2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、（本题 15 分）已知空间的两条直线：

$$l_1:\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1}, l_2:\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1},$$

1）证明l_1和l_2异面；

2）求l_1和l_2公垂线的标准方程；

3）求连接l_1上任一点和l_2上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

二、（本题 15 分） 设$f\in C[0,1]$是非负的严格单调增函数。

1）证明：对任意$n\in N$，存在唯一的$x_n\in[0,1]$，使得$\left(f\left(x_n\right)\right)^n=\int_0^1\left(f(x)\right)^n\mathrm{d}x.$

2）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

三、（本题 15 分） 设V为闭区间$[0,1]$上全体实函数构成的实向量空间，其中向量加法和纯量乘法均为通常的。$f_1,\cdots,f_n\in V$. 证明以下两条等价：

1）$f_1,\cdots,f_n$ 线性无关；

2）$\exists a_1,\cdots,a_n\in[0,1]$使得$\det\left[f_i(a_j)\right]\neq 0$，$\det$为求行列式.

四、（本题 15 分） 设$f(x)$在R上有二阶导函数，$f(x),f'(x),f''(x)$ 均大于零，假设存在正数a,b，使得$f''(x)\le af(x)+bf'(x)$对于一切$x\in R$成立。

(1) 求证：$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0;$

(2) 求证：存在常数c使得$f'(x)\le cf(x)$.

(3) 求使上面不等式成立的最小常数c.

五、（本题 20 分） 设m为给定的正整数。证明：对任何的正整数n,l，存在m阶方阵X使得

$$X^n+X^l=I+\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\2&1&0&\cdots&0&0\\3&2&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\m-1&m-2&m-3&\cdots&1&0\\m&m-1&m-2&\cdots&2&1\end{pmatrix}.$$

六、（本题 20 分） 设$\alpha\in(0,1)$，$\{a_n\}$是正数列且满足

$$\lim_{n\to\infty}\inf n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}n^k a_n=0$，其中$k>0$.