

2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类一、二年级) 参考答案

一、填空题

(1) 0 (2) $p > 1$ (3) $3\sqrt{2}\pi$ (4) $(1, 0, 1), (-1, 0, -1), (1, t, -1), (-1, t, 1), t \in \mathbb{R}$.

二、【参考解答】：由于形如 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ 的平面与 S 只能交于直线或空集，所以可以设平面 σ 的方程为 $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ ，它与 S 交线为圆。令 $x = \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$ ，则 σ 与 S 的交线可表示为

$$\Gamma(\theta) = \left(\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \alpha \cos \theta + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \theta + \gamma \right), \theta \in [0, 2\pi].$$

由于 $\Gamma(\theta)$ 是一个圆，所以它到一个定点 $P = (a, b, c)$ 的距离为常数 R 。于是有恒等式

$$(\cos \theta - a)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - b \right)^2 + \left(\alpha \cos \theta + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \theta + \gamma - c \right)^2 = R^2.$$

利用 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ ，可以将上式写成

$$A \cos 2\theta + B \sin 2\theta + C \cos \theta + D \sin \theta + E = 0,$$

其中 A, B, C, D, E 为常数。由于这样的方程对所有的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 恒成立，所以 $A = B = C = D = E = 0$ 。

特别地，我们得到

$$A = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) - \frac{1}{4}(\beta^2 + 1) = 0, B = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta = 0.$$

于是得到 $\alpha = 0, \beta = \pm 1$ ，平面 σ 的法向量为

$$(-\alpha, -\beta, 1) = (0, 1, 1) \text{ 或 } (0, -1, 1) \text{ 的非零倍数.}$$

三、【参考证明】：存在可逆方阵 T 使得 $T^{-1}AT = \tilde{A}$ 为对角阵。令 $T^{-1}BT = \tilde{B}$ ，则

$$\operatorname{tr} \left((AB)^2 \right) = \operatorname{tr} \left((\tilde{A}\tilde{B})^2 \right), \operatorname{tr} \left(A^2B^2 \right) = \operatorname{tr} \left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2 \right).$$

令 $\tilde{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}), \tilde{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ ，则

$$\operatorname{tr} \left((\tilde{A}\tilde{B})^2 \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2$$

$$\operatorname{tr} \left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2 \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}^2b_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2)b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2$$

于是

$$\operatorname{tr} \left((\tilde{A}\tilde{B})^2 \right) - \operatorname{tr} \left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2 \right) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 \leq 0.$$

四、【参考证明】：设 Γ 的圆心为 O , $\alpha_i = \frac{1}{2} \angle B_i O B_{i+1}$, $B_{n+1} = B_1$, 则

$$P_A = 2 \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i, P_B = 2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i.$$

先证：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\tan^{\frac{1}{3}} x \sin^{\frac{2}{3}} x > x. \quad (1)$$

令 $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} - x$, 则 $g(0) = 0$,

$$g'(x) = \frac{\cos^{\frac{4}{3}} x + \frac{1}{3} \cos^{-\frac{2}{3}} x \sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}} x} - 1 = \frac{2 \cos^2 x + 1}{3 \cos^{\frac{4}{3}} x} - 1 > \frac{3 \sqrt[3]{\cos^2 x \cos^2 x \cdot 1}}{3 \cos^{\frac{4}{3}} x} - 1 = 0$$

故 $g(x)$ 严格单调递增，因而 $g(x) > g(0) = 0$. (1) 得证.

$$\begin{aligned} P_A^{\frac{1}{3}} P_B^{\frac{2}{3}} &= 2 \left(\sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \right)^{\frac{2}{3}} = 2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\tan^{\frac{1}{3}} \alpha_i \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sin^{\frac{2}{3}} \alpha_i \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\geq 2 \sum_{i=1}^n \tan^{\frac{1}{3}} \alpha_i \sin^{\frac{2}{3}} \alpha_i > 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi. \end{aligned}$$

五、【参考证明】：令 $F(x) = \int_0^x a(t) dt$, 则

$$y(x) = C e^{-F(x)} + \int_0^x f(t) e^{F(t)-F(x)} dt.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 x_0 , 当 $t \geq x_0$ 时, 有 $|f(t)| \leq \varepsilon a(t)$.

$$\int_0^x f(t) e^{F(t)-F(x)} dt = e^{-F(x)} \int_0^{x_0} f(t) e^{F(t)} dt + e^{-F(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{F(t)} dt.$$

注意到

$$\begin{aligned} \left| e^{-F(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{F(t)} dt \right| &\leq e^{-F(x)} \int_{x_0}^x \varepsilon a(t) e^{F(t)} dt \\ &= \varepsilon e^{-F(x)} e^{F(t)} \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \varepsilon \left(1 - e^{F(x_0)-F(x)} \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} C e^{-F(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-F(x)} \int_0^{x_0} |f(t)| e^{F(t)} dt + \varepsilon = \varepsilon$. 由 ε 的任意性, 知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0.$$

六、【参考解答】：令 $g(x) = f(x) - x$, 则有

$$xg(x) = 2 \int_{\frac{x}{2}}^x g(t) dt.$$

对于 $x > 0$ ，根据积分平均值定理，存在 $x_1 \in (0, x)$ ，使得 $\int_{\frac{x}{2}}^x g(t) dt = g(x_1) \frac{x}{2}$ 。因而

$$g(x) = g(x_1).$$

设 $x_0 = \inf \{t \in (0, x) \mid f(x) = f(t)\}$ ，则有 $g(x_0) = g(x)$ 。

若 $x_0 > 0$ ，则重复上面的过程，可知存在 $y_0 \in (0, x_0)$ ，使得 $g(y_0) = g(x_0) = g(x)$ 。这与 x_0 的取法矛盾。因此，必有 $x_0 = 0$ 。这说明 $g(x) = g(0)$ 。

同理，对 $x < 0$ ，也可以证明 $g(x) = g(0)$ 。

总之， $g(x)$ 是常数。于是 $f(x) = x + C$ ， C 是常数。