2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛

《非数学专业》试卷

一、填空题：

1、过单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0,\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为____________.

2、设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$, $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(0,y+1/n)}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y},$$

则 $f(x,y)=$__________.

3、已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵，b 为 n 元列向量，设 $B=\begin{pmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{pmatrix}$，则 $\operatorname{rank}(B)=$____.

4、$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为__________.

5、曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^3+2x\,(0\le x\le 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积为__________.

第二题： 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}$.

第三题：设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数，且满足 $0\le f(x)\le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明：当 $0\le x\le 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\le 11,$$

并给出取等号的条件.

第四题：设函数 $f\left(x,y,z\right)$ 在区域 $\Omega=\left\{\left(x,y,z\right)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 上具有连续的二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算

$$I=\iiint\limits_{W}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

第五题： 设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=A+B$，证明：若存在正整数 k，使得 $A^k=O$（O 为零矩阵），则行列式 $\left|B+2017A\right|=\left|B\right|$.

第六题：设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n.$

(1)证明：极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2)记 $\lim_{n\to\infty}a_n=C$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-C\right)$ 的敛散性.