2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛
(数学类）试题

一、(本题 15 分) 设有空间中五点

$$A\left(1,0,1\right), B\left(1,1,2\right), C\left(1,-1,-2\right), D\left(3,1,0\right), E\left(3,1,2\right).$$

试求过点 E 且与 A,B,C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两阶导数，且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 证明:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\left(x-a\right)+\int_a^x\left(x-t\right)f''(t)dt, \forall x\in[a,b].$$

三、(本题 10 分) 设 $k_0<k_1<\cdots<k_n$ 为给定的正整数，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为实参数，指出函数 $f(x)=\sin k_0x+A_1\sin k_1x+\cdots+A_n\sin k_nx$，在 $[0,2\pi]$ 上零点的个数（当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 变化时）的最小可能值并加以证明.

四、(本题 10 分) 设正数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1, \varlimsup_{n\to\infty} a_n<+\infty, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1.$$

求证: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$

五、(本题 15 分) 设 A,B 分别是 $3\times 2, 2\times 3$ 实矩阵，若有 $AB=\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 BA.

六、(本题 20 分) 设 $\left\{A_i\right\}_{i\in I}, \left\{B_i\right\}_{i\in I}$ 是数域 F 上两个矩阵几何，称他们在 F 上相似，如果存在 F 上与 $i\in I$ 无关的可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}A_iP=B_i, \forall i\in I$. 证明：有理数域 Q 上两个矩阵集合 $\left\{A_i\right\}_{i\in I}, \left\{B_i\right\}_{i\in I}$，如果它们在实数域 R 上相似，则它们在有理数域 Q 上也相似.

七、(本题 15 分) 设 $F(x), G(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个非负单调递减函数，

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(F(x)+G(x)\right)=0.$$

(1) 证明：$\forall\varepsilon>0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t=0.$

(2) 若进一步有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(F(t)-G(t)\right)\cos\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0$，证明

$$\lim_{x\to0}\int_0^{+\infty}\left(F(t)-G(t)\right)\cos\left(xt\right)\mathrm{d}t=0.$$