2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类三、四年级)参考答案

一、填空题

(1)
$$0$$
 (2) $p>1$ (3) $3\sqrt{2}\pi$ (4) $\left(1,0,1\right),\left(-1,0,-1\right),\left(1,t,-1\right),\left(-1,t,1\right),\ t\in R.$

二、【参考解答】:由于形如 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 的平面与 S 只能交于直线或空集,所以可以设平面 σ 的方程为 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$,它与 S 交线为圆.

令
$$x=\cos heta,y=rac{1}{\sqrt{2}}\sin heta$$
,则 σ 与 S 的交线可表示为

$$\Gamma\!\left(heta
ight)\!=\!\left(\!\cos heta,\!rac{1}{\sqrt{2}}\!\sin heta,\!lpha\cos heta\!+\!rac{eta}{\sqrt{2}}\!\sin heta\!+\!\gamma
ight)\!,\! heta\!\in\!\left[0,2\pi
ight]\!.$$

由于 $\Gammaig(hetaig)$ 是一个圆,所以它到一个定点P=ig(a,b,cig)的距离为常数R.于是有恒等式

$$\left(\cos heta - a
ight)^2 + \left(rac{1}{\sqrt{2}}\sin heta - b
ight)^2 + \left(lpha\cos heta + rac{eta}{\sqrt{2}}\sin heta + \gamma - c
ight)^2 = R^2.$$

利用
$$\cos^2 heta = rac{1+\cos 2 heta}{2}, \sin^2 heta = rac{1-\cos 2 heta}{2}$$
,可以将上式写成

$$A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C\cos \theta + D\sin \theta + E = 0,$$

其中A,B,C,D,E 为常数. 由于这样的方程对所有的 $\theta\in\left[0,2\pi\right]$ 恒成立,所以

$$A = B = C = D = E = 0$$
.

特别地,我们得到

$$A=rac{1}{2}ig(lpha^2+1ig)-rac{1}{4}ig(eta^2+1ig)=0, B=rac{1}{\sqrt{2}}lphaeta=0.$$

于是得到 $\alpha = 0, \beta = \pm 1$, 平面 σ 的法向量为

$$(-\alpha, -\beta, 1) = (0, 1, 1)$$
或 $(0, -1, 1)$ 的非零倍数.

三、【参考证明】: 存在可逆方阵T 使得 $T^{-1}AT= ilde{A}$ 为对角阵. 令 $T^{-1}BT= ilde{B}$,则

$$\mathrm{tr}\Big(\!ig(ABig)^{\!2}\Big) = \mathrm{tr}\Big(\!ig(ilde{A} ilde{B}ig)^{\!2}\Big), \mathrm{tr}\Big(A^{2}B^{2}\Big) = \mathrm{tr}\Big(ilde{A}^{2} ilde{B}^{2}\Big).$$

令
$$ilde{A}=\mathrm{diag}ig(a_{11},\cdots,a_{nn}ig), ilde{B}=ig(b_{ij}ig)_{n imes n}$$
,则

$$ext{tr}igg(ig(ilde{A} ilde{B}ig)^2igg) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii} a_{jj} b_{ij} b_{ji} = \sum_{1 \le i < j \le n} 2 a_{ii} a_{jj} b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 b_{ii}^2$$

$$ext{tr}ig(ilde{A}^2 ilde{B}^2ig) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}^2 b_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ig(a_{ii}^2 + a_{jj}^2ig) b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 b_{ii}^2$$

于是
$$\operatorname{tr}\!\left(\!\left(\!\tilde{A}\tilde{B}\!\right)^{\!2}\!\right)\!-\operatorname{tr}\!\left(\!\tilde{A}^{2}\tilde{B}^{2}\!\right)\!=\!-\!\sum_{1\leq i< j\leq n}\!\left(a_{ii}-a_{jj}^{}\right)^{\!2}b_{ij}^{2}\leq 0.$$

四、【参考证明】: 设 Γ 的圆心为 $O, lpha_i = rac{1}{2} \angle B_i O B_{i+1}, B_{n+1} = B_1$,则

$$P_A = 2 {\displaystyle \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i}, P_B = 2 {\displaystyle \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i} \; . \label{eq:parameters}$$

先证: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\tan^{\frac{1}{3}} x \sin^{\frac{2}{3}} x > x. \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow g\left(x\right) = rac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x} - x$$
,则 $g\left(0\right) = 0$,

$$g'\left(x\right) = \frac{\cos^{\frac{4}{3}}x + \frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^{2}x}{\cos^{\frac{2}{3}}x} - 1 = \frac{2\cos^{2}x + 1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x} - 1 > \frac{3\sqrt[3]{\cos^{2}x\cos^{2}x \cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x} - 1 = 0$$

故g(x)严格单调递增,因而g(x)>g(0)=0. (1)得证.

$$egin{aligned} P_A^{rac{1}{3}}P_B^{rac{2}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^n an lpha_iiggr)^{rac{1}{3}}iggl(\sum_{i=1}^n an lpha_iiggr)^{rac{2}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^n iggl(an^{rac{1}{3}} lpha_iiggr)^{rac{3}{3}}iggl)^{rac{1}{3}}iggl(\sum_{i=1}^n iggl(an^{rac{1}{3}} lpha_iiggr)^{rac{3}{2}}iggr)^{rac{2}{3}} &= 2iggl(\sum_{i=1}^n iggl(an^{rac{1}{3}} lpha_iiggr)^{rac{3}{2}}iggr)^{rac{3}{2}}iggr)^{rac{3}{2}} &= 2\sum_{i=1}^n an^{rac{1}{3}} lpha_i an^{rac{1}{3}} lpha_i an^{rac{2}{3}} lpha_i an^{2} iggr)^{rac{3}{2}}iggr)^{rac{3}{2}} &= 2\pi. \end{aligned}$$

五、【参考证明】: 首先,令

$$\begin{split} G_1 &\quad \left(u_1\right), G_2 &\quad \left(v_1\right), G_3 &\quad \left(u_2\right), G_4 &\quad \left(v_2\right), \\ T &= \left\{g_1g_2 \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\right\}, H = \left\{g_3g_4 \mid g_3 \in G_3, g_4 \in G_4\right\} \end{split}$$

则T, H均为G的 Abel 群. 进一步,由 $\left(8,13\right)=1$ 可知:

$$G_{_{\! 1}}\cap G_{_{\! 2}}=\left\{e\right\},G_{_{\! 3}}\cap G_{_{\! 4}}=\left\{e\right\}$$
 ,

结果, $T=G_1G_2$ 为内直积分解, $H=G_3G_4$ 为内直积分解.

其次,分别计算 u_1v_1,u_2v_2 的阶.

若 $\left(u_1v_1
ight)^x=e$,则 $u_1^xv_1^x=e$,由 $T=G_1G_2$ 为内直积分解,得 $u_1^x=e,v_1^x=e$,从而 $8\mid x,13\mid x$,故 $o\left(u_1v_1
ight)=8 imes13$,即有 $T=\left(u_1v_1
ight)$.同理知, $o\left(u_2v_2
ight)=8 imes13$,即有 $H=\left(u_2v_2
ight)$.注意到 $u_1v_1=u_2v_2$,故 T=H.

第三, $u_2\in G_3\subseteq H=T$,故 u_2 可表示为 $u_2=g_1g_2,g_1\in G_1,g_2\in G_2$. 结果 $u_2^8=g_1^8g_2^8$,即 $g_2^8=e$.

令 $g_2=v_1^t$,于是 $v_1^{8t}=e$,得 $13\mid 8t$,故 $g_2=3$,由此得 $u_2\in G_1$;同理可知 $v_2\in G_2$.

第四,在此考虑 $u_1v_1=u_2v_2$ 以及 $T=G_1G_2$ 为内直积分解,因此有 $u_1=u_2,v_1=v_2$. 最后,直接计算可知, u_1u_2 的阶为 4, v_1v_2 的阶为 13.

六、【参考证明】: 令 $E_1=E-Q$,其中 Q 是有理数集,则 E_1 无内点且 $m\left(E_1\right)=m\left(E\right)$.

1) 存在闭集 $E_2 \subset E_1$,使得 $a < m\left(E_2\right) < m\left(E_1\right) = m\left(E\right)$.

对 $m\left(E_1\right)>a+q>a$ 的正实数 q ,由测度的连续性知, $\exists A\subset E_1$,使得 $m\left(A\right)=a+q$.由可测

集的定义,对 $\frac{q}{2}$, \exists 闭集 $E_2 \subset A$, 使得 $m \left(A - E_2 \right) < \frac{q}{2}$,于是

$$m\!\left(E_{\!\scriptscriptstyle 1}\right) = m\!\left(A\right) - m\!\left(A - E_{\!\scriptscriptstyle 2}\right) > a + q - \frac{q}{2} > a + \frac{q}{2} > a.$$

又 $m(E_2) \le m(A) = a + q < m(E_1)$,即

$$a < m\left(E_{_{2}}\right) < m\left(E_{_{1}}\right) = m\left(E\right).$$

2) 令 $f\left(x\right)=m\left(E_2\cap\left[-x,x\right]\right),x\in R$,可证 $f\left(x\right)$ 是连续单增函数且

$$fig(0ig)=0, \lim_{x o +\infty}fig(xig)=mig(E_2ig)>a.$$

由连续函数的介值性定理知: $\exists r > 0$, 使得

$$f\!\left(r\right) = m\!\left(E_2\cap\!\left[-r,r\right]\right) = a.$$

令 $F=E_{_2}\cap igl[-r,rigr]$,则 F 为无内点的有界闭集且 $F\subset E, migl(Figr)=a$.

七、【参考证明】: 设 e_1,e_2,e_3 为曲线 γ 的 Frenet 标架:

$$e_1 = \frac{d\gamma}{ds}, e_2 = \frac{1}{k} \frac{d^2\gamma}{ds^2}, e_3 = e_1 \times e_2.$$

则有 $\frac{\mathrm{d}\,e_1}{\mathrm{d}\,s}=ke_2, \frac{\mathrm{d}\,e_2}{\mathrm{d}\,s}=-ke_1+\tau e_3, \frac{\mathrm{d}\,e_3}{\mathrm{d}\,s}=-\tau e_2,$ 其中au为曲线 γ 的挠率.

设 $\beta = e_2: \left[0,l\right] \to S^2$ 为球面上的简单曲线,它的弧长参数为 \tilde{s} ,于是有:

$$\frac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,s} = -ke_1 + \tau e_3, \frac{\mathrm{d}\,\tilde{s}}{\mathrm{d}\,s} = \sqrt{k^2 + \tau^2}.$$

球面在 eta(s)点的单位法向量为 eta ,曲线 eta(s)的切向量为 $\dfrac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,s}=-ke_1+\tau e_3$,所以曲线 eta(s)的球面上的法向量 \tilde{e}_2 为

$$\tilde{e}_2 = \frac{\beta \times \frac{\operatorname{d}\beta}{\operatorname{d}s}}{\left|\beta \times \frac{\operatorname{d}\beta}{\operatorname{d}s}\right|} = \frac{\left(\tau e_1 + k e_3\right)}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}.$$

于是,曲线 β 在球面上的测地曲率

$$\begin{split} k_g &= \frac{\mathrm{d}^2 \, \beta}{\mathrm{d} \, \tilde{s}^2} \cdot \tilde{e}_2 = \left[\frac{\mathrm{d}^2 \, \beta}{\mathrm{d} \, s^2} \left(\frac{\mathrm{d} \, s}{\mathrm{d} \, \tilde{s}} \right)^2 + \frac{\mathrm{d} \, \beta}{\mathrm{d} \, s} \frac{\mathrm{d}^2 \, s}{\mathrm{d} \, \tilde{s}^2} \right] \cdot \tilde{e}_2 \\ &= \frac{1}{\left(k^2 + \tau^2 \right)^{3/2}} \left(-\frac{\mathrm{d} \, k}{\mathrm{d} \, s} \, e_1 + \frac{\mathrm{d} \, \tau}{\mathrm{d} \, s} \, e_3 \right) \cdot \left(\tau e_1 + k e_3 \right) \\ &= \frac{1}{\left(k^2 + \tau^2 \right)^{3/2}} \left(k \frac{\mathrm{d} \, \tau}{\mathrm{d} \, s} - \tau \frac{\mathrm{d} \, k}{\mathrm{d} \, s} \right). \end{split}$$

故有

$$\int_{B} k_g \, \mathrm{d}\, \tilde{s} = \int_{0}^{l} \frac{1}{\left(k^2 + \tau^2\right)^{3/2}} \left(k \frac{\mathrm{d}\, \tau}{\mathrm{d}\, s} - \tau \frac{\mathrm{d}\, k}{\mathrm{d}\, s}\right) \sqrt{k^2 + \tau^2} \, \mathrm{d}\, s$$

$$=\int_0^l \frac{1}{k^2+\tau^2} \left(k \frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,s} - \tau \frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\,s} \right) \mathrm{d}\,s = \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} \left(\arg \tan \frac{\tau}{k} \right) \mathrm{d}\,s = \arg \tan \frac{\tau}{k} \bigg|_0^l = 0,$$

其中用到闭曲线性质: $k\left(0\right)=k\left(l\right), \tau\left(0\right)=\tau\left(l\right)$. 由于 B 为简单闭曲线, 它围成球面一个单连通区域 D . 由 Gauss-Bonett 定理,有

$$\int_B k_g \,\mathrm{d}\, ilde s = \int_D K \,\mathrm{d}\, S = 2\pi.$$

对球面而言,Gauss 曲率 K=1,故区域 D 的面积 $|D|=2\pi$,为球面面积的一半.

八、【参考解答】: 1. 令 $q(x)=x^3-p(x)$.我们证明 q(x)具有形式: $q(x)=xJ^2(x)$,其中 J(x)为一次多项式.首先说明 q(x)的根都为实数.实际上 q(x)必有一个实根 α_1 ,如另两个为一对共轭复根,则 q(x)具有形式:

$$q\!\left(x\right)\!=\!\left(x-\alpha_{\!\scriptscriptstyle 1}\right)\!\!\left(x^2+ax+b\right)\!,\;\; \boxminus a^2-4b<0.$$

由于 $q\left(x\right) \geq 0, \alpha_1 \leq 0, q\left(x\right) > x \left(x + \frac{a}{2}\right)^2, \quad \int_0^1 q\left(x\right) \mathrm{d}\,x > \int_0^1 x \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \mathrm{d}\,x$.这与 $\left\|q\left(x\right)\right\|_1$ 达到

最小矛盾! 因此,q(x)三个根都为实数,设为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

若q(x)的三个互不相等,则

$$lpha_i \leq 0, \int_0^1 qig(xig) \mathrm{d}\,x \geq \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}\,x > \int_0^1 xigg(x-rac{1}{2}igg)^2 \,\mathrm{d}x$$

矛盾! 因此q(x)有两个相等,设 $\alpha_2=\alpha_3$. 故

$$q\left(x\right) = \left(x - \alpha_{1}\right)\left(x - \alpha_{2}\right)^{2},$$

并且 $\alpha_1 = 0$ 时 $\int_0^1 q(x) dx$ 会更小.

由于
$$\int_0^1 q\left(x\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{12}\Big(6lpha_2^2 - 8lpha_2 + 3\Big)$$
,当 $lpha_2 = \frac{2}{3}$,即 $p\left(x\right) = x^3 - q\left(x\right) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}x$ 时,
$$\left\|x^3 - p\left(x\right)\right\|_1$$
 最小。

2. 令 $q\left(x\right)=x^4-p\left(x\right)$. 类似于 1 的分析, $q\left(x\right)$ 的根都为实数,且都为重根.即 $q\left(x\right)=J^2\left(x\right)$,其中 $J\left(x\right)$ 为二次多项式.设 $J\left(x\right)=x^2+ax+b$,则

$$fig(a,big)\coloneqq \int_0^1 qig(xig) \,\mathrm{d}\,x = rac{1}{5} + rac{1}{2}a + rac{2}{3}b + rac{1}{3}a^2 + ab + b^2.$$
 由 $rac{\partial f}{\partial a} = rac{2}{3}a + b + rac{1}{2} = 0, rac{\partial f}{\partial b} = a + 2b + rac{2}{3} = 0, \;\;$ 解得 $a = -1, b = rac{1}{6}$,因此得 $pig(xig) = x^4 - ig(x^2 - x + rac{1}{6}ig)^2 = 2x^3 - rac{4}{3}x^2 + rac{1}{3}x - rac{1}{36}.$

九、【参考证明】: 设 $arepsilon>0, g\left(z
ight)=1+arepsilon-f\left(z
ight),$ 则 $g\left(z
ight)$ 在D上解析,

$$g\left(0\right)=1+\varepsilon>0,\operatorname{Re}g\left(z\right)=1+\varepsilon-\operatorname{Re}f\left(z\right)\geq\varepsilon>0.$$

因而

$$\left|rac{gig(zig)-gig(0ig)}{gig(zig)+gig(0ig)}
ight|^2 = rac{\left|gig(zig)
ight|^2-2ig(1+arepsilonig)\mathrm{Re}\,gig(zig)+ig(1+arepsilonig)^2}{\left|gig(zig)
ight|^2+2ig(1+arepsilonig)\mathrm{Re}\,gig(zig)+ig(1+arepsilonig)^2} < 1.$$

所以 $\dfrac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}$ 是一个将D映入D,将0映到0的解析函数,根据 Schwarz 引理,有

$$\left|rac{g\left(z
ight)-g\left(0
ight)}{g\left(z
ight)+g\left(0
ight)}
ight| \leq \mid z\mid.$$

令arepsilon o 0 ,得到 $\dfrac{ig|fig(zig)}{ig|2-fig(zig)} \le \mid z\mid$.两边平方得

$$\left|fig(zig)
ight|^2\leq \mid z\mid^2 \left(4-4\operatorname{Re}fig(zig)+\left|fig(zig)
ight|^2
ight)$$

即 $\left(1-\mid z\mid^{2}\right)\left|f\left(z\right)\right|^{2}\leq4\mid z\mid^{2}\left(1-\operatorname{Re}f\left(z\right)\right).$

由于
$$\left(\operatorname{Re} f\left(z\right)\right)^{2}\leq\left|f\left(z\right)\right|^{2}$$
,从上式可得

$$\left(\operatorname{Re} f\left(z
ight) + rac{2\mid z\mid^2}{1-\mid z\mid^2}
ight)^2 \leq rac{4\mid z\mid^2}{\left(1-\mid z\mid^2
ight)^2}.$$

由此即得

$$\operatorname{Re} f \Big(z \Big) \leq \frac{2 \mid z \mid}{1 - \mid z \mid^2} - \frac{2 \mid z \mid^2}{1 - \mid z \mid^2} = \frac{2 \mid z \mid}{1 + \mid z \mid}.$$

十、【参考解答】:用 A_n 表示事件:"经n 次试验后,黑球出现在甲袋中", \tilde{A}_n 表示事件"经n 次试验后,黑球出现在乙袋中", C_n 表示事件"第n 次从黑球所在的袋中取出一个白球".记

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\!\left(\boldsymbol{A}_{\!n}\right)\!, \boldsymbol{q}_n = \boldsymbol{P}\!\left(\boldsymbol{\tilde{A}}_{\!n}\right) = 1 - \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{n} = 1, 2, \cdots$$

当 $n \ge 1$ 时,由全概率公式得

$$\begin{split} p_n &= P \big(A_n \mid A_{n-1} \big) P \big(A_{n-1} \big) + P \big(A_n \mid \tilde{A}_{n-1} \big) P \big(\tilde{A}_{n-1} \big) \\ &= P \big(C_n \mid A_{n-1} \big) P \big(A_{n-1} \big) + P \big(\tilde{C}_n \mid \tilde{A}_{n-1} \big) P \big(\tilde{A}_{n-1} \big) \\ &= p_{n-1} \cdot \frac{N-1}{N} + q_{n-1} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N} \, p_{n-1} + \frac{1}{N} \big(1 - p_{n-1} \big). \end{split}$$

因此可得递推等式 $p_n=rac{N-2}{N}\,p_{n-1}+rac{1}{N}ig(n\geq 1ig).$

由初始条件 $p_0 = 1$,于是由递推关系式并利用等比级数求和公式,得

$$\begin{split} p_n &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} + \dots + \frac{1}{N} \bigg(\frac{N-2}{N} \bigg)^{n-1} + \bigg(\frac{N-2}{N} \bigg)^n \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - \bigg(\frac{N-2}{N} \bigg)^n}{1 - \bigg(\frac{N-2}{N} \bigg)} + \bigg(\frac{N-2}{N} \bigg)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bigg(\frac{N-2}{N} \bigg)^n \;. \end{split}$$

故黑球出现在甲袋中的概率为 $rac{1}{2}+rac{1}{2}igg(rac{N-2}{N}igg)^n$. 若 N=2 ,则对任何 n ,有 $p_n=rac{1}{2};$ 若 N>2 ,则

有
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$$
.