2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类三、四年级）试卷

一、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体：矩阵的每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为 1，则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}\left|A\right| =$______.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}\, x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛，则 p 取值范围________.

(3) 设 $D: x^2 + 2y^2 \le 2x + 4y$，则积分 $I = \iint\limits_D \left(x+y\right)\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y =$_______.

(4) 若实向量 $X = \left(a,b,c\right)$ 的三个分量 a,b,c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$，则 $X =$_____或_____或________或________.

二、（本题 15 分） 在空间直角坐标系中，设 S 为椭圆柱面 $x^2 + 2y^2 = 1$，σ 是空间中的平面，它与 S 的交集为一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

三、（本题 15 分） 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\mathrm{tr}\left(\left(AB\right)^2\right) \le \mathrm{tr}\left(A^2B^2\right)$.

四、（本题 20 分） 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 令 P_A, P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的周长. 求证：$P_A^{\frac{1}{3}} P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

五、（本题 10 分，抽象代数） 设 u_1, v_1, u_2, v_2 为群 G 中的元素，满足

$$u_1v_1 = v_1u_1 = u_2v_2 = v_2u_2.$$

若 u_1, u_2 的阶均为 8，v_1, v_2 的阶均为 13. 证明：u_1u_2 的阶为 4 及 v_1v_2 的阶为 13.

六、（本题 10 分，实变函数） 设 $E \subset R^1$，E 是 $L-$可测的，若 $m\left(E\right) > a > 0$，则存在无内点的有界闭集 $F \subset E$，使得 $m\left(F\right) = a$.

七、（本题 10 分，微分几何） 设 $\gamma\left(s\right), s \in \left[0, l\right]$ 是空间中一条光滑闭曲线，以弧长为参数，且曲率 $k > 0$. 设 $\beta: \left[0, l\right] \to S^2$ 为单位球面上由 $\gamma\left(s\right)$ 的单位主法向量构成的一条简单闭曲线 B. 证明：B 将球面分成面积相等的两个部分.

八、（本题 10 分，数值分析） 实系数多项式 $p\left(x\right)$ 的模 1 范数定义为：

$$\|\, p \,\|_1 := \int_0^1 |\, p(x) \,|\,\mathrm{d}\, x.$$

1．求二次实系数多项式 $p\left(x\right)$ 使得 $p\left(x\right) \le x^3$，对任意 $x \in \left[0,1\right]$ 成立，且 $\left\|x^3 - p\left(x\right)\right\|_1$ 达到最小.

2．求三次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \le x^4$，对任意 $x \in [0,1]$ 成立，且 $\left\| x^4 - p(x) \right\|_1$ 达到最小.

九、（本题 10 分，复变函数） 设 $D = \{ z \in C : |z| < 1 \}$ 是单位圆盘，$f(z)$ 在 D 上解析，$f(0) = 0$，且在 D 上有 $\operatorname{Re} f(z) \le 1$．求证：在 D 上有 $\operatorname{Re} f(z) \le \dfrac{2|z|}{1+|z|}$.

十、（本题 10 分，概率统计） 甲袋中有 $N-1\,(N>1)$ 个白球和 1 个黑球，乙袋中有 N 个白球，每次从甲乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中，这样经过了 n 次，求黑球出现在甲袋中的概率 p_n，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.