图论与代数系统

代数系统

代数系统基本概念

运算

$f:X^n\to X$，n记为运算的阶

代数系统

$A=<X(\text{元素集合}),R_1,R_2...R_m(\text{运算集合})>(\text{必须满足})\Rightarrow\begin{cases}\text{运算封闭}\\\text{后者唯一}\end{cases}$

代数系统的一些基本性质

- 结合律：$(x*y)*z=x*(y*z)$
- 交换律：$x*y=y*x$
- 消去律：
  $(1)x*y=x*z\Rightarrow y=z;(2)y*x=z*x\Rightarrow y=z$，
  当运算同时满足交换律，则只需满足（1）（2）其中一条即可。
- 幺元、零元：
  幺元$\Rightarrow\exists x_0\in X,\forall x\in X,x_0*x=x*x_0=x$；
  零元$\Rightarrow\exists x_0\in X,\forall x\in X,x_0*x=x*x_0=x_0$；
  通常将幺元记为e或1，将零元记为0；
  定理：关于某一运算有幺元，则**幺元唯一**；关于某一运算有零元，则**零元唯一**。
  证明：
  假设关于$*$运算有两个幺元e_1,e_2，则$e_1*e_2=e_2*e_1=e_1;e_2*e_1=e_1*e_2=e_2\Rightarrow e_1=e_2$
  假设关于$*$运算有两个零元$0_1,0_2$，则$0_1*0_2=0_2*0_1=0_1;0_2*0_1=0_1*0_2=0_2\Rightarrow 0_1=0_2$

- 逆元、可逆元：
  若对于某一代数系统，关于∗运算有幺元e，对于某个$x_0 \in X, \exists y \in X$，使得$x_0 * y = y * x_0 = e$，记y为x关于∗运算的逆元，x为关于∗运算的可逆元。
  定理：若运算**有幺元且满足结合律**，则**逆元存在且唯一**。
  证明：若关于∗运算有幺元e，若存在$x_0 \in X$，存在两个逆元
  $y_0, y_1, x_0 * y_0 = y_0 * x_0 = e; x_0 * y_1 = y_1 * x_0 = e \Rightarrow y_0 = e * y_0 = (y_1 * x_0) * y_0 = y_1 * (x_0 * y_0) = y_1 * e = y_1$
- 分配律：
  设代数系统$< X, *, \& >$∗和＆是X上的两个二元运算。
  若$x * (y \& z) = (x * y) \& (x * z); (y \& z) * x = (y * x) \& (z * x)$，则称运算*对运算＆满足分配律。
  当第一个二元运算满足交换律时，两个等式中只要有一个成立就可以满足第一个运算对第二个运算的分配律。

子代数系统

$A =< X, O_1, O_2 ... O_m >$,子代数系统$A_s =< S, O_1, O_2 ... O_m >$，其中$S \subseteq X$。

同构与同态

记两个代数系统$A =< X, f_1, f_2 ... f_m >, B =< Y, g_1, g_2 ... g_n >$

- 同类型代数系统：
  (1)m=n;
  (2)运算f_i和相对应的运算g_i阶相等，则这两个代数系统为**同类型代数系统**。
- 同态公式：
  f和g分别是X和Y上的n元运算。
  若有一函数$h : X \to Y$，使得$\forall (x_1, x_2 ... x_n) \in X^n$有$h(f(x_1, x_2 ... x_n)) = g(h(x_1), h(x_2) ... h(x_n))$，则函数h对f和g**保持运算**，称该式子为**同态公式**。
  （元素运算结果的象等于元素的象的运算结果）
- 同构：
  A和B两个同类型代数系统，存在一**双射**函数$h : X \to Y$，对于A和B中每一对相应运算满足同态公式，则称h是从A到B的**同构函数**，同时称A和B**同构**。
  h是从A到B的同构函数，则h^{-1}是从B到A的同构函数，也就是说，同构是相互的。
  证明代数系统同构步骤：

1. 证明两个代数系统同类型（m=n；每一对相应运算阶相等）。
2. 构造同构函数h，（“显然为双射函数”）。
3. 每一对运算都要证$h(f(x_1,x_2...x_n))=g(h(x_1),h(x_2)...h(x_n))$。
4. 再证对于h的逆运算也同构。
5. 综上，写结论。
同构关系是**等价关系**（自反($h:X\to X,h(x)=x$)，对称(通过逆函数证明)，传递（通过三个同类型代数系统证明)）。

- 同态（比同构条件稍弱，函数h不要求双射）：
A和B两个同类型代数系统。存在函数$h:X\to Y$，对于A和B中每一对运算满足同态公式，则称h为A到B的同态函数，并称$<h<X>,g_1,g_2...g_m>$是A的同态象。
  1. h是单射＝>单同态函数＝>单同态象。
  2. h是满射＝>满同态函数＝>满同态象（就是代数系统B本身)。
  3. h是双射＝>同构函数＝>同构。
  （对于同类型代数系统，在有限集合，，满足单射或满射其一既意味着双射；但无限集合不一定，比如mod2，把所有偶数映射到0，所有奇数映射到1，是满射不是单射）
  （双射＝单射＋满射）
  - $A=<X,*>,B=<Y,\circ>$，h为A到B的同态函数
  1. A的同态象是B的子代数系统。
  2. 若∗满足交换律，则○满足交换律。
  3. 若∗满足结合律，则○满足结合律。
  4. 若e是∗运算的幺元，则$h(e)$是○运算的幺元。
  5. 若0是∗运算的零元，则$h(0)$是○运算的零元。
  6. 若x关于∗有逆元x^{-1}，则$h(x)$关于○的逆元是$h(x^{-1})$。

半群

- 设代数系统$A=<X,*>$，∗是X上的二元运算，若∗满足结合律，则称A为**半群**。
证半群：
  1. 是代数系统：运算封闭，后者唯一；
  2. 运算是二元；

3. 满足结合律。

- 交换半群、含幺半群
  1. 满足交换律=>交换半群
  2. 有幺元=>含幺半群
     自由含幺半群（研究语言）
- 循环半群
  - 设代数系统$< X,* >$，$*$是X上的二元运算。X中元素的**乘幂**定义：$\forall x\in X,x^1=x,x^{m+1}=x^m*x$。定理：$x^m*x^n=x^{m+n},(x^m)^n=x^{mn}$（归纳法证明）
  - 设半群$< X,* >$，存在$x_0\in X$，对任意$x\in X$，存在$m\in N,x=x_0^m$称半群为循环半群，x_0为生成元。
  - 循环半群一定是交换半群$x=x_0^m,y=x_0^n,x*y=x_0^{m+n}=x_0^{n+m}=y*x$
  - 循环半群的生成元不唯一$< N_5,+_5 >$
- 子半群：半群的子代数系统一定是子半群。

群

- 群满足：
  1. 半群
  2. 含幺
  3. 所有元素都有逆元
     - 群满足交换律=>交换群（Abel群）
     - 群的势（又叫群的阶）：记为$|G|$，有限群的势就是元素个数，无限群的势为无穷。
- 设群$< G,* >$，且$|G|\geq 2$。
  1. 群中每个元素逆元唯一（一般记为g^{-1}）。
  2. G无零元
- 设群$< G,* >,a,b\in G$
  1. $(a^{-1})^{-1}=a$
  2. $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$
- 群的运算满足消去律
- 设有限群$< G,* >$，在$*$运算表中，G中每个元素在每行每列有且仅出现一次。（根据消去律证明）

- 群中元素的阶
  1. 定义乘幂$g^0=e;g^1=g;g^{n+1}=g^n*g;g^{-n}=(g^{-1})^n$
  2. 对于每个$g\in G$，称使得$g^k=e$成立的最小正整数k是g的**阶**,若k不存在，则称阶为无穷。
  3. 群中唯一一阶元素为幺元。
  4. 若g的阶为n则$g^1,g^2...g^n$互不相同。（反证法）
  5. 若g的阶为无穷，则$g^1,g^2...$互不相同。
  6. g和g^{-1}有相同的阶。
     证明：设g,g^{-1}的阶分别为n,m。
     一方面$(g^{-1})^n=(g^n)^{-1}=e^{-1}=e,m\le n$
     另一方面$g^m=((g^{-1})^m)^{-1}=e^{-1}=e,n\le m$
     综上，n=m
  7. g的阶为k，若$g^m=e$，则k|m。（设m=pk+q，证q=0）
  8. 设有限群|G|=n，则群中每个元素的阶都$\le n$
- 循环群
  设生成元a。
  1. 若a的阶为m，则$<G,*>$和$<N_m,+_m>$同构
  2. 若a的阶为无穷，则$<G,*>$和$<Z,+>$同构
  3. 循环群一定是交换群。
  4. 若群中存在一个元素阶与群的阶相等，那么该群就是循环群。

子群

- 设$<G,*>$是群，$S\subseteq G,S\ne\varnothing$，则$<S,*>$是子群需要满足：
  1. $\forall a,b\in S,a*b\in S$
  2. $\forall a\in S,a^{-1}\in S$
- 设$<G,*>$是群，$S\subseteq G,S\ne\varnothing$，则$<S,*>$是子群的充要条件是：$\forall a,b\in S,a*b^{-1}\in S$（混合封闭性）。
- 设$<G,*>$是**有限群**，|G|=n，$S\subseteq G,S\ne\varnothing$，则$<S,*>$是子群的充要条件是：$\forall a,b\in S,a*b\in S$
  证明（仅证充分性）：
  （1）由条件知$*$运算为二元运算，且运算封闭。

（2）由运算封闭性知子群中$*$满足结合律。
（3）由于|G|=n，必存在幺元。
（存在$g \in S$,由于运算封闭性$g^1, g^2 ... \in S$，那么必定存在$m < n, g^m = g^n \Rightarrow g^{n-m} = e$，也就是说幺元必定存在。）
（4）$\forall g \in S$,记g的阶为m，则$g^m = g * g^{m-1} = e$，因此g的逆元是g^{m-1}。

- 群的中心（子群$< S, * >$满足$S = \{c | c \in G \cap (\forall g \in G)(g * c = c * g)\}$）
- 设$< G, * >$是循环群，则其子群一定是循环群。
- 陪集
  1. 设群$< G, * >$，子群$< H, * >$，
     任取$a \in G$，$aH = \{a * h | h \in H\}$称aH为**左陪集**，称a是aH的**代表元**。
     由于子群$< H, * >$含有幺元且幺元与$< G, * >$的幺元等价，故$e \in H, a * e = a \in aH$。
     同理，可定义**右陪集**。
  2. 定义$S_l = \{aH | a \in G\}; S_r = \{Ha | a \in G\}$，则$S_l, S_r$都可以作为G上的划分。
     仅证S_l构成划分，S_r同理。
     只需证$(1) \cup_{a \in G} aH = G; (2) \forall a, b \in G$要么aH=bH，要么aH和bH没有交集。
     对于（1），
     只需证$\cup_{a \in G} aH \subseteq G$（根据运算封闭性显然）且$G \in \cup_{a \in G} aH$（用$a \in aH$证）
     对于（2），
     假设aH和bH有交集，取$a_0 \in aH, b_0 \in bH$，假设$a_0 = b_0$，那么
     $a_0 = a * h_1, b_0 = b * h_2, a_0 = b_0 \Rightarrow a * h_1 = b * h_2 \Rightarrow a = b * h_2 * h_1^{-1}; b = a * h_1 * h_2^{-1}$
     任取aH的任一元素$x_0 = a * h_1^{'}$，可以记为$x_0 = a * h_1^{'} = (b * h_2 * h_1^{-1}) * h_1^{'} = b * h$（由运算封闭性可知一定有$h_2 * h_1^{-1} * h_1^{'} \in H$），所以$x_0 \in bH$，又根据$x_0$的任意性可得$aH \subseteq bH$；同理可证$bH \subseteq aH$，所以$aH = bH$。
     综上，得证。
     （也就是说，通过aH映射出来的集合群，里面的集合要么相等（可以删去重复的），要么没有交集，并且集合群所有元素并起来就是群的所有元素，因此构成划分）
  3. $|aH| = |H|; |bH| = |H|$，（这意味着划分出来的每个子集所含元素个数相同（这一定理将用于拉格朗日定理））证明略。
  4. 根据子群H划分出来的子集群（左陪集群或右陪集群）是唯一的（不可能有多种情况（对一块蛋糕只有一种切割方式））（根据两左陪集或右陪集相交即相等可证）。
  5. 由左陪集群划分$S_l = \{aH | a \in G\}$可以确定右陪集群划分（只需证明右陪集群$S_r = \{Hb | b \in G\} = \{Ha^{-1} | a \in G\}$，结合根据子群H划分出来的右陪集群是唯一的可证）。

6. 左右陪集群$|S_l|=|S_r|$（建立映射$f(aH)=Ha^{-1}$，证其为双射函数即得，满射即证后域充满，单射同样通过左陪集相交即相等证明）（实际上，从左陪集的划分可以产生右陪集划分（第5点）基本可以推断出左右陪集划分出来的子集群势相等）。
7. 拉格朗日定理
   记有限群$<G,*>$的子群$<H,*>$
   - **指数**：称$|S_r|$或$|S_l|$为G关于H的指数。
   - **拉格朗日定理**：$|G|=k|H|$，证明：
     （1）根据子群确定的划分，每个子集元素个数相同；
     （2）子集之间没有交集，所有子集的并等于子群的所有元素；
     （3）因此子群所有元素的个数$|G|=k|h|$。
   - 推论：
     1. **素数阶**群的子群只有两个，即两个平凡子群（$\{e\}$和$\{G\}$）。
        （因为$|G|=k|H|$，$|G|$是素数）
     2. 在有限群，每个元素的阶是群的阶的因子。
        （因为$|G|=k|H|$，每个元素都能生成所含元素都能用该元素的阶表示的循环子群$g^1,g^2,g^3...g^m(=e)$，因此$|H|=m$，m即为群的阶的因子）
     3. 每个素数阶的群是循环群。
        （由第2条，每个元素的阶是群的阶的因子，因此素数阶的群其内的元素阶要么为1（幺元），要么为群的阶。记$|G|=n$，如果某一元素g的阶为群的阶，也就是说$g^1,g^2...g^n$互不相等，又因为群中元素只有n个，因此$g^1,g^2...g^n$足以表示群中所有元素，所以可以称之为循环群。）
     4. 四阶不同构的群只有两个，一个是四阶循环群，一个是Klein-4群。
        （1，只要有一个元素阶为4，就是四阶循环群；2，若没有阶为4的元素，就是Klein-4群。）

环（涉及两个运算）

- 设代数系统$<R,\oplus,\otimes>$，$\oplus,\otimes$是R上两个二元运算，若：
  1. $<R,\oplus>$是交换群
  2. $<R,\otimes>$是半群
  3. $\otimes$对$\oplus$满足分配律

  则称$<R,\oplus,\otimes>$是**环**。

将⊕幺元记为0，将元素a关于⊕的逆元记为-a
将⊗幺元（若有）记为1或e，将元素a关于⊗的逆元（若有）记为a^{-1}

- 若⊗满足交换律=>交换环；若⊗有幺元=>含幺环。
- 环的基本性质：
  1. $a \otimes 0 = 0 = 0 \otimes a$（0是关于⊕的幺元）
  2. $a \otimes (-b) = (-a) \otimes b = -(a \otimes b)$（已知$a \otimes b$逆元为$-(a \otimes b)$，即证$a \otimes b$的逆元也为$a \otimes (-b)$）
  3. $(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$
  4. $a \otimes (b-c) = a \otimes b - a \otimes c; (b-c) \otimes a = b \otimes a - c \otimes a$
     （由于⊕的幺元一定是⊕的零元，故$< R, \otimes >$不可能是群）
- 无零因子环和含零因子环
  - 设$< R, \oplus, \otimes >$是环。若存在$a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0, a \otimes b = 0$，则
    1. a是环中的左零因子；
    2. b是环中的右零因子；
    3. 称$< R, \oplus, \otimes >$是含零因子环；
    4. 反之为无零因子环。
  - 定理一：环中无零因子的充分必要条件是⊗满足消去律。（可得环中无零因子和⊗满足消去律等价）（证明时要考虑消去律在⊗不满足交换律时，要证对称的两边都满足消去律）
- 整环
  - 定义：
    1. ⊗满足交换律；
    2. 关于⊗有幺元；
    3. 关于⊗无零因子。
- 除环（区分整环和除环：可将除环类比为除法运算，不满足交换律，而整环的⊗满足交换律）
  - 定义：
    1. 关于⊗有幺元；（与整环定义相同）
    2. $\forall a \in R$，当$a \neq 0$，a有逆元。
  - 定理二：除环一定是含幺的无零因子环。（反证法：$(a \otimes b) \otimes b^{-1} = (0 \otimes b) \otimes b^{-1} \Rightarrow a = 0$矛盾）

- 定理三：设$< R, \oplus, \otimes >$是有限含幺环，$|R| = n$，则环中关于有消去律的充分必要条件是关于运算除零元外其他元素都有逆元。
  由定理一二三可知，
  在**有限含幺环**中：消去律、无零因子环、每一非零元都有逆元三条相互等价。
  在无限环中，消去律和无零因子等价，每个非零元有逆元⇒消去律；每个非零元有逆元⇒无零因子。
  原因：在证消去律⇒每个非零元有逆元；
  要构造映射$R \to R, \forall a \in G, a \neq 0, f(x) = a * x$
  当$a * x_1 = a * x_2$，根据消去律可得$x_1 = x_2$，因此是单射。
  又因为在有限环中，单射即满射，因此为双射。
  所以存在$f(b) = e = a * b$，那么b就是a的逆元。
  但在无限环中，单射不意味着满射，因此可能不存在$f(b) = e$。

域

- 定理：若$< R, \oplus, \otimes >$是可交换的除环，则称该环为**域**。
  （也就是说，**域＝除环＋整环**。除环不一定满足交换律所以不是域；整环不满足每个非零元都有逆元所以不是域）
- 定义：对一个代数系统$< R, \oplus, \otimes >$：
  1. $< R, \oplus >$是交换群；
  2. $< R \setminus \{0\}, \otimes >$是交换群，其中0是关于$\oplus$的幺元；
  3. $\otimes$对$\oplus$满足分配律。
- 定理：有限整环为域。（整环⇒无零因子＋含幺⇒每个非零元有逆元⇒除环⇒整环＋除环＝域）

图论

图的基本概念

- 对图的三种等价定义：
  1. 定义:图$< G = (V, E) >$，V中元素称为结点，E是集合V上的关系，$E \subseteq V \times V$，E中元素称为边。
  2. 设V是非空有限集合，$\sum$是一个标号集合，$E = V \times \sum \times V$，称$G = (V, \sum, E)$为图，称V中元素为图中结点。
  3. 图$G = (V, E, \gamma)$，V是结点集合，E是边集合，γ是边到结点的一个关联函数，即$\gamma(e) = \{u, v\}, u, v \in V$。

- 图的类型：
  1. 无向边，$(u,\sigma,v),(v,\sigma,u)$表示同一条边（没有方向）；
  2. 有向边，反之则为有向边；
  3. 混合图，既有有向边又有无向边；
  4. 零图，只有结点没有边$E=\varnothing$；
  5. 平凡图，只有一个结点$|V|=1$；
  6. 边邻接：两条边有公共端点；
  7. 点相邻：两个结点通过同一条边相邻；
  8. 点边关联：结点v是边e的端点；
  9. 孤立点：结点v没有与之关联的边；
  10. 自环：一条边两端与同一结点关联；
  11. 平行边：两条边左右端点相同；
  12. 重数：两个端点间平行边的条数；
  13. 多重图：有平行边存在的图；
  14. 简单图：无平行边且无自环。
- 子图与补图
  1. 完全图：每一对结点都有边相连；
  2. 设G有n个结点，m条边，当G为完全无向图，满足$m=n(n-1)/2$，记为K_n。
  3. 记$G=(V,E),G^{'}=(V^{'},E^{'})$
     - 子图：$V^{'}\subseteq V,E^{'}\subseteq E$
     - 真子图：$V^{'}\subset V,E^{'}\subset E$。
     - 生成子图：$V^{'}=V,E^{'}=E$。
     - 平凡子图：$V^{'}=V,E^{'}=E$或$E^{'}=\varnothing$
     - 补图：$G^{*}=(V^{*},E^{*})$为完全图，$G=(V,E)$为简单图，称$\overline{G}=(V,\overline{E})$为补图，其中$\overline{E}=E^{*}\setminus E$。
- 结点的度
  1. 出度：$\overleftarrow{deg}(v)$，从结点v出去的边数；
  2. 入度：$\overrightarrow{deg}(v)$，进入结点v的边数；

3. 度：出度加入度之和。
    - 奇结点
    - 偶结点
    - 悬挂点，悬挂边
4. 定理：
    1. 无向图中，所有结点度数之和等于边数两倍。（一条边贡献一个出度和一个入度两个度数）
    2. 入度之和等于出度之和（思路同上）
    3. 奇结点个数为偶数。（（1）度数之和等于边数的两倍，故度数之和为偶数；（2）偶结点度数之和为偶数；（3）奇结点必须为偶数个。）

- 图的同构
  设两个简单无向图$G=(V,E),G^{'}=(V^{'},E^{'})$，存在从$V$到$V^{'}$的双射函数h，使得$e=\{v_i,v_j\}\in E$当且仅当$e^{'}=\{h(v_i),h(v_j)\}\in E^{'}$，称两图同构。
    - 证明方法：
        1. 写出函数$h:V\rightarrow V^{'}$，列举出所有结点的映射情况；（最后写“显然是双射函数”）
        2. 列举出所有在G上的边通过h映射到$G^{'}$的情况（元素运算的象等于元素象的运算）
        3. 总结两图同构。
    - 同构的必要条件：
        1. 结点个数相等；
        2. 边数相等；
        3. 度数相同的结点个数相等；

路与圈

设$G=(V,E)$为图，W为G的有限非空点边交错序列，$W=v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$，称W为G的一条从v_0到v_k的**途径**，k为途径的**长度**。

- 路：$v_0\neq v_k$
- 圈：$v_0=v_k$
  （为方便起见，通常写为$W=(v_0,v_1,v_2...v_k)$）
- 简单路：无重复边的路。

- 简单圈：无重复边的圈。
- 初级路：无重复点的路。
- 初级圈：无重复点的圈。
  设$G=(V,E)$为一简单图，$|V|=n$，
  1. G中任一初级路长度不超过n-1。（长度为n-1的初级路一定有n个不同的结点）
  2. G中任一初级圈长度不超过n。（长度为n的圈一定有n个不同结点）
- 可达性：若存在一条从u到v的路，则说明u**可达**v。称u到v长度最短的路为**短程线**，将其长度称为**距离**。
- 连通性
  - **无向图**
    1. 若图中任意两点间均可达，则称图G**连通**，反之为**非连通**。
    2. 称G的一个极大连通子图为G的一个**连通支**。（若图G是连通的，那么它的连通支数为1）
  - **有向图**
    1. 强连通：图中任一一对结点相互可达。
    2. 单向连通：图中任一一对结点至少有一个结点可达另一个结点。
    3. 弱连通：该图的无向图是连通的。
       （强连通>单向连通>弱连通）
       （图的子图称为支，找满足条件的连通支要把每一个子图找全）
    4. 强连通支
    5. 单向连通支
    6. 弱连通支
       （强连通支是等价关系（对称、传递、自反），可以用来划分图的结点，每一个强连通支就是一个划分块）
       （弱连通支同理，但它可以用来划分图的结点和边）
       （单向连通支不对称，故不是等价关系，不能划分）
  - 定理：在简单有向图中，
    1. 每一个结点以及一条边恰在一个弱连通支中；（根据划分）
    2. 每一个结点恰在一个强连通支中；（根据划分）
    3. 每一个结点、每一条边至少属于一个单向连通支。

图的矩阵

- 领接矩阵（针对有向图，对角线全为0）
  - 邻接矩阵A的求法：
    1. 为图中各结点强行命名。
    2. 画矩阵。
    3. 根据两结点是否相邻为每行每列的元素赋值0或1。
  - 领接矩阵用途：
    1. 判断两图同构（用两图的领接矩阵做行与列的变换）（交换i,j行同时交换i,j列，重复该步骤（同步置换））
    2. 求出度和入度。
    3. A^m求两结点间长度为m的路有几条。
- 可达矩阵
  $R = A^1 + A^2 + ... + A^n$（求是否可达（n取|V|），长度从1到n的路共有几条($1 \leq n \leq |V| - 1$，n大于等于｜V｜没有意义))
  1. G是强连通<=>R全为1；
  2. G是单向连通<=>$R \cup R^T$除对角线外均为1；
  3. G是弱连通<=>由$A \cup A^T$确定全1矩阵；
  4. G中有圈<=>R的主对角元素存在1。

带权图的最短路径

- Dijkstra算法步骤：
  1. 为图中所有结点强行命名；
  2. 初始化起点$d(v_1) = 0$，除起点外所有结点$d(v_i) = \infty$。
  3. 从起点开始，计算相邻点$d(v_i)' = d(v_0) + W_{0i}$，更新相邻点的$d(v_i) = max\{d(v_i), d(v_i)'\}$。
  4. 再从与起点相邻点中取$d(v_i)$值最小的点，继续更新相邻点。
  5. 重复3，4步，直至遍历完所有结点。
  6. 找到终点编号j，$d(v_j)$即为最短带权路径长度。

欧拉图

哈密顿图

二分图

平面图