

**2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛、
(非数学类) 试卷**

一、简答下列各题 (本题 25 分)

1、计算 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln(x/a)} \right) \right], (a > 1).$

2、设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足 $f_u(u, v) + f_v(u, v) = uv$, 求 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

3、求在 $[0, +\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$, 使 $f(x) = e^{-u(x)}$, 其中 $u = \int_0^x f(t) dt$.

4、计算不定积分 $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$.

5、过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面, 求此切平面的方程.

二、(本题 15 分) 设曲面 $\Sigma: z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2$, 其面密度为常数 ρ . 求在坐标原点的质点与 Σ 之间的引力 (记引力常数为 G).

三、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 连续可导,

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right],$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

四、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| < 1$, 又 $f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$. 试证在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

五、(本题 15 分) 求二重积分 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |x^2 + y^2 - x - y| dx dy$.

六、(本题 15 分) 若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都是收敛的, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.