2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学类）试卷

一、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\,\mathrm{d}u}=$__________.

(2) 设实数 $a\neq 0$，微分方程 $\begin{cases} y''-ay'^2=0, \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$ 的解为__________.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，则 $A^{50}=$____________.

(4) 不定积分 $I=\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx=$________________.

(5) 设曲线积分 $I=\oint\limits_L\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针方向，则 $I=$__________.

(6) 设 D 是平面上由光滑闭曲线围成的有界区域，其面积为 $A>0$，函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续且 $f(x,y)>0$. 记

$$J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{1/n}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right)^n,$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=$__________.

二、（本题 12 分） 设 $\vec{l}_j, j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n\geq 2$ 各方向向量，相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$. 若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导，证明：$\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_i}=0.$

三、（本题 14 分） 设 A_1,A_2,B_1,B_1 均为 n 阶方阵，其中 A_2,B_2 可逆. 证明：存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PA_iQ=B_i\ (i=1,2)$ 成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似.

四、（本题 14 分） 设 $p>0, x_1=\dfrac{1}{4}, x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x_n^p}$ 收敛并求其和.

五、（本题 15 分）(1) 展$[-\pi,\pi)$上的函数$f\left(x\right)=\left|x\right|$成傅里叶级数，并证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分$I=\int_0^{+\infty}\dfrac{u}{1+e^u}\mathrm{d}\,u$的值.

六、（本题 15 分） 设$f\left(x,y\right)$为R^2上的非负的连续函数，若

$$I=\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma$$

存在极限，则称广义积分$\iint\limits_{R^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma$收敛于$I$.

(1) 设$f\left(x,y\right)$为R^2上的非负的连续函数，若$\iint\limits_{R^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma$收敛于$I$，证明极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\le x,y\le t}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma$存在且收敛于$I$.

(2) 设$\iint\limits_{R^2}e^{ax^2+2bxy+cy^2}\mathrm{d}\,\sigma$收敛于$I$，实二次型$ax^2+2bxy+cy^2$在正交变换下的标准二次型为$\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$. 证明$\lambda_1,\lambda_2$都小于零.