

2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛 《非数学专业》参考答案

一、填空题：

1、【参考答案】： $y - 3z = 0$.

【思路一】：取 $x = 0$ ，则有 $\begin{cases} y^2 - 4z^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ ，解该方程组，得 $5z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ ，代入第二个方程，得 $y^2 + \frac{2}{5} = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{18}{5}} = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ ，于是取点为 $\left(0, \sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ 为交线上的点，且与直线垂直，直线的参数方程可以记成 $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -3t \end{cases}$ ，所以直线的方向向量可以取为 $\vec{s} = (0, 1, -3)$ ，从而由直线的点法式方程，可得平面方程为

$$y - 3\sqrt{\frac{2}{5}} - 3\left(z - \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 0 \Rightarrow y - 3z - 3\sqrt{\frac{2}{5}} + 3\sqrt{\frac{2}{5}} = 0 \Rightarrow y - 3z = 0.$$

【思路二】：在 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - 2z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ 中消去 z ，得

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - 2(4 - x^2 - y^2) = 1, \text{ 即 } 9x^2 + 10y^2 = 36$$

直线 $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s} = (1, 0, 0) \times (0, 3, 1) = (0, -1, 3)$ ，并且所求平面方程与直线垂直，所以所求平面的一个法向量为 $\vec{n} = (0, -1, 3)$ ，交线上其中一点为 $(2, 0, 0)$ ，因此所求平面方程为 $y - 3z = 0$.

2、【参考答案】 $f(x, y) = e^{-x} \sin y$

【思路一】因为 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$ ，所以两边积分，其中 y 为常数，并且根据结论

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{-x},$$

所以函数 $f(x, y)$ 的结构为 $f(x, y) = C(y)e^{-x} + g(y)$. 由于不需要取到所有的原函数和 $C(y)$ 的任意性，尝试取 $g(y) = 0$ ，即取 $f(x, y) = C(y)e^{-x}$. 这样只要 $C(y)$ 取值得当，同样可以满足

$$f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ 即 } f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

于是由第二个条件

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(0, y+1/n)}{f(0, y)} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C(y+1/n)}{C(y)} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{C(y+1/n) - C(y)}{C(y)} \right)^n \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{C(y+1/n) - C(y)}{C(y)} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{C(y+1/n) - C(y)}{C(y)}} \\
 &= e^{\frac{1}{C(y)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(y+1/n) - C(y)}{\frac{1}{n}}} \\
 &= e^{\frac{1}{C(y)} \cdot C'(y)} = e^{\cot y} \Rightarrow \frac{C'(y)}{C(y)} = \frac{\cos y}{\sin y} \Rightarrow C(y) = C_1 \sin y.
 \end{aligned}$$

所以有 $f(x, y) = C_1 \sin y e^{-x}$, 从而由 $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 即 $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = C_1 = 1$, 即函数

$$f(x, y) = \sin y e^{-x}$$

即为满足条件的函数.

【思路二】 利用偏导数的定义, 得

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(0, y+1/n)}{f(0, y)} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f(0, y+1/n) - f(0, y)}{f(0, y)} \right)^n \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0, y+1/n) - f(0, y)}{\frac{1}{n} f(0, y)}} = e^{\frac{f_y(0, y)}{f(0, y)}}
 \end{aligned}$$

所给等式化为 $e^{\frac{f_y(0, y)}{f(0, y)}} = e^{\cot y}$, 即 $\frac{f_y(0, y)}{f(0, y)} = \cot y$. 对 y 积分得 $\ln f(0, y) = \ln \sin y + \ln C$, 即

$$f(0, y) = C \sin y.$$

又 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$, 解得 $f(x, y) = \varphi e^{-x}$ ($\varphi(y)$ 为待定函数), 又 $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 得 $\varphi(y) = \sin y$, 所

以 $f(x, y) = e^{-x} \sin y$.

3、【参考答案】 n . 由于进行初等变换矩阵的秩不变, 所以

$$\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -b^T A^{-1} b \end{pmatrix}$$

由于 A 为 n 阶可逆反对称矩阵, 所以 A^{-1} 也是反对称矩阵, 于是有 $b^T A^{-1} b = 0$. 因此

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -b^T A^{-1} b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = n$ ，所以 $\text{rank}(B) = n$ 。

4、【参考答案】18.

对求和式进行放大处理，得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=2}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=2}^{100} \int_{n-1}^n n^{-\frac{1}{2}} dx \\ &< 1 + \sum_{n=2}^{100} \int_{n-1}^n x^{-\frac{1}{2}} dx = 1 + \int_1^{100} x^{-\frac{1}{2}} dx = 19 \end{aligned}$$

又对其进行缩小处理，可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=1}^{100} \int_n^{n+1} n^{-\frac{1}{2}} dx > \sum_{n=1}^{100} \int_n^{n+1} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_1^{101} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2(\sqrt{101} - 1) \approx 18.1 \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 18.

5、【参考答案】 $\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$.

在曲线 L_1 上取点 $P(x, y)$ ，则该点为旋转轴 L_2 的距离为 $d = \frac{1}{5}(x^3 + 2x)$ ，从而可得旋转曲面的面积微元可取为 $dA = 2\pi d ds$ ，其中弧微分为

$$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \sqrt{1 + (x^2 + 2)^2} dx$$

所以 $dA = \frac{2}{5}\pi \sqrt{1 + (x^2 + 2)^2} (x^3 + 2x) dx$ ，于是旋转曲面的面积为

$$A = \int_0^1 dA = \frac{2}{5}\pi \int_0^1 \sqrt{1 + (x^2 + 2)^2} (x^3 + 2x) dx$$

令 $x^2 + 2 = t$ ，得

$$A = \frac{\pi}{5} \int_2^3 t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{15} \left(1 + t^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3 = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$$

第二题：【参考证明】：设 $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ，则

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} = \frac{2(x^3 \cos x - \sin^3 x)}{x^3 \sin^3 x} \quad (1)$$

令 $\varphi(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\cos^{4/3} x + \frac{1}{3} \cos^{-2/3} x \sin^2 x}{\cos^{2/3} x} - 1 \\ &= \frac{2}{3} \cos^{2/3} x + \frac{1}{3} \cos^{-4/3} x - 1\end{aligned}$$

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cos^{2/3} x + \frac{1}{3} \cos^{-4/3} x &= \frac{1}{3} \left(\cos^{2/3} x + \cos^{2/3} x + \cos^{-4/3} x \right) \\ &> \sqrt[3]{\cos^{2/3} x \cdot \cos^{2/3} x \cdot \cos^{-4/3} x} = 1\end{aligned}$$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 从而 $\varphi(x)$ 单调增加. 又 $\varphi(0) = 0$, 因此 $\varphi(x) > 0$, 即

$$x^3 \cos x - \sin^3 x < 0.$$

因此由(1)可得 $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \frac{4}{\pi^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\tan x + x}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x \tan^2 x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\tan x - x}{x^3} \right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{2}{3}$.

第三题: 【参考证明】: 由条件 $0 \leq f(x) \leq 1$, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t) dt \\ &\leq \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x}\end{aligned}$$

由柯西不等式: $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$, 等号当 a_i 与 b_i 成比例时成立. 于是有

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} &= 1 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(x+27)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}(13-x)} \\ &\leq \sqrt{1+2+\frac{2}{3}} \sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)} = 11.\end{aligned}$$

且等号成立的充分必要条件是

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x+27} = \frac{3}{2}\sqrt{13-x}, \text{ 即 } x = 9.$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t) dt \leq 11$$

特别当 $x = 9$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t) dt \\ &= \int_0^3 f(t) dt + \int_0^6 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt \end{aligned}$$

根据周期性以及 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 有

$$\int_0^3 f(t) dt + \int_0^6 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt = 11 \int_0^1 f(t) dt = 11.$$

所以取等号的充分必要条件是 $x = 9$.

第四题：【参考解答】 记球面为 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$,

则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$, 考虑区间积分等式:

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \oiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS \quad (1)$$

对两边都利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS &= \oiint_{\Sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dV \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS \\ &= \oiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= 2 \iiint_{\Omega} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dV + \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dV \quad (3) \end{aligned}$$

将(2)(3)代入(1)并整理得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[1 - (x^2 + y^2 + z^2) \right] \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r^3 \, dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

第五题：【参考证明】：由 $AB = A + B \Rightarrow (A - E)(B - E) = E$ ，则

$$(A - E)(B - E) = (B - E)(A - E);$$

化简后可得 $AB = BA$ 。

(1)若 B 可逆，则由 $AB = BA$ 可得 $B^{-1}A = AB^{-1}$ ，从而 $(B^{-1}A)^k = (B^{-1})^k A^k = O$ ，所以 $B^{-1}A$ 的特征值全部为 0，则 $E + 2017B^{-1}A$ 的特征值全为 1，因此 $|E + 2017B^{-1}A| = 1$ ，所以

$$|B + 2017A| = |B| |E + 2017B^{-1}A| = |B|.$$

(2)若 B 不可逆，则存在无穷多个数 t ，使得 $B_t = tE + B$ 可逆，且有 $AB_t = B_tA$ 。利用(1)的结论，有恒等式

$$|B_t + 2017A| = |B_t|,$$

取 $t = 0$ ，则有 $|B + 2017A| = |B|$ 。

第六题：【参考解答】(1)利用不等式：当 $x > 0$ 时， $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ，有

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \leq \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n-1}} = 0 \\ a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \ln \frac{k}{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k-1} \right) \right) \geq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) = \frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

(2)显然，以 a_n 为部分和的级数为 $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) \right)$ ，则该级数收敛于 C ，且 $a_n - C > 0$ ，记余项为 r_n ，则有

$$\begin{aligned} a_n - C = -r_n &= -\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1) \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{k-1} \right) - \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

根据泰勒公式, 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, 所以

$$a_n - C > \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{k} \right)$$

记 $b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{k} \right)$, 下面证明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. 因为

$$\begin{aligned} c_n &\triangleq n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2(k-1)(k-2)} \right) < nb_n \\ &< n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

而当 $n \rightarrow \infty$ 时, $c_n = \frac{n-2}{2(n-1)} \rightarrow \frac{1}{2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = \frac{1}{2}$. 根据比较判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发

散. 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - C)$ 发散.