2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（数学类）参考答案

一、(1)【参考证明】：l_1上有点$r_1=(4,3,8)$，方向向量为$v_1=(1,-2,1)$；l_2上有点$r_2=(-1,-1,-1)$，方向向量为$v_2=(7,-6,1)$. 又

$$(r_1-r_2,v_1,v_2)=\begin{vmatrix}5 & 4 & 9\\ 1 & -2 & 1\\ 7 & -6 & 1\end{vmatrix}\neq 0\ ,$$

所以l_1和l_2异面.

(2)【参考解答】：l_1上任一点$P_1=r_1+t_1v_1$与l_2上的任一点$P_2=r_2+t_2v_2$的连线的方向向量为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=r_2-r_1+t_2v_2-t_1v_1=(-5+7t_2-t_1,-4-6t_2+2t_1,-9+t_2-t_1).$$

公垂线的方向向量为

$$v=v_1\times v_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -2 & 1\\ 7 & -6 & 1\end{vmatrix}=(4,6,8).$$

由于$\overrightarrow{P_1P_2}//v$，所以$(-5+7t_2-t_1):(-4-6t_2+2t_1):(-9+t_2-t_1)=4:6:8$，得$t_1=-1,t_2=0$，故$r_2+0v_2=(-1,-1,-1)$在公垂线上，从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+1}{8}.$$

(3) 【参考解答】：$P_1=r_1+t_1v_1$，$P_2=r_2+t_2v_2$的中点为

$$\frac{1}{2}(3+t_1+7t_2,2-2t_1-6t_2,7+t_1+t_2).$$

因此中点的轨迹为一个平面，平面的法向量为$v=v_1\times v_2=(4,6,8)$. 又$\frac{1}{2}(3,2,7)$在平面上，故轨迹的方程为$4x+6y+8z-40=0$.

二、【参考证明】：1) $f(0)^n\le\int_0^1(f(x))^n\,\mathrm{d}x\le f(1)^n$，由连续函数的介值性质得到$x_n$的存在性. 由于$f$是严格单调函数，所以$x_n$是唯一的.

2) 对于任意小的$\varepsilon>0$，由于f的非负性和单调性，

$$(f(x_n))^n\ge\int_{1-\varepsilon}^1(f(1-\varepsilon))^n\,\mathrm{d}x=\varepsilon(f(1-\varepsilon))^n,$$

故$f(x_n)\ge\sqrt[n]{\varepsilon}f(1-\varepsilon)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\inf f(x_n)\ge f(1-\varepsilon)$.

由f的单调性，$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n\ge 1-\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

三、【参考证明】：2) $\Rightarrow$ 1).

考虑方程$\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=0$. 将$a_1,\cdots,a_n$分别代入，得

$$\begin{cases}\lambda_1 f_1\left(a_1\right)+\cdots+\lambda_n f_n\left(a_1\right)=0,\\ \cdots\cdots \\ \lambda_1 f_1\left(a_n\right)+\cdots+\lambda_n f_n\left(a_n\right)=0.\end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为$\left(f_i\left(a_j\right)\right)^T$，因此$\det\left[f_i(a_j)\right]\neq 0$直接知道

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0.$$

1) $\Rightarrow$ 2). 用归纳法. 首先，$n=1$时显然成立;

其次，设$n=k$时结论成立，则$n=k+1$时，由$f_1,\cdots,f_{k+1}$线性无关知，$f_1,\cdots,f_k$线性无关. 因此$\exists a_1,\cdots,a_k\in[0,1]$使得$\det\left[f_i(a_j)\right]_{k\times k}\neq 0$. 观察函数

$$F(x)=\det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x)\\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x)\end{pmatrix}$$

按最后一列展开得$F\left(x\right)=\lambda_1 f_1\left(x\right)+\cdots+\lambda_k f_k\left(x\right)+\lambda_{k+1}f_{k+1}\left(x\right)$，其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}$均为常量. 注意到$\lambda_{k+1}\neq 0$，由$f_1,\cdots,f_{k+1}$线性无关知$F(x)$不恒为0，从而$\exists a_{k+1}\in[0,1]$使得$F\left(a_{k+1}\right)\neq 0$. 亦即$a_1,\cdots,a_{k+1}\in[0,1]$，$\det\left[f_i(a_j)\right]\neq 0$. 证毕.

四、【参考证明】: 由条件知f,f'是单调递增的正函数，因此$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'\left(x\right)$都存在. 根据微分中值定理，对任意的$x$，存在$\theta_x\in(0,1)$使得

$$f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=f'\left(x+\theta_x\right)>f'\left(x\right)>0.$$

上式左边当$x\to-\infty$时极限为0，因而$\lim\limits_{x\to-\infty}f'\left(x\right)=0.$

设$c=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$，则$c>b>0$，且$\dfrac{a}{b-c}=-c$.

于是根据条件有

$$f''\left(x\right)-cf'\left(x\right)\leq\left(b-c\right)f'\left(x\right)+af\left(x\right)=\left(b-c\right)\left(f'\left(x\right)-cf\left(x\right)\right).$$

这说明函数$e^{-(b-c)x}\left(f'\left(x\right)-cf\left(x\right)\right)$是单调递减的. 注意到该函数当$x\to-\infty$时极限为0，因此$f'\left(x\right)-cf\left(x\right)\leq 0$，即$f'\left(x\right)\leq cf\left(x\right)$.

常数 c 是最佳的，这是因为对函数$f\left(x\right)=e^{cx}$有$f''\left(x\right)=af\left(x\right)+bf'\left(x\right)$.

五、【参考证明】: (1) 令$H=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$，则所求的方程变为

$$X^n+X^l=2I+2H+3H^2+\cdots+mH^{m-1}.$$

(2) 考察形如$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$的矩阵$X$，则有

$$X = I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1}.$$

$$\begin{aligned} X^n &= \left(I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1}\right)^n \\ &= I + \left(na_1\right)H + \left(na_2 + f_1\left(a_1\right)\right)H^2 + \cdots + \left(na_m + f_{m-1}\left(a_1, \cdots, a_{m-1}\right)\right)H^{m-1}, \end{aligned}$$

其中$f_1\left(a_1\right)$由a_1确定，…，$f_{m-1}\left(a_1, \cdots, a_{m-1}\right)$由$a_1, \cdots, a_{m-1}$确定.

类似地，有

$$X^l = I + \left(la_1\right)H + \left(la_2 + g_1\left(a_1\right)\right)H^2 + \cdots + \left(la_m + g_{m-1}\left(a_1, \cdots, a_{m-1}\right)\right)H^{m-1}.$$

(3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} \left(n+l\right)a_1 = 2, \\ \left(n+l\right)a_2 + \left(f_1\left(a_1\right) + g_1\left(a_1\right)\right) = 3, \\ \cdots\cdots \\ \left(n+l\right)a_m + \left(f_{m-1}\left(a_1, \cdots, a_{m-1}\right) + g_{m-1}\left(a_1, \cdots, a_{m-1}\right)\right) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解. 命题得证.

六、【参考证明】：由条件可知从某项开始$\left\{a_n\right\}$单调递减. 因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0.$

若$a > 0$，则当n充分大时，$\dfrac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)a_{n+1} = \dfrac{\lambda a}{2} > 0.$

因为$\sum\limits_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{n+1}\right)$也发散. 但此级数显然收敛到$a_1 - a$. 这是矛盾！所以应有$a = 0$.

令$b_n = n^k a_n$，则有

$$n^\alpha\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k\left[n^\alpha\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - n^\alpha\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1\right)\right]$$

因为$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k - 1 \sim \dfrac{k}{n}\left(n \to \infty\right)$. 所以由上式及条件可得

$$\lim_{n\to\infty}\inf n^\alpha\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \lambda\left(n \to \infty\right).$$

因此由开始所证，可得$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 即$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$.