2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类）试卷

一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$____________.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为_______.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值______.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}\,t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为________.

第二题：(12 分)设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

第四题：(14 分)求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

第五题：(16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=0,\ \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x=1$. 试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$；　　(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题：(16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.