第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 B 卷》试题

一、(15 分) 已知椭球面$\Sigma_0 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ a>b$的外切柱面$\Sigma_\varepsilon\,(\varepsilon=1$或$-1)$平行于已知直线$l_\varepsilon : \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{z-3}{c}$. 试求与$\Sigma_\varepsilon$交于一个圆周的平面的法方向.

注：本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

二、(15 分) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$. 证明：

$$1\le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\le \frac{4}{3}.$$

三、(15 分) 设A为n阶复方阵，$p(x)$为A的特征多项式，又设$g(x)$为m次复系数多项式，$m\ge 1$. 证明：$g(A)$可逆当且仅当$p(x)$与$g(x)$互素.

四、(20 分) 设σ为n维复向量空间$\mathbb{C}^n$的一个线性变换. $\mathbf{1}$表示恒等变换. 证明以下两条等价：

(1) $\sigma=k\mathbf{1}, k\in\mathbb{C}$;

(2) 存在σ的$n+1$个特征向量：$v_1,\ldots,v_{n+1}$，这$n+1$个向量中任何n个向量均线性无关.

五、(15 分) 计算广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$，这里$(x)$表示$x$的小数部分（例如：当$n$为正整数且$x\in[n,n+1)$时，则$(x)=x-n$）.

六、(20 分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，满足对任意$x\in[0,1]$，$\displaystyle\int_{x^2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\ge \frac{x^2-x^4}{2}$.

证明：$\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\ge \frac{1}{10}$.