2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

数学专业竞赛（A 卷）试题

一、(本题 15 分) 空间中有两个圆球面 B_1 和 B_2，B_2 包含在 B_1 所围球体的内部，两球面之间的闭区域为 D. 设 B 是含在 D 中的一个圆球，它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

(i) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面;

(i) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点.

证明你的论断.

二、(本题 15 分) 设 $\alpha > 0, f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负，有二阶导函数，$f(0)=0$，且在 $[0,1]$ 上不恒为零。求证：存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $\xi f''(\xi) + (\alpha+1) f'(\xi) > \alpha f(\xi)$. .

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶复方阵，$p(x)$ 为 $I - \bar{A}A$ 的特征多项式，其中 $\bar{A}$ 表示 A 的共轭矩阵. 证明：$p(x)$ 必为实系数多项式.

四、(本题 20 分) 已知 f_1 为实 n 元正定二次型. 令

$V = \{f \mid f$ 为实 n 元二次型，满足：对任何实数 k 有 $kf + f_1$ 属于恒号二次型$\}$，

这里恒号二次型为 0 二次型，正定二次型及负定二次型的总称. 证明：V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并求这个向量空间的维数.

五、(本题 15 分) 设 $\delta > 0, \alpha \in (0,1)$，实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, n \ge 1$$

其中 $\{h_n\}$ 有正的上下界. 证明：$\{n^\delta x_n\}$ 有界.

六、(本题 20 分) 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

(i) 证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步，证明当 $x, y \ge 0$ 时成立

$$f(x) + f(y) \le f(0) + f(x+y).$$

(ii) 设 $n \ge 3$，试确定集合

$$E \equiv \left\{\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}.$$