姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线　答题时不要超过此线

第十四届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中已知单叶双曲面 S 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 求过 $P=(1,1,1)$ 点落在单叶双曲面 S 上的两条直线之间的夹角.

解答. 设过 P 点直线的方向向量（单位向量）为

(1) $$v=(a,b,c),\ \ a^2+b^2+c^2=1,\ \ c>0,$$

则直线的参数方程为

$$(x,y,z)=(1,1,1)+(a,b,c)t, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

设它整体落在单叶双曲面 S 上，代入 S 的方程，得到

$$(1+at)^2+(1+bt)^2-(1+ct)^2=1, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

$$2(a+b-c)t+(a^2+b^2-c^2)t^2=0, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

…………………………………………………… (5 分)

于是得到

(2) $$a+b-c=0,\ \ a^2+b^2-c^2=0.$$

由方程 (1) 和 (2) 得到

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2},\ a + b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由此求得两个直线方向

$$v_1 = (a, b, c) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}),\ \ v_2 = (a, b, c) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

得到两条过 P 且落在单叶双曲面 S 上的直线

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + v_1 t,\ \ (x, y, z) = (1, 1, 1) + v_2 t.$$

这两条直线的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{2}.$$

故两直线夹角为 60° (或 120° ,跟直线定向有关).

. . . . (15 分)

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

解答. 对于 $n\geqslant 1$, 记 $A_n=\dfrac{a_n}{n^2}-a$, $B_n=\dfrac{b_n}{n^2}-b$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=0$. 从而 $\{A_n\},\{B_n\}$ 有界. 记 $M=\sup\limits_{n\geqslant1}\big(|A_n|+|B_n|\big)+|a|+|b|$.

.... (4 分)

由 Stolz 公式或利用定积分, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}k^2(n-k)^2&=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^3}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^4}+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^4}{n^5}\Big)\\&=\frac13-\frac24+\frac15=\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

.... (8 分)

另一方面, 对于 $n\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}-\frac{ab}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2-\frac{a_0b_n+a_nb_0}{n^5}\Big|\\=\;&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2\Big(A_kB_{n-k}+bA_k+aB_{n-k}\Big)\Big|\\\leqslant\;&\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(|A_k|+|B_k|\big).\end{aligned}$$

.... (12 分)

由 Stolz 公式,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(|A_k|+|B_k|\big)=\lim_{n\to+\infty}M\big(|A_n|+|B_n|\big)=0.$$

因此,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=ab\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2=\frac{ab}{30}.$$

.... (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 与 A 可交换, 其元素均为正整数且行列式为 1. 证明存在正整数 k 使得 $B = A^k$.

证明. 令

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由于 B 与 A 可交换, 可得 $c = b, d = a - b$. B 的元素均为正整数, 故 a, b 为正整数且 $a > b$. 再由 $\det B = 1$ 得到 $a^2 - ab - b^2 = 1$.

…………………………………………………………………………… (5 分)

若 $b = 1$, 则由 $a^2 - ab - b^2 = 1$ 易得 $a = 2$, 因此

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

若 $b > 1$, 考察矩阵

$$B_1 = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b-a \\ 2b-a & 2a-3b \end{pmatrix}.$$

令 $a_1 = a - b, b_1 = 2b - a$, 则有 $2a - 3b = a_1 - b_1$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

显然 a_1 为正整数. 注意到 $a^2 - ab - b^2 = 1$, 若 $a \geqslant 2b$, 则有 $1 + b^2 = a^2 - ab = a(a-b) \geqslant 2b^2$, 即 $b^2 \leqslant 1$, 矛盾, 由此得到 $b_1 = 2b - a$ 也是正整数. 显然 $a_1^2 - a_1b_1 - b_1^2 = \det B_1 = (\det A)^{-1} \det B = 1$, 即 $a_1(a_1 - b_1) = 1 + b_1^2 > 0$, 从而 $a_1 > b_1$. 这表明矩阵 B_1 中的元素 a_1, b_1 满足矩阵 B 中元素 a, b 所满足的条件, 但是 $b_1 = b - (a - b) < b$. 若 $b_1 > 1$, 则类似地矩阵

$$B_2 = A^{-1}B_1 = (A^{-1})^2B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

中的元素 a_2, b_2 也满足矩阵 B 中元素 a, b 所满足的条件, 但是 $b_2 < b_1 < b$. 继续进行下去, 通过左乘 A^{-1} 有限次, 比如 s 次后可以使得得到的矩阵

$$B_s = (A^{-1})^sB = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ b_s & a_s - b_s \end{pmatrix}$$

中的元素 a_s, b_s 满足 $a_s > b_s > 0, a_s^2 - a_s b_s - b_s^2 = 1$ 且 b_s 为最小正整数, 即 $b_s = 1$.

………………………………………………………… (12 分)

由前面的证明得到 $B_s = A$, 从而 $B = A^{s+1}$, 令 $k = s + 1$ 即可.

………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 $n \geq 2$ 为正整数, 证明多项式 $f(x) = x^n - x - 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 对任意多项式 $F(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 用 $\widetilde{F}(x)$ 表示 $F(x)$ 的互反多项式, 即

$$\widetilde{F}(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = x^{\deg F} F\left(\frac{1}{x}\right).$$

显然有 $\widetilde{\widetilde{F}}(x) = F(x)$ 且若 $F(x) = G(x)H(x)$ 为多项式 $G(x)$ 和 $H(x)$ 的乘积, 则 $\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)\widetilde{H}(x)$ 是互反多项式 $\widetilde{G}(x)$ 和 $\widetilde{H}(x)$ 的乘积.

.... (5 分)

下面证明 $f(x) = x^n - x - 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 若 $n = 2$, 则结论显然成立.

.... (7分)

下面设 $n \geq 3$. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 由于 $f(x)$ 本原, 所以存在整系数多项式 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(x) = g(x)h(x)$ 且 $1 \leq \deg g(x) = r < n$. 这时 $\deg h(x) = n - r$. 进一步地, 由于 $f(x)$ 的首项系数为 1, 常数项为 -1, 我们可以假设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的首项系数均为 1, 而它们的常数项只能是 ± 1.

.... (10 分)

令 $k(x) = g(x)\widetilde{h}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 即由于 $\deg \widetilde{h}(x) = \deg h(x) = n - r$, 我们有 $\deg k(x) = n$, 且

$$k(x)\widetilde{k}(x) = g(x)\widetilde{h}(x)\widetilde{g}(x)h(x) = f(x)\widetilde{f}(x). \tag{1}$$

.... (12 分)

显然 $\widetilde{f}(x) = -x^n - x^{n-1} + 1$, 所以

$$f(x)\widetilde{f}(x) = -x^{2n} - x^{2n-1} + x^{n+1} + 3x^n + x^{n-1} - x - 1.$$

记 $k(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, 则显然有 $b_n, b_0 = \pm 1$. 比较 (1) 式两端 x^n 的系数得到

$$b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 + b_n^2 = 3,$$

所以 $b_1^2+\cdots+b_{n-1}^2=1$. 由于 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 均为整数, 所以 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 中恰有一个为 ±1 而其余均为 0, 即 $k(x)$ 形如 $k(x)=b_nx^n+b_ix^i+b_0$, $1\le i\le n-1$, 且 $b_n,b_i,b_0=\pm1$. 由此得到

$$k(x)\widetilde{k}(x)=b_nb_0x^{2n}+b_nb_ix^{2n-i}+b_ib_0x^{n+i}+3x^n+b_nb_ix^i+b_ib_0x^{n-i}+b_nb_0.$$

下面看 (1) 式中次数 $<n$ 的各项系数, 常数项 $b_nb_0=-1$, 由此得到 $b_0=-b_n$. 又由 $n\ge3$ 有 $n>n-1>1$, 所以 $n-i\neq i$. 若 $n-i>i$, 则有 $i=1$ 且 $b_i=b_0=-b_n$, 这时 $k(x)=b_nx^n-b_nx-b_n=b_nf(x)$. 若 $n-i<i$, 则有 $i=n-1$ 且 $b_i=b_n=-b_0$, 这时 $k(x)=b_nx^n+b_nx^{n-1}-b_n=-b_n\widetilde{f}(x)$. 这样我们证明了 $k(x)=\pm f(x)$ 或者 $k(x)=\pm\widetilde{f}(x)$.

…………………………………………………………… (18 分)

若 $k(x)=\pm f(x)$, 则有 $\widetilde{h}(x)=\pm h(x)$. 故 $h(x)$ 的任一复根就是 $f(x)$ 和 $\widetilde{f}(x)$ 的公共根. 类似地, 若 $k(x)=\pm\widetilde{f}(x)$, 则有 $\widetilde{g}(x)=\pm g(x)$. 故 $g(x)$ 的任一复根也是 $f(x)$ 和 $\widetilde{f}(x)$ 的公共根. 这表明不论那种情况, $f(x)$ 和 $\widetilde{f}(x)$ 都有公共根.

设 α 是 $f(x)$ 和 $\widetilde{f}(x)$ 的一个公共根, 则有 $\alpha\neq0$, $\alpha^n=\alpha+1$ 且 $\alpha^n=-\alpha^{n-1}+1$, 由此得到 $\alpha^{n-1}=-\alpha$, 即 $\alpha^n=-\alpha^2$. 从而 $\alpha^2+\alpha+1=0$, 故 $\alpha^3=1$, 所以 $\alpha^n=1$, α 或者 α^2. 若 $\alpha^n=1$, 则有 $1=\alpha+1$, 即 $\alpha=0$, 矛盾. 若 $\alpha^n=\alpha$, 则有 $\alpha=\alpha+1$, 矛盾. 若 $\alpha^n=\alpha^2$, 则有 $\alpha^2=-\alpha^2$, 即 $\alpha=0$, 矛盾. 所以 $f(x)=x^n-x-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

…………………………………………………………… (20 分)

注: 也可以利用多项式 $f(x)$ 与 $\widetilde{f}(x)$ 互素来说明 $f(x)$ 和 $\widetilde{f}(x)$ 没有公共根.

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=0$, 函数 f 在 $[-1,2]$ 上有界，在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\Big(\dfrac{k}{n}+\beta_n\Big)=\int_0^1 f(x)\,dx$.

证明. 记 $M=\sup\limits_{x\in[-1,2]}|f(x)|$, $m_n=\big[n|\beta_n|\big]+1$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{m_n}{n}=0$. 从而存在 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时, $2m_n\leqslant n$. 考虑 $n\geqslant 3N+3$, 我们有

$$\begin{aligned}
&n\Big|\int_{\frac{k}{n}+\beta_n}^{\frac{k+1}{n}+\beta_n}\Big(f\big(\frac{k}{n}+\beta_n\big)-f(x)\Big)\,dx\Big|\\
\leqslant\ &\sup_{t\in[\frac{k}{n}+\beta_n,\frac{k+1}{n}+\beta_n]}f(t)-\inf_{t\in[\frac{k}{n}+\beta_n,\frac{k+1}{n}+\beta_n]}f(t)\\
\leqslant\ &\Big(\sup_{t\in[\frac{k}{n}-|\beta_n|,\frac{k+1}{n}-|\beta_n|]}f(t)-\inf_{t\in[\frac{k}{n}-|\beta_n|,\frac{k+1}{n}-|\beta_n|]}f(t)\Big)\\
&+\Big(\sup_{t\in[\frac{k}{n}+|\beta_n|,\frac{k+1}{n}+|\beta_n|]}f(t)-\inf_{t\in[\frac{k}{n}+|\beta_n|,\frac{k+1}{n}+|\beta_n|]}f(t)\Big),\qquad m_n\leqslant k\leqslant n-m_n.
\end{aligned}$$

.... (5 分)

因此

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}+\beta_n\big)-\int_0^1 f(x)\,dx\Big|\\
\leqslant\ &\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=m_n}^{n-m_n}f\big(\frac{k}{n}+\beta_n\big)-\int_{\frac{m_n}{n}+\beta_n}^{1-\frac{m_n}{n}+\beta_n}f(x)\,dx\Big|+\frac{6m_n}{n}\\
=\ &\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=m_n}^{n-m_n}\int_{\frac{k}{n}+\beta_n}^{\frac{k+1}{n}+\beta_n}\Big(f\big(\frac{k}{n}+\beta_n\big)-f(x)\Big)\,dx\Big|+\frac{6m_n}{n}\\
\leqslant\ &\big(U(f;P_n)-L(f;P_n)\big)+\big(U(f;Q_n)-L(f;Q_n)\big)+\frac{6m_n}{n},
\end{aligned}$$

其中 $U(f,P)$ 以及 $L(f,P)$ 依次表示 f 对应与于 $[0,1]$ 的划分 P 的 Darboux 上和与 Darboux 下和, P_n 表示分点为 $\big\{\frac{k}{n}-|\beta_n|\big|n|\beta_n|\leqslant k\leqslant n\big\}\cup\{a,b\}$ 的划分, Q_n 表示分点为 $\big\{\frac{k}{n}+|\beta_n|\big|1\leqslant k\leqslant n-n|\beta_n|\big\}\cup\{a,b\}$ 的划分.

于是由 f 在 $[0,1]$ 的可积性以及 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{m_n}{n}=0$ 得到结论.

.... (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x \geqslant 0$, 定义 $F(x)=\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt$.

(1) 若 $\alpha\in(-1,0)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 证明: F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha\in(0,1)$, f 以 $T>0$ 为周期, $\int_0^3 f(t)\,dt=2022$. 证明: F 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

证明. (1) 由题设, f 有界. 记 $M=\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|$. 对于 $y>x\geqslant 0$, 记 $\delta=y-x$, 我们有

$$
\begin{aligned}
|F(y)-F(x)| &= \Big|\int_0^{x+\delta} t^\alpha f(t+x+\delta)\,dt-\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt\Big|\\
&\leqslant 2M\int_x^{x+\delta} t^\alpha\,dt+M\int_0^\delta t^\alpha\,dt+\Big|\int_0^x t^\alpha f(t+x+\delta)\,dt-\int_\delta^{x+\delta} t^\alpha f(t+x)\,dt\Big|\\
&\leqslant 3M\int_0^\delta t^\alpha\,dt+M\int_0^x \big(t^\alpha-(t+\delta)^\alpha\big)\,dt\\
&= \frac{3M}{1+\alpha}\delta^{1+\alpha}+\frac{M}{1+\alpha}\Big(x^{1+\alpha}-(x+\delta)^{1+\alpha}+\delta^{1+\alpha}\Big)\\
&\leqslant \frac{4M}{1+\alpha}\delta^{1+\alpha}=\frac{4M}{1+\alpha}|y-x|^{1+\alpha}.
\end{aligned}
$$

因此, F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

…………………………………………………… (14 分)

(2) 我们指出, 若函数 g 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 则 g 是"线性增长"的, 即存在常数 C_1,C_2 使得

$$|g(x)|\leqslant C_1+C_2x,\qquad \forall\, x\geqslant 0.$$

具体地, 有 $\delta_0>0$ 使得

$$|g(x)-g(y)|\leqslant 1,\qquad \forall\, 0\leqslant x\leqslant y<x+\delta_0.$$

因此, 对于任何 $x\geqslant 0$,

$$|g(x)|\leqslant |g(0)|+\Big[\frac{x}{\delta_0}\Big]+1\leqslant |g(0)|+1+\frac{x}{\delta_0}.$$

记 $A=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$, $G(x)=\int_0^x \big(f(t)-A\big)\,dt$. 则 $G(T)=G(0)=0$. 由此易见 G 以 T 为周期. 从而 G 有界. 设 $M=\max\limits_{x\in[0,T]}|G(x)|$.

若 $A \neq 0$, 则

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_0^x t^\alpha f(t+x)\, dt \right| \geqslant \frac{|A|}{1+\alpha} x^{1+\alpha} - \left| \int_0^x t^\alpha (f(t+x) - A)\, dt \right| \\
= \ & \frac{|A|}{1+\alpha} x^{1+\alpha} - \left| x^\alpha G(2x) - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} G(t+x)\, dt \right| \\
\geqslant \ & \frac{|A|}{1+\alpha} x^{1+\alpha} - 2Mx^\alpha, \qquad \forall x \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

因此, F 在 $[0, +\infty)$ 上非线性增长, 从而 F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

.... (16 分)

若 $A = 0$, 则

$$
F(x) = x^\alpha G(2x) - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} G(t+x)\, dt, \qquad \forall x \geqslant 0.
$$

由我们在 (1) 的证明中所证明的结果可见, 只要说明 $H(x) = x^\alpha G(2x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续. 由题设, $G(3) = 2022$, 而 $G(0) = 0$, 因此, G 不恒为常数. 于是对于任何 $\delta > 0$, 有 $s \in (0, \delta)$ 以及 $X \geqslant 0$ 使得 $G(2X + 2s) \neq G(2X)$. 从而

$$
\begin{aligned}
& \left| H(X+s+nT) - H(X+nT) \right| \\
= \ & \left| (X+s+nT)^\alpha G(2X+2s+2nT) - (X+nT)^\alpha G(2X+2nT) \right| \\
\geqslant \ & \left| (X+nT)^\alpha \Big(G(2X+2s+2nT) - G(2X+2nT) \Big) \right| \\
& - \left| G(2X+2s+2nT) \Big((X+s+nT)^\alpha - (X+nT)^\alpha \Big) \right| \\
\geqslant \ & (X+nT)^\alpha \left| G(2X+2s) - G(2X) \right| - Ms^\alpha, \qquad \forall n \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

特别,

$$
\lim_{n \to +\infty} \left| H(X+s+nT) - H(X+nT) \right| = +\infty.
$$

因此, H 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续, 从而 F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

.... (20 分)

注. 本题证明路径多, 请注意证明中出现的 x^α, $x^{1+\alpha}$ 的单调性(单增还是单减), 以及 $\displaystyle\int_0^1 t^s\, ds$ 的收敛性.