

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 参考答案

一、【证明】：注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \leq 1$ ，由中值定理，有

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \leq \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, n = 0, 1, 2, \dots$$

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛，从而 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 极限存在。

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 ξ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根。

进一步，设 η 也为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根，则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \leq \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0, 1)$ 可得 $\eta = \xi$ ，即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一。

二、【证明】：反证法。设方程有解，即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$ 。注意到 B 的特征根为 0，且其代数重根为 3。

设 λ 为 A 的一个特征根，则 λ^2 为 B 的特征根，所以 $\lambda = 0$ 。从而 A 的特征根为 0。于是 A 的 Jordan 标准型只可能为

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 A^2 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$ 。因此 A^2 的秩不大于 1，与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾。所以 $X^2 = B$ 无解。

三、【证明】：结论成立。分两步证明结论。

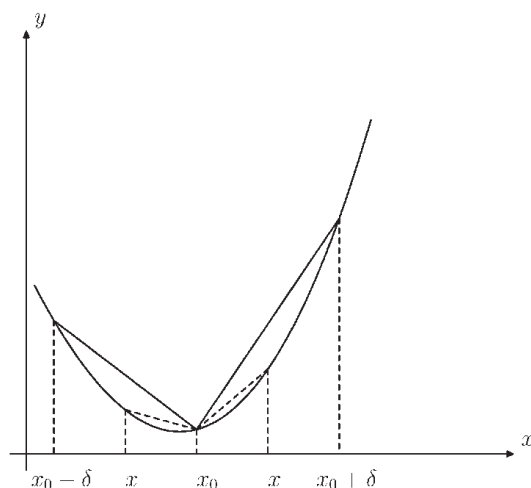
(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的凸函数 $g(x)$ ，容易验证 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ：

$$\frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{\delta} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta}$$

从而

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \left| \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta} \right| + \left| \frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{\delta} \right|, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续。一般地，可得开区间上的一元凸函数连续。



(ii) 设 $(x_0, y_0) \in D$, 则有 $\delta > 0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D.$$

注意到固定 x 或 y 时, $f(x, y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x, y_0), f(x, y_0 + \delta), f(x, y_0 - \delta)$ 都是 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x, y_0 + \delta) - f(x, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x, y_0) - f(x, y_0 - \delta)|}{\delta} + \\ & \frac{|f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta, y_0)|}{\delta} \leq M_\delta, \\ & \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{aligned}$$

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x, y) \in E_\delta$,

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \left(\frac{|f(x, y_0 + \delta) - f(x, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x, y_0) - f(x, y_0 - \delta)|}{\delta} \right) |y - y_0| + \\ & \left(\frac{|f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta, y_0)|}{\delta} \right) |x - x_0| \\ & \leq M_\delta |y - y_0| + M_\delta |x - x_0|. \end{aligned}$$

于是 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

四、【证明】: 记 $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| < +\infty$, 令

$$r(x) = f(x) - f(1) - f'(1)(x - 1) = f(x) - a(x - 1).$$

由 Peano 型的泰勒展开式可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1)$, 使得当 $\delta < x \leq 1$ 时, $|r(x)| \leq \varepsilon(1 - x)$. 于是有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n f(x) dx &= \int_0^\delta x^n f(x) dx + \int_\delta^1 a x^n (x - 1) dx + \int_\delta^1 x^n r(x) dx \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

注意到

$$|R_1| \leq M \int_0^\delta x^n dx = M \frac{\delta^{n+1}}{n+1}, \quad R_2 = -\frac{a}{(n+1)(n+2)} + a \left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta^{n+2}}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq \int_\delta^1 x^n |r(x)| dx \leq \varepsilon \int_\delta^1 x^n (1-x) dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 x^n (1-x) dx = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_1| = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_2 + a| = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_3| \leq \varepsilon$. 所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx + a \right| \leq \varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a$.

五、【证明】 容易知道 A, B, C 共线, D, E, F 共线. 而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面. 然后, 可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的, 且不是同一条直线. 这就又排除了双曲抛物面的可能 (双曲抛物面的同族直母线都异面, 不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

【注】 曲面方程是 $(x-2)^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ (不要求写).

六、【证明】 取任意实数 r , 由题设知 $(v+r\beta)A(v+r\beta)^T \geq 0$, 即

$$vAv^T + rvA\beta^T + r\beta Av^T + r^2\beta A\beta^T \geq 0.$$

亦即 $vAv^T + r(vA\beta^T + \beta Av^T) + r^2\beta A\beta^T \geq 0$.

若 $vA\beta^T \neq 0$, 则有 $vA\beta^T + \beta Av^T \neq 0$, 因此可取适当的实数 r 使得

$$vAv^T + r(vA\beta^T + \beta Av^T) + r^2\beta A\beta^T < 0$$

矛盾.

七、【证明】 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$, 定义

$$A_m = \left[\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t) dt \right], \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

对于 $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, 设非负整数 $k \leq l$ 满足 $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}, \frac{l}{n} \leq \beta < \frac{l+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)| dx \\ & \quad + \left| \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{l}{n}} (f(x) - g(x)) dx \right| + \int_{\frac{l}{n}}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx \\ & \leq \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} 1 dx + 0 + \int_{\frac{l}{n}}^{\beta} 1 dx \leq \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

八、【证明】: 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t) dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt & \geq \int_0^q [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \\ & \geq \frac{1}{q} \left(\int_0^q \varphi^{-1}(t) dt \right)^2 = \frac{1}{q} (a - Q)^2 = \frac{1}{q} (I + P)^2, \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt \geq \int_0^p [\varphi(t)]^2 dt \geq \frac{1}{p} \left(\int_0^p \varphi(t) dt \right)^2 = \frac{1}{p} (a - P)^2 = \frac{1}{p} (I + Q)^2.$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt & \geq \frac{1}{p} (I + Q)^2 + \frac{1}{q} (I + P)^2 \\ & \geq \frac{2}{\sqrt{pq}} (I + P)(I + Q) = \frac{2}{\sqrt{a}} (QP + aI). \end{aligned}$$

易见, 可取到适当的 p, q 满足 $P = Q = \frac{a - I}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt & \geq \frac{1}{a} \left[\frac{(a - I)^2}{4} I + aI \right] \\ & = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{(a + I)^2}{4} \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$