# 第十二届全国大学生数学竞赛决赛
# （数学类低年级组）试题与参考答案

## 一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

1、设$\Omega:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\le 1$，则积分

$$\iiint_\Omega\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_.$$

**【参考答案】**: $\dfrac{1424\pi}{15}$

2、设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{e^{k^2}}{k}, y_n=\int_0^n e^{x^2}\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\_\_\_\_\_.$

**【参考答案】**: $2$

3、矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$的 Jordan 标准型为_____.

**【参考答案】**: $\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&1&&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}$

4、设 $A$ 为 2021 阶对称矩阵，$A$ 的每一行均为$1,2,\cdots,2021$的一个排列，则 $A$ 的迹 $\operatorname{tr}A=\_\_\_\_\_.$

**【参考答案】**: $1011\times 2021$

## 二、（15 分）

给定$yOz$平面上的圆$C: y=\sqrt{3}+\cos\theta, z=1+\sin\theta(\theta\in[0,2\pi])$.

1、求$C$绕$z$轴旋转所得到的环面$S$的隐式方程.

2、设$z_0\ge 0$，以$M\left(0,0,z_0\right)$为顶点的两个锥面$S_1$和$S_2$的半顶角之差为$\pi/3$，且均与环面$S$相切(每条母线都与环面相切)，求$z_0$和$S_1,S_2$的隐式方程.

**【参考解答】**: 1、由$yOz$平面的圆$C$的参数方程消去参数$\theta$可得

$$C:\begin{cases}(y-\sqrt{3})^2+(z-1)^2=1\\ x=0\end{cases}$$

由此可得绕$z$轴旋转获得的环面$S$的方程

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{3}\right)^2+(z-1)^2=1$$

化简得到

$$S:\left(x^2+y^2+(z-1)^2+2\right)^2=12\left(x^2+y^2\right).$$

2、记圆 $C$ 的圆心坐标为 $O'(0,\sqrt{3},1)$, $M$ 的坐标为 $(0,0,t)$, $M$ 与圆 $C$ 的两个切点坐标分别为 $A,B$，则由两个圆锥半顶角之差为 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle O'MA=\angle O'MB=\frac{\pi}{6}$，进而通过解三角形可得 $t=0$ 或 $t=2$.

当 $t=0$ 时，得 $M(0,0,0)$，此时切点坐标为 $A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $B(0,\sqrt{3},0)$，锥面 $S_1$ 的母线即为直线 $MA$，其方程为 $L_1:\begin{cases}x=0\\ \sqrt{3}y-z=0\end{cases}$，$S_1$ 即为 $L_1$ 绕 $z$ 轴所得旋转面，其方程为 $S_1:z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$. 锥面 $S_2$ 的母线即为直线 $MB$，其方程为 $L_2:\begin{cases}x=0,\\ z=0,\end{cases}$ $S_2$ 即为 $L_2$ 绕 $z$ 轴所得旋转面，其方程为 $S_2:z=0$.

当 $t=2$ 时，得 $M(0,0,2)$，此时切点坐标为 $A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B(0,\sqrt{3},2)$，两条母线的方程分别为

$$L_1':\begin{cases}x=0\\ \sqrt{3}y+z-2=0\end{cases}\text{和}L_2':\begin{cases}x=0\\ z=2\end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S_1':z=2-\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}\text{和}S_2':z=2$$

**三、(15 分)** 设 $n$ 阶复方阵 $A_1,\cdots,A_{2n}$ 均相似于对角阵，$\mathbb{C}^n$ 表示复 $n$ 维列向量空间. 证明:

1、$\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus \operatorname{Im} A_k$. 这里

$\ker A_k=\left\{\alpha\mid A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\right\}$，$\operatorname{Im} A_k=\left\{A_k\beta\mid \beta\in\mathbb{C}^n\right\}(k=1,\ldots,2n)$.

2、若对所有的 $k<j$ 皆有 $A_kA_j=0(k,j=1,2,\cdots,2n)$，则 $A_1,\cdots,A_{2n}$ 中至少有 $n$ 个矩阵为零矩阵.

**【参考解答】**: 由 $A_k$ 可复对角|化可知，存在可逆矩阵 $P_k=\left(p_1^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right)$ 使得

$$A_kP_k=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^{(k)},\cdots,\lambda_n^{(k)}\right)P_k$$

不妨设 $p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}$ 为关于特征值 0 的特征向量，$p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}$ 为关于特征值 $\lambda\neq 0$ 的特征向量. 于是,

$$\ker A_k=\operatorname{span}\left\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\right\},$$
$$\operatorname{Im} A_k=\operatorname{span}\left\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right\}.$$

这里若 $A_k$ 不以 0 为特征值时，$\ker A_k=0$.

事实上，若 $\dim\ker A_k > t$，则特征值 0 的代数重数 $> t$，矛盾. 从而有

$$\ker A_k = \operatorname{span}\left\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\right\}$$

另一方面，$\forall y\in\mathbb{C}^n, y$ 可写成 $y = a_1p_1^{(k)}+\cdots+a_np_n^{(k)}$，结果

$$Ay = a_{t+1}\lambda_{t+1}^{(k)}p_{t+1}^{(k)}+\cdots+a_n\lambda_n^{(k)}p_n^{(k)}\in\operatorname{span}\left\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right\}.$$

从而有 $\operatorname{Im}A_k = \operatorname{span}\left\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right\}$，故有

$$\mathbb{C}^n = \ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k.$$

现由条件 $A_1A_2 = 0$ 得 $\operatorname{Im}A_2\subseteq\ker A_1$，进而有

$$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\ker A_2\right)\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1.$$

事实上，由 $\mathbb{C}^n = \ker A_2\oplus\operatorname{Im}A_2$ 可知，$\forall u\in\ker A_1, u = u_1+u_2$，其中

$$u_1\in\ker A_2, u_2\in\operatorname{Im}A_2.$$

又由 $\operatorname{Im}A_2\subseteq\ker A_1$ 得

$$u_1 = \left(u-u_2\right)\in\ker A_2\cap\ker A_1.$$

结果 $\ker A_1$ 有直和分解:

$$\ker A_1 = \left(\ker A_2\cap\ker A_1\right)\oplus\operatorname{Im}A_2$$

于是 $\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\ker A_2\right)\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1$.

利用 $A_1A_3 = 0, A_2A_3 = 0$ 及 $\mathbb{C}^n = \ker A_3\oplus\operatorname{Im}A_3$，重复前述对 $\ker A_1$ 进行分解的过程又可得

$$\ker A_2\cap\ker A_1 = \left(\ker A_3\cap\ker A_2\cap\ker A_1\right)\oplus\operatorname{Im}A_3$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\ker A_2\cap\ker A_3\right)\oplus\operatorname{Im}A_3\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1$$

最后有

$$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\cdots\cap\ker A_{2n}\right)\oplus\operatorname{Im}A_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}A_{2n}$$

两边取维数得

$$n = \dim\left(\ker A_1\cap\cdots\cap\ker A_{2n}\right)+\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_{2n}$$

因此 $\operatorname{rank}A_1,\cdots,\operatorname{rank}A_{2n}$ 中至少有 $n$ 个为 0，即 $A_1,\cdots,A_{2n}$ 中至少有 $n$ 个矩阵为零矩阵. 证毕.

**四、(20 分)** 称实函数 $f$ 满足条件 $(P)$ :若 $f$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，

$$f(1)>f(0)=0, \int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = +\infty,$$

且对任何 $x_1,x_2\in[0,1]$ 成立 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$.

1、令 $c>0$，对于 $f_1(x) = cx$ 和 $f_2(x) = \sqrt{x}$，分别验证 $f_1,f_2$ 是否满足条件 $\left(P\right)$，并计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f_1(x)-xf_1'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}$ 和 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f_2(x)-xf_2'(x)\right)^m e^{f_2'(x)}$.

**2**、证明: $\forall m \geq 1$，存在满足条件$(P)$的函数$f$以及趋于零的正数列$\{x_n\}$，使得$f$在每一点$x_n$可导，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x_n)-x_nf'(x_n)\right)^m e^{f'(x_n)}=+\infty.$

**【参考解答】**: 注意到$f(x)-xf'(x)=-x^2\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$.

**1**、易见$f_1,f_2$都在$[0,1]$上非负连续，$f_1(1)>f_1(0)=0, f_2(1)>f_2(0)=0$. 对于

$$x>0, f_1'(x)=c, f_1''(x)=0, f_2'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}, f_2''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

因此，$f_1,f_2$均是$[0,1]$上的凹函数. 由于

$$\int_0^1\frac{1}{f_1(x)}\mathrm{d}x=+\infty, \int_0^1\frac{1}{f_2(x)}\mathrm{d}x<+\infty$$

所以$f_1$满足条件$(P)$而$f_2$不满足条件$(P)$.

另一方面$f_1(x)-xf_1'(x)\equiv 0$，因此，

$$\lim_{x\to0^+}\left(f_1(x)-xf_1'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}=0.$$

而$\lim\limits_{x\to0^+}\left(f_2(x)-xf_2'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=+\infty$.

**2**、从 1 的结果得到提示，我们用类似函数$\sqrt{x}$与$cx$的函数来构造想要的例子. 注意到对于$(0,1]$中严格单调下降并趋于零的点列$\{a_n\}$，当函数$f$的图像为依次连接$\left(a_n,\sqrt{a_n}\right)$的折线且$f(0)=0$时，条件$(P)$成立.

于是，我们可以尝试寻找这样一列$\{a_n\}$以及$x_n\in(a_{n+1},a_n)$以满足题目的要求. 具体地，取$a_0=1, x_n\in(a_{n+1},a_n)$待定. 我们给出$f$的表达式如下:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a_{n+1}}+k_n\left(x-a_{n+1}\right), & x\in\left(a_{n+1},a_n\right]; n\geq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中$k_n=\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$.

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2k_n}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq\frac{\sqrt{a_n}}{2}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

取$a_{n+1}=a_ne^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}$，即有$0<a_{n+1}<a_n$，且$\displaystyle\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq\frac{1}{n}$.

另一方面，在$(a_{n+1},a_n)$内，$f'(x)=k_n\geq\dfrac{1}{2\sqrt{a_n}}$，

$$f(x)-xf'(x)=\frac{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\geq\frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}$$

因此，任取 $x_n \in \left(a_{n+1}, a_n\right)$，均有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(x_n\right)-x_n f'\left(x_n\right)\right)^m e^{f'\left(x_n\right)} \geq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f\left(x_n\right)-x_n f'\left(x_n\right)\right)^m e^{f'\left(x_n\right)} = +\infty$.

**五、(15 分)** 设 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 和 $A$ 均为实数. 回答以下问题:

1、 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\alpha+\beta)=A$ 成立的充要条件是什么?

2、 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\right)=0$ 成立的充要条件是什么?

**【参考解答】**: 为方便引用，标记

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n\alpha+\beta)=A \qquad (1)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\right)=0 \qquad (2)$$

**【思路一】**: 我们给出如下答案.

1、满足的条件为:

$$\sin\alpha=0, \sin\beta=A, \sin(\alpha+\beta)=A.$$

2、满足的条件为:

$$\sin\alpha_2=\pm\sin\alpha_1\neq 0, \cos\left(\alpha_1\pm\alpha_2\right)=1, 1\pm\cos\left(\beta_1\mp\beta_2\right)=0.$$

解答过程.

1、条件 $(1)$ 等价于

$$\sin((n+2)\alpha+\beta)\to A, n\to\infty. \qquad (3)$$

(3)-(1)并整理得到

$$\sin\alpha\cos(n\alpha+\beta)\to 0, \quad n\to\infty \qquad (4)$$

同理可得

$$\sin^2\alpha\sin(n\alpha+\beta)\to 0, \quad n\to\infty$$

上式和 $(4)$ 表明，必有 $\sin\alpha=0$，否则

$$\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)\to 0, \cos\left(n\alpha_1+\beta_1\right)\to 0, n\to\infty$$

而矛盾. 再由 (1) 等价于

$$\sin\left(2n\alpha_1+\beta_1\right)\to A, \quad \sin\left(2n\alpha_1+\alpha+\beta_1\right)\to A$$

得到

$$\sin\alpha_1=0, \sin\beta_1=\sin\left(\alpha_1+\beta_1\right)=A.$$

故 (1) 成立.

2、再来证明结论 2. 条件 (2) 等价于

$$\sin\left((n+2)\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\left((n+2)\alpha_2+\beta_2\right)\to 0. \quad (5)$$

$(5)-(2)$并整理，得到

$$\sin\alpha_1\cos\left(n\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\alpha_2\cos\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\to 0. \quad (6)$$

同理，可得

$$\sin^2\alpha_1\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)+\sin^2\alpha_2\sin\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\to 0. \quad (7)$$

(2) 乘以$\sin^2\alpha_2$，减去(7)，得到

$$\left(\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1\right)\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)\to 0$$

故必有$\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1$，于是有

$$\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1=0\text{或者}\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1\neq 0.$$

若$\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1=0$，即$\sin\alpha_2=\sin\alpha_1=0$，代入（2）即得

$$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=0,\sin\beta_1+\sin\beta_2=\sin\left(\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\left(\alpha_2+\beta_2\right)=0$$

若$\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1\neq 0$，则$\sin\alpha_2=\pm\sin\alpha_1\neq 0$，由（6）和（7)得

$$\sin\left(n\alpha_1+\beta_1\right)+\sin\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\to 0$$
$$\cos\left(n\alpha_1+\beta_1\right)\pm\cos\left(n\alpha_2+\beta_2\right)\to 0.$$

上两式等价于右边平方和趋于 0，即

$$A_1^2+A_2^2\pm 2A_1A_2\cos\left(n\left(\alpha_1\mp\alpha_2\right)+\left(\beta_1\mp\beta_2\right)\right)\to 0.$$
$$\leftrightarrow \text{由题(1)，}(1),\sin\alpha_2=\pm\sin\alpha_1\neq 0$$
$$\sin\left(\alpha_1\mp\alpha_2\right)=0,\Rightarrow \alpha_1\mp\alpha_2=2p\pi$$
$$1\pm\cos\left(\beta_1\mp\beta_2\right)=0$$

从而（2）成立的条件是

$$\sin\alpha_2=\pm\sin\alpha_1\neq 0,\cos\left(\alpha_1\pm\alpha_2\right)=1,1\pm\cos\left(\beta_1\mp\beta_2\right)=0.$$

**【思路二】**: 问题 1 和 2 都可以视为如下问题的特例:

设$m\geq 2,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$均为实数，$C_1,C_2,\ldots,C_m$均为非零复数，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}C_je^{ni\lambda_j}=0$$

成立的充要条件是什么.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{m}C_je^{ni\lambda_j}=0$，则对任何$\lambda\in\mathbb{R}$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}C_je^{ni\left(\lambda_j-\lambda\right)}=0.$$

进一步，由 Stolz 公式.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}C_je^{ki\left(\lambda_j-\lambda\right)}=0. \qquad (8)$$

我们断言，$\lambda_2,\ldots,\lambda_m$之中必有一个，设为$\lambda_\ell$使得$e^{i\left(\lambda_\ell-\lambda_1\right)}=1$，即$\dfrac{\lambda_\ell-\lambda_1}{2\pi}$为整数. 否

则，在(8)中取$\lambda=-\lambda_1$，得到

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}C_j e^{ki\left(\lambda_j-\lambda_1\right)}$$
$$=C_1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{m}C_j\frac{e^{(n+1)i\left(\lambda_j-\lambda_1\right)}-1}{e^{i\left(\lambda_j-\lambda_1\right)}-1}=0$$

一般地，可得

$e^{i\lambda_1},e^{i\lambda_2},\ldots,e^{i\lambda_m}$ 中任何一个必然等于余下$m-1$个中的另一个. (9)

**1、(1)** 化为

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{i\beta}e^{in\alpha}-e^{-i\beta}e^{-in\alpha}-2iA\right)=0.$$

**情形 1.1.** $A=0$. 此时$m=2$.

$$\lambda_1=\alpha,\ \lambda_2=-\alpha,\ C_1=e^{i\beta},\ C_2=-e^{-i\beta}.$$

由(9)，$e^{i\alpha}=e^{-i\alpha}$，进而$e^{i\beta}=e^{-i\beta}$. 即$\dfrac{\alpha}{\pi},\dfrac{\beta}{\pi}$为整数.

**情形 1.2.** $A\neq 0$. 此$m=3$.

$$\lambda_1=\alpha,\quad \lambda_2=-\alpha,\lambda_3=0,C_1=e^{i\beta},C_2=-e^{-i\beta},\ C_3=-2iA$$

由(9)，此时，必有$e^{i\alpha}=e^{-i\alpha}=1$，进而$e^{i\beta}-e^{-i\beta}-2iA=0$. 即$\dfrac{\alpha}{\pi}$为偶数，且$A=\sin\beta$. 易见上述条件也是充分的. 总之，本小题条件成立的充要条件是：存在整数$k,j$使得

$$\begin{cases}A=0\\ \alpha=k\pi\\ \beta=j\pi\end{cases}\text{或}\begin{cases}A=\sin\beta\\ \alpha=2k\pi\end{cases}$$

**2、**条件 (2) 化为

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{i\beta_1}e^{in\alpha_1}-e^{-i\beta_1}e^{-in\alpha_1}+e^{i\beta_2}e^{in\alpha_2}-e^{-i\beta_2}e^{-in\alpha_2}\right)=0.$$

此时$m=4$，

$$\lambda_1=\alpha_1,\quad \lambda_2=-\alpha_1,\quad \lambda_3=\alpha_2,\quad \lambda_4=-\alpha_3$$
$$C_1=e^{i\beta_1},\quad C_2=-e^{-i\beta_1},\quad C_3=e^{i\beta_2},\quad C_4=-e^{-i\beta_2}$$

于是由(9)，它们必然可以分为两对，每一对有相同的值(不排除四个值均相同).

**情形 2.1.** $e^{i\lambda_1}=e^{i\lambda_2}=e^{i\lambda_3}=e^{i\lambda_4}$.

这等价于$\dfrac{\alpha_1}{\pi},\dfrac{\alpha_2}{\pi}$均为整数，且有相同的奇偶性. 进一步，

$$C_1+C_2+C_3+C_4=0$$

而这等价于$\sin\beta_1+\sin\beta_2=0$，等价于$\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\pi}$是奇数.

**情形 2.2.** $e^{i\lambda_1}=e^{i\lambda_2}\neq e^{i\lambda_3}=e^{i\lambda_4}$.

这等价于$\frac{\alpha_1}{\pi},\frac{\alpha_2}{\pi}$均为整数，但有不同的奇偶性. 进一步

$$C_1+C_2=C_3+C_4=0$$

而这等价于$\frac{2\beta_1}{\pi},\frac{2\beta_2}{\pi}$是奇数.

**情形 2.3.** $e^{i\lambda_1}=e^{i\lambda_3}\neq e^{i\lambda_2}=e^{i\lambda_4}$.

这等价于$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\pi}$为偶数，但$\frac{\alpha_1}{\pi}$不是整数. 进一步

$$C_1+C_3=C_2+C_4=0$$

而这

等价于$\frac{\beta_2-\beta_1}{\pi}$是奇數.

**情形 2.4.** $e^{i\lambda_1}=e^{i\lambda_4}\neq e^{i\lambda_2}=e^{i\lambda_3}$.

这等价于$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\pi}$为偶数，但$\frac{\alpha_1}{\pi}$不是整数. 进一步

$$C_1+C_4=C_2+C_3=0$$

而这等价于$\frac{\beta_2+\beta_1}{\pi}$是奇数.

易见上述条件也是充分的. 总之，本小题条件成立的充要条件是：存在整数$k,j,p,q$，使得以下四者之一成立

$$\begin{cases}\alpha_1=k\pi,\\ \alpha_2=k\pi+2j\pi\\ \beta_2=\beta_1+(2p+1)\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1=k\pi\\ \alpha_2=k\pi+2j\pi+\pi\\ \beta_1=\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi\\ \beta_2=\left(q+\frac{1}{2}\right)\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\alpha_1}{\pi}\notin\mathbb{Z},\\ \alpha_2=\alpha_1+2k\pi,\\ \beta_2=\beta_1+(2p+1)\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{\alpha_1}{\pi}\notin\mathbb{Z}\\ \alpha_2=-\alpha_1+2k\pi\\ \beta_2=-\beta_1+(2p+1)\pi.\end{cases}$$

以上条件可以归并为：存在整数$k,j,p,q$，以及$\varepsilon=\pm1$使得以下二者之一成立

$$\begin{cases}\alpha_1=k\pi\\ \alpha_2=k\pi+2j\pi+\pi,\\ \beta_1=(p+\frac{1}{2})\pi,\\ \beta_2=(q+\frac{1}{2})\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_2=\varepsilon\alpha_1+2k\pi\\ \beta_2=\varepsilon\beta_1+(2p+1)\pi\end{cases}$$

**六、(15 分)** 设$g$为$\mathbb{R}$上恒正的连续函数，对于正整数$n$以及$x_0,y_0\in\mathbb{R}$，考怨微分方程

$$\begin{cases} y'(x) = y^{\frac{1}{2n+1}}(x) g(x), \\ y\left(x_0\right) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

证明:

1、方程（1）有定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的解(称为**全局解**);

2、若 $y_0 = 0$ 则方程(1)有无穷多个全局解;

3、若 $y = y(x)$ 是方程(1)的解，则 $y$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负，或在 $\mathbb{R}$ 上非正.

**【参考解答】**: 1、若 $y_0 = 0$，则 $y \equiv 0$ 为全局解.

若 $y_0 \neq 0$. 注意到函数 $y = y(x)$ 为方程（1)的解当且仅当 $y = -y(x)$ 为方程(1)的解，故不妨设 $y_0 > 0$. 在 $y \neq 0$ 的区间内求解（1）得到

$$y^{\frac{2n}{2n+1}}(x) = y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)$$

其中

$$G(x) = \frac{2n}{2n+1} \int_{x_0}^{x} g(t) \,\mathrm{d}\, t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

由于 $g$ 恒正，$G$ 严格单增，而 $G\left(x_0\right) = 0$. 于是

$$\alpha = \lim_{x \to -\infty} G(x) \in [-\infty, 0).$$

**情形 I.** $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} \geq 0.$

此时 $G(x) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}}$ 恒正. 取

$$y(x) = \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)\right)^{\frac{2n+1}{2n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即知它为方程（1）的全局解.

**情形 II.** $\alpha + y_0^{2n+1} < 0.$

此时，有唯一的 $\gamma \in \left(-\infty, x_0\right)$ 使得 $G(\gamma) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} = 0$. 取

$$y(x) = \begin{cases} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)\right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma, \forall x \in \mathbb{R} \\ 0, & x \leq \gamma, \end{cases}$$

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
y_{+}^{'}(\gamma) &= \lim_{x\to\gamma^{+}} \frac{1}{x-\gamma}\left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)\right)^{\frac{2n+1}{2n}} \\
&= g(\gamma)\lim_{x\to\gamma^{+}}\left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)\right)^{\frac{1}{2n}} = 0
\end{aligned}
$$

于是$y'(0)=0$. 进而可知$y$为方程(1)的全局解.

**2.** 由 1 的结论，任取$\gamma \geq x_0$，可见以下函数均是方程（1)的全局解

$$
y(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\displaystyle\int_{\gamma}^{x} g(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma \\ 0, & x \leq \gamma \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}
$$

**3.** 设$y(x)$是方程(1)在区间$I$上的解（$I$不必是$\mathbb{R}$)，均有

$$
\left(y^2(x)\right)' = 2y(x)y'(x) = 2y^{\frac{2n+2}{2n+1}}(x)g(x) \geq 0, \forall x \in I.
$$

因此，$y^2(x)$在$I$上单调增加. 由连续函数的介值定理即知$y(x)$或在$I$上非负，或在$I$上非正.