2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

（数学类）试卷

一、（本题 15 分） 在空间直角坐标系中，设马鞍面 S 的方程为 $x^2-y^2=2z$. 设 σ 为平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$，其中 α,β,γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标，使得过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ.

二、（本题 15 分） $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为 n 阶实方阵，满足

1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$；

2) 对每个 $i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，有 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a$.

求 $f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,\cdots,x_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 的规范形.

三、（本题 20 分） 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A,B 皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价：i) A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵；ii) A 的行列式的绝对值为 1；

2) 若又知 $A,A-2B,A-4B,\cdots,A-2nB,A-2\left(n+1\right)B,$

$A-2(n+n)B$ 皆可逆，且它们的逆矩阵皆为整矩阵. 证明：$A+B$ 可逆.

四、（本题 15 分） 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续可微，在 $x=0$ 处有任意阶导数，

$$f^{(n)}\left(0\right)=0\left(\forall n\geq 0\right),$$

且存在常数 $C>0$ 使得

$$\left|xf'\left(x\right)\right|\leq C\,|\,f\left(x\right)|,\forall x\in\left[0,1\right].$$

证明：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)}{x^n}=0\left(\forall n\geq 0\right)$；(2)在 $\left[0,1\right]$ 上成立 $f\left(x\right)\equiv 0$.

五、（本题 15 分） 设 $\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$ 是两个数列，$a_n>0\left(n\geq 0\right)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n,n\geq 2.$$

求证：(1) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\ln\left(n+1\right)}{\ln n}+b_n\left(n\geq 2\right)$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

六、（本题 20 分） 设 $f:\mathbb{R}\to\left(0,+\infty\right)$ 是一可微函数，且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$，有

$$\left|f'\left(x\right)-f'\left(y\right)\right|\leq\left|x-y\right|^{\alpha}，\text{其中 }\alpha\in(0,1]\text{ 是常数.}$$

求证：对所有 $x\in\mathbb{R}$，有 $\left|f'\left(x\right)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\dfrac{\alpha+1}{\alpha}f\left(x\right)$.