2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛
(数学类) 参考答案

一、【参考证明】: 以C_1为圆心，O为原点建立直角坐标系，使得初始切点$P=\left(0,r\right)$. 将圆C_2沿C_1的圆周滚动到Q点，记角$\angle POQ=\theta$，则$Q=\left(r\sin\theta,r\cos\theta\right)$. 令$l_Q$为$C_1$在$Q$点的切线，它的单位法向量为$\vec{n}=\left(\sin\theta,\cos\theta\right)$. 这时，$P$点运动到$P$关于直线$l_Q$的对称点$P'=P(\theta)$处.

于是, 有$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP}-2\left(\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}$. 故$P$点的运动轨迹曲线 (心脏线) 为

$$P\left(\theta\right)=P'=\left(2r\left(1-\cos\theta\right)\sin\theta,r+2r\left(1-\cos\theta\right)\cos\theta\right),0\le\theta\le 2\pi$$

容易得到，圆C的反演变换的坐标表示为

$$\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\left(0,r\right)+\frac{R^2}{x^2+\left(y-r\right)^2}\left(x,y-r\right).$$

将$\left(x,y\right)=P\left(\theta\right)$代入，得到

$$\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\left(\frac{R^2\sin\theta}{2r\left(1-\cos\theta\right)},\frac{R^2\cos\theta}{2r\left(1-\cos\theta\right)}+r\right).$$

直接计算，得到抛物线方程为

$$\tilde{y}=\frac{r}{R^2}\tilde{x}^2+\left(r-\frac{R^2}{4r}\right).$$

二、【参考证明】: 设$B(t)$的第i列为$B_i(t),i=1,2,\cdots,n$.

断言：$t-t_0$是$d\left(t\right),d_1(t),\cdots,d_n(t)$ 的公因式.

反证. 不失一般性，设$d_1(t_0)\ne 0$，于是

$$\text{秩}\left[B\left(t_0\right),b\left(t_0\right)\right]=n,\ \text{因为}d_1\left(t_0\right)\ne 0.$$

注意到秩$B\left(t_0\right)\le n-1$，结果

$$\text{增广阵}\left[B\left(t_0\right),b\left(t_0\right)\right]\text{的秩}\ne B\left(t_0\right)\text{的秩},$$

从而$B(t_0)X=b\left(t_0\right)$不相容. 矛盾.

三、【参考证明】: **(1)** 由条件$0<x_2=f(x_1)<x_1$，归纳可证得$0<x_{n+1}<x_n$，于是$\left\{x_n\right\}$有极限，设为x_0. 由f的连续性及$x_{n+1}=f(x_n)$，得$x_0=f\left(x_0\right)$. 又因为当$x>0$时，$f(x)>x$，所以只有$x_0=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)} = -\frac{2}{f''(0)}.$$

四、【参考证明】：若结论不对，则存在$x_0>0$使得当$x\ge x_0$时，有
$$f'(x)\ge f(ax)>0.$$
于是当$x>x_0$时，$f(x)$严格递增，且由微分中值定理，有
$$f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x\ge f(a\xi)(a-1)x>f(ax)(a-1)x.$$
但这对于$x>\dfrac{1}{a-1}$是不能成立的.

五、【参考证明】：由于f为偶函数，可得$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)g(-x)\,\mathrm{d}x$. 因而
$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_{0}^{1} f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)\,dx. \tag{1}$$
因为g是$[-1,1]$上的凸函数，所以函数$h(x)=g(x)+g(-x)$在$[0,1]$上递增，故对任意$x,y\in[0,1]$，有$\big(f(x)-f(y)\big)\big(h(x)-h(y)\big)\ge 0$. 因而
$$\int_0^1\int_0^1\big(f(x)-f(y)\big)\big(h(x)-h(y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ge 0.$$
由此可得
$$2\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\ge 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac12\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1 h(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$
结合(1)即得结论.

六、【参考证明】：(1) $\forall A,B\in\Gamma_r$表明A可以表示为$A=PBQ$，其中P,Q可逆. 结果$\phi(A)=\phi(P)\phi(B)\phi(Q)$，从而秩$\phi(A)\le$秩$\phi(B)$；对称地有， 秩$\phi(B)\le$秩$\phi(A)$；即有秩$\phi(A)$=秩$\phi(B)$成立.

(2) 考察矩阵集合$\{\phi(E_{ij})\mid i,j=1,2,\cdots,n\}$. 考察$\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{nn})$. 由(1)知$\phi(E_{ij})$为非零阵，特别地，$\phi(E_{ii})$为非零幂等阵，故存在单位特征向量$w_i$使得
$$\phi(E_{ii})w_i=w_i, i=1,2,\cdots,n.$$
从而得向量值$w_1,w_2,\cdots,w_n$.

此向量组有如下性质：

a) $\phi\left(E_{ii}\right)w_k=\begin{cases}\phi\left(E_{ii}\right)\phi\left(E_{kk}\right)w_k=\phi\left(E_{ii}E_{kk}\right)w_k=0,k\neq i\\ w_i,k=i\end{cases}$

b) $w_1,w_2,\cdots,w_n$.线性无关，从而构成R^n的基，矩阵$W=\left[w_1,w_2,\cdots,w_n\right]$为可逆矩阵.

事实上，$x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n=0$，则在两边用$\phi\left(E_{ii}\right)$作用之，得

$$x_i=0,i=1,2,\cdots,n.$$

c) 当$k\neq j$时，$\phi\left(E_{ij}\right)w_k=\phi\left(E_{ij}\right)\phi\left(E_{kk}\right)w_k=\phi\left(E_{ij}E_{kk}\right)w_k=0;$

当$k=j$时，$\phi\left(E_{ij}\right)w_k=b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n$.

两边分别用$\phi\left(E_{11}\right),\cdots,\phi\left(E_{i-1,i-1}\right),\phi\left(E_{i+1,i+1}\right),\cdots,\phi\left(E_{nn}\right)$作用，得

$$0=\phi\left(E_{11}E_{ij}\right)w_j=\phi\left(E_{11}\right)\phi\left(E_{ij}\right)w_k=b_{1j}w_1,\cdots,$$
$$0=\phi\left(E_{nn}E_{ij}\right)w_j=\phi\left(E_{nn}\right)\left(b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n\right)=b_{nj}w_n,$$

即有$b_{1j}=\cdots=b_{i-1,j}=b_{i+1,j}=\cdots=b_{nj}=0$. 从而$\phi\left(E_{ij}\right)w_j=b_{ij}w_i$.

进一步，$b_{ij}\neq 0$，否则有$\phi\left(E_{ij}\right)\left[w_1,w_2,\cdots,w_n\right]=0$, 导致$\phi\left(E_{ij}\right)$为零阵，不可能.

这样通过计算$\phi\left(E_{ij}\right)w_j,i,j=1,2,\cdots,n$，我们得到$n^2$个非零的实数：

$$\begin{matrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{matrix}$$

注意到$E_{mr}E_{rs}=E_{ms}$，从而有

$$b_{ms}w_m=\phi\left(E_{ms}\right)w_s=\phi\left(E_{mr}\right)\phi\left(E_{rs}\right)w_s=\phi\left(E_{mr}\right)b_{rs}w_r=b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有$b_{mr}b_{rs}=b_{ms}$.

最后，令$v_i=b_{i1}w_i,i=1,2,\cdots,n$，则有

$$\phi\left(E_{ij}\right)v_k=\begin{cases}\phi\left(E_{ij}\right)b_{j1}w_j=b_{j1}b_{ij}w_i=b_{i1}w_i=v_i,k=j\\ 0,k\neq j.\end{cases}$$

令$R=\left[v_1,\cdots,v_n\right]$，则$R=\left[w_1,\cdots,w_n\right]\begin{pmatrix}b_{11}&&\\&\ddots&\\&&b_{n1}\end{pmatrix}$为可逆矩阵，且

$$\phi\left(E_{ij}\right)R=\phi\left(E_{ij}\right)\left[v_1,\cdots,v_n\right]=\left[0,\cdots,0,v_i,0,\cdots,0\right]=\left[v_1,\cdots,v_n\right]E_{ij}$$

即$\phi\left(E_{ij}\right)=RE_{ij}R^{-1}$.