2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类三、四年级）试卷

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为________.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和为_________.

(3) 计算 $I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} \left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right) \mathrm{d}\, S =$________.

(4) $A = \left(a_{ij}\right)$ 为 n 阶实对称矩阵 $\left(n > 1\right)$，$rank\left(A\right) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2, 3, \cdots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式，则有 $A_{11} =$_________.

二、（本题 15 分） 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P，且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C \right\}$，其中 C 表示复数域. 试证明: $\forall A \in \Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ；进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

四、（本题 20 分） 设 $f\left(x\right) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$ 求最大常数 α 满足

$$\sup_{x \neq y} \frac{\left|f\left(x\right) - f\left(y\right)\right|}{\left|x - y\right|^{\alpha}} < +\infty.$$

五、（本题 15 分） $a\left(t\right), f\left(t\right)$ 为实连续函数，$\forall t \in R$，有

$$f\left(t\right) > 0, a\left(t\right) \geq 1, \int_0^{\infty} f\left(t\right) \mathrm{d}\, t = +\infty.$$

已知 $x\left(t\right)$ 满足 $x''\left(t\right) + a\left(t\right) f\left(x\left(t\right)\right) \leq 0, \forall t \in R.$ 求证：$x\left(t\right)$ 在 $[0, +\infty)$ 有上界.

六、（本题 10 分，复变函数） 设 a, b 是两个不同的复数，求满足方程

$$\left(f'\left(z\right)\right)^2 = \left(f\left(z\right) - a\right)\left(f\left(z\right) - b\right) \tag{1}$$

的非常数整函数 $f(z)$.

七、（本题 10 分，实变函数） 设 $f(x)$ 是 R^1 上的 Lipschitz 函数，Lipschitz 常数为 K，则对任意的可测集 $E \subset R^1$，均有 $m(f(E)) \le K \cdot m(E)$.

八、（本题 10 分，微分几何） 设三维空间的曲面 S 满足：

(1) $P_0 = (0,0,-1) \in S$;

(2) 对任意 $P \in S, \left|\overrightarrow{OP}\right| \le 1$，其中 O 是原点.

证明：曲面 S 在 P_0 的 Gauss 曲率 $K(P_0) \ge 1$.

九、（本题 10 分，数值分析） 考虑求解线性方程组 $Ax = b$ 的如下迭代格式

$$(\alpha D - C)x^{(k+1)} = \left((\alpha - 1)D + C^T\right)x^{(k)} + b,$$

其中 D 为实对称正定方阵，C 是满足 $C + C^T = D - A$ 的实方阵，α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵，且 $\alpha D - C$ 可逆，$\alpha > \dfrac{1}{2}$. 证明：上述迭代格式对任何初始向量 $x^{(0)}$ 收敛.

十、（本题 10 分，抽象代数） 设 R 为 $[0,1]$ 上的连续函数环，其加法为普通的函数加法，乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的一个极大左理想. 证明：$\forall f, g \in I, f$ 与 g 在 $[0,1]$ 上必有公共的零点.

十一、(本题 10 分，概率统计) 设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量 X（单位：吨）是随机变量，X 服从 $[100, 200]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一吨，可以为国家挣得外汇 3 万元；若销售不出而囤积于仓库，则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求：应组织多少吨货源，才能使得国家的收益最大？