2013年第五届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类）试卷

一、解答下列各题(共4 小题,每小题6 分,共24 分).

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

2．证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的。

3．设 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

4．过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\left(x\ge 0\right)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$。求点 A 的坐标。

第二题：(12 分)计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

第四题: (10 分)设 $\left|f(x)\right|\le\pi, f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$, 证明: $\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}$.

第五题：(14 分)设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(2y^3-y\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(3z^3-z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

第六题：(14 分)设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^a}$, 其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

第七题：(14 分)判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。