2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类）试卷

一、(本题 15 分) 设 A 为正常数，直线 l 与双曲线 $x^2-y^2=2\left(x>0\right)$ 所围的有限部分的面积为 A. 证明:

(i) 所有上述 l 与双曲线 $x^2-y^2=2\left(x>0\right)$ 的截线段的中点的轨迹为双曲线.

(ii) l 总是(i)中的轨迹曲线的切线.

二、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$，满足条件:

1) $-\infty<a\le f(x)\le b<+\infty, a\le x\le b$;

2) 对于任意不同的 $x,y\in\left[a,b\right]$，有 $\left|f(x)-f(y)\right|<L\,|\,x-y\,|$，其中 L 是大于 0 小于 1 的常数. 设 $x_1\in\left[a,b\right]$，令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+f\left(x_n\right)\right), n=1,2,\cdots$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在，且 $f(x)=x$.

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵 A 的每个元素的绝对值为 2. 证明：当 $n\ge 3$ 时，

$$|\,A\,|\le\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}n!.$$

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 为区间 $\left(a,b\right)$ 上的可导函数. 对于 $x_0\in\left(a,b\right)$，若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x\in U\setminus\left\{x_0\right\}$，有

$$f\left(x\right)>f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点. 类似地，若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x\in U\setminus\left\{x_0\right\}$，有

$$f\left(x\right)<f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 证明: 若 $f(x)$ 为区间 $\left(a,b\right)$ 上的可导函数, 且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

五、(本题 20 分) 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵. 记

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\begin{vmatrix}x_1^2&x_2&x_3&x_4\\-x_2&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\-x_3&a_{12}&a_{22}&a_{23}\\-x_4&a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$$

若 $|\,A\,|=-12, A$ 的特征值之和为 1，且 $\left(1,0,-2\right)^T$ 为 $\left(A^*-4I\right)x=0$ 的一个解. 试给出一

正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 使得 $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ 化为标准型.

六、(本题 20 分) 设 R 为实数域，n 为给定的自然数，A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的几何. 证明:

$$\inf_{b \in R, a>0, P(x) \in A} \frac{\int_b^{b+a} |P(x)| \, \mathrm{d}x}{a^{n+1}} > 0.$$