2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛

（数学专业）试卷

一、填空题（共 8 分，每空 2 分）

(1) 设$\beta>\alpha>0$，则$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=$______________.

(2) 若关于x的方程$kx+\frac{1}{x^2}=1(k>0)$在区间$(0,+\infty)$中有惟一实数解，则常数$k=$_____.

(3) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续.由积分中值公式有

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x-a)f(\xi)\ (a\le\xi\le x<b).$$

若导数$f_+'(a)$存在且非零， 则$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$的值等于_______.

(4) 设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=6$，则$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})=$____.

二、(10 分) 设$f(x)$在$(-1,1)$内有定义，在$x=0$处可导，且$f(0)=0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

三、(12 分)设$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,\infty)$，当自然数$n\to\infty$时$f(x+n)\to0$. 证明函数序列$\{f(x+n):n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0.

四、(12 分) 设$D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$，$f(x,y)$在D内连续，$g(x,y)$在D内连续有界，且满足条件：

(1) 当$x^2+y^2\to1$时，$f(x,y)\to+\infty$；

(2) 在D内f与g有二阶偏导数，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$和$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\ge e^g$.

证明：$f(x,y)\ge g(x,y)$在D内处处成立.

五、(共 10 分) 分别设$R=\{(x,y):0\le x\le1;0\le y\le1\}$

$$R_\varepsilon=\{(x,y):0\le x\le1-\varepsilon;0\le y\le1-\varepsilon\}.$$

考虑$I=\iint_R\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}$与$I_\varepsilon=\iint_{R_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}$，定义$I=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}I_\varepsilon$：

(1) 证明$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

(2)利用变量替换：$\begin{cases}u=\frac{1}{2}(x+y)\\ v=\frac{1}{2}(y-x)\end{cases}$计算积分$I$的值，并由此推出$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

六、(13 分) 已知两直线的方程：$L:x=y=z,\ L':\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}$.

(1) 问：参数a,b满足什么条件时，L与L'是异面直线?

(2) 当L与L'不重合时，求L'绕L旋转所生成的旋转面π的方程，并指出曲面π的类型.

七、(20 分)设A,B均为n阶半正定实对称矩阵，且满足$n-1\le \operatorname{rank}\ A\le n$. 证明存在实可逆矩阵$C$使得$C^TAC$，$C^TBC$均为对角阵.

八、(15 分)设V是复数域$\mathbb{C}$上的n维线性空间，$f_j:V\to\mathbb{C}$ 是非零的线性函数，$j=1,2$. 若不存在$0\ne c\in\mathbb{C}$使得$f_1=cf_2$， 证明：任意的$\alpha\in V$都可表为$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$使得

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2),\ f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$