

2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛

(非数学专业) 试题

一、计算题 (本题共 5 小题, 每题 6 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 + \frac{x}{2} - \tan \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right].$

3. 设函数 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 $f_y \neq 0$ 且

$$f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx} = 0,$$

$y = y(x, z)$ 是由方程 $z = f(x, y)$ 所确定的函数, 求 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$

4. 求不定积分 $I = \int \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$

5. 求曲面 $x^2 + y^2 = az$ 和 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) 所围立体的表面积.

二、(本题 13 分) 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^\alpha \sin^2 x} dx$ 的敛散性, 其中 α 是一个实常数.

三、(本题 13 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷次可微, 并且满足: 存在 $M > 0$, 使得

$$|f^{(k)}(x)| \leq M, \forall x \in (-\infty, +\infty) (k = 1, 2, \dots) \text{ 且 } f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0, (n = 1, 2, \dots).$$

求证: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

四、(本题共 16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分) 设 D 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq a$ ($a > b > 0$),

面密度为 ρ 的均质薄板; l 为通过椭圆焦点 $(-c, 0)$ (其中 $c^2 = a^2 - b^2$) 垂直于薄板的旋转轴.

(1) 求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J ;

(2) 对于固定的转动惯量, 讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

五、(本题 12 分) 设连续可微函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(xz - y, x - yz) = 0$ (其中 $F(u, v)$

有连续偏导数) 唯一确定, L 为正向单位圆周, 试求:

$$I = \oint_L (xz^2 + 2yz) dy - (2xz + yz^2) dx.$$

六、(本题共 16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分)

(1) 求解微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2) 如 $y = f(x)$ 为上述方程的解, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{n^2x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}.$$