2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类一、二年级）试卷

一、（本题 15 分） 设 S 为 $\mathbf{R}^3$ 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$，$P=\left(a,b,c\right)$ 为 S 外一固定点，满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明：这些切线的切点落在同一张平面上.

二、（本题 15 分） 设实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x^TAx$，其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题：

(1) A 能否相似于对角矩阵；若能，请给出证明；若不能，请给出例子；

(2) 当 $a_0=2$ 时，试求 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 在正交变换下的标准型.

三、（本题 15 分） 设 n 阶实方阵 $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&\cdots&0\\ *&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ *&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ *&\ddots&\ddots&\ddots&b_{n-1}\\ *&\cdots&\cdots&\cdots&a_n\end{pmatrix}$ 有 n 各线性无关的特征向量，$b_1,\cdots,b_{n-1}$ 均不为 0. 记 $W=\left\{X\in R^{n\times n}\mid XA=AX\right\}$. 证明：$W$ 是实数域 R 上的向量空间，且 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 为其一组基，其中 I 为 n 阶单位阵.

四、（本题 15 分） 设 $f\left(x,y\right)$ 为 $\left[a,b\right]\times R$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y\left(x\right),z=z\left(x\right)$ 是可微函数，且满足：

$$y'=f\left(x,y\right),z'\le f\left(x,z\right),x\in\left[a,b\right]$$

已知 $z\left(a\right)\le y\left(a\right)$. 求证：$z\left(x\right)\le y\left(x\right),x\in\left[a,b\right]$.

五、（本题 20 分） 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数，

$$f(0)=0,f'\left(x\right)\le\frac{1}{2}.$$

假设 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛. 求证：对于任意 $\alpha > 1, \int_0^{+\infty} f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}\,x$ 也收敛，并且

$$\int_0^{+\infty} f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}\,x \le \left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^{\beta}, \beta = \frac{\alpha+1}{2}.$$

六、(本题 20 分) 对多项式 $f(x)$，记 $\mathrm{d}\left(f\right)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \ge 2$ 为自然数. 求最大实数 C，使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$，都有

$$\mathrm{d}\left(f'\right) \ge C\,\mathrm{d}\left(f\right).$$