2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
(数学三、四年级) 试卷

(前 4 大题为必答题，从 5-10 大题中任选三题)

一、填空题:

(1)设$x^4+3x^2+2x+1=0$的 4 个根为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,则

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

(2)设a为实数, 关于x的方程$3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$有虚根的充分必要条件是a满足______________.

(3) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($a>0$ 为常数)， 其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，则$I=$____________.

(4)记两个特征值为 1，2 的 2 阶实对称矩阵的全体为Γ．$\forall A\in\Gamma, a_{12}$表示$A$的$(2,1)$位置元素，则集合$\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$的最小元等于______.

第二题：在空间直角坐标系中设旋转抛物面Γ的方程为$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设P为空间中的平面，它交抛物面Γ于交线C．问：C是何种类型的曲线? 证明你的结论.

第三题：证明题：设n阶方阵A,B满足：秩(ABA)=秩(B)．证明：AB与BA相似.

第四题：对 R 上无穷次可微的（复值）函数$\varphi(x)$，称$\varphi\in\mathscr{S}$，如果$\forall m,k\geq 0$成立$\sup\limits_{x\in R}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$．若$f\in\mathscr{S}$，可定义$\hat{f}(x)=\int_R f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\,(\forall x\in R)$.

证明：$\hat{f}\in\mathscr{S}$，且$f(x)=\int_R \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\,(\forall x\in R)$.

第五题：(抽象代数) 设$(F,+,.)$是特征为$p\,(p\neq 0)$的域，1 和 0 分别为F的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F,+)$ 到其乘法半群 $(F,.)$ 的同态， 即 $\forall x,y\in F$ 有 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$. 证明：$\varphi$要么将$F$的所有元映照为 0，要么将$F$的所有元映照为 1.

第六题：(实变函数) (1)设E是三分 Cantor 集，证明$\chi_E(x)$不是$[0,1]$上的有界变差函数. (2)设$E\subset[0,1]$，证明$\chi_E(x)$在$[0,1]$上有界变差的充要条件是E的边界点集是有限集.

第七题：(微分几何) 设 S 为三维欧式空间中的一张连通光滑的正则曲面，过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上。证明：S 是平面的一部分。

第八题：(数值分析) 考虑求解一阶常微分方程的初值问题$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$的 Runge-Kutta 法。

(1)确定下列三级三阶 Runge-Kutta 法中的所有特定参数化：

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3),$$

其中$K_1 = f(x_n, y_n), K_2 = f(x_n + ah, y_n + b_{21}hK_1),$

$$K_3 = f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)$$

(2)讨论上述 Runge-Kutta 法格式的稳定性.

第九题：(复变函数) 设函数$f(z)$在单位圆$|z| < 1$内解析，并且$|f(z)| \le M(M > 0)$，M为常数. 证明：$|f'(0)| \le M - \dfrac{|f(0)|^2}{M}$.

第十题：(概率统计) 设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且

$$P(X_n = 0) = P(X_n = a) = \frac{1}{2}$$

其中常数$a > 0$. 记$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$，求$Y_n$的特征函数，并证明其分布收敛于区间$[0,a]$上的均匀分布。