2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

数学专业竞赛（B 卷）试题

一、(本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线，点 B 是它们公垂线段的中点。点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动，使得 $A_1B \perp A_2B$. 证明直线 A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面。

二、(本题 10 分)计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2019}\right)}$.

三、(本题 15 分)设数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足：$x_1>0, x_{n+1}=\ln\left(1+x_n\right), n=1,2,\cdots$. 证明：$\left\{x_n\right\}$ 收敛并求其极限值.

四、(本题 15 分)设 $\left\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\right\}$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基，令

$$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$$

证明：(1) 对 $i=1,2,\cdots,n+1$, $\left\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}\right\}$ 都构成 V 的基;

(2) $\forall\alpha\in V$，在 (1) 中的 $n+1$ 组基中，必存在一组基使 α 在此基下的坐标分量均非负;

(3) 若 $\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，且 $\left|a_i\right|(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同，则在 (1) 中的 $n+1$ 组基中，满足 (2) 中非负坐标表示的基是唯一的.

五、(本题 20 分)设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵，若 $A^2=I_n$ (I_n 表示单位矩阵)，则称 A 为对合矩阵. 试证：

(1) 若 A 是 n 阶对合矩阵，则

$$\operatorname{rank}\left(I_n+A\right)+\operatorname{rank}\left(I_n-A\right)=n\,;$$

(2) n 阶对合矩阵 A 一定可以对角化，其相似对角形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}$，其中

$$r=\operatorname{rank}\left(I_n+A\right);$$

(3) 若 A，B 均是 n 阶对合矩阵，且 $AB=BA$，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

六、(本题 15 分)设函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续凹函数，满足 $f(a)=0, f(b)>0$ 且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处存在非零的右导数. 对 $n\geq 2$，记

$$S_n=\left\{\sum_{k=1}^{n}kx_k:\sum_{k=1}^{n}kf\left(x_k\right)=f(b),x_k\in[a,b]\right\}$$

（1）证明对$\forall\alpha\in(0,f(b))$，存在唯一$x\in(a,b)$使得$f\left(x\right)=\alpha$；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup S_n-\inf S_n\right)$.

七、(本题 10 分)设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛，其中$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.