2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、(15 分) 设Γ为椭圆抛物面$z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作Γ的切锥面。求切锥面的方程。

二、(15 分) 设Γ为抛物线，P是与焦点位于抛物线同侧的一点。过P的直线L与Γ围成的有界区域的面积记作$A(L)$。证明：$A(L)$取最小值当且仅当P恰为L被Γ所截出的线段的中点。

三、(10 分) 设$f\in C^1[0,+\infty), f(0)>0, f'(x)\geq 0, \forall x\in[0,+\infty)$. 已知

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x<+\infty\text{，求证}\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<+\infty.$$

四、(10 分) 设A,B,C均为n阶正定矩阵，$P(t)=At^2+Bt+C, f(t)=\det P(t)$，其中$t$为未定元，$\det P(t)$表示$P(t)$的行列式。若$\lambda$是$f(t)$的根，试证明：$\mathrm{Re}(\lambda)<0$，这里$\mathrm{Re}(\lambda)$表示$\lambda$的实部。

五、(10 分) 已知$\dfrac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i, |x|<1, n$为正整数，求$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i$.

六、(15 分) 设$f:[0,1]\to R$可微，

$$f(0)=f(10,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0\text{且}f'(x)\neq 1, \forall x\in[0,1]\text{。}$$

求证：对于任意正整数n，有$\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|<\dfrac{1}{2}$.

七、(25 分) 已知实矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$. 证明：

(1)矩阵方程$AX=B$有解但$BY=A$无解的重要条件是$a\neq 2, b=\dfrac{4}{3}$.

(2)A相似于B的重要条件是$a=3, b=\dfrac{2}{3}$.

(3)A合同于B的重要条件是$a<2, b=3$.