2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛
（数学专业）试卷

一、（本题 15 分） 求出过原点且和椭球面 $4x^2+5y^2+6z^2=1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

二、（本题 15 分） 设 $0<f(x)<1$，无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛. 求证：$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

三、（本题 15 分） 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛，$t_n = a_{n+1}+2a_{n+2}+\ldots+ka_{n+k}+\ldots$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0.$$

四、（本题 15 分） 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，定义线性变换

$$\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}),\ \sigma_A(X) = AX - XA.$$

证明：当 A 可对角化时，σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.

五、（本题 20 分） 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} \left|f(x+y)-f(x)-f(y)\right| < +\infty.$$

证明：存在实常数 a 满足 $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x)-ax\right| < +\infty$.

六、（本题 20 分） 设 $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是非零线性映射，满足

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型

$$(-,-) : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ 为 } (X,Y) = \varphi(XY).$$

（1）证明 $(-,-)$ 是非退化的，即若 $(X,Y)=0, \forall Y\in M_n(\mathbb{R})$，则 $X=0$.

（2）设 $A_1,\cdots,A_{n^2}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基，$B_1,\cdots,B_{n^2}$ 是相应的对偶基. 即

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{当 } i\neq j \\ 1, \text{当 } i=j \end{cases}.$$

证明 $\sum_{i=1}^{n^2} A_iB_i$ 是数量矩阵.