第十一届全国大学生数学竞赛决赛试题
(数学类高年级组)

(第一至第四大题是必答题，再从第五至第十大项中任选 3 题)

一、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

1、 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=n}^{3n-1}k\right)^{\frac{1}{2n}}\sin\dfrac{1}{n}=$________.

2、已知 f 在区间 $(-1,3)$ 内有二阶连续导数， $f(0)=12, f(2)=2f'(2)+8$ ，则 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}\,x=$_______.

3、在三维空间的直角坐标系中，方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2xz=1$ 表示的二次曲面类型是________________.

4、在矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A=U\Lambda V$ 中(其中 U,V 为正交方阵，Λ 为对角阵)，$\Lambda=$______________________.

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S: x^2-y^2+z^2=1$.

1、证明：S 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线；

2、设 S 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1,1,1)$ 与 $M_2(2,2,1)$ 两点，求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

三、(本题 15 分) 设 V 是有限维欧氏空间，V_1,V_2 是 V 的非平凡子空间且 $V=V_1\oplus V_2$. 设 p_1,p_2 分别是 V 到 V_1,V_2 的正交投影，$\varphi=p_1+p_2$，用 $\det\varphi$ 表示线性变换 φ 的行列式. 证明：$0<\det\varphi\le 1$ 且 $\det\varphi=1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交.

四、(本题 20 分) 1、证明：函数方程 $x^3-3x=t$ 存在三个在闭区间 $[-2,2]$ 上连续，在开区间 $(-2,2)$ 内连续可微的解 $x=\varphi_1(t), x=\varphi_2(t), x=\varphi_3(t)$ 满足:

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad |t|\le 2.$$

2、若 f 是 $[-2,2]$ 上的连续偶函数，证明:

$$\int_1^2 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^1 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}\,x.$$

五、(本题 10 分) 设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是 $\mathcal{L}-$可测集，$\left\{f_n(x)\right\}_{n\ge1}$ 是 E 上一致有界可测函数列，若

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\int_E\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right|^2\mathrm{d}\,m<\infty.$$

则 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(x)=0,\quad \mathcal{L}-a.e., x\in E$.

六、(本题 10 分) 设 $f(z)$ 在 $|z| \le R(R>0)$ 内解析且满足

$$|f(z)| \le M(M>0), f(0) \ne 0.$$

证明：$F(z)$ 在圆 $|z| \le \frac{R}{3}$ 内零点个数(零点的重数计算在内)不超过 $\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}$.

七、(本题 10 分) 证明：180 阶群不是单群.

八、(本题 10 分) 设 $S: r = r(u,v)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面，其第一基本形式为 $(\mathrm{d}s)^2 = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2$，其中 (u,v) 为曲面 S 的参数

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u}, r_v = \frac{\partial r}{\partial v}, E = r_u \cdot r_u, F = r_u \cdot r_v, G = r_v \cdot r_v.$$

证明：1、存在新的参数 (u_1, v_1)，使得 S 的第一基本形式为

$$(\mathrm{d}s)^2 = h(u_1,v_1)\left[(\mathrm{d}u_1)^2 + (\mathrm{d}v_1)^2\right],$$

其中 $h>0$ 为光滑函数.

2、如果曲面 S 的第一基本形式满足 $(\mathrm{d}s)^2 = h(u,v)\left[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2\right]$，则其高斯曲率 K 可以表示为 $K = -\frac{1}{2h}\Delta \log h$，其中 $h>0$ 为光滑函数，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ 表示拉普拉斯算子.

九、(本题 10 分) 设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量序列.

1、若 $\{X_i\}$ 服从大数定律且满足中心极限定理，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX_i\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ 和 } \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - EX_i\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)}} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right) = 0$.

2、若 $\{X_i\}$ 同分布且满足 $\lim_{n\to\infty} nP\left(\left|X_1\right| \ge n\right) = 0$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu_n$ 依概率收敛于 0，即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$，其中 $\mu_n = E\left[X_1 I\left(\left|X_1\right| \le n\right)\right]$，$I(A)$ 表示事件 A 的示性函数.

十、(本题 10 分) 设 A 是具有正对角元的非奇异对称矩阵. 证明：若求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始值都收敛，则 A 为正定矩阵.