2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、(本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线。设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点，以单位向量 v 为直线方向；直线 L_2 过坐标为 b 的点，以单位向量 w 为直线方向；

1) 证明：存在唯一点 $P \in L_1$ 和 $Q \in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2。

2) 求 P 点和 Q 点的坐标（用 a, b, v, w 表示）。

二、(本题 20 分) A 为 4 阶复方阵，它满足关于迹的关系式 $\mathbf{tr} A^i = i, i = 1,2,3,4.$ 求 A 的行列式。

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶方阵，其 n 个特征值皆为偶数。试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解。

四、(本题 15 分) 数量 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = a_n + \dfrac{n}{a_n}, a_1 > 0$。

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - n)$ 存在。

五、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上有界连续函数，$h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续函数，且

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| \mathrm{d}t = a < 1.$$

构造函数序列：

$$g_0(x) = f(x), g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t) g_{n-1}(t) \mathrm{d}t, n = 1,2,\cdots \qquad (1)$$

求证：$\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数，并求极限函数。

六、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 R 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x) + a\int_{x-1}^{x} f(t) \mathrm{d}t \ \text{为常数。}$$

求证：$f(x)$ 必为常数。