

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》(以下简称为“竞赛章程和参赛规则”,可从全国大学生数学建模竞赛网站下载)。

我们完全明白,在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道,抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的,如果引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料),必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺,严格遵守竞赛章程和参赛规则,以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为,我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会,可将我们的论文以任何形式进行公开展示(包括进行网上公示,在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等)。

我们参赛选择的题号是(从 A/B/C/D 中选择一项填写): _____ A _____

我们的报名参赛队号为(8 位数字组成的编号): _____ 16015022 _____

所属学校(请填写完整的全名): _____

参赛队员(打印并签名): 1. _____

2. _____

3. _____

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名): _____

(论文纸质版与电子版中的以上信息必须一致,只是电子版中无需签名。以上内容请仔细核对,提交后将不再允许做任何修改。如填写错误,论文可能被取消评奖资格。)

日期: 2014 年 09 月 15 日

赛区评阅编号(由赛区组委会评阅前进行编号): _____

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略

摘 要

本文以我国正在进行的嫦娥工程二三期任务为潜在工程背景，研究嫦娥三号软着陆轨道设计与优化控制策略问题。

针对问题一，首先，利用开普勒第二定律，建立月心坐标，类比地球经纬度表示方法，确定着陆点位置，利用倒推方法，计算出近月点在月球表面投影与着陆点间球面距离；其次，结合地理知识，进一步确定近月点在月球表面投影位置，并进一步确定出远月点位置；最后，确定嫦娥三号速度方向。

针对问题二，对于第一阶段，重新定义软着陆坐标系与推力矢量空间关系，列出在月固定坐标系中嫦娥三号的运动方程。在快速调整阶段，绘制出二维图，根据运动学公式和牛顿定律得到动力学方程组。在粗避障和精避障使用 MATLAB 解读高程图，利用最大类间方差 (OTSU) 法对数字高程图进行阈值分割，确定嫦娥三号投影在月面运动距离。综合最后两阶段，画出一维软着陆轨道示意图，再次利用经典力学公式，列写运动方程。在合理的假设基础上，求出显式制导律，应用哈密顿函数和拉格朗日乘子实现最优化控制策略。

针对问题三，因为对着陆轨道和控制策略做相应误差分析和敏感性分析可以看成是对月球软着陆显示制导律误差分析和敏感性分析，所以我们建立月球软着陆主制动段的误差模型。首先对燃耗最优的显式闭环制导方法进行设计，并对影响主制动段制导性能的误差进行建模，最后用误差敏感系数矩阵分析了这些误差源对制导律的影响。

关键词：空间几何 最大类间方差法 最优化控制 显示制导律 误差敏感系数

一、问题重述

嫦娥三号于 2013 年 12 月 2 日 1 时 30 分成功发射，12 月 6 日抵达月球轨道。嫦娥三号在着陆准备轨道上的运行质量为 2.4t，其安装在下部的主减速发动机能够产生 1500N 到 7500N 的可调节推力，其比冲（即单位质量的推进剂产生的推力）为 2940m/s，可以满足调整速度的控制要求。在四周安装有姿态调整发动机，在给定主减速发动机的推力方向后，能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。嫦娥三号的预定着陆点为 19.51W，44.12N，海拔为-2641m（见附件 1）。

嫦娥三号在高速飞行的情况下，要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆，关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求：着陆准备轨道为近月点 15km，远月点 100km 的椭圆形轨道；着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程共分为 6 个阶段（见附件 2），要求满足每个阶段在关键点所处的状态；尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

根据上述的基本要求，我们将建立数学模型解决下面的问题：

- （1）确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置，以及嫦娥三号相应速度的大小与方向。
- （2）确定嫦娥三号的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。
- （3）对我们设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。

二、模型假设

- 1、忽略月球自转、日月引力摄动等影响，月球引起的哥氏力和牵引力的影响也可以忽略。
- 2、月球引力场假设为平行定常引力场，并且没有考虑月球自转对系统的影响。
- 3、月球的近似看做球形。
- 4、月球表面重力加速恒定。

三、符合说明

符号	解释
v_0	准备着陆时嫦娥三号飞行速度
R_A 和 R_B	近月点和远月点
S	嫦娥三号准着陆到着陆使用时间
V_{xl} ， V_{yl} 和 V_{zl}	嫦娥三号速度矢量在月固坐标系各轴上投影

F	发动机推力
m	嫦娥三号质量
G_M	月球引力常数
C	制动火箭的比冲
(ϑ, φ)	最优控制量

四、模型的建立及求解

4.1 问题一分析

由附录一和开普勒第三定律求得嫦娥三号远月点速度大小。要确定远月点和近月点位置，需要建立月心坐标系。可由此得出 P 点（着陆点）坐标，并由嫦娥三号软着陆六阶段示意图和运动学公式确定准备着陆点投影坐标和 P 点间球面距离，从而确定近月点和远月点具体位置和方向。

4.2 问题一求解

由题目和附录一可知，嫦娥三号卫星在近月点的速度为 1.7km/s ，从近月点到远月点过程中，嫦娥三号绕月运行，轨道是椭圆，利用微元，矢径 R 在很小的 Δt 时间内，扫过面积为 Δs ，矢径 R 与椭圆该点的切线方向夹角为 α ，椭圆的弧长为 ΔR 。在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，扫过面积可以看作为三角形。

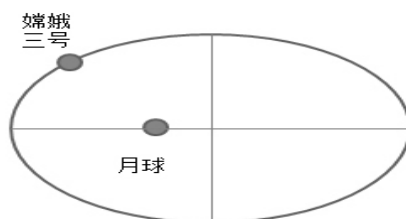


图 1 嫦娥三号绕月运行轨迹

选近月点 A 和远月点 B 来研究，由 Δs 相等可得：

$$\frac{1}{2}v_A R_A = \frac{1}{2}v_B R_B$$

其中 $v_A = 1.7\text{km/s}$ ， $R_A = 15\text{km}$ ， $R_B = 100\text{km}$ ，解得 $v_B = 0.255\text{km/s}$ 。即嫦娥三号在远月

点速度为 0.255km/s 。

根据题中给出的月球参数，我们把月球近似看做球，以月球的球心为坐标原点，月球赤道为 xoy 坐标面，建立坐标系如下所示：

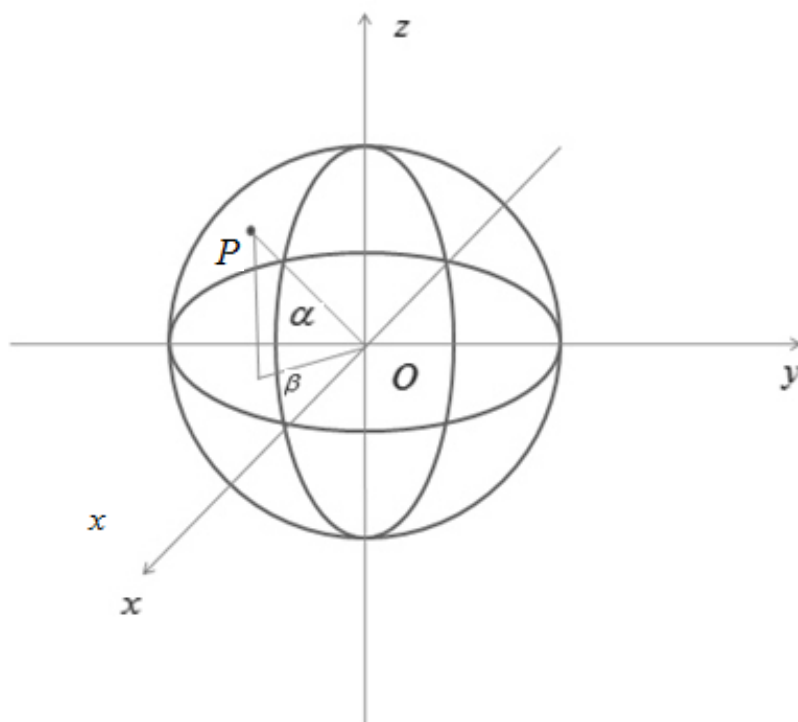


图 2 月心坐标系

图中 P 点为嫦娥三号软着陆点，为 19.51W ， 44.12N 所以着陆点坐标表示为：

$$x = R \cos \alpha \cos \beta, \quad y = R \cos \alpha \sin \beta, \quad z = R \sin \alpha$$

解得 $P(1175423.74, 416249.14, 2418616.90)$ 。

根据附件 2 嫦娥三号软着陆过程的六个阶段，视近月点在月球表面投影和软着陆点间距离为球面距离，假设从准备着陆到快速调整阶段嫦娥三号受力均匀。嫦娥三号在近月点 15 公里处以抛物线下降，相对速度从每秒 1.7 公里逐渐降为零，整个过程需要 750s ^[1]。将此过程画成平面图如图 3 下所示。

不考虑粗避障以后过程，整个过程需要 S 秒，其初速度为 $v_0=1700\text{m/s}$ ，水平，到第二阶段初，其速度变为 $v_1=57\text{m/s}$ 方向与水平夹角为 θ ，水平速度表示为 $v_{//}$ ，垂直速度表示为 v_{\perp} 第二阶段末，水平速度为零。下降距离为 $h_0=600\text{m}$ ，用时 20s 。利用牛顿运动学公式建立方程：

在 $A \rightarrow B$ 水平方向：

$$v_0^2 - v_{//}^2 = 2a_1s_1;$$

$$s_1 = v_{//}t + \frac{1}{2}a_1t_1^2;$$

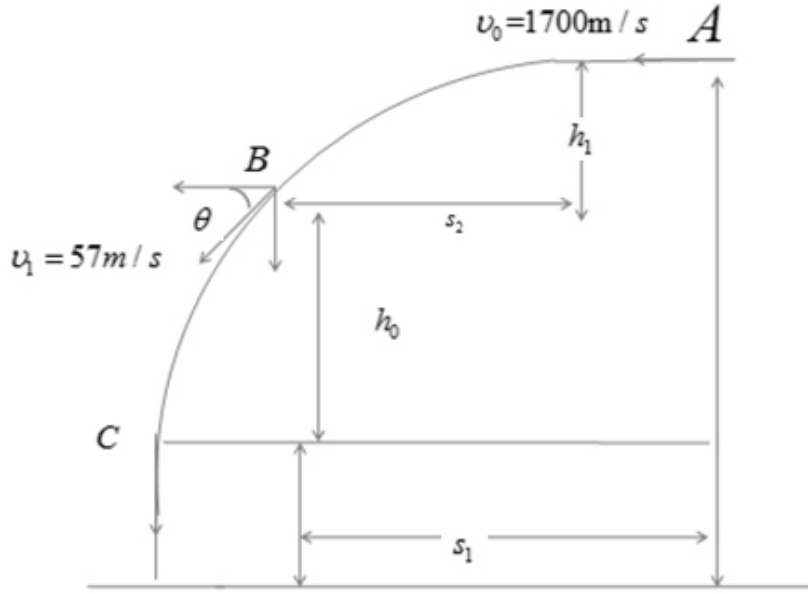


图 3 软着陆阶段示意图

不考虑粗避障以后过程，整个过程需要 S 秒，其初速度为 $v_0=1700\text{m/s}$ ，水平，到第二阶段初，其速度变为 $v_1=57\text{m/s}$ 方向与水平夹角为 θ ，第二阶段末，水平速度为零。下降距离为 $h_0 = 600\text{m}$ ，用时 20s 。

$A \rightarrow B$ 垂直方向：

$$v_{\perp}^2 = 2a_2h_1; \quad (1)$$

$$h_1 = \frac{1}{2}a_2t_1^2; \quad (2)$$

$B \rightarrow C$ 水平方向：

$$v_{//}^2 = 2a_3s_2; \quad (3)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}a_3t_2^2; \quad (4)$$

$B \rightarrow C$ 垂直方向：

$$v_{\perp}^2 = 2a_4h_0; \quad (5)$$

$$h_0 = \frac{1}{2}a_4t_2^2; \quad (6)$$

其中: $v_{\perp} = v_1 \sin \theta$; $v_{//} = v_1 \cos \theta$; $t_1 = 480s$; $t_2 = 120s$, 由 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 和 (6) 解得: $s = 510km$, 也就是说嫦娥三号从开始着陆到 P 点, 其投影间球面距离为 $510km$ 。

由附件一嫦娥三号着陆区域和着陆点示意图可知嫦娥三号沿经度方向飞行, 如图 4 所示。

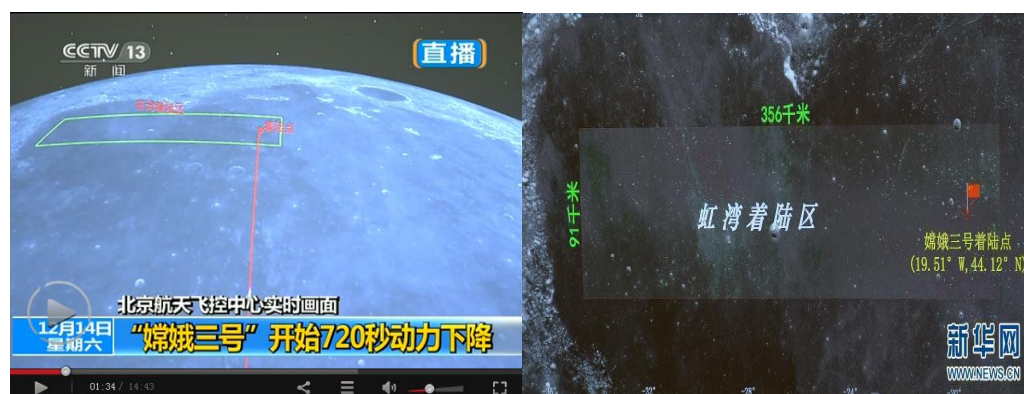


图 4 嫦娥三号运行轨道和着陆点示意图

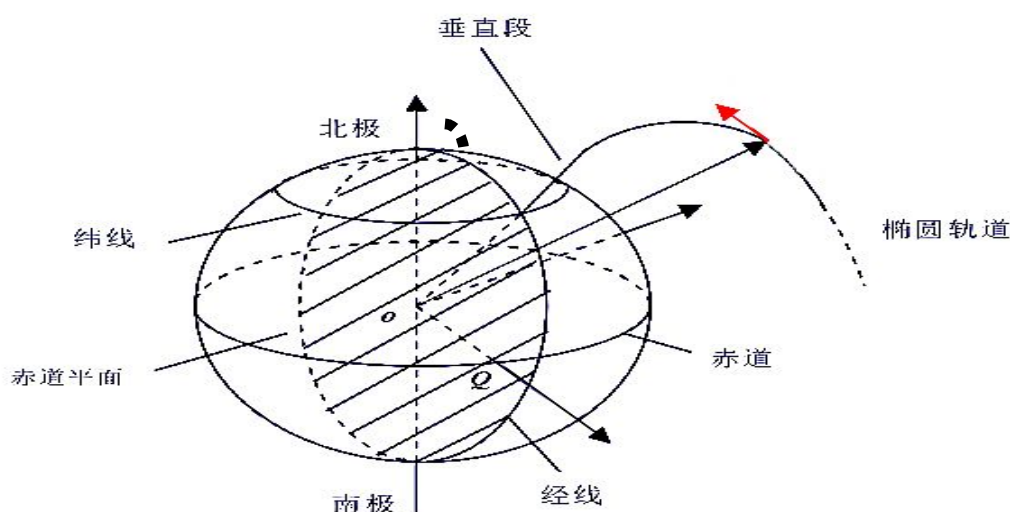


图 5 嫦娥三号运行轨迹图

上图中粗虚线所示即为球面距离, 经计算, 近月点在月球表面投影位置为 $19.51W$, $27.30N$, 所以近月点在此上方 15 公里处。同理, 远月点位置为 $160.49E$, $27.30S$ 垂直上方 100 公里处。近月点运动方向如图 5 所示, 远月点方向与此相反。

4.3 问题二分析

嫦娥三号从环月轨道开始软着陆时, 首先进行变轨, 进入一条远月点高度约为 $110km$, 近月点高度约为 $15km$ 的椭圆轨道; 然后, 当达到近月点时, 制动发动机点火, 嫦娥三号进入动力下降段; 最后, 据月面大约 $2.4km$ 时, 水平速度减为 0 , 调整姿态后, 嫦娥三号垂直降落至月面。嫦娥三号的软着陆过程一共分为六个阶段, 主减速段、快速调整段、粗避障段、精避障段、缓速下降阶段、自由落体阶段, 由于各个阶段的运动轨

迹不相同，故分六个阶段分别求其着陆轨道。以燃耗最优性为出发点，提出了一种用于软着陆动力下降过程的显式制导律求出 6 个阶段的最优控制策略。

4.4 问题二求解：

第一阶段（主减速）：如图6所示，以月球球心为坐标原点建立惯性坐标系 $oxyz$ ，把月球赤道面作为参考平面，月球赤道相对于白道的升交点在 ox 延长线上，用右手坐标系确定 oz 轴， oy 轴与月球自转角速度方向一致。建立月固坐标系 $ox_iy_iz_i$ ，把月球赤道面作为参考平面，则 ox_i 轴指向赤道面与起始子午面的交线方向， oz_i 轴与上边 oz 轴确定方法一致， oy_i 与月球自转角速度方向重合。 $Ax_iy_iz_i$ 是以嫦娥三号质心为原点的轨道坐标系， Ay_i 指向从月心到着陆器的延伸线方向， Ax_i 与 Ay_i 垂直，指向运动方向，按右手坐标系确定。制动发动机推力 p 的方向与探测器纵轴重合， p 与 Ay_i 轴正向所成夹角为 ν ， p 在 x_iAz_i 平面上的投影与 Ax_i 轴负向所成夹角记为 φ ， β 为 oy 与 Ay_i 所成夹角。 Ax_i 在 xoz 平面上的投影与 ox 轴正向所成夹角记为 α ，月球自转而产生的月固坐标系相对惯性坐标系的转角为 γ ，假设初始时刻月固坐标系与惯性坐标系重合，如下所示。

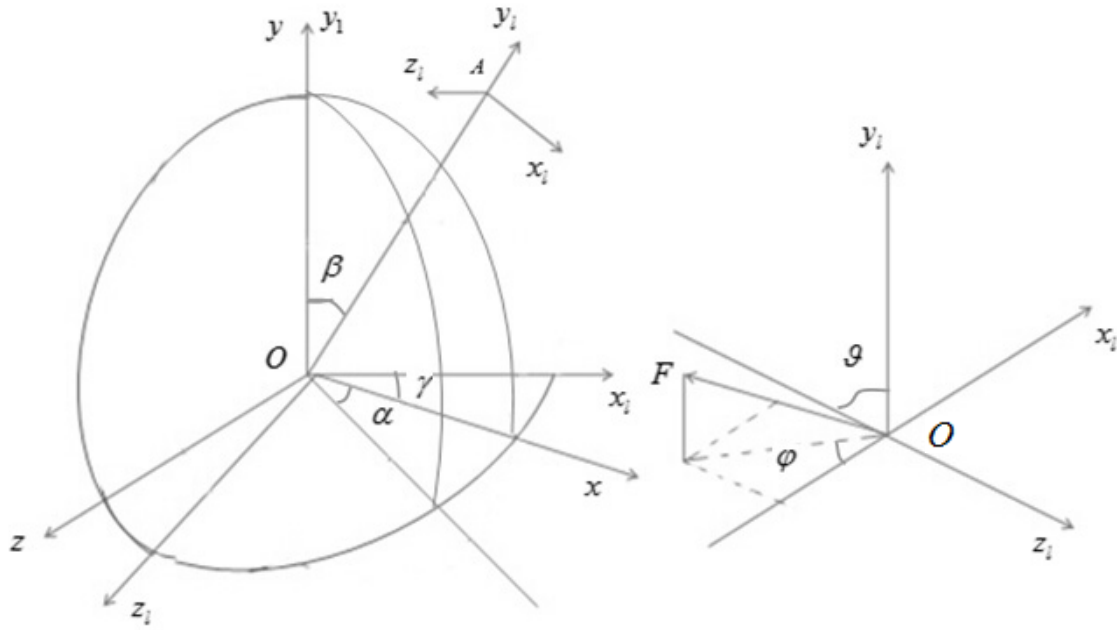


图6 软着陆坐标系定义与推力矢量空间关系

所以得到轨道坐标系到惯性坐标系转换矩阵^[2]是

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

惯性坐标系到月固坐标系转换矩阵是

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

利用科氏定律和牛顿定律整理得到嫦娥三号在月固坐标系中运动方程：

$$\begin{bmatrix} V_{xl} \\ V_{yl} \\ V_{zl} \end{bmatrix} = T_2 T_1 \begin{bmatrix} \frac{F}{m} \sin \nu \cos \varphi \\ \frac{F}{m} \cos \nu \\ \frac{F}{m} \sin \nu \sin \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{xl} \\ g_{yl} \\ g_{zl} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2w_l V_{zl} \\ 0 \\ -2w_l V_{xl} \end{bmatrix}$$

V_{xl} , V_{yl} 和 V_{zl} 为嫦娥三号速度矢量在月固坐标系各轴上的投影, F 为发动机推力, m 为嫦娥三号质量, 在短时间内视为常值; g_{xl} , g_{yl} 和 g_{zl} 为该高度月球重力加速度在月固坐标系各轴上的投影, w_l 为月球自转角速度。

因此, 在月固定坐标系中嫦娥三号运动方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_l = V_{xl} \\ y_l = V_{yl} \\ z_l = V_{zl} \\ V_{xl} = \frac{TF}{m} - g_{xl} + 2w_l V_{zl} \\ V_{yl} = \frac{PF}{m} - g_{yl} \\ V_{zl} = \frac{QF}{m} - g_{zl} + 2w_l V_{xl} \\ m = -\frac{F}{C} \end{array} \right.$$

其中

$$Q = (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) \sin \nu \cos \varphi - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) \sin \nu \sin \varphi + \sin \beta \cos \gamma \cos \nu,$$

$$T = (\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma) \sin \nu \cos \varphi - (\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma) \sin \nu \sin \varphi + \sin \beta \sin \gamma \cos \nu,$$

$$P = -\cos \alpha \sin \beta \sin \nu \cos \varphi + \sin \alpha \cos \beta \cos \nu + \sin \alpha \sin \beta \sin \nu \sin \varphi,$$

$$g_{xl} = \frac{G_M}{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2} \cdot \frac{x_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2}},$$

$$g_{yl} = \frac{G_M}{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2} \cdot \frac{y_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2}},$$

$$g_{zl} = \frac{G_M}{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2} \cdot \frac{z_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2}},$$

G_M 为月球引力常数, C 为制动火箭的比冲, 是一个常值。

取 $x = [x_l \ y_l \ z_l \ V_{xl} \ V_{yl} \ V_{zl} \ m]^T$ 为系统状态变量, $u = [\nu \ \varphi \ F]^T$ 为控制变量, 则

前边方程组可简记为 $x = f(x, u, t)$ 。

第二阶段（快速调整阶段）：在此阶段中，嫦娥三号经过主减速阶段，离月面距离远远小于月球半径，所以此阶段可将月球视为平面建立月球平面直角坐标系^[3]。如下图所示：

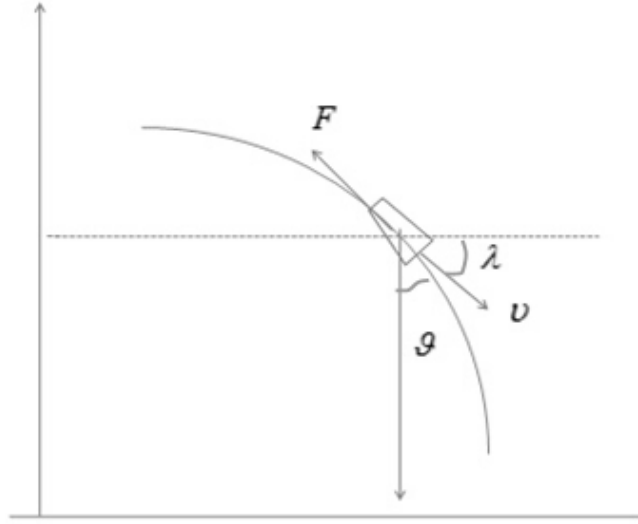


图7 月球平面直角坐标系

图中所示原点为下降轨道上嫦娥三号准备着陆点在月球表面投影，假设嫦娥三号轨迹在此平面内，这个过程符合重力转弯软着陆情况，也就是说反推力 F 方向与下降速度方向相反，应用牛顿定律和运动学公式可以得到如下动力学方程：

$$\begin{aligned} \dot{x} = V_{xl} &= -\frac{F \cos \lambda}{m} = -\frac{F V_{xl}}{m v} \\ \dot{y} = V_{yl} &= -\frac{F \sin \lambda}{m} - g_m = -\frac{F V_{yl}}{m v} - g_m \end{aligned}$$

其中， g_m 为月球表面重力加速度，垂直于水平面； λ 为嫦娥三号与水平面夹角， v 为下降速度的大小， $v = \sqrt{V_{xl}^2 + V_{yl}^2}$ 。

把下降速度分解为水平速度 v_1 和竖直速度 v_2 ，建立以下方程：

$$\begin{cases} h = -v \cos \theta \\ v_2 = -\frac{F}{m} u + g_m \cos \theta \\ \lambda = \frac{g_m \sin \theta}{v} \\ m = -cu \end{cases}$$

其中， θ 是垂直方向与速度方向夹角， c 为常数，是燃料一秒消耗量， u 为制动开关量。

第三阶段（粗避障和精避障）：在此阶段中，嫦娥三号从离月面 2.4 km 降落到 100 m 区间经过精避障下降到离地4米处，利用MATLAB编程，我们得到了 2400 m 处的高程图：

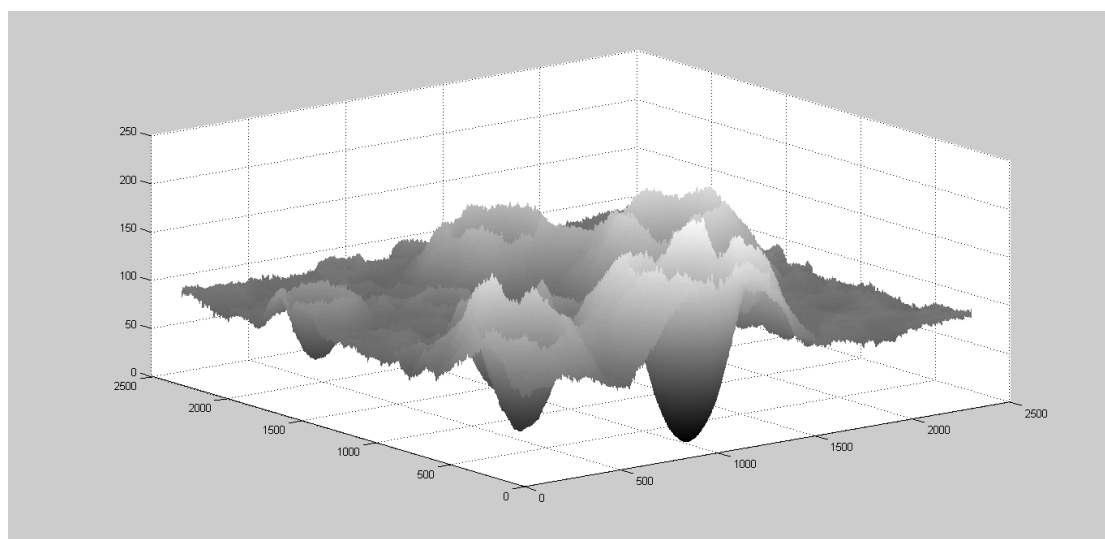


图8 距月面 2400 m 处的数字高程图

该高程图的水平分辨率是 1 m /像素，其数值的单位是 1 m 。假设照相机处于嫦娥三号的正下方，也就是该高程图中心便为嫦娥三号的位置，使用MATLAB，我们算出了此位置为： $(1017, 233)$ 。同样的方法，我们算出了 100 m 出的高程图：

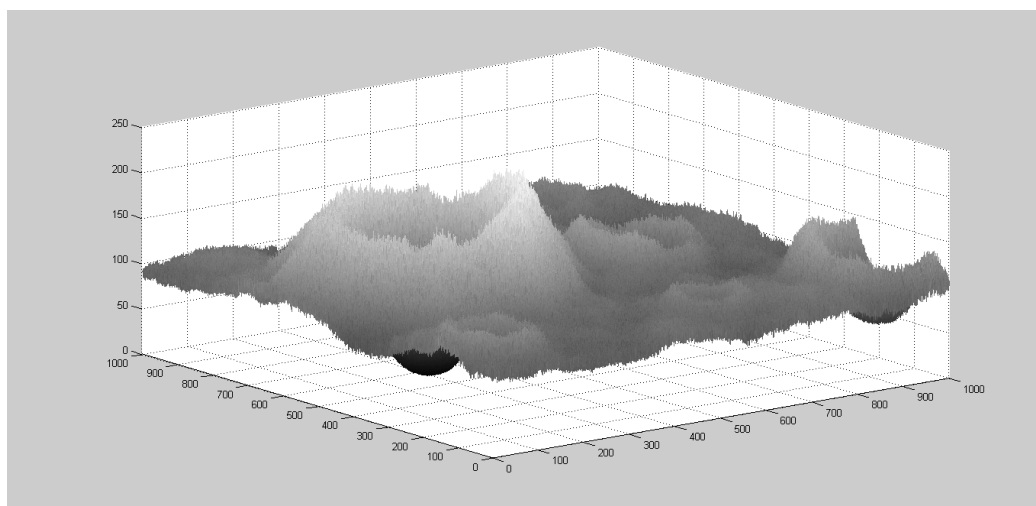


图9 距月面 2400 m 处的数字高程图

使用MATLAB软件，我们算出 100 m 处嫦娥三号位置为： $(503, 503)$ 。利用MATLAB软件的和最大类间方差 (OTSU) 法对数字高程图进行阈值分割，分别得出了 2400 m 和 100 m 处的图像如下：

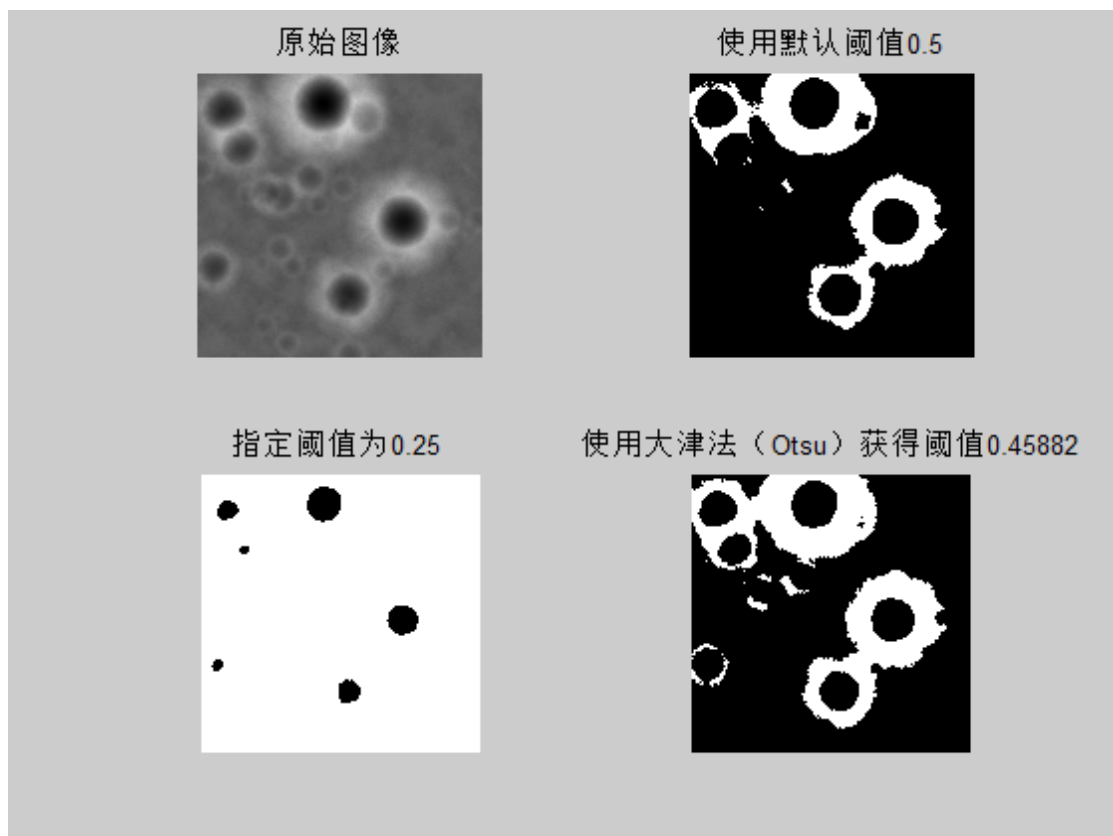


图10 距月面2400m处阈值图

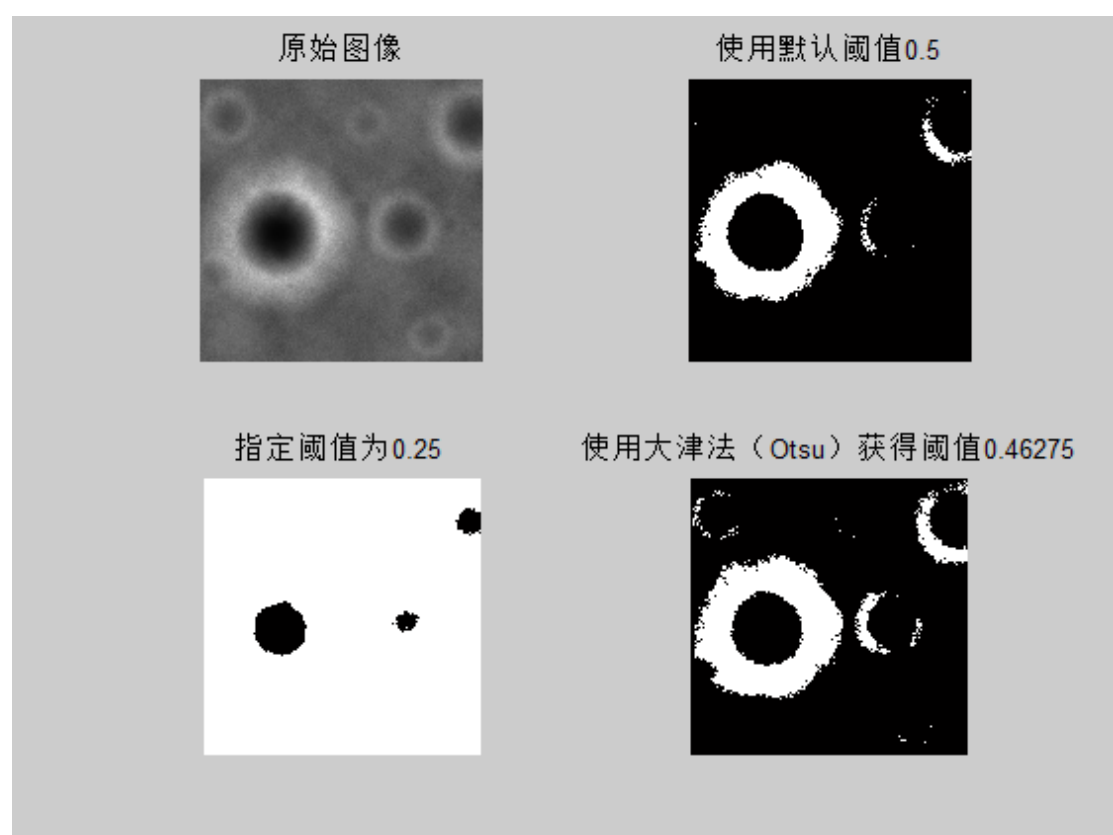


图11 距月面100m处阈值图

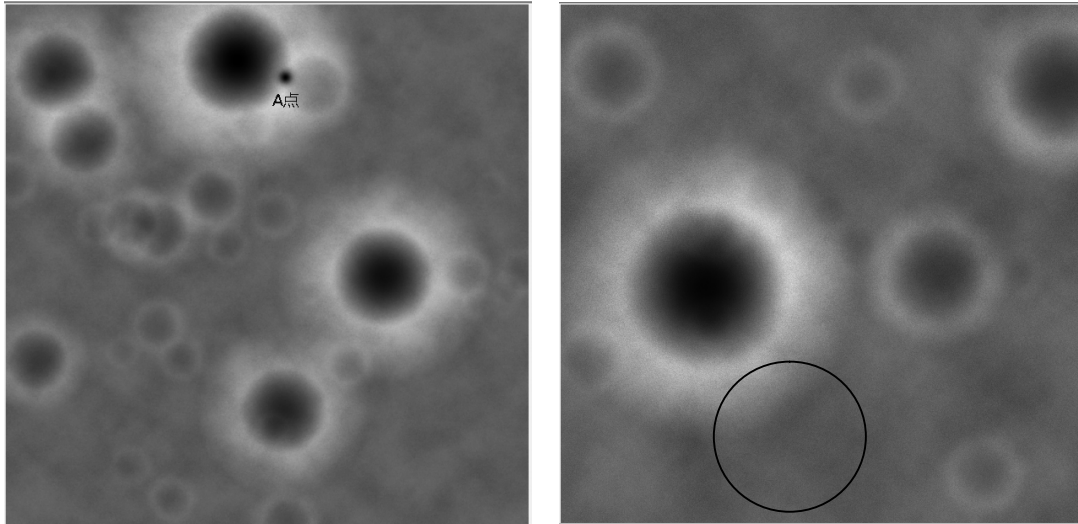


图12 数字高程图

假设在 100 m 处时嫦娥三号位置没有移出 2400 m 处所拍照片的范围，根据图10、11和12使用MATLAB，分析得出A点位置即为 100 m 处的位置，也就是说嫦娥三号粗避障阶段由中心位置移动到A点位置。解得A点的坐标为： $(1229, 322)$ 。经过计算得出从中点到A的距离为 229.92 m 。在 100 m 处，嫦娥三号又进行了一次精避障，用MATLAB，可以得到如上图的一片区域，也就是说嫦娥三号着陆点在这片区域，我们该区域圆心为着陆点，得到着陆坐标 $(588, 856)$ 。解得这两点间距离为 36.26 m 。

第四阶段（缓速下降和自由落体）：此阶段，嫦娥三号缓速下降阶段的区间是距离月面 30 m 到 4 m 。该阶段的主要任务控制着陆器在距离月面 4 m 处的速度为 0 m/s ，即实现在距离月面 4 m 处相对月面静止，之后关闭发动机，使嫦娥三号自由落体到精确有落月点。可以看出嫦娥三号离地面很近，并且嫦娥三号与水平面夹角 $\lambda = 90^\circ$ 。所以建立一维模型即可。如图所示：

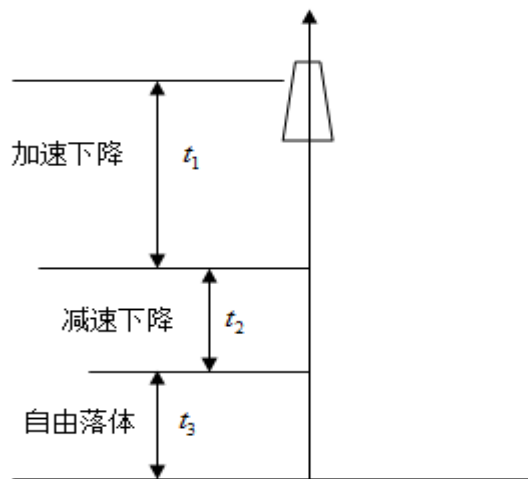


图13 着陆段下降过程示意

所以可以列写方程式：

$$y_0 = V_{yl} = \frac{F \cdot u}{m} - g_m$$

其中， u 为制动推力 F 的开关控制量。

4.5 最优化控制策略

求最优化控制策略首先要求出显式制导律^[5]，然后做出一些合理的假设并对其进行简化处理。可以得到软着陆动力方程用直角坐标表示为：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_l \\ \ddot{y}_l \\ \ddot{z}_l \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

通过引进状态矢量 $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [x_l \ \dot{x}_l \ y_l \ \dot{y}_l \ z_l \ \dot{z}_l]^T$ ，记着陆过程任一瞬时点状态为初值 x_0 ，着陆目标点状态为 X_f ，时间间隔 $[0, t_{go}]$ 上状态方程可表示为：

$$\dot{x} = f(x, \hat{u}, t) \quad (7)$$

t_{go} 表示剩余时间， $\hat{u} = [\vartheta \ \varphi]$ 表示控制量。

$$\frac{F}{m} = \frac{C}{\tau - t} \tau = \frac{m_0 C}{F}$$

剩余着陆段加速度估算值。 m 为 $t=0$ 时的质量。将剩余段引力加速度的平均值表示为当前引力加速度

$$g_x = \frac{1}{2} [g_{x0} + g_{xf}]$$

式中 g_{x0} 表示着陆瞬时点引力加速度， g_{xf} 表示着陆目标点引力加速度。定义如下性能指标

$$J = \int_0^{t_{go}} dt \quad (8)$$

由公式 (7) 和 (8) 初值 X_0 ，初值 X_f 组成了一个定义在时间间隔上的 $[0, t_{go}]$ 上的最优控制问题，求解这个最优控制问题，就是寻找一组容许控制 (ϑ, φ) 能在最短时间 t_{go} 内将着陆器由初值转移到终值，与之相应的状态方程的解 x 就是嫦娥三号由瞬时点至目标点的最优着陆轨迹。

根据极大值原理，可得最优控制，这个过程需引入哈密顿函数：

$$H = \lambda^T f(x, \hat{u}, t) + 1 \quad (9)$$

$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6]^T$ 是拉格朗日乘子。伴随方程及横截条件

$$\lambda = \frac{\delta H}{\delta x} \quad (10)$$

$$\delta_{x_i}(t_{go}) \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (11)$$

极值条件为

$$\left[\frac{\delta H}{\delta \psi} \frac{\delta H}{\delta \phi} \right] = 0 \quad (12)$$

根据系统初始和终端条件，通过解如上的微分方程和代数方程，公式 (7)、(9)、(10)、(11) 和 (12) 可求得最优控制量 (ϑ, φ) 。

4.6 问题三分析

在问题二中，我们使用显式制导律，应用哈密顿函数和拉格朗日乘子实现最优化控制策略，问题三要求我们对着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析，也就是对月球软着陆显示制导律误差分析和敏感性分析。所以对燃耗最优的显式闭环制导方

法进行设计，并对影响主制动段制导性能的误差进行建模，最后用误差敏感系数矩阵分析了这些误差源对制导律的影响。

4.7 问题三求解

4.7.1 初始状态误差模型

记嫦娥三号的实际初始状态为 \bar{X}_i ，标准初始状态为 \bar{X}_n ，则定义初始状态偏差 \bar{x}_i 为

$$\bar{x}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_n$$

在软着陆的主制动段，初始状态误差都是确定的，但是，对于整个软着陆阶段，这些偏差就变得随机。我们假定所有元素均服从零均值高斯分布，相互不独立，其相关性取决于前一阶段任务的特性。

4.7.2 传感器误差模型

这里的误差只考虑典型误差值。由问题二求出的制导律可以看出，需要由导航与控制传感器测量的量主要为嫦娥三号相对于着陆场坐标系的位置、速度和加速度。定义待测量 \bar{Q} ，其估计值记为 \hat{Q} ，则传感器误差定义为：

$$\bar{q} = \hat{Q} - \bar{Q}$$

单个测量估计误差模型误差向量 \bar{q} 的第 j ($j=1,2,\dots,7$) 个元素 \bar{q}_j 来表示。第 j 个观测量的总估计误差 \bar{q}_j 由以下四部分组成

$$\bar{q}_j(t) \equiv \bar{q}_{jbs} + \frac{\bar{q}_{jbs}}{100} Q_j(t) + \bar{q}_{jnc}(t) + \frac{\bar{q}_{jns}(t)}{100} Q_j(t)$$

针对主制动这一特定操作阶段，上述四部分误差具有如下特性：
 \bar{q}_{jbs} 表示第 j 观测量的测量误差，恒为常值，其分布服从零均值高斯分布； \bar{q}_{jbs} 表示第 j 个观测量的刻度因素误差系数，恒为常值，其分布服从零均值高斯分布； \bar{q}_{jnc} 表示第 j 个观测量的随机误差，其为一高斯白噪声； \bar{q}_{jns} 表示第 j 个观测量的刻度因素随机误差系数，其为一高斯白噪声。

五、模型的优缺点及改进方向

5.1 模型优点

1、对于问题一，我们类比地球经纬度方法，巧妙建立月心坐标系，有效的把经纬度转化为坐标点，从而快速定位近月点和远月点。

2、对于高程图，我们使用 MATLAB 软件绘图，并且用 OTSU 法对数字高程图进行阈值分割，使结果更具有说服力。

5.2 模型缺点

1、在问题一中，忽略嫦娥三号在粗避障和精避障阶段产生的位移，这样使第一问结果误差较大。

2、问题二中，对于六个阶段的最优控制策略算法，我们只考虑了主减速和快速调整过程，没有详细考虑其他阶段，可能会带来一定误差

六、参考文献

- [1] 央视国际，嫦娥三号 720 秒动力下降及月面软着陆全过程，
<http://v.ifeng.com/news/tech/201312/0129f5f6-1f35-484a-a895-985cc7b9c2f6.shtml>，2014 年 9 月 13 日。
- [2] 崔乃刚，刘瞰，定常推力登月飞行器最优软着陆轨道研究[J]，高技术通讯，2003，13(4)：39-42。
- [3] 吉力，李俊峰，崔乃刚等，登月飞行器软着陆轨道的遗传算法优化[J]，清华大学学报(自然科学版)，2003，43(8)：1056-1059。
- [4] 明光、裴昕国、袁建平，伪光谱方法月球软着陆轨道快速优化设计[J]，中国空间科学技术，2007，27(5)：27-32。
- [5] 郝晓宁，曾国强，任萱等，月球探测器轨道设计[M]，北京：国防工业出版社，2001：160-163。
- [6] 王鹏基，张焄，曲广吉，月球软着陆飞行轨迹与制导律优化设计研究[J]，宇航学报，2007，28(5)：1175-1179。
- [7] 刘浩敏，冯军华，崔祜涛等，月球软着陆制导律设计及其误差分析[J]，系统仿真学报，2009，21(2)：132-139。