第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 A 卷》试题

一、(15 分) 设$N(0,0,1)$是球面$S: x^2+y^2+z^2=1$的北极点.

$$A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$$

为xOy面上不同的三点. 设连接N与A,B,C的三直线依次交球面S于点A_1， B_1,C_1.

(1) 求连接N与A两点的直线方程;

(2) 求点A_1,B_1,C_1三点的坐标;

(3) 给定点$A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0)$，求四面体$NA_1B_1C_1$的体积.

二、(15 分) 求极限$I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}$

三、(15 分) 设A,B均为 2020 阶正交矩阵，齐次线性方程组$Ax=Bx\left(x\in\mathbb{R}^{2020}\right)$的解空间维数为 3. 问：矩阵$A,B$是否可能相似？证明你的结论.

四、(20 分) 称非常值一元n次多项式(合并同类项后)的$n-1$次项(可能为 0)为第二项.求所有 2020 次复系数首一多项式$f(x)$，满足对$f(x)$的每个复根x_k，都存在非常值复系数首一多项式$g_k(x)$和$h_k(x)$，使得$f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$，且$g_k(x)$和$h_k(x)$的第二项系数相等.

五、(15 分) 设φ是$\mathbb{R}$上严格单调增加的连续函数，ψ是φ的反函数，实数列$\{x_n\}$满足

$$x_{n+2}=\psi\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), n\geq 2.$$

证明：$\{x_n\}$收敛或举例说明$\{x_n\}$有可能发散.

六、(20 分) 对于有界区间$[a,b]$的划分

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=b$$

其范数定义为$\|P\|=\max\limits_{0\leq k\leq n}(x_{k+1}-x_k)$. 现设$[a,b]$上函数$f$满足 Lipschitz 条件，即存在常数$M>0$，使得对任何$x,y\in[a,b]$，成立$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$. 定义

$$s(f;P)\equiv\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left|x_{k+1}-x_k\right|^2+\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|^2}$$

若$\lim\limits_{\|P\|\to0^+}s(f;P)$存在，则称曲线$y=f(x)$可求长. 记$P_n$为$[a,b]$的$2^n$等分. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}s(f;P_n)$存在.　　(2) 曲线$y=f(x)$可求长.