

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛

(数学类) 试卷

一、(本题共 10 分) 设 $\varepsilon \in (0, 1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

证明 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

二、(本题共 15 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

三、(本题共 10 分) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x, y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x, y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x, y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 成立

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1 - \alpha)f(x_2, y_2).$$

四、(本题共 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上黎曼(Riemann)可积, 在 $x = 1$ 可导, $f(1) = 0$,

$$f'(1) = a. \text{ 证明: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a.$$

五、(本题共 15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化) 过以下九点:

$$A(1, 0, 0), B(1, 1, 2), C(1, -1, -2), D(3, 0, 0), E(3, 1, 2),$$

$$F(3, -2, -4), G(0, 1, 4), H(3, -1, -2), I(5, 2\sqrt{2}, 8).$$

问 Σ 是哪一类曲面?

六、(本题共 20 分) 设 A 为 $n \times n$ 实矩阵 (未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha A \alpha^T \geq 0$ (这里 α^T 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β 使得 $\beta A \beta^T = 0$. 同时对任意 n 维实向量 x 和 y , 当 $x A y^T \neq 0$ 时有 $x A y^T + y A x^T \neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v , 都有 $v A \beta^T = 0$.

七、(本题共 10 分) 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上黎曼(Riemann)可积, $0 \leq f \leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在只取值为 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| < \varepsilon.$$

八、(10 分) 已知 $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty, \text{ 且 } \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt = a < +\infty, \text{ 其中 } \varphi^{-1} \text{ 表示}$$

$$\varphi \text{ 的反函数. 求证: } \int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \geq \frac{3}{2} a^2.$$