

2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类一、二年级) 试卷

一、填空题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为_____.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和为_____.

(3) 计算 $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS =$ _____.

(4) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 ($n > 1$), $\text{rank}(A) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2, 3, \dots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11} =$ _____.

二、(本题 15 分) 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p . 一族球面中的每个球面都过点 P , 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a . 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C \right\}$, 其中 C 表示复数域. 试证明: $\forall A \in \Gamma$,

A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

四、(本题 20 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 求最大常数 α 满足

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

五、(本题 15 分) $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $\forall t \in R$, 有

$$f(t) > 0, a(t) \geq 1, \int_0^\infty f(t) dt = +\infty.$$

已知 $x(t)$ 满足 $x''(t) + a(t)f(x(t)) \leq 0, \forall t \in R$. 求证: $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有上界.

六、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证:

$$\left[\int_0^1 xf(x) dx \right]^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx,$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x - x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.