第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 A 卷》试题及参考解答

一、(15 分) 设不全为零的$a,b,c\in\mathbb{R}$，求直线$\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$绕$z$轴旋转所得的旋转曲面方程.

【参考解答】: 设点$M_1(0,0,0)$，方向$\vec{s}_1=(0,0,1)$，则z轴为直线L_1：$\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$.
直线

$$L_2:\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{b}=\frac{z-1}{c}$$

过点$M_2(1,1,1)$，方向为$\vec{s}_2=(a,b,c)$. $\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$的混合积为

$$\left(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\right)=a-b$$

(1). 当$a=b$时，L_2与L_1共面. 分以下三种情况讨论.

1). 当$\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$，即$c=0$时，$L_2$与$L_1$垂直，此时所得的旋转面是$z=1$的平面. 当$\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\neq 0$，即$c\neq 0$时，$L_2$与$L_1$平行或者相交于一点，于是有以下两种情形.

2). 当L_2平行于L_1时，所得的旋转曲面是一个圆柱面$x^2+y^2=2$.

3). 当L_1与 L_2 相交于一点时，所得的旋转面为一个圆锥面，顶点为它们的交点$\left(0,0,\dfrac{a-c}{a}\right)$的锥面方程$x^2+y^2-\dfrac{2a^2}{c^2}\left(z-\dfrac{a-c}{a}\right)=0$.

(2). 当$a\neq b$时，即L_2与L_1不共面时，首先考虑L_2与L_1不垂直时的情形. 设$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$为 L_2上的任意一点，$M(x,y,z)$为过M_0的旋转曲面上的纬圆上的任意一点，则有

$$\begin{cases}\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{s}_1=0\\ \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\overrightarrow{M_1M}\right|\\ \dfrac{x_0-1}{a}=\dfrac{y_0-1}{b}=\dfrac{z_0-1}{c}\end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases}z-z_0=0\\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2\\ x_0=1+at\\ y_0=1+bt\\ z_0=1+ct\end{cases}$$

其中$t\in\mathbb{R}$为参数. 因L_1与 L_2不垂直，由$\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=c\neq 0$得到

$$t=\frac{z_0-1}{c}=\frac{z-1}{c}$$

以及

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= x_0^2+y_0^2=\left[1+\frac{a}{c}(z-1)\right]^2+\left[1+\frac{b}{c}(z-1)\right]^2 \\
&= Az^2+Bz+C
\end{aligned}
$$

其中

$$
A=\frac{a^2+b^2}{c^2}, B=\frac{a(c-a)+b(c-b)}{c^2}, C=\frac{(c-a)^2+(c-b)^2}{c^2}
$$

经计算可得 $AC-B^2=\dfrac{(a-b)}{c^2}>0$. 注意到 $A>0$ 以及

$$
x^2+y^2=Az^2+2Bz+C=A\left(z+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}
$$

得到

$$
\frac{A}{AC-B^2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{A^2}{AC-B^2}\left(z+\frac{B}{A}\right)=1
$$

它是旋转单叶双曲面. 当 L_1 与 L_2 为异面直线而且垂直时，$c=0$. 所得旋转曲面是一个挖去一个圆盘(半径为 L_1 与 L_2 之间的距离 $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的平面.

二、(15 分) 设 $B\subset R^n(n\geq 2)$ 是单位开球，函数 u,v 在 $\bar{B}$ 上连续，在 B 内二阶连续可导，满足

$$
\begin{cases}
-\Delta u-\left(1-u^2-v^2\right)u=0, & x\in B \\
-\Delta v-\left(1-u^2-v^2\right)v=0, & x\in B \\
u(x)=v(x)=0, & x\in\partial B
\end{cases}
$$

其中，$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$，$\partial B$ 表示 B 的边界. 证明：$u^2(x)+v^2(x)\leq 1(\forall x\in\bar{B})$.

【参考解答】：记 $w=w(x)=u^2(x)+v^2(x)$，则 w 满足问题

$$
\begin{cases}
-\Delta w-2(1-w)w & \\
\quad =-2\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right), & x\in B \\
w(x)=0, & x\in\partial B
\end{cases}
\qquad (1)
$$

显然，$w(x)\in C^2(B)\bigcap C(\bar{B})$. 所以，$w(x)$ 必然在 $\bar{B}$ 上达到最大值. 设最大值点为 x_1. 若 $x_1\in B$，则

$$
\nabla w\left(x_1\right)=0,-\Delta w\left(x_1\right)\geq 0.
$$

于是由（1）得到，在 x_1 处，

$$
0\leq-\Delta w\leq 2(1-w)w-2\left(|\nabla u|^2+|\nabla u|^2\right)\leq 2(1-w)w
$$

而 $w\left(x_1\right)\geq 0$，故上式表明 $w\left(x_1\right)\leq 1$.

若$x_1 \in \partial B$，则由 (1)，$w\left(x_1\right) = 0$. 综上可知，恒有$0 \leq w \leq 1, x \in \bar{B}$.

三、(15 分) 设$f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$为整系数多项式，$a_0 \neq 0$. 设对任意$0 \leq k \leq 2020$有$\left|a_k\right| \leq 40$，证明：$f(x) = 0$的根不可能全为实数.

【参考解答】：设$f(x) = 0$的 2021 个根分别为$x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$. 由于$a_0 \neq 0$，所以$x_i \neq 0, 1 \leq i \leq 2021$. 若$x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$都是实数，由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i}\right)^2 = 22021^2$$

由 Vieta 定理，

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2019}$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i\right)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}$$

注意到$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_{2021}}$是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \cdots + a_{2019}x^2 + a_{2020}x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理，$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}$，$\sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0}$，所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}$$

因为对任意$0 \leq k \leq 2020$有$\left|a_k\right| \leq 40$，又a_0为非零整数，故$\left|a_0\right| \geq 1$，所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} &= \left(a_{2020}^2 - 2a_{2019}\right)\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}\right) \\ &\leq \left(40^2 + 2 \cdot 40\right)\left(40^2 + 2 \cdot 40\right) = 1680^2 \end{aligned}$$

矛盾. 证毕.

四、(20 分) 设P为对称酉矩阵，证明：存在可逆复矩阵Q使得$P = \bar{Q}Q^{-1}$.

【参考解答】：设P为n阶矩阵. 因为P为酉矩阵，自然为正规矩阵，所以存在酉矩阵U使得$U^{-1}PU = D$为对角阵. 设

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

并设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$为复数满足$\beta_i^2=\alpha_i,1\le i\le n$. 令

$$E=\begin{pmatrix}\beta_1&&&\\&\beta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\beta_n\end{pmatrix}$$

由 Lagrange 插值公式知存在复系数多项式$f(x)$使得$f\left(\alpha_i\right)=\beta_i,1\le i\le n$，从而

$$E=\begin{pmatrix}f\left(\alpha_1\right)&&&\\&f\left(\alpha_2\right)&&\\&&\ddots&\\&&&f\left(\alpha_n\right)\end{pmatrix}=f(D)$$

且

$$E^2=\begin{pmatrix}\beta_1^2&&&\\&\beta_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\beta_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&&&\\&\alpha_2&&\\&&\ddots&\\&&&\alpha_n\end{pmatrix}=D$$

现在$D^T=D,P^T=P,U^T=\bar{U}^{-1}$，所以

$$\begin{aligned}D=D^T&=\left(U^{-1}PU\right)^T=U^TP^T\left(U^{-1}\right)^T\\&=\bar{U}^{-1}P\bar{U}=\bar{U}^{-1}UDU^{-1}\bar{U}\end{aligned}$$

从而$U^{-1}\bar{U}$与D可交换. 又$E=f(D)$，所以E也与$U^{-1}\bar{U}$可交换，即$EU^{-1}\bar{U}=U^{-1}\bar{U}E$，或写为

$$UEU^{-1}=\bar{U}E\bar{U}^{-1}$$

由于P为酉矩阵，即$\bar{P}^TP=I$，这里I为单位矩阵，再由U也是酉矩阵得到

$$\bar{D}D=\bar{D}^TD=\overline{U^{-1}PU}^TU^{-1}PU=\bar{U}^T\bar{P}^T\left(\bar{U}^{-1}\right)^TU^{-1}PU=\bar{U}^TU=I$$

所以对任意$1\le i\le n,\overline{\alpha_i}\alpha_i=1$，即复数$\alpha_i$的模为 1，从而复数$\beta_i$的模也是 1，故$\overline{\beta_i}=\beta_i^{-1}$，由此得到$\bar{E}=E^{-1}$. 令$Q=U\bar{E}U^{-1}$，则显然$Q$可逆且有

$$\bar{Q}=\bar{U}E\bar{U}^{-1}=UEU^{-1}$$

又$Q^{-1}=U\bar{E}^{-1}U^{-1}=UEU^{-1}$，所以

$$\bar{Q}Q^{-1}=\left(UEU^{-1}\right)^2=UE^2U^{-1}=UDU^{-1}=P$$

五、(15 分) 设$\alpha>1$，证明:

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

(2) 计算$\int_0^{+\infty}\sin x^3\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\sin x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

【参考解答】: (1) 证明: 对于$s>0$以及$0\le a<b\le+\infty$，有

$$\begin{aligned}&\int_a^b e^{-sx}\sin x dx=\operatorname{Im}\int_a^b e^{-(s-i)x}dx\\&=\operatorname{Im}\frac{e^{-(s-i)a}-e^{-(s-i)b}}{s-i}\\&=\frac{se^{-sa}\sin a-se^{-sb}\sin b+e^{-sa}\cos a-e^{-sb}\cos b}{s^2+1}\end{aligned}\tag{1}$$

由(1)得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{2\alpha}+1}\mathrm{d}\,t$$

收敛. 任取$A>\varepsilon>0$，由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,t$关于$x\in[\varepsilon,A]$一致收敛，因此，结合 (1)，

$$\begin{aligned}&\left|\int_\varepsilon^A\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,t-\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x\right|\\&=\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_\varepsilon^A e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x-\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x\right|\\&\le|\int_0^{+\infty}\left(\left|\int_A^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x\right|+\left|\int_0^{\varepsilon}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x\right|\right)\mathrm{d}\,t\\&\le|\int_0^{+\infty}\frac{\left|t^\alpha e^{-t^\alpha A}\sin A+e^{-t^\alpha A}\cos A\right|+\left|-t^\alpha e^{-t^\alpha\varepsilon}\sin\varepsilon+1-e^{-t^\alpha\varepsilon}\cos\varepsilon\right|}{t^{2\alpha}+1}\mathrm{d}\,t\\&\le|\int_0^{+\infty}\left(e^{-t^\alpha A}+|\sin\varepsilon|+\left|1-e^{-t^\alpha\varepsilon}\cos\varepsilon\right|\right)\frac{t^\alpha+1}{t^{2\alpha}+1}\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

利用一致收敛性，或控制收敛定理，得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

(2) 对于$\alpha>1$以及$x>0$，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty}s^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-s}\,\mathrm{d}\,s=\frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

以及

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha+1}\mathrm{d}\,t=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 s\left(\frac{1}{s}-1\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{s^2}\mathrm{d}\,s=\frac{1}{\alpha}B\left(1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

从而

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\sin x^{\alpha}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\sin x\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x}\sin x\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x}\sin x\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+1}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{\pi}{2\alpha\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi}{2\alpha}
\end{aligned}
$$

最后得到

$$
\int_0^{+\infty}\sin x^3\,\mathrm{d}\,x\int_0^{+\infty}\sin x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}
$$

注: 可以利用第二型曲线积分计算，对于$\alpha > 1$，在以 0 为顶点的矩形区域

$$
D := \left\{ re^{i\theta} \mid r > 0, \theta \in (0,\beta) \right\}
$$

内，定义$\mathrm{Ln\,z}$如下：

$$
\mathrm{Ln}\left(\mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta}\right) = \ln \mathrm{r} + \mathrm{i}\theta,\ \forall \mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{D}
$$

其中$\beta = \dfrac{\pi}{2\alpha}$. 易见$\mathrm{Ln\,z}$可以连续地把定义域延伸到$D$的边界. 又易见，在$D$内成立$\mathrm{Ln\,z}$在$D$内解析. 令$z^{\alpha} := e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}, (z \in \bar{D})$，则$e^{iz^{\alpha}}$在$D$内解析在$\bar{D}$上连续.

任取$R > 0$，考虑$D_R := B_R(0) \cap D$，则$\int_{\partial D_R} e^{iz^{\alpha}}\,\mathrm{d}\,z = 0$. 由此即得

$$
\begin{aligned}
\int_0^R e^{ix^{\alpha}}\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^R e^{ir^{\alpha}e^{i\alpha\beta}}e^{i\beta}\,\mathrm{d}\,r - \int_0^{\beta} e^{iR^{\alpha}e^{i\alpha\theta}} iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= e^{i\beta}\int_0^R e^{-r^{\alpha}\sin(\alpha\beta)}e^{ir^{\alpha}\cos(\alpha\beta)}\,\mathrm{d}\,r - i\int_0^{\beta} Re^{-R^{\alpha}\sin(\alpha\theta)}e^{iR^{\alpha}\cos(\alpha\theta)}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= e^{\frac{\pi i}{2\alpha}}\int_0^R e^{-r^{\alpha}}\,\mathrm{d}\,r - i\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^{\alpha}\sin(\alpha\theta)}e^{iR^{\alpha}\cos(\alpha\theta)}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta
\end{aligned}
$$

易见有常数$C > 0$使得

$$
\begin{aligned}
&\left| i\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^{\alpha}\sin(\alpha\theta)}e^{iR^{\alpha}\cos(\alpha\theta)}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \right| \\
\le &\left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^{\alpha}\sin(\alpha\theta)}\,\mathrm{d}\,\theta \right| \le \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-CR^{\alpha}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \right| \le \frac{1}{CR^{\alpha-1}}
\end{aligned}
$$

于是，可得

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-r^\alpha}\,\mathrm{d}\,r = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}$$

六、(20分) 设f,g为$\mathbb{R}$上的非负连续可微函数，满足:$\forall x\in\mathbb{R}$，成立

$$f'(x)\ge 6+f(x)-f^2(x), g'(x)\le 6+g(x)-g^2(x).$$

证明: (1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$以及$x\in\mathbb{R}$，存在$\xi\in(-\infty,x)$使得$f(\xi)\ge 3-\varepsilon$.

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$，成立$f(x)\ge 3$.

(3) $\forall x\in\mathbb{R}$，存在$\eta\in(-\infty,x)$使得$g(\eta)\le 3$.

(4) $\forall x\in\mathbb{R}$，成立$g(x)\le 3$.

【参考解答】: (1) 任取$\varepsilon\in(0,1)$以及$x\in\mathbb{R}$，若结论不真, 则$f(t)\le 3-\varepsilon(\forall t\le x)$. 因此,

$$f'(t)\ge 6+f(t)-f^2(t)=(3-f(t))(2+f(t))\ge 2\varepsilon, \forall t\le x$$

于是

$$f(x)-f(t)\ge 2\varepsilon(x-t),\ \forall t\le x$$

从而$\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=-\infty$，与$f$非负矛盾. 因此，存在$\xi<x$使得$f(\xi)\ge 3-\varepsilon$.

(2) 任取$x\in\mathbb{R}$，由连续性，只要证明对任何$\varepsilon\in(0,1)$，成立$f(x)\ge 3-\varepsilon$. 由$\left(1\right)$，存在$\xi<x$使得$f(\xi)\ge 3-\varepsilon$. 令$h(t)=f(t)-(3-\varepsilon)$，有

$$h'(t)=f'(t)\ge(3-f(t))(2+f(t))\ge-(2+f(t))h(t), \forall t\in\mathbb{R}.$$

记$F(t)=\int_0^t(2+f(s))\,\mathrm{d}\,s$，则

$$\left(e^{F(t)}h(t)\right)'=e^{F(t)}\left(h'(t)+(2+f(t))h(t)\right)\ge 0, \forall t\in\mathbb{R}$$

因此，$e^{F(x)}h(x)\ge e^{F(\xi)}h(\xi)\ge 0$. 因此，$h(x)\ge 0$. 即$f(x)\ge 3-\varepsilon$.

(3) 任取$x\in\mathbb{R}$，若结论不真，则$g(t)>3(\forall t<x)$. 因此,

$$\begin{aligned}g'(t)&\le 6+g(t)-g^2(t)=-(g(t)-3)^2-5(g(t)-3)\\&\le-(g(t)-3)^2,\quad\forall t<x.\end{aligned}$$

于是$\dfrac{g'(t)}{(g(t)-3)^2}\le-1, \forall t\le x$. 不等式两边在$[t,x]$上积分，得

$$\frac{1}{g(t)-3}-\frac{1}{g(x)-3}\le t-x,\quad\forall t<x$$

进而

$$-\frac{1}{g(x)-3}\le t-x,\forall t<x$$

在上式令$t\to-\infty$即得矛盾. 因此，存在$\eta\in(-\infty,x)$使得$g(\eta)\le 3$.

(4) 任取$x\in\mathbb{R}$，由 (3)，存在$\eta\in(-\infty,x)$使得$g(\eta)\le 3$. 我们有

$$(g(t)-3)'\le-(g(t)-3)(2+g(t)), \forall t\in\mathbb{R}.$$

因此,

$$\left(e^{G(t)}(g(t)-3)\right)' = e^{G(t)}\left((g(t)-3)' + (2+g(t))(g(t)-3)\right) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

其中$G(t)=\int_0^t (2+g(s))\,\mathrm{d}\,s$. 从而

$$e^{G(x)}(g(x)-3) \leq e^{G(\eta)}(g(\eta)-3) \leq 0$$

因此，$g(x) \leq 3$.