更多资料关注-微信公众号：爱吃老冰棍 全年免费分享

2016年第八届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、(本题15分)设S是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量V的一束平行光照射S，其中部分光线与S相切，它们的切点在S上形成一条曲线Γ. 证明：Γ落在一张过椭球中心的平面上。

二、(本题 15 分)设n为奇数，A,B为两个实n阶方阵，且$BA=0$. 记$A+J_A$的特征值集合为S_1，$B+J_B$的特征值集合为S_2，其中J_A,J_B分别表示A,B的Jordan标准型. 求证：$0\in S_1\cup S_2$.

三、(本题20分)设$A_1,\cdots,A_{2017}$为2016阶实方阵. 证明关于$x_1,\cdots,x_{2017}$的方程

$$\det\left(x_1A_1+\cdots+x_{2017}A_{2017}\right)=0$$

至少有一组非零实数解，其中det表示行列式.

四、(本题20分)设$f_0(x),f_1(x)$是$[0,1]$上正连续函数，满足$\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

设$f_{n+1}(x)=\dfrac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},n=1,2,\cdots$.

求证：数列$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$单调递增且收敛.

五、(本题15分)设$\alpha>1$. 求证：不存在$[0,+\infty)$上的正可导函数$f(x)$满足

$$f'(x)\ge f^{\alpha}(x),x\in[0,+\infty). \tag{1}$$

六、(本题15分)设$f(x),g(x)$是$[0,1]$区间上的单调递增函数，满足

$$0\le f(x),g(x)\le 1,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

求证：$\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x\le\dfrac{1}{2}$.