第十二届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类低年级组）试题

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

1、设$\Omega:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\le 1$，则积分

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_\_.$$

2、设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{k^2}}{k}, y_n=\int_0^n e^{x^2}\,\mathrm{d}x$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=______$.

3、矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$的 Jordan 标准型为______.

4、设A为 2021 阶对称矩阵，A的每一行均为$1,2,\cdots,2021$的一个排列，则A的迹$\operatorname{tr}A=______$.

二、（15 分） 给定yOz平面上的圆$C: y=\sqrt{3}+\cos\theta, z=1+\sin\theta(\theta\in[0,2\pi])$.

1、求C绕z轴旋转所得到的环面S的隐式方程.

2、设$z_0\ge 0$，以$M\left(0,0,z_0\right)$为顶点的两个锥面S_1和S_2的半顶角之差为$\pi/3$，且均与环面S相切(每条母线都与环面相切)，求z_0和S_1,S_2的隐式方程.

三、（15 分） 设n阶复方阵$A_1,\cdots,A_{2n}$均相似于对角阵，$\mathbb{C}^n$表示复n维列向量空间. 证明:

1、$\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k$. 这里

$\ker A_k=\left\{\alpha \mid A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\right\}$，$\operatorname{Im}A_k=\left\{A_k\beta \mid \beta\in\mathbb{C}^n\right\}(k=1,\ldots,2n)$.

2、若对所有的$k<j$皆有$A_kA_j=0(k,j=1,2,\cdots,2n)$，则$A_1,\cdots,A_{2n}$中至少有$n$个矩阵为零矩阵.

四、（20 分） 称实函数f满足条件(P)：若f在$[0,1]$上非负连续,

$$f(1)>f(0)=0,\ \int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=+\infty,$$

且对任何$x_1,x_2\in[0,1]$成立$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$.

1、令$c>0$，对于$f_1(x)=cx$和$f_2(x)=\sqrt{x}$，分别验证f_1,f_2是否满足条件(P)，并计算$\lim_{x\to0^+}\left(f_1(x)-xf_1'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}$和$\lim_{x\to0^+}\left(f_2(x)-xf_2'(x)\right)^m e^{f_2'(x)}$.

2、证明: $\forall m \geq 1$，存在满足条件(P)的函数f以及趋于零的正数列$\{x_n\}$，使得f在每一点x_n可导，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f\left(x_n\right)-x_n f'\left(x_n\right)\right)^m e^{f'\left(x_n\right)}=+\infty.$

五、(15 分) 设$\alpha,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$和$A$均为实数. 回答以下问题:

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\alpha+\beta)=A$成立的充要条件是什么?

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\right)=0$成立的充要条件是什么?

六、(15 分) 设g为$\mathbb{R}$上恒正的连续函数，对于正整数n以及$x_0,y_0\in\mathbb{R}$，考察微分方程

$$\begin{cases} y'(x)=y^{\frac{1}{2n+1}}(x)g(x), \\ y\left(x_0\right)=y_0. \end{cases} \qquad (1)$$

证明:

1、方程（1）有定义在整个$\mathbb{R}$上的解(称为**全局解**);

2、若$y_0=0$则方程(1)有无穷多个全局解;

3、若$y=y(x)$是方程(1)的解，则y在$\mathbb{R}$上非负，或在$\mathbb{R}$上非正.