## 2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛

## (非数学类) 试卷

一、填空题(本题共4个小题, 每题5分, 共20分):

轴所围三角形区域.

(2) 设 
$$f(x)$$
 是连续函数,满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2$ ,则 $f(x) = _____$ .

(3) 曲面 
$$z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$$
 平行平面  $2x + 2y - z = 0$  的切平面方程是\_\_\_\_\_\_.

(4) 设 
$$y = y(x)$$
 由方程  $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$  确定,其中  $f$  具有二阶导数,且  $f' \neq 1$ ,则  $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

第二题: (5 分)求极限 
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$$
, 其中  $n$  是给定的正整数.

**第三题:** (15 分)设函数 f(x) 连续,  $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , A 为常数, 求 g'(x) 并讨论 g'(x) 在 x=0 处的连续性.

**第四题**: **(15 分)**已知平面区域  $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi \ , 0 \le y \le \pi \}$ , L 为 D 的正向边界,试证: (1)  $\int_I x e^{\sin y} \, \mathrm{d} \, y - y e^{-\sin x} \, \mathrm{d} \, x = \int_I x e^{-\sin y} \, \mathrm{d} \, y - y e^{\sin x} \, \mathrm{d} \, x;$ 

(2) 
$$\oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx \ge \frac{5}{2}\pi^2$$
.

**第五题**: **(10 分)**已知  $y_1=xe^x+e^{2x}$  ,  $y_2=xe^x+e^{-x}$  ,  $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶 常系数线性非齐次微分方程的三个解,试求此微分方程.

第六题: (10 分)设抛物线  $y=ax^2+bx+2\ln c$  过原点,当  $0\leq x\leq 1$  时, $y\geq 0$ ,又已知该 抛物线与 x 轴及直线 x=1 所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ . 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

**第七题**: **(15 分)**已知  $u_n(x)$  满足  $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$  (n 为正整数),且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$ ,求函数项级数  $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 之和.

第八题: (10 分)求
$$x \to 1-$$
 时,与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

1