2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

第一题: (15 分) 求经过三平行直线 $L_1: x=y=z$, $L_2: x-1=y=z+1$, $L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

第二题: (20 分)设 $C^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域C 上的线性空间,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

(1) 假设
$$A=egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
,若 $AF=FA$,证明:

$$A = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \dots + a_{21}F + a_{11}E$$
;

(2) 求
$$C^{n imes n}$$
的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n imes n}\mid FX=XF
ight\}$ 的维数.

第三题: $(15\ m{G})$ 假设V 是复数域C 上n 维线性空间 (n>0),f,g 是V 上的线性变换. 如果 fg-gf=f ,证明: f 的特征值都是 0,且 f,g 有公共特征向量.

第四题: (10 分)设 $\left\{f_n(x)\right\}$ 是定义在 $\left[a,b\right]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛,并在 $\left[a,b\right]$ 上满足 $\left|f_n'(x)\right| \leq M$.

- (1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在[a,b]上一致收敛;
- (2) 设 $f(x) = \lim_{n o \infty} f_n(x)$,问f(x)是否一定在 $\left[a,b\right]$ 上处处可导,为什么?

第五题: (10 分)设
$$a_n=\int_0^{rac{\pi}{2}}t\left|rac{\sin nt}{\sin t}
ight|^3\mathrm{d}\,t$$
,证明 $\sum_{n=1}^{\infty}rac{1}{a_n}$ 发散.

第六题: (15 分) f(x,y) 是 $\left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1 \right\}$ 上二次连续可微函数,满足

$$rac{\partial^2 f}{\partial x^2} + rac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$$
 ,

计算积分
$$I = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

第七题: **(15 分)**假设函数 f(x) 在[0,1] 上连续,在 $\left(0,1\right)$ 内二阶可导,过点 A(0,f(0)) ,与点 B(1,f(1)) 的直线与曲线 y=f(x) 相交于点 C(c,f(c)) ,其中 0< c<1 .证明:在 $\left(0,1\right)$ 内至少存在一点 ξ ,使 $f''(\xi)=0$.

1