专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(数学 A 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 在空间中给定直线 L 及直线外定点 P. 设 M 是过 P 点且与直线 L 相切的球面的球心. 问：所有可能的球心 M 构成何种曲面？证明你的结论.

解答. 解：这是一个抛物柱面. ....(5 分)

证明如下：在空间中建立直角坐标系，使得直线 L 为 $x-$ 轴，点 P 到 L 的垂线为 $z-$ 轴，其垂足 O 点为原点. 这时, $O=(0,0,0)$, $P=(0,0,a)$ $(a>0)$, 直线 L 的方向向量为 $v=(1,0,0)$. 设 $M=(x,y,z)$ 是过 P 点且与直线 L 相切的球面的球心, 则球半径 PM 等于 M 到直线 L 的距离，即：

$$PM=\frac{|\overrightarrow{OM}\times v|}{|v|}.$$

....(10 分)

$$PM^2=x^2+y^2+(z-a)^2;$$

$$\overrightarrow{OM}\times v=(x,y,z)\times(1,0,0)=(0,z,-y);$$

故有

$$x^2+y^2+(z-a)^2=z^2+y^2;$$

$$z=\frac{1}{2a}(x^2+a^2),$$

为抛物柱面. ....(15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f(x,y,z)=x^2+(y^2+z^2)(1-x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中, Σ 是 $\{(x,y,z)\big||x|\leqslant 2,\ y^2+z^2\leqslant 4\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\leqslant 1$ 上的最小值.

解答. (1)

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=2x-3(y^2+z^2)(1-x)^2, \\ f_y(x,y,z)=2y(1-x)^3, \\ f_z(x,y,z)=2z(1-x)^3. \end{cases}$$

求解 $f_x(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0)=f_z(x_0,y_0,z_0)=0$ 的点可得函数在整个空间上只有唯一的驻点 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$.

(**注.** 易见由上述方程的第二式可得 $x_0=1$ 或 $y_0=0$. 但 $x_0=1$ 与第一个式子矛盾. 因此 $x_0=0$, 进而又有 $y_0=z_0=0$.)

....(5 分)

(2) $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$, 其中

$$\begin{aligned} \Sigma_1&=\left\{(x,y,z)\big|x\in[-2,2],y^2+z^2=4\right\}, \\ \Sigma_2&=\left\{(x,y,z)\big|x=2,y^2+z^2\leqslant 4\right\}, \\ \Sigma_3&=\left\{(x,y,z)\big|x=-2,y^2+z^2\leqslant 4\right\}. \end{aligned}$$

在 Σ_1 上,

$$f(x,y,z)=x^2+4(1-x)^3=g_1(x), \qquad x\in[-2,2].$$

作为一元函数, 考虑 g_1 在 $[-2,2]$ 内的驻点:

$$g_1'(\xi)=2\xi-12(1-\xi)^2=0.$$

可得: $\xi_1=\frac{3}{2}$, $\quad \xi_2=\frac{2}{3}$.

我们有

$$g_1(2)=0,\quad g_1(-2)=112,\quad g_1\big(\frac{3}{2}\big)=\frac{7}{4},\quad g_1\big(\frac{2}{3}\big)=\frac{16}{27}.$$

故 f 在 Σ_1 上的最小值为 0.

(**注:** 以上讨论说明 $g_1(2)=0$ 以及 $g_1(-2),g_1\big(\frac{3}{2}\big),g_1\big(\frac{2}{3}\big)\geqslant 0$ 即可. 或不必求驻点, 直接说明 $g_1\geqslant 0$ 且 $g_1(2)=0$.)

在 Σ_2 上,

$$f(x,y,z) = 4 - (y^2+z^2) = g_2(x,y) \geqslant 0, \qquad y^2+z^2 \leqslant 4.$$

在 Σ_3 上,

$$f(x,y,z) = 4 + 27(y^2+z^2) = g_3(x,y) \geqslant 0, \qquad y^2+z^2 \leqslant 4.$$

故 f 在 Σ 上的最小值为 0.

....(10 分)

(3) 注意到椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3} \leqslant 1$ 完全在 Σ 围成的区域 Ω 内, 而且函数 f 在 Ω 内有唯一驻点 $(0,0,0)$, $f(0,0,0)=0$. 因此, f 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值为 0. 进而 f 在该椭球上的最小值就是 0.

....(15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 20 分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ, λ 的几何重数为 1.

解答. 必要性. 设存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基, 显然 $\mathbf{A}$ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & * \\ 1 & 0 & & & * \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & * \\ & & & 1 & * \end{pmatrix}.$$

…………………………………………………………………(2 分)

对任意 $c \in \mathbb{C}$,

$$cI - A = \begin{pmatrix} c & & & & * \\ -1 & c & & & * \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & c & * \\ & & & -1 & * \end{pmatrix},$$

其左下角的 $n-1$ 阶子式非零, 所以 $\operatorname{rank}(cI - A) \geq n-1$, 从而齐次线性方程组

$$(cI - A)X = 0$$

的解空间维数为 $n - \operatorname{rank}(cI - A) \leq 1$.

…………………………………………………………………(5 分)

又对 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ,

$$(\lambda I - A)X = 0$$

一定有非零解, 它的解空间维数 ≥ 1. 所以齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)X = 0$$

的解空间维数为 1, 即 λ 的几何重数为 1.

…………………………………………………………………(8 分)

充分性: 设 $\mathbf{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 代数重数分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_s$, 其中 $d_1 + d_2 + \cdots + d_s = n$, 即 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_s)^{d_s}.$$

对于 $1 \le i \le s$, 记 $V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i}$, 其中 $\mathbf{I}$ 为恒等变换, 则 V_{λ_i} 为 $\mathbf{A}$-不变子空间且

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

.... (11 分)

由于 λ_i 的几何重数为 1, 故 $\mathbf{A}|_{V_{\lambda_i}}$ 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{d_i \times d_i}.$$

所以存在 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 使得 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i - 1}\alpha_i \neq 0$.

.... (14 分)

令

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,$$

则 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 是 V 的一组基. 若否, 则 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha$ 线性相关, 从而存在次数 $\le n-1$ 的非零多项式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $p(\mathbf{A})\alpha = 0$. 由于 V_{λ_i} 为 $\mathbf{A}$-不变子空间, 所以 $p(\mathbf{A})\alpha_i \in V_{\lambda_i}$. 由

$$0 = p(\mathbf{A})\alpha = p(\mathbf{A})\alpha_1 + p(\mathbf{A})\alpha_2 + \cdots + p(\mathbf{A})\alpha_s$$

可知 $p(\mathbf{A})\alpha_i = 0$. 由于 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{d_i - 1}\alpha_i \neq 0$, 所以 $(x - \lambda_i)^{d_i}$ 是 $\mathbf{A}$ 的零化 α_i 的次数最低的多项式, 从而

$$(x - \lambda_i)^{d_i} \mid p(x).$$

.... (18 分)

又当 $i \neq j$ 时, $(x - \lambda_i)^{d_i}$ 与 $(x - \lambda_j)^{d_j}$ 互素, 所以

$$(x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_s)^{d_s} \mid p(x),$$

即 $f(x) \mid p(x)$, 这与 $\deg p(x) < \deg f(x)$ 且 $p(x) \neq 0$ 矛盾.

.... (20 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设 $n \geqslant 3$ 为自然数, $\theta = \frac{2\pi}{n}$. 对任意 $1 \leq s, t \leq n$, 取 $a_{st} = \sin(s+t)\theta$, 令矩阵 $A = (a_{st})_{n\times n}$, 计算 $E + A^{2023}$ 的行列式, 其中 E 为 n 阶单位矩阵.

证明. 1) 显见, A 为实对称矩阵, 可以对角化. 对 $n \geqslant 3$ 且 $n \neq 4$ 时 $a_{11} = \sin\frac{4\pi}{n} \neq 0$ 恒成立, 而当 $n = 4$ 时有 $a_{12} = \sin\frac{3\pi}{2} \neq 0$, 所以 $A \neq 0$.

…………………………………………………………………………(2 分)

2) 断言: A 的最小多项式为 $x^3 - \frac{n^2}{4}x$. 事实上, 对任意 $1 \leq s, t \leq n$,

$$\sin(s+t)\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i(s+t)\theta} - e^{-i(s+t)\theta}\right).$$

令

$$v = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{i2\theta} \\ \vdots \\ e^{in\theta} \end{pmatrix},$$

则容易得到

$$A = \frac{1}{2i}(vv^t - \overline{vv^t}) = \frac{1}{2i}(vv^t - \overline{v}v^*),$$

其中 $v^* = \overline{v}^t$. 注意到

$$v^t v = e^{2i\theta} + e^{2i2\theta} + \cdots + e^{2in\theta} = e^{2i\theta} \cdot \frac{1 - e^{2in\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = 0,$$

和

$$v^* v = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

故有

$$A^2 = -\frac{1}{4}\left[(vv^t - \overline{v}v^*)(vv^t - \overline{v}v^*)\right] = \frac{n}{4}(vv^* + \overline{v}v^t).$$

所以

$$A^3 = A^2 A = \frac{n}{4}[(vv^* + \overline{v}v^t)(vv^t - \overline{v}v^*)] \cdot \frac{1}{2i} = \frac{n^2}{4}A.$$

由此得 A 的一个零化多项式为 $x^3 - \frac{n^2}{4}x$.

由

$$x^3 - \frac{n^2}{4}x = x\left(x + \frac{n}{2}\right)\left(x - \frac{n}{2}\right)$$

可知 A 的最小多项式 $\varphi(x)$ 只可能是下列 7 个多项式之一:

$$x,\ x+\frac{n}{2},\ x-\frac{n}{2},\ x\left(x+\frac{n}{2}\right),\ x\left(x-\frac{n}{2}\right),\ \left(x+\frac{n}{2}\right)\left(x-\frac{n}{2}\right),\ x^3-\frac{n^2}{4}x.$$

显然, $\varphi(x)$ 不可能为一次多项式, 因为 $x,\ x+\frac{n}{2},\ x-\frac{n}{2}$ 均不能零化 A (关于 x, 由 $A\neq 0$ 知 x 不能零化 A; 对 $x+\frac{n}{2}$ 和 $x-\frac{n}{2}$, 考察 $A\pm\frac{n}{2}E$ 的 $(1,1)$ 位置元素, 由 $\frac{n}{2}>1$ 直接知 $A\pm\frac{n}{2}E$ 的 $(1,1)$ 位置元素不可能为 0).
其次, $\varphi(x)$ 也不可能为二次多项式. 我们先考察多项式 $x(x+\frac{n}{2})$, 看 $A(A+\frac{n}{2}E)$ 的 (n,n) 位置元素. A^2 的 (n,n) 位置元素为

$$\frac{n}{4}(e^{in\theta}\cdot e^{-in\theta}+e^{-in\theta}\cdot e^{in\theta})=\frac{n}{2},$$

A 的 (n,n) 位置元素为

$$\sin 2n\frac{2\pi}{n}=0,$$

从而 $\frac{n}{2}A$ 的 (n,n) 位置元素也为 0, 这便得到 $A(A+\frac{n}{2}E)$ 的 (n,n) 位置元素为 $\frac{n}{2}\neq 0$. 故 $x(x+\frac{n}{2})$ 不能充当 $\varphi(x)$.
同理可知, $x(x-\frac{n}{2})$ 和 $x^2-(\frac{n}{2})^2$ 也不能充当 $\varphi(x)$. 至此我们得到 A 的最小多项式 $\varphi(x)$ 为 $x^3-\frac{n^2}{4}x$. 断言真.

…………………………………………………………………(10 分)

3) 由于 $x^3-\frac{n^2}{4}x=x(x+\frac{n}{2})(x-\frac{n}{2})$ 是 A 的最小多项式, 得到 A 的互不相同的特征值为 $0,\frac{n}{2}$ 和 $-\frac{n}{2}$. 再由

$$A=\frac{1}{2i}(vv^t-\overline{v}v^*)$$

可知 $\mathrm{rankA}\leqslant\mathrm{rank}(vv^t)+\mathrm{rank}(\overline{v}v^*)\leq 2$, 因此 A 至多有两个非 0 特征值. 故 A 的 n 个特征值为

$$\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2},\frac{n}{2},-\frac{n}{2},$$

所以 $E+A^{2023}$ 的 n 个特征值为

$$\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2},1+\left(\frac{n}{2}\right)^{2023},1-\left(\frac{n}{2}\right)^{2023}.$$

由此得到

$$|E+A^{2023}|=\left(1+\left(\frac{n}{2}\right)^{2023}\right)\left(1-\left(\frac{n}{2}\right)^{2023}\right)=1-\left(\frac{n}{2}\right)^{4046}.$$

…………………………………………………………………(15 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空有界, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}$ 非零. 用 $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in E} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 表示 E 的直径, 记 $E+\mathbf{c} = \{\mathbf{x}+\mathbf{c} | \mathbf{x} \in E\}$. 证明: $\operatorname{diam} E < \operatorname{diam}\big(E \cup (E+\mathbf{c})\big)$.

证明. (为简单起见, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\mathbf{x}$, 简记 $\|\mathbf{x}\|$ 为 $|\mathbf{x}|$.)

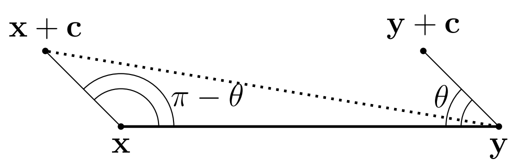
记 $\rho = \operatorname{diam} E$. 若 $\rho = 0$, 即 E 为单点集, 结论显然成立.

下设 $\rho > 0$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\varepsilon < \rho$ 且 $\varepsilon < \frac{|\mathbf{c}|^2}{4\rho}$.

可取到 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ 使得 $a = |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geqslant \rho - \varepsilon$.

. . . . (5 分)

记 $\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{c}\rangle}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{c}|}$.



若 $\cos\theta \geqslant 0$, 则

$$|(\mathbf{x}+\mathbf{c})-\mathbf{y}| = \sqrt{a^2+|\mathbf{c}|^2+2a|\mathbf{c}|\cos\theta} \geqslant \sqrt{a^2+|\mathbf{c}|^2}$$

$$\geqslant \sqrt{(\rho-\varepsilon)^2+|\mathbf{c}|^2} = \sqrt{\rho^2-2\rho\varepsilon+\varepsilon^2+|\mathbf{c}|^2} > \sqrt{\rho^2+\frac{|\mathbf{c}|^2}{2}} > \rho.$$

由此即得 $\operatorname{diam} E < \operatorname{diam}\big(E \cup (E+\mathbf{c})\big)$.

同理, 若 $\cos\theta < 0$, 则

$$|(\mathbf{y}+\mathbf{c})-\mathbf{x}| > \rho.$$

同样得到结论.

. . . . (15 分)

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $a=\sqrt[3]{3}$, $x_1=a$, $x_{n+1}=a^{x_n}$ $(n=1,2,\ldots)$. 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在，但不是 3.

证明. 易证数列单调上升，有上界 3, 从而数列极限存在.

具体地, 由于 $a=x_1=\sqrt[3]{3}>1$, $x_2=a^{x_1}>a=x_1$. 一般地, 归纳可得 $x_{n+1}=a^{x_n}>a^{x_{n-1}}=x_n$ $(n\geqslant 2)$.

另一方面, 注意到 $a^3=3$, 归纳可得 $x_n\leqslant 3\,(n\geqslant 1)$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(5 分)

下证 $\{x_n\}$ 的极限不为 3.

法 I. 我们来归纳地证明 $1<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<\frac{5}{2}$.

具体地, $1<x_1=\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\frac{24}{8}}<\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\frac{5}{2}$.

假设对某个 $n\geqslant 1$, $1<x_n<\frac{5}{2}$ 成立, 那么

$$x_{n+1}=a^{x_n}<\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{5}{2}}=\sqrt[6]{243}$$

而另一方面

$$(\frac{5}{2})^6=(\frac{25}{4})^3=(6+\frac{1}{4})^3$$

$$=216+3\cdot 6^2\frac{1}{4}+\cdots=243+\cdots>243$$

其中 $\cdots$ 显然是为正数，故得证 $\sqrt[6]{243}<\frac{5}{2}$.

由于所有的项 x_n都不超过 $\frac{5}{2}$, 所以数列的极限不可能为 3.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(20 分)

法 II. 我们来找 $\{x_n\}$ 的上界 L. 为此, 我们需要关系式 $3^{\frac{L}{3}}\leqslant L$. 即 $3^{\frac{1}{3}}\leqslant L^{\frac{1}{L}}$. 考虑 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$. 我们有

$$f'(x)=x^x\big(\ln x-1\big),\qquad x>0.$$

可见 f 在 $(0,e]$ 上严格单减, 在 $[e,+\infty)$ 上严格单增. 我们来归纳地证明 $x_n<e$.

易见 $x_1=3^{\frac{1}{3}}<e^{\frac{1}{e}}<e$.

若对某个 $n\geqslant 1$, $x_n<e$, 则 $x_{n+1}=3^{\frac{x_n}{3}}<e^{\frac{x_n}{e}}<e$.

因此, e 是$\{x_n\}$ 的上界. 即数列 $\{x_n\}$ 的极限不可能为 3.

法 III. 设 $\{x_n\}$ 的极限为 L. 考察前面关于 $\{x_n\}$ 单调有界性的证明, 事实上可以得到数列 $\{x_n\}$ 严格单增, 进而 $x_n<L\,(\forall n\geqslant 1)$. 记 $f(x)=a^x$, 则 $f'(3)=a^3\ln a=\ln 3>1$.

若 $L=3$, 由 f 的连续可导性, 有 $\delta>0$ 使得当 $x\in(3-\delta,3+\delta)$ 时, $f'(x)>1$. 我们有 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时, $3-\delta<x_n<3$. 此时, 由中值定理, 有 $\xi_n\in(x_n,L)$, 使得

$$|x_{n+1}-3|=f(3)-f(x_n)=f'(\xi_n)(3-x_n)\geqslant 3-x_n,\qquad n\geqslant N.$$

特别, 归纳可得

$$|x_n-3|\geqslant 3-x_N>0,\qquad \forall\, n\geqslant N.$$

与 $\{x_n\}$ 收敛于 3 矛盾. 因此, $\{x_n\}$ 的极限不可能是 3.

.... (20 分)