2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类）参考答案

一、**【参考证明】**：将双曲线图形进行 45 度旋转，可以假定双曲线方程为$y=\frac{1}{x}(x>0)$．设直线l交双曲线于$\left(a,\frac{1}{a}\right),\left(ta,\frac{1}{ta}\right),(t>1)$，与双曲线所围的面积为$A$，则有

$$A=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\int_a^{ta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\ln t=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\ln t.$$

令$f(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\ln t$. 由

$$f(1)=0,f(+\infty)=+\infty,f'(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2>0(t>1)$$

所以对于常数A，存在唯一常数t，使得$A=f(t)$. l与双曲线的截线段中点坐标为

$$x=\frac{1}{2}(1+t)a,y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{a}.$$

于是，中点的轨迹曲线为$xy=\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)$. 故终点轨迹为双曲线，也就是函数

$$y=\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{x}$$

给出的曲线. 该曲线在上述终点处的切线的斜率为

$$k=-\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{ta^2},$$

它恰好等于过两交点$\left(a,\frac{1}{a}\right),\left(ta,\frac{1}{ta}\right)$的直线$l$的斜率：

$$\frac{\frac{1}{ta}-\frac{1}{a}}{ta-a}=-\frac{1}{ta^2}.$$

故l为轨迹曲线的切线.

二、**【参考证明】**：由题设$x_1\in[a,b],f(x)\in[a,b]$，$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+f(x_1)\right)\in[a,b],\cdots$继续下去，对于任意$n\geq 1$，有$a\leq x_n\leq b_n$，所以$x_n$对任意$n\geq 1$有意义. 由条件(ii)，有

$$\left|x_3-x_2\right|=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)+\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\right|\leq\frac{1}{2}\left(\left|x_2-x_1\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\right)$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\left|x_2-x_1\right|+L\left|x_2-x_1\right|\right)=\frac{1}{2}(1+L)\left|x_2-x_1\right|.$$

类似可以推出$\left|x_4-x_3\right| = \le \left(\frac{1+L}{2}\right)^2\left|x_2-x_1\right|$. 继续下去，有

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| = \le \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-1}\left|x_2-x_1\right|, \forall n \ge 3.$$

由于$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+L}{2}\right)^k$收敛，从而$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{k+1}-x_k\right|$收敛，当然$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{k+1}-x_k\right)$也收敛. 故其前$n$ 项部分和$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=x_{n+1}-x_1$. 当$n\to\infty$时极限尽，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在. 记

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lambda, a\le\lambda\le b.$$

由条件(2)可知，$f(x)$满足 Lipschitz 条件，从而是连续的. 在$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+f\left(x_n\right)\right)$中令$n\to\infty$，得$\lambda=\frac{1}{2}\left(\lambda+f\left(\lambda\right)\right)$，即$f\left(\lambda\right)=\lambda$.

三、【参考证明】: 1) 首先，$|A|=2^n\left|A_1\right|$，其中$A_1=\frac{1}{2}A$，它的所有元素为 1 或-1.

2)当$n=3$时，$\left|A_1\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}\\&\triangleq b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6.\end{aligned}$$

上式b_i每项为±1，且六项的乘积为-1，至少有一个b_i为-1. 从而这六项中至少有两项抵消，故有$|A_1|\le\frac{1}{3}\cdot2\cdot3!$. 于是命题对于$n=3$成立.

3)设此命题对于一切这样的$\left(n-1\right)$阶方阵成立，那么对于n阶矩阵的情形，将$|A|$按第一行展开，记 1 行k列的代数余子式为M_{1k}，便有

$$\begin{aligned}|A|&=\pm2M_{11}\pm2M_{12}+\cdots\pm2M_{1n}\le2\left(\left|M_{11}\right|+\left|M_{12}\right|+\cdots+\left|M_{1n}\right|\right)\\&\le2n\cdot\frac{1}{3}\cdot2^n\cdot\left(n-1\right)!=\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}\cdot n!.\end{aligned}$$

四、【参考证明】: 因为$f(x)$不是一次函数，故存在$a<x_1<x_2<x_3<b$，使得三点

$$\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),\left(x_2,f\left(x_2\right)\right),\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$$

不共线. 不妨设$f\left(x_2\right)-\left(f\left(x_1\right)+\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)}{x_3-x_1}\left(x_2-x_1\right)\right)>0$. 令

$$g\left(x\right)=-\varepsilon\left(x-x_2\right)^2+f\left(x_2\right)+\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)}{x_3-x_1}\left(x-x_2\right).$$

取定$\varepsilon > 0$充分小，使得

$$g(x_1) > f(x_1), g(x_3) > f(x_3).$$

令$h(x) = g(x) - f(x)$，则

$$h(x_1) > 0, h(x_3) > 0 \text{且} h(x_2) = 0.$$

令$h(\xi) = \min\limits_{x \in [x_1, x_3]} h(x)$，则$h(\xi) \le 0, \xi \in (x_1, x_3)$，且$f'(\xi) = g'(\xi)$. 故

$$f(x) \le g(x) - h(\xi), x \in (x_1, x_3).$$

注意到$g(x) - h(\xi)$的图像是一个看看向下的抛物线，故对$x \ne \xi$有

$$g(x) - h(\xi) < g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) - h(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi),$$

即$f(x) < f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi), x \in (x_1, x_3) \setminus \{\xi\}$.

五、【参考解答】：首先

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 \mid A \mid - x_2 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{12} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -12x_1^2 + (x_1, x_3, x_4) A^* \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

由此$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$为关于x_1, x_2, x_3, x_4的二次型.

其次，由$(A^* - 4I)x = 0$得$(\mid A \mid I - 4A)x = 0$，即$(A + 3I)x = 0$.

故由$(1, 0, -2)^T$为$(A^* - 4I)x = 0$的一个解知，A有特征值-3. 现在设A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, -3$，于是由$\mid A \mid = -12$及A的特征值之和为 1，得方程组

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 3 = 1, 3\lambda_1\lambda_2 = -12,$$

得$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. 所以$A$的特征值为$2, 2, -3$. 结果，对应特征值$-3$.的特征空间$V_{-3}$的维数为 1，对应特征值 2 的特征空间的维数$V_2$为 2. 注意到$(1, 0, -2)^T$是$A$对应于特征值$-3$.的一个特征向量，因此它是$V_{-3}$的基. 求解下列现象方程组的基础解系：$t_1 - 2t_3 = 0$，得到正交基础解：

$$\alpha = (0, 1, 0)^T, \beta = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T,$$

且令$\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^T$，则$\alpha, \beta$为$V_2$的标准正交基，$\alpha, \beta, \gamma$为$R^3$的标准正交基.

事实上，因为A为实对称矩阵，$V_2 = V_3^{\perp}$，它是唯一的，维数为 2. 现在A可写成

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中$P=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$. 从而得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix},A^{-1}=P\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\2&0&-1/3\end{pmatrix}P^T,$$

$$A^*=|A|A^{-1}=-12P\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\2&0&-1/3\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\2&0&4\end{pmatrix}P^T.$$

令$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&P\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$，则由$P$为正交矩阵知$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$为正交变换，其中

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\\0&1&0&0\\0&0&1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

它使得

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-12x_1^2+(x_1,x_3,x_4)P\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\2&0&4\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$
$$=-12y_1^2-6y_2^2-6y_3^2+4y_4^2.$$

为$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的标准型.

六、【参考证明】: 我们证明对任意n次首一实系数多项式，都有$\int_b^{b+a}|P(x)|\,\mathrm{d}x\ge c_na^{n+1}$，其中$c_n$满足$c_0=1,c_n=\frac{n}{2^{n+1}}c_{n-1},n\ge 0$. 对$n$用数学归纳法. $n=0,P(x)=1$，则

$$\int_b^{b+a}|P(x)|\,\mathrm{d}x=a\ge c_0a,$$

结论成立. 设结论在$k \le n-1$时成立. 设$P(x)$是n次首一实系数多项式，则对任意给定的$a>0$，

$$Q(x)=\frac{2}{na}\left(P\left(x+\frac{a}{2}\right)-P(x)\right)$$

是一个$(n-1)$次首一多项式，由归纳法假设，有$\int_b^{b+a/2}|Q(x)|\,\mathrm{d}x \ge \frac{c_{n-1}}{2^n}a^n$. 由此推出

$$\int_b^{b+a}|P(x)|\,\mathrm{d}x=\int_b^{b+a/2}\left(|P(x)|+\left|P\left(x+\frac{a}{2}\right)\right|\right)\mathrm{d}x$$

$$\ge\int_b^{b+a/2}\left|P\left(x+\frac{a}{2}\right)-P(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{na}{2}\int_b^{b+a/2}\left|Q(x)\right|\mathrm{d}x\ge\frac{na}{2}c_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)^n=c_n a^{n+1}.$$