2009 年第一届初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ =__________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

【参考答案】 令 $\sqrt{1-x-y}=u, 1+\dfrac{y}{x}=v$，解得 $x=\dfrac{1-u^2}{v}, y=\dfrac{\left(1-u^2\right)\left(v-1\right)}{v}$

$$D_{uv}=\left\{\left(u,v\right)\mid 0<u\le 1, 1\le v<+\infty\right\}$$

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{2u}{v} & -\dfrac{1-u^2}{v^2}\\ -\dfrac{2u(v-1)}{v} & \dfrac{1-u^2}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{2u\left(u^2-1\right)}{v^2}$$

$$\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|=\frac{2u\left(1-u^2\right)}{v^2},\quad \frac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}=\frac{(1-u^2)\ln v}{u},$$

所以由二重积分换元法的积分变换公式，原积分也就等于

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_{uv}}(1-u^2)^2\cdot\frac{\ln v}{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^1(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u\int_1^{+\infty}\frac{\ln v}{v^2}\,\mathrm{d}v=2\cdot\frac{8}{15}\cdot 1=\frac{16}{15}.$$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)$ =______.

【参考答案】 令 $A=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$，$f(x)=3x^2-2-A$

$$\int_0^2\left(3x^2-2-A\right)\mathrm{d}x=\left[x^3-2x-Ax\right]_0^2=8-4-2A=4-2A$$

所以 $A=4-2A\Rightarrow A=\dfrac{4}{3}$，代入所设函数表达式，得

$$f(x)=3x^2-2-A=3x^2-2-\frac{4}{3}=3x^2-\frac{10}{3}.$$

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是_________.

【参考答案】 曲面在任意点 $\left(x,y,z\right)$ 处的法向量可以取为 $\vec{n}_S=\left(f_x', f_y', -1\right)=\left(x,2y,-1\right)$。平面 $\boldsymbol{\pi}: 2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\vec{n}_\pi=\left(2,2,-1\right)$。于切平面的法向量与平面 π 的法向量平行，

也就有

$$\vec{n}_S // \vec{n}_\pi = (x, 2y, -1) // (2, 2, -1)$$

所以$\dfrac{x}{2} = \dfrac{2y}{2} = \dfrac{-1}{-1}$，即$\dfrac{x}{2} = y = 1$，得$x = 2, y = 1$，

$$z(2,1) = \left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 2\right)\Bigg|_{(2,1)} = 2 + 1 - 2 = 1$$

因此，所求的平面即为经过点$(2,1,1)$，法向量为$\vec{n}_S = (2,2,-1)$的平面，于是有平面的点法式方程，有$2(x-2) + 2(y-1) - (z-1) = 0$，展开化简后有$2x + 2y - z - 5 = 0.$

(4) 设 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f' \neq 1$，则 $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$ =____________.

【参考答案】对等式两端分别关于x求导数，$e^{f(y)} + xe^{f(y)} f'(y) y'(x) = e^y \cdot y'(x) \ln 29$。因为$xe^{f(y)} = e^y \ln 29$，所以

$$y'(x) = \frac{e^{f(y)}}{[1 - f'(y)] e^y \ln 29}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = [y'(x)]' = \left[\frac{e^{f(y)}}{e^y [1 - f'(y)] \ln 29}\right]'_x$$

$$= \frac{\left(e^{f(y)}\right)' \cdot e^y [1 - f'(y)] - e^{f(y)} \cdot \left\{e^y [1 - f'(y)]\right\}'_x}{e^{2y} [1 - f'(y)]^2 \ln 29}$$

$$= \left\{e^{f(y)} \cdot f'(y) \cdot y'(x) \cdot e^y [1 - f'(y)]\right.$$

$$\left. - e^{f(y)} \cdot e^y y'(x) [1 - f'(y) - f''(y)]\right\} / \{e^{2y} [1 - f'(y)]^2 \ln 29\}$$

$$= \frac{e^{f(y)} y'(x) \cdot \left\{2f'(y) - f'^2(y) - 1 + f''(y)\right\}}{e^y [1 - f'(y)]^2 \ln 29}$$

代入一阶导数表达式$y'(x) = \dfrac{e^{f(y)}}{[1 - f'(y)] e^y \ln 29}$，有

$$y'' = \frac{e^{2f(y)} \left\{2f'(y) - f'^2(y) - 1 + f''(y)\right\}}{e^{2y} [1 - f'(y)]^3 \ln^2 29}$$

由原等式$xe^{f(y)}=e^{y}\ln 29$可以推得$\dfrac{e^{2f(y)}}{e^{2y}\ln^{2}29}=\left(\dfrac{e^{f(y)}}{e^{y}\ln 29}\right)^{2}=\dfrac{1}{x^{2}}$，所以

$$y''=\frac{2f'(y)-f'^{2}(y)-1+f''(y)}{x^{2}\left[1-f'(y)\right]^{3}}=\frac{-[1-f'(y)]^{2}+f''(y)}{x^{2}[1-f'(y)]^{3}}$$

第二题：(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

【参考答案】原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}$

由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\left[\ln(e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^{x}+2e^{x}+\cdots+ne^{nx})}{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=\frac{n+1}{2}e$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}e}$.

第三题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_{0}^{1}f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

【参考答案】由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$. 令$u=xt$，得$g(x)=\dfrac{\int_{0}^{x}f(u)\,\mathrm{d}u}{x}(x\neq 0)$，

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_{0}^{x}f(u)\,\mathrm{d}u}{x^{2}}(x\neq 0)$$

由导数定义有$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{x}f(u)du}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$. 由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_{0}^{x}f(u)du}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}f(u)du}{x^{2}}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$处连续.

第四题：(15 分)已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证：

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{5}{2}\pi^2$.

【参考证法一】由于区域D为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

左边$=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x$，

右边$=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy - \int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x$，

所以 $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

由于$e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geq 2+\sin^2 x$ ，

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x \geq \frac{5}{2}\pi^2$$

【参考证法二】(1) 根据格林公式，有

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma$$

因为 关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma \ ,$$

故 $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\geq 2+t^2$，

.$\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\delta \geq \frac{5}{2}\pi^2$.

第五题：(10 分)已知$y_1=xe^x+e^{2x}$ ，$y_2=xe^x+e^{-x}$ ，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

【参考解法】根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x}与 e^{-x}是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法。

【解法一】: 故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$。将$y=xe^x$ 代入上式，得

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x=e^x-2xe^x$$

因此所求方程为$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

【解法二】故 $y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$$y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}\text{，}\ y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + 2e^x + xe^x$$

消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

第六题：(10 分)设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

【参考答案】因抛物线过原点，故 $c = 1$，由题设有

$$\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}.\text{即 } b = \frac{2}{3}(1-a)\ ,$$

而 $V = \pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2dx = \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2]$

$$= \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2].$$

令 $\frac{dv}{da} = \pi[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)] = 0$，得 $a = -\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式 得 $b = \frac{3}{2}$. 所以 $y \ge 0$。

又因 $\frac{d^2v}{da^2}\Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27}] = \frac{4}{135}\pi > 0$ 及实际情况，当 $a = -\frac{5}{4}$，$b = \frac{3}{2}$，$c = 1$ 时，体积最小.

第七题：(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

【参考答案】先解一阶常系数微分方程 $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}\,dx + c\right) = e^x\left(\frac{x^n}{n} + c\right)$$

由条件 $u_n(1) = \frac{e}{n}$，得 $c = 0$，故 $u_n(x) = \frac{x^ne^x}{n}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n} = e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x \in (-1,\ 1)$ 时，有 $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$，故

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)\text{。}$$

当 $x = -1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1}\ln 2$. 于是，当 $-1 \le x < 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x).$$

第八题：(10 分)求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

【参考答案】 $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \le \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \le 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt$，

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$