## 2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类三、四年级)参考答案

## 一、填空题

(1) 
$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$
. (2)  $\frac{3}{4}$  (3)  $8\pi$ 

(4) 【参考解答】: (n-1)!

$$A$$
 行和 $=0\Rightarrow Aegin{pmatrix}1\ dots\ \end{pmatrix}=0\Rightarrow Ax=0$  的一组基础解系为 $egin{pmatrix}1\ dots\ \end{bmatrix}$ 

注意到  $AA^*=0$ ,从而  $A^*$ 的每一列均形如  $a\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$ ,又由于 A 为实对称矩阵,故  $A^*$ 也为实对称矩阵,故

$$A^* = egin{pmatrix} a & \cdots & a \ dots & & dots \ a & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

即

考虑多项式  $f\left(\lambda\right)$  =  $\mid \lambda I - A \mid = \lambda \left(\lambda - 2\right) \cdots \left(\lambda - n\right)$ ,其一次项系数为 $\left(-1\right)^{n-1} n$ !.

另一方面,由  $f\left(\lambda\right)$  =  $|\lambda I-A|$  又知,其一次项系数为  $\left(-1\right)^{n-1}\left(A_{11}+\cdots+A_{nn}\right)$ ,结果为  $a=\left(n-1\right)!$ .

二、【参考解答】: 设 l 为 z 轴,以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系,可以设  $P: \left(p,0,0\right)$ , l 的参数方程为: l: x=0, y=0, z=t.

设球面C的球心为 $\left(x_{0},y_{0},z_{0}\right)$ ,由于C过点P,则

$$C: \left(x-x_{_{0}}\right)^{^{2}}+\left(y-y_{_{0}}\right)^{^{2}}+\left(z-z_{_{0}}\right)^{^{2}}=\left(p-x_{_{0}}\right)^{^{2}}+y_{_{0}}^{^{2}}+z_{_{0}}^{^{2}}.$$

求l与C的交点:将l的参数方程代入C,有

$$x_0^2 + y_0^2 + (t - z_0)^2 = (p - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2.$$
 
$$t^2 - 2z_0t + (2px_0 - p^2) = 0.$$
 (1)

由此可得两解为  $t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-\left(2px_0-p^2\right)}$ . 故弦长

$$a = \left| t_1 - t_2 
ight| = 2 \sqrt{z_0^2 - \left( 2 p x_0 - p^2 
ight)},$$

1

从而

$$z_0^2 - 2px_0 + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0. (2)$$

反之,如果球面C的球心满足(2),如果C过点P,此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta = 4z_0^2 - 4ig(2px_0 - p^2ig) = a^2 \geq 0,$$

方程有两个实根  $t_{1,2}=z_0\pm rac{a}{2}$ . 从而 C 和 l 相交,而且截出来弦长为 a . 所以所求轨迹方程为

$$z^2 - 2px + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

三、【参考证明】: 对
$$A=egin{pmatrix} z_1 & z_2 \ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$$
,且特征方程为

$$\begin{split} 0 &= \left| \lambda I - A \right| = \lambda^2 - 2 \operatorname{Re} z_1 \lambda + \left| z_1 \right|^2 + \left| z_2 \right|^2 \\ \Delta &= 4 \left( \operatorname{Re} z_1 \right)^2 - 4 \left( \left| z_1 \right|^2 + \left| z_2 \right|^2 \right) \leq 0 \end{split}$$

情形 1:  $\Delta=0$ . 此时, $z_2=0,z_1=\operatorname{Re} z_1$ ,从而 $A=egin{pmatrix}\operatorname{Re} z_1&0\\0&\operatorname{Re} z_1\end{pmatrix}=J_A\in\Gamma$ 

取P = I即有 $P^{-1}AP = J_A$ .

情形 2:  $\Delta < 0$ . 此时 A 的特征值为

$$\begin{split} & \boldsymbol{\lambda}_1 = \operatorname{Re} \boldsymbol{z}_1 + i \sqrt{\left|\boldsymbol{z}_1\right|^2 + \left|\boldsymbol{z}_2\right|^2 - \left(\operatorname{Re} \boldsymbol{z}_1\right)^2} \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 = \operatorname{Re} \boldsymbol{z}_1 - i \sqrt{\left|\boldsymbol{z}_1\right|^2 + \left|\boldsymbol{z}_2\right|^2 - \left(\operatorname{Re} \boldsymbol{z}_1\right)^2} \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 = \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \neq \boldsymbol{\lambda}_1 \end{split}$$

从而
$$J_A = egin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

现取 A 关于  $\lambda_1$  的一个非零特征向量  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ,则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_1 x} + \overline{z_2 y} = \overline{\lambda_1} \overline{x} \\ -\overline{z_2 x} - \overline{z_1 y} = -\overline{\lambda_1} \overline{y} \end{cases}$$

直接检验知  $Aigg(-ar{y}{x}igg) = ar{\lambda}_1igg(-ar{y}{x}igg)$ ,因此 $igg(-ar{y}{x}igg)$ 为 A 关于 $ar{\lambda}_1$  的一个非零特征向量. 令  $P = igg(x - ar{y}{y}igg)$ ,则有

P可逆,且 $P \in \Gamma, P^{-1}AP = J_A$ .

四、【参考证明】: $\alpha$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ .

若 
$$lpha > rac{1}{2}$$
 ,取  $x_n = \left(n\pi\right)^{-1}, y_n = \left(\left(n+rac{1}{2}
ight)\pi\right)^{-1}$  ,则 
$$\frac{\left|f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right|}{\left|x_n - y_n\right|^{lpha}} = 2^{lpha}\pi^{lpha - 1}n^{2lpha - 1}\left(1 + rac{1}{2n}\right)^{lpha - 1} 
ightarrow \infty.$$

下面证明  $\sup_{x \neq y} rac{\left| f\left(x
ight) - f\left(y
ight) 
ight|}{\left| x - y 
ight|^{rac{1}{2}}} < +\infty.$ 

由于f(x)为偶函数,不妨设 $0 \le x < y$ ,令

$$z = \sup \left\{ u \le y \mid f(u) = f(x) 
ight\}$$
 ,

则 $z^{-1} \leq y^{-1} + 2\pi$ .

$$\begin{split} & \left| f\left(x\right) - f\left(y\right) \right| = \left| f\left(z\right) - f\left(y\right) \right| \leq \int_{z}^{y} \left| f'\left(t\right) \right| \, \mathrm{d}\,t \leq \left| y - z \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{z}^{y} f'\left(t\right)^{2} \, \mathrm{d}\,t \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{z}^{y} \left( \sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} \right)^{2} \, \mathrm{d}\,t \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \frac{1}{t} \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{y^{-1}}^{z^{-1}} \left( \frac{\sin s}{s} - \cos s \right)^{2} \, \mathrm{d}\,s \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{y^{-1}}^{y^{-1} + 2\pi} 4 \, \mathrm{d}\,s \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8\pi} \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}}. \end{split}$$

五、【参考证明】:由 $x''ig(tig) \le -aig(tig)fig(xig(tig)ig) < 0$ . 故xig(tig)是上凸的. 故 $\lim_{t \to \infty} x'ig(tig)$ 存在或为 $-\infty$ .

若 
$$\overline{\lim}_{t \to \infty} x \Big( t \Big) = + \infty$$
 ,则  $x' \Big( t \Big) > 0$  ,  $\lim_{t \to \infty} x \Big( t \Big) = + \infty$  . 故 
$$x' \Big( t \Big) f \Big( x \Big( t \Big) \Big) \leq a \Big( t \Big) x' \Big( t \Big) f \Big( x \Big( t \Big) \Big) \leq - x' \Big( t \Big) x'' \Big( t \Big),$$

积分得

$$\int_0^t f\!\left(x\!\left(s\right)\right) \mathrm{d}\,x\!\left(s\right) \leq \frac{x'\!\left(0\right)^2 - x'\!\left(t\right)^2}{2} \leq \frac{x'\!\left(0\right)^2}{2}\,.$$

六、【参考解答】: 由(1)可得
$$\left(f'-f+\frac{a+b}{2}\right)\left(f'+f-\frac{a+b}{2}\right)=-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
 (2)

由此可知 $f'-f+rac{a+b}{2}$ 是无零点的整函数. 可设

$$f' - f + \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}e^{\alpha},\tag{3}$$

其中 $\alpha$ 是一个整函数,由(2)得

$$f' + f - \frac{a+b}{2} = -\frac{a-b}{2}e^{-\alpha}. (4)$$

由(3)(4)可得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}.$$
 (5)

$$f' = \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}.$$
 (6)

对(5)求导得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}.$$
 (7)

由(6)(7)可得

$$(\alpha'+1)(e^{\alpha}-1)(e^{\alpha}+1)=0,$$

因此 $e^{\alpha} - 1 = 0$ 或者 $e^{\alpha} + 1 = 0$  或者 $\alpha' + 1 = 0$ .

若 $e^{lpha}-1=0$ ,则由(5)得到f=b是一个常数;同理,若 $e^{lpha}+1=0$ ,则f=a,也是一个常数;若lpha'+1=0,则

 $\alpha(z) = -z + C$  ,其中C 是任意常数,再由(5)可得

$$f\!\left(z\right)\!=\!\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{4}e^{-z+C}-\frac{a-b}{4}e^{z-C}=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\mathrm{ch}\!\left(z-C\right)\!.$$

七、【参考证明】:【思路一】:1)在题设条件下,对任何可测集E,有 $m^*ig(fig(Eig)ig) \leq K \cdot mig(Eig)$ .

- (1) 若E为区间,由f的连续性知:fig(Eig)为区间.又fig(xig)是 Lipschitz 函数,有 $\Big|fig(Eig)\Big| \leq K\Big|E\Big|$ ,即 $mig(fig(Eig)ig) \leq K \cdot mig(Eig)$ .
- (2) 若 E 为开集,由开集的构造知:  $E=\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)$ ,其中  $\left\{\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right\}$  互不相交.由(1)得:

$$\begin{split} m^*\left(f\left(E\right)\right) &= m^*\left(f\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right)\right) = m^*\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*f\left(\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) \\ &\leq K \sum_{n\geq 1} m\left(\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) = K \cdot m\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) = K \cdot m\left(E\right). \end{split}$$

(3) 若E为可测,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists$  开集 $G \supset E$ ,使得 $m \left( G - E \right) < \varepsilon$  .

由(2)及 $f(G) \supset f(E)$  知

$$m^*ig(fig(Eig)ig) \le m^*ig(fig(Gig)ig) \le K\cdot mig(Gig) = K\cdot mig(E\cupig(G-Eig)ig) \ \le K\cdot mig(Eig) + K\cdot mig(G-Eig) < K\cdot mig(Eig) + K\cdotarepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知:  $m^*(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ .

2) 在题设条件下,若E可测,则f(E)可测. E可测

$$\Rightarrow$$
 日 $F_{\sigma}$  一型集 $A=igcup_{n=1}^{\infty}F_{n}$ , $F_{n}$  闭集, $A\subset E, m\left(E-A\right)=0$ .又 $f\left(A\right)=igcup_{n=1}^{\infty}f\left(F_{n}\right)$ ,由 $f\left(x\right)$ 的

连续性知, $fig(F_nig)$ 闭. 那么fig(Aig)是 $F_\sigma$  —型集且fig(Aig) $\subset$  fig(Eig). 由 1)知:

$$m^*ig(fig(E-Aig)ig) \leq K\cdot mig(E-Aig) = 0.$$

即  $m\left(f\left(E-A\right)\right)=0$ . 而  $f\left(E-A\right)\supset f\left(E\right)-f\left(A\right)$ ,从而有  $m\left(f\left(E\right)-f\left(A\right)\right)=0$ .故  $f\left(E\right)$ 可 测.

综合 1), 2)可得: 对任意的可测集 E , 均有 f(E) 可测且  $m(f(E)) \leq K \cdot m(E)$  .

【思路 2】: i) 若f(x)为 $R^1$ 上的绝对连续函数, $A\subset R, m(A)=0$ ,则m(f(A))=0.

$$f\in A\,C\left(R^{1}
ight)$$
  $\Rightarrow$   $orall arepsilon >0,\exists \delta >0,$ 

对任意至多可数个互不相交的开区间  $\left\{\left(a_i,b_i\right)\right\}_{i\geq 1}$  , 当  $\sum_{i>1}\left(b_i-a_i\right)<\delta$  时,有

$$\sum_{i>1} \left( f\left(b_{i}\right) - f\left(a_{i}\right) \right) < \varepsilon .$$

由mig(Aig)=0,对上 $\delta>0,$ 习开集 $G\supset A,mig(Gig)<\delta$ .

$$\Leftrightarrow G = \bigcup_{k \geq 1} \left( c_k, d_k \right), m_k = \min_{x \in [c_k, d_k]} f \left( x \right) = f \left( \alpha_k \right), \ \ M_k = \min_{x \in [c_k, d_k]} f \left( x \right) = f \left( \beta_k \right).$$

因为 
$$\sum_{k\geq 1} \left( eta_k - lpha_k 
ight) \leq \sum_{k\geq 1} \left( d_k - c_k 
ight) < \delta$$
 ,所以  $\sum_{k\geq 1} \left( f\left(eta_k
ight) - f\left(lpha_k
ight) 
ight) < arepsilon$ .而

$$m^*f\!\left(G\!\right) = m^*\!\left(\bigcup_{k \geq 1} f\!\left(\!\left(c_k, d_k\right)\!\right)\right) \leq \sum_{k \geq 1} \!\!\left|f\!\left(\beta_k\right) - f\!\left(\alpha_k\right)\!\right| < \varepsilon.$$

又因为 $f\left(G\right)\supset f\left(A\right)$ ,所以 $m^{*}f\left(A\right)<arepsilon$ ,由arepsilon的任意性知 $m^{*}f\left(A\right)=0$ .

ii) 若 $f\left(x
ight)$ 为 $R^1$ 上的绝对连续函数,A可测,则 $f\left(A
ight)$ 可测

$$A$$
可测 $\Rightarrow$   $\exists F_{\sigma} -$ 型集 $B = igcup_{n=1}^{\infty} F_n, F_n$ 闭集,

$$B\subset A, mig(A-Big)=0 \Rightarrow fig(Big)=igcup_{n=1}^{\infty}fig(F_nig),$$

由f的连续性知, $f\left(F_n\right)$ 闭.那么 $f\left(B\right)$ 是 $F_\sigma$  —型集, $f\left(B\right)$  —  $f\left(A\right)$  — 由i)知: $m\left(f\left(A-B\right)\right)=0$ .

又因为 $fig(A-Big)\supset fig(Aig)-fig(Big)$ ,从而有mig(fig(Aig)-fig(Big)ig)=0.故fig(Aig)可测.

iii)不妨设E测度有限。f为 $R^1$ 上的 Lipschitz 函数  $\Rightarrow f\left(x\right)$ 为 $R^1$ 上的绝对连续函数  $\Rightarrow f'\left(x\right)$ 在 $R^1$ 上几乎处处存在且 $\left|f'\left(x\right)\right| \leq K, f'$ 在E上是L一可积,即  $\exists Z \subset R^1, m\left(Z\right) = 0, f'\left(x\right)$ 存在且

$$|f'(x)| \le K, \forall x \in E - Z.$$

由 i)知: mf(Z) = 0. 于是

$$egin{aligned} mig(fig(Eig)ig) &\leq mig(fig(E-Zig)ig) + mig(fig(Zig)ig) = mig(fig(E-Zig)ig) \leq \int_{E-Z}ig|f'ig(xig)\mathrm{d}\,m \ &\leq \int_{E-Z}K\,\mathrm{d}\,m \leq K\cdot mig(Eig). \end{aligned}$$

【注】: 上式的第二个不等式的证明如下:

若f在 $R^1$ 上上绝对连续,f在A上的存在积分,则 $mf(A) \leq \int_A |f'| dm$ .

【证明】(1)对任何区间I,  $mf(I) \leq \int_{I} |f'| \,\mathrm{d}\, m$ . 令

$$\max_{x\in ar{I}}fig(xig)=fig(big), \min_{x\in ar{I}}fig(xig)=fig(aig), a,b\in ar{I}.$$

则 
$$mfig(Iig) = fig(big) - fig(aig) = \left|\int_{(a,b)}\!\!f'\;\mathrm{d}\,m
ight| \leq \int_{(a,b)}\!\!|\;f'\;|\;\mathrm{d}\,m \leq \int_I\!|\;f'\;|\;\mathrm{d}\,m\,.$$

(2)f'可积 $\Rightarrow orall arepsilon > 0, orall e \subset E$ ,若 $me < \delta$ ,有 $\int_e |f'| \, \mathrm{d}\, m < arepsilon$ .

$$A$$
可测 $\Rightarrow$ 对上 $\delta>0,\exists$ 开集 $G\supset A,mig(G-Aig)<\delta$  ,

于是
$$\int_{G-A} \mid f' \mid \mathrm{d}\, m < arepsilon$$
. 令 $G = igcup_{k \geq 1} \left( lpha_k, eta_k 
ight)$ ,则

$$egin{aligned} & m\Big(fig(Aig)\Big) \leq m\Big(fig(Gig)\Big) \leq \sum_{k\geq 1} m\Big(fig(ig(lpha_k,eta_kig)\Big) \Big) \ & \leq \sum_{k\geq 1} \int_{ig(lpha_k,eta_kig)} ig|f'ig| \,\mathrm{d}\,m = \int_G ig|f'ig| \,\mathrm{d}\,m = \mathcal{F} + arepsilon \end{aligned}$$

$$\leq \int_{G} \left| f' \right| \mathrm{d}\, m - \int_{G-A} \left| f' \right| \mathrm{d}\, m + arepsilon = \int_{A} \left| f' \right| \mathrm{d}\, m + arepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性得 $mf(A) \leq \int_A |f'| dm$ .

八、【参考证明】: 在  $P_0$  附近取曲率线坐标 $\left(u,v\right)$ ,曲面的参数方程设为  $\mathbf{r}\left(u,v\right)$ .不妨设  $\mathbf{r}\left(0,0\right)=P_0$ .

用E,F,G,L,M,N分别表示曲面 $\mathbf{r}ig(u,vig)$ 的第一基本型、第二基本型系数,则F=M=0.

令
$$fig(u,vig)=<\mathbf{r}ig(u,vig),\mathbf{r}ig(u,vig)>$$
,则 $fig(u,vig)$ 在 $ig(0,0ig)$ 点取极大值 1. 于是

$$f_u\left(0,0\right) = 2 < \mathbf{r}_u\left(0,0\right), \mathbf{r}\left(0,0\right) > = 0,$$

$$f_{v}(0,0) = 2 < r_{v}(0,0), r(0,0) >= 0.$$

从而曲面S在 $P_0$ 的法向 $\vec{n}(0,0) = r(0,0)$ . 又由于

$$egin{aligned} f_{uu}\left(0,0
ight) &= 2igl(Eigl(0,0igr) + Ligl(0,0igr)igr), f_{uv}igl(0,0igr) &= 0, \ f_{vv}igl(0,0igr) &= 2igl(Gigl(0,0igr) + Nigl(0,0igr)igr). \end{aligned}$$

根据f(u,v)在(0,0)点取极大值, $f_{uu}(0,0) \leq 0, f_{vv}(0,0) \leq 0$ . 于是

$$0 < E(0,0) \le -L(0,0), 0 < G(0,0) \le -N(0,0),$$

从而S在 $P_0$ 的 Gauss 曲率

$$Kig(P_0ig) = rac{Lig(0,0ig)Nig(0,0ig)}{Eig(0,0ig)Gig(0,0ig)} \geq 1.$$

九、【参考证明】: 令  $G=\left(\alpha D-C\right)^{-1}\left(\left(\alpha-1\right)D+C^T\right),\lambda$  为 G 的特征值, x 是对应的特征向量,  $y=\left(I-G\right)x$  ,则

$$\begin{split} \left(\alpha D - C\right)y &= \left(\alpha D - C\right)x - \left(\left(\alpha - 1\right)D + C^T\right)x = \left(D - C - C^T\right)x = Ax\\ \left(\alpha D - D + C^T\right)y &= \left(\alpha D - C - A\right)y = \left(\alpha D - C - A\right)x - \left(\alpha D - C - A\right)Gx\\ &= \left(\alpha D - C - A\right)x - \left(\left(\alpha - 1\right)D + C^T\right)x + AGx = AGx = \lambda Ax. \end{split}$$

以上两个方程两边分别与y作内积,得

$$\alpha \left\langle Dy,y\right\rangle - \left\langle Cy,y\right\rangle = \left\langle Ax,y\right\rangle.$$

$$\alpha \left\langle y,Dy\right\rangle - \left\langle y,Dy\right\rangle + \left\langle y,C^Ty\right\rangle = \left\langle y,\lambda Ax\right\rangle.$$

以上两式相加得

$$egin{aligned} ig(2lpha-1ig)ig\langle Dy,yig
angle = ig\langle Ax,yig
angle + ig\langle y,\lambda Axig
angle \ = ig(1-ar{\lambda}ig)ig\langle Ax,xig
angle + ar{\lambda}ig(1-\lambdaig)ig\langle x,Axig
angle = ig(1-|\lambda|^2ig)ig\langle Ax,xig
angle. \end{aligned}$$

由于 $lpha>rac{1}{2},ig\langle Dy,yig
angle\geq 0,ig\langle Ax,xig
angle>0$ ,则必有 $|\lambda|\leq 1$ ,若 $|\lambda|=1$ ,则 y=0,从而Ax=ig(lpha D-Cig)y=0,

进而x=0,矛盾. 因此 $|\lambda|<1$ ,即ho(G)<1. 故迭代收敛.

十、【参考证明】: 若f,g在 $\left[0,1\right]$ 上无公共零点,则连续函数 $\left|f\right|^2+\left|g\right|^2$ 在 $\left[0,1\right]$ 上恒大于 $\left[0,1\right]$ 

$$rac{1}{\leftert f
ightert ^{2}+\leftert g
ightert ^{2}}\in R.$$

注意到 I 为左理想,  $f\in I, \overline{f}\in R$  ,从而  $\left|f\right|^2=\overline{f}$   $f\in I$  ,同样  $\left|g\right|^2\in I$  ,故  $\left|f\right|^2+\left|g\right|^2\in I$  ,进 而  $\dfrac{1}{\left|f\right|^2+\left|g\right|^2}\Big(\left|f\right|^2+\left|g\right|^2\Big)=1\in R,$ 矛盾与 I 为 R 的一个极大左理想.

十一、【参考解答】: 设需要组织 t 吨货源预备出口,则国家收益 Y (单位:万元)是随机变量 X 的函数  $Y=g\big(X\big)$ ,表达式为

$$gig(Xig) = egin{cases} 3t, X \geq t \ 3X - ig(t-Xig), X < t \end{cases}$$

显然, $100 \le t \le 200$ ,由已知条件,知X的概率密度函数为

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{100}, x \in \begin{bmatrix} 100, 200 \end{bmatrix} \\ 0, x \not\in \begin{bmatrix} 100, 200 \end{bmatrix} \end{cases}$$

由于 Y 是随机变量,因此,题中所指的国家收益最大可理解为均值最大,因而问题转化为求 Y 的均值,即求  $E\left[g\left(X\right)\right]$  的均值.简单计算可得

$$\begin{split} E\Big[g\Big(X\Big)\Big] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{100} \int_{100}^{200} g(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{100} \int_{100}^{t} \Big[3x - \Big(t - x\Big)\Big]\mathrm{d}\,x + \frac{1}{100} \int_{t}^{200} 3t\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{50} \Big[-t^2 + 350t - 10000\Big]. \end{split}$$

 $idh(t) = -t^2 + 350t - 10000.$  令h'(t) = 0, 得t = 175. 而h''(t) = -2 < 0.

因此,当 t=175 时函数  $h\left(t\right)$  达到最大值,亦即  $E\left[g\left(X\right)\right]$  达到最大,故应组织 175 吨这种商品,能使国家获得收益均值最大.