2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学专业）参考答案

一、填空题

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $2x+2y-3z=0$. (3) xye^{y}. (4) $\frac{2e^{t}-e+1}{3-e}$. (5) 0

二、【参考证明】 不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，考虑辅助函数

$$F(t)=\frac{f\left[(1-t)x_2+tx_4\right]-f\left[(1-t)x_1+tx_3\right]}{(1-t)(x_2-x_1)+t(x_4-x_3)}$$

则 $F(t)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且

$$F(0)=\alpha<\lambda<\beta=F(1).$$

根据连续函数介值定理，存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $F(t_0)=\lambda$. 令

$$x_5=(1-t_0)x_1+t_0x_3, x_6=(1-t_0)x_2+t_0x_4,$$

则 $x_5,x_6\in(0,1)$，$x_5<x_6$，且 $\lambda=F(t_0)=\dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

三、【参考证明】：令 $F(x)=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$，则 $F(0)=0,F(1)=1$ 且函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可导，根据介值定理，存在点 $x_3\in(0,1)$，使得 $F(x_3)=\frac{1}{2}$. 再分别在区间 $[0,x_3],[x_3,1]$ 上利用拉格朗日中值定理，存在点 $x_1\in(0,x_3)$，使得 $F(x_3)-F(0)=F'(x_1)(x_3-0)$，

即
$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1}f(t)\,\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$$

且存在 $x_2\in(x_3,1)$，使得 $F(1)-F(x_3)=F'(x_2)(1-x_3)$，即

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$$

四、【参考解析】：注意到 $\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}=n\left[\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]\cdot\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{e}.$$

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[(n+1)n]{\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}}=\sqrt[(n+1)n]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}=e^{\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}}$$

利用等价无穷小替换 $e^x-1\sim x\,(x\to 0)$，得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}=-\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x=1.$$

所以，所求极限为

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]=\lim_{x\to\infty} n\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

五、【参考解析】(1)二次型 $H(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{j+1}$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 A 实对称，其任意 k 阶顺序主子式 $\Delta_k>0$，所以 A 正定，结论成立.

(2)对 A 作分块如下 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & 1\end{pmatrix}$，其中 $\alpha=\left(0,\cdots,0,-\frac{1}{2}\right)^T\in R^{n-1}$，取可逆矩阵

$$P=\begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $P^TAP=\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & 1-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}$，其中 $a=1-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha$.

记 $x=P(x_0,1)^T$，其中 $x_0=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})^T\in R^{n-1}$，因为

$$H(x)=x^TAx=(x_0^T,1)P^T(P^T)^{-1}\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} x_0 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$=x_0^TA_{n-1}x_0+a$$

且A_{n-1}正定,所以$H(x)=x_0^T A_{n-1} x_0+a\geq a$,当$x=P(x_0,1)^T=P(0,1)^T$时,$H(x)=a$. 因此，$H(x)$满足条件$x_n=1$的最小值为$a$.

六、【参考证明】：在格林公式$\oint\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中，取$P=yf(x,y),Q=0$和取$P=0,Q=xf(x,y)$，分别可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint\limits_C yf(x,y)\mathrm{d}x-\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_C xf(x,y)\mathrm{d}x-\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

两式相加，得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^2}{2}\oint\limits_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

对I_1再次利用格林公式，得

$$I_1=\frac{a^2}{2}\oint\limits_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=a^2\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^4.$$

对I_2的被积函数利用柯西不等式，得

$$|I_2|\leq\frac{1}{2}\iint\limits_D\left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leq\frac{a}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\pi a^4$$

因此，有$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\pi a^4+\frac{1}{3}\pi a^4=\frac{4}{3}\pi a^4.$

七、【参考解析】(1)若$q>1$，则存在$p\in R$，使得$q>p>1$. 根据极限性质，$\exists N\in Z^+$，使得对于任意$n>N$，有$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>p$，即$a_n<\frac{1}{n^p}$，而$p>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

若$q<1$，则存在$p\in R$，使得$q<p<1$. 根据极限性质，$\exists N\in Z^+$，使得对于任意$n>N$，有$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<p$，即$a_n>\frac{1}{n^p}$，而$p<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

(2) 当$q=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$可能收敛，也可能发散.

例如：$a_n = \frac{1}{n}$满足条件，但级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散. 又如：$a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$满足条件，但级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.