2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）参考答案

一、【证明 1】：在空间中取直角坐标系，记椭球面 S 的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, V=(\alpha,\beta,\gamma).$$

设 $(x,y,z)\in\Gamma$，则光束中的光线

$$l(t)=(x+y+z)+t(\alpha,\beta,\gamma), t\in R$$

是椭球面 S 的切线.

由于每条切线与椭球面有且仅有一个交点，故 $t=0$ 是方程

$$\frac{(x+t\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+t\beta)^2}{b^2}+\frac{(z+t\gamma)^2}{c^2}=1$$

的唯一解. 由于 $(x,y,z)\in\Gamma\subset S$，上述方程化为

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z\right)t=0$$

这个方程只有 $t=0$ 的唯一解，当且仅当 $\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=0$. 这是一个过原点的平面方程，故 γ 落在过椭球面中心的一张平面上.

【证明 2】：在空间中做仿射变换，将椭球面映成圆球面. 这时平行光束映成平行光束，切线映成切线，切点映成切点，椭球中心映成球面中心.

由于平行光束照圆球面的所有切线的切点是一个大圆，它落在过球心的平面上，而放射变换将平面映成平面，故 Γ 落在一张椭球面中心的平面上.

二、【证明】：由秩不等式 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\le\operatorname{rank}(BA)+n$，得 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\le n$.

结果
$$\operatorname{rank}A\le\frac{n}{2}\text{或}\operatorname{rank}B\le\frac{n}{2}.$$

注意到 n 为奇数，故有 $\operatorname{rank}A<\frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank}B<\frac{n}{2}$ 成立.

若 $\operatorname{rank}A<\frac{n}{2}$，则 $\operatorname{rank}(A+J_A)\le\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}J_A<n$，故 $0\in S_1$；

或 $\operatorname{rank}B<\frac{n}{2}$，则 $\operatorname{rank}(B+J_B)\le\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}J_B<n$，故 $0\in S_2$.

所以最终有 $0\in S_1\cup S_2$.

三、【证明】：记 $A_1=\left(p_1^{(1)},\cdots,p_{2016}^{(1)}\right),\cdots,A_{2017}=\left(p_1^{(2017)},\cdots,p_{2016}^{(2017)}\right)$. 考虑线性方程组

$$x_1p_1^{(1)}+\cdots+x_{2017}p_1^{(2017)}=0.$$

由于未知数个数大于方程个数，故该线性方程组必有非零解 $(c_1,\cdots,c_{2017})$. 从而

$c_1A_1+\cdots+c_{2017}A_{2017}$ 的第一列为 0，更有

$$\det\left(c_1A_1+\cdots+c_{2017}A_{2017}\right)=0.$$

四、【证明】：因为 $\int_0^1\frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\frac{f_1^2(x)-f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f_0(x)\mathrm{d}x\ge 0.$$

所以 $a_2-a_1=2\int_0^1\frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x-\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1\frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f_1^2(x)+f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{\left[f_1(x)-f_0(x)\right]^2}{2\left[f_1(x)+f_0(x)\right]}\mathrm{d}x\ge 0.\end{aligned}$$

归纳地可以证明 $a_{n+1}\ge a_n, n=1,2,\cdots$.

由于 f_0,f_0 为正的连续函数，可取常数 $k\ge 1$，使得 $f_1\le kf_0$. 设 $c_1=k$. 根据递推关系式可以归纳证明

$$f_n(x)\le c_nf_{n-1}(x), \tag{1}$$

其中 $c_{n+1}=\frac{2c_n}{c_n+1}, n=0,1,\cdots$. 容易证明 $\left\{c_n\right\}$ 单调递减且趋于 1，且

$$\frac{c_n}{c_n+1}\le\frac{k}{k+1}.$$

以下证明 $\left\{a_n\right\}$ 收敛. 由(1)可得 $a_{n+1}\le c_{n+1}a_n$. 因此

$$c_{n+1}a_{n+1}\le\frac{2c_{n+1}}{c_n+1}c_na_n=\frac{4c_n}{\left(c_n+1\right)^2}c_na_n\le c_na_n.$$

这就说明 $\left\{c_na_n\right\}$ 是正单调递减数列，因而收敛. 注意到 $\left\{c_n\right\}$ 收敛到 1，可知 $\left\{a_n\right\}$ 收敛，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le c_1a_1=ka_1$.

五、【证明】：若 $f(x)$ 是这样的函数，则 $f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数. （1）可以表示为

$$\left(\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}(x)+x\right)'\le 0\ .$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}(x)+x$ 是单调递减函数. 因而

$$\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}\left(x+1\right)+\left(x+1\right)\le\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}\left(x\right)+x\ ,$$

即 $\alpha-1\le f^{1-\alpha}\left(x\right)-f^{1-\alpha}\left(x+1\right)<f^{1-\alpha}\left(x\right)$. 因此有 $f^{\alpha-1}\left(x\right)<\dfrac{1}{\alpha-1}$. 从而 $f\left(x\right)$是有界函数.

从$f\left(x\right)$的严格递增性，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$收敛. 由微分中值定理，存在$\xi\in\left(x,x+1\right)$，使得

$$f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=f'\left(\xi\right)\ge f^{\alpha}\left(x\right)\le f^{\alpha}\left(0\right)>0.$$

令$x\to+\infty$，上式左端趋于 0，可得矛盾!

六、【证明】: 由于f,g可用单调阶梯函数逼近，故可不妨设它们都是单调增的阶梯函数. 令$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$，则对$\forall x,y\in\left[0,1\right]$，有$\left|h\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\le1$.

事实上，对$x\ge y$，我们有

$$\begin{aligned}&-1\le-\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)\le h\left(x\right)-h\left(y\right)\\&=f\left(x\right)-f\left(y\right)-\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)\le f\left(x\right)-f\left(y\right)\le1\end{aligned}$$

对$x<y$，有

$$-1\le f\left(x\right)-f\left(y\right)\le h\left(x\right)-h\left(y\right)\le g\left(y\right)-g\left(x\right)\le1.$$

现记

$$C_1=\left\{x\in\left[0,1\right]\mid f\left(x\right)\ge g\left(x\right)\right\},C_2=\left\{x\in\left[0,1\right]\mid f\left(x\right)<g\left(x\right)\right\},$$

则C_1,C_2分别为有限个互不相交区间的并，且由$\int_0^1 f\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g\,\mathrm{d}x$，有

$$\int_{C_1}h\,\mathrm{d}x=-\int_{C_2}h\,\mathrm{d}x.$$

让$|C_i|\left(i=1,2\right)$表示C_i所含的那些区间的长度之和，则

$$|C_1|+|C_2|=1.$$

于是

$$\begin{aligned}&2\int_0^1|f-g|\,\mathrm{d}x=2\left(\int_{C_1}h\,\mathrm{d}x-\int_{C_2}h\,\mathrm{d}x\right)\\&\le\left(\frac{|C_2|}{|C_1|}\int_{C_1}h\,\mathrm{d}x+\frac{|C_1|}{|C_2|}\int_{C_2}\left(-h\right)\mathrm{d}x\right)+\int_{C_1}h\,\mathrm{d}x-\int_{C_2}h\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{|C_1|}\int_{C_1}h\,\mathrm{d}x+\frac{1}{|C_2|}\int_{C_2}\left(-h\right)\mathrm{d}x\right)\\&\le\sup_{C_1}h+\sup_{C_2}\left(-h\right)\le1.\end{aligned}$$

注意，上式中最后一个不等式来自$\left|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right|\le1$，另外，若有某个$|C_i|$等于 0，则结论显然成立.