2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛

（非数学专业）试题

一、计算下列各题（共 20 分，每小题各 5 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\dfrac{k}{n})\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$.

(2) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$的上侧，$a$为大于 0 的常数.

(3) 现要设计一个容积为V的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积a元, 而侧面的材料费为单位面积b元. 试给出最节省的设计方案: 即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少?

(4) 已知$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$内满足$f'(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求$f(x)$.

二、(共 10 分，第（1）小题 4 分，第（2）小题 6 分）求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[(1+\dfrac{1}{n})^n-e\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n$，其中$a>0,b>0,c>0$.

三、(10 分) 设$f(x)$在$x=1$点附近有定义, 且在$x=1$点可导, 并已知$f(1)=0,f'(1)=2$.

求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$.

四、(10 分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，并且无穷积分$\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛. 求

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

五、(共 12 分) 设函数$f\left(x\right)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0,f(\dfrac{1}{2})=1$.

证明：(1) 存在一个$\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$;

(2) 存在一个$\eta \in (0,\xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

六、(14 分) 设$n>1$为整数，$F(x)=\int_0^x e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!})\,\mathrm{d}t$. 证明：方程$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},n\right)$内至少有一个根.

七、(12 分) 是否存在$\mathbb{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$？ 若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

八、(12 分)设$f(x)$在$[0,\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,\infty)$，当自然数$n\to\infty$时$f(x+n)\to 0$. 证明函数序列$\{f(x+n): n=1,2,\dots\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0.