

2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

(非数学类) 试卷

一、解答下列各题 (本题共 28 分, 每小题 7 分)

1. 计算积分 $\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt dx$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 求一个这样的函数 $f(x)$, 使得积分 $I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx$ 取到最小值.

3. 设 $F(x, y, z), G(x, y, z)$ 有连续偏导数, $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$, 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$. 记 Γ 在 xOy 面上的投影曲线为 S . 求 S 上过点 (x_0, y_0) 的切线方程.

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 矩阵 B 满足关系式 $AB = A - B + E$, 其中

E 是单位矩阵且 $B \neq E$. 若秩 $\text{rank}(A+B) = 3$, 求常数 a 的值.

二、(12 分) 设 $f \in C^4(-\infty, +\infty)$,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,$$

其中 θ 是与 x, h 无关的常数. 证明 f 是不超过三次的多项式.

三、(12 分) 设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dt = 0 \text{ 且 } f(0) = 1.$$

试证: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

四、(10 分) 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中函数

$f(x, y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数, 若对任何 x, y 有 $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A$.

证明 $I \leq \frac{A}{4}$.

五、(12分) 设函数 $f(x)$ 连续可导, $P = Q = R = f\left(\left(x^2 + y^2\right)z\right)$, 有向曲面 Σ_1 是圆柱体 $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型曲面积分

$$I_t = \iint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy .$$

求极限 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{I_t}{t^4}$.

六、(12分) 设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵, 求证 AB 正定的充要条件是 $AB = BA$.

七、(12分) 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证

明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.