第十二届全国大学生数学竞赛决赛
(数学类高年级组）试题与参考答案

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

1、设$\Omega:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\le 1$，则积分

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\_\_\_\_\_\_.$$

【参考答案】: $\dfrac{1424\pi}{15}$

2、设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{k^2}}{k},y_n=\int_0^n e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=______$.

【参考答案】: 2

3、矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$的 Jordan 标准型为______.

【参考答案】: $\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&1&&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}$

4、设A为 2021 阶对称矩阵，A的每一行均为$1,2,\cdots,2021$的一个排列，则A的迹$\operatorname{tr}A=______$.

【参考答案】: 1011×2021

二、(15 分）给定yOz平面上的圆$C:y=\sqrt{3}+\cos\theta,z=1+\sin\theta(\theta\in[0,2\pi])$.

1、求C绕z轴旋转所得到的环面S的隐式方程.

2、设$z_0\ge 0$，以$M\left(0,0,z_0\right)$为顶点的两个锥面S_1和S_2的半顶角之差为$\pi/3$，且均与环面S相切(每条母线都与环面相切)，求z_0和S_1,S_2的隐式方程.

【参考解答】: 1、由yOz平面的圆C的参数方程消去参数θ可得

$$C:\begin{cases}(y-\sqrt{3})^2+(z-1)^2=1\\x=0\end{cases}$$

由此可得绕z轴旋转获得的环面S的方程

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{3}\right)^2+(z-1)^2=1$$

化简得到

$$S:\left(x^2+y^2+(z-1)^2+2\right)^2=12\left(x^2+y^2\right).$$

2、记圆C的圆心坐标为$O'(0,\sqrt{3},1)$, M的坐标为$(0,0,t)$, M与圆C的两个切点坐标分别为A,B，则由两个圆锥半顶角之差为$\frac{\pi}{3}$可得$\angle O'MA=\angle O'MB=\frac{\pi}{6}$，进而通过解三角形可得$t=0$或$t=2$.

当$t=0$时，得$M(0,0,0)$，此时切点坐标为$A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right),B(0,\sqrt{3},0)$，锥面$S_1$的母线即为直线$MA$，其方程为$L_1:\begin{cases}x=0\\ \sqrt{3}y-z=0\end{cases}$，$S_1$即为$L_1$绕$z$轴所得旋转面，其方程为$S_1:z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$. 锥面$S_2$的母线即为直线$MB$，其方程为$L_2:\begin{cases}x=0,\\ z=0,\end{cases}$ S_2即为L_2绕z轴所得旋转面，其方程为$S_2:z=0$.

当$t=2$时，得$M(0,0,2)$，此时切点坐标为$A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),B(0,\sqrt{3},2)$，两条母线的方程分别为

$$L_1':\begin{cases}x=0\\ \sqrt{3}y+z-2=0\end{cases}\text{和}L_2':\begin{cases}x=0\\ z=2\end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S_1':z=2-\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}\text{和}S_2':z=2$$

三、(15分) 设n阶复方阵$A_1,\cdots,A_{2n}$均相似于对角阵，$\mathbb{C}^n$表示复n维列向量空间. 证明:

1、$\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k$. 这里

$\ker A_k=\left\{\alpha|\ A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\right\}$，$\operatorname{Im}A_k=\left\{A_k\beta|\ \beta\in\mathbb{C}^n\right\}(k=1,\dots,2n)$.

2、若对所有的$k<j$皆有$A_kA_j=0(k,j=1,2,\cdots,2n)$，则$A_1,\cdots,A_{2n}$中至少有$n$个矩阵为零矩阵.

【参考解答】: 由A_k可复对角化可知，存在可逆矩阵$P_k=\left(p_1^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right)$使得

$$A_kP_k=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^{(k)},\cdots,\lambda_n^{(k)}\right)P_k$$

不妨设$p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}$为关于特征值 0 的特征向量，$p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}$为关于特征值$\lambda\neq0$的特征向量. 于是,

$$\ker A_k=\operatorname{span}\left\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\right\},$$
$$\operatorname{Im}A_k=\operatorname{span}\left\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right\}.$$

这里若A_k不以 0 为特征值时，$\ker A_k=0$.

事实上，若$\dim\ker A_k > t$，则特征值 0 的代数重数$> t$，矛盾. 从而有

$$\ker A_k = \operatorname{span}\left\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\right\}$$

另一方面，$\forall y\in\mathbb{C}^n, y$可写成$y = a_1p_1^{(k)}+\cdots+a_np_n^{(k)}$，结果

$$Ay = a_{t+1}\lambda_{t+1}^{(k)}p_{t+1}^{(k)}+\cdots+a_n\lambda_n^{(k)}p_n^{(k)}\in\operatorname{span}\left\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right\}.$$

从而有$\operatorname{Im}A_k = \operatorname{span}\left\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\right\}$，故有

$$\mathbb{C}^n = \ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k.$$

现由条件$A_1A_2 = 0$得$\operatorname{Im}A_2\subseteq\ker A_1$，进而有

$$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\ker A_2\right)\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1.$$

事实上，由$\mathbb{C}^n = \ker A_2\oplus\operatorname{Im}A_2$可知，$\forall u\in\ker A_1, u = u_1+u_2$，其中

$$u_1\in\ker A_2, u_2\in\operatorname{Im}A_2.$$

又由$\operatorname{Im}A_2\subseteq\ker A_1$得

$$u_1 = \left(u-u_2\right)\in\ker A_2\cap\ker A_1.$$

结果$\ker A_1$有直和分解:

$$\ker A_1 = \left(\ker A_2\cap\ker A_1\right)\oplus\operatorname{Im}A_2$$

于是$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\ker A_2\right)\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1.$

利用$A_1A_3 = 0, A_2A_3 = 0$及$\mathbb{C}^n = \ker A_3\oplus\operatorname{Im}A_3$，重复前述对$\ker A_1$进行分解的过程又可得

$$\ker A_2\cap\ker A_1 = \left(\ker A_3\cap\ker A_2\cap\ker A_1\right)\oplus\operatorname{Im}A_3$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\ker A_2\cap\ker A_3\right)\oplus\operatorname{Im}A_3\oplus\operatorname{Im}A_2\oplus\operatorname{Im}A_1$$

最后有

$$\mathbb{C}^n = \left(\ker A_1\cap\cdots\cap\ker A_{2n}\right)\oplus\operatorname{Im}A_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}A_{2n}$$

两边取维数得

$$n = \dim\left(\ker A_1\cap\cdots\cap\ker A_{2n}\right)+\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_{2n}$$

因此$\operatorname{rank}A_1,\cdots,\operatorname{rank}A_{2n}$中至少有$n$个为 0，即$A_1,\cdots,A_{2n}$中至少有$n$个矩阵为零矩阵. 证毕.

四、(20 分) 称实函数f满足条件(P)：若f在$[0,1]$上非负连续，

$$f(1) > f(0) = 0, \int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = +\infty,$$

且对任何$x_1,x_2\in[0,1]$成立$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}.$

1、 令$c > 0$，对于$f_1(x) = cx$和$f_2(x) = \sqrt{x}$，分别验证f_1, f_2是否满足条件(P)，并计算$\lim\limits_{x\to0^+}\left(f_1(x)-xf_1'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}$和$\lim\limits_{x\to0^+}\left(f_2(x)-xf_2'(x)\right)^m e^{f_2'(x)}$.

2、证明: $\forall m \geq 1$，存在满足条件(P)的函数f以及趋于零的正数列$\{x_n\}$，使得f在每一点x_n可导，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x_n)-x_nf'(x_n)\right)^m e^{f'(x_n)}=+\infty$.

【参考解答】: 注意到$f(x)-xf'(x)=-x^2\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$.

1、易见f_1,f_2都在$[0,1]$上非负连续，$f_1(1)>f_1(0)=0, f_2(1)>f_2(0)=0$. 对于

$$x>0, f_1'(x)=c, f_1''(x)=0, f_2'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}, f_2''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

因此，f_1,f_2均是$[0,1]$上的凹函数. 由于

$$\int_0^1\frac{1}{f_1(x)}\mathrm{d}x=+\infty, \int_0^1\frac{1}{f_2(x)}\mathrm{d}x<+\infty$$

所以f_1满足条件(P)而f_2不满足条件(P).

另一方面$f_1(x)-xf_1'(x)\equiv 0$，因此，

$$\lim_{x\to0^+}\left(f_1(x)-xf_1'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}=0.$$

而$\lim\limits_{x\to0^+}\left(f_2(x)-xf_2'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=+\infty$.

2、从 1 的结果得到提示，我们用类似函数$\sqrt{x}$与cx的函数来构造想要的例子. 注意到对于$(0,1]$中严格单调下降并趋于零的点列$\{a_n\}$，当函数f的图像为依次连接$(a_n,\sqrt{a_n})$的折线且$f(0)=0$时，条件(P)成立.

于是，我们可以尝试寻找这样一列$\{a_n\}$以及$x_n\in(a_{n+1},a_n)$以满足题目的要求. 具体地，取$a_0=1, x_n\in(a_{n+1},a_n)$待定. 我们给出$f$的表达式如下:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a_{n+1}}+k_n(x-a_{n+1}), & x\in(a_{n+1},a_n]; n\geq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中$k_n=\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$.

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2k_n}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq\frac{\sqrt{a_n}}{2}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

取$a_{n+1}=a_ne^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}$，即有$0<a_{n+1}<a_n$，且$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq\dfrac{1}{n}$.

另一方面，在(a_{n+1},a_n)内，$f'(x)=k_n\geq\dfrac{1}{2\sqrt{a_n}}$，

$$f(x)-xf'(x)=\frac{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\geq\frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}$$

因此，任取$x_n \in (a_{n+1}, a_n)$，均有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(x_n)-x_nf'(x_n)\right)^m e^{f'(x_n)} \geq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty$$

因此$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x_n)-x_nf'(x_n)\right)^m e^{f'(x_n)} = +\infty$.

五、（10 分） 设$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$是$\mathbb{R}$上可测函数列，$f_n^2, f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})(\forall n \geq 1)$，且对$\mathcal{L}-a.e.x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.若

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|^2\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}m,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}m = 0$.

【参考证明】:**【思路一】**因为$f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$，所以$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$及$\delta > 0$使得

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]}|f(x)|^2\,\mathrm{d}m < \varepsilon$$

且对任何可测集$E \subseteq \mathbb{R}$，当$mE < \delta$时，有

$$\int_E|f(x)|^2\,\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

又$f_n(x) \to f(x)(n \to \infty)\mathcal{L}-a.e.x \in \mathbb{R}$. 由叶果诺夫定理，存在可测子集$E_\varepsilon \subseteq [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$使得 $mE_\varepsilon < \delta, \{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在$[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]\setminus E_\varepsilon$上一致收敛到$f(x)$.

令$E_1 = [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]\setminus -E_\varepsilon$，有

$$\int_{E_1}|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}m \to 0,\quad n\to\infty$$

且

$$\int_{E_1}|f_n(x)|^2\,\mathrm{d}m \to \int_{E_1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}m,\quad n\to\infty$$

事实上，

$$f_n(x) \to f(x)\left(n\to\infty, x\in E_1, mE_1 < \infty\right),$$

则$\forall\varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N$以及$x \in E_1$，成立

$$\left|f_n(x) \to f(x)\right| < \varepsilon, \int_{E_1}|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}m \leq \varepsilon^2\cdot mE_1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1}|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}m = 0.$$

又

$$\left|\left(\int_{E_1}|f_n(x)|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_{E_1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leq \left(\int_{E_1}|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1}\left|f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m=\int_{E_1}|f(x)|^2\ \mathrm{d}m.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\ \mathrm{d}m$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1^c}\left|f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m=\int_{E_1^c}|f(x)|^2\ \mathrm{d}m.$$

注意到$E_1^c=\left(\mathbb{R}\setminus\left[-n_\varepsilon,n_\varepsilon\right]\right)\bigcup E_\varepsilon, mE_\varepsilon<\delta$，得

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\left|f_n(x)-f(x)\right|^2\mathrm{d}m\\ \le&\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{E_1}\left|f_n(x)-f(x)\right|^2\mathrm{d}m\\ &+2\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{E_1^c}\left|f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m+2\int_{E_1^c}|f(x)|^2\ \mathrm{d}m\\ <&8\varepsilon\end{aligned}$$

由ε的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|f_n(x)-f(x)\right|^2\mathrm{d}m=0.$$

【思路二】记$f_0=f$. 由假设得$\left\{\int_{\mathbb{R}}f_n^2(x)\,\mathrm{d}m\right\}_{n\ge0}$有界. 设$S$为它的一个上界. 任取$g\in L^2(\mathbb{R})$，我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}m$$

先令$g\in C_c(\mathbb{R})$，其中$C_c(\mathbb{R})$表示$\mathbb{R}$上有紧支集的连续函数全体. 任取$A>0$以及$M>0$使得$\sup g\subseteq[-A,A]$. 记$E\equiv E_A=[-A,A]$，则

$$mE\left(\left|f_n\right|>M\right)\le\frac{1}{M^2}\int_E\left|f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m\le\frac{S}{M^2}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_E f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}m-\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}m\right|\\ \le&\frac{2S}{M}\|g\|_\infty+\left|\int_E g\tilde{f}_{n,M}\,\mathrm{d}m-\int_E g\tilde{f}_{0,M}\,\mathrm{d}m\right|\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{f}_{n,M}(x)=\begin{cases}f_n(x), & \left|f_n(x)\right|\le M\\ M, & f_n(x)>M\\ -M, & f_n(x)<-M\end{cases}$$

注意到$\tilde{f}_{n,M}\to f_{0,M}(x), a.e. x\in\mathbb{R}$，结合控制收敛定理，我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_E f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}m-\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}m\right|\le\frac{2S}{M}\|g\|_\infty$$

于是由$M>0$的任意性可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}\,m=\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,m.$$

注意到 $\sup g\subseteq[-A,A]$，即(1)对于 $g\in C_c(\mathbb{R})$ 成立.

由 $C_c(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的稠密性可得对任何 $g\in L^2(\mathbb{R})$,(1) 成立. 最后得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|f_n(x)-f(x)\right|^2\mathrm{d}\,m\\=&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(f_n^2(x)+f^2(x)-2f_n(x)f(x)\right)\mathrm{d}\,m\\=&\int_{\mathbb{R}}\left(f^2(x)+f^2(x)-2f(x)f(x)\right)\mathrm{d}\,m=0.\end{aligned}$$

六、(10 分) 设函数列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 上解析，且在 G 中内闭一致收敛于函数 $f(z)$.

证明:

1、若 $f(z)$ 不恒为零，l 是 G 内可求长的简单闭曲线，其内部属于 G，且不经过 $f(z)$ 的零点，则存在正整数 N，使得当 $n\geq N$ 时，在 l 的内部 $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点;

2、若 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 内还是单叶的，$f(z)$ 不为常数，则 $f(z)$ 在 G 内单叶解析.

【参考证明】: 1、由 Weierstrass 定理，$f(z)$ 在 G 内解析. 因 $f(z)$ 在 l 上不为零，所以

$$\min_{z\in l}|f(z)|=m>0.$$

又 $\{f_n(z)\}$ 在 l 上一致收敛到 $f(z)$，存在正整数 N，使得当 $n\geq N$ 时，在 l 上有

$$\left|f_n(z)-f(z)\right|<m$$

即当 $n\geq N$ 时，在 l 上有 $\left|f_n(z)-f(z)\right|<|f(z)|$. 由 Rouche 定理，在 l 的内部，$f_n(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点.

2、反证法. 若 $f(z)$ 在 G 内不是单叶的，那么在 G 内至少存在两点 z_1 和 $z_2\left(z_1\neq z_2\right)$ 使得 $f\left(z_1\right)=f\left(z_2\right)$. 令 $F_n(z)=f_n(z)-f(z_1)$，则 $\{F_n(z)\}$ 在 G 内闭一致收敛于不恒为零的解析函数 $F(z)=f(z)-f\left(z_1\right)$.

在 G 内分别以 z_1,z_2 为心，作不交且外离的两个小圆

$$C_1:\left|z-z_1\right|=r_1 \text{和} C_2:\left|z-z_1\right|=r_2.$$

由第 1 部分结论，存在正整数 N，使当 $n\geq N$ 时，$F_n(z)$ 在 C_1 与 C_2 的内部与 $F(z)$ 有相同个数的零点，即在 C_1 与 C_2 内分别存在 z_1^* 与 z_2^*，使

$$f\left(z_1^*\right)=f_n\left(z_2^*\right)=f_n\left(z_1\right).$$

这与 $f_n(z)$ 在 G 内单叶矛盾.

七、(10 分) 设 R 为有单位元的交换环，$R[x]$ 是 R 上的一元多项式环，

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x].$$

证明: $f(x)$ 在环 $R[x]$ 中可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆且 $a_1,\ldots,a_n$ 均为 R 中的幂零元.

【参考证明】: 先证充分性. 由于 a_0 可逆，记

$$b_i=a_0^{-1}a_i,1\leq i\leq n,g(x)=b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

则有 $f(x)=a_0(1+g(x))$. 对任意 $1\leq i\leq n,a_i$ 幂零，故存在正整数 m_i 使得

$a_i^{m_i}=0$. 令$N=\max\left\{m_1,\cdots,m_n\right\}$, 则有$a_i^N=0$, 从而$b_i^N=a_0^{-N}a_i^N=0$.由于

$$g(x)^{nN}=\left(b_1x+\cdots+b_nx^n\right)^{nN}$$

展开式中任一项系数形如

$$\frac{(nN)!}{k_1!\cdots k_n!}b_1^{k_1}\cdots b_n^{k_n}$$

其中 $0\le k_1,\cdots,k_n\le nN$ 且 $k_1+\cdots+k_n=nN$, 从而必存在某个 k_j 使 得 $k_j\ge N$. 由此$b_j^{k_j}=0$, 从而$g(x)^{nN}=0$. 于是

$$\begin{aligned}&f(x)\cdot a_0^{-1}\left(-g(x)+g(x)^2-\cdots+(-1)^{nN-1}g(x)^{nN-1}\right)\\&=1+(-1)^{nN-1}g(x)^{nN}=1\end{aligned}$$

所以$f(x)$在$R[x]$中可逆.

为证明必要性, 首先证明如下论断: 若$a\in R$不是幂零元, 则存在R的素理想P使得$a\notin P$. 事实上, 考虑集合

$$S=\left\{I\mid I\text{ 是 }R\text{ 的理想且 }I\cap\left\{a,a^2,\cdots\right\}=\varnothing\right\}.$$

由于a不是幂零元, 显然R的零理想$(0)\in S$, 因此S非空. S按照集合的包含关系成为一个偏序集, 任取S的一个链 (全序子集)$T=\left\{I_\alpha\mid\alpha\in J\right\}$, 其中$J$为指标集. 令$A=\bigcup\limits_{\alpha\in J}I_\alpha$, 则$A$是$R$的理想且$A\cap\left\{a,a^2,\cdots\right\}=\varnothing$, 即$A\in S$. 显 然$A$为链$T$的上界, 根据 Zorn 引理, 偏序集$S$有极大元$P$. 显然$a\notin P$, 下面证明$P$为$R$的素理想. 反之, 若存在$u,v\in R\setminus P$, 但是$uv\in P$. 由$P$的极大性, 理想$(u)+P$和$(v)+P$均不在$S$中, 从而存在正整数$s$和$t$使得$a^s\in(u)+P$, $a^t\in(v)+P$. 设$a^s=uy+p_1,a^t=vz+p_2$, 其中$y,z\in R,p_1,p_2\in P$, 则有

$$a^{s+t}=\left(uy+p_1\right)\left(vz+p_2\right)=(uv)yz+(uy)p_2+p_1(vz)+p_1p_2,$$

由$uv,p_1,p_2\in P$得到$a^{s+t}\in P$, 与$P\in S$矛盾.

下面证明必要性. 由于$f(x)$可逆, 故存在$h(x)\in R[x]$使得 $f(x)h(x)=1$.

设$h(x)$的常数项为h_0, 从而$a_0h_0=1$, 故a_0在R中可逆. 任取R的一个素理想P, 对于$a\in R$, 用$\bar{a}$表示a在自然同态$\eta:R\to\bar{R}=R/P$下的像, 即

$$\bar{a}=\eta(a)=a+P.$$

记$\bar{f}(x)=\overline{a_0}+\overline{a_1}x+\cdots+\overline{a_n}x^n\in\bar{R}[x]$为$f(x)$在自然同态$\eta$下诱导出来的像, 由$f(x)h(x)=1$可得$\bar{f}(x)\bar{h}(x)=\bar{1}$, 所以$\bar{f}(x)$在$\bar{R}[x]$中可逆. 由于$P$为素理想,$\bar{R}$为整环, 即$\bar{f}(x)$是整环上的可逆多项式, 所以$\bar{f}(x)=\overline{a_0}$为$\bar{R}$中的可逆元, 从而对于任意$1\le i\le n$有$\overline{a_i}=\bar{0}$, 即$a_i\in P$, 故$a_i$包含在$R$的所有素理想中, 所以$a_i$为幂零元.

八、(10 分) 设$S:r=(x,y,h(x,y))$为三维欧氏空间中的光滑曲面, $h(x,y)$是关于x,y的光滑函数.

1、求 S 的平均曲率的表达式.

2、设 S 为极小曲面，当 $h(x,y)=f(x)+g(y)$ 时，求 $h(x,y)$ 的表达式，其中函数 f,g 均为光滑函数.

【参考解答】：1、经计算可得

$$r_x=\left(1,0,h_x\right),r_y=\left(0,1,h_y\right),$$
$$r_{xx}=\left(0,0,h_{xx}\right),r_{xy}=\left(0,0,h_{xy}\right),r_{yy}=\left(0,0,h_{yy}\right).$$

经计算可得 S 的单位法向量

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_x\times\vec{r}_y}{\left|\vec{r}_x\times\vec{r}_y\right|}=\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}\left(-h_x,-h_y,1\right)$$

以及 S 的第一基本形式系数和第二基本形式的系数

$$E=r_x\cdot r_x=1+h_x^2,F=r_x\cdot r_y=h_xh_y,G=r_y\cdot r_y=1+h_y^2,$$
$$L=r_{xx}\cdot n=\frac{h_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}},M=r_{xy}\cdot n=\frac{h_{xy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}},$$
$$N=r_{yy}\cdot n=\frac{h_{yy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}$$

于是，可得 S 的平均曲率

$$\begin{aligned}H&=\frac{LG-2FM+EN}{2\left(EG-F^2\right)}\\&=\frac{h_{xx}\left(1+h_y^2\right)-2h_xh_yh_{xy}+h_{yy}\left(1+h_x^2\right)}{2\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

2、当 $h(x,y)=f(x)+g(y)$ 时，我们有

$$h_x=f'(x),h_y=g'(y),h_{xx}=f''(x),$$
$$h_{xy}=0,h_{yy}=g''(y)$$

于是，我们有

$$H=\frac{f''(x)\left(1+\left(g'(y)\right)^2\right)+g''(y)\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)}{2\left(1+\left(f'(x)\right)^2+\left(g'(y)\right)^2\right)^{\frac{2}{3}}}$$

当 S 为极小曲面，即 $H\equiv 0$ 时,得到

$$f''(x)\left(1+\left(g'(y)\right)^2\right)+g''(y)\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)=0,$$

即

$$\frac{f''(x)}{1+\left(f'(x)\right)^2}=-\frac{g''(y)}{1+\left(g'(y)\right)^2}$$

根据（1），我们设

$$\frac{f''(x)}{1+\left(f'(x)\right)^2}=c$$

其中c为常数. 求解上述方程我们得到

$$f(x)=-\frac{1}{c}\ln\cos(cx+d),$$
$$g(y)=\frac{1}{c}\ln\cos(cy+b),$$

其中d,b是常数. 于是得到

$$h(x,y)=\frac{1}{c}\ln\frac{\cos(cy+b)}{\cos(cx+d)}.$$

当$c=0$时, 我们得到$f''(x)=g''(y)=0$. 此时, 我们有

$$f(x)=a_1x+b_1, g(y)=a_2y+b_2,$$

其中a_1,a_2,b_1,b_2都是常数. 于是, $h(x,y)=a_1x+a_2y+b_1+b_2$.

九、(10 分) 设有一列盒子, 已知第k个盒子中有k个球, 其中 1 个是红球, 另外$k-1$个是白球. 现从前n个盒子中各取一球, 记S_n表示取出的n个球中红球的个数. 证明:

1、$\dfrac{S_n}{\ln(n)}$依概率收敛于 1;

2、$\dfrac{S_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$依分布收敛于标准正态分布$N(0,1)$;

3、对任意$r>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{\left|S_n-\ln(n)\right|^r}{\ln^r(n)+\left|S_n-\ln(n)\right|^r}\right)=0$.

【参考证明】: 1、对于$k=1,2,\ldots,n$, 记

$$X_k=\begin{cases}1, & 从第k个盒子中取出红球\\ 0, & 从第k个盒子中取出白球\end{cases}$$

则X_k独立且服从$0-1$分布$B\left(1,\dfrac{1}{k}\right)$, 并且$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$. 只需证明, 对任意 $\varepsilon>0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|\geq\varepsilon\right)\to 0(n\to\infty).$$

事实上

$$P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|S_n-\ln(n)\right|\geq\varepsilon\ln(n)\right)$$
$$\leq\frac{E\left(S_n-\ln(n)\right)^2}{\varepsilon^2\ln^2(n)}=\frac{\mathrm{Var}\left(S_n\right)+\left(ES_n-\ln(n)\right)^2}{\varepsilon^2\ln^2(n)}$$
$$\mathrm{Var}\left(S_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

并且$ES_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. 注意$\ln(n)+\frac{1}{n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le\ln(n)+1$蕴含

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1,\ln(n)+\frac{1}{n}\le ES_n\le\ln(n)+1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\ln^2(n)}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(ES_n-\ln(n)\right)^2}{\ln^2(n)}=0.$$

故$P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|\ge\varepsilon\right)\to 0$.

2、注意$\frac{S_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}=\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{\ln(n)}}+\frac{ES_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$. 由

$$\ln(n)+\frac{1}{n}\le ES_n\le\ln(n)+1$$

知$\lim_{n\to\infty}\frac{ES_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}=0$. 故应用$\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\ln(n)}\to 1$，只需证明$\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$依分布收敛于标准正态分布$N(0,1)$.

【思路一】验证李雅普诺夫（Lyapunov）条件成立，即当$n\to\infty$时

$$\frac{1}{\left(\mathrm{Var}(S_n)\right)^2}\sum_{k=1}^{n}E\left(X_k-EX_k\right)^4\to 0$$

事实上，由于

$$\sum_{k=1}^{n}E\left(X_k-EX_k\right)^4=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)^4\frac{1}{k}+\frac{1}{k^4}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right\}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k},$$

且$\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\ln(n)}\to 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\mathrm{Var}(S_n)\right)^2}\sum_{k=1}^{n}E\left(X_k-EX_k\right)^4=0.$$

【思路二】验证下列林德贝格（Lindeberg）条件成立，即对任意$\tau>0$，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)}\sum_{k=1}^{n}E\left\{\left(X_k-EX_k\right)^2 I\left(\left|X_k-EX_k\right|\ge\tau\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}\right)\right\}\to 0$$

或

$$\frac{1}{Var(S_n)}\sum_{k=1}^{n}\int_{\left|x-EX_k\right|\ge\tau\sqrt{Var(S_n)}}\left(x-EX_k\right)^2\mathrm{d}F_k(x)\to 0$$

其中$F_k(x)=P\left(X_k\le x\right)$.

事实上，由于$\mathrm{Var}(S_n)\to\infty$，所以当$n$较大时，对

$$1\le k\le n, I\left(\left|X_k-EX_k\right|\ge\tau\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\right)=0$$

故

$$\frac{1}{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\sum_{k=1}^{n}E\left\{\left(X_k-EX_k\right)^2 I\left(\left|X_k-EX_k\right|\ge\tau\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}\right)\right\}\to 0$$

3、注意 $E\left(\frac{\left|S_n-\ln(n)\right|^r}{\ln^r(n)+\left|S_n-\ln(n)\right|^r}\right)=E\left(\frac{\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|^r}{1+\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|^r}\right)$. 由 1 小题知，对任意 $\varepsilon>0$，$P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|\ge\varepsilon\right)\to 0$.

记 $\frac{S_n}{\ln(n)}-1$ 的分布函数为 $F_n(x)=P\left(\frac{S_n}{\ln(n)}-1\le x\right)$. 由于函数 $g(x)=\frac{|x|^r}{1+|x|^r}$ 在 $[0,\infty)$ 上是单调非降函数，所以

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|^r}{1+\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|^r}\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|^r}{1+|x|^r}\mathrm{d}F_n(x)\\
&=\left(\int_{|x|\le\varepsilon}+\int_{|x|>\varepsilon}\right)\frac{|x|^r}{1+|x|^r}\mathrm{d}F_n(x)\le\frac{\varepsilon^r}{1+\varepsilon^r}+\int_{|x|>\varepsilon}\mathrm{d}F_n(x)\\
&=\frac{\varepsilon^r}{1+\varepsilon^r}+P\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)}-1\right|>\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

于是由 ε 的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{\left|S_n-\ln(n)\right|^r}{\ln^r(n)+\left|S_n-\ln(n)\right|^r}\right)\to 0.$$

十、(10 分) 考虑求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y\left(x_0\right)=y_0\end{cases}$$

的下列数值格式:

$$y_n+a_1y_{n-1}+a_2y_{n-2}=h\left(b_0f_n+b_1f_{n-1}+b_2f_{n-2}\right),$$

其中 a_1,a_2,b_0,b_1,b_2 为常数，$f_j=f\left(x_j,y_j\right), j=n-2,n-1,n.$

1、确定常数 a_1,a_2,b_0,b_1,b_2，使得上述数值格式具有尽可能高阶的精度;

2、分析上一步得到的数值格式的稳定性与收敛性.

【参考解答】: 定义算子 L 如下:

$$
\begin{aligned}
L(y(x)) := & \; y(x)+a_1 y(x-h)+a_2 y(x-2h) \\
& -h\left(b_0 y'(x)+b_1 y'(x-h)+b_2 y'(x-2h)\right).
\end{aligned}
$$

将 y, y' 在 x 处做 Taylor 展开可以得到:

$$
\begin{aligned}
L(y(x)) = & \; y(x)+a_1\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-h)^j}{j!} y^{(j)}(x)+\frac{(-h)^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}\left(\xi_1\right)\right) \\
& +a_2\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-2h)^j}{j!} y^{(j)}(x)+\frac{(-2h)^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}\left(\xi_2\right)\right) \\
& -b_0 h y'(x)-b_1 h\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-h)^j}{j!} y^{(j+1)}(x)+\frac{(-h)^k}{k!} y^{(k+1)}\left(\eta_1\right)\right) \\
& -b_2 h\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-2h)^j}{j!} y^{(j+1)}(x)+\frac{(-2h)^k}{k!} y^{(k+1)}\left(\eta_2\right)\right) \\
= & \left(1+a_1+a_2\right) y(x)-\left(a_1+2a_2+b_0+b_1+b_2\right) h y'(x) \\
& +\sum_{j=2}^{k}\left(a_1+2^j a_2+j b_1+2^{j-1} j b_2\right) \frac{(-h)^j}{j!} y^{(j)}(x)+O\left(h^{k+1}\right) \\
:= & \sum_{j=0}^{k} d_j(-h)^j / j! y^{(j)}(x)+O\left(h^{k+1}\right).
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& d_0 := 1+a_1+a_2, \quad d_1 := a_1+2a_2+b_0+b_1+b_2, \\
& d_j := a_1+2^j a_2+j b_1+2^{j-1} j b_2=0, \quad j=2,3,4
\end{aligned}
$$

令 $d_0=d_1=d_2=d_3=d_4=0$，解得

$$
a_1=0, a_2=-1, b_0=1/3, b_1=4/3, b_2=1/3
$$

此时 $d_5=4/3 \neq 0.$ 因此格式的最高精度是 4 阶，所求格式为:

$$
y_n-y_{n-2}=\frac{1}{3}\left(f_n+4f_{n-1}+f_{n-2}\right)
$$

2、对上述格式，令 $p(z)=z^2-1, q(z)=\frac{1}{3}\left(z^2+4z+1\right)$. $p(z)=0$ 的两个根 ± 1 的模长为 1，且均为单根，故格式稳定。另一方面，$p(1)=0$ 且 $p'(1)=q(1)=2$，因此格式相容，进而收敛.