

2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学专业) 试卷

一、计算题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$.
- (3) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1 + e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

二、(本题 10 分) 求方程 $(2x + y - 4)dx + (x + y - 1)dy = 0$ 的通解.

三、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

四、(本题 17 分) 设 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 其中 $a > b > c > 0$, $\Sigma_2: z^2 = x^2 + y^2$,

Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

五、(本题 16 分) 已知 Σ 是空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕着 y 旋转而成的椭球面, S 表示曲面

Σ 的上半部分 ($z \geq 0$), Π 是椭球面 S 在 $P(x, y, z)$ 点处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ, μ, ν 表示 S 的外法线的方向余弦.

1) 计算 $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$;

2) 计算 $\iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS$, 其中 Σ 为外侧.

六、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数, 且满足 (1) $f(x) > 0$;

(2) $|f'(x)| \leq m f(x)$, 其中 $0 < m < 1$. 任取 a_0 , 定义 $a_n = \ln f(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots$. 证

明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

七、(本题 15 分) 问: 在区间 $[0, 2]$ 上是否存在连续可微的函数 $f(x)$, 满足

$$f(0) = f(2) = 1, \quad |f'(x)| \leq 1, \quad \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1?$$

请说明理由.