第十二届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学类）试题

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=$______________.

2、设 $P_0(1,1,-1),P_1(2,-1,0)$ 为空间的两点，则函数 $u=xyz+e^{xyz}$ 在点 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为______________.

3、记空间曲线 Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}(a>0)$，则积分 $\oint_\Gamma(1+x)^2\mathrm{d}s=$______.

4、设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&&\\&16&\\&&1\end{pmatrix}$，且 $|A|>0$, $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，其中 I 为单位矩阵，则 $B=$______________.

5、函数 $u=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{2}{x_3}\left(x_i>0,i=1,2,3\right)$ 的所有极值点为______________.

二、（12 分）n 为正整数，求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-\left(x^2+1\right)\arctan^3 x}.$$

三、（12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]x^n$ 的收敛域.

四、（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且

$$f(a)=f(b)=0,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$$

(1). 证明：存在互不相同的点 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得

$$f'\left(x_i\right)=f\left(x_i\right),\quad i=1,2;$$

(2) 证明：存在 $\xi\in(a,b),\ \xi\neq x_i,\ i=1,2$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

五、（12 分）设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：

(1) 存在实对称矩阵 B，使得 $B^{2021}=A$, 且 $AB=BA$；

(2) 存在一个多项式 $p(x)$，使得上述矩阵 $B=p(A)$；

(3) 上述矩阵 B 是唯一的.

六、（12 分） 设 $A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k$，其中 $0<x,y<1$，证明:

$$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}\right).$$

七、（12 分） 设 $f(x),g(x)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的连续函数，且 $f(x)$ 单调增加，求证:

$$\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$