

## 2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学专业) 试卷

### 一、填空题 (共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

- (1) 微分方程  $y'' - (y')^3 = 0$  的通解是\_\_\_\_\_.
- (2) 设  $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , 则  $I = \iint_D (x + y^2) e^{-(x^2 + y^2 - 4)} dx dy$  的值是\_\_\_\_\_.
- (3) 设  $f(t)$  二阶连续可导, 且  $f(t) \neq 0$ , 若  $\begin{cases} x = \int_0^t f(s) ds, \\ y = f(t), \end{cases}$  则  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ \_\_\_\_\_.
- (4) 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $n$  阶方阵  $A$  的特征值,  $f(x)$  为多项式, 则矩阵  $f(A)$  的行列式的值为\_\_\_\_\_.
- (5) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n \sin(\pi n! e)]$  的值为\_\_\_\_\_.

二、(本题满分 14 分) 设  $f(u, v)$  在全平面上有连续的偏导数, 证明: 曲面  $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$  的所有切平面都交于点  $(a, b, c)$ .

三、(本题满分 14 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

$$2 \int_a^b f(x) \left( \int_x^b f(t) dt \right) dx = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

四、(本题满分 14 分) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times p$  矩阵,  $C$  是  $p \times q$  矩阵.

证明:  $R(AB) + R(BC) - R(B) \leq R(ABC)$ , 其中  $R(X)$  表示矩阵  $X$  的秩.

五 (本题满分 14 分) 设  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , 其中  $n$  为正整数.

- (1) 若  $n \geq 2$ , 计算  $I_n + I_{n-2}$ ;
- (2) 设  $p$  为实数, 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$  的绝对收敛性和条件收敛性.

六、(本题 14 分) 设  $P(x, y, z)$  和  $R(x, y, z)$  在空间上有连续偏导数, 设上半球面

$$S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}, \text{ 方向向上,}$$

若对任何点  $(x_0, y_0, z_0)$  和  $r > 0$ , 第二型曲面积分  $\iint_S P dy dz + R dx dy = 0$ . 证明:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0.$$