2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛
(数学专业一、二年级）参考答案

一、填空题

(1) **【参考解答】**: 10

H_n 是 $m = 2^n$ 阶对称方阵，存在正交方阵 P 使得 $P^{-1}H_nP = D$ 是对角方阵. 从而，

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}^{-1}$$

与 $\begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix}$ 相似. 设 H_n 的所有特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，则 H_{n+1} 的所有特征值是

$$\lambda_1 + 1, \lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \lambda_2 - 1, \cdots, \lambda_m + 1, \lambda_m - 1$$

利用数学归纳法容易证明：H_n 的所有不同特征值 $\{n - 2k \mid k = 0, 1, \cdots, n\}$，并且每个特征值 $n - 2k$ 的代数重数为 $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. 因此，$\operatorname{rank}(H_4) = 2^4 - C_4^2 = 10.$

(2) **【参考解答】**: $\dfrac{1}{2}$

原式$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

(3) **【参考解答】**: -2

考虑直接法计算，直接代入参数表达式，得定积分被积函数为

$$\begin{aligned} f(t) = 2\cos(2t)\cos(\sin(2t)) + e^{\sin\left(\pi \sin\frac{t}{2}\right)} \Big[& \frac{1}{2}\pi \cos\frac{t}{2} \cos\left(\pi \sin\frac{t}{2}\right) \cos(t - \sin t) \\ & - \sin(t - \sin t)(1 - \cos t) \Big] \end{aligned}$$

可得原函数为

$$F(t) = \sin(\sin(2t)) + e^{\sin\left(\pi \sin\frac{t}{2}\right)} \cos(t - \sin t),$$

所以原积分$= \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_0^{\pi} = -2.$

(4) **【参考解答】**: $((n-1)a+1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \cdots - (a-1)y_n^2$

只需要求出 A 的全部特征值即可. 显然 $A + (a-1)I$ 的秩 ≤ 1，所以 $A + (a-1)I$ 的零空间的维数为 $\geq n - 1$，从而可设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = 1 - a, \lambda_2 = 1 - a, \cdots, \lambda_{n-1} = 1 - a, \lambda_n$. 注意到 $\operatorname{tr} A = n$，所以得 $\lambda_n = (n-1)a + 1$. 结果就是 f 在正交变换下的标准形为

$$((n-1)a + 1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \cdots - (a-1)y_n^2$$

二、【参考解析】：【思路一】因为A在S的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0 \quad (1)$$

对于任意的$M(x,y,z)\in S\cap\Sigma$，连接A,M的直线记为l_M，其参数方程可设为

$$\begin{cases}\tilde{x}=x+t(x-x_0)\\ \tilde{y}=y+t(y-y_0)\ \left(-\infty<t<+\infty\right)\ (2)\\ \tilde{z}=z+t(z-z_0)\end{cases}$$

代入椭球面的方程得

$$\frac{(x+t(x-x_0))^2}{a^2}+\frac{(y+t(y-y_0))^2}{b^2}+\frac{(z+t(z-z_0))^2}{c^2}=1$$

整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)$$
$$+2t\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=1$$

因点M在椭球面S上，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$．所以上式化为

$$\begin{aligned}&t^2\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)\\ &+2t\left(1-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=0\end{aligned} \quad (3)$$

由于l_M与S在M点相切，方程（3）有一个二重根$t=0$．故有

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0 \quad (4)$$

此时由（1）知，方程（3）的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0$$

特别地，(4) 的系数均不为零因而是一个平面方程，确定的平面记为Π．上述的推导证明了$S\cap\Sigma\subset\Pi$，从而证明了$S\cap\Sigma\subset S\cap\Pi$

反之，对于截线$S\cap\Pi$上的任一点$M(x,y,z)$，由 (3)、(4) 两式即知，由A,M两点确定的直线l_M一定在点M与S相切．故由定义，l_M在锥面Σ上．特别地$M\in\Sigma$，由M的任意性，$S\cap\Pi\subset S\cap\Sigma$.

【思路二】因为A在S的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1>0 \qquad (5)$$

对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Sigma$，椭球面$S$在$M$点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0$$

因为连接M和A两点的直线是S在点M的切线，所以A点在上述切平面上. 故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0+\frac{y_1}{b^2}y_0+\frac{z_1}{c^2}z_0-1=0$$

于是，点$M(x_1,y_1,z_1)$在平面（注意，由（6）式，x_0,y_0,z_0不全为0）

$$\Pi:\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$$

上，即$M\in S\cap\Pi$. 反之，对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Pi$，有$\frac{x_0}{a^2}x_1+\frac{y_0}{b^2}y_1+\frac{z_0}{c^2}z_1-1=0$，则$S$在$M$点的切平面$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0$通过点$A(x_0,y_0,z_0)$，因而$M,A$的连线在点$M$和椭球面$S$相切，它在锥面$\Sigma$上. 故$M\in S\cap\Sigma$. 结论得证

三、**【参考解析】**：(1) 设C的不同特征值为$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$，不妨设$C$具有Jordan标准型：$C=\operatorname{diag}\left(J_1,\ldots,J_k\right)$，其中$J_i$为特征值$\lambda_i$对应的Jordan块.对矩阵$B$做与$C$相同的分块，$B=\left(B_{ij}\right)_{k\times k}$，由$BC=CB$可得$J_iB_{ij}=B_{ij}J_j,i,j=1,2,\ldots,k$.

这样对任意多项式p有$p\left(J_i\right)B_{ij}=B_{ij}p\left(J_j\right)$.取$p$为$J_i$的最小多项式，则得$B_{ij}p\left(J_j\right)=0$.

当$i\neq j$时，$p\left(J_j\right)$可逆，从而$B_{ij}=0$. 因此，$B=\operatorname{diag}\left(B_{11},\ldots,B_{kk}\right)$.

同理，$A=\operatorname{diag}\left(A_{11},\ldots,A_{kk}\right)$，由$AB-BA=C$得

$$A_{ii}B_{ii}-B_{ii}A_{ii}=J_i,i=1,\ldots,k.$$

故$\operatorname{Tr}\left(J_i\right)=\operatorname{Tr}(A_{ii}B_{ii}-B_{ii}A_{ii})=0,i=1,2,\ldots,k$.从而$\lambda_i=0$，即$C$为幂零方阵.

(2) 令$V_0=\left\{v\in\mathbb{C}^n\mid Cv=0\right\}$.对任意$v\in V_0$，由于$C(Av)=A(Cv)=0$，因此$AV_0\subseteq V_0$，同理，$BV_0\subseteq V_0$.

于是存在$0\neq v\in V_0$和$\lambda\in\mathbb{C}$使得$Av=\lambda v$，记$V_1=\{v\mid Av=\lambda v\}\subseteq V_0$，由$AB-BA=C$知，对任意$u\in V_1,A(Bu)=B(Au)+Cu=\lambda Bu$. 故$BV_1\subseteq V_1$.从而存在$0\neq v_1\in V_1$及$\mu\in\mathbb{C}$使得$Bv_1=\mu v_1$，同时有$Av_1=\lambda_1v_1,Cv_1=0$. 将$v_1$扩充为$\mathbb{C}^n$的一组基$\left\{v_1,v_2,\ldots,v_n\right\}$，令$P=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$，则

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda & x\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\quad BP=P\begin{pmatrix}\mu & y\\ 0 & B_1\end{pmatrix},\quad CP=P\begin{pmatrix}0 & z\\ 0 & C_1\end{pmatrix}$$

并且A_1,B_1,C_1满足$A_1B_1-B_1A_1=C_1,A_1C_1=C_1A_1,B_1C_1=C_1B_1$. 由数学归纳法即可得知，

A,B,C 同时相似于上三角阵.

(3) 当 $n \geq 3$ 时，取 $A = E_{12}, B = E_{23}, C = E_{13}$，则 A,B,C 满足题意.

对 $n = 2$，不妨设 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则有 $AC = CA$，得 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$.

类似有 $BC = CB$ 得 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$. 于是 $AB - BA = 0$，这与 $AB - BA = C$ 矛盾！故满足 $C \neq 0$ 的 n 最小为 3.

四、【参考解析】: 设 $M = \max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f'(x_1)|, m = \min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f'(x_0)|$，则有

$$\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left|\int_{x_0}^{x_1} f''(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|f'(x_1) - f'(x_0)\right| \geq M - m$$

另一方面，有 $\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq M\int_0^1 \mathrm{d}x = M$ 故，只需证明 $m \leq 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点，则 $m = 0$.此时（2）显然成立.现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点，不妨设 $f'(x) > 0$，因而 $f(x)$ 严格递增.下面分两种情形讨论.

情形1 $f(0) \geq 0$ 此时 $f(x) \geq 0 (x \in [0,1])$. 由 $f'(x) = |f'(x)| \geq m$，得

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x) - f(0))\,\mathrm{d}x + f(0)$$

$$\geq \int_0^1 (f(x) - f(0))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(\xi)x\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m$$

故，（2）成立.

情形2 $f(0) < 0$.此时有 $f(1) \leq 0$，根据 f 的递增性，有 $f(x) \leq 0 (x \in [0,1])$

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(1) - f(x))\,\mathrm{d}x - f(1)$$

$$\geq \int_0^1 |f(1) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |f'(\xi)|(1-x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 m(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m$$

五、【参考证明】 A 为幂零矩阵，所以 $A^n = 0$. 记 $f(x) = (1-x)^\alpha$，当 $j > k$ 时，记 $C_k^j = 0$，则

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^j x^{k-j} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A^j, \quad x \in (-1,1)$$

若有 $2 < m < n$ 使得 $A^m \neq 0, A^{m+1} = 0$，则

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{m-\alpha} G(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} A^m$$

若 $m \geq 3$，则 $m - \alpha > 1$，此时 $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 另一方面，若 $m \leq 2$，则 $m - \alpha < 1$，此时 $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 总之，使得对于 $1 \leq i,j \leq n$，积分 $\int_0^1 g_{ij}(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

六、**【参考证明】【思路一】** 令 $y=\dfrac{x'(t)}{x(t)}$，则 y 定号. 不妨设 $y(t)\ge 0$（否则考虑 $t\to -t$）.

下证结论对于 $C_1=1, C_2=\sqrt{3}$ 成立. 若存在 $t_0, y(t_0)>\sqrt{3}$，则

$$y'(t)=\frac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x^2(t)}=g(t)-y^2<2-y^2<-1, t<t_0$$

则 $y'(t)\big|_{t<t_0}<0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y^2-2}<-1, t<t_0 \Rightarrow \displaystyle\int_t^{t_0}\frac{y'\,\mathrm{d}s}{y^2-2}<t-t_0, t<t_0$，即

$$t>t_0+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{y(s)-2}{y(s)+2}\bigg|_t^{t_0}>-L>-\infty,$$

其中 $L>0$ 为一个常数. 这与 $y(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义矛盾.

若存在 $t_0, y(t_0)<1$，则 $y'=g(t)-y^2>\delta>0, t<t_0$，也就 $\exists t_1<t_0, y(t_1)<0$.矛盾.

【思路二】 不妨设 $x(t)$ 递增（否则考虑方程 $\ddot{x}=g(-t)x$）. 注意到 $\ddot{x}=g(t)x>0$，则 $x(-\infty)=\dot{x}(-\infty)=0$. 于是 $\dot{x}\ddot{x}=g(t)x\dot{x}$，则

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2=\int_{-\infty}^t \dot{x}\ddot{x}\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^t g(s)x\dot{x}\,\mathrm{d}s\\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^t x\dot{x}\,\mathrm{d}s<\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2<2\int_{-\infty}^t x\dot{x}\,\mathrm{d}s\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}x(t)^2<\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2<x(t)^2 \Rightarrow x(t)<\dot{x}(t)<\sqrt{2}x(t)
\end{aligned}$$