第十三届全国大学生数学竞赛初赛

《数学类 B 卷》试题

一、(15 分) 设球面$S: x^2+y^2+z^2=1$，求以点$M_0(0,0,a)(a\in\mathbb{R}, |a|>1)$为顶点的与$S$相切的锥面方程.

二、(15 分) 设$B\subset R^n(n\geq 2)$是单位开球，函数u,v在$\bar{B}$上连续，在B内二阶连续可导，满足

$$\begin{cases} -\Delta u-\left(1-u^2-v^2\right)u=0, & x\in B \\ -\Delta v-\left(1-u^2-v^2\right)v=0, & x\in B \\ u(x)=v(x)=0, & x\in\partial B \end{cases}$$

其中，$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

∂B表示B的边界. 证明:

$$u^2(x)+v^2(x)\leq 1(\forall x\in\bar{B}).$$

三、(15 分) 设$f(x)=x^{2021}+a_{2020}x^{2020}+a_{2019}x^{2019}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$为整系数多项式，$a_0\neq 0$. 设对任意$0\leq k\leq 2020$有$\left|a_k\right|\leq 40$，证明：$f(x)=0$的根不 可能全为实数.

四、(20 分) 设$R=\{0,1,-1\},\Gamma$为R上的 3 阶行列式全体，即

$$\Gamma=\left\{\det\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}\mid a_{ij}\in R\right\}.$$

证明：$\Gamma=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

五、(15 分)设f在$[-1,1]$内有定义，在$x=0$的某邻域内连续可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$.

证明：级 数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$发散.

六、(20 分) 设函数$f(x)=\ln\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. 证明函数$f$在$(-\infty,0)$内为严格凸的，并且对任意$\xi\in(-\infty,0)$，存在$x_1,x_2\in(-\infty,0)$使得

$$f'(\xi)=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$$

(称(a,b)内的函数S为严格凸的，如果对任何$\alpha\in(0,1)$以及$x,y\in(a,b),x\neq y$成立

$$S(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha S(x)+(1-\alpha)S(y).)$$