2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类三、四年级）试卷

（前 4 大题为必答题，从 5-10 大题中任选三题）

一、填空题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

(1) 设实方阵 $H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}, n\geq 1$，其中 I 是与 H_n 同阶的单位方阵，则 $\operatorname{rank}(H_4)=$_______

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$_______

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases}x=\pi\sin(t/2)\\y=t-\sin t\\z=\sin 2t\end{cases}$，$t:0\to\pi$，则第二型曲线积分

$$\int_\Gamma e^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z$$

则为_______

(4) 设二次型 $f(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 的矩阵 A 为 $\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&\cdots&a&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$，其中 $n>1, a\in\mathbb{R}$，则 f 在正交变换下的标准形为_______

二、（本题 15 分） 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0,y_0,z_0)$，过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ。证明：存在平面 Π，使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$；同时求出平面 Π 的方程.

三、（本题 15 分） 设 A,B,C 均为 n 阶复方阵，且满足

$$AB-BA=C,\quad AC=CA,\quad BC=CB$$

(1) 证明：C 是幂零方阵；

(2) 证明：A,B,C 同时相似于上三角阵；

(3) 若 $C\neq 0$，求 n 的最小值.

四、（本题 20 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数，且 $f(0)f(1) \geq 0$.求证：

$$\int_0^1 |f'(x)| \, \mathrm{d}\, x \leq 2\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}\, x + \int_0^1 |f''(x)| \, \mathrm{d}\, x$$

五、（本题 10 分）（抽象代数） 设 G 为群，且满足：$\forall x,y \in G, (xy)^2 = (yx)^2$.证明：$\forall x,y \in G$，元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过 2 .

六、(本题 10 分) (实变函数) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集满足 $m(E) < \infty$. 设 $f, f_k \in L^2(E)$，在 E 上几乎处处有 $f_k \to f$，且

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t \leq \int_E |f(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t < \infty$$

求证：

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t = 0$$

七、（本题 10 分）（微分几何） 已知椭圆柱面 S：

$$r(u,v) = \{a\cos u, b\sin u, v\}, \quad -\pi \leq u \leq \pi, \quad -\infty < v < +\infty$$

(1) 求 S 上任意测地线的方程；

(2) 设 $a = b$. 取

$$P = (a,0,0), Q = (a\cos u_0, a\sin u_0, v_0)(-\pi < u_0 < \pi, -\infty < v_0 < +\infty).$$

写出 S 上连接 P, Q 两点的最短曲线的方程.

八、（本题 10 分）（数值分析） 推导求解线性方程组的共梯度法的计算格式，并证明该格式经有限步迭代后收敛.

九、（本题 10 分）（复变函数） 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析，在其边界上连续. 若在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| = 1$. 证明 $f(z)$ 为有理函数.

十、（本题 10 分）（概率统计） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，其有共同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$.现对随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 按大小顺序重新排列为 $X_{n1} \leq X_{n2} \leq \cdots \leq X_{nn}$

(1) 求随机变量 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合概率密度函数 $f_{1n}(x,y)$；

(2) 如果 $X_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，求随机变量 $U = X_{nn} + X_{n1}$ 的密度函数 $f_U(u)$.