第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 A 卷》试题及参考解答

一、(15 分) 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点.

$$A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$$

为 xOy 面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1， B_1,C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程;

(2) 求点 A_1,B_1,C_1 三点的坐标;

(3) 给定点 $A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0)$，求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

【参考解答】: **(1)** 由直线的两点式方程，直接可得过 N,A 两点的直线方程为

$$\frac{x}{a_1}=\frac{y}{a_2}=\frac{z-1}{-1}.$$

(2) 直线 NA 的参数方程为

$$x=a_1t,\ y=a_2t,\ z=1-t$$

将其代入球面方程，得

$$(a_1t)^2+(a_2t)^2+(1-t)^2=1$$

解得参数值为 $t=\dfrac{2}{a_1^2+a_2^2+1}$ 或 $t=0$. 从容可得 A_1 的坐标为

$$A_1\left(\frac{2a_1}{a_1^2+a_2^2+1},\frac{2a_2}{a_1^2+a_2^2+1},\frac{a_1^2+a_2^2-1}{a_1^2+a_2^2+1}\right)$$

同理可得 B_1,C_1 的坐标为

$$B_1\left(\frac{2b_1}{b_1^2+b_2^2+1},\frac{2b_2}{b_1^2+b_2^2+1},\frac{b_1^2+b_2^2-1}{b_1^2+b_2^2+1}\right)$$
$$C_1\left(\frac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1},\frac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1},\frac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}\right)$$

(3) 由(2)和已知坐标，代入可得 A_1,B_1,C_1 的坐标为

$$A_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right), B_1=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right), C_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

所以，由向量混合积的几何意义，可得四面体体积为

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\right)\right|\\ &=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\frac{32}{27}=\frac{16}{81}\end{aligned}$$

二、(15 分) 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}$

【参考解答】: 改写极限式，有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2021\ln n+\ln\dfrac{1^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n^{2021}}}$$

【思路一】由定积分定义，得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2021}}\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2020}+\left(\frac{2}{n}\right)^{2020}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^{2020}\right]\\&=\int_0^1x^{2020}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}\end{aligned}$$

代入极限式得 $I=\dfrac{1}{2021}$.

【思路二】 由 Stolz 公式，得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2021}}\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2020}}{n^{2021}-(n-1)^{2021}}=\frac{1}{2021}\end{aligned}$$

故 $\ln\dfrac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n^{2021}}$ 有界. 故 $I=\dfrac{1}{2021}$.

三、(15 分) 设 A,B 均为 2020 阶正交矩阵，齐次线性方程组 $Ax=Bx\left(x\in\mathbb{R}^{2020}\right)$ 的解空间维数为 3. 问：矩阵 A,B 是否可能相似？证明你的结论.

【参考解答】: A,B 一定不相似. 证明如下：

令 $C=AB^{-1}$. 由于 A,B 均为正交矩阵，故 C 也是正交矩阵. C 视为复矩阵是酉矩阵，故可以复对角化. 即存在复可逆矩阵 T 和复对角矩阵 D，使得 $T^{-1}CT=D$，其中 D 的主对角线上的元素即为 C 的复特征值.

齐次线性方程组 $Ax=Bx$ 的解空间维数为 3，则 $\operatorname{rank}\left(A-B\right)=2017$. 进而

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}(D-I)=\operatorname{rank}\left(T^{-1}(C-I)T\right)\\&=\operatorname{rank}(C-I)=\operatorname{rank}\left((A-B)B^{-1}\right)\\&=\operatorname{rank}(A-B)=2017\end{aligned}$$

这表明对角矩阵 D 的主对角线上恰有 3 个元素是 1，即 C 有三重特征值 1. 由于正交矩阵的实特征值为 1 或 -1，而非实数特征值共轭成对出现，共有偶数个. 又 C 共有 2020 个特征值(计重数)，故 C 有特征值 -1，且重数为奇数.

C 的行列式是其所有特征值(计重数)之积. 注意到 C 的非实数特征值共轭成对出现，它

们的乘积为正数,故 $\det C < 0$. 特别有 $\det\left(AB^{-1}\right) = \det C \neq 1$. 即 $\det A \neq \det B$, 所以 A, B 不相似.

四、(20 分) 称非常值一元 n 次多项式(合并同类项后)的 $n-1$ 次项(可能为 0)为第二项.求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$，满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k，都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$，使得 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$，且 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

【参考解答】: 显然 $f(x) = x^{2020}$ 满足题意. 以下证明这是唯一解.

设 $f(x)$ 的 2020 个复根为 $x_1, x_2, \cdots, x_{2020}$. 对每个 $k\left(1 \le k \le 2020\right)$，由题设条件可设 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$，其中 $g_k(x), h_k(x)$ 分别为 m_k 次和 n_k 次非常值首一多项式，第二项系数均为 a_k. 设 $g_k(x)$ 的所有复根为 $y_{k,1}, y_{k,2}, \cdots, y_{k,m_k}$； $h_k(x)$ 的所有复根为 $z_{k,1}, z_{k,2}, \cdots, z_{k,n_k}$. 这些根恰为所有 $x_j\left(j \neq k\right)$.由韦达定理,

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{m_k-1}\left(y_{k,1} + y_{k,2} + \cdots + y_{k,m_k}\right) \\ &= (-1)^{n_k-1}\left(z_{k,1} + z_{k,2} + \cdots + z_{k,n_k}\right) \end{aligned}$$

对每个 k，将上式改写为

$$\sum_{j\neq k} \varepsilon_{kj} x_j = 0$$

其中 $\varepsilon_{kj} = 1$ 或 -1.

这样，我们得到了关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{2020}$ 的齐次线性方程组，其系数矩阵 A 为 2020 阶方阵，主对角线上元素为 0. 主对角线外元素为 1 或 -1. 令 B 为 2020 阶方阵，其主对角线上元素为 0，主对角线外元素为 1，则容易计算出 B 的行列式为 $\det B = -2019$. 由行列式定义, $\det A$ 与 $\det B$ 的奇偶性相同，故 $\det A \neq 0$.

从而上述齐次线性方程组只有零解，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2020} = 0$. 这便证明了 $f(x) = x^{2020}$

【注】 上面证明 $\det A \neq 0$ 也可以如下进行: 显然 $\det A \equiv \det B \pmod 2$. 由于

$$\det B = -2019 \equiv 1 \pmod 2$$

所以 $\det A \equiv 1 \pmod 2$，故 $\det A \neq 0$.

五、(15 分) 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数，ψ 是 φ 的反函数，实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} = \psi\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), n \ge 2.$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

【参考证明】: $\{x_n\}$ 收敛. 证明如下：记 $y_n = \varphi(x_n)$，则

$$y_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)y_n + \frac{1}{\sqrt{n}}y_{n+1}, n \ge 2.$$

令 $a_n = \min\{y_n, y_{n-1}\}, b_n = \max\{y_n, y_{n-1}\}, n \geq 3$，则

$$a_n \leq y_{n+1} \leq b_n,\ n \geq 3$$

进而可得 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, n \geq 3$. 所以 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均单调有界，从而收敛.

特别，$\{y_n\}$ 有界. 由于

$$y_{n+2} - y_{n+1} = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(y_{n+1} - y_n),\ n \geq 2$$

因此可得

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq |y_3 - y_2| \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right), n \geq 2$$

由于 $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 趋于 0，故 $\lim_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n) = 0$. 所以

$$b_n - a_n = |y_n - y_{n-1}| \to 0,\quad n \to \infty$$

从而可知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的极限相等，从而 $\{y_n\}$ 收敛. 最后，由 ψ 的连续性可得 $\{x_n\}$ 收敛.

六、(20 分) 对于有界区间 $[a,b]$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$$

其范数定义为 $\| P \| = \max\limits_{0\leq k\leq n}(x_{k+1} - x_k)$. 现设 $[a,b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $M > 0$，使得对任何 $x, y \in [a,b]$，成立 $| f(x) - f(y) | \leq M | x - y |$. 定义

$$s(f;P) \equiv \sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1} - x_k|^2 + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^2}$$

若 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$ 存在，则称曲线 $y = f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f;P_n)$ 存在.　　(2) 曲线 $y = f(x)$ 可求长.

【参考证明】: **【思路一】** 由题设可知

$$0 \leq s(f;P) \leq \sum_{k=0}^{n}\sqrt{M^2+1}|x_{k+1} - x_k| = (b-a)\sqrt{M^2+1}$$

因此，$s(f;P)$ 有界.

(1) 由平面上点和点距离的三角不等式，可得

$$s(f;P_n) \leq s(f;P_{n+1}),\ \forall n \geq 1$$

因此，$\{s(f;P_n)\}$ 单调增加，结合有界性可知其收敛. 设极限为 L.

一般地，对于划分 P, Q，用 $P \oplus Q$ 表示由 P, Q 的所有分点为分点的划分，则

$$s(f; P \bigoplus Q) \geq s(f;P)$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$，有 $m \geq 1$ 使得

$$s(f;P_m) \geq L - \varepsilon$$

对于划分 P，用 $P \oplus P_m$ 表示由 P, P_m 的所有分点为分点的划分，则

$$s\left(f; P \bigoplus P_m\right) \geq s\left(f; P_m\right) \geq L-\varepsilon$$

在 $s\left(f; P \bigoplus P_m\right)$ 的和式中，与 $s\left(f; P\right)$ 的和式中不同的项是涉及 P_m 的分点的项，总数不超过 2^{m+1} 项，相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus P_m\| \leq \|P\|$. 因此，这些项的和不超过 $2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$\begin{aligned} s(f; P) &\geq s\left(f; P \bigoplus P_m\right)-2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\| \\ &\geq L-\varepsilon-2^{m+1}\sqrt{M^2+1} \end{aligned}$$

这样 $\underline{\lim}_{\|P\| \to 0^+} s(f; P) \geq L-\varepsilon$，进而有 $\underline{\lim}_{\|P\| \to 0^+} s(f; P) \geq L$.

类似地，记 $K=\overline{\lim}_{\|P\| \to 0^+} s(f; P)$. 对于任何 $\varepsilon>0$，有划分 Q 使得

$$s(f; Q) \geq K-\varepsilon$$

则 $s\left(f; Q \bigoplus P_m\right) \geq s(f; Q) \geq K-\varepsilon$. 在 $s\left(f; Q \bigoplus P_m\right)$ 的和式中，与 $s\left(f; P_m\right)$ 的和式中不同的项是涉及 Q 的分点的项，总数不超过 $2N$ 项，其中 N 是划分 Q 的分点数. 因此，这些项的和不超过 $2N\sqrt{M^2+1}\left\|P_m\right\|$. 于是

$$\begin{aligned} s\left(f; P_m\right) &\geq s\left(f; Q \bigoplus P_m\right)-2N\sqrt{M^2+1}\left\|P_m\right\| \\ &\geq K-\varepsilon-2N\sqrt{M^2+1}\left\|P_m\right\| \end{aligned}$$

这样，$L=\lim_{m \to \infty} s\left(f; P_m\right) \geq K-\varepsilon$. 进而得 $L \geq K$. 结合

$$K \geq \underline{\lim}_{\|P\| \to 0^+} s(f; P) \geq L$$

得 $\lim_{\|P\| \to 0^+} s(f; P)=L$. 即 $y=f\left(x\right)$ 可求长.

【思路二】事实上，结合到(1)是(2)的推论，我们只需直接证明(2). 证明过程如下：
由题设可知有

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{M^2+1}\left|x_{k+1}-x_k\right|=(b-a)\sqrt{M^2+1}$$

因此，$s\left(f; P\right)$ 有界.

对于划分 P, Q，用 $P \oplus Q$ 表示由 P, Q 的所有分点为分点的划分，由平面上点和点距离的三角不等式，立即有

$$s(f; P \bigoplus Q) \geq s(f; P)$$

考虑划分列 $\left\{Q_k\right\}$ 使得 $\lim_{k \to \infty}\left\|Q_k\right\|=0$ 且

$$\lim_{k \to \infty} s\left(f; Q_k\right)=L \equiv \overline{\lim}_{\|P\| \to 0} s(f; P)$$

对于每个 $k \geq 1$，设 N_k 为划分 Q_k 的分点数.

$$s\left(f; P \bigoplus Q_k\right) \geq s\left(f; Q_k\right) \geq L-\varepsilon$$

在$s\left(f;P\bigoplus Q_k\right)$的和式中，与$s\left(f;P\right)$的和式中不同的项是涉及$Q_k$的分点的项，总数不超过$2N_k$项，相应的小区间长度不超过$\left\|P\oplus Q_k\right\|\le\|P\|$. 因此，这些项的和不超过$2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$\begin{aligned}s(f;P)&\ge s\left(f;P\bigoplus Q_k\right)-2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|\\&\ge s\left(f;Q_k\right)-2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|\end{aligned}$$

这样 $\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)\ge s\left(f,Q_k\right),\forall k\ge 1$，进而有

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)\ge L=\varlimsup_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$$

所以 $\lim_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$存在， 即$y=f\left(x\right)$可求长. 自然也就有$\lim_{n\to\infty} s\left(f;P_n\right)$存在.