第十二届全国大学生数学竞赛初赛

《非数学类》试题

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$__________.

2、设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$__________.

3、设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为__________.

4、已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$__________.

5、设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U, f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$__________.

二、(10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n\geq 1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

四、(12 分) 已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二阶可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

五、(12 分) 计算 $I=\oint\limits_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

六、(12 分) 证明 $f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$ 等于 n 的所有因子（包 1 和 n 本身）之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

七、(14 分) 设 $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}\quad(n\geq 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p\geq 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.