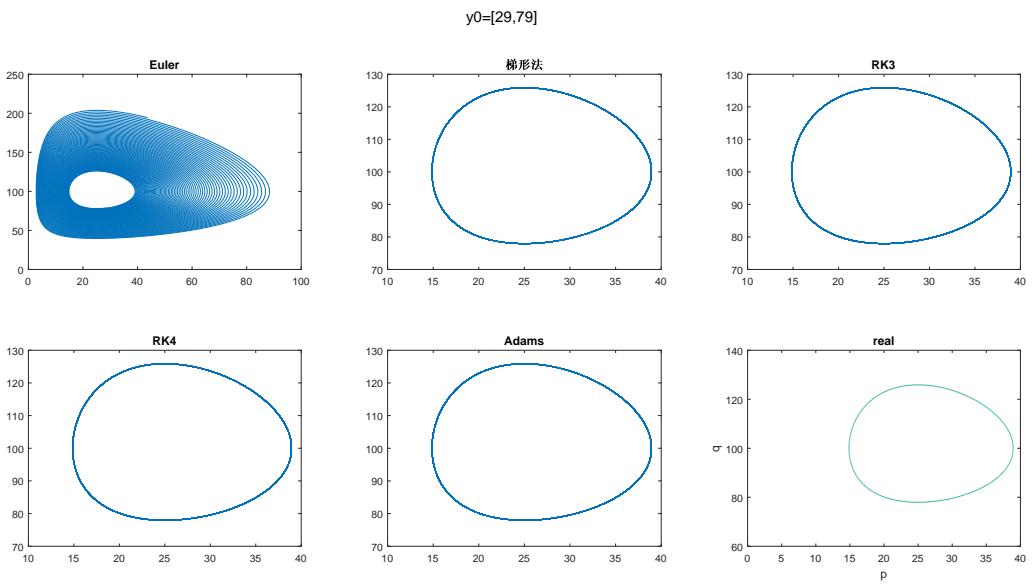


Figure 15: 取不同初值时( $p(t), q(t)$ )相位图比较

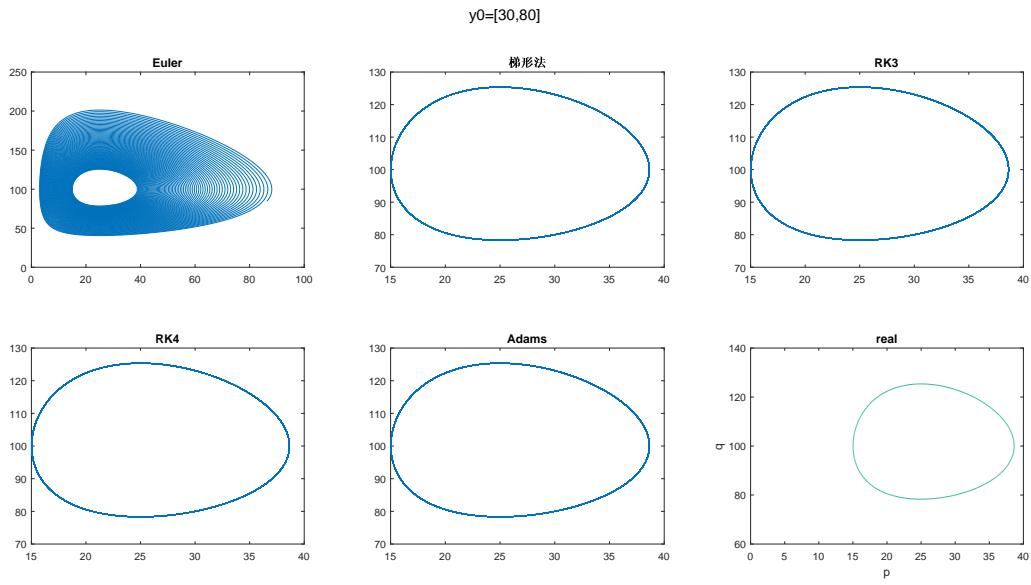


Figure 16: 取不同初值时( $p(t), q(t)$ )相位图比较

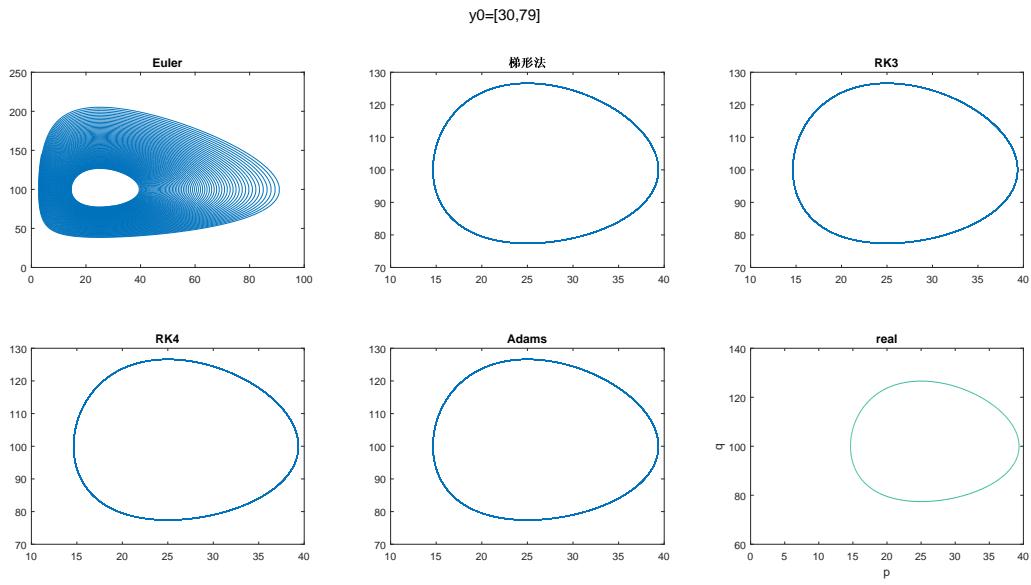


Figure 17: 取不同初值时( $p(t), q(t)$ )相位图比较

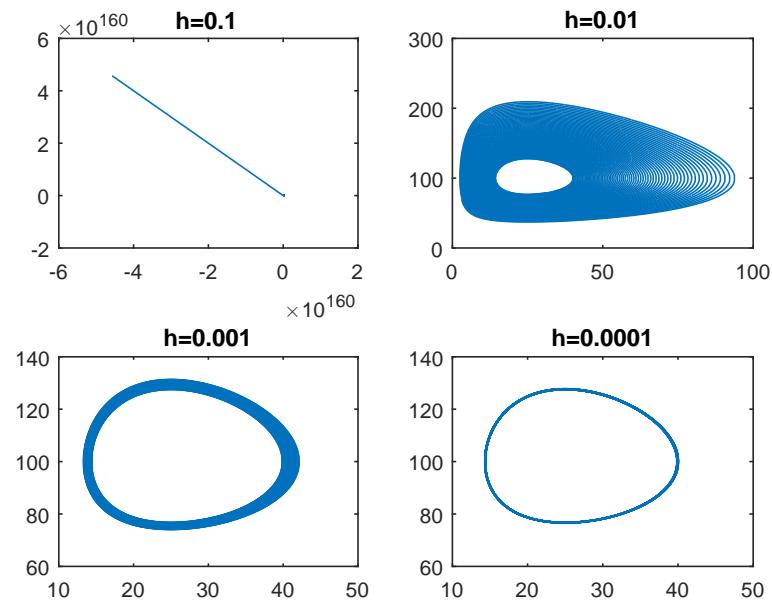


Figure 18: 取不同步长时( $p(t), q(t)$ )相位图比较