2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类）试卷

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设$x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\,\mathrm{d}\,x(n=1,2,\cdots)$.

(4) 设$f\left(t\right)$有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5) 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线$l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$的距离.

第二题：(15 分)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点x_0，使得$f(x_0)<0$. 证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

第三题: (15 分)设$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$所确定. 且$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u+\dfrac{3}{2e}$在$t=1$处相切. 求函数$\psi(t)$.

第四题: (15 分)设 $a_n>0,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明: (1) 当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛; (2) 当$\alpha\le1$，且$S_n\to\infty\left(n\to\infty\right)$时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

第五题：(15 分)设l 是过原点、方向为(α,β,γ)（其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le1$（其中$0<c<b<a$，密度为 1）绕$l$旋转.

(1) 求其转动惯量； (2) 求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

第六题：(15 分)设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分 $\oint_C\dfrac{2xy\,\mathrm{d}\,x+\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$； (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.