## 2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 参考答案

一、【参考解答】: 设所求球面的球心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ,则有

$$ig(\overline{x}-1ig)^2+ig(\overline{y}-2ig)^2+ig(\overline{z}-7ig)^2=ig(\overline{x}-4ig)^2+ig(\overline{y}-3ig)^2+ig(\overline{z}-3ig)^2 \ =ig(\overline{x}-5ig)^2+ig(\overline{y}+1ig)^2+ig(\overline{z}-6ig)^2=ig(\overline{x}-\sqrt{7}ig)^2+ig(\overline{y}-\sqrt{7}ig)^2+ig(\overline{z}-3ig)^2$$

$$\mathbb{P}egin{cases} ar{3}\overline{x}+\overline{y}-\overline{z}=-10,\ 4\overline{x}-3\overline{y}-\overline{z}=4,\ \left(\sqrt{7}-1
ight)\overline{x}+\left(\sqrt{7}-2
ight)\overline{y}-7\overline{z}=-20. \end{cases} \Rightarrow \left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}
ight)=\left(1,-1,3
ight).$$

而
$$\left(\overline{x}-1
ight)^2+\left(\overline{y}-2
ight)^2+\left(\overline{z}-7
ight)^2=25$$
. 于是所求球面方程为 $\left(x-1
ight)^2+\left(y+1
ight)^2+\left(z-3
ight)^2=25$ .

二、【参考证明】: 记  $a_k=\int_0^1 f_k\left(x\right) \mathrm{d}\,x, \forall k=1,2,\cdots,n$ . 当某个  $a_k=0$  时,结论是平凡的.

下面设 $a_k>0 \Big( \forall k=1,2,\cdots,n \Big)$ . 于是有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n rac{f_k\left(x
ight)}{a_k}} \,\mathrm{d}\,x \leq \int_0^1 rac{1}{n} \sum_{k=1}^n rac{f_k\left(x
ight)}{a_k} \,\mathrm{d}\,x = 1.$$

由此立即可得存在 $\xi \in \left[0,1\right]$ ,使得 $\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k\left(\xi\right)}{a_k} \leq 1$ .结论得证.

三、【参考证明】: 设 $\sigma$ 在 $F^n$ 的标准基 $arepsilon_1, \cdots, arepsilon_n$ 下的矩阵为B,则

$$\sigma(\alpha) = B\alpha, (\forall \alpha \in F^n)$$
.

由条件:  $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \Big( \forall \alpha \in F^n \Big)$ , 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$ . 故 $BA = AB\Big( \forall A \in M_n(F) \Big)$ .

设 $B=\left(b_{ij}
ight)$ ,取 $A={
m diag}\left(1,\cdots,1,c,1,\cdots,1
ight)$ ,其中c
eq 0,1,则由AB=BA可得 $b_{ij}=0, orall i
eq j$ .又取

$$A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$
 ,

这里  $E_{st}$  是  $\left(s,t\right)$  一位置为 1,其他位置为 0 的矩阵,则由 AB=BA 可得  $a_{ii}=a_{jj}\left(orall i,j\right)$  . 取  $\lambda=a_{11}$  ,故  $B=\lambda I_n$  ,从而  $\sigma=\lambda\cdot\mathrm{id}_{F^n}$  .

四、【参考解答】: 三角形的三个角A,B,C的取值范围为

$$ig(A,B,Cig)\in D\equiv ig\{ig(lpha,eta,\gammaig)\,|\; lpha+eta+\gamma=\pi,lpha>0,eta>0,\gamma>0ig\}$$

首先考虑 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 在D的闭包

$$E = \left\{ \left(lpha,eta,\gamma
ight) | \ lpha + eta + \gamma = \pi, lpha \geq 0, eta \geq 0, \gamma \geq 0 
ight\}$$

上的最大值. 有

$$\begin{split} &\max_{\substack{(A,B,C) \in E}} \left( 3\sin A + 4\sin B + 18\sin C \right) \\ &= \max_{\substack{A+C \le \pi \\ A,C \ge 0}} \left( 3\sin A + 4\sin \left( A + C \right) + 18\sin C \right) \\ &= \max_{\substack{0 \le C \le \pi \\ 0 \le C \le \pi}} \max_{\substack{0 \le A \le \pi - C}} \left( \left( 3 + 4\cos C \right) \sin A + 4\sin C\cos A + 18\sin C \right) \\ &= \max_{\substack{0 \le C \le \pi \\ 0 \le C \le \pi}} \left( \sqrt{\left( 3 + 4\cos C \right)^2 + 16\sin^2 C} + 18\sin C \right) \\ &= \max_{\substack{0 \le C \le \pi \\ 0 \le C \le \pi}} \left( \sqrt{25 + 24\cos C} + 18\sin C \right) \end{split}$$

考虑 
$$f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C, 0\leq C\leq\pi$$
.容易知道 
$$f(C)\geq f\Big(\pi-C\Big), \forall\, C\in \left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

直接计算导数,有

$$f'(C) = 18\cos C - \frac{12\sin C}{\sqrt{25 + 24\cos C}}.$$

令 
$$f'(C)=0$$
 ,即 $ig(8\cos C-1ig)ig(27\cos^2 C+32\cos C+4ig)=0$ . 从而它在 $ig[0,rac{\pi}{2}ig]$ 范围

内的解为 $C = \arccos \frac{1}{8}$ . 于是

$$egin{aligned} &\max_{0\leq C\leq\pi}f(C)=\max_{0\leq C\leq\pi/2}f(C)=\max\left\{figg(rccosrac{1}{8}igg),f(0),figg(rac{\pi}{2}igg)
ight\}\ &=\max\left\{rac{35\sqrt{7}}{4},7,23
ight\}=rac{35\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\max_{(A,B,C) \in E} \left( 3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C \right) = \frac{35\sqrt{7}}{4}.$$

另一方面,不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$  在E 的边界上(A,B,C 之一为 0)的最大值为 22. 所以所求最大值为  $\frac{35\sqrt{7}}{4}$  .

五、【参考证明】: 由泰勒展开式, 
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$
,存在  $\forall \xi \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 使得 
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8\left(1+\xi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

从而
$$\left|\sqrt{1+x}-\left(1+rac{x}{2}
ight)
ight|\leq x^2, orall x\in\left[-rac{1}{2},rac{1}{2}
ight]$$
. 于是当  $n\geq 2$  时,不管怎么选取只取值  $\pm 1$  的数列  $\left\{a_n
ight\}_{n\geq 1}$  均有

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \sqrt{n + a_k} - n^{\frac{3}{2}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\sqrt{n}} \right| = \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \sqrt{1 + \frac{a_k}{n}} - \sum_{k=1}^{n} \left( 1 + \frac{a_k}{2n} \right) \right|$$

$$\leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

可以有很多种方法选取只取值为 $\pm 1$ 的数列 $\left\{a_n\right\}_{n\geq 1}$ 使得 $\lim_{n\to +\infty}\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha$ . 此时成立

$$\lim_{n\to +\infty} \Biggl[ \sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \Biggr] = \alpha.$$

例如,我们可以按以下方式选取:取 $a_1 = 1$ ,依次定义

$$a_{n+1} = egin{cases} 1, \sum_{k=1}^n a_k < 2lpha\sqrt{n}, \ -1, \sum_{k=1}^n a_k \geq 2lpha\sqrt{n}. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y}_{n+1} - \boldsymbol{y}_n = \frac{\boldsymbol{y}_n \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1}} - \boldsymbol{y}_n = -\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + \boldsymbol{y}_n}{\sqrt{n+1} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

这时
$$-rac{2}{\sqrt{n+1}} < y_{n+1} - y_n < 0$$
,而当 $y_n < 2 lpha$ 时,我们有

$$\boldsymbol{y}_{n+1} - \boldsymbol{y}_n = \frac{\boldsymbol{y}_n \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} - \boldsymbol{y}_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \boldsymbol{y}_n}{\sqrt{n+1} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

这时 
$$0 < y_{n+1} - y_n < rac{2}{\sqrt{n+1}};$$
于是当  $y_{n+1} - 2\alpha, y_n - 2\alpha$  同号时,

$$\left|y_{n+1}-2\alpha\right|\leq \left|y_{n}-2\alpha\right|,$$

当  $y_{n+1}-2lpha,y_n-2lpha$  异号时,

$$\left|y_{n+1}-2\alpha\right|\leq \left|y_{n+1}-y_{n}\right|\leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有
$$\left|y_{n+1}-2lpha
ight|\leq \max\left(\left|y_{n}-2lpha
ight|,rac{2}{\sqrt{n+1}}
ight).$$

注意到对任何 N>0 ,总有  $m\geq N$  ,使得  $y_{m+1}-2lpha,y_m-2lpha$  异号.由上面的讨

论可以得到

$$\left|y_k-2lpha
ight|\leq rac{2}{\sqrt{m+1}}\leq rac{2}{\sqrt{N+1}}, orall k=m+1, m+2, \cdots.$$

因此,有 $\lim_{n\to+\infty}y_n=2\alpha$ .

六、【参考证明】: 设 V 是 F 上 n 维线性空间,  $\sigma$  是 V 上的线性变换,它在 V 的一组基下的矩阵为 A . 下面证明存在  $\sigma$  -不变子空间  $V_1,V_2$  满足  $V=V_1\oplus V_2$  , 且  $\sigma\mid_{V_1}$  是同构,  $\sigma\mid_{V_2}$  是幂零变换.

首先有子空间升链:  $Ker\sigma\subseteq Ker\sigma^2\subseteq\cdots\subseteq Ker\sigma^k$  , 从而存在正整数 m 使得 $Ker\sigma^m=Ker\sigma^{m+i}$   $(i=1,2,\cdots)$  . 进而有 $Ker\sigma^m=Ker\sigma^{2m}$  .

下面证明  $V = Ker\sigma^m \oplus \operatorname{Im} \sigma^m$ .

 $orall lpha \in Ker\sigma^m \cap \operatorname{Im} \sigma^m, \ \ ext{由} \ lpha \in \operatorname{Im} \sigma^m, \ \ ext{存在} \ eta \in V \ , \ \ \$ 使得  $lpha = \sigma^m(eta)$ . 由此  $0 = \sigma^m(lpha) = \sigma^{2m}(eta)$ , 所以  $eta \in Ker\sigma^{2m}$ , 从而  $eta \in Ker\sigma^m = Ker\sigma^{2m}$ . 故  $lpha = \sigma^m(eta) = 0, \ Ker\sigma^m \cap \operatorname{Im} \sigma^m = \left(0\right)$ ,

从而 $V = Ker\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$ .

由  $\sigma\left(Ker\sigma^m\right)\subseteq Ker\sigma^m, \sigma\left(\operatorname{Im}\sigma^m\right)\subseteq \operatorname{Im}\sigma^m, \ \operatorname{Im}\sigma^m, \operatorname{Im}\sigma^m \in \sigma$ 一不变子空间.又由  $\sigma^m\left(Ker\sigma^m\right)=\left(0\right)$  知  $\sigma\mid_{Ker\sigma^m}$  是幂零变换.由  $\sigma\left(\operatorname{Im}\sigma^m\right)\subseteq \operatorname{Im}\sigma^m$  知  $\sigma\mid_{\operatorname{Im}\sigma^m}$  是满线性变换,从而可逆.

从  $V_1={
m Im}\,\sigma^m, V_2={
m ker}\,\sigma^m$  中各找一组基  $lpha_1,\cdots,lpha_s;eta_1,\cdots,eta_t$ ,合并成 V 的一组基,  $\sigma$  在此基下的矩阵为  $egin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ,其中 B 是  $\sigma\mid_{V_1}$  在基  $lpha_1,\cdots,lpha_s$  下的矩阵,从而可逆; C

是 $\sigma \mid_{V_2}$ 在基 $\beta_1$ ,…, $\beta_t$ 下的矩阵,是幂零矩阵. 从而A相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ,其中B是可逆矩阵,

C 是幂零矩阵.

【注】如果视F为复数域直接用若当标准型证明,证明正确可给 10 分:

存在可逆矩阵P,使得

$$P^{-1}AP = diag \left(J\left(\lambda_{_{1}},n_{_{1}}\right),\cdots,J\left(\lambda_{_{s}},n_{_{s}}\right),J\left(0,m_{_{1}}\right),\cdots,J\left(0,m_{_{t}}\right)\right)$$

其中 $J\left(\lambda_i,n_i\right)$ 是特征值为 $\lambda_i$  的阶为 $n_i$  的若当块, $\lambda_i\neq 0$ ; $J\left(0,m_j\right)$ 是特征值为 0 的阶为 $m_i$  的若当块.令

$$B = diag \Big( \! J \left( \lambda_1, n_1 \right), \cdots, \! J \left( \lambda_s, n_s \right) \! \Big), C = diag \left( \! J \left( 0, m_1 \right), \cdots, \! J \left( 0, m_t \right) \! \right)$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  .

七、【参考证明】:首先对于任何 $x \in R$ ,不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到

$$\int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt$$
 收敛. 记

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt, orall x \in R.$$

由于F单调下降

$$egin{split} &\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt) \sinig(t) \mathrm{d}\,t \ &= \int_0^\pi \Bigl( F(2nk\pi+nt) - F(2nk\pi+2n\pi-nt) \Bigr) \sinig(t) \mathrm{d}\,t \geq 0, orall t \geq 0, orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t \geq 0, 
orall t$$

从而

$$\begin{split} f\bigg(\frac{1}{n}\bigg) &= \int_0^{+\infty} F(t) \sin\frac{t}{n} \,\mathrm{d}\, t = \int_0^{+\infty} n F(nt) \sin t \,\mathrm{d}\, t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} n F(nt) \sin\left(t\right) \,\mathrm{d}\, t \\ &\geq \int_0^{2\pi} n F(nt) \sin\left(t\right) \,\mathrm{d}\, t = \int_0^{\pi} n \left(F(nt) - F(2n\pi - nt)\right) \sin\left(t\right) \,\mathrm{d}\, t \\ &\geq \int_0^{\pi/2} n \left(F(nt) - F(2n\pi - nt)\right) \sin\left(t\right) \,\mathrm{d}\, t \\ &\geq n \bigg[F\bigg(\frac{n\pi}{2}\bigg) - F\bigg(\frac{3n\pi}{2}\bigg)\bigg] \int_0^{\pi/2} \sin\left(t\right) \,\mathrm{d}\, t = n \bigg[F\bigg(\frac{n\pi}{2}\bigg) - F\bigg(\frac{3n\pi}{2}\bigg)\bigg] \geq 0. \end{split}$$
 结合 
$$\lim_{n \to +\infty} f\bigg(\frac{1}{n}\bigg) = 0 \ \ \lim_{n \to +\infty} n \bigg[F\bigg(\frac{n\pi}{2}\bigg) - F\bigg(\frac{3n\pi}{2}\bigg)\bigg] = 0. \end{split}$$

这样,任取 $\delta > 0$ ,有N > 0使得当n > N时,有

$$n\left|Figg(rac{n\pi}{2}igg) - Figg(rac{3n\pi}{2}igg)
ight| \leq \delta.$$

从而对于任何m>0, n>N有

$$egin{aligned} 0 & \leq nFigg(rac{n\pi}{2}igg) \leq \sum\limits_{k=0}^m n\left|Figg(rac{3^kn\pi}{2}igg) - Figg(rac{3^{k+1}n\pi}{2}igg)
ight| + nFigg(rac{3^{m+1}n\pi}{2}igg) \ & \leq \sum\limits_{k=0}^m rac{\delta}{3^k} + nFigg(rac{3^{m+1}n\pi}{2}igg) \leq rac{3\delta}{2} + nFigg(rac{3^{m+1}n\pi}{2}igg). \end{aligned}$$

上式中令 $m \to +\infty$ ,由 $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ 得到

$$0 \leq n Figg(rac{n\pi}{2}igg) \leq rac{3\delta}{2}, orall n > N.$$

所以  $\lim_{n \to +\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ . 进一步利用单调性,当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$0 \le x F(x) \le \pi \left[ rac{2x}{\pi} 
ight] F\left[ \left[ rac{2x}{\pi} 
ight] \cdot rac{\pi}{2} 
ight],$$

其中[s]表示实数s的整数部分. 于是可得  $\lim_{x \to +\infty} xF(x) = 0$ .

## 更多资料关注-微信公众号: 爱吃老冰棍 全年免费分享

从而又知xF(x)在 $[0,+\infty)$ 上有界,设上界为 $M\geq 0$ .  $orall arepsilon\in \left(0,\pi
ight)$ ,当x>0时有

$$egin{aligned} 0 & \leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1}t) \sin t \, \mathrm{d} \, t \ \leq \int_0^{\pi} x^{-1} t H(x^{-1}t) rac{\sin t}{t} \, \mathrm{d} \, t \ & \leq x^{-1} arepsilon H \Big( x^{-1} arepsilon \Big) \int_arepsilon^{\pi} rac{\sin t}{t} \, \mathrm{d} \, t + M arepsilon, \, orall x > 0. \end{aligned}$$

于是 $0\leq \varlimsup_{x o 0^+}f(x)\leq Marepsilon$ . 由 $arepsilon\in ig(0,\piig)$ 的任意性,可得 $\lim_{x o 0^+}f(x)=0$ . 进而因f是奇函数推得 $\lim_{x o 0}f(x)=0$ .