2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类一、二年级）参考答案

一、【参考证明】: 设l是过P点的抛物面S的一条切线，它的方向向量为$V=(u,v,w)$，则切点可以表示为

$$Q=P+tV=(a+tu,b+tv,c+tw),$$

其中t是二次方程$2(c+tw)=(a+tu)^2+(b+tv)^2$，也就是

$$(u^2+v^2)t^2+2(au+bv-w)t+(a^2+b^2-2c)=0$$

的唯一重根.

这时，$(au+bv-w)^2=(u^2+v^2)(a^2+b^2-2c)$，得$t=\dfrac{w-au-bv}{u^2+v^2}=\dfrac{a^2+b^2-2c}{w-au-bv}$. 于是切点

$$Q=(X,Y,Z)=(a+tu,b+tv,c+tw)$$

满足

$$aX+bY-Z=(a^2+b^2-c)+t(au+bv-w)=c.$$

于是所有切点Q落在平面$ax+by-z=c$上.

二、【参考证明】:(1) 由于$\mathrm{tr}(A)$是A的特征值之和，得λ_1的代数重数也是 3，而A的另一特征值$\lambda_2=0$，且$\lambda_2=0$的代数重数为 1. 结果A有四个线性无关的特征向量. 故A可对角化.

(2) 由于$\lambda_1=2$的重数为 3，故有

$$rank(A-2E)=rank\begin{pmatrix}0&2&2&-2\\a&-2&b&c\\d&e&-2&f\\g&h&k&2\end{pmatrix}.$$

进而$a/0=-2/2=b/2=c/-2$，得$a=0,b=-2,c=2;$

$d/0=e/2=-2/2=f/-2$，得$d=0,e=-2,f=2;$

$g/0=h/2=k/2=2/-2$，得$g=0,h=-2,k=-2$，

于是$A=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&-2&2\\0&-2&0&2\\0&-2&-2&4\end{pmatrix}$. 注意到$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx=x^TBx$，其中

$$B=\frac{A+A^T}{2},B=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&-2&0\\1&-2&0&0\\-1&0&0&4\end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1=2$ （二重），$\lambda_{1,2}=1\pm 2\sqrt{3}$ （一重）．故 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2+2y_2^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)y_3^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)y_4^2$.

三、【参考证明】: (1) A 有 n 各线性无关的特征向量，故 A 可对角化. 设 λ_0 是 A 的一个特征值，考察 $A-\lambda_0 I$，它有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，结果 $rand(A-\lambda_0 I)=n-1$.故 λ_0 的重数为 1，从而 A 有 n 个各不相同的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

(2) $\forall X_1,X_2\in W,\forall\mu\in R$ ，显然 $X_1+\mu X_2\in W$, 故 W 为 R 上的向量空间．让 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$，于是

$$XA=AX\Leftrightarrow XP\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}XP\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}XP.$$

故若记

$$V=\left\{Y\in R^{n\times n}\mid Y\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}Y\right\},$$

则 W 与 V 有线性同构 $\sigma:X\to P^{-1}XP$. 从而

$$\dim V=\dim W.$$

注意到 $V=\left\{\begin{pmatrix}d_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&d_n\end{pmatrix}\mid d_1,\cdots,d_n\in R\right\}$，故

$$\dim V=\dim W=n.$$

(3) 显然，$I,A,\cdots,A^{n-1}\in W$. 下面证 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 线性无关. 事实上，若

$$x_0I+x_1A+\cdots+x_{n-1}A^{n-1}=0,$$

则得

$$x_0+x_1\lambda_1+\cdots+x_{n-1}\lambda_1^{\,n-1}=0$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_0+x_1\lambda_n+\cdots+x_{n-1}\lambda_n^{\,n-1}=0$$

其系数行列式为范德蒙行列式，由$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$各不相同，故$I,A,\cdots,A^{n-1}$线性无关，即$I,A,\cdots,A^{n-1}$为其一组基.

四、【参考证明】: 用反证法. 设存在$x_0\in[a,b]$使得$z(x_0)>y(x_0)$. 令

$$M=\{x\in[a,b]\mid z(x)>y(x)\},$$

则M为$[a,b]$的非空开子集. 故存在开区间$(\alpha,\beta)\subset M$满足

$$y(\alpha)=z(\alpha),z(x)>y(x),x\in(\alpha,\beta).$$

这推出$z(x)-y(x)$单调不增，故$z(x)-y(x)\le z(a)-y(a)=0$. 矛盾.

五、【参考证明】: 令$g(t)=\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta}-\int_0^t f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$，则$g(t)$可导,

$$g'(t)=f(t)\left[\beta\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta-1}-f^{\alpha-1}(t)\right].$$

令$h(t)=\beta^{\frac{1}{\beta-1}}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-f^2(t)$，则有$h'(t)=f(t)\left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}}-2f'(t)\right]$. 由于$\beta>1,f'(x)\le\dfrac{1}{2}$，我们有$h'(t)\ge0$. 这说明$h(t)$单调递增，从$h(0)=0$，得$h(t)\ge0$. 因而$g'(t)\ge0$. 从$g(0)=0$，得$g(t)\ge0$，即

$$\int_0^t f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\le\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta}.$$

令$t\to+\infty$，即得所证.

六、【参考证明】: $C_{\max}=\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}$.不妨设$f(x)$的最小实根为0，最大实根为$a$. 设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$
$$0=x_1\le x_2\le\cdots\le x_n=a.$$

先证以下引理:

引理: 若存在$2\le k,m\le n-1$使得$x_k<x_m$，令

$$x_k<x_k'\le x_m'<x_m\text{满足}x_k+x_m=x_k'+x_m',\text{令}$$

$f_1(x)=(x-x_1')(x-x_2')\cdots(x-x_n'),x_i'=x_i,i\ne k,m.$则$\mathrm{d}(f_1')\le\mathrm{d}(f')$.

证明: 注意到$f(x)=f_1(x)-\delta F(x)$，其中

$$F(x)=\frac{f_1(x)}{(x-x_k')(x-x_m')},\delta=x_k'x_m'-x_kx_m>0.$$

设α,β分别为$f_1'(x)$的最大最小实根，则有

$$f_1(\alpha)\le 0,f_1(\beta)(-1)^n\le 0.$$

由罗尔定理$\alpha\ge x_m,\beta\le x_k$，并且

$$f'(\alpha)=\delta\frac{(2\alpha-x_k'-x_m')}{(\alpha-x_k')^2(\alpha-x_m')^2}f_1(\alpha).$$

则$f'(\alpha)f_1(\alpha)\ge 0$，故$f'(\alpha)\le 0$. 这表明$f'(x)=0$的最大实根大于或等于$\alpha$. 同理，$f'(x)=0$最小实根小于或等于$\beta$. 引理证毕. 令

$$g(x)=x(x-a)(x-b)^{n-2},b=\frac{x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到$\mathrm{d}(f')\ge\mathrm{d}(g')$. 由于

$$g'(x)=(x-b)^{n-3}\left(nx^2-((n-1)a+2b)x+ab\right),$$

$$\mathrm{d}(g')=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{n}+\left(\frac{a-2b}{n}\right)^2}\ge\sqrt{1-\frac{2}{n}}a.$$

于是C的最大值$C_{\max}\ge\sqrt{1-\frac{2}{n}}$, 且当$f(x)=x(x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)^{n-2}$时，$\mathrm{d}(f')=\sqrt{1-\frac{2}{n}}\mathrm{d}(f)$.