2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【参考答案】 $x_n=\dfrac{1}{(1-a)}(1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$=\frac{1}{(1-a)}\left(1-a^2\right)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{(1-a)}\left(1-a^4\right)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

由于 $|a|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

【参考答案】 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{-1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【注】 $\exp(x)=e^x$.

(3) 设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$.

【参考答案】 因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0$，所以

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n d\left(e^{-sx}\right)=-\frac{1}{s}\left[x^ne^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}d\left(x^n\right)\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此得 $I_n=\dfrac{n}{s}I_{n-1}=\dfrac{n}{s}\cdot\dfrac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\dfrac{n!}{s^{n-1}}I_1$.

$$I_1=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{s}\left[x^ne^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{s^2}$$

$$I_n=\frac{n!}{s^{n-1}}I_1=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(4) 设 $f\left(t\right)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【参考答案】因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性，可得

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2y^2-x^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离.

【参考答案】直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{l}_1=\left(1,1,0\right),\vec{l}_2=\left(4,-2,-1\right)$，两直线上两定点分别为 $P_1(0,0,0),P_2(2,1,3)$，并记

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=\left(2,1,3\right),\ \vec{l}_1\times\vec{l}_2=\left(-1,1,-6\right);$$

于是两点间的距离为 $d=\frac{\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right)\right|}{\left|\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right|}=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.$

第二题：(15 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

【参考证法】由于 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$. $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 对应的图形为凹函数，从而 $f(x)>f(a)+f'(a)\left(x-a\right)(x>a)$. 当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(+\infty)+f'(a)\left(x-a\right)\to+\infty.$$

故存在 $b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)\left(b-a\right)>0$.

由 $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，必有一个充分大的 $c<x_0$，使得 $f'(c)>0$. $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 为凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)\left(x-c\right)\quad(x<c)$. 当 $x\to-\infty$ 时，

$$f(-\infty)+f'(c)\left(x-c\right)\to+\infty.$$

故存在 $d<c$，使得 $f(d)>f(c)+f'(c)\left(d-c\right)>0$.

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，$\exists x_1\in\left(x_0,b\right),x_2\in\left(d,x_0\right)$ 使得 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0.$

下面证明方程 $y=f(x)$ 只有两个实根.

用反证法。假设 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3 且 $x_1<x_2<x_3$。对

$f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上分别用罗尔定理，则各至少存在一点 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$。再将 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理，则至少存在一点 $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$，使得 $f''(\eta) = 0$，与已知条件 $f''(x) > 0$ 矛盾，所以方程不能多于两个实根。

第三题: (15 分) 设 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2}\, du + \dfrac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

【参考答案】 因为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2+2t} \frac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3} = \frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，故

$$\frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)},$$

从而有 $(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2$，即

$$\psi''(t) - \frac{1}{(1+t)}\psi'(t) = 3(1+t)$$

设 $u = \psi'(t)$，故有 $u' - \dfrac{1}{(1+t)} u = 3(1+t)$，由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式，有

$$u = e^{-\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt}\left[\int 3(1+t)e^{\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt}\, dt + C_1\right]$$

$$= (1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}\, dt + C_1\right] = (1+t)(3t + C_1)$$

由曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2}\, du + \dfrac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切知 $\psi(1) = \dfrac{3}{2e}, \psi'(1) = \dfrac{2}{e}$. 所以有

$$u\,|_{t=1} = \psi'(1) = \frac{2}{e} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e} - 3.$$

于是有

$$\psi(t) = \int (1+t)(3t + C_1)\, dt = t^3 + \frac{3 + C_1}{2} t^2 + C_1 t + C_2$$

由 $\psi(1) = \dfrac{3}{2e} \Rightarrow C_2 = 2$，于是有 $\psi(t) = t^3 + \dfrac{1}{2e} t^2 + \left(\dfrac{1}{e} - 3\right) t + 2 \ (t > -1)$.

第四题：(15 分)设 $a_n>0,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明：(1) 当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛；(2) 当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty\left(n\to\infty\right)$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散.

【参考答案】令$f\left(x\right)=x^{1-\alpha},x\in\left[S_{n-1},S_n\right]$，将$f\left(x\right)$在$\left[S_{n-1},S_n\right]$上用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in\left(S_{n-1},S_n\right)$，使得$f\left(S_n\right)-f\left(S_{n-1}\right)=f'\left(\xi\right)\left(S_n-S_{n-1}\right)$，即

$$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=\left(1-\alpha\right)\xi^{-\alpha}a_n\text{。}$$

(1) 当$\alpha>1$时，$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=\left(\alpha-1\right)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\ge\left(\alpha-1\right)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$，显然$\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前$n$项和有界，从而收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛。

(2) 当$\alpha=1$时，因为$a_n>0$，S_n单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为$S_n\to+\infty$对任意的n，当$p\in N,\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$，从而$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{2}$. 所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散。

(3) 当$\alpha<1$时，$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\ge\frac{a_n}{S_n}$，由$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散。

第五题：(15 分)设l 是过原点、方向为(α,β,γ)（其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$（其中$0<c<b<a$，密度为 1）绕$l$旋转.

(1) 求其转动惯量；　(2) 求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

【参考答案】(1)设旋转轴l的方向向量为$\vec{s}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意点$P(x,y,z)$的径向量为$\vec{r}$，则点$P$到旋转轴$l$的距离的平方为

$$d^2=\vec{r}^2-\left(\vec{r}\cdot\vec{s}\right)=\left(1-\alpha^2\right)x^2+\left(1-\beta^2\right)y^2+\left(1-\gamma^2\right)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz\right)\mathrm{d}V=0,$$

其中$\Omega=\left\{\left(x,y,z\right)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$而

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2dV=\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}.$$

或者使用换元法，有

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \cdot abcr^2 \sin\varphi dr = \frac{4a^3bc\pi}{15}.$$

所以可得

$$\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}V = \frac{4ab^3c\pi}{15}, \iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}V = \frac{4abc^3\pi}{15}.$$

由转动惯量的定义，有

$$I_l = \iiint\limits_{\Omega} d^2\,\mathrm{d}V = \frac{4abc\pi}{15}\left[\left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2\right].$$

(2) 考虑函数 $V\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2$ 在约束条件 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 的约束条件下的条件极值。

$$L\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right) = \left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2 + \lambda\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\right)$$

令 $L'_\alpha\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0, L'_\beta\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0,\ \ L'_\gamma\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0, L'_\lambda\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0,$ 解得极值点为

$$Q_1\left(\pm1,0,0,a^2\right), Q_2\left(0,\pm1,0,b^2\right), Q_1\left(0,0,\pm1,c^2\right),$$

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，并且有 $I_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$. 绕 x 轴（长轴）的转动惯量最小，并且有 $I_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$.

第六题：(15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint\limits_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$； (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint\limits_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

【参考答案】 设 $\oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = I$，将曲线 L 分割成两段 $L = L_1 + L_2$。设 L_0 不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0 \cup L_1^-$ 和 $L_0 \cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线. 由已知条件可知 $L_0 \cup L_1^-$ 和 $L_0 \cup L_2$ 上曲线积分相等，有

$$\oint\limits_{L_0\cup L_1^-} \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = \oint\limits_{L_0\cup L_2} \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{L_2} + \int\limits_{L_0} = \int\limits_{L_0} + \int\limits_{L_1^-} \Rightarrow \int\limits_{L_2} - \int\limits_{L_1^-} = 0 \Rightarrow \int\limits_{L_2+L_1} = 0 \Rightarrow \oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = 0.$$

(2) 设$P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2},Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$. 令$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$\frac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\frac{\varphi'(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2}.$$

解得$\varphi(x)=-x^2$.

(3) 设D为正向闭曲线$C_a:x^4+y^2=1$所围的闭区域，则

$$\oint\limits_{C}\frac{2xy\,\mathrm{d}\,x+\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}=\oint\limits_{C_a}\frac{2xy\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}$$

利用格林公式，有

$$\oint\limits_{C_a}\frac{2xy\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}=\oint\limits_{C_a}2xy\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{D}\left(-4x\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=0.$$