2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类) 试卷

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分)设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

1．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2．如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

第三题：(15 分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$, $f(1)=1, f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

第四题：(15 分)在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ。在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

第五题：(15 分)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1 \text{ 和 } x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

第六题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。记第一型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)\mathrm{d}u.$