# 2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛
# (非数学类）试卷

**一 、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)**

**(1)** 已知$y_1=e^x$和$y_2=xe^x$是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是_____.

**(2)** 设有曲面$S:z=x^2+2y^2$和平面$\pi:2x+2y+z=0$，则与$\pi$平行的$S$的切平面方程是____________________.

**(3)** 设$y=y(x)$由$x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}\,t$所确定，则$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=0}=$________.

**(4)** 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$____________.

**(5)** 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$______.

**第二题：(12 分)**设$n$为正整数，计算$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}\,x.$

**第三题：(14 分)**设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数$A,B$使得$|f(x)|\le A,|f''(x)|\le B$，证明：对于任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

**第四题：(14 分)** (1) 设一球缺高为$h$，所在球半径为$R$。证明该球缺的体积为$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh$.

(2) 设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P:x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$。记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+y\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

**第五题：(15 分)**设$f$在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\,\mathrm{d}\,x,\ \text{求}\lim_{n\to\infty}x_n.$$

**第六题：(15 分)**设$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.