2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛
(非数学专业) 参考答案

一、计算下列各题

(1) **【参考解答】**: 记$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)$$
$$=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o(\frac{1}{n})\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

(2) **【参考解答】**: 将Σ（或分片后）投影到相应坐标平面上化为二重积分逐块计算.

$$I_1=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-2\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中D_{yz}为yOz面上的半圆$y^2+z^2\le a^2, z\le 0$. 用极坐标，得

$$I_1=-2\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\;r\,\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中D_{xy}为xOy平面上的圆域$x^2+y^2\le a^2$. 由极坐标，得

$$I_2=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2\right)r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}a^3$$

因此，
$$I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3) **【参考解答】**: 设圆柱容器的高为h，上下底的径为r，则有$\pi r^2h=V$或$h=\frac{V}{\pi r^2}$. 所需费用为

$$F(r)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\frac{2bV}{r}.$$

显然，$F'(r)=4a\pi r-\frac{2bV}{r^2}$.

令$F'(r)=0$，也即$r^3=\frac{bV}{2a\pi}$；这时高与底的直径之比为

$$\frac{h}{2r}=\frac{V}{2\pi r^3}=\frac{a}{b}.$$

(4) **【参考解答】**: 由

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)],$$

得$I=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]}$,

令$u=\frac{\pi}{4}-x$，得

$$I=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u(1+2\sin^2 u)}$$
$$=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\sin u}{\cos^2 u(1+2\sin^2 u)}$$

$$\underline{\underline{令t=\sin u}}-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+1t^2)}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}+\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+2t^2}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t\right]+C$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1+\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1-\sin(\frac{\pi}{4}-x)}\right|-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x))+C$$

二、求下列极限:

(1) **【参考解答】**: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-e$

$$=e\left[e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-1\right]$$

$$=e\left[\{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\}-1\right]=e\left[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}n[(1+\frac{1}{n})^n-e]=-\frac{e}{2}$.

(2) **【参考解答】**: 由泰勒公式有

$$a^{1/n}=e^{\ln a/n}=1+\frac{1}{n}\ln a+o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$$
$$b^{1/n}=e^{\ln b/n}=1+\frac{1}{n}\ln b+o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$$
$$c^{1/n}=e^{\ln c/n}=1+\frac{1}{n}\ln c+o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$$

因此，

$\frac{1}{3}\left(a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}\right)=1+\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$，

$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n=\left[1+\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o(\frac{1}{n})\right]^n .$$

令 $\alpha_n=\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o(\frac{1}{n})$，上式可改写成

$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n=\left[\left(1+\alpha_n\right)^{1/\alpha_n}\right]^{n\alpha_n}$$

显然，$\left(1+\alpha_n\right)^{1/\alpha_n}\to e\ (n\to+\infty)$，

$n\alpha_n\to\ln\sqrt[3]{abc}\ (n\to+\infty)$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}\,.$$

三、【参考解答】：由题设可知：

$$\lim_{y\to1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{f(y)}{y-1}=f'(1)=2\,.$$

令 $y=\sin^2x+\cos x$，那么当 $x\to0$ 时，

$$y=\sin^2x+\cos x\to1\,,$$

故由上式有 $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{\sin^2x+\cos x-1}=2$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2+x\tan x}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{\sin^2x+\cos x-1}\times\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right)\\&=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【注】最后一步的极限可用常规的办法——洛比达法则或泰劳展开——求出.

四、【参考解答】：设 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x=l$，并令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\,,\ 则\ \ F'(x)=f(x)\,,$$

并有 $\lim_{x\to+\infty}F(x)=l$.

对于任意的 $y>0$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{y}\int_0^y x\,\mathrm{d}F(x)\\ &= \frac{1}{y}xF(x)\Big|_{x=0}^{x=y} - \frac{1}{y}\int_0^y F(x)\,\mathrm{d}x\\ &= F(y) - \frac{1}{y}\int_0^y F(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

根据洛比达法则和变上限积分的求导公式，不难看出

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}F(y) = l\,.$$

因此，$\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x = l - l = 0$.

五、【参考证明】：(1) 令 $F(x) = f(x) - x$ ，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0,\ \ F(1) = -1 < 0$ ，所以，存在一个 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，使得 $F(\xi) = 0$ ，即 $f(\xi) = \xi$.

(2) 令 $G(x) = e^{-x}[f(x) - x]$ ，那么 $G(0) = G(\xi) = 0$. 这样，存在一个 $\eta \in (0, \xi)$ ，使得 $G'(\eta) = 0$ ，即

$$G'(\eta) = e^{-\eta}[f'(\eta) - 1] - e^{-\eta}[f(\eta) - \eta] = 0\,.$$

也即 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

六、【参考证明】：因为

$$e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right) < 1,\ \ \forall t > 0,$$

故有 $F\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{\frac{n}{2}} e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t < \frac{n}{2}$.

下面只需证明 $F(n) > \frac{n}{2}$ 即可. 由于

$$\begin{aligned}F(n) &= \int_0^n e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^n \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}e^{-t}\\ &= 1 - e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!}\right)\\ &\quad + \int_0^n e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned}F(n)&=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t\\&=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)\\&\quad+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\&\quad+\ldots+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-e^{-n}\end{aligned}$$

记 $a_i=\dfrac{n^i}{i!}$，那么 $a_0=1<a_1<a_2<\ldots<a_n$. 观察下面的方阵

$$\begin{pmatrix}a_0&0&\cdots&0\\a_0&a_1&\cdots&0\\\ldots&\ldots&\ddots&0\\a_0&a_1&\cdots&a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_n\\0&a_1&\cdots&a_n\\0&\ldots&\ddots&\ldots\\0&0&0&a_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2a_0&a_1&\cdots&a_n\\a_0&2a_1&\cdots&a_n\\\ldots&\ldots&\cdots&\ldots\\a_0&a_1&\cdots&2a_n\end{pmatrix}$$

整个矩阵的所有元素之和为

$$\begin{aligned}&(n+2)(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=(n+2)\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)\end{aligned}$$

基于上述观察，由（*）式我们便得到

$$\begin{aligned}F(n)&>n+1-\frac{(n+2)}{2}e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)\\&>n+1-\frac{(n+2)}{2}=\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

七、【参考解答】:**【思路一】**: 不存在. 假设存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5.$$

考虑方程 $f(f(x))=x$，即

$$1+x^2+x^4-x^3-x^5=x,\text{ 或}(x-1)(x^4+x^2+1)=0.$$

此方程有惟一实数根 $x=1$，即 $f(f(x))$ 有惟一不动点 $x=1$.

下面说明 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的不动点.

事实上，令 $f(1)=t$，则

$$f(t)=f(f(1))=1,\quad f(f(t))=f(1)=t,$$

因此$t=1$. 如所需. 记$g(x)=f(f(x))$，则一方面，

$$\left[g(x)\right]'=\left[f(f(x))\right]'\Rightarrow g'(1)=\left(f'(1)\right)^2\ge 0.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\left(1+x^2+x^4-x^3-x^5\right)'\\&=2x+4x^3-3x^2-5x^4\end{aligned}$$

从而$g'(1)=-2$. 矛盾. 所以，不存在$\mathbb{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5.$$

【思路二】: 满足条件的函数不存在. 理由如下:

首先，不存在$x_k\to+\infty$，使$f(x_k)$有界，否则

$$f(f(x_k))=1+x_k^2+x_k^4-x_k^3-x_k^5$$

有界，矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$. 从而由连续函数的介值性有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 则

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=-\infty$，矛盾.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim\limits_{y\to-\infty}f(y)=+\infty$，矛盾.

因此，无论哪种情况都不可能.

八、**【参考证明】**: 由于$f(x)$在$[0,\infty)$上一致连续，故对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{只要}\left|x_1-x_2\right|<\delta\ \ (x_1\ge 0,x_2\ge 0).$$

取一个充分大的自然数m，使得$m>\delta^{-1}$，并在$[0,1]$中取m个点:

$$x_1=0<x_2<\ldots<x_m=1,$$

其中$x_j=\dfrac{j}{m}$ $(j=1,2,\ldots,m)$. 这样，对于每一个j，

$$\left|x_{j+1}-x_j\right|=\frac{1}{m}<\delta.$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，故对于每一个$x_j$，存在一个$N_j$使得$\left|f(x_j+n)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只要$n>N_j$，这里的$\varepsilon$是前面给定的.

令$N=\max\{N_1,\ldots,N_m\}$，那么只要$n>N$，则

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中$j=1,2,\ldots,m$．设$x\in[0,1]$是任意一点，这时总有一个x_j使得$x\in[x_j,x_{j+1}]$.

由$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续性及$\left|x-x_j\right|<\delta$，可知，

$$\left|f(x_j+n)-f(x+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}(\forall n=1,2,\ldots);$$

另一方面，只要$n>N$，则$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

这样，由后面证得的两个式子就得到：只要

$$n>N,x\in[0,1]\text{，则}\left|f(x+n)\right|<\varepsilon,$$

注意到这里的N的选取与点x无关，这就证实了函数序列$\{f(x+n):n=1,2,\ldots\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0.