第十一届全国大学生数学竞赛决赛试题及参考解答

(数学类高年级组)

(第一至第四大题是必答题，再从第五至第十大项中任选 3 题)

一、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

1、$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=n}^{3n-1}k\right)^{\frac{1}{2n}}\sin\dfrac{1}{n}=$________.

【答案】：$\dfrac{3\sqrt{3}}{e}$

2、已知 f 在区间 $(-1,3)$ 内有二阶连续导数， $f(0)=12, f(2)=2f'(2)+8$ ，则 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}\,x=$________.

【答案】：1

3、在三维空间的直角坐标系中，方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2xz=1$ 表示的二次曲面类型是________________.

【答案】：椭圆柱面

4、在矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A=U\Lambda V$ 中(其中 U,V 为正交方阵，Λ 为对角阵)，$\Lambda=$____________________.

【答案】：$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S: x^2-y^2+z^2=1$.

1、证明：S 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线；

2、设 S 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1,1,1)$ 与 $M_2(2,2,1)$ 两点，求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

【参考解答】：1、将曲面方程改写为 $x^2-y^2=1-z^2$，从而有

$$(x+y)(x-y)=(1+z)(1-z) \tag{1}$$

现在引进不全为零的参数 λ,μ 以及不全为零的参数 u,v，得两族直母线方程为

$$\begin{cases}\lambda(x+y)=\mu(1+z)\\ \mu(x-y)=\lambda(1-z)\end{cases} \tag{2}$$

以及

$$\begin{cases}u(x+y)=v(1-z)\\ v(x-y)=u(1+z)\end{cases} \tag{3}$$

以第一族直母线（2）为例证明两条不同直母线是异面直线，取（2）中两条直母线 L_1 与 L_2

$$L_1:\begin{cases}\lambda_1(x+y)=\mu_1(1+z)\\ \mu_1(x-y)=\lambda_1(1-z)\end{cases}\tag{4}$$

以及

$$L_2:\begin{cases}\lambda_2(x+y)=\mu_2(1+z)\\ \mu_2(x-y)=\lambda_2(1-z)\end{cases}\tag{5}$$

其中，$\lambda_1\mu_2\neq\lambda_2\mu_1$. 考虑线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_1x+\lambda_1y-\mu_1z-\mu_1=0\\ \mu_1x-\mu_1y+\lambda_1z-\lambda_1=0\\ \lambda_2x+\lambda_2y-\mu_2z-\mu_2=0\\ \mu_2x-\mu_2y+\lambda_2z-\lambda_2=0\end{cases}\tag{6}$$

设（6）的系数矩阵为A，计算可得

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_1 & -\mu_1 & -\mu_1\\ \mu_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & -\lambda_1\\ \lambda_2 & \lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_2\\ \mu_2 & -\mu_2 & \lambda_2 & -\lambda_2\end{vmatrix}=4\left(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2\right)^2\neq 0,$$

所以L_1与L_2为异面直线. 对于第二族直母线（3），设两条直母线L_1', L_2'

$$L_1':\begin{cases}u_1(x+y)=v_1(1-z)\\ v_1(x-y)=u_1(1+z)\end{cases}\tag{7}$$

以及

$$L_2':\begin{cases}u_2(x+y)=v_2(1-z)\\ v_2(x-y)=u_2(1+z)\end{cases}\tag{8}$$

其中$u_1v_2\neq u_2v_1$. 考虑方程组

$$\begin{cases}u_1x+u_1y+v_1z-v_1=0\\ v_1x-v_1y-u_1z-u_1=0\\ u_2x+u_2y+v_2z-v_2=0\\ v_2x-v_2y-u_2z-u_2=0\end{cases}\tag{9}$$

设方程组（9）的系数矩阵为B，经计算得到

$$\det(B)=\begin{vmatrix}u_1 & u_1 & v_1 & -v_1\\ v_1 & -v_1 & -u_1 & -u_1\\ u_2 & u_2 & v_2 & -v_2\\ v_2 & -v_2 & -u_2 & -u_2\end{vmatrix}=-4\left(u_1v_2-u_2v_1\right)^2\neq 0,$$

所以L_1'与L_2'为异面直线.

2、将$M_1(1,1,1)$点代入（2）中可得$\mu:\lambda=1:1$，得直母线L_3的方程为

$$L_3:\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=1\end{cases}\tag{10}$$

将$M_2(2,2,1)$点代入（2）中可得$\mu:\lambda=2:1$，得到直母线L_4的方程为

$$L_4:\begin{cases}x+y-2z=2\\2x-2y+z=1\end{cases}\tag{11}$$

因为$(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$，取$L_3$的方向$\overrightarrow{n_3}=(0,1,1)$，因为

$$(1,1,-2)\times(2,-2,1)=(-3,-5,-4),$$

取L_4的方向$\overrightarrow{n_4}=(3,5,4)$，$L_3,L_4$的公垂线$L$的方向为

$$\vec{n}=\overrightarrow{n_3}\times\overrightarrow{n_4}=(-1,3,-3)$$

设$M(x,y,z)$为L上的任意一点，则L的方程满足

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{n_3},\vec{n}\right)=0\\\left(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\vec{n}\right)=0\end{cases}\tag{12}$$

其中

$$\left(\overrightarrow{M_1M},\vec{n}_3,\vec{n}\right)=\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\0&1&1\\-1&3&-3\end{vmatrix}=0,$$

$$\left(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\vec{n}\right)=\begin{vmatrix}x-2&y-2&z-1\\3&5&4\\-1&3&-3\end{vmatrix}=0,$$

经化简得到公垂线L的方程$\begin{cases}6x+y-z=6\\27x-5y-14z=30\end{cases}$. L_3,L_4之间的距离满足

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{19}}=\frac{2}{19}\sqrt{19},$$

【注】经计算可得公垂线与两条直母线L_3,L_4的交点分别为

$$\frac{1}{19}(19,-3,-3)\text{和}\frac{1}{19}(17,3,-9)$$

这两点间的距离为$\dfrac{2}{19}\sqrt{19}$. 因此，也可以通过计算两点间的距离得到异面直线之间的距离.

将$M_1(1,1,1),M_2(2,2,1)$分别代入第二族直母线族（3）中可得到同一条直母线$\begin{cases}1-z=0\\x-y=0\end{cases}$，即$M_1,M_2$位于同一条直母线上. 因此，只需考虑$L_3,L_4$的情形.

三、(本题 15 分) 设V是有限维欧氏空间，V_1,V_2是V的非平凡子空间且$V=V_1\oplus V_2$.

设p_1,p_2分别是V到V_1,V_2的正交投影，$\varphi=p_1+p_2$，用$\det\varphi$表示线性变换φ的行列式. 证明：$0<\det\varphi\le 1$且$\det\varphi=1$的充要条件是V_1与V_2正交.

【参考证明】：设$\dim V_1=m,\dim V_2=n,m,n>0$. 分别取$V_1$和$V_2$的各一组标准正交基，它们合起来是$V$的一组基. φ在这组基下的矩阵形如

$$A=\begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix}$$

其中B和C分别是$p_1|_{V_2}:V_2\to V_1$和$p_2|_{V_1}:V_1\to V_2$的矩阵，对于

$$v_1\in V_1\text{和}v_2\in V_2,v_1-p_2v_1\in V_2^{\perp}$$

故$\langle p_2v_1,v_2\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$. 同理$\langle v_1,p_1v_2\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$.

由$\langle p_2v_1,v_2\rangle=\langle v_1,p_1v_2\rangle$，得$C=B^T$. 从而$CB=B^TB$为半正定矩阵，它就是$p_2p_1|_{V_2}:V_2\to V_2$的矩阵.

设λ为$p_2p_1|_{V_2}$的一个特征值，$v_2\in V_2$是相应的特征向量，则$\lambda\ge 0$. 由于$v_2\notin V_1$，则有$\|p_1v_2\|<\|v_2\|$，所以

$$0\le\lambda\|v_2\|^2=\langle p_2p_1v_2,v_2\rangle=\langle p_1v_2,p_1v_2\rangle=\|p_1v_2\|^2<\|v_2\|^2,$$

故$0\le\lambda<1$.

由于φ在V的一组基下的矩阵为A，所以

$$\det\varphi=\det A=\det\begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix}=\det\left(I_n-CB\right)=\prod_{\lambda}(1-\lambda),$$

这里λ取遍矩阵CB的所有特征值(记重数). 由于CB的特征值即$p_2p_1|_{V_2}$的特征值，故对CB的每个特征值λ，有$0\le\lambda<1$，从而$0<\det\varphi\le 1$.

特别地，$\det\varphi=1$当且仅当对CB的每个特征值λ，均有$\lambda=0$，这也等价于

$$CB=B^TB=0\text{，即}B=C=0$$

所以$\det\varphi=1$的充要条件是V_1与V_2正交.

四、(本题 20 分) 1、证明：函数方程$x^3-3x=t$存在三个在闭区间$[-2,2]$上连续，在开区间$(-2,2)$内连续可微的解$x=\varphi_1(t),x=\varphi_2(t),x=\varphi_3(t)$满足：

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad |t|\le 2.$$

2、若f是$[-2,2]$上的连续偶函数，证明：

$$\int_1^2 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x.$$

【参考证明】：1、记$g(x)=x^3-3x$，那么g是奇函数，且$g'(x)=3\left(x^2-1\right)$，于是$g$具有如下性质：

（1）在$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$上严格单调上升，在$[-1,1]$上严格单调下降.

（2）$x=-1$是极大值点，极大值为2；$x=1$是极小值点，极小值为-2.

（3）记$g_1=g\big|_{[-2,-1]}$，$g_2=g\big|_{[-1,1]}$，$g_1=g\big|_{[1,2]}$. 根据以上性质，g_1,g_2,g_3分别在其定义的闭区间上严格单调，且值域均为$[-2,2]$. 因此，依次有反函数$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$，以$[-2,2]$为定义域，依次以$[-2,-1],[-1,1],[1,2]$为值域.

由反函数的连续性得$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$均为$[-2,2]$上的连续函数，而$g_1,g_2,g_3$依次在$(-2,-1),(-1,1),(1,2)$内连续可导，且导数不等于零. 因此，它们的反函数$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$在$(-2,2)$内连续可微. 另一方面，注意到$g$为奇函数以及$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$的值域，$g_1,g_2,g_3$的定义域，有

$$-t=-g_3\left(\varphi_3(t)\right)=-g\left(\varphi_3(t)\right)=g\left(-\varphi_3(t)\right)=g_1\left(-\varphi_3(t)\right),\quad t\in[-2,2],$$

因此$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\quad t\in[-2,2]$. 同理

$$-t=-g_2\left(\varphi_2(t)\right)=-g\left(\varphi_2(t)\right)=g\left(-\varphi_2(t)\right)=g_2\left(-\varphi_2(t)\right),\quad t\in[-2,2],$$

从而$\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad t\in[-2,2]$.

2、根据韦达定理，有$\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)=0,\quad \forall t\in[-2,2]$，从而

$$\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)+\varphi_3'(t)=0,\quad \forall t\in(-2,2),$$

结合f为连续偶函数，得

$$\begin{aligned}
&2\int_1^2 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{-1} f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1} f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_1'(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_2'(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_3'(t)\,\mathrm{d}t=0
\end{aligned}$$

从而结论成立.

五、(本题 10 分) 设$E\subseteq\mathbb{R}$是$\mathcal{L}-$可测集，$\left\{f_n(x)\right\}_{n\geq 1}$是$E$上一致有界可测函数列，若

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\int_E\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m<\infty.$$

则$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(x)=0,\quad \mathcal{L}-a.e.,x\in E$.

【参考证明】: 对$0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$和$N\geq 1$，设

$$A_N(\varepsilon)=\left\{x\in E:\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

由于$\int_E\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(x)\right|^2\mathrm{d}m\geq\varepsilon^2\cdot m\left(A_N(\varepsilon)\right)$，由题设有$\sum\limits_{N=1}^{\infty}\dfrac{m\left(A_N(\varepsilon)\right)}{N}<+\infty$. 设

$$N_1=1,N_{k+1}=\left[\frac{N_k}{1-\varepsilon}\right]+1,\quad \forall k\geq 1 \tag{1}$$

又设m_k是满足$N_k\leq m_k<N_{k+1}$的正整数，且

$$\frac{m\left(A_{m_k}(\varepsilon)\right)}{m_k}=\min_{N_k\leq N<N_{k+1}}\frac{m\left(A_N(\varepsilon)\right)}{N}$$

于是 $\sum\limits_{N_k\leq N<N_{k+1}}\dfrac{m\left(A_N(\varepsilon)\right)}{N}\geq\left(N_{k+1}-N_k\right)\dfrac{m\left(A_{m_k}(\varepsilon)\right)}{m_k}\geq\varepsilon\cdot m\left(A_{m_k}(\varepsilon)\right)$,

从而，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}m\left(A_{m_k}(\varepsilon)\right)<+\infty \tag{2}$$

令 $A(\varepsilon)=\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{m_k}(\varepsilon)=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_{m_k}(\varepsilon)\subset\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_{m_k}(\varepsilon),\forall N\geq 1$.

$$\Rightarrow m(A(\varepsilon))\leq\sum_{k=N}^{\infty}m\left(A_{m_k}(\varepsilon)\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}m(A(\varepsilon))=0\,.$$

即对$\mathcal{L}-$ a.e. $,x\in E$及充分大的k，有

$$\left|\frac{1}{m_k}\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x)\right|<\varepsilon \tag{3}$$

又$\left\{f_n(x)\right\}_{n\geq1}$在$E$上一致有界，即

$$\exists c>0,\forall x\in E,\forall n\geq 1,\left|f_n(x)\right|\leq c.\forall x\in E,N\geq 1\,.$$

设k是唯一满足$N_k\leq N<N_{k+1}$的正整数(其中N_k由（1）确定)，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-\frac{1}{m_k}\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x)\right|\\&=\left|\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x)\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{m_k}\right)\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x)\right|\\&\leq 2c\frac{N_{k+1}-N_k}{N_k}\leq 2c\frac{1}{N_k}\left(\frac{N_k}{1-\varepsilon}+1-N_k\right)=\frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon}+\frac{2c}{N_k}\end{aligned}$$

当N充分大时，当然有k充分大，此时$\dfrac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon}+\dfrac{2c}{N_k}\leq 5c\varepsilon$及（3），即对

$\mathcal{L}-$ a.e. $,x\in E$，有$\left|\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(x)\right|<(1+5c)\varepsilon$，故

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)=0,\quad \mathcal{L}-a.e.,x\in E\,.$$

六、(本题 10 分) 设$f(z)$在$|z|\le R(R>0)$内解析且满足

$$|f(z)|\le M(M>0), f(0)\ne 0.$$

证明：$F(z)$在圆$|z|\le \frac{R}{3}$内零点个数(零点的重数计算在内)不超过

$\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{M}{|f(0)|}$.

【参考证明】: 用$z_i(1\le i\le n)$表示$F(z)$在圆$|z|\le R/3$内的零点，令

$$g(z)=\frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)},$$

则$g(z)$在$|z|\le R$内解析. 因为在$|z|=R$上，对$i=1,2,\cdots,n$都有$\left|\frac{z}{z_i}\right|\ge 3$，

于是在$|z|=R$上，

$$\left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right|\le\frac{M}{\prod_{i=1}^{n}(3-1)}=2^{-n}M$$

从而在$|z|<R$内，有$|g(z)|\le 2^{-n}M$. 特别地$|g(0)|\le 2^{-n}M$. 又
$g(0)=f(0)$，所以$|f(0)|\le 2^{-n}M$，即$2^n|f(0)|\le M$，对上式两边取对数，得

$$n\le\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{M}{|f(0)|}.$$

七、(本题 10 分) 证明：180 阶群不是单群.

【参考证明】: 对于素数p，用$n_p(G)$表示有限群G的 Sylow $p-$子群个数.

反证法：设G为180阶单群，由$180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$和Sylow 定理，有

$$n_3(G)>1, n_3(G)|20，且n_3(G)\equiv 1(\bmod 3)$$

故$n_3(G)=4$或$n_3(G)=10$.

若$n_3(G)=4$，考虑G在它的Sylow $3-$子群集合上的共轭作用，由此得到G到对称群S_4的一个同态，由G为单群知这个同态的核只含有单位元，即此同态为单同态，从而$180=|G|\le|S_4|=24$，矛盾，故$n_3(G)=10$.

断言G的任意两个不同的Sylow $3-$子群的交平凡. 若否，设有G的两个不同的Sylow $3-$子群S,T，使得$D=S\cap T\ne\{e\}$. 由于S和T都是9阶群，它们为交换群，从而D为3阶群且$D\trianglelefteq S,\ T$. 记

$$N=N_G(D)=\left\{g\in G|\, D^g=D\right\}$$

为D在G中的正规化子，则有$S,T\le N$，这样S和T都是群N的Sylow $3-$

子群，从而N的Sylow $3-$子群个数$n_3(N)>1$. 由Sylow定理，$n_3(N)|[N:S]$(这里$[N:S]$表示S在N中的指数)和$n_3(N)\equiv 1(\bmod 3)$，故$n_3(N)\geq 4$且与3互素. 由$n_3(N)\,||\,N|$和$|S|\,||\,N|$，有$|N|\geq 36$，进而$[G:N]\leq 5$. 考虑G在N的左陪集集合上的左乘作用，得到G同构于$S_{[G:N]}$的一个子群，但是

$$|G|=180>5!\geq\left|S_{[G:N]}\right|$$

故矛盾.

下面再看G的Sylow $5-$子群. 由$n_5(G)>1, n_5(G)|36$和$n_5(G)\equiv 1(\bmod 5)$得到$n_5(G)=6$或者$n_5(G)=36$. 由于G的Sylow $5-$子群为5阶群，故G的任两个不同的Sylow $5-$子群的交平凡. 若$n_5(G)=36$，则G的10个Sylow $3-$子群和36个Sylow $5-$子群至少包含$10(9-1)+36(5-1)+1=225>180$个元素，矛盾. 故$n_5(G)=6$.

考虑G在它的6个Sylow $5-$子群集合上的共轭作用. 类似于前面的讨论，得到一个G到对称群S_6的单同态，即G同构于S_6的一个子群. 不妨设$G\leq S_6$，若G中有奇置换，则

$$1<\left[G:G\cap A_6\right]=\left[GA_6:A_6\right]\leq\left[S_6:A_6\right]=2$$

即$G\cap A_6$是G的指数为2的子群，从而$G\cap A_6$是G的非平凡正规子群，与G为单群矛盾，所以$G\leq A_6$. 又由

$$\left[A_6:G\right]=\left|A_6\right|/|G|=360/180=2,$$

得到$G\trianglelefteq A_6$，与A_6为单群矛盾.

八、(本题 10 分) 设$S: r=r(u,v)$为$\mathbb{R}^3$中的光滑曲面，其第一基本形式为$(\mathrm{d}s)^2=E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2$，其中$(u,v)$为曲面$S$的参数

$$r_u=\frac{\partial r}{\partial u}, r_v=\frac{\partial r}{\partial v}, E=r_u\cdot r_u, F=r_u\cdot r_v, G=r_v\cdot r_v.$$

证明：1、存在新的参数(u_1,v_1)，使得S的第一基本形式为

$$(\mathrm{d}s)^2=h\left(u_1,v_1\right)\left[\left(\mathrm{d}u_1\right)^2+\left(\mathrm{d}v_1\right)^2\right],$$

其中$h>0$为光滑函数.

2、如果曲面S 的第一基本形式满足$(\mathrm{d}s)^2=h(u,v)\left[(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2\right]$，则其高斯曲率$K$可以表示为$K=-\dfrac{1}{2h}\Delta\log h$，其中$h>0$为光滑函数，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$表示拉普拉斯算子.

【参考证明】：1、曲面S的第一基本形式满足

$$(\mathrm{d}s)^2=E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2$$
$$=\frac{1}{E}\left[E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+\sqrt{F^2-EG}\mathrm{d}v\right]\left[E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v-\sqrt{F^2-EG}\mathrm{d}v\right]$$

（1）

令$l=EG-F^2$，则有$\sqrt{F^2-EG}=i\sqrt{l},i^2=-1$. 于是

$$E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v\pm\sqrt{F^2-EG}\mathrm{d}v=E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v\pm i\sqrt{l}\mathrm{d}v,$$

由常微分方程理论可知，存在一个非零(复的)积分因子λ，使得

$$\lambda(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+i\sqrt{l}\mathrm{d}v)$$

为某个(复的)函数$\mu=u_1+iv_1$的全微分，即有

$$\lambda(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+i\sqrt{l}\mathrm{d}v)=\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}u_1+i\mathrm{d}v_1 \tag{2}$$

对方程（3）的两边取共轭，得到

$$\bar{\lambda}(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v-i\sqrt{l}\mathrm{d}v)=\overline{\mathrm{d}\mu}=\mathrm{d}u_1-i\mathrm{d}v_1 \tag{3}$$

将(2)，(3)代入(1)，得到

$$(\mathrm{d}s)^2=h\left(u_1,v_1\right)\left[\left(\mathrm{d}u_1\right)^2+\left(\mathrm{d}v_1\right)^2\right] \tag{4}$$

其中，$h\left(u_1,v_1\right)=\dfrac{1}{E\,|\,\lambda\,|^2}$.

另外，令$\lambda=p+iq,p,q$均为实数，由方程(2)得到

$$(p+iq)(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+i\sqrt{l}\mathrm{d}v)=\mathrm{d}u_1+i\mathrm{d}v_1 \tag{5}$$

由方程(5)可得

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_1=p(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v)-q\sqrt{l}\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}v_1=q(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v)+p\sqrt{l}\mathrm{d}v\end{cases} \tag{6}$$

由方程组(6)，该变换的雅可比行列式满足

$$\frac{\partial\left(u_1,v_1\right)}{\partial(u,v)}=\left(p^2+q^2\right)E\sqrt{l}>0.$$

于是(u_1,v_1)是一组新的参数.

2、【思路一】对于曲面

$$S:r=r(u,v),(\mathrm{d}s)^2=h(u,v)\left[(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2\right],$$

注意到$r_u\cdot r_u=E=G=r_v\cdot r_v=h(u,v),F=r_u\cdot r_v=r_v\cdot r_u=0$，于是有

$$r_{uu}\cdot r_v+r_u\cdot r_{uv}=0,r_{uv}\cdot r_v+r_u\cdot r_{vv}=0$$

将r_u,r_v单位化，定义

$$e_1=\frac{r_u}{|r_u|}=\frac{r_u}{\sqrt{E}}=\frac{r_u}{\sqrt{h}},e_2=\frac{r_v}{|r_v|}=\frac{r_v}{\sqrt{G}}=\frac{r_v}{\sqrt{h}},n=r_u\times r_v \tag{7}$$

于是，e_1,e_2,n 构成 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基. 因此 r_{uu},r_{uv},r_{vv} 可由该基表示. 例如，设

$$r_{uu}=ae_1+be_2+cn \tag{8}$$

可以获得

$$a=r_{uu}\cdot e_1=\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u},b=r_{uu}\cdot e_2=-\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v},c=r_{uu}\cdot n=L,$$

即得到

$$r_{uu}=\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}e_1-\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}e_2+Ln \tag{9}$$

类似地，可以求得

$$r_{uv}=\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}e_1+\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}e_2+Mn \tag{10}$$

$$r_{vv}=-\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}e_1+\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}e_2+Nn \tag{11}$$

r_{uu},r_{uv},r_{vv} 在上述标准正交基下的坐标表示为

$$\begin{cases} r_{uu}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{h}}\dfrac{\partial h}{\partial u},-\dfrac{1}{2\sqrt{h}}\dfrac{\partial h}{\partial v},L\right) \\ r_{uv}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{h}}\dfrac{\partial h}{\partial v},\dfrac{1}{2\sqrt{h}}\dfrac{\partial h}{\partial u},M\right) \\ r_{vv}=\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{h}}\dfrac{\partial h}{\partial u},\dfrac{1}{2\sqrt{h}}\dfrac{\partial h}{\partial v},N\right) \end{cases} \tag{12}$$

其中，$M=r_{uv}\cdot n,N=r_{vv}\cdot n$. 注意到 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial h}{\partial u}=r_{vu}\cdot r_v$，得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}=r_{vuu}\cdot r_v+r_{vu}\cdot r_{vu}=\frac{\partial}{\partial v}\left(r_{uu}\cdot r_v\right)-r_{uu}\cdot r_{vv}+r_{vu}\cdot r_{vu} \tag{13}$$

利用(8)-(12)，得到

$$r_{uu}\cdot r_v=-\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\left(r_{uu}\cdot r_v\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial v^2} \tag{14}$$

$$r_{uu}\cdot r_{vv}=-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]+LN,r_{vu}\cdot r_{vu}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]+M^2 \tag{15}$$

将(14)，(15)代入(13)得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}+\frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]+M^2-LN,$$

或者

$$\frac{1}{2}\Delta h=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}=\frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]+M^2-LN \tag{16}$$

注意到

$$\Delta \log h = -\frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{1}{h}\Delta h \tag{17}$$

结合(16)与(17)，由高斯曲率满足的公式，得到

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{2h}\Delta \log h\,.$$

【思路二】当曲面S的第一基本形式满足$(\mathrm{d}s)^2 = E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2$时，可以看出$F = 0$，根据曲率张量的定义可以证明

$$R_{1212} = \sqrt{EG}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}}\right)\right] \tag{18}$$

由(18)以及高斯曲率的定义，得到

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{R_{1212}}{EG - F^2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}}\right)\right] \tag{19}$$

其中$g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$，既然$E = G = h, F = 0,$经计算可得

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}}\right) = \frac{1}{2}\Delta \log h \tag{20}$$

将(20)代入(19)，得到$K = -\dfrac{1}{2h}\Delta \log h$.

九、(本题 10 分) 设$\{X_i\}$是独立随机变量序列.

1、若$\{X_i\}$服从大数定律且满足中心极限定理，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX_i\right)\xrightarrow{P}0\text{和}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - EX_i\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)}}\xrightarrow{D}N(0,1),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right) = 0$.

2、若$\{X_i\}$同分布且满足$\lim\limits_{n\to\infty} nP\left(\left|X_1\right| \geq n\right) = 0$，则$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \mu_n$依概率收敛于0，即$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \mu_n\xrightarrow{P}0$，其中$\mu_n = E\left[X_1 I\left(\left|X_1\right| \leq n\right)\right]$，$I(A)$表示事件$A$的示性函数.

【参考解答】： 1、由于$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - EX_i\right)\xrightarrow{P}0$，所以对任意$\varepsilon > 0$，

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-EX_i\right)\right|\ge\varepsilon\right)\to 0,$$

于是

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-EX_i\right)\right|\ge\varepsilon\right)=1-P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-EX_i\right)\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)}}<\frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)}}\right)\to 0$$

由 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-EX_i\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)}}\xrightarrow{d}N(0,1)$ 得 $\dfrac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)}}\to\infty$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right)=0.$$

2、记 $Y_{ni}=X_iI\left(\left|X_i\right|\le n\right)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ni}-\mu_n\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iI\left(\left|X_i\right|>n\right),$$

对任意 $\varepsilon>0$，

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iI\left(\left|X_i\right|>n\right)\right|\ge\varepsilon\right)\le\sum_{i=1}^{n}P\left(\left|X_i\right|>n\right)=nP\left(\left|X_1\right|>n\right)\to 0,$$

所以 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iI\left(\left|X_i\right|>n\right)\xrightarrow{P}0$. 于是证明 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_n\xrightarrow{P}0$，只需证明

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ni}-\mu_n\right)\right|\ge\varepsilon\right)\to 0.$$

事实上

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ni}-\mu_n\right)\right|\ge\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ni}-EY_{ni}\right)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{\mathrm{Var}\left(Y_{n1}\right)}{n\varepsilon^2}\le\frac{EY_{n1}^2}{n\varepsilon^2}.$$

【方法一】：应用分步积分法，得

$$\begin{aligned}
&\frac{EY_{n1}^2}{n}=\frac{1}{n}E\left[X_1^2 I\left(\left|X_1\right|\le n\right)\right]\\
&=\frac{1}{n}\int_0^n x^2\,\mathrm{d}P\left(\left|X_1\right|\le x\right)=-\frac{1}{n}\int_0^n x^2\,\mathrm{d}P\left(\left|X_1\right|>x\right)\\
&=\frac{2}{n}\int_0^n xP\left(\left|X_1\right|>x\right)\mathrm{d}x-nP\left(\left|X_1\right|>n\right)\\
&=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k xP\left(\left|X_1\right|>x\right)\mathrm{d}x-nP\left(\left|X_1\right|>n\right)\\
&\le\frac{2}{n}\left(1+\sum_{k=2}^n kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)\right)-nP\left(\left|X_1\right|>n\right)
\end{aligned}$$

由于$nP\left(\left|X_1\right|>n\right)\to 0$，所以存在$N$，当$k>N$时，$kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)<\varepsilon$，于是当$n$较大时，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=2}^n kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=2}^N kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)+\sum_{k=N+1}^n kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)\right)<2\varepsilon
\end{aligned}$$

则$\dfrac{EY_{n1}^2}{n}\to 0$，故$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\mu_n\xrightarrow{P}0$.

【方法二】:

$$\frac{EY_{n1}^2}{n}=\frac{1}{n}E\left[X_1^2 I\left(\left|X_1\right|\le n\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E\left[X_1^2 I\left(j-1<\left|X_1\right|\le j\right)\right]$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n j^2 P\left(j-1<\left|X_1\right|\le j\right)=\frac{2}{n}\sum_{j=1}^n P\left(j-1<\left|X_1\right|\le j\right)\int_0^j x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{j=1}^n P\left(j-1<\left|X_1\right|\le j\right)\sum_{k=1}^j\int_{k-1}^k x\,\mathrm{d}x$$

$$\le\frac{2}{n}\sum_{j=1}^n P\left(j-1<\left|X_1\right|\le j\right)\sum_{k=1}^j k=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n k\sum_{j=k}^n P\left(j-1<\left|X_1\right|\leqslant j\right)$$

$$\le\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n kP\left(\left|X_1\right|>k-1\right)\le\frac{2}{n}\left(1+\sum_{k=2}^n kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)\right)$$

由于$nP\left(\left|X_1\right|>n\right)\to 0$，所以存在$N$，当$k>N$时，$kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)<\varepsilon$，于是当$n$较大时，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=2}^n kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=2}^N kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)+\sum_{k=N+1}^n kP\left(\left|X_1\right|>k/2\right)\right)<2\varepsilon
\end{aligned}$$

则$\dfrac{EY_{n1}^2}{n} \to 0$，故$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$.

十、(本题 10 分) 设A是具有正对角元的非奇异对称矩阵. 证明：若求解线性方程组$Ax=b$的 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始值都收敛，则A为正定矩阵.

【参考解答】：线性方程组$Ax=b$的 Gauss-Seidel 迭代格式可写为

$$x_{k+1} = (D-L)^{-1}L^T x_k + (D-L)^{-1} b,$$

其中$A = D - L - L^T$，$D = \operatorname{diag}\left(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\right)$，

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

将 Gauss-Seidel 格式改写为

$$(D-L)x_{k+1} = L^T x_k + b.$$

对任意初始值x_0，$Ax=b$的 Gauss-Seidel 迭代法都收敛，设其解收敛到x^*，记

$$y_k = x_k - x^*,$$

则有$(D-L)y_{k+1} = L^T y_k$. 令$\varepsilon_k = y_k - y_{k+1}$，注意到$(D-L) = A + L^T$，那么

$(D-L)\varepsilon_k = Ay_k$，$Ay_{k+1} = L^T \varepsilon_k$. 于是

$$\begin{aligned} & y_k^T A y_k - y_{k+1}^T A y_{k+1} = y_k^T (D-L)\varepsilon_k - y_{k+1}^T L^T \varepsilon_k \\ = & \varepsilon_k^T D y_k - \varepsilon_k^T L^T y_k - \varepsilon_k^T L y_{k+1} \\ = & \varepsilon_k^T D \varepsilon_k + \varepsilon_k^T (D-L) y_{k+1} - \varepsilon_k^T L^T y_k \end{aligned}$$

又因$(D-L)y_{k+1} = L^T y_k$，所以

$$y_k^T A y_k - y_{k+1}^T A y_{k+1} = \varepsilon_k^T D \varepsilon_k$$

由题设可知D 是正定的，因此

$$y_k^T A y_k > y_{k+1}^T A y_{k+1}, \quad k \ge 0.$$

下面采用反证法证明：若 Gauss-Seidel 迭代收敛，则A正定.

反证法：假设A不正定，不妨设$b=0$. 则可找到一个$x_0 \neq 0$，使得$x_0^T A x_0 < 0$，则$y_0^T A y_0 < 0$. 由 Gauss-Seidel 迭代产生的序列$\left\{y_n\right\}$满足

$$0 > y_0^T A y_0 > y_1^T A y_1 > y_2^T A y_2 > \cdots > y_n^T A y_n > \cdots$$

显然该数列不收敛于0，这与题设矛盾，因此假设不成立，即A正定.