# 2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛（数学类）试卷

**一、(本题 15 分)** 平面 $R^2$ 上两个半径为 $r$ 的圆 $C_1, C_2$ 外切于 $P$ 点，将圆 $C_2$ 沿 $C_1$ 的圆周（无滑动）滚动一周，这时 $C_2$ 上的 $P$ 点也随 $C_2$ 的运动而运动。记 $\Gamma$ 为 $P$ 点的运动轨迹曲线，称为心脏线。现设 $C$ 为以 $P$ 的初始位置（切点）为圆心的圆，其半径为 $R$。记 $\gamma: R^2 \cup \{\infty\} \to R^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 $C$ 的反演变换，它将 $Q \in R^2 \setminus \{P\}$ 映成射线 $PQ$ 上的点 $Q'$，满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线。

**二、(本题 10 分)** 设 $n$ 阶方阵 $B(t)$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为

$$B(t) = \left(b_{ij}(t)\right), b(t) = \left(b_1(t), \cdots, b_n(t)\right)^T,$$

其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 $t$ 的实系数多项式，$i, j = 1, 2, \cdots, n$。记 $\mathrm{d}(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式，$\mathrm{d}_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 $i$ 列后所得的 $n$ 阶矩阵的行列式。若 $\mathrm{d}(t)$ 有实根 $t_0$，使得 $B(t_0)X = b(t_0)$ 成为关于 $X$ 的相容线性方程组，试证明：$\mathrm{d}(t), \mathrm{d}_1(t), \cdots, \mathrm{d}_n(t)$ 必有次数大于等于 1 的公因式。

**三、(本题 15 分)** 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数，$f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$ 且 $0 < f(x) < x, x \in (0, a)$. 令 $x_{n+1} = f(x_n), x_1 \in (0, a)$.

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限；

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛？若不收敛，则说明理由；若收敛，则求其极限。

**四、(本题 15 分)** 设 $a > 1$，函数 $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 可微，求证：存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得 $f'(x_n) < f(ax_n), n = 1, 2, \cdots$.

**五、(本题 20 分)** 设 $f: [-1, 1] \to R$ 为偶函数，$f$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，又设 $g$ 是 $[-1, 1]$ 上的凸函数，即对任意 $x, y \in [-1, 1]$ 及 $t \in (0, 1)$ 有

$$g(tx + (1-t)y) \le tg(x) + (1-t)g(y).$$

求证：$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$

**六、(本题 25 分)** 设 $R^{n\times n}$ 为 $n$ 阶实方阵全体，$E_{ij}$ 为 $(i, j)$ 位置元素为 1，其余位置元素为 0 的 $n$ 阶方阵，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 让 $\Gamma_r$ 为秩等于 $r$ 的 $n$ 阶实方阵全体，$r = 0, 1, 2, \cdots, n$，并让 $\phi: R^{n\times n} \to R^{n\times n}$ 为可乘映照，即满足：$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B), \forall A, B \in R^{n\times n}$.

试证明：(1) $\forall A, B \in \Gamma_r$，秩 $\phi(A) =$ 秩 $\phi(B)$。

(2) 若 $\phi(0) = 0$，且存在某个秩为 1 的矩阵 $W$，使得 $\phi(W) \neq 0$，则必存在可逆方阵 $R$ 使得 $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$ 对于一切 $E_{ij}$ 皆成立，$i, j = 1, 2, \cdots, n$.