2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、简答下列各题(本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1． 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

【**参考答案**】：因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$，而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!)\le\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

2． 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

【**参考答案**】：过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$，
即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+2\lambda+3\mu=0.$
若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为 $3x+4y-z+1=0.$
若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则 $3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+1(3\lambda+4\mu)=0.$ 解得 $\lambda=-3\mu$，
从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0.$

3． 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

【**参考答案**】：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right],\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right],$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若是上式等于 0，只有 $(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$，由此可得 $a=b=1$.

4． 设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L(x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

【**参考答案**】：由 $\frac{\partial[(x+2y)u]}{\partial y}=\frac{\partial[u(x+u^3)]}{\partial x}$，得

$$\left(x+4u^{3}\right)u'=u\text{，即}\frac{dx}{du}-\frac{1}{u}x=4u^{2}\text{，}$$

这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^{2}e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^{2}+C\right)$$

由$u(2)=1$得$C=0$，所以$u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$.

5．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_{x}^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t.$

【**参考答案**】：因为当$x>1$时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_{x}^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\le\sqrt[3]{x}\int_{x}^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\left(x\to+\infty\right)$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_{x}^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0.$

第二题：(10 分)计算 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x.$

【**参考答案**】：由于

$$\int_{0}^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}\left(1+e^{2\pi}\right)$$

所以有$\displaystyle\int_{0}^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}$

当$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时，$\displaystyle\int_{0}^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx\le\int_{0}^{x}e^{-2x}|\sin x|dx\le\int_{0}^{(n+1)\pi}e^{-2x}|\sin x|dx$

当$n\to\infty$，由两边夹法则，得$\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-2x}|\sin x|dx=\lim_{x\to\infty}\int_{0}^{x}e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$

【**注**】如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_{0}^{\infty}e^{-2x}|\sin x|dx=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

需要先说明$\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-2x}|\sin x|dx$收敛。

第三题：(10 分)求方程 $x^{2}\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ **的近似解，精确到0.001.**

【**参考解答**】：由泰勒公式$\sin t=t-\dfrac{\sin(\theta t)}{2}t^{2}\left(0<\theta<1\right)$。令$t=\dfrac{1}{x}$得

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\dfrac{\theta}{x}\right)}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{2},$$

代入原方程，得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501\text{即}x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)。$$

由此知 $x>500, 0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$，所以有 $|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\le\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$，即当 $x=501$ 即为满足题设条件的解。

第四题：(12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

【**参考答案**】：$y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$。令 $Y=0$，$X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$，由此得 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}\right]=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)+o(1)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

第五题：(12 分) 求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x\le C.$$

【**参考答案**】：由于 $\int_0^1\left|f\left(\sqrt{x}\right)\right|dx=\int_0^1|f(t)|2tdt\le 2\int_0^1|f(t)|dt=2$，取 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则有

$$\int_0^1|f_n(x)|dx=\int_0^1 f_n(x)dx=1$$

而 $\int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^1 tf_n(t)dt=2\frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2(n\to\infty)$。因此最小的实数为 $C=2$。

第六题：(12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0$. Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，

求 $F'(t)$.

【**解法一**】：即 $g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\le g$。在曲线 $S:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x,y,z)，则圆雕到点的射线和 z 轴的夹角为

$$\theta_t=\arccos\frac{z}{t}=\arccos\frac{g}{t}。$$

取 $\Delta t>0$，则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$。对于固定的 $t>0$，考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分。原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴的夹角在 $\theta_t,\theta_{t+\Delta t}$ 之间。用球坐标计算积分，由积分的连续性可知，存在 $\alpha=\alpha(\Delta t)$，$\theta_{t+\Delta t}\le\alpha\le\theta_t$ 使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}d\theta\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\sin\theta dr$$

即 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2dr$. 当 $\Delta t\to 0^+$,

$$\cos\alpha\to\cos\theta_t=\frac{g(t)}{t},\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2dr\to t^2f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2f(t^2)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf(t^2).$$

当 $\Delta t<0$，考虑 $F(t+\Delta t)-F(t)$ 可得到同样的左导数，因此

$$F'(t)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf(t^2).$$

【**解法二**】：令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$，则区域 Ω 表示为

$$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le a,r^2\le z\le\sqrt{t^2-r^2},$$

其中 a 满足 $a^2+a^4=t^2,a=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)dz=2\pi\int_0^a\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)dz\right]rdr$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left[a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f(a^2+z^2)dz\frac{da}{dt}+\int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right]$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2}=a^2$，第一个积分为 0，所以有

$$F'(t)=2\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=-\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{d\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以 $F'(t)=\pi tf(t^2)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$.

第七题：(14 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【**参考证明**】: **(1)**设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\geq N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\geq N$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$，有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。