

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类) 试卷

一、填空题 (本题 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t \, dt = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____。

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) =$ _____。

3. 设 $w = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u = x - cy, v = x + cy$, 其中 c 为非零常数, 则 $w_{xx} - \frac{1}{c^2} w_{yy} =$ _____。

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} =$ _____。

5. 不定积分 $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} \, dx =$ _____。

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域为 V , 则三重积分 $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz =$ _____。

二、(本题 14 分) 设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α , 定义一元函数 $g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$, 若对任何 α 都有 $\frac{d g_\alpha(0)}{d t} = 0$ 且 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{d t^2} > 0$, 证明: $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值。

三、(本题 14 分) 设曲线 Γ 为曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 上从点 $A(1, 0, 0)$ 到点 $B(0, 0, 1)$ 的一段。求曲线积分 $I = \int_\Gamma y \, dx + z \, dy + x \, dz$ 。

四、(本题 15 分) 设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) \, dx \leq 1$ 。

证明: $\forall a, b, a < b$, 有 $\int_a^b f(x) \, dx \leq \frac{b-a+2}{2}$ 。

五、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$