第十二届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学类）试题与参考答案

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=$____________.

【参考答案】：由等价无穷小和定积分的定义，得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\sin^2(1+x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{8}(2-2\sin 4-\cos 4+\cos 2).$$

2、设 $P_0(1,1,-1)$, $P_1(2,-1,0)$ 为空间的两点，则函数 $u=xyz+e^{xyz}$ 在点 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为____________.

【参考答案】：$\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的单位向量为 $\vec{l}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$，且

$$u_x\big|_{P_0}=yz\left(1+e^{xyz}\right)\Big|_{P_0}=-\left(1+e^{-1}\right)$$
$$u_y\big|_{P_0}=xz\left(1+e^{xyz}\right)\Big|_{P_0}=-\left(1+e^{-1}\right)$$
$$u_z\big|_{P_0}=xy\left(1+e^{xyz}\right)\Big|_{P_0}=1+e^{-1}$$

因此方向导数为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\left(1+e^{-1}\right)$

3、记空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ $(a>0)$，则积分 $\oint_\Gamma(1+x)^2\mathrm{d}s=$______.

【参考答案】：由积分的对称性和被积函数定义在曲线上，得

$$\int_\Gamma(1+x)^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma\left(1+2x+x^2\right)\mathrm{d}s$$
$$=\int_\Gamma\mathrm{d}s+\frac{2}{3}\int_\Gamma(x+y+z)\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_\Gamma\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s$$
$$=\left(1+\frac{a^2}{3}\right)\int_\Gamma\mathrm{d}s=2\pi a\left(1+\frac{a^2}{3}\right)$$

4、设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&&\\&16&\\&&1\end{pmatrix}$，且 $|A|>0$, $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，其中 I 为单位矩阵，则 $B=$____________.

【参考答案】：由 $AA^*=|A|I$ 及 $\left|A^*\right|=16$ 可知，$\left|A\right|=4$．对

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$$

的两边同时左乘 A^{-1} 右乘 A，得 $B=A^{-1}B+3I$，即 $\left(I-A^{-1}\right)B=3I$，所以

$$B=3\left(I-A^{-1}\right)^{-1}=3\left(I-\frac{1}{4}A^{*}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}4 & & \\ & -1 & \\ & & 4\end{pmatrix}$$

5、函数$u=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{2}{x_3}\left(x_i>0,i=1,2,3\right)$的所有极值点为____________.

【参考答案】：利用均值不等式可知，$u\left(x_1,x_2,x_3\right)\geq 4\sqrt[4]{2}$. 另一方面，有

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=1-\frac{x_2}{x_1^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{1}{x_1}-\frac{x_3}{x_2^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{1}{x_2}-\frac{2}{x_3^2}$$

令$\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0,(k=1,2,3)$，即$1-\dfrac{x_2}{x_1^2}=0,\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{x_3}{x_2^2}=0,\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{2}{x_3^2}=0$. 由此解得$u$在定义域内的唯一驻点$P_0\left(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}}\right)$，且$u$在该点取得最小值$u\left(P_0\right)=4\sqrt[4]{2}$，这是函数唯一的极值. 因此$u$的唯一极值点为$\left(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}}\right)$.

【注】也可用通常的充分性条件(海赛矩阵正定)判断驻点P_0为极小值点.

二、(12 分) n为正整数，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-\left(x^2+1\right)\arctan^3 x}.$$

【参考解答】：令$f\left(x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1$，则$f(0)=1$，且

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1}{6}\ln\frac{1+3x}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{2n}\ln\frac{1+nx}{1-nx}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{1-2x}\right)+\cdots+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{1+nx}+\frac{n}{1-nx}\right)$$

所以$f'(0)=n$. 注意到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$，因此

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\pi\arcsin x-\left(x^2+1\right)\arctan^3 x}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{n}{3\pi}$$

三、(12 分) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]x^n$的收敛域.

【参考解答】：记$a_n=1-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，当$n\to\infty$时，$a_n\sim\dfrac{1}{2n}$. 所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散. 为了证明$\{a_n\}$是单调递减数列，考虑函数

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), x\geq 1.$$

利用不等式: 当$a>0$时，$\ln(1+a)>\frac{a}{1+a}$，得

$$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$$

即$f(x)$是$[1,+\infty)$上的增函数，所以

$$a_n-a_{n+1}=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

根据莱布尼兹审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛域为$[-1,1)$.

四、(12 分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且

$$f(a)=f(b)=0,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$$

(1). 证明: 存在互不相同的点$x_1,x_2\in(a,b)$，使得

$$f'(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2;$$

(2) 证明: 存在$\xi\in(a,b),\xi\neq x_i, i=1,2$，使得$f''(\xi)=f(\xi)$.

【参考解答】: (1) 令$F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(a)=F(b)=0$. 对$F(x)$在$[a,b]$上利用洛尔定理，存在$x_0\in(a,b)$，使得$F'(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t.$$

再令$G(x)=f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$G(a)=G(x_0)=G(b)=0$. 对$G(x)$分别在$[a,x_0]$与$[x_0,b]$上利用洛尔定理，存在$x_1\in(a,x_0)$及$x_2\in(x_0,b)$使得$G'(x_1)=G'(x_2)=0$，即$f'(x_i)=f(x_i), i=1,2$且$x_1\neq x_2$.

(2) 令$\varphi(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-f(x)]$，则$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$，且

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\mathrm{e}^x[f'(x)-f(x)]+\mathrm{e}^x[f''(x)-f'(x)]\\&=\mathrm{e}^x[f''(x)-f(x)]\end{aligned}$$

对$\varphi(x)$在$[x_1,x_2]$上利用洛尔定理，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即$f''(\xi)=f(\xi)$，显然$\xi\neq x_i, i=1,2.$

五、(12 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明:

(1) 存在实对称矩阵 B，使得 $B^{2021}=A,$ 且 $AB=BA$；

(2) 存在一个多项式 $p(x)$，使得上述矩阵 $B=p(A)$；

(3) 上述矩阵 B 是唯一的.

【参考解答】: (1) 因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使得 $A=QDQ^{\mathrm{T}}$，其中 $D=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$，而 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 A 的特征值. 令

$$B=QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}},$$

其中 $D^{\frac{1}{2021}}=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^{\frac{1}{2021}},\lambda_2^{\frac{1}{2021}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2021}}\right)$，则

$$B^{2021}=\left(QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}\right)^{2021}=QDQ^{\mathrm{T}}=A$$

且满足

$$\begin{aligned}AB&=QDQ^{\mathrm{T}}QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}=QDD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}\\&=QD^{\frac{1}{2021}}DQ^{\mathrm{T}}=QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}QDQ^{\mathrm{T}}=BA\end{aligned}$$

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的所有两两互异的特征值 $(1\le s\le n)$，利用待定系数法及克拉默法则，存在唯一的 s 次多项式 $p(x)=x^s+a_1x^{s-1}+\cdots+a_{s-1}x+a_s$，使得

$$p\left(\lambda_i\right)=\lambda_i^{\frac{1}{2021}},(i=1,2,\ldots,s)$$

因为 $p(D)=D^{\frac{1}{2021}}$，所以

$$p(A)=p\left(QDQ^{\mathrm{T}}\right)=Qp(D)Q^{\mathrm{T}}=QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}=B.$$

(3) 设另存在 n 阶实对称矩阵 C 使得 \$C^{2021}=A\$, 则 $B=p(A)=p\left(C^{2021}\right)$，所以

$$BC=p\left(C^{2021}\right)C=Cp\left(C^{2021}\right)=CB.$$

由于 B,C 都可相似对角化，故存在 n 阶可逆实矩阵 T 及实对角矩阵 D_1,D_2，使得

$$B=TD_1T^{-1},C=TD_2T^{-1}$$

因此 $C^{2021}=A=B^{2021}\Rightarrow D_2^{2021}=D_1^{2021}\Rightarrow D_2=D_1\Rightarrow C=B$，唯一性得证.

六、(12 分) 设 $A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中 $0<x,y<1$，证明:

$$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}\right).$$

【参考解答】: **【思路一】** 当 $x=y$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,x)}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，等式成立.

当$x \neq y$时，注意到$A_n(x,y)=A_n(y,x)$，故可设$0<x<y<1$，因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)^k=\frac{1}{y-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n-x^n}{n}=\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y}$$

所以不等式化为

$$\frac{2}{2-x-y}\le\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}\right).(*)$$

对于$0\le t<1$，有

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)=\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$$

所以$t\le\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\le\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$. 令\ $t=\frac{y-x}{2-x-y}$，则$0<t<1$，代入上式即得所证不等式(*)成立.

【思路二】因为$\frac{2}{2-x-y}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，所以问题转换为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)$$

这只需证明: 对任意$n\ge 0$，都有

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{A_n(x,x)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)$$

其中$0<x,y<1$.

用数学归纳法. $n=0,1$时，显然. 假设$n=p$时，结论成立，当$n=p+1$时，

$$A_{p+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{p+1}x^{p+1-k}y^k=x^{p+1}+yA_p(x,y)$$

$$A_{p+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{p+1}x^{p+1-k}y^k=y^{p+1}+xA_p(x,y)$$

$$\begin{aligned}A_{p+1}(x,y)&=\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{1}{2}(x+y)A_p(x,y)\\&=\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}(x+y)\frac{A_p(x,y)}{p+1}\\&\le\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}(x+y)\left(x^p+y^p\right)\\&\le\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)\end{aligned}$$

所以$A_{p+1}(x,y)\le\frac{p+2}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)$. 另一方面，仍由上式及归纳假设，可得

$$A_{p+1}(x,y) \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1} + \frac{p+1}{2}(x+y)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p} = (p+2)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1}$$

因此，所证不等式对任意$n \geq 0$及$0 < x,y < 1$都成立.

七、（12 分） 设$f(x),g(x)$是$[0,1] \to [0,1]$的连续函数，且$f(x)$单调增加，求证:

$$\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

【参考解答】: 令$F(x) = f(x) - x$，则问题转换为证明

$$\int_0^1 \left[F\left(g\left(x\right)\right) - F\left(x\right)\right]\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

这只需证明

$$F_{\max}(x) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}，即\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \geq F_{\max}(x) - \frac{1}{2}$$

记$\max F(x) = F\left(x_0\right) = a$，由于$0 \leq f(x) \leq 1$，则$-x \leq F(x) \leq 1 - x$，所以$a \leq 1$. 因为$f(x)$单调增加，当$x \in \left[x_0,1\right]$时，$f(x) \geq f\left(x_0\right)$，即

$$F(x) + x \geq F\left(x_0\right) + x_0 = a + x_0$$

所以

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} F(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 F(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^{x_0} (-x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 \left(a + x_0 - x\right)\mathrm{d}x$$

$$= a - \frac{1}{2} + x_0\left(1 - x_0\right) \geq a - \frac{1}{2} = \max F(x) - \frac{1}{2}$$