第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 B 卷》试题及参考解答

一、(15 分) 已知椭球面$\Sigma_0:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, a>b$的外切柱面$\Sigma_\varepsilon\,(\varepsilon=1$或$-1)$平行于已知直线$l_\varepsilon:\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{z-3}{c}$. 试求与$\Sigma_\varepsilon$交于一个圆周的平面的法方向.

注：本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

【参考解答】：设l是柱面的任意一条直母线，则由假设，l与已知椭球面Σ_0相切于一点$M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$. 因为$l$平行于已知直线$l_\varepsilon$，所以，$l$的标准方程和参数方程分别是

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c}$$
$$x=x_1, y=y_1+\varepsilon t\sqrt{a^2-b^2}, z=z_1+ct.$$

把l的参数方程代入曲面Σ_0的方程整理得

$$t^2\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}+1\right)+2t\left(\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1\right)+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0 \qquad (1)$$

其中首项系数$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}+1>0$.

因为点M_1在Σ_0上，所以$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}-1=0$. 又因为$l$与$\Sigma_0$在$M_1$点相切，所以$t=0$是二次方程(1)的重根. 因此，

$$\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1=0\text{，即}\varepsilon c\sqrt{a^2-b^2}y_1+b^2z_1=0.$$

此式与$\dfrac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{z-z_1}{c}$，即$\varepsilon cy_1-\sqrt{a^2-b^2}z_1=\varepsilon cy-\sqrt{a^2-b^2}z$联立解得

$$y_1=\frac{b^2}{ca^2}\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right), z_1=-\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right)$$

再把$x_1=x$和上面的两式代入Σ_0的方程，得到外切柱面Σ_ε的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right)^2}{a^4c^2}+\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right)^2}{a^4c^2}=1.$$

如果令$z=0$，上式化为、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}+\frac{\left(a^2-b^2\right)y^2}{a^4}=1\text{，即}x^2+y^2=a^2.$$

所以柱面Σ_ε与xOy坐标面相交于圆周$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$. 由于与二次柱面$\Sigma_\varepsilon$的交线为

圆周的所有平面都是平行的，故所求的法向量唯一为 xOy 平面的法向量，即方向数为 $0,0,1$.

二、(15 分) 设 $f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，且$1 \le f(x) \le 3$. 证明:

$$1 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{f(x)} \le \frac{4}{3}.$$

【参考证明】: 由 Schwarz 不等式，有

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\,x\right)^2 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{f(x)}$$

又由于$(f(x)-1)(f(x)-3) \le 0$，故$\dfrac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)} \le 0$，即

$$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}\,x \le 4$$

由$4ab \le (a+b)^2$得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}\,x \le \frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}\,x\right)^2}{4} \le 4$$

综上即得$1 \le \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{f(x)} \le \frac{4}{3}$.

三、(15 分) 设 A 为 n 阶复方阵，$p\left(x\right)$为 A 的特征多项式，又设 $g\left(x\right)$为 m 次复系数多项式，$m \ge 1$. 证明：$g\left(A\right)$可逆当且仅当 $p\left(x\right)$与 $g\left(x\right)$互素.

【参考证明】: 取 A 的 Jordan 分解为

$$A = P\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}P^{-1}$$

其中$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$为 Jordan 块.

$$g(A) = P\begin{pmatrix} g\left(J_1\right) & & \\ & \ddots & \\ & & g\left(J_s\right) \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} g\left(\lambda_1\right) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g\left(\lambda_s\right) \end{pmatrix}P^{-1} \quad (*)$$

$\Leftarrow$)：$p\left(x\right)$与 $g\left(x\right)$互素，于是 $p\left(x\right)$与 $g\left(x\right)$没有公共根. 注意到$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为 A 的所有互不相同的特征根，故$g\left(\lambda_1\right),\cdots,g\left(\lambda_s\right)$均不为零，故

$$|\,g(A)\,| = g\left(\lambda_1\right)\cdots g\left(\lambda_s\right) \ne 0$$

所以$g\left(A\right)$可逆.

$\Rightarrow$)：$g\left(A\right)$可逆，从而$|g(A)|\neq 0$. 由$|g(A)|=g\left(\lambda_1\right)\cdots g\left(\lambda_s\right)$知$g\left(\lambda_1\right),\cdots,g\left(\lambda_s\right)$均不为零，故$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$没有公共根. 当然$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$互素，否则导致$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$有公共根，矛盾.

四、(20 分) 设σ为n维复向量空间$\mathbb{C}^n$的一个线性变换. $\mathbf{1}$表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma=k\mathbf{1},k\in\mathbb{C}$；

(2) 存在σ的$n+1$个特征向量：$v_1,\ldots,v_{n+1}$，这$n+1$个向量中任何n个向量均线性无关.

【参考证明】：$\left(1\right)\Rightarrow\left(2\right)$：取

$$v_1=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,v_n=e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},v_{n+1}=e_1+\cdots+e_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

则可知$v_1,\ldots,v_{n+1}$均是σ的特征向量. 进一步，该组向量中任何n个向量必线性无关. 事实上，不妨设这n个向量为：$v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}$. 于是

$$\begin{aligned}&a_1v_1+\cdots+a_{i-1}v_{i-1}+a_{i+1}v_{i+1}+\cdots+a_{n+1}v_{n+1}=0\\ \Leftrightarrow&\left(a_1+a_{n+1}\right)e_1+\cdots+\left(a_{i-1}+a_{n+1}\right)e_{i-1}\\ &\quad+a_{n+1}e_i+\left(a_{i+1}+a_{n+1}\right)e_{i+1}+\cdots\\ &\qquad+\left(a_n+a_{n+1}\right)e_n=0\end{aligned}$$

结果得$a_{n+1}=0$，进而$a_1=\cdots=a_{n+1}=0.$

$\left(2\right)\Rightarrow\left(1\right)$：记$\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$分别是相应于$v_1,\ldots,v_{n+1}$的$\sigma$的特征值，其和为$s$，即$s=\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}$. 由条件知，$v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}$线性无关，因此它可充当$\mathbb{C}^n$的基. σ在此基下的表示矩阵为A：

$$\sigma\left(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}\right)=\left(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}\right)A$$

从而有$\operatorname{tr}A=s-\lambda_i$.

又取$v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{n+1}$，$\sigma$在此基下的表示阵为$B$：

$$\sigma\left(v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{n+1}\right)=\left(v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{n+1}\right)B$$

从而$\operatorname{tr}B=s-\lambda_j$. 注意到$A,B$相似，因为它们是同一线性变换在不同基下的表示阵. 故$s-\lambda_i=s-\lambda_j,\lambda_i=\lambda_j$，即$\sigma=k\mathbf{1},k\in\mathbb{C}$.

五、(15 分) 计算广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x$，这里$\left(x\right)$表示$x$的小数部分（例如：当$n$为正整数且$x\in[n,n+1)$时，则$(x)=x-n$）.

【参考解答】：对于任意正整数$\ell>2$，有

$$\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\ell-1}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^3}$$
$$=\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\int_n^{n+1}x^{-2}\mathrm{d}x-n\int_n^{n+1}x^{-3}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{2n+1}{n(n+1)^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)^2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}$$

对于$y\in\left[\ell,\ell+1\right]$，则有

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}=\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x$$
$$\le\int_1^{y}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x\le\int_1^{\ell+1}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell+1}\frac{1}{n^2}$$

于是得

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{12}$$

六、(20 分)设函数$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，满足对任意$x\in[0,1]$，$\int_{x^2}^{x}f(t)\mathrm{d}t\ge\frac{x^2-x^4}{2}$.

证明：$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{10}$.

【参考证明】：**【思路一】**：注意到

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{d}t\int_t^{\sqrt{t}}f(t)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\mathrm{d}t$$

于是可得

$$\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$
$$\ge\int_0^1\frac{x^2-x^4}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{15}$$

因为

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 (f(t)-(\sqrt{t}-t))^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t - 2\int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

所以得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t &\geq 2\int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) \, \mathrm{d}t - \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 \, \mathrm{d}t \\
&\geq \frac{2}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

【思路二】：注意到

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_t^{\sqrt{t}} f(t) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&\geq \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

因为对于任意$\beta \in (0,+\infty)$，

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 (\beta f(t)-(\sqrt{t}-t))^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \beta^2 f^2(t) \, \mathrm{d}t - 2\beta\int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

所以得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t &\geq \frac{2}{\beta}\int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{\beta^2}\int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 \, \mathrm{d}t \\
&\geq \frac{2}{15\beta} - \frac{1}{30\beta^2} = \frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

容易得当$\beta \in [1/3,1]$时，有

$$
\int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t \geq \frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right) \geq \frac{1}{10}
$$

特别地，当$\beta = \dfrac{1}{2}$时，有

$$
\int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t \geq \frac{1}{30}\left(4\cdot 2 - 2^2\right) = \frac{2}{15} > \frac{1}{10}
$$

【思路三】：因为对于任意$0 < \beta < 1$，任意正整数n，有

$$
\begin{aligned}
\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t) \, \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^{2^k} - \beta^{2^{k+1}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \beta^{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

于是 $\int_0^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}\,t=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}\,t\geq\frac{\beta^2}{2}$，从而

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t=\lim_{\beta\to 1-}\int_0^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}\,t\geq\lim_{\beta\to 1-}\frac{\beta^2}{2}=\frac{1}{2}$$

最后，由柯西-施瓦兹不等式得

$$\frac{1}{2}\leq\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t\leq\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\,t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^{1/2}$$

于是 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\geq\frac{1}{4}>\frac{1}{10}$.