2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类）试卷

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设$\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$______.

(2)若曲线$y=y(x)$由$\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$确定，则此曲线在$t=0$对应点处的切线方程为________.

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=$__________.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$__________.

二（本题满分 8 分） 设函数$f(t)$在$t\neq 0$时一阶连续可导，且$f(1)=0$，求函数$f\left(x^{2}-y^{2}\right)$，使得曲线积分$\displaystyle\int_{L} y\left[2-f\left(x^{2}-y^{2}\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^{2}-y^{2}\right)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$L$为任一不与直线$y=\pm x$相交的分段光滑曲线.

三（本题满分 14 分） 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$. 证明:

$$1\le \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le \frac{4}{3}.$$

四（本题满分 12 分） 计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{(V)}\left(x^{2}+y^{2}\right)\mathrm{d}V$，其中$(V)$是由

$$x^{2}+y^{2}+(z-2)^{2}\ge 4, x^{2}+y^{2}+(z-1)^{2}\le 9$$

及$z\ge 0$所围成的空间图形.

五（本题满分 14 分） 设$f(x,y)$在区域D内可微，且$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}}\le M$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是$D$内两点，线段$AB$包含在$D$内. 证明：$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M|AB|$，其中$|AB|$表示线段$AB$的长度.

六（本题满分 14 分） 证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\ln\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\ge \int_{0}^{1}\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$

七（本题满分 14 分） 已知$\{a_k\},\{b_k\}$是正数数列，且$b_{k+1}-b_k\ge\delta>0,k=1,2,\cdots$，$\delta$为一常数. 证明：若级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛，则级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.