## 2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

- 一、(本题 15 分) 已知四点 $(1,2,7),(4,3,3),(5,-1,6),(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$ . 试求过这四点的球面方程。
- 二、(本题 10 分) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $\left[0,1\right]$ 上的非负连续函数,求证:存在 $\xi\in\left[0,1\right]$ ,使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \le \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x) dx.$$

三、(本题 15 分) 设  $F^n$  是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma:F^n\to F^n$  是一个线性变换。若  $\forall A\in M_n(F), \sigma(A\alpha)=A\sigma(\alpha), \left(\forall \alpha\in V\right)$ ,

证明:  $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$  , 其中  $\lambda \in F$  中的某个数,  $\mathrm{id}_{F^n}$  表示恒同变换。

- 四、(本题 10 分) 对于 $\Delta ABC$ , 求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值。
- 五、(本题 15 分) 对于任何实数 lpha ,求证存在取值于  $\left\{-1,1\right\}$  的数列  $\left\{a_n\right\}_{n\geq 1}$  满足

$$\lim_{n\to +\infty} \left[ \sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right] = \alpha.$$

六、(本题 20 分) 设A是数域F上的n阶方阵。证明:A相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ,其中B是可逆

矩阵, C 是幂零阵, 即存在m 使得 $C^m = 0$ .

七、(本题 15 分) 设 F(x) 是  $[0,+\infty)$  上的单调递减函数,  $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$ ,且

$$\lim_{n o +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin rac{t}{n} \, \mathrm{d} \, t = 0$$
 .

证明: (i)  $\lim_{x \to +\infty} x F(x) = 0$  ; (ii)  $\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \left(xt\right) \mathrm{d}\, t = 0$ .