2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
（数学一、二年级）参考答案

一、填空题:

(1)【参考解答】: 0.

因为该多项式无 3 次项，故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得到行列式的值为 0.

(2)【参考解答】: $a>27$ 或 $a<-37$.

记 $f(x)=3x^4-8x^3-30x^2+72x+a$，则

$$\begin{aligned}f'(x)&=12x^3-24x^2-60x+72=12(x^3-2x^2-5x+6)\\&=12(x-1)(x-3)(x+2)\end{aligned}$$

$f(x)$ 在 -2 和 3 取得极小值 $-152+a$ 和 $-27+a$. $f(x)$ 在 1 取得极大值 $37+a$. 因此，当且仅当 $a>27$ 或 $a<-37$ 时方程有虚根.

(3)【参考解答】: $-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

令曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$ 取下侧，则 $S_1\cup S$ 为闭下半球面的内侧. 设其内部区域为 Ω，令 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2+y^2\le a^2$，则利用高斯公式，得

$$I=\frac{1}{a}\left\{\iint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}\left[ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\,\mathrm{d}V+\iint\limits_{D}a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V+\pi a^4\right\}$$

$$=-\pi a^3-\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\,\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

(4)【参考解答】: $-\dfrac{1}{2}$.

$A=Q\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}Q^T$，$Q$ 可以表示为 $\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\ \sin t&-\cos t\end{pmatrix}$，所以 $a_{21}=-\sin t\cos t$，立即得到结果.

第二题:【参考解答】: 交线为抛物线或椭圆.

(1)如果平面 P 平行于 $z-$ 轴，则相交曲线 $C=\Gamma\cap P$ 可以经过以 $z-$ 为旋转轴的旋转，使得 P 平行于

$yz-$平面，C 的形式不变. 所以可不妨设 P 的方程为$x=c$，交线 C 的方程为

$$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right).$$

将 C 投影到$yz-$平面上，得到抛物线$z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于$yz-$平面，故交线为抛物线.

(2)如果平面 P 不平行于$z-$轴，设 P 的方程为$z=ax+by+c$. 代入Γ的方程$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right)$，得

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=a^2+b^2+2c:=R^2$$

将$C=\Gamma\cap P$垂直投影到$xy-$平面，得到圆周

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$$

令 Q 是以这个圆为底的圆柱，则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体，它与平面 P 相切于F_1,F_2，与圆柱 Q 相交于圆D_1,D_2. 对$C=Q\cap P$上的任意一点 A，过 A 点的圆柱母线交圆D_1于B_1，交圆D_2于B_2，则线段B_1B_2为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到$\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=\left|AB_1\right|+\left|AB_2\right|=\left|B_1B_2\right|$为常数，故曲线 C 为椭圆.

第三题: **【参考证明】**: 设$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$. 其中 P，Q 为可逆方阵，$B_1$为$r$阶方阵，则有

$$AB=P\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1},BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}Q,\quad ABA=P\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

由$\operatorname{rank}ABA=\operatorname{rank}B_1=\operatorname{rank}B$可得，存在矩阵$X,Y$使得$B_2=B_1X,B_3=YB_1$，从而有

$$AB=P\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ Y & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -Y & I\end{pmatrix}Q$$

因此，AB与BA相似.

第四题: **【参考证明】**: 由于$f\in\mathscr{S}$，因此存在$M_1>0$使得

$$\left|2\pi ixf\left(x\right)\right|\le\frac{M_1}{x^2+1},\forall x\in R\qquad(1)$$

这样$\int_R\left(-2\pi iy\right)f\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$关于$x\in R$一致收敛，从而可得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}x}=\int_R-2\pi iyf\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y.\quad(2)$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^n \hat{f}(x)}{\mathrm{d}x^n} = \int_R (-2\pi i y)^n f(y) e^{-2\pi i x y} \mathrm{d}y. \quad (3)$$

利用分部积分法可得

$$\left(f^{(n)}\right)^{\wedge}(x) = (2\pi i x)^n \hat{f}(x), \forall n \geq 0 \quad (4)$$

结合(3)(4)并利用$f \in \mathscr{S}$，可得对任何$m, k \geq 0$，有

$$x^m \frac{\mathrm{d}^k \hat{f}(x)}{\mathrm{d}x^k} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_R \frac{\mathrm{d}^m \left((-2\pi i y)^k f(y)\right)}{\mathrm{d}y^m} e^{-2\pi i x y} \mathrm{d}y$$

在R上有界. 从而$\hat{f} \in \mathscr{S}$. 于是$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} \mathrm{d}y$收敛,

$$\int_{-A}^{A} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} \mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i (x-t) y} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-A}^{A} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{2\pi i t y} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{-A}^{A} f(x-t) e^{2\pi i t y} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi A t)}{\pi t} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi A t) \mathrm{d}t + f(x) \quad (5)$$

由于$f \in \mathscr{S}$易得积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t}\right| \mathrm{d}t$收敛，从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi A t) \mathrm{d}t = 0. (6)$$

组合(5)(6)即得结论成立.

第五题：【参考解答】：1. 先证

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}, k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

由均值不等式，有$k + 1 < \frac{k}{n} + \cdots + \frac{k}{n} + 1 > (n+1) \sqrt[n+1]{\left(\frac{k}{n}\right)^n}$，因此，有

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}, k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

于是

$$S_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$>\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}>S_n$$

即S_n单调递增. 另一方面，$\frac{S_n}{n}<\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，故有$S_n<\frac{n}{n+1}<1$，即$S_n$有界. 所以$S_n$单调递增有上界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在.

2. 当$x\neq 0$时，$e^x>1+x$，则$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n<e^{n\cdot(-k/n)}=e^{-k}$，从而有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n<\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}<\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S\leq\frac{1}{e-1}$.

另外，对任意正整数$n>m$，则$S_n\geq\sum\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$，令$n\to\infty$，则有

$$S\geq\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}e^{-k}\geq\frac{1}{e-1}.$$

所以可得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\frac{1}{e-1}$.

第六题：【参考证明】：令$y(x,y_0)$为方程满足初值条件$y(0,y_0)=y_0$的解. 由常微分方程解的存在唯一性定理，这样的解局部存在并且唯一. 首先证明：

引理：对任意$r\in R$函数$y(x,r)$在$x\in[0,2\pi]$上有定义，且对任意$r\geq 2$有

$$y(x,r)\leq r \text{ 和 } y(x,-r)\geq -r.$$

引理的证明：反证法. 设存在$x_0\in[0,2\pi]$，$r\geq 2$使得$y(x_0,r)>r$，则$x_0>0$. 记

$$t=\inf\left\{s\in[0,x_0]\mid y(x,r)\geq r,\forall x\in[s,x_0]\right\}$$

则$y(t,r)=r, y'_x(t,r)\geq 0.$

但$y'_x(t,r)=-y(t,r)^3+\sin t<0$，矛盾. 同理可证，对于任意的$x\in[0,2\pi], r\geq 2$有

$$y(x,-r)\geq -r.$$

所以引理成立.

考虑函数$f(r)=y(2\pi,r), r\in R$，则连续函数f满足$f([-2,2])\subset[-2,2]$，故存在$y_0\in[-2,2]$，使得

$$f\left(y_0\right)=y_0 .$$

对恒等式

$$\frac{\mathrm{d}\, y\left(x,r\right)}{\mathrm{d}\, x}=-y\left(x,r\right)^3+\sin x .$$

两边对r求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\left(\frac{\partial y\left(x,r\right)}{\partial r}\right)=-3y\left(x,r\right)^2\frac{\partial y\left(x,r\right)}{\partial r},$$

故有$\dfrac{\partial y\left(x,r\right)}{\partial r}=e^{-3\int_0^x y\left(s,r\right)^2\mathrm{d}\, s}$于是有

$$f'\left(r\right)=e^{-3\int_0^{2\pi} y\left(s,r\right)^2\mathrm{d}\, s}<1.$$

所以f至多只有一个不动点.

唯一性的另一种证明方法：设$y_1\left(x\right),y_2\left(x\right)$是方程的两个满足边值条件的解. 由存在唯一性定理，

$$y_1\left(x\right)\neq y_2\left(x\right),\forall x\in\left[0,2\pi\right]$$

不妨设$y_1\left(x\right)>y_2\left(x\right),\forall x\in\left[0,2\pi\right]$.

令$y=y_1-y_2>0$，则$y\left(0\right)=y\left(2\pi\right)$，

$$\dot{y}=-\left(y_1^2+y_1y_2+y_2^2\right)y<0\Rightarrow y\left(0\right)<y\left(2\pi\right).$$

矛盾.