2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
(数学三、四年级）参考答案

一、填空题:

(1)【参考解答】: 0.

因为该多项式无 3 次项，故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得到行列式的值为 0.

(2)【参考解答】: $a>27$ 或 $a<-37$.

记 $f\left(x\right)=3x^4-8x^3-30x^2+72x+a$，则

$$f'\left(x\right)=12x^3-24x^2-60x+72=12\left(x^3-2x^2-5x+6\right)$$
$$=12\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left(x+2\right)$$

$f\left(x\right)$ 在 -2 和 3 取得极小值 $-152+a$ 和 $-27+a$. $f\left(x\right)$ 在 1 取得极大值 $37+a$. 因此，当且仅当 $a>27$ 或 $a<-37$ 时方程有虚根.

(3)【参考解答】: $-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

令曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$ 取下侧，则 $S_1\cup S$ 为闭下半球面的内侧. 设其内部区域为 Ω，令 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2+y^2\le a^2$，则利用高斯公式，得

$$I=\frac{1}{a}\left\{\iint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}\left[ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(z+a\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{a}\left\{-\iiint\limits_{\Omega}\left(3a+2z\right)\mathrm{d}V+\iint\limits_{D}a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}$$
$$=\frac{1}{a}\left\{-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V+\pi a^4\right\}$$
$$=-\pi a^3-\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\,\mathrm{d}z$$
$$=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

(4)【参考解答】: $-\dfrac{1}{2}$.

$A=Q\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}Q^T$，$Q$ 可以表示为 $\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\ \sin t&-\cos t\end{pmatrix}$，所以 $a_{21}=-\sin t\cos t$，立即

得到结果.

第二题：【参考解答】：交线为抛物线或椭圆.

(1)如果平面 P 平行于 $z-$轴，则相交曲线 $C=\Gamma\cap P$ 可以经过以 $z-$为旋转轴的旋转，使得 P 平行于 $yz-$平面，C 的形式不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x=c$，交线 C 的方程为

$$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right).$$

将 C 投影到 $yz-$平面上，得到抛物线 $z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 $yz-$平面，故交线为抛物线.

(2)如果平面 P 不平行于 $z-$轴，设 P 的方程为 $z=ax+by+c$. 代入 Γ 的方程 $z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right)$，得

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=a^2+b^2+2c:=R^2$$

将 $C=\Gamma\cap P$ 垂直投影到 $xy-$平面，得到圆周

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$$

令 Q 是以这个圆为底的圆柱，则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体，它与平面 P 相切于 F_1,F_2，与圆柱 Q 相交于圆 D_1,D_2. 对 $C=Q\cap P$ 上的任意一点 A，过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1，交圆 D_2 于 B_2，则线段 B_1B_2 为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到 $\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=\left|AB_1\right|+\left|AB_2\right|=\left|B_1B_2\right|$ 为常数，故曲线 C 为椭圆.

第三题：【参考证明】：设 $A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q, B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 P，Q 为可逆方阵，$B_1$ 为 r 阶方阵，则有

$$AB=P\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}, BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}Q$$

$$ABA=P\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

由 $\mathrm{rank}\,ABA=\mathrm{rank}\,B_1=\mathrm{rank}\,B$ 可得，存在矩阵 X,Y 使得 $B_2=B_1X, B_3=YB_1$，从而有

$$AB=P\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ Y & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -Y & I\end{pmatrix}Q$$

因此，AB 与 BA 相似.

第四题：**【参考证明】**：由于 $f\in\mathscr{S}$，因此存在 $M_1>0$ 使得

$$\left|2\pi ixf\left(x\right)\right|\le\frac{M_1}{x^2+1},\forall x\in R \qquad (1)$$

这样$\int_R\left(-2\pi iy\right)f\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y$关于$x\in R$一致收敛，从而可得

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}\,x}=\int_R -2\pi iyf\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y.\quad(2)$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^n\,\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}\,x^n}=\int_R\left(-2\pi iy\right)^n f\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y.\qquad(3)$$

利用分部积分法可得

$$\left(f^{(n)}\right)^{\wedge}\left(x\right)=\left(2\pi ix\right)^n\hat{f}\left(x\right),\forall n\geq 0\quad(4)$$

结合(3)(4)并利用$f\in\mathscr{S}$，可得对任何$m,k\geq 0$，有

$$x^m\frac{\mathrm{d}^k\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}\,x^k}=\frac{1}{\left(2\pi i\right)^m}\int_R\frac{\mathrm{d}^m\left(\left(-2\pi iy\right)^k f\left(y\right)\right)}{\mathrm{d}\,y^m}e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y$$

在R上有界. 从而$\hat{f}\in\mathscr{S}$. 于是$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}\left(y\right)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y$收敛,

$$\int_{-A}^{A}\hat{f}\left(y\right)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}\,y=\int_{-A}^{A}\mathrm{d}\,y\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)e^{2\pi i\left(x-t\right)y}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_{-A}^{A}\mathrm{d}\,y\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-t\right)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}\,t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\int_{-A}^{A}f\left(x-t\right)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-t\right)\frac{\sin\left(2\pi At\right)}{\pi t}\,\mathrm{d}\,t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f\left(x-t\right)-f\left(x\right)}{\pi t}\sin\left(2\pi At\right)\mathrm{d}\,t+f\left(x\right)\quad(5)$$

由于$f\in\mathscr{S}$易得积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{f\left(x-t\right)-f\left(x\right)}{\pi t}\right|\mathrm{d}\,t$收敛，从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f\left(x-t\right)-f\left(x\right)}{\pi t}\sin\left(2\pi At\right)\mathrm{d}\,t=0.(6)$$

组合(5)(6)即得结论成立.

第五题：【参考证明】：假设φ不恒为 0，则$\exists a\in F$使得$\varphi\left(a\right)\neq 0$.于是由$\varphi\left(0+a\right)=\varphi\left(a\right)$可知

$$\varphi\left(a\right)=\varphi\left(0\right)\varphi\left(a\right)$$

导致$\varphi\left(0\right)=1$.进而$\forall x\in F$有

$$1=\varphi\left(0\right)=\varphi\underbrace{\left(x+\cdots+x\right)}_{p}=\left(\varphi\left(x\right)\right)^p,\ \left(\varphi\left(x\right)\right)^p-1=0$$

注意到$ChF=p$，p为素数，故有$\forall a,b\in F$，

$$\left(a+b\right)^p=a^p+b^p\text{，进而}\left(a-b\right)^p=a^p-b^p.$$

结果由$\left(\varphi(x)\right)^{p}-1=0$可得$\left(\varphi(x)-1\right)^{p}=0$，即$\varphi(x)=1$.

第六题：【参考证明】：(1)做$[0,1]$的划分$\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，其中

$$x_0\in E, x_2\in E,\cdots,x_n\in E; x_1\notin E, x_3\notin E,\cdots,\ x_{n-1}\notin E.$$

构造如下：$\forall n\ge 1$，先取$x_0=0, x_2, x_4, x_{n-2}\in E, x_n=1$。由$E$的构造知：

$$[x_0,x_2],[x_2,x_4],\cdots,[x_{n-2},x_n]$$

中有无穷多不属于E的点，取$x_1\in(x_0,x_2)\setminus E, x_3\in(x_2,x_4)\setminus E,\cdots,\ x_{n-1}\in(x_{n-2},x_n)\setminus E$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})\right|=n。$$

当$n\to\infty$时，$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})\right|\to\infty$，即$\bigvee_0^1\left(\chi_E(x)\right)=+\infty.$

(2)证明：$(\Rightarrow)$反证法。假设E有无穷多边界点$\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$. $\forall n>1$，造$[0,1]$的分划Δ如下：取$x_0=0$，在$\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$中任取n个点按大小排列记作$\{c_1,\cdots,c_n\}$.

由边界点的定义：$\forall\varepsilon>0$，$U(c_i,\varepsilon)\cap E\ne\varnothing$且$U(c_i,\varepsilon)\cap\mathscr{C}E\ne\varnothing\ (1\le i\le n)$. 对

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}\min\{c_{i+1}-c_i, i=1,2,\cdots,n-1\},$$

若取$x_0\in E$，取$x_1\in(x_0,c_1+\varepsilon)\cap\mathscr{C}E$，$x_2\in(x_1,c_2+\varepsilon)\cap E,$

$$x_3\in(x_2,c_3+\varepsilon)\cap\mathscr{C}E,\ x_4\in(x_3,c_4+\varepsilon)\cap E,\cdots;$$

若$x_{n-2}\in\mathscr{C}E$，取

$$x_{n-1}\in(x_{n-2},c_{n-1}+\varepsilon)\cap E, x_n=1.$$

于是$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})\right|\ge n-1$，当$n\to\infty$时，

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})\right|\to\infty,$$

即$\bigvee_0^1\left(\chi_E(x)\right)=+\infty.$ 与$\chi_E(x)$在$[0,1]$上有界变差矛盾，故假设不真。

$(\Leftarrow)$设$c_1,c_2,\cdots,c_m$是E的边界点，m有限。对任意$[0,1]$分划$\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，$n$各小区间

$$[x_i,x_{i+1}]\ (0\le i\le n-1)$$

中至多m个含有$\{c_i\}_{i=1}^{m}$的点，也即

$$[x_i,x_{i+1}]\ (0\le i\le n-1)$$

中至多m个小区间中既有E的点同时也有$\mathscr{C}E$的点。由$\chi_E\left(x\right)$的定义，有

$$\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|=\begin{cases}1, x_i\in E, x_{i-1}\in \mathscr{C}E, or\ x_{i-1}\in E, x_i\in \mathscr{C}E\\ 0, x_i, x_{i-1}\in E, or\ x_i, x_{i-1}\in \mathscr{C}E.\end{cases}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\chi_E\left(x_i\right)-\chi_E\left(x_{i-1}\right)\right|\le m\Rightarrow \bigvee_0^1\left(\chi_E\left(x\right)\right)\le m<\infty.$$

第七题：【参考证明】： 设k_1,k_2为曲面 S 的两个主曲率，它对应的单位主方向为e_1,e_2. 设v是$p\in S$点处单位切向量，它与e_1的交角为θ，则沿v的方向法曲率为

$$k_n\left(v\right)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta.$$

在$p\in S$点记σ为曲面法向量 N 和v张成的平面，它截曲面 S 为曲线 C，C 称为 S 沿v方向的法截线，则法曲率$k_n\left(v\right)$等于法截线 C 在平面σ上p点处的相对曲率。

因为p点处沿三个不同方向v_1,v_2,v_3的法截线 C 为直线，故存在不同的$\theta_1,\theta_2,\theta_3\left(0\le\theta_1,\theta_2,\theta_3<\pi\right)$使得

$$k_n\left(v_1\right)=k_1\cos^2\theta_1+k_2\sin^2\theta_1=0;$$

$$k_n\left(v_2\right)=k_1\cos^2\theta_2+k_2\sin^2\theta_2=0;$$

$$k_n\left(v_3\right)=k_1\cos^2\theta_3+k_2\sin^2\theta_3=0.$$

如果$\left(k_1,k_2\right)\ne\left(0,0\right)$，则存在$\varepsilon_1=\pm1,\varepsilon_2=\pm1,$ 有

$$\sin\theta_1\cos\theta_2+\varepsilon_1\cos\theta_1\sin\theta_2=\sin\left(\theta_1+\varepsilon_1\theta_2\right)=0;$$

$$\sin\theta_1\cos\theta_3+\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_3=\sin\left(\theta_1+\varepsilon_2\theta_3\right)=0;$$

$$\sin\theta_2\cos\theta_3-\varepsilon_1\varepsilon_2\cos\theta_2\sin\theta_3=\sin\left(\theta_2-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3\right)=0.$$

由于$0\le\theta_1,\theta_2,\theta_3<\pi$，所以有

$$\theta_1+\varepsilon_1\theta_2=0,\theta_1+\varepsilon_2\theta_3=0,\theta_2-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3=0.$$

于是推出$\theta_1,\theta_2,\theta_3$必有两个相同，矛盾。故在曲面 S 的任何点$p$有$k_1=k_2=0.$

由此推出 Weingarten 变换$W\equiv0$。将曲面 S 参数化为$x\left(u,v\right)$，它的法向量为$N\left(u,v\right)$，则有

$$W\left(x_u\right)=-N_u=0,W\left(x_v\right)=-N_v=0.$$

故法向量 N 为常向量。再由$x_u\cdot N=x_v\cdot N=0,$ 得到$x\cdot N=c$为常数，故 S 落在一张平面上。

第八题：【参考解答】： (1)对$y'=f\left(x,y\right)$两边取积分得

$$y\left(x_{n+1}\right)=y\left(x_n\right)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f\left(x,y\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$$

由 Simpson 公式，有

$$y\left(x_{n+1}\right)=y\left(x_n\right)+\frac{h}{6}[f\left(x_n,y\left(x_n\right)\right)+4f\left(x_n+h/2,y\left(x_n+h/2\right)\right)$$
$$+f\left(x_{n+1},y\left(x_{n+1}\right)\right)]+o\left(h^5\right)$$

由此可令 $c_1=\frac{1}{6},c_2=\frac{4}{6},c_3=\frac{1}{6}$.

令 $y_n=y\left(x_n\right)$，可得

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}=\frac{2h}{3}[f\left(x_n+h/2,y\left(x_n+h/2\right)\right)-f\left(x_n+a_2h,y_n+b_{21}hK_1\right)]$$
$$+\frac{h}{6}[f\left(x_{n+1},y\left(x_{n+1}\right)\right)\ -f\left(x_n+a_3h,y_n+b_{32}hK_1+b_{32}hK_2\right)]$$

我们只需要选取参数化 $a_2,a_3,b_{21},b_{31},b_{32}$ 使得上式右端为 $O\left(h^4\right)$.

注意到 $y'\left(x_n\right)=f\left(x_n,y\left(x_n\right)\right)$，记 $f_n=f\left(x_n,y\left(x_n\right)\right)$，将 $y\left(x_n+h/2\right)$ 做 Taylor 展开得

$$f\left(x_n+h/2,y\left(x_n+h/2\right)\right)-f\left(x_n+a_2h,y_n+b_{21}hK_1\right)$$
$$=f\left(x_n+h/2,y\left(x_n\right)+hf_n/2+h^2y''\left(x_n\right)/8+O\left(h^3\right)\right)$$
$$-f\left(x_n+a_2h,y_n+b_{21}hK_1\right)$$

为了使得上式达到精度的要求，应取 $a_2=\frac{1}{2},b_{21}=\frac{1}{2}$。于是利用 Taylor 展开有

$$f\left(x_n+h/2,y\left(x_n+h/2\right)\right)-f\left(x_n+h/2,y_n+hK_1/2\right)$$
$$=\frac{h^2}{8}y''\left(x_n\right)f_y\left(x_n,y_n\right)+O\left(h^3\right)$$

另一方面

$$f\left(x_n+h,y\left(x_n+h\right)\right)-f(x_n+a_3h,\ y_n+b_{31}hf_n+b_{32}hf\left(x_n+h/2,y_n+h/2f_n\right))$$
$$=f\left(x_n+h,y\left(x_n\right)+hf_n+h^2y''\left(x_n\right)/2+O\left(h^3\right)\right)$$
$$-f(x_n+a_3h,y_n+\left(b_{31}+b_{32}\right)hf_n+b_{32}h^2/2(f_x\left(x_n,y_n\right)+f_y\left(x_n,y_n\right)f_n)+O\left(h^3\right))$$

为了使得上式达到给定的精度，令 $a_3=1,b_{31}+b_{32}=1$.注意到

$$y''\left(x_n\right)=f_x\left(x_n,y_n\right)+f_y\left(x_n,y_n\right)f_n,$$

再次利用泰勒展开得

$$f\left(x_n+h,y\left(x_n+h\right)\right)-f(x_n+a_3h,\ b_{31}hf_n+b_{32}hf\left(x_n+h/2,y_n+h/2f_n\right))$$
$$=\frac{h^2}{3}\left(1-b_{32}\right)y''\left(x_n\right)f_y\left(x_n,y_n\right)+O\left(h^3\right)$$

综合上面的结果得

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}=\frac{h^3}{12}\left(2-b_{32}\right)y''\left(x_n\right)f_y\left(x_n,y_n\right)+O\left(h^4\right)$$

令$h_{32}=2$，得到三级三阶 Runge-Kutta 格式的所有参数。

(2)下面讨论格式的稳定性。对微分方程$y'=\lambda y$应用上述 Runge-Kutta 格式，得

$$K_1=\lambda y_n,K_2=\lambda\left(1+\frac{1}{2}\lambda h\right)y_n,K_3=\lambda\left(1+\lambda h+\left(\lambda h\right)^2\right)y_n$$

从而有$y_{n+1}=\left(1+\lambda h+\frac{1}{2}\left(\lambda h\right)^2+\frac{1}{6}\left(\lambda h\right)^3\right)y_n$，故格式稳定的条件是

$$\left|1+\lambda h+\frac{1}{2}\left(\lambda h\right)^2+\frac{1}{6}\left(\lambda h\right)^3\right|<1.$$

第九题：【参考证明】： 令$w=w\left(z\right)=\frac{f\left(z\right)}{M}$，做变换$F\left(z\right)=\frac{w\left(z\right)-w\left(0\right)}{1-\overline{w\left(0\right)}w\left(z\right)}$，这里$w\left(0\right)=\frac{f\left(0\right)}{M}$.

则该变换把单位圆$|w|<1$映射为$\left|F\left(z\right)\right|<1$. 由施瓦兹引理$\left|F'\left(0\right)\right|\leq 1$. 由于

$$F'\left(z\right)|_{z=0}=\left(\frac{w\left(z\right)-w\left(0\right)}{1-\overline{w\left(0\right)}w\left(z\right)}\right)'\Bigg|_{z=0}=\frac{w'\left(0\right)}{1-|w\left(0\right)|^2}=\frac{f'\left(0\right)M}{M^2-|f\left(0\right)|^2}$$

则$\left|\frac{f'\left(0\right)M}{M^2-|f\left(0\right)|^2}\right|\leq 1,\left|f'\left(0\right)\right|M\leq\left|M^2-|f\left(0\right)|^2\right|$。由于在单位圆$\left|z\right|<1$内

$$\left|f\left(z\right)\right|\leq M\left(M>0\right),$$

特别地有$\left|f\left(0\right)\right|\leq M$。

于是$\left|M^2-|f\left(0\right)|^2\right|=M^2-|f\left(0\right)|^2$，即$|f'\left(0\right)|M\leq M^2-|f\left(0\right)|^2$.

第十题：【参考解答】： X_k的特征函数为

$$f_{X_k}\left(t\right)=Ee^{itX_k}=\frac{1}{2}\left(e^{iat}+1\right)=\exp\left\{\frac{iat}{2}\right\}\cos\frac{at}{2}\left(k=1,2,\cdots\right)$$

所以$X_k/2^k$的特征函数为

$$f_{X_k/2^k}\left(t\right)=f_{X_k}\left(t/2^k\right)=\exp\left\{\frac{iat}{2^{k+1}}\right\}\cos\frac{at}{2^{k+1}}$$

于是应用$\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}$得$Y_n$的特征函数为

$$f_{Y_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k/2^k}(t)=f_{X_k}\left(t/2^k\right)=\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}\exp\left\{iat\left[\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\dfrac{at}{2}}{\sin\dfrac{at}{2^{n+1}}}\exp\left\{\frac{iat}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

应用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{at}{2^{n+1}}}{\dfrac{at}{2^{n+1}}}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，以及

$$\exp\left(\frac{iat}{2}\right)-\exp\left(-\frac{iat}{2}\right)=2i\sin\frac{at}{2}$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{Y_n}(t)=\dfrac{2}{at}\exp\left(\dfrac{iat}{2}\right)\sin\dfrac{at}{2}=\dfrac{1}{iat}\left[\exp(iat)-1\right]$

由于在区间$\left[0,a\right]$上均匀分布随机变量的特征函数

$$\varphi(t)=\frac{1}{iat}\left[\exp\left(iat\right)-1\right]$$

所以Y_n的分布收敛于区间$\left[0,a\right]$上均匀分布.