

# 第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案 (非数学 A 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

| 题号 | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 总分  |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 满分 | 30 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 100 |
| 得分 |    |    |    |    |    |    |     |

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 + 9} - 6}{2 - \sqrt{x^3 - 23}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 设  $z = f(x^2 - y^2, xy)$ , 且  $f(u, v)$  有连续的二阶偏导

数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ , 则  $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$  的收敛域为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设曲面  $\Sigma$  是平面  $y + z = 5$  被柱面  $x^2 + y^2 = 25$  所截得的部分, 则  $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \underline{\hspace{2cm}}.$

解答. (1) 使用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 + 9} - 6}{2 - \sqrt{x^3 - 23}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 9}}}{-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 23}}} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 - 23}}{\sqrt{x^3 + 9}} = -\frac{1}{3}.$$

(2)

$$\begin{aligned} z_x &= 2xf_1 + yf_2, \\ z_{xy} &= 2x(f_{11}(-2y) + f_{12}) + f_2 + y(f_{21}(-2y) + xf_{22}) \\ &= f_2 - 4xyf_{11} + 2(x^2 - y^2)f_{12} + xyf_{22}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \\f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \cdot n! \left( \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right). \\f^{(n)}(0) &= n! \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right).\end{aligned}$$

(4) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(2n-1)}} = 1$ , 所以收敛半径为 1.

当  $x = \pm 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$  绝对收敛, 故收敛域为  $[-1, 1]$ .

(5)  $\Sigma$  的方程为  $z = 5 - y$ , 故

$$dS = \sqrt{2} dx dy.$$

$\Sigma$  在  $xOy$  平面的投影  $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 25$ , 故

$$I = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (x+5) dx dy = 5\sqrt{2} \iint_{D_{xy}} dx dy = 125\sqrt{2}\pi.$$

姓名： 准考证号： 所在院校： 考场号： 座位号： 专业：

密封线 答题时不要超过此线

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

二、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2 + y^2 + 3) \frac{dy}{dx} = 2x(2y - \frac{x^2}{y}).$$

解答. 原方程变形为  $\frac{ydy}{xdx} = \frac{2(2y^2 - x^2)}{x^2 + y^2 + 3}.$

令  $u = x^2, v = y^2$ , 则原方程化为  $\frac{dv}{du} = \frac{2(2v - u)}{u + v + 3}.$  ..... (5 分)

解方程  $2v - u = 0, u + v + 3 = 0$ , 得到  $u = -2, v = -1$ , 再令  $U = u + 2, V = v + 1$ ,  
上述方程化为  $\frac{dV}{dU} = \frac{2(2V - U)}{U + V}.$  ..... (8 分)

作变量替换  $W = \frac{V}{U}$  得到  $U \frac{dW}{dU} = -\frac{W^2 - 3W + 2}{W + 1}.$  ..... (11 分)

这是分离变量方程, 解之得  $U(W - 2)^3 = C(W - 1)^2$ , 回代得

$$(y^2 - 2x^2 - 3)^3 = C(y^2 - x^2 - 1)^2.$$

..... (14 分)

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

三、(本题 14 分) 设  $\Sigma_1$  是以  $(0, 4, 0)$  为顶点且与曲面  $\Sigma_2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1 (y > 0)$  相切的圆锥面, 求曲面  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  所围成的空间区域的体积.

解答. 设  $L$  是  $xOy$  平面上过点  $(0, 4)$  且与  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$  相切于点  $(x_0, y_0)$  的直线, 则  $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{4} = 1$  且切线斜率  $\frac{y_0 - 4}{x_0} = -\frac{4x_0}{3y_0}$ , 解得  $x_0 = \pm \frac{3}{2}, y_0 = 1$ .  
..... (5 分)

显然,  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  分别是切线  $L$  和曲线  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转而成的曲面, 它们的交线位于平面  $y_0 = 1$  上. .... (8 分)

记该平面与  $\Sigma_1, \Sigma_2$  围成的空间区域分别记为  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ .

由于  $\Sigma_1$  是底面圆的半径为  $\frac{3}{2}$ , 高为 3 的圆锥体, 所以其体积  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = \frac{9\pi}{4}$ . 又  $\Omega_2$  的体积为

$$V_2 = \iiint_{\Omega_2} dV = \int_1^2 dy \iint_{x^2+z^2 \leq 3(1-\frac{y^2}{4})} dx dz = \pi \int_1^2 3(1 - \frac{y^2}{4}) dy = \frac{5\pi}{4}.$$

因此, 曲面  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  所围成的空间区域的体积为  $\frac{9\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \pi$ .  
..... (14 分)

姓名：\_\_\_\_ 准考证号：\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_ 考场号：\_\_\_\_ 座位号：\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_

密封线 答题时不要超过此线

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

四、(本题 14 分)

设  $I_n = n \int_1^a \frac{dx}{1+x^n}$ , 其中  $a > 1$ . 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

解答. 记  $b = \frac{1}{a}$ , 则  $0 < b < 1$ . 作变量替换  $x = \frac{1}{t}$ , 得到

$$I_n = \int_b^1 \frac{nt^{n-1}}{t(1+t^n)} dt = \int_b^1 \frac{d(\ln(1+t^n))}{t}.$$

分部积分得

$$I_n = \ln 2 - \frac{\ln(1+b^n)}{b} + \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt.$$

..... (8 分)  
当  $t \in [b, 1]$  时,  $\frac{\ln(1+t^n)}{t^2} \leq t^{n-2}$ ,

$$0 \leq \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt \leq \int_b^1 t^{n-2} dt = \frac{1-b^{n-1}}{n-1}.$$

显然,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-b^{n-1}}{n-1} = 0$ . 由夹逼准则,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt = 0$ .

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+b^n)}{b} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \ln 2$ .

..... (14 分)

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

五、(本题 14 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导数且  $f(0) = 0$ . 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx,$$

并求使上式成为等式的  $f(x)$ .

解答. 由分部积分法

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x)dx &= (x-1)f^2(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)2f(x)f'(x)dx \\ &= 2 \int_0^1 (1-x)f'(x) \cdot f(x)dx. \end{aligned}$$

..... (4 分)

由 Cauchy 积分不等式, 有

$$\int_0^1 (1-x)f'(x) \cdot f(x)dx \leq \left( \int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx.$$

..... (10 分)

等式成立时应有常数  $c$  使得  $(1-x)f'(x) = cf(x)$ . 因此当  $x \in (0, 1)$  时, 有

$$((1-x)^c f(x))' = (1-x)^{c-1} ((1-x)f'(x) - cf(x)) = 0.$$

因而存在常数  $d$  使得  $f(x) = d(1-x)^{-c}$  ( $0 < x < 1$ ).

当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ , 故  $d = 0$ . 于是  $f = 0$ . 所以使得题中不等式成为等式的函数是  $f(x) = 0$ . .....

(14 分)

专业： 座位号： 考场号： 所在院校： 密封线 准考证号： 姓名：

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

六、(本题 14 分) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_0 = \frac{1}{3}$ ,

$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2}, n \geq 0$ . 证明：无穷级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  收敛并求其和.

解答. 方法1. 根据数学归纳法可知  $x_n > 0$ .

此外,  $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n(1-x_n)^2}{1-x_n+x_n^2} < 0$ .

故  $x_n$  单调递减,  $x_n \leq \frac{1}{3}$ .

于是,  $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{x_n}{1-x_n+x_n^2} \leq \frac{4}{9}x_n$ ,

$x_n$  收敛于 0. .... (6 分)

令  $f(x) = \frac{x}{1+x}, x > 0$ , 不难验证  $f(x)$  严格单调递增且其反函数为  $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ .

注意到  $x_{n+1} = f(f^{-1}(x_n) - x_n)$ , 故

$$f^{-1}(x_{n+1}) = f^{-1}(x_n) - x_n, \quad x_n = f^{-1}(x_n) - f^{-1}(x_{n+1}).$$

$$\sum_{i=0}^n x_i = f^{-1}(x_0) - f^{-1}(x_{n+1}).$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = f^{-1}(x_0) - f^{-1}(0) = \frac{1}{2}.$$

..... (14 分)

解答. 方法2. 证明  $x_n$  收敛于 0 同方法1.

注意到

$$x_n = \frac{x_n}{1-x_n} - \frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}.$$

$$\sum_{i=0}^n x_i = \frac{x_0}{1-x_0} - \frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}.$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \frac{x_0}{1-x_0} = \frac{1}{2}.$$

..... (14 分)