第十二届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类高年级组）试题

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

1、设$\Omega:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\le 1$，则积分

$$\iiint_\Omega\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\_\_\_\_\_.$$

2、设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{k^2}}{k},y_n=\int_0^n e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=_____$.

3、矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$的 Jordan 标准型为_____.

4、设A为 2021 阶对称矩阵，A的每一行均为$1,2,\cdots,2021$的一个排列，则A的迹$\operatorname{tr}A=_____$.

二、（15 分） 给定yOz平面上的圆$C:y=\sqrt{3}+\cos\theta,z=1+\sin\theta(\theta\in[0,2\pi])$.

1、求C绕z轴旋转所得到的环面S的隐式方程.

2、设$z_0\ge 0$，以$M\left(0,0,z_0\right)$为顶点的两个锥面S_1和S_2的半顶角之差为$\pi/3$，且均与环面S相切(每条母线都与环面相切)，求z_0和S_1,S_2的隐式方程.

三、（15 分） 设n阶复方阵$A_1,\cdots,A_{2n}$均相似于对角阵，$\mathbb{C}^n$表示复n维列向量空间. 证明:

1、$\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus\operatorname{Im}A_k$. 这里

$\ker A_k=\left\{\alpha|\ A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\right\}$，$\operatorname{Im}A_k=\left\{A_k\beta|\ \beta\in\mathbb{C}^n\right\}(k=1,\ldots,2n)$.

2、若对所有的$k<j$皆有$A_kA_j=0(k,j=1,2,\cdots,2n)$，则$A_1,\cdots,A_{2n}$中至少有$n$个矩阵为零矩阵.

四、（20 分） 称实函数f满足条件(P)：若f在$[0,1]$上非负连续，

$$f(1)>f(0)=0,\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}\,x=+\infty,$$

且对任何$x_1,x_2\in[0,1]$成立$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$.

1、令$c>0$，对于$f_1(x)=cx$和$f_2(x)=\sqrt{x}$，分别验证f_1,f_2是否满足条件$\left(P\right)$，并计算$\lim_{x\to 0^+}\left(f_1(x)-xf_1'(x)\right)^m e^{f_1'(x)}$和$\lim_{x\to 0^+}\left(f_2(x)-xf_2'(x)\right)^m e^{f_2'(x)}$.

2、证明: $\forall m \geq 1$，存在满足条件(P)的函数f以及趋于零的正数列$\{x_n\}$，使得f在每一点x_n可导，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x_n)-x_n f'(x_n)\right)^m e^{f'(x_n)}=+\infty.$

五、(10 分) 设$\{f_n(x)\}_{n\geq1}$是$\mathbb{R}$上可测函数列，$f_n^2, f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})(\forall n \geq 1)$，且对$\mathcal{L}-a.e.x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.若

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|^2 \,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2 \,\mathrm{d}m,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|^2 \,\mathrm{d}m = 0.$

六、(10 分) 设函数列$\{f_n(z)\}$在区域G上解析，且在G中内闭一致收敛于函数$f(z)$. 证明:

1、若$f(z)$不恒为零，l是G内可求长的简单闭曲线，其内部属于G，且不经过$f(z)$的零点，则存在正整数N，使得当$n \geq N$时，在l的内部$f_n(z)$和$f(z)$有相同个数的零点;

2、若$\{f_n(z)\}$在区域G内还是单叶的，$f(z)$不为常数，则$f(z)$在G内单叶解析.

七、(10 分) 设R为有单位元的交换环，$R[x]$是R上的一元多项式环，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x].$$

证明: $f(x)$在环$R[x]$中可逆当且仅当a_0在R中可逆且$a_1,\ldots,a_n$均为R中的幂零元.

八、(10 分) 设$S: r = (x, y, h(x,y))$为三维欧氏空间中的光滑曲面，$h(x,y)$是关于x, y的光滑函数.

1、求S的平均曲率的表达式.

2、设S为极小曲面，当$h(x,y) = f(x) + g(y)$时，求$h(x,y)$的表达式，其中函数f, g均为光滑函数.

九、(10 分) 设有一列盒子，已知第k个盒子中有k个球，其中 1 个是红球，另外$k-1$个是白球. 现从前n个盒子中各取一球，记S_n表示取出的n个球中红球的个数. 证明:

1、$\dfrac{S_n}{\ln(n)}$依概率收敛于 1;

2、$\dfrac{S_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$依分布收敛于标准正态分布$N(0,1)$;

3、对任意$r > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{|S_n - \ln(n)|^r}{\ln^r(n) + |S_n - \ln(n)|^r}\right) = 0.$

十、(10 分) 考虑求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}$$

的下列数值格式:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = h\left(b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + b_2 f_{n-2}\right),$$

其中a_1, a_2, b_0, b_1, b_2为常数，$f_j = f\left(x_j, y_j\right), j = n-2, n-1, n.$

1、确定常数a_1, a_2, b_0, b_1, b_2，使得上述数值格式具有尽可能高阶的精度;

2、分析上一步得到的数值格式的稳定性与收敛性.