第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 A 卷》试题

一、(15 分) 设不全为零的$a,b,c\in\mathbb{R}$，求直线$\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$绕$z$轴旋转所得的旋转曲面方程.

二、(15 分) 设$B\subset R^n(n\geq 2)$是单位开球，函数u,v在$\bar{B}$上连续，在B内二阶连续可导，满足

$$\begin{cases}-\Delta u-\left(1-u^2-v^2\right)u=0, & x\in B\\ -\Delta v-\left(1-u^2-v^2\right)v=0, & x\in B\\ u(x)=v(x)=0, & x\in\partial B\end{cases}$$

其中，$x=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$，$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$，$\partial B$表示$B$的边界. 证明：$u^2(x)+v^2(x)\leq 1(\forall x\in\bar{B})$.

三、(15 分) 设$f(x)=x^{2021}+a_{2020}x^{2020}+a_{2019}x^{2019}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$为整系数多项式，$a_0\neq 0$. 设对任意$0\leq k\leq 2020$有$\left|a_k\right|\leq 40$，证明：$f(x)=0$的根不可能全为实数.

四、(20 分) 设P为对称酉矩阵，证明：存在可逆复矩阵Q使得$P=\bar{Q}Q^{-1}$.

五、(15 分) 设$\alpha>1$，证明：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

(2) 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^3\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\sin x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

六、(20 分) 设f,g为$\mathbb{R}$上的非负连续可微函数，满足：$\forall x\in\mathbb{R}$，成立

$$f'(x)\geq 6+f(x)-f^2(x),\ g'(x)\leq 6+g(x)-g^2(x).$$

证明：(1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$以及$x\in\mathbb{R}$，存在$\xi\in(-\infty,x)$使得$f(\xi)\geq 3-\varepsilon$.

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$，成立$f(x)\geq 3$.

(3) $\forall x\in\mathbb{R}$，存在$\eta\in(-\infty,x)$使得$g(\eta)\leq 3$.

(4) $\forall x\in\mathbb{R}$，成立$g(x)\leq 3$.