2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

非数学专业竞赛试题

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$__________.

(2) 设隐函数$y=y(x)$由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定，则$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$__________.

(3) 定积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$__________.

(4) 已知$\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则$u(x,y)=$__________.

(5) 设$a,b,c,\mu>0$，曲面$xyz=\mu$与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$相切，则$\mu=$__________.

二、(本题满分 14 分) 计算三重积分$\displaystyle\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

三、(本题满分 14 分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|f'(x)|\le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明在$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

四、(本题满分 14 分) 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

五、(本题满分 14 分) 设$f(x)$是仅有正实根的多项式函数，满足$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$，证明：$c_n>0\ (n\ge 0)$，极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小根.

六、(本题满分 14 分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上具有连续导数，满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2},$$

且$f(0)\le 1$. 证明：存在常数$M>0$，使得$x\in[0,+\infty)$时，恒有$|f(x)|\le M$.