2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类一、二年级）试卷

一、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体：矩阵的每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为 1，则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}|A| =$______.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛，则 p 取值范围________.

(3) 设 $D: x^2+2y^2 \le 2x+4y$，则积分 $I = \iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$_______.

(4) 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$，则 $X=$_____或_____或________或________.

二、（本题 15 分） 在空间直角坐标系中，设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$，σ 是空间中的平面，它与 S 的交集为一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

三、（本题 15 分） 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\operatorname{tr}\left((AB)^2\right) \le \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)$.

四、（本题 20 分） 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的周长. 求证：$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

五、（本题 15 分） 设 $a(x), f(x)$ 为 R 上的连续函数，且对任意 $x\in R$ 有 $a(x)>0$. 已知

$$\int_0^{\infty} a(x)\,\mathrm{d}x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a(x)} = 0,\ y'(x)+a(x)y(x)=f(x), x\in R$$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

六、（本题 15 分） 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的连续函数，且满足方程

$$xf(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$.