2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类一、二年级)参考答案

一、填空题

(1)
$$0$$
 (2) $p>1$ (3) $3\sqrt{2}\pi$ (4) $(1,0,1),(-1,0,-1),(1,t,-1),(-1,t,1), t\in R$.

二、【参考解答】:由于形如 $lpha x + eta y + \gamma = 0$ 的平面与 S 只能交于直线或空集,所以可以设平面 σ 的方

程为 $z=lpha x+eta y+\gamma$,它与S 交线为圆. 令 $x=\cos heta,y=rac{1}{\sqrt{2}}\sin heta$,则 σ 与S 的交线可表示为

$$\Gamma\!\left(heta
ight)\!=\!\left(\!\cos heta,\!rac{1}{\sqrt{2}}\sin heta,\!lpha\cos heta\!+\!rac{eta}{\sqrt{2}}\sin heta\!+\!\gamma
ight)\!,\! heta\!\in\!\left[0,2\pi
ight]\!.$$

由于 $\Gammaig(hetaig)$ 是一个圆,所以它到一个定点P=ig(a,b,cig)的距离为常数R.于是有恒等式

$$\left(\cos heta - a
ight)^2 + \left(rac{1}{\sqrt{2}}\sin heta - b
ight)^2 + \left(lpha\cos heta + rac{eta}{\sqrt{2}}\sin heta + \gamma - c
ight)^2 = R^2.$$

利用 $\cos^2 heta = rac{1+\cos 2 heta}{2}, \sin^2 heta = rac{1-\cos 2 heta}{2}$,可以将上式写成

 $A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C\cos \theta + D\sin \theta + E = 0,$

其中 A,B,C,D,E 为常数. 由于这样的方程对所有的 $\theta\in\left[0,2\pi\right]$ 恒成立,所以 A=B=C=D=E=0.

特别地,我们得到

$$A=rac{1}{2}ig(lpha^2+1ig)-rac{1}{4}ig(eta^2+1ig)=0, B=rac{1}{\sqrt{2}}lphaeta=0.$$

于是得到 $\alpha = 0, \beta = \pm 1$, 平面 σ 的法向量为

$$(-\alpha, -\beta, 1) = (0, 1, 1)$$
或 $(0, -1, 1)$ 的非零倍数

三、【参考证明】: 存在可逆方阵T 使得 $T^{-1}AT= ilde{A}$ 为对角阵. 令 $T^{-1}BT= ilde{B}$,则

$$\mathrm{tr}\Big(\!ig(ABig)^{\!2}\Big) = \mathrm{tr}\Big(\!ig(ilde{A} ilde{B}ig)^{\!2}\Big), \mathrm{tr}\Big(A^{2}B^{2}\Big) = \mathrm{tr}\Big(ilde{A}^{2} ilde{B}^{2}\Big).$$

令 $ilde{A}= ext{diag}ig(a_{11},\cdots,a_{nn}ig), ilde{B}=ig(b_{ij}ig)_{n imes n}$,则

$$ext{tr}igg(ig(ilde{A} ilde{B}ig)^2igg) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii} a_{jj} b_{ij} b_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 a_{ii} a_{jj} b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 b_{ii}^2$$

$$ext{tr}ig(ilde{A}^2 ilde{B}^2ig) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}^2 b_{ij}^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} ig(a_{ii}^2 + a_{jj}^2ig) b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 b_{ii}^2$$

于是

四、【参考证明】: 设 Γ 的圆心为 $O, lpha_i = rac{1}{2} \angle B_i O B_{i+1}, B_{n+1} = B_1$,则

$$P_A = 2 {\displaystyle \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i}, P_B = 2 {\displaystyle \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i} \, . \label{eq:parameters}$$

先证: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\tan^{\frac{1}{3}} x \sin^{\frac{2}{3}} x > x. \tag{1}$$

$$\mathop{\diamondsuit} g\left(x
ight) = rac{\sin x}{\cos^{rac{1}{3}} x} - x$$
 ,则 $g\left(0
ight) = 0,$

$$g'\left(x\right) = \frac{\cos^{\frac{4}{3}}x + \frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^{2}x}{\cos^{\frac{2}{3}}x} - 1 = \frac{2\cos^{2}x + 1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x} - 1 > \frac{3\sqrt[3]{\cos^{2}x\cos^{2}x \cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x} - 1 = 0$$

故g(x)严格单调递增,因而g(x)>g(0)=0. (1)得证

$$egin{aligned} P_A^{rac{1}{3}}P_B^{rac{2}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^n anlpha_iiggr)^{rac{1}{3}}iggl(\sum_{i=1}^n anlpha_iiggr)^{rac{2}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggl)^{rac{1}{3}}iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{2}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{2}{3}}iggr)^{rac{3}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^niggl(an^{rac{1}{3}}lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{rac{3}{3}}iggr)^{$$

五、【参考证明】: 令 $F(x) = \int_0^x a(t) dt$,则

$$y(x) = Ce^{-F(x)} + \int_0^x f(t)e^{F(t)-F(x)} dt.$$

对于任意arepsilon>0,存在 x_0 ,当 $t\geq x_0$ 时,有 $\left|f\left(t\right)
ight|\leq arepsilon a\left(t
ight).$

$$\int_0^x fig(tig) e^{Fig(tig) - Fig(xig)} \, \mathrm{d}\, t = e^{-Fig(xig)} \int_0^{x_0} fig(tig) e^{Fig(tig)} \, \mathrm{d}\, t + e^{-Fig(xig)} \int_{x_0}^x fig(tig) e^{Fig(tig)} \, \mathrm{d}\, t.$$

注意到

$$egin{aligned} \left| e^{-F(x)} \! \int_{x_0}^x \! fig(tig) e^{Fig(tig)} \, \mathrm{d} \, t
ight| & \leq e^{-Fig(x)} \! \int_{x_0}^x \! arepsilon aig(tig) e^{Fig(tig)} \, \mathrm{d} \, t \end{aligned} = arepsilon e^{-Fig(x)} e^{Fig(tig)} ig|_{t=x_0}^{t=x} = arepsilon \Big(1 - e^{Fig(x_0ig) - Fig(xig)}\Big) < arepsilon.$$

所以
$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| y\left(x\right) \right| \leq \lim_{x \to +\infty} C e^{-F\left(x\right)} + \lim_{x \to +\infty} e^{-F\left(x\right)} \int_{0}^{x_{0}} \left| f\left(t\right) \right| e^{-F\left(t\right)} \, \mathrm{d} \, t + \varepsilon = \varepsilon. \ \ \$$
由 ε 的任意性,知 $\lim_{x \to +\infty} \left| y\left(x\right) \right| = 0.$

六、【参考解答】: $\Leftrightarrow g(x) = f(x) - x$,则有

$$xg(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} g(t) dt$$
.

对于 x>0 ,根据积分平均值定理,存在 $x_1\in \left(0,x\right)$,使得 $\int_{\frac{x}{2}}^x g\left(t\right)\mathrm{d}\,t=g\left(x_1\right)\frac{x}{2}$. 因而

$$g(x) = g(x_1).$$

设 $x_0 = \inf \left\{ t \in \left(0,x\right) | f\left(x\right) = f\left(t\right) \right\}, \;$ 则有 $g\left(x_0\right) = g\left(x\right).$

若 $x_0>0$,则重复上面的过程,可知存在 $y_0\in \left(0,x_0\right)$,使得 $g\left(y_0\right)=g\left(x_0\right)=g\left(x\right)$.这与 x_0 的取法矛盾.因此,必有 $x_0=0$.这说明 $g\left(x\right)=g\left(0\right)$.

同理,对x<0,也可以证明 $g\left(x\right)=g\left(0\right)$.

总之, g(x)是常数. 于是f(x) = x + C, C 是常数.