2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）
试卷及参考答案

一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1. 已知可导函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)\cos x+2\int_0^x f\left(t\right)\sin t\,\mathrm{d}\,t=x+1$，则 $f\left(x\right)=$________________。

【参考解答】：首先令 $x=0$，则由等式可得 $f\left(0\right)=1$；对等式两端求导数，则有

$$f'\left(x\right)\cos x-f\left(x\right)\sin x+2f\left(x\right)\sin x=1$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)+f\left(x\right)\tan x=\sec x$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，由计算公式可得

$$f(x)=e^{-\int\tan x\,\mathrm{d}\,x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x+C\right)$$

$$=e^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\tan x+C\right)=\sin x+C\cos x$$

代入初值 $f\left(0\right)=1$，得 $C=1$，所以 $f\left(x\right)=\cos x+\sin x$．只要求出满足条件的 $f\left(x\right)$ 即可，并没有求出所有满足条件的函数。只要满足条件的 $f\left(x\right)$ 都为所求的函数。

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$________________。

【参考解答】：与第五届第一题差不多，基本思路应该一致，并且由于有平方，所以直接由正弦函数公式

$$\sin\left(n\pi+x\right)=\pm\sin x\Rightarrow\sin^2\left(n\pi+x\right)=\sin^2 x,$$

$$\Rightarrow\sin^2\left(x-n\pi\right)=\sin^2 x,n\in Z$$

.于是有

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$$

$$=\sin^2\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

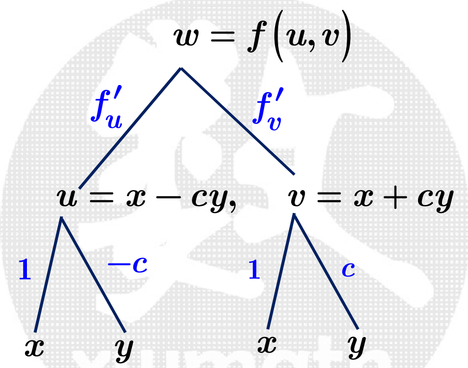
所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

3． 设 $w=f\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy,v=x+cy$，其中 c 为非零常数，则 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$__________。

【参考解答】：这样类型的问题在各阶试题中都有，并且在最后发布第三届解题试题时特别强调，多元复合函数求导的重要性；而且这里的复合结构是已知的，所以直接有变量关系图。



由复合函数求导数，有变量关系图。于是有 $w_x=f_u'+f_v',w_y=-cf_u'+cf_v'$；由于连个偏导数仍然具有与原函数函数相同的复合结构，所以对上面的导函数继续求导，则有

$$w_{xx}=\left(f_u'\right)_x'+\left(f_v'\right)_x'=f_{uu}''+f_{uv}''+f_{vu}''+f_{vv}''=f_{uu}''+2f_{uv}''+f_{vv}'',$$

$$\begin{aligned}w_{yy}&=-c\left(f_u'\right)_y'+c\left(f_v'\right)_y\\&=-c\left[-cf_{uu}''+cf_{uv}''\right]+c\left[-cf_{vu}''+cf_{vv}''\right]\\&=c^2\left[f_{uu}''-f_{uv}''-f_{vu}''+f_{vv}''\right]=c^2\left[f_{uu}''-2f_{uv}''+f_{vv}''\right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=f_{uu}''+2f_{uv}''+f_{vv}''-\frac{1}{c^2}\left[c^2\left(f_{uu}''-2f_{uv}''+f_{vv}''\right)\right]\\&=f_{uu}''+2f_{uv}''+f_{vv}''-\left(f_{uu}''-2f_{uv}''+f_{vv}''\right)=4f_{uv}''.\end{aligned}$$

4． 设 $f\left(x\right)$ 具有二阶连续导数，且 $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=0,f''\left(0\right)=6$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x\right)}{x^4}=$__________。

【参考解答】【解法一】 在有泰勒公式应用于解题的竞赛题解析中，特别强调了泰勒公式的两种类型适用的问题类型。这里是求极限，并且是求自变量趋于 0 的极限；毫无疑问，就是用带皮亚诺余项的泰勒公式，并且由于函数由二阶连续导数，所以可以在 0 点可以展开为二阶带皮亚诺余项的泰勒公式，即有

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)\\&=3x^2+o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

由此可得 $f\left(\sin^2x\right)=3\sin^4x+o\left(\sin^4x\right)$，所以将其代入可得极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)}{x^4}=3.$$

【解法二】洛必达法则。

5．不定积分 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}x=$____________。

【参考解答】：$I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{e^{-\sin x}2\sin x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}\sin x$ 令 $\sin x=t$，则有

$I=2\int\frac{te^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t$。

$$\int\frac{te^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{e^{-t}\left(1-t\right)-e^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{e^{-t}}{1-t}\mathrm{d}t+\int\frac{e^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$-\int\frac{e^{-t}}{1-t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{1-t}\mathrm{d}e^{-t}=\frac{e^{-t}}{1-t}-\int e^{-t}\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

$$=\frac{e^{-t}}{1-t}-\int\frac{e^{-t}}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

代入上式可得 $\int\frac{te^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{e^{-t}}{1-t}+C$，由于 $\sin x=t$，所以

$$I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$$

6．记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V，则三重积分 $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$____________。

【参考解答一】由两个方程，可得边界线方程为 $x^2+y^2=2$，这个题目由被积函数的结构，只包含一个变量 z，而且用平行于 xOy 的平面取截取立体区域，截面都为圆，所以考虑先二后一的截面法计算要简单。以 $z=\sqrt{2}$ 作为分割面，将区域分割成上下两部分，则有

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega_{上}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega_{下}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中上下积分区域可以描述为

$$\Omega_{上}: \sqrt{2} \le z \le 2, x^2+y^2 \le 4-z^2;$$

$$\Omega_{下}: 0 \le z \le \sqrt{2}, x^2+y^2 \le z^2;$$

所以有

$$\iiint_{\Omega_{上}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\sqrt{2}}^{2} z\,\mathrm{d}z \iint_{D(x)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} z\left(\pi\left(4-z^2\right)\right)\mathrm{d}z = \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(4\pi z - \pi z^3\right)\mathrm{d}z$$

$$= \left[2\pi z^2 - \frac{\pi z^4}{4}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \pi$$

$$\iiint_{\Omega_{下}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{\sqrt{2}} z\,\mathrm{d}z \iint_{D(z)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{2}} \pi z^3\,\mathrm{d}z = \left[\frac{\pi z^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{2}} = \pi$$

所以 $\iiint_{V} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega_{上}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_{下}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\pi.$

【参考解答二】使用球面坐标

$$I = \iiint_{V} z dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2 = 2\pi$$

二、（本题 14 分）设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$，若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t} = 0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} > 0$，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

【参考解答】根据基于二元函数极值判定极小值的充分条件，如果函数在 $(0,0)$ 点取到极小值，第一步，判定梯度向量为零向量，即 $\nabla f(0,0) = \left(f_x'(0,0), f_y'(0,0)\right) = \vec{0}$；

第二步：判定黑塞矩阵为正定矩阵，对于存在二阶连续偏导数的函数，即由三个偏导数构成的矩阵 $\begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{xy}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix}_{(0,0)}$ 为正定矩阵。

如果符合这样两个前提条件，则可以判定函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 取到极小值，即 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

下面，就依据已知条件我们来验证这样两个条件是满足的。两个步骤中需要二元函数的一阶、二阶偏导数，而已知条件是计算函数$g_{\alpha}(t)$关于t的导数，下面就来计算一下，是否会出现需要的描述形式。

根据已知条件，对函数$g_{\alpha}(t)$关于t求导数，其实又是一个复合函数求导数，令$x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$，绘制变量关系图，可得

$$
\begin{aligned}
& g_{\alpha}'(t)=f_x'(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\cdot\cos\alpha+f_y'(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\cdot\sin\alpha \\
& \Rightarrow g_{\alpha}'(0)=f_x'(0,0)\cdot\cos\alpha+f_y'(0,0)\cdot\sin\alpha=\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right]\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha) \\
& =\left\|\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right]\right\|\cos\theta,\theta=\left(\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right],(\cos\alpha,\sin\alpha)\right)=0
\end{aligned}
$$

要求对于任意的任何α都有$\dfrac{\mathrm{d}\, g_{\alpha}(0)}{\mathrm{d}\, t}=0$，则必定有

$$\left\|\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right]\right\|=0\Rightarrow f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0$$

因此$(0,0)$是二元函数$f(x,y)$的驻点。

根据已知条件，继续求二阶导数，则有

$$
\begin{aligned}
& g_{\alpha}''(t)=\left(f_x'\right)_x'\cdot\cos\alpha+\left(f_y'\right)_x'\cdot\sin\alpha \\
& =\cos\alpha\left[f_{xx}''\cdot\cos\alpha+f_{xy}''\cdot\sin\alpha\right]+\sin\alpha\left[f_{yx}''\cdot\cos\alpha+f_{yy}''\cdot\sin\alpha\right] \\
& =(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix} f_{xx}''\cdot\cos\alpha+f_{xy}''\cdot\sin\alpha \\ f_{yx}''\cdot\cos\alpha+f_{yy}''\cdot\sin\alpha \end{pmatrix} \\
& =(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

则由$\dfrac{\mathrm{d}^2 g_{\alpha}(0)}{\mathrm{d}\, t^2}>0$，有

$$(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix} f_{xx}''(0,0) & f_{xy}''(0,0) \\ f_{xy}''(0,0) & f_{yy}''(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha, \\ \sin\alpha \end{pmatrix}>0$$

由α的任意性，并且向量$(\cos\alpha,\sin\alpha)$为非零向量，由此可知这是一个正定二次型，并且矩阵为实对称矩阵，所以矩阵为正定矩阵。矩阵正定，所以驻点为极小值点。

三、(本题 14 分) 设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段。求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\,\mathrm{d}\,x+z\,\mathrm{d}\,y+x\,\mathrm{d}\,z$.

【参考解答一】 对于曲线积分，尤其是开放曲线的曲线积分，最开始应该考虑的积分计算的直接法，即写出曲线的参数方程来计算曲线积分。用连个方程消去z，即由$x+z=1,z=1-x$代入球面方程，则有

$x^2+y^2+(1-x)^2=1 \Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0$

$\Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,$

$\Rightarrow z=1-x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t, t:0\to\pi$

将它代入积分表达式，则有

$$I=\int_0^{\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{2}\sin t\right)\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=I=\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos^2 t\right)+\left(\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right)\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=I=\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

【参考解答二】记Γ_1为从B到A的直线段，则

$$x=t, y=0, z=1-t, 0\le t\le 1,$$

$$\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 td(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

设Γ和Γ_1围成的平面区域Σ，方向按右手法则．由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma}+\int_{\Gamma_1}\right)ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

$$=-\iint_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

右边三个积分都是Σ在各个坐标面上的投影面积，而Σ在zx面上投影面积为零．故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma} dydz+dxdy.$$

曲线Γ在xy面上投影的方程为

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1.$$

又该投影（半个椭圆）的面积得知$\iint_{\Sigma} dxdy=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$．同理，$\iint_{\Sigma} dydz=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$．这样就有

$I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

四、(本题 15 分) 设函数$f(x)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\le 1$。证明：$\forall a,b$，$a<b$，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{b-a+2}{2}$.

【参考解答】：这个竞赛题是考研竞赛数学公众号每日一题栏目中发布的第 62 个题目，完全一模一样的。下面我们也来讨论一下，思路是怎样的。

根据题目的条件，函数$f(x)>0$，而且自然常数为底的函数也是大于 0 的，所以，可以知道已知积分中的被积函数$e^{-|t-x|}f(x)>0$，并且积分区间越大，积分值越大，所以由原积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\le 1$，当然也就可以得到$\forall a,b(a<b)$，

$$\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\le 1.$$

右边要出现$b-a$的表达式，于是由积分的保序性，两边同时关于t变量在$[a,b]$积分，可得

$$\int_a^b\left[\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\le b-a.$$

左边就是一个先对x后对t积分的二重积分的累次积分表达式，对于它的操作，好像就积分而言不能执行什么有效的处理。但是，看到二重积分的累次积分表达式，可以尝试性的考虑交换积分次序，即先对 t 求积分，再对 x 积分，于是左边的累次积分也就等于

$$\int_a^b\left[\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=\int_a^b\left[f(x)\int_a^b e^{-|t-x|}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

里面对t积分，应该就是属于可以计算的了。只要考虑将绝对值去掉就可以了。由于在积分中对x在$[a,b]$区间上积分，所以x夹在 a，b 之间，因此以x作为区间的分割点，则有

$$\begin{aligned}&\int_a^b e^{-|t-x|}\mathrm{d}t=\int_a^x e^{t-x}\mathrm{d}t+\int_x^b e^{x-t}\mathrm{d}t\\&=\left[e^{t-x}\right]_a^x+\left[-e^{x-t}\right]_x^b=1-e^{a-x}-e^{x-b}+1=2-e^{a-x}-e^{x-b}\end{aligned}$$

所以上面的不等式等价于

$$\int_a^b\left[f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\right]\mathrm{d}x\le b-a.$$

将左边拆开，则有

$$\int_a^b\left[f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\right]\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\left[f(x)e^{a-x}\right]\mathrm{d}x-\int_a^b\left[f(x)e^{x-b}\right]\mathrm{d}x\le b-a.$$

即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b\left[f(x)e^{a-x}\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b\left[f(x)e^{x-b}\right]\mathrm{d}x$

这样，再由已知条件，并且有t的任意性，可以将右边的两个积分改写成

$$\int_a^b e^{a-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b e^{-|x-a|}f(x)\mathrm{d}x\le\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-a|}f(x)\mathrm{d}x\le 1$$

因为x属于$(-\infty,+\infty)$都有积分小于等于 1，所以同理可得$\int_a^b e^{x-b}f(x)\mathrm{d}x\le 1$.

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}+1.$$

这就是这个竞赛题的解题过程。

五、（本题 15 分） 设 $\left\{a_n\right\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

【参考证明】 对于 $i=0,1,\dots,p-1$，记

$$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}。$$

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_{n}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda。$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$。由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整 m，设 $m=np+i$，其中 $0,1,\dots,p-1$，从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$.