2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$.

【参考解答】：由于 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼准则，可得原极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

【参考解答】：对等式两端关于 x,y 分别求偏导数，有

$$\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)F_v=0\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left(zF_v-x^2F_u\right)}{xF_u+yF_v},$$

类似可得 $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\left(zF_u-y^2F_v\right)}{xF_u+yF_v}$，于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy\left(xF_u+yF_v\right)+z\left(xF_u+yF_v\right)}{xF_u+yF_v}=z-xy.$$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为_______.

【参考解答】：曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 切平面:

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\text{即 } z=2x-2y-1.$$

联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2x-2y-1. \end{cases}$ 所围区域在 xOy 面上的投影 D 为:

$$D=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y+1)^2\le 1\right\},$$

所求体积为

$$V=\iint_D\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma=\iint_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]d\sigma$$

令 $x-1=r\cos t, y+1=r\sin t$，则原积分为

$$V=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{2}.$$

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在$(-5,5]$的傅里叶级数$x=0$收敛的值______.

【参考解答】：由狄利克雷收敛定理，容易得到$s(0)=\dfrac{3}{2}$.

(5) 设区间$(0,+\infty)$上的函数$u(x)$定义为$u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$，则$u(x)$的初等函数表达式为________.

【参考解答】：由于$u^2(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds=\iint\limits_{s\ge0,t\ge0}e^{-x(t^2+s^2)}dsdt$

所以$u^2(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}\rho d\rho=\dfrac{\pi}{4x}\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}d_\rho\left(x\rho^2\right)=-\dfrac{\pi}{4x}e^{-x\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}=\dfrac{\pi}{4x}$.

所以有$u(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

第二题：(12 分)设M是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

【参考解答】：显然$O(0,0,0)$为M的顶点，$A(1,0,0),B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$在M上。由三点决定的平面$x+y+z=1$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线L是M的准线。

设$P(x,y,z)$是M上的点，(u,v,w)是M的母线OP与L的交点，则OP的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t},\text{即}u=xt,v=yt,z=zt.$$

代入准线方程，得$\begin{cases}(x+y+z)t=1,\\ \left(x^2+y^2+z^2\right)t^2=1\end{cases}$消去$t$，得圆锥面$M$的方程为$xy+yz+zx=0$.

第三题：(12 分)设$f(x)$在(a,b)内二次可导，且存在常数α,β，使得对于$\forall x\in(a,b)$，有$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，则$f(x)$在$(a,b)$内无穷次可导.

【参考证明】：1. 若$\beta=0$。对于$\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\alpha f(x),f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x),\cdots,f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x).$$

从而$f(x)$在(a,b)内无穷次可导。

2. 若$\beta\ne0$。对于$\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1f'(x)+B_1f(x),\qquad(1)$$

其中$A_1=\dfrac{1}{\beta},B_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

因为(1)右端可导，从而有

$$f'''(x)=A_1f''(x)+B_1f'(x).$$

设$f^{(n)}(x)=A_1f^{(n-1)}(x)+B_1f^{(n-2)}(x),n>1$，则$f^{(n+1)}(x)=A_1f^{(n)}(x)+B_1f^{(n-1)}(x)$.

所以$f(x)$在(a,b)内无穷次可导。

第四题：(14 分)求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

【参考解答】：因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$. 所以收敛半径为 $R=+\infty$，即收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。由

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n)!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\ge 2)$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ 的收敛域都为 $(-\infty,+\infty)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

用 $S_1(x),S_2(x),S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和，依据 e^x 的幂级数展开式可得到

$$S_1(x)=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2e^{x-1},\ S_2(x)=e^{x-1},$$

$$(x-1)S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=e^{x-1}-1,$$

当 $x\ne 1$ 时，有 $S_3(x)=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$. 又由于 $S_3(1)=1$.

综合以上讨论，最终幂级数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1}+\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1), & x\ne 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

第五题：(16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,dx=0,\ \int_0^1 xf(x)\,dx=1$. 试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$；　　(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

【参考证明】：(1) 若 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\le 4$，则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\le\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx\le 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1.$$

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$. 而 $4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$，故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)dx=0$. 所以对于任意的 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|=4$，由连续性知 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$。这与条件 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。所以 $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$.

(2) 先证 $\exists x_2\in[0,1]$ 使得 $|f(x_2)|<4$. 若不然，对于 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\ge 4$ 成立，则 $f(x)\ge 4$ 或 $f(x)\le -4$ 恒成立，与 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。

再由 $f(x)$ 的连续性及(1)的结果，利用介值定理，可得 $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题：(16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$.

若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le \dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

【参考证明】：在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

其中 $\theta\in(0,1)$。

记 $(u,v,w)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$，则 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+wy^2\right)$.

由于 $\|\left(u,\sqrt{2}u,w\right)\|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\le\sqrt{M}$ 以及 $\|\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\|=x^2+y^2$，于是有

$$\left|\left(u,\sqrt{2}u,w\right)\cdot\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\right|\le\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right),$$

即 $|f(x,y)|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right)$. 从而

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,dxdy\right|\le\frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$