2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类，三、四年级）试题

（第一到四题必做，后面任选三题）

一、填空题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

(1) 设 A 为实对称方阵，$(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成共行向量的一个极大无关组.则有 $A=$____

(2) 设 $y(x)\in C^1[0,1)$ 满足 $y(x)\in[0,\pi]$ 及 $x=\begin{cases}\dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y\in(0,\pi]\\ 1, & y=0\end{cases}$，则 $y'(0)=$____

(3) 设 $f(x)=\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=$________

(4) 设 U 为 8 阶实正交方阵，U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t，则 t 最多为________

二、（本题 15 分） 给定空间直角坐标系中的两条直线：l_1 为 z 轴，l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别与 l_1,l_2 共面，且与平面 $z=0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程；

(2) 确定 S 是什么曲面.

三、（满分 15 分） 证明：任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 $A=A_0+A_1+A_2$，其中 $A_0=aI_n$，a 是实数，A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

四、（满分 20 分） 设 $\alpha>0, f(x)\in C^1[0,1]$，且对任何非负整数，$n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得 $\left|x^\alpha f'(x)\right|\le C\,|\,f(x)\,|\ (\forall x\in[0,1])$. 证明：

(1) 若 $\alpha=1$，则 $[0,1]$ 在上 $f(x)\equiv0$.

(2) 若 $\alpha>1$，举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv0$ 可以不成立.

五、（满分 10 分）（抽象代数） 设 $(R,+,\cdot)$ 为含 $1\ne0$ 的结合环，$a,b\in R$. 若 $a+b=ba$，且关于 x 的方程

$$\begin{cases}x^2-(ax^2+x^2a)+ax^2a=1\\ x+a-(ax+xa)+axa=1\end{cases}$$

在 R 中有解. 证明：$ab=ba$.

六、（满分 10 分）（实变函数） 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测，则 $G=\{(x,f(x));x\in\mathbb{R}\}$ 是 2-维

Lebesgue 零测集.

七、（满分 10 分）（微分几何）在空间直角坐标系中设椭圆抛物面 S 的方程为

$$\gamma(u,v)=(u,v,u^2+\frac{1}{2}v^2),\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

(1) 求 S 的所有脐点;

(2) 设 σ 为与脐点处切平面平行的平面 S，它截 S 于曲线 C，证明 C 是一个圆周.

八、(满分 10 分) 设 $\delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 区间的一个剖分. 用 $S[a,b]$ 表示满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合：对任意 $s(x)\in S[a,b]$.

(1) $S(x)|_{[x_i,x_{i+1}]}$ 是三次多项式，$i=0,1,\cdots,n-1$.

(2) $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导.

九、（满分 10 分）（复变函数） 设 z_0 是复函数 $w=f(z)$ 的 n 阶极点. 试证明：一定存在 $\rho>0$ 及 $R>0$，使得对任意 $w\in\{w\in\mathbb{C}:|w|>R\}$，函数 $f(z)-w$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 中必有 n 个零点.

十、(满分 10 分) (概率统计) 设独立随机变量序列 $\{X_n,n\geq 1\}$ 满足 $P(X_n=\pm n^\theta)=\frac{1}{2}$，其中 $\theta>0$ 是常数. 记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(1) 当 $\theta<\frac{1}{2}$ 时，证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0，即对任意 $\epsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}P(\frac{|S_n|}{n}\geq\epsilon)=0$;

(2) 证明：$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\xrightarrow{D}N(0,1)$，其中 $\mathrm{Var}(S_n)$ 是表示 S_n 的方差，$\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛.