2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分).

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$．

【参考解答】：因为 $\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$．

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=e^{\frac{\pi}{4}}.$$

2．证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的。

【参考证明】：$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$．只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散.

因为 $a_n\geq\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$．

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散．由正项级数的比较判别法可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，即 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不绝对收敛.

3．设 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

【参考解答】：方程两边对 x 求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$

令 $y'(x)=0\Rightarrow x=0,x=-2y$。将 $x=0,x=-2y$ 代入所给方程，得

$$x=0,y=-1;\quad x=-2,y=1.$$

又有 $y''=\dfrac{\left(2y^2-x^2\right)\left(2x+2xy'+2y\right)+\left(x^2+2xy\right)\left(4yy'-2x\right)}{\left(2y^2-x^2\right)^2}$，从而有

$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,\quad y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$$

所以，$y(0)=-1$ 为极大值，$y(-2)=1$ 为极小值。

4．过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\geq0)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$。求点 A 的坐标。

【参考解答】：设切点 A 的坐标为 $\left(t,\sqrt[3]{t}\right)$，曲线过 A 点的切线为 $y-\sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\left(x-t\right)$。

令 $y=0$，可得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=-2t$. 因此平面图形的面积 $S=\Delta Ax_0t$ 的面积-曲边梯形 OtA 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1。$$

所以 A 的坐标为 $\left(1,1\right)$。

第二题：(12 分)计算定积分 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x.$

【参考解答】：$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^x\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan\left(\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}.$$

(其中 $\arctan e^{-x}+\arctan e^x=\dfrac{\pi}{2}$，另外

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\left(\pi-u\right)\sin u}{1+\cos^2 u}du=-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

这样可以得到第二个 $\dfrac{\pi}{2}$)

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$ 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

【参考证明】：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

应用洛必达法则，则有 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2\left(x-0\right)}=\frac{1}{2}f''(0)$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}f''(0).\text{由于}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛，所以}\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\text{收敛。}$$

第四题：(10 分)设 $\left|f(x)\right|\le\pi, f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$，证明：

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{2}{m}.$$

【参考证明】: 因为 $f'(x) \ge m > 0\left(a \le x \le b\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上严格单调增加，从而有反函数。设 $A = f(a), B = f(b), \varphi$ 是 f 的反函数，则

$$0 < \varphi'\left(y\right) = \frac{1}{f'(x)} \le \frac{1}{m},$$

又 $\left|f(x)\right| \le \pi$，则 $-\pi \le A < B \le \pi$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \overset{x=\varphi(y)}{=\!=\!=} \left|\int_A^B \varphi'(y)\sin y dy\right| \le \int_0^\pi \frac{\sin y}{m}dy = \frac{2}{m}.$$

第五题: **(14 分)** 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \left(x^3 - x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(2y^3 - y\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(3z^3 - z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

【参考解答】: 设 Σ 围成的立体的体积为 V，则由高斯公式，有

$$I = \iiint_V \left(3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3\right)dV = 3\iiint_V \left(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1\right)dV$$

为了使得 I 达到最小，就是要求 V 使得 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \le 0$ 的最大空间区域，即

$$V = \left\{\left(x,y,z\right) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1\right\}$$

所以 V 是一个椭球，Σ 是椭球 V 的表面时，积分 I 最小。

为了求该最小值，做变换 $x = u, y = v/\sqrt{2}, z = w/\sqrt{3}$，$\dfrac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(u,v,w\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$，

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} \left(u^2 + v^2 + w^2 - 1\right)dV \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \left(r^2 - 1\right) r^2 \sin\theta\, dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi. \end{aligned}$$

第六题: **(14 分)** 设 $I_a(r) = \displaystyle\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{\left(x^2 + y^2\right)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2 + xy + y^2 = r^2$，取正向。求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

【参考解答】: 作变换 $x = \dfrac{u-v}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$. 曲线 C 变为 uOv 平面上的 $\Gamma: \dfrac{3}{2}u^2 + \dfrac{1}{2}v^2 = r^2$，也是取正向且有 $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$，$ydx - xdy = vdu - udv$，

$$I_a(r) = \int_\Gamma \frac{vdu - udv}{\left(u^2 + v^2\right)^a}.$$

作变换 $u=\sqrt{\frac{2}{3}}r\cos\theta, v=\sqrt{2}r\sin\theta$，则有 $vdu-udv=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$

$$I_a(r)=-\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2r^2}{\sqrt{3}}J_a$$

其中 $J_a=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a}, 0<J_a<+\infty.$

因此当 $a>1$ 和 $a<1$，所求极限分别为 0 和 $-\infty$。当 $a=1$，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta}=\sqrt{3}\pi.$$

所求极限为 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, a>1,\\ -\infty, a<1,\\ -2\pi, a=1.\end{cases}$

第七题：(14 分)判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。

【参考解答】：(1) 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n=1,2,\cdots$。

因为 n 充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}$$

所以 $u_n\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

(2) $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\ (k=1,2,\cdots)$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+1}a_n$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n.$$

因为 $0<a_n<1+\ln n$，所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$. 于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1.$