# 物理空间的结构

## 本体论

## 数的定义

现在，我们已经有了两个基本概念，有和无（虽然我们知道它们根本就是一回事，或者说本质上不可区分，但是我们仍然可以用不同的符号硬性区分它们）。那么，在数学中，我们如何描述它们呢？

不难想到，对于无，我们可以用0来描述；那么有怎么表示呢？其实我们可以用任何非0的其它符号来表示，如果我们要表达绝对的有，那么这个符号最好就是（无限大，无穷大，且前面的正号省略）因为用0和可以表示的两个端点，其它正实数都落在这两个端点之间（负实数可以通过后面给出的方式导出）。

首先，根据二者不可分的本质，我们写出第一个基本关系：

以此表示它们不可区分的本质

然后可以写出这两者的互逆的逻辑关系：

有不是无：

无不是有：

这表示我们要硬性的区分它们。

这里的一元运算“-”代表“不是”。对比：

你会发现矛盾：

有既是无，又是非无；无既是有，又是非有。

没错，但这正是我们强行区分有无的结果。实际上的二者是不可区分的（不可区分正是此处相等的含义，既有和无是互相等价的）。不过使用0和无穷来描述还有一个好处 ，若：

可以自动导出

而无需预先声明它。此时有：

这6个符号（两个符号两种运算两个简写）是完全相等的。现在我们暂时放下这个关系，具体看一个正实数的例子。

有了端点的这两个数，我们已经可以定义除了端点之外的任何的正实数了，比如给定一个（有限的）正实数，它和两个端点的关系为：

两个表达式的含义分别为：

给定有限正实数相对于无穷（）而言为

给定有限正实数相对于而言为无穷（）

显然任何有限正实数都符合这两条性质。

按照：

有不是无：

无不是有：

的要求，可以做简单的代换：

负号放在哪个，或者上并不重要，所以上式可以化简为：

再把负号移动到上，

我们就可以从

有不是无：

无不是有：

中的负号“不是”的含义，导出负数“负”的含义：

一个负数“（为正实数），意味着它相对于无穷（）为有（不为0），它相对于无（0）为无（不为）。那么，什么样的数或者结构，相对于无穷为有，相对于无为无呢？

考虑为正实数的时候，它相对于无穷为无，那么，它的补集（之中除了之外的所有其它数），相对于无穷则为有（因为这个补集是一个无限集合），这对应于

第二个表达式

在

的前提下，和第一个表达式等价。总的来说，是在无穷集合上的补集。

在无穷集合中所有不是的其它数构成的集合就是“”。

由此可以看出，一个负数，它不仅仅是相对于无穷为有，而且它还是无穷的“平方”（的倍数）。这里“平方”的意思为，是从无穷集合中选出的，构成第一个维度（这个维度只有一个元素），然后，所有不是的其它数构成集合，这构成第二个维度（这个维度有无穷多个元素） ，这两个维度组合起来就是一个无穷集合的（元素数量的）“平方”。一个负数是一个集合，不难理解，一个负数作为一个集合而言，是具有“内部结构”的。

现在我们已经有了关于负数的定义，让我们用这个定义验证一下和0：显然的补集是空集0，空集0的补集是。也就是说逻辑“非”（“有不是无，无不是有”中的“不是”）对于0和而言，就是补集的意思。

对于负实数，如果讨论它的内部结构，我们仍然无需考虑它的相对（于单位的）大小，只考虑即可，由

和

还可以导出：

它们其实就是：

一共有四种情况：

由于始终成立，我们可以将上面四个式子还可以写成：

抽象出来得到：

可以看出有四个解，若只以和表示，既：

大多数情况下，我们不区分和，加上的定义，我们可以认为这四个解是完全等价的。这时候，我们就得到一个，它的平方是。

在实数中，一个数的平方是并不奇怪，它就是，但是一个数的平方是，是什么意思？

让我们把范围扩展到复数，问，谁的平方是呢？

我们知道，它就是虚数单位。

由此可知，虚数单位并不是一个想象出来的数，它是实实在在存在的数，虽然不等于，但若它的数值可以无限接近中的某个或者某些数值，也可以认为它就是中的那个或者那些数值。具体数值是多少，下面给出解释。

## 一些细节

事实上，从

可以看出，我们已经把无穷当作一个集合了。

考虑：

这里“平方”的意思为，是从无穷集合中任选的，构成第一个维度，然后，所有不是的其它数构成集合，这构成第二个维度 ，这两个维度组合起来就是一个无穷集合的（元素数量的）“平方”。

这其实隐含了一个事实，既的平方根，若表现为无穷，则它是不含这个元素的无穷（元素的）集合；若表现为0（空集），则它是一个含有这个元素的非空集合。也就是说，对于而言，它并不完全等价于或者0（无穷集合或者空集），它等于无穷集合减去1这个元素或者1这个元素构成的集合，对比

可以看出，这两个值就是中的第二项和第四项分别的结果，也就是说分别是：

这两个值的平方可以产生。而对于而言，还有两个值，它们的平方将产生，所以应当被修正为：

根据

可以导出

同时

可以导出

也就是说，第二项和第三项可以被理解为同一个值，第一项和第四项可以被理解为同一个值，但表现形式不同也意味着它们在另一个意义上并不相等。

实际上

的本意是

也就是

也就是说，计算的过程按照先算右边后算左边的顺序，意味着：

询问：含有几个？

回答：“有一个”。

有一个，虽然数值上还是，但它意味着对自身的1次“操作”，让我们把这个操作叫做，既“乘以o”（字母o，不是数字0），意思是“有1个”，那么描述这个操作过程的逆过程就得到，

意思是：

询问：“有1个”其结果为几？

回答：其结果（的数值）为。

作为过程的结果，“乘以”也就是“乘以的数量”：

则这个过程可以写成：

而的数量也是的数量，是因为根据：

所以，在求结果的数量的时候，的数量可以替换为的数量：

作为产生结果的过程，类似于o的情况，“乘以的数量”也就是“乘以”：

所以：

既：

此外，若考察的定义的表达式，

我们似乎可以认为，才是1的补集。但是因为又代表了一次操作，所以它比一个静态的数（或者集合）具有更多的动态的含义。我们用它对自己的操作的（静态）结果来表示数，也就是1的补集。而把留下来，用在需要表示操作的地方。由此可以看出，任何数（无论虚实），既可以表示过程，也可以表示过程的结果，但若我们强调要表示的是过程本身的时候，我们使用虚数来表示。

如果说，是1的补集这样一个静态结果，那么可以描述为：是从产生的过程。也可以认为，

也就是说，是进行次操作的结果。

现在，有了的定义，我们可以考虑一些先前无法想象的问题。

比如，怎么理解。

我们并不了解，不知道它的性质和运算规律。但是我们已经知道了和之间的关系，那么我们就可以通过和自己或其它数量的关系，来推导和自己以及其它数量的关系了。

已知

让我们尝试求出：

需要指出：

并不能导出

因为

中左边的只代表存在，它和右边的并不相等。而当我们写出

的时候，我们已经要求二者是相等的了。

既然，

那么，

也就是

这些值之中，尤其是

非常有用。它意味着当我们需要的平方的时候，只要给出还少一点的数量就足够了。需要往往是在需要“实性”的时候，这也意味着实性可以用更宽松的条件来满足（关于实性后面具体说明）。和这个表达式所表达的意思相近的，是采样定理。

现在，我们已经有了的定义，也就是说，是1的补集这样一个静态结果，那么通过补集的关系，我们可以求出1的表达式来：

也就是说，左边的“有”（以表示），是可以精确计算的。它的值并不正好是1，而是比1稍微少一点。而我们正是用了这个“稍微少一点的1”来定义了我们通常使用的1，以及它的补集。由此，解出来的应当进一步的修正为：

回到集合视角。既然我们已经把负数当作对应正数的（静态）补集，那么，根据正负对称的原则，一个正数显然也对应于一个集合（虽然也可以不这么做）。我们使用冯诺依曼的方式，让正数对应于集合元素的个数，那么对于正数而言，它包含哪些元素呢？考虑离散情况下的，例如，则这个集合可能为，但这是6个元素了。所以我们把0去掉，得到

对于连续的实数，我们按照同样的原则也去掉0，得到：

那么负数就可以表示为：

包含无穷的原因，可以考虑全集为

其中

于是我们得到：

这二者看似天壤之别，实际上却是存在对称性的。因为从0到x区间看似有限，但是正如从0到1之间存在无限多实数（“一既无限，无限既一”），它的基数和从到的基数是一样的。由此可以看到，无论是正实数还是负实数，其实都不包括0（这也正是它们的定义）。这也意味着作为集合，正实数和负实数都不包括空集。

此外，还有一个大小问题：正数大还是它的相反数大？由于负数是无穷集合中有限正数的补集，所以它是一个无穷集合。所以从集合的大小上来看，负数要比对应的正数大得多。但是我们已经习惯了把负数放在以0为中心，正数一侧的另一侧，而认为正数大于0（实际上真正的0和具有等同的尺度，所以这个0并不是大小等于的那个0），所以很自然的，认为正数都大于负数，所以任意正数也大于它的相反数。然而若严格讨论，这个理解只在有限范围或者相对范围有意义。而涉及无限，则应当使用适用于无限的原则。

由上述分析可以知道，正负实数和在集合概念上的实际含义为：

而实数1的精确大小为，

也就是说：

这就是实数1的集合表示和数量表示。

如果我们定义和的大小相同，符号相反，那么我们就可以得到：

这么看似乎并不是无限集合（有限集合的补集），但是如果意识到右边的实际上有

那就不难得到：

可以看出，它确实是包含无穷这一点的集合，符合

的表示方法。

再回来看

对比可知，

于是有：

如果正数和负数都不包含0，但负数却包含无穷，那么0怎么办？

0只能回归最原始的定义，一个负数的“显式”范围为：

由此也可以看到，正数和负数还是略微有一点不对称的，它们之间相差一个0或者一个空集（这使得它们的不对称非常不明显）。

既然可用，那么对于正数而言，

也就是说，正数也可以写成某个数的平方形式（既正数也是有结构的）。

为什么一个实数要用平方的形式来表示？

这是因为，一个实数，它必定是一个单位的倍数（包括0倍或者1倍），既。而这个单位也必须是实数，这样，这个实数，才能是“实的”。比如实数5，它是一个从0到5的集合（不含0），它也是1这个单位的5倍（5次重复）。而1这个单位是无限可分的，这也意味着它是具有无限密度的。所以5倍的1，也是具有无限密度的。按照这个原则，应该把5写作为：

而对于而言，则有：

所以

任何实数都继承无穷的这个性质，所以也可以写成一个数的平方（或者至少是有限数乘以无穷的形式）。负数作为一个补集存在，显然也可以写成一个数的平方形式。

具有无穷密度的单位，是这个数的内在性质。

自然数和正数看上去是稀疏的，但是它们的单位1都和实数的单位1一样，具有无限可分的能力（所以具有无限密度）。而且它们的数量也是无限的，所以也可以写成平方形式。

关于

这个定义是递归的。这也意味着，如果要求无限是“实的”，那么他就会“自动”的扩展为它自己的次方，以保证其“实性”。因为毕竟，无限的本意，既是“没有限制”的。

看一个数是否是致密的，实际上只需要往深了看一层。如果更深的一层是致密的，那么它就是致密的。当看到：

的时候，显然它对于它的平方而言是无限致密的，是实的。但是它是什么的无限，就没有下文了。它为什么是实的？相对于无穷而言，里的可以是一个点也可以是一个范围，可以有单位也可以没有单位。总之从无穷中减去一个点或者减去一个范围，无论有无单位，都不影响无穷的实性（致密性）。而这点或者范围到底是不是实的，是无关紧要的。所以一个虚数（特指纯虚数）是一个无限数，可以保证它的单位不必是实的，因为它自己就是实的。换句话说，虚数自己就是实的，虽然有部分可以是虚的，但（可能）虚的部分并不影响它的实性。而实数（无论正负）作为实性数的乘积或者平方，一定是实的,因为无论把相乘的两者中的哪一个当成单位，单位都是实的，所以没有任何部分是虚的。

## 更多细节

若我们不区分精确1和实数1（事实上，我们就是这么做的），给出1的精确大小的的定义的时候，它实际上也是递归定义的：

那么它就可以随着的增加来得到相应的值：

它随着的迭代变化，总是“比自己小一点”（从1逐渐趋近于0）。而，总是“比自己大一点”（从逐渐趋近于0）：

同理：

这里的“总比自己大一点”，意思是，从最开始的-1，向-0.5的方向变化。然而要知道负数的意思是对应正数的补集。-1是1的补集，-0.5是0.5的补集，1这个集合大于0.5这个集合，1的补集则小于0.5的补集。若从负数对应的正数集合角度理解，正数是变小的。也就是说，从正数角度理解，无论还是都是从1到0逐渐变小的。

需要注意的是，即便没有n的参与，1自身还是会自动的减小，-1自身还是会自动增大（实质仍然是减小）。这是由定义决定的，或者说它自身的性质，与如何观察（n的增减）无关。但是，不要忘了，从最开始我们给出定义的时候，就已经隐含了一个基本点，那就是，有和无是对自然本体的强行划分，也就是说，在这个基础上得到的任何“规律”，其本质都是观察者（我们）“自己的规律”，而不是自然本体的本质规律。自然本体的规律只有一个，就是无限（没有限制，也意味着，没有规律）。

关于自然对数，我们知道：

让我们直接取，则有：

又因为：

所以：

也就是：

虽然1会自发的或者随着n的增长越来越小，但是1的无穷次方却不会越来越小，反而它会最终趋向某个固定的值，这个值就是e的倒数（约等于0.36787944117144233）。这个无穷次方的1，仍然是一种1，但它是以无限缩小的1为基础的，缩小之后再无限的放大，所以得到的这个1，是完全“实心”的。

是的复数定义形式。

正如本质上还是1，它的倒数仍然是1，它的x次方也是1，实质上仍然是（一种）1或者称为单位。

让我们继续观察和：

那么随着n的递增可以得到

同时：

则

注意：的存在意味着的展开是自动的。这也是由定义决定的。是它们内在的性质，与观察的方式（n的增减）无关（或者说，只要我们开始区分有无，我们所观察到的数就一定是这样的）。

对于任何一个给定的n，有

若

由于都是非负整数，（取）大于0，可知

而随着n的增大，也会越来越小，所以

可以认为：

则

若令

但是并不能代表二者之间的距离（或者它们之间的长度之和），因为（在复平面中）它们中间还有一个0。所以我们还得加上0这个点，因为都是“结构化”的，所以我们也必须把0进行同样的“结构化”展开，然后才能进行运算。

对应项相加：

如果计算的是相对于的位移，则应该是：

## 的产生

计算到这里，并没有任何问题，但是还不够细致。如果我们更细致的观察，不难发现，0在这里不但是有结构的，而且它还是有值的。也就是说，它和一样都具有无限密度。

但是这个0的无限密度，和的无限密度，并不一定相同（因为0和是正交的），也就是说,完全可以有：

那么我们如何得知是多少呢？

下面让我们考虑这样一个计算方式：

如果我们并不知道一个线段的长度，我们可以把它设为，如果它的一半长度为（已知或者未知都可以），那么，它可以表示为：

这个表达式可以无限扩展下去，而最终，如果有最终的话，

其含义为，线段的长度，等于它的一半加上它的另一半；它的另一半的长度等于它的一半加上另一半的长度的一半……直到长度不再分解为一半和另一半为止。

对于而言，若已知，且有，的值就已经可以直接算出了。完全没有必要把它变成一种无限扩展的运算。但是，这个计算方法，对于具有不同无穷密度的0和而言却有重要的意义。不难看出，这种无限展开的过程，是相似的。

首先令

排除2的干扰，让我们看核心的部分。

按照把分成两个部分的方式，我们把分成3个部分，

第一个部分对应于已知的数量，也就是相当于已知的；第二个部分相当于未知的数量；还有一部分对应于递归展开的数量，也就是相当于或者说另一半；这里我们指的是的长度。

这三项恰好是一一对应的：

考虑轴上，第一次展开，，意思是三者的长度“基本上”相等且都为无限（这时候我们还不知道它们的密度比例关系的值，只知道它们都是无穷密度）。

由于三者长度基本相等，可以平均分为3份，所以我们也把平均分成3份。

未知数是不需要的，因为按照如下方式组合：

未知数可以被放在下一层迭代的结果里（合并在上），如果我们允许下一层迭代结果可以比真实的大一些的话（显然是可以的）。而且这也可以满足3份并不真正相等的要求。

继续看，现在，我们开始引入未知量，它的长度也是 。为了看清楚的细节，我们把它放大（一共3个），加上先前的2个，一共有5个（不把算在内是因为它已经被扩展了），其中都是，我们只取一半为

另一半用于迭代。未知数，我们不写它，原因同上。

继续看，我们引入未知量，它的长度也是 。为了看清楚的细节，我们把它放大（一共3个），加上先前的4个，一共有7个，其中都是，我们只取一半为

另一半用于迭代。未知数，我们仍然推后计算。

由此可以写出：

如果有最终一项，那么它将等于：

因为每一个所表达的都是的总数。

让我们尝试求s的实际值：

的系数，实际上就是：

计算方法如下（C#）：

double Pi(ulong n = 1, ulong max = 100)

{

return n < max

? 2.0 + (1.0 \* n / (2.0 \* n + 1.0) \* Pi (n + 1, max))

: 2.0 \* max + 1.0;

}

计算结果：

插一句，这个算法最初来自于一个叫做“外星人程序”的算程序（C语言），

int a=10000,b,c=8400,d,e,f[8401],g;main(){

for(;b-c;)f[b++]=a/5;

for(;d=0,g=c\*2;c-=14,printf("%.4d",e+d/a),e=d%a)

for(b=c;d+=f[b]\*a,f[b]=d%--g,d/=g--,--b;d\*=b);}

据说它是来自于梅钦公式

写成这种形式是因为它有很好的10进制位数的对应（每次迭代算出4位精度的十进制数）。（请参考维基百科）。而上面的分析实际上给出了这种算法得以成立的数学原理。

继续说意义：它是什么？

它是从经过0到达这个过程中走过的路程的单位（这里不考虑那个余量2，因为它相对于无穷为0），以这个单位计数，长度为；或者反过来，以为单位，长度为。

需要注意的是：“为了看清楚的细节，我们把它放大（一共3个）”

其实这意味着我们做了一个假设：假设0的内部具有和外部一样的结构，都是中间一个0，两边是两个。只有这样才能形成一条从一端到另一端最短的“通路”。由于这个定义本身也是递归的，这就使得无穷递归运算可以实现。而且通过不断的这么做，我们可以把占据全体的比例不断减小，这样才能使得迭代的结果收敛。这也意味着，从经过0到达完全可以有任何其它的方式，其长度也就可以具有任何其它的结果。

所以可以说：

是递归方式定义下的最短路径的长度；对应的，为递归方式定义下最短路径的单位长度（若以为长度），或者长度本身（若以为单位）。

由

可以导出：

这个就是总长度减去与的长度的和，得到的就是0的长度。

此时我们可以得到0的无限密度和的无限密度之间的比例关系：

也就是说，0的密度要稍微大一些，若假定长度相等的话；若假定密度相等，则0的长度要大一些。

同时，

也就是说，如果和被理解为同一个0，且路径只经过这个0，那么它的大小为

也就是说它和差不多一样大，并且只比大14%多一点。

如果使用

那么，

这正好说明0点的大小为，而的真实值大于3，说明0点的大小实际上比的大小要大一点（也是14%多一点），既，虽然在概念上二者相等但是在数值上二者不等。

仍然使用

可以得到：

也就是说，在一定条件下（例如不区分和且认为），无穷可以是有限的且具有确定的数值。

如果和被理解为不同的0，且路径经过这两个0，如果它们的大小相等（应当如此），那么它们的大小为：

也就是说，的大小大约为的大小的57%多一点。

而如果考虑

那就会产生且同时成立的矛盾，也就是说，无穷（集合中元素的数量）既是大于（集合中元素的数量）的又是小于的。所以是一个错误的猜测。而如果的关系类似于也就是互为倒数，那么它们的和将和一个0的长度相等，这并不会产生矛盾。若真的如此，则之间也一定具有互为倒数的关系。

也就是说可以有两种表示，一种是用表示，另一种是用表示。

其中来自于，

这说明能影响的取值，而且越小，影响越大。这种影响相当于一个函数的参数的数值，可以影响函数内部的常数的数值，或者说，常数成了参数的函数，这一点是非常特别而且非常有用的。

如果我们不追究的细节：

令，也就是让展开的次数一样多：

这里4n是观察者造成的，对于1个周期而言，它可以消去。

观察：

可以看出是由引入的，

那么实质上

的意思就是：

或者说和之间具有比例关系。

而意味着和之间的距离（或者长度之和），那么就是这个距离的长度单位。

既然已经是某种长度单位，那最简单的方法就是让，此时取得的

也就是整个长度当作一个单位就是可以接受的了。另外，

也意味着，选择

或者

都是很好的单位。

既然可以用表示和之间的距离，那么，任何和之间的距离我们都可以用它来表示了。我们把换成，则有

有两个特殊值，如果：

如果：

不仅如此，考虑：

替换得到：

这时n可以直接决定d的长度。也就是说，如果现在是经过d之后可以到达，本来d只是一个用于测量和之间距离的量，现在我们可以用它来实现从到达任意的目的。只要我们给出一个合适的即可。

由此我们已经可以定义角了（弧度制）：

一个角表示和之间距离的单位。

前面说过，任何一个实数都可以用一个平方的形式表示。而

完全可以表示自身或者单位的。那么，任何一个实数或者虚数都可以使用一个常数乘以的若干次方的形式来表示。那么，这些数的全体，就可以构成一个集合，也就是复平面。

给出一个复数，它总可以写成的形式。相对于

所以，

如果我们不考虑，只考虑长度和角度，那我们就可以得到的极坐标表示：

## 的产生

到目前为止，我们从0和导出了正实数和负实数，从二者的关系中导出了虚数单位以及它的四次方的值，，而后从和的关系导出了圆周率的结构，并计算了它的数值。也获得了0的大小（在自相似的递归定义下）。而且我们简单的使用了代换的方式导出了自然对数底数的复数形式。现在让我们尝试将其直接推导出来。

先把它的定义放在这：

关于的指数函数：

可以得到：

也就是

对比一下

可以看出它们有着非常相似的结构。

我们知道，意味着某种单位，那么，就让我们从开始，尝试寻找它的结构：

想要计算出的结果来，就不能带着，因为带着是不可能计算出数值的。所以我们必须用有限数替换，然后再让有限数趋向无限，或者说很大，就有可能得到结果（要注意收敛性的问题）。

我们知道，

的含义是，也就是1的倒数，它的值是1加上一个很小的数值。这个很小的数值，是它自身的1倍，或者说它的平方，也就是它自身乘以一个很小的数值。为了让结果可以收敛（一个发散的结果不可能是任何实数，只能是无穷本身。这也意味着这个结果是我们选择的结果，实际上它本身并不必收敛。只是不收敛我们就无法得到一个有效的实数，或者说，无法有效的观察它的存在了），我们让它乘以一个更小的1的数值。

那么，如果我们取有限正整数替换（当很大的时候是可以接受的），此时可以写出：

让它乘以一个更小的1的数值—让增大1，就可以获得下一个更小的数值：

可以看到，加号左边的1并没有乘以更小的1，这类似于计算的时候，把未知数的计算推移到下一层迭代来完成（推后计算）。这个过程类似于“右乘”。

继续乘以一个更小的1的数值：

随着不断乘下去，我们可以得到：

不仅如此，我们还可以倒着计算，也就是“左乘”：

此时只有一个要求，表达式要从

开始。

若

最后一项，如果有的话，它是：

但在计算之前不可能获得这个值，所以若要计算，这个值应首先设置为：

原因是，它的本质就是一个比1稍微大一点，并不断减小的1（所以其极限为1）。

现在，我们已经有了：

对比：

可以看出二者相等，也就是：

计算方法如下（C#）：

double E(ulong n = 1, ulong max = 100)

{

return n == 0

? 1.0

: n < max

? 1.0 + (1.0 / n) \* E(n + 1, max)

: 1.0;

}

结算结果：

由此可以看出，其实不用三角函数（的无穷阶导数），我们仍然可以从导出的表达式。

另外要说明的是，，都不可能是整数1，它们实际的定义是：

一个是比1小一点，另一个是比1大一点，它们的无穷次方也不会相等，且分别为

而对于整数1而言，则有

所以可以用这种方式，来区分实数1以及整数1，或者说，任意相等的实数和整数。

对于容易出现混淆的情况，我们尽量不用1，而是用。另外用而不是也是有原因的（从数量上和并不相等），这在后面的描述中可以看到。

虽然和都不是有理数，而是无理数，超越数，但这并不意味着它们的存在“没有道理”。相反，它们都是具有良好结构的数。它们的存在，意味着某些深层次的规律的存在。而尤其是这种递归嵌套的方式，更暗示一些东西。

我们稍后会讨论这种嵌套到底意味着什么。

## 复平面和直角

现在，我们已经有了“四个坐标轴”对应的数值，让我们试着构造一个复平面。

从集合角度定义数，以上四个数，都可以看作是两个集合的差集。而这个差集则是一个不从0开始的集合，或者可以称为数轴（这里说的不是复平面的数轴，而是普通实数轴）上不包含0点的线段。如果考虑它们的始末至关重要，那么它们就是有向线段。

严格说，

其中：

0、可以被当作为，从开始到结束的一条有向线段，；

1、可以被当作为，从开始到结束的一条有向线段，；

2、可以被当作为，从开始到结束的一条有向线段，；

3、可以被当作为，从开始到结束的一条有向线段，；

可以看出，0和1、1和2、2和3、3和0各自都是两个不相交的范围（这就定义了正交或者垂直）。而1和3以及0和2各自都是两个相反的范围（始末方向相反）。

首先，由实数的平方性质写出：

旋转和正交：

方向相反：

由上面各式可以看到，实际上使得 “转动”（虽然我们现在还不知道转动到底是什么意思）到的并不是，而是本身；但是也完全正确，所以可以说在这个过程中和产生的效果是无法区分的。然而为了保持一致，我们尽量使用的表达方式。

需要指出的是，1和3以及0和2这两组范围实际上是分别重叠的。而使得它们相反的，只是始末顺序。也就是说，这种相反（负号）也是一种“补集”，它是绝对时间（后面有说明）上的补集。要注意的是，这里的时间顺序被投射到了空间的方向上，这使得时空成为一个整体。

上式使用箭头而不是使用等号，是因为无穷运算得到的有限结果并不唯一。

比如：

意味着左边完全可以产生一个而不是。这也说明，在旋转过程中，从虚轴到实轴的转换，可能会引入“不受控制”的比例变换。换句话说，实轴和虚轴之间的比例是不定的（圆形和椭圆形的区别）。如果这个,到的投射仍然可以保持互不重叠（正交），但是如果二者就会互相重叠，而失去正交性。略小于1，其速度小于自发减小的速度，那么正交性仍然可以保持。但终究，这是不能保证的（结果是随机的）。

可能你已经发现，如果2和3交换一下，我们就可以得到一个的循环，虽然它不符合指数递增的模式。但也许，它正是自然中的真实过程。

有了以上信息，我们可以构造出

它等价于

此外我们也知道，每乘以次的或者说每次乘以，结果返回原值:

所以有：

回到复平面，不难看出，这四个坐标轴分别对应于普通实轴（非复平面实轴）正半轴的两个部分的两个方向。从0到1，从1到无穷，以及反过来。这两个（或者说四个）部分都不含有0。对于代表的x正半轴，它在实轴正半轴上的原点是，无穷远点对应于实轴正半轴上的1；对于代表的x负半轴，它在实轴正半轴上的原点是，无穷远点对应于实轴正半轴上的。代表的y轴正半轴，它在实轴正半轴上的原点是，也就是比1多一点，无穷远点对应于实轴正半轴上的；代表的y轴负半轴，它在实轴正半轴上的原点是，无穷远点对应于实轴正半轴上的。整个复平面的零点，在任何轴上都没有对应点。所以是个坐标轴在复平面上都没有真正的起点和终点。若有任何一个点具有0值的横坐标或者纵坐标，它就没有落在横轴或者纵轴上。因为或者并不在或者之内。但如果考虑

那么，我们就知道，任何一个具有0值的横坐标或者纵坐标，它实际上就是具有的横坐标或者纵坐标。也就是说，在复平面中，是可以表示的。它的表示方式为0。所以0和共用同样的表示方式。

## 复数的含义

给出复平面上的复数

它是什么意思，我们并不知道，但是我们知道：

也就是说，任何纯虚数都是对应的实数，乘以的结果。我们把这个过程叫做转动。

可知，这个转动和到的转动是同一个（或一类）过程。

我们已知到的转动的真实方式是：

也就是说，

的本质是

而写成乘以只是因为和可以“近似”相等（在无穷意义的数量上相等，在符号上不相等）。

这样问题就清楚了：

可以看出，这个表达要比

更简洁。

那么是什么意思呢？

意思就是所有的，也就是倍的所有的1，或者所存在维度的下一个中的大小（以当前维度的单位1为单位）。

比如一个点，若它乘以无穷，则是无穷个点，无穷个点可以构成一条直线。那么这条直线，就是点所存在的维度的下一个维度。或者说，点的维度是0维数，它所存在的下一个维度是1维。对于而言，就是个大小为1的点，构成一个线段单位，其长度为1个线单位，然后再重复次，也就是一个长度为的线段。

那么，

表示的就是个点单位，以及个单位线（既长度为的线段）构成的整体，其中一个线单位的长度为个点单位；或者我们再升一维，它也可以表示为个线单位（既长度为的线段），以及个面位线（既面积为的平面）构成的整体，其中一个面单位的长度为个线单位……

这样写看似没有道理，为什么把两个相邻维数的东西放在一起？实际上如果是有限数，这个做法就容易理解了。但无论是否是有限数，作为总和而言，确实是可以成立的，因为它是把两个同类的东西的数量加在一起（虽然其中一个是另一个的无穷多倍），这样说是因为，构成它的两项具有相同的基本单位：比如说一个线单位等于无穷个点单位，个点单位，以及个单位线加起来最终可以用点单位作为共同的单位。

那么，给定一个数，乘上（也就是）的含义也就清楚了：既是将这个数（它可能是含有连续两个维数的复数）的维数（共同）提升一次。

单独说，也可以认为，意味着将的维数提升一次。此时它的维数就比高一个维数。

则是（被投射到）相邻两个维数上的两个数之和（因为不在一个维数上，维数之间的关系是无限数，所以没法化简它的形式）。而它们能够合成为一个数存在，则意味着它们之间具有内在的联系：换句话说，它们是用来描述同一个事物的两个层面。而这个事物，就是这个数。

在每一项上都多了一个的操作，它看似多余，但它才是这个结果可以写出的根本原因：它是相邻两个维度之间共用的单位（其实就是低维的单位，高维的单位是）。

把它复原为我们习惯的复数形式：

这就是复数的（物理或者几何的）维数含义。

有了这些基础，我们可以继续讨论，对于一个复数，我们可以做什么，并且可以得到什么结果。首先，作为一个复数本身，它有两个部分，两个部分之间就具有内在的联系。这个联系基于它们是相差一个维度的前提。

如果我们把和当作整数，把1当作单位，那么我们就得到个点和长的线段。这个意义并不明显。然而如果我们把1当作全体，而把和当作占全体的比例的分数，那么我们实际上可以获得连续两个维数上的一种配置组合。比如说，意味着在点的维数上占据的比例为，意味着在线的维数上占据的比例为。那么一个作为一个整体就描述了三个关系。

假设我们有两个复数，

它们的单位都是低维的单位1，所以它们是同类事物，可以进行比较。现在，考虑它们的配置组合，如果

那么我们可以说它们具有相似的配置组合，而这也等价于

换句话说，这种相似性也可以抽象为一个复数自身的内在的性质。到底是什么性质呢？对于而言如果，这就相当于把也提升一个维数，于是两个相继的维数就变成了一个维数（高维）； 所以就有一个取值的范围，也就是不包括0和是希望能继续保持两个维数的组合而不是合并成一个维数（虽然这也是可以的）。我们也可以把这个比例关系倒过来，也在这个范围之间。回忆和当作占全体的比例的分数，那么若和各自都是100%（也就是1），那么

就意味着有两个相继的维数，而

意味着只有一个维数，也就是低维（无论是否等于0），那么那些在这两个比值之间的数，则意味着的维数在相继两个维数之间，比低维高一些，比高维低一些。这也就是具有某种维数配置组合的意思。具体而言，比如低维是1维，高维是2维，而的取值是1.5维，那么它就有一个对应的数。

所以说，对于复数而言，就是它相对其自身低维的相对维数的表征。

对于

它们共用同样的低维（具体是由单位1的维数决定），所以，如果

那么就可以知道，和具有相同的维数。而这个维数数值必定是连续的。

我们知道当

（相对于自身低维的相对）维数为1，当

（相对于自身低维的相对）维数为0。那么也有可能出现（相对于自身低维的相对）维数为2，为3，等等的情况；也可能出现为0.5,1.5等等的情况。毕竟维数是可以无限提升的。那么这些情况也一定都有表达方式，也就是说，所有相对维数都是连续存在的，且都应具有一致的表达方式（这就是角度：角度是维数差异的度量）。而那正是三角函数和指数函数要做的工作。在此我们只需要知道一个复数自身的虚部和实部的比值，意味着它相对于自身低维的相对维数即可。至于操作，我们可以通过这个比值找到这个复数的相对于自身低维的相对维数（反三角函数）。

正如

意味着在相对于自身为0维的维数上长度为，

意味着在相对于自身为1维的维数上长度为，

那么

在相对于自身为它所在的相对维数的那个维数（由表示）上的长度（或占比例），一定可以写成一个数值，它是的函数。

我们知道这个函数就是

导出的：

但它是怎么来的，我们后面再讨论。

由此，一个复数也可以按照它的长度（或占比例，也就是相对长度）和它和自身的相对维数，表示为一个二元组：

这就是复数的极坐标形式。也就是说，一个复数可以理解为：

在一个给定（相对低维的相对）维数上的长度（或比例）。

对于一个复数而言，只有这么两个基本属性，对应的操作可能多一些，但是都基于这两点。

比如“数乘”：

可以看出，对于而言，

这说明它和有相同的（相对于低维的）维数。另外它也只是同比改变了在相邻两个维数上的长度。容易证明的长度为长度的倍；简单说，“数乘”就是把一个复数的长度扩大倍，且保持维数不变。

对于两个复数

有几个基本操作，第一个是“加”：

显然，只有相同维数的项才能相加。这相当于在相邻维数上各自进行累积操作。也相当于在相邻的维数上进行的平移操作。

第二个是“乘积”：

数值的大小并不重要，重要的是单位。可以看出最终结果的单位为，但它并没有提升一个维度。但是，比高一维。因为的最高维，比的最高维高一维。这个操作的意思是，第二个数的低维，对第一个数的低维和高维提升0维度；第二个数的高维，对第一个数的低维和高维提升1个维度（反之也成立），在把结果加起来。具体数值则是各自占各自维度的比例的乘积。为什么要算“乘积”呢？从计算过程可以看出，这是为了提升，只是这时的提升参数，不是1个维数这样的整数维数（或者），也不是0个维数这样的实数（数乘），那么，提升就必须在两个相邻维数上同时进行；而被提升的也是两个相邻维数上的数量，所以一共是四种组合，对各个维数的结果求和并化简（如果可能的话），就得到结果。结果的最高维作为结果的维数。

第三个是“点乘”（内积）：

可以看出最终结果的单位为，它并没有提升一个维度。但是，比高一维。因为的最高维，比的最高维高一维。这个操作的意思是，第二个操作数的低维对第一个操作数的低维提升0维，第二个操作数的高维对第一个操作数的高维提升1维（反之也成立），再把结果加起来。由于意味着对基础维数提升两次，而两次提升的结果，是原来维数的相反方向，数值为相对负数。所以

如果只关心数量不关心方向，则有

如果

那么

这时候，实际上，将，求它提升一次（也就是垂直于它）的结果：

也即是说，此时和（的反向）垂直。简单说，若看到

我们就可以知道，是互相垂直的。

回到

我们知道并不在一个维数上，所以要计算它们的总和结果，首先得把它们提升到同一个维数。那么怎么实现呢？我们可以对

自身做内积：

为什么不求乘积？因为本来就相互垂直，它们在对方上的投影为0，所以它们的混合积也为0，这时候乘积和内积的结果是一样的。

由于意味着对基础维数提升两次，而两次提升的结果，是原来维数的相反方向，数值为相对负数；但是我们只关心数量，所以，

可以看出，这是一个平方结果，它不包含项，是一个只具有基础维数的数，而且它的单位是基础维数单位1的平方，那么对其开平方可以得到一个具有基础维度单位，且不包含项的结果。而这个结果，正是我们希望获得的：在相对于自身为它所在的相对维数的那个维数（由表示）上的长度（或占比例），一定可以写成一个数值，它是的函数。

给出的长度，可以求的长度：

而的长度（或者相对比例），就是

我们并不需要使用三角形的概念，或者三角函数，或者勾股定理，一样可以得出的值；换句话说，复数比几何更基本，几何定理是复数运算的体现和结果。

能够获得只有一个条件，就是（所存在的方向）互相垂直（正交），这也等价于正交或者在对方的投影上为0；那么，能满足这个条件的，都能求出一个使其值同时代表两个（互相垂直的）长度，这个值就是所描述的互相垂直的结构的真实长度（或者比例）。由三个长度构成一个封闭的形状，就是直角三角形，无论在复平面上还是几何平面直角坐标系上还是几何三维空间中，都是一样的。

令

其中，投影在高维上的长度（或比例）相对于实际的长度（或比例）的值，称为这个（相对于自身低维的相对）维数对应的正弦值：

同理，投影在低维上的长度（或比例）相对于实际的长度（或比例）的值，称为这个（相对于自身低维的相对）维数对应的余弦值：

投影在高维上的长度（或比例）相对于投影在低维上的长度（或比例）的值，称为这个（相对于自身低维的相对）维数对应的正切值：

若已知投影在高维上的长度（或比例）相对于投影在低维上的长度（或比例）的值，求对应的（相对于自身低维的相对）维数，叫做求的反正切值：

由此，复数的极坐标表示形式为：

意思是，复数

既，在（相对于自身低维的相对）维数为上的一个数量。

由于

## 复数扩展

现在，我们已经知道了复数的含义：

它意味着维数和维数的提升过程。

那么，根据这个含义，我们也可以造出一些人造的复数结构来。

比如说，如果我们不需要无限可分的实性或者连续性，那么，我们可以保留维数提升的观念和操作，但把被操作对象替换为整数，那么我们就可以得到一种叫做“整复数”的系统。同理，如果我们连正负也无需区分（比如都是正的），那么我们可以把“整复数”系统进一步化简为“自然复数”系统。事实上，如果我们认为自然数比整数基本，整数比实数基本，实数比复数基本，那么“自然复数”可能是最基本的复数。

那么，具体怎么构造它呢？首先，我们需要一个相对较低的维度，其单位为1，这一点和复数相同，只是这个1是自然数1；然后，我们需要一个高一维度的表达方式，为了区别于我们熟悉的复数的虚数单位，我们使用作为我们的“自然复数”的虚数单位。然后，它还要有一个0点，我们使用自然数0作为0点，0的补集为，但这时候，我们也只是把当作自然数中的。操作同样也可以叫做“有一个”。另外，这个系统没有负数，所以，对1进行一次提升的操作过程和结果为：

对1进行两次提升操作的过程和结果为：

也就是，环绕的周期为2次提升；这是因为没有负数，所以不需要四次。而复数需要四次的原因则在于“正负””以及“操作和结果”这两类，一共四个元素必须用2乘2的形式来表达（四个象限）。现在，我们只有“自然数”和“操作和结果”这两类，一共三个元素，我们只需要1乘2的形式就可以表达了。

但“1乘2”也是两种事物之间的关系，所以我们仍然使用二维表的形式来表现所有的结果。而二维表就是二维平面。由于没有负数，我们只需要复平面的四分之一大小的区域（一个象限）就可以表达所有的结果了。另外因为不需要连续性，我们所有的数值都在坐标轴的刻度横纵交叉的网格上，是平面上离散的点。

所以它的图像基本上就是复平面的第一象限，而上面的刻度都是自然数刻度，当然虚数部分的单位是，实数部分的单位是1。虽然1和在数量上相等，但是，作为操作和结果两类事物，是可以也应该进行区分的。

正如复平面可以表达所有的复数，我们的自然复数对应的“自然复平面”也一定可以表达所有的自然数。正如任意复数可以写成

的形式，那么任何自然数在自然复数系统中应当也可以写成

的形式。

但是，这有一个“但是”：如果一个自然数“只能写成这种形式”，那它就不是一个自然数。

为什么呢？因为一个自然数，或者是一个过程，或者是一个结果，但若说它是过程和结果的累加，就是怪异的。这就是把不能相加的非同类的东西在硬性加在一起。在复数中我们即便这么写，也从来没有把二者合并起来。然而在此，因为也是自然数的缘故，二者就可以合并了。但即便可以合并，（但在知道的实际值之前）合并仍然是错误的做法。所以正确的写法，可以是如下二者之一：

或者

这两个表达方式，都是结果的意思，前者是两个结果之和；后者指的是“‘一个’的结果””。这一点实际上直接影响了我们建立坐标系可以选择的方式，以及这种方式会产生的效果。此外，它也是一个基本定理得以存在的原因

具体为什么，以后讨论。需要再说一遍，“只能”写成

的形式是不对的，但不意味着这种形式不可用。在需要的时候（后面会看到），我们还是可以用这种形式做很多有用的事情。

至此，我们对复数系统和复平面做了一下裁剪和必要的缩并，就得到了我们想要的东西。显然我们得到的东西要比复数系统和复平面简单，所以可以认为我们得到的东西可能是更为基本的（自然结构）。

有了结构，我们应该把数如何放在这个结构中呢？换句话说，是自然数和自然复平面上的坐标的对应关系是什么样的；或者更进一步说，自然复平面上的刻度应该怎么设置？

正如前面所说，我们可以选择“加”的方式，和“乘”的方式两种都是正确的，“既加又乘”的方式是不对的。为了实现维数提升的要求，我们显然不能选择“加”，只能选择“乘”。

那么怎么“乘”呢？最简单的方式，把所有的自然数，从小到大排列，分别直接铺在两个坐标轴上。分别从两个坐标轴上选取一个数，将二者相乘，得到的结果，就是

这就是最简单的乘。不难看出，这种方法，意味着除了0以外的所有自然数，都不需要存在于轴上。也就是说，如果要求一个自然数必须以两个自然数乘积的形式表示（除了0和自己的乘积之外），那么这些自然数的坐标值就构成了两个轴所夹着的平面中所有稀疏的点，且不包含坐标轴上的点本身。这些点构成了（接近）一个完整平面的四分之一大小（尽管平面的大小是无限的），因为不算轴和原点。

由此你可能会认为，这就意味着自然数不应当包括0，因为它不符合上面描述的条件，它是一个单独的额外的点，但是在后面你会看到，它被包括在自然数中，是有道理的。

现在，我们就有了一个最原始的，“平面直角自然复数坐标系”。然而这个坐标系的信息密度太小，或者说它太分散了。有没有一种更为紧凑的形式来表示一个自然数呢？如果有，它对应的坐标系应该是怎样的？

这时候，我们可以考虑“乘法的乘法”，因为乘法已经被用于维数提升，说明乘法这个做法就是一个“压缩”的做法，而乘法的乘法，则可以写成次方的形式，也就是说，如果我们在乘法的基础上再引入指数运算，那么这个系统就可能更为紧凑。

这是什么意思呢？

有这样一个定理，叫做“算数基本定理”。它说的是，任何一个大于1的自然数，均可以写成质数的乘积，而且这些素因子按从小到大或者从大到小的顺序排列之后，写法只有一种形式。举个例子：

这时候可以看到，其中的每一个因子（比如）都是一个指数形式，虽然这个例子给出的是三个因子的乘积，但

也是没有问题的，至多只需要把结果再提升一个维数。

放下指数不说，质数的重要性就体现了出来。算数基本定理意味着我们可以用质数以及质数的次方来作为坐标轴上的刻度，这时候获得的复数系统，就能产生和“用加一生成的自然数序列做坐标轴上的刻度而构成的复数系统”，产生完全等价的效果。

而我们知道，（大于3之后）任意两个相邻的质数之间的距离都比1大，而且越来越大，所以用质数作为坐标轴上的刻度，所产生的坐标系，一定具有更大（实际上是最大）的信息密度。

那么这些质数具体怎么放置呢？我们一样可以先把0放在原点，也就是坐标为，然后，为了满足对称性，我们对横轴做出的布置和对纵轴做出的布置完全一致：把相继的质数，一个一个的布置在相继的刻度上。比如在横轴上，下一个刻度应该是，这个位置我们标上1（虽然它不被认为是质数，但我们需要它）；下一个刻度应该是,这个位置我们标上2（第一个质数）；下一个刻度应该是，我们标上3（第二个质数）；下一个刻度是，我们标上5（第三个质数）；下一个刻度是，我们标上7（第四个质数），以此类推；纵轴做同样的处理。刻度排列的方式可以都是均匀的或者不均匀的，假定我们使用均匀的刻度排列方式。

这时候，自然复平面上，两个轴所夹着的空间里面的每一个点，都对应于一个非0的自然数，这个自然数满足，或者是一个质数，也就是1和它本身的乘积，它们都在纵坐标为1的那个横行，或者横坐标为1的那个纵列上；或者是两个质数之积，它们占据除了这一行和一列之外的（离散的）面积。这里有一个特殊点，也就是1，或者，它也满足这个要求，所以在这个系统中，它可以被视为一个质数。如果它能被视为一个质数，那么0也一样应该被视为一个自然数，因为0只是对这个关系做了一个平移而已。反之如果1不被视为质数，那么0也应当被排除在自然数之外。所以我们选择1作为一个质数存在，尽管这个选择和大多数人的选择不同。

但是，目前这个系统若用于表达任何自然数，则是不充分的。因为有两点没有做到，一个是质数的指数没有体现，一个是质数的指数的乘积没有体现。也就是说，至少要先获得质数的指数表示才行。

质数的指数表示，当然也可以在这个平面里面多次升维来实现，但是非常不直观。这意味着，为了观察需要，观察者（我们）自己应当调整观察的方式，也就是说，相应的调整坐标系，来满足更好的观察的需要。那么具体怎么做？

我们可以对坐标系本身再提升一个维数。要区分开对坐标系本身维数的提升和坐标系所体现的数的维数提升这两个概念：前者是观察者自己的事情，后者是所观之物自己的事情。

具体而言，我们把平面直角自然复数坐标系，提升为空间直角自然复数坐标系，也就是增加一个第三维的数轴,显然它也包含0，加上前面两个数轴以及，构成一个空间，它在视觉上看上去像是整个三维空间的八分之一。

这个数轴上的指的是对应坐标刻度的次方结果，也就是，这时候我们就有了表达，两个质数的次方的手段。比如我们想要做出

我们在轴上找到2对应的那个刻度，也就是2，然后在轴上找到3，此时获得一个坐标；继续，在轴上找到3，然后在轴上找到1，此时获得一个坐标。其中？意味着这个值是可以任选的，所有这些值，构成一条直线，这条直线平行于？所在的轴（等号左边的符号表示的轴）；显然我们并不是要所有的符合条件的数，我们要的是一个数，也就是单位1，就可以满足条件了。所以这两个点的坐标分别为，，以及，也就是和。

现在有了两个数的对应坐标，我们继续表示两个数的乘积：我们把第一个数对应的坐标点作为开始点，第二个数对应的坐标点作为结束，画一个箭头，表示“有方向的连接”，那么，

于是可以在图像上画出一条连接两个点的有向线段来。这样，两个质数的次方的乘积就可以用图像表示了。

如果再多乘一个质数的次方呢？第一个数是在轴（和轴）上寻找坐标，第二个数是在轴（和轴）上寻找坐标，也就是从高于一个维数的轴上寻找坐标；那么，下一个数同样要在更高的一个维数上寻找坐标，因为维数环绕的原因，我们得再次回到轴上寻找坐标，所以第三个数，比如，它的坐标应该是。

所以，三个数相乘，我们也可以按照画有向线段的方式来实现：

在图像上，这是一个三个点构成的折线。如果把这三个点，闭合起来构成一个三角形，那么它在三维空间中的样子如下图所示：



根据以上给出的方式，任何自然数，都可以在我们给出的“空间直角自然复数坐标系”中表达出来。令

那么，任何自然数可以表示为：

如果其中的某一个并不需要（就像中不含5和7等质数，以及超过17的其它质数）那么，只需要让，就可以了。

它在“空间直角自然复数坐标系”（简称空间）中，是一个从开始，经过一系列的点构成的折线；这些点的第三维坐标为自然数，前两维的横纵坐标具有一定的规律，这个规律是，所有第偶数个点的横坐标为质数，纵坐标为1；所有第奇数个点的横坐标为1，纵坐标为质数。根据自然数唯一分解的原则，这个序列也是唯一的。

由于所有的自然数将填充整个空间，也就是说，这些折线将会填充整个空间，反过来，整个空间是由这些折线构成的。

既然

可行，而且我们在选择指数的次方对应的点的时候，出现一个？，也就是说，那个数值可以任选，那么，我们也可以用一种更为对称的方式来表示：

也就是说，让我们重新选点，对每一个质数的次方选一个更好的点，使得它具有更好的对称性。这时候可以看出下标的规律，如果只看下标，则规律为

这是一条直线，它是整个空间的对角线。

为什么要看下标？因为对于（除了所在维数之外的）前两个维数它正好就是坐标轴的刻度，也就是说，我们最开始的时候就已经，通过求质数的序号（第几个）的方式，把不具有相等间距的质数映射到了相等间距的坐标轴上，以获得最大的信息密度。

这么做，我们又把自然数压缩回二维的平面上，它的横坐标是质数序列（的序号），纵坐标是它的次方。而一个自然数，是这个二维平面上的一条折线。这个平面垂直于质数和指数的提升所构成的复平面，位于两个轴构成的直角的角分线上。

到目前为止，一切似乎都是恰当的，但是，仔细观察，它其实也是

也就是说，我们对指数的处理是不彻底的。指数本身也应该分解为质数的指数的乘积形式。

也就是说，

其中，

其中，

这也是一个递归过程，可以被无限扩展下去

用这种方式来表达的自然数，它所有的因子都是质数的乘方表示，所有乘方的因子都是质数的乘方表示，由此无限扩展下去。

这相当于：

也就是图像上的每一个点的第三维，被扩展成新的三维（这时总共5维），新的三维的第三维又被扩展为新的三维（这时总共7维），每次扩展增加两个维数。这样一个复杂的高维结构，才可以完全使用质数的乘积和指数运算，来描述所有的自然数。用折线来描述最外层点和点之间的关系，那么在每个点的内部，仍然是折线描述内部点和点的关系，这些点又是更内部的折线描述的点和点的关系……

这就是任何一个自然数，在自然复数表达方式中的结构。

这么看来，这个结构似乎不包括0，但是，0实际上是包含在第三个维度里面，用来说明“某个质数的0次方等于1”的。所以它已经在系统中存在了，它理所应当的作为自然数的一个元素，也就是说，如果没有它，就没法构造任意自然数了。所以，包括0,1，以及所有其它质数，就可以构成任意自然数。

可以看出，这个高次表达方式，有点过于复杂了。这主要是因为我们在最开始的时候，就引入了升维的方法，这个方法会产生一个高度可视化的结构。但是，这个高度可视化并不必须，我们实际上可以用一个更平坦，更少维数的结构来表示相同的东西。

对于

如果我们不把相间隔的质数分配在两个坐标轴上，而是都放在一个坐标轴上，并去掉虚轴，是完全可行的，这时候，用两个维数，也就是就可以构成一个因子，一个自然数可以写成，若干或者无限多因子连接成的折线（都在一条直线上的折线），这时候

对其中的做维数扩展，

这个表达式其实和的展开式也很像，但是要注意每一个层次上最后那个“”，意味着还有无限多因数要做乘积。

它的初始维数是2维，分别为质数轴和它的指数轴；指数轴可以被扩展为新的两个维数，这时获得3维，继续扩展它的指数轴，又获得新的两个维数，这时获得4维；每扩展一次，增加一个维数。

这个结构如果用程序表达应该这样写(C#)：

class N

{

public List<P> Factors = new List<P>();

public BigInteger Value

{

get

{

BigInteger r = BigInteger.One;

foreach (P p in this.Factors)

{

r \*= p.Value;

}

return r;

}

}

}

class P

{

public BigInteger Value

{

get { return FullRangePow(p, n); }

}

public BigInteger p = BigInteger.One;

public N n = N.One;

public static BigInteger FullRangePow(BigInteger p, BigInteger n)

{

if (p < 0) throw new ArgumentOutOfRangeException(nameof(p));

if (n < 0) throw new ArgumentOutOfRangeException(nameof(n));

BigInteger c = BigInteger.One;

if (n > int.MaxValue)

{

BigInteger pm = BigInteger.Pow(p, int.MaxValue);

for (; n > int.MaxValue; n -= int.MaxValue)

{

c \*= pm;

}

}

return c \* BigInteger.Pow(p, (int)n);

}

}

也就是说，其结构为，每一个N为一个元组列表，每一个元组由一个质数和一个N构成（大多数情况下，这个N显然是一个合数）。

不难看出，这个结构的展开结果，是一棵树。

对于一个给定的任意自然数N而言，它就可以用这种方式分解为若干维度的以上结构。这个结构其实占据两个维度，我们把这两个维度叫做一个周期。实际上我们可以看出的值域就是N的定义域，的定义域就是N的值域。于是，虽然它是一个展开之后是一个具有非常大的深度的树形结构，但是彼此互相提供的定义域和值域使得这棵树的展开具有2维周期性。我们把这两个维度叫做PN过程的一个周期。

一旦意识到周期性，也就是定义域和值域的互相提供，我们就可以掌握逐渐产生自然数的扩展过程来了。

在我们的系统中，任意自然数，都是质数构成的。所以质数是基本的，其它合数是衍生的。换句话说，质数应当先于合数存在。很可能自然中就是如此。然而我们却无法立即获得所有的质数。我们只能通过质数和合数的关系，来获得更多的质数。然后再反过来产生更多的合数，循环迭代，进而产生所有的自然数。所以说，我们需要一个产生所有自然数的程序（也就是算法），它自然也必须能产生所有的质数。这就是先前所说的扩展过程。

那么，究竟怎么做呢？

首先，没有自然数。这是一切的起点。但是根据结果和操作，我们可以把“没有自然数”，分解为“自然数”乘以“没有”：

这时候，我们定义“”为“没有”；由“没有”这个操作，对于一个对象“”进行操作对的结果，叫做。也就是说，在“没有”操作的基础上，同时定义了和。可以看出，和，可以是任何东西，比如：

不一定是数。关系“没有”本身才是我们所关注的。而这个

也就是从数量上来说，操作的数量为。而当我们说“乘以0”的时候，实际上我们说的正是，去掉“乘以”，我们说的或者是0这个结果，或者是这个操作。

此时，作为“没有”这个运算过程的结果，让我们把0放在（目前所知的全部自然数的）值域里面。并认为这个具有1个元素0的集合，这一次操作的值域，是下一次操作的定义域。

不仅如此，也可以被当作对0的提升（或者提升的结果），也就是说，若问：“”这个结果是如何从0产生的？应该写成：

答案是，

既是，通过提升产生的。而通过“几次”提升产生的？则是在问的数量。我们规定了它的数量：

也就是说，若只看数量，则有

“”是一个整体，其中“0”和“”还有“”是通过并置的方式结合在一起，同时定义的。所以并没有“0”先于“”存在还是“” 先于“0”存在的问题。可以认为它们是同时并从来就存在的。而1作为的数量也是和同时定义的。当然也可以认为它是“ ‘’这个结果是如何从0产生的？”这个问题的答案的数量。而正是

得以成立的基础。可以看出，这个表达式的含义是:

也就是0相对于自己的数量是一样的。

由此也可以知道，若有自然数，则

那么实际上对于，也有

所以，对于包括0在内的任意自然数而言

至此，我们从0获得了1。为了配合PN的结构，我们认为1是从只具有个元素0的先前的值域作为此次的定义域经过运算得到的。而这个运算过程，就是

对于PN过程的第一个层次而言，我们是从P开始，还是从N开始呢？其实也是没法分清的，因为0和1，几乎是同时定义的。如果我们硬性的将0作为开始，那么可以写成：

看上去，这像是一个

的形式。但除非有一个因子等于0，才能等于0，而是质数次方的乘积，无论任何数的任何次方都不能等于0（可以等于1，如上所述）；所以不可能为0。所以0不符合形式，也不符合形式，所以0，既不是质数，也不是合数。这是一个“非A且非B”，也就是“非（A或B）关系”。

这也符合逻辑，因为我们只能从既不是质数也不是合数开始的初始条件，逐渐计算得到质数和合数。

0不符合形式，那么1呢？我们目前只有0，但是可以通过

来获得1，这时候不用关心它的指数不符合任何形式，只需要关心它的结果。那么1符合形式还是形式呢？

假定我们已经预先设定了1为质数，则有三种情况，

根本无法成立（不存在）；

同样无法成立（不存在）；

这样写也不对，因为这要求0是质数，但0已知不是质数。

所以只有

也就是说，若1是质数，将只能从0不是质数也不是合数这个前提下导出，而且它也不是由产生的。所以它只能是由自己产生的；同理若它是合数，那么它也是由自己产生的。所以从这一点来看，可以认为对于自然数而言1比0更基本，也就是先于或者至少不后于0存在。无论认为它是质数还是合数，它都没法从既不是质数又不是合数的0产生，那么它只能是0的补集（取反），所以认为1是质数不是必须的，它可以是质数，也可以不是质数（是合数）。这是一个“A或B”关系，它正好是0所表达的“非（A或B）”关系的否定。而A和B又有着“A既非B”关系：

结果：

也就是，总结一下得到：1既是质数又是合数。所以，它就不是一个“纯质数”；如果我们需要的质数实际上是纯质数，那么1就不应当被认为是质数。在下文中，我们（若不作说明）讨论的质数都是纯质数，并且认为1不是纯质数，也就是说，不是质数（这样就和普遍的观点一致了）。

现在，在值域（也就是下一个运算的定义域）中，我们放入1，并把它标为“合数”。或者把它在合数集合中放入一个拷贝。

目前我们只有乘法可用，因为这是整个系统得以建立的基石。但是，我们也清楚的知道，只用乘法是无法构建全部自然数的。因为质数和质数之间没有倍数关系。这意味着我们要引入加法才能获得更多质数。但是这又不被允许，那么怎么办呢？事实上，指数为我们解决了问题，

也就是说我们可以用指数上的加法替代底数上的乘法。换句话说，这是唯一允许我们使用加法的地方。由此，从1获得2，就可以通过“”操作来实现了，而这个操作，必须在指数上进行：

我们把它放入值域（也就是下一个操作的定义域），并将其标记为“质数”，或者在质数集合中放入它的一个拷贝。这是因为它是“质数之间相加的结果”，也就是1和1相加的结果，而不是两个数相乘的结果。不考虑它是2和1相乘的结果，因为1是质数也是合数，当认为它是合数的时候，2则是质数和合数相乘的结果。不仅如此，若认为1是合数，任何数都是它和合数相乘的结果，也就是说，任何数都是合数了。为了避免认为任何数都是合数，只能要求1不是合数。但即便是质数，2和1相乘也是质数和质数相乘的结果，还是合数。所以，无论是质数还是合数，都不能乘以任何数，乘以任何数都导致结果为合数。所以说，认为1既是质数也是合数并没有错，但就是不能和其它数相乘来代表质数或者合数，因为结果是一样的。

3也只能通过指数上的操作来获得，

我们把它也放入值域（也就是下一个操作的定义域），并将其标记为“质数”，或者在质数集合中放入它的一个拷贝。这是因为它是“质数之间相加的结果”，也就是2和1相加的结果，而不是两个数相乘的结果（原因同上）。

在2和3两种情况中，

虽然看上去像是，但是合并的结果，却是，所以它本质上还是（也就是质数的次方）。按说在的位置上应该为合数，但是它们却是实在的质数。这说明只能有一个次方非零的因子，其它因子的次方都是0，或等价于其它因子都是1：

也就是说，若要求为的质数次方，则那个次方展开之后，只有一个因子。

如果按照3的逻辑，4也应当从操作来获得，然而，若让普通乘法先于指数（也就是加法）计算，那么我们将不会首先进行

而是会先进行

这个做法的实际目的是尽量避免在指数上进行提升。能在当前层面上提升的，就不要在质数上提升。当然当前层面的提升也会映射到指数，但是数值一定比指数提升的数值要小。而这些加起来，我们将会获得一个信息密度尽可能大的表示方式。

其实，从引入1开始，若认为1是质数，而必须由质数的和构成，那么这时候系统就已经失控了。因为通过无限次的操作可以获得所有的自然数。这不是我们想要的结果，由此，我们可以把1从质数中排除，当然，也可以接受这个结果。也就是说，根本不做更深层次的展开，一个周期即可实现获得所有自然数的目标。

具体的展开程序将是非常复杂的，它可能涉及到并行计算和多线程同步等问题。我们不打算具体去实现它，但是可以知道，若自然要从0开始产生一切自然数，那么它也必须遵循同样的过程；或者说，这个算法就是自然数发展的过程。

现在，我们假定所有的自然数已经生成完成，并且其质数还是合数的属性已经被标定，那么我们可以考察，所有自然数的性质，所有合数的性质，尤其是所有质数的性质。

算法的本质，不难看出，就是筛法的动态规划版本。

而筛法本身是简单的，具体说：从2开始（1不算质数），留下2，把所有2的倍数都划掉；下一个自然数是3，留下3，把所有3的倍数都划掉；下一个是4，但是4已经划掉了，所以下一个是5，留下5，把所有5的倍数都划掉……以此类推。

可以看出，这种留下，以及划掉之间的关系，是一种“补集”关系，也就是说，负数的概念也可以移植到这里了。

具体而言，除了2本身，所有2的倍数可以写成：

除了3本身，所有3的倍数可以写成：

那么，除了质数本身，所有其它的倍数那些合数可以写成：

（三个表达式的右端，故意不写成同样的形式或者长度以示区分）

我们把这些质数的倍数也就是合数，叠加在一起，作为整个筛子（的绝大部分），

这里需要注意一点：如果筛子要作用于有限数，那么，每一个质数的倍数，也就是这些的长度是不一样的。按说是不能提取公约数的。然而，若筛子要作用于，那么所有的质数相对于无限的大小都是可以不计的，可以认为是0，也可以认为是同一个单位。那么这时候的长度就是相等的。于是可以作为公约数提取出来；从另一个视角来看，也可以认为存在“质数单位”，使得所有的的长度都是相等的，这时候当然可以作为公约数提取出来。这种方法来自于对无限的理解，但是这不意味着由这种方法产生的结果就完全不适用于有限范围。

有了筛子，我们从中去掉筛子所对应的合数（也包含多次出现的）以及1（既是合数又是质数，我们不认为它是质数，所以它只能是合数），那么剩下的，就是所有的（纯）质数。

令

可以得到

这是用负数表示补集而获得的结果，继续：

则有：

继续代换：

也就是说，

由于很大，它的倒数就很小，倒数的2倍也很小，然后作为负数，它非常接近于0，或者等价于，接近于。如果按照复数的做法，我们定义

但不同于，自然数中没有负数，所以只有：

那么可以算出：

代入：

若只考虑数值，不考虑所意味着的过程，则会产生环绕。但这是可以接受的，于是，使用1替换相应的：

这就是所有质数之和的负数（复数）表示。它意味着比少个单位的无限集合。

一个没有分数的系统，却产生了和无限具有分数的差值，这是可能会让人非常的困惑，然而（可以检查）这里并没有推导的错误，只能说，这正是无限让人难于理解的地方。

需要指出的是，看似这个值比少个单位；但是它的表达式指出，这个很可能也不是普通的，而可能是或者。所以少个单位实际上也很可能是个单位。这是环绕造成的问题，让它的结果违反直觉。把环绕的因素考虑进来，结果就对了。

而的倒数，

为什么要求所有质数之和的倒数？我们可以假设，对于无限而言，所有的质数不分大小，都是一样的，都是单位。那么5个（一样的）1也就是5，它的倒数就相当于，把5当成1个整体，反过来求它的单位（也就是1）的大小。由此可知，求质数之和的倒数，就意味着，假定我们认为所有的质数都是一样大的，它们构成一个整体，若把整体当作1，反过来求它的单位的大小，那就是，换句话说，它是一个“单位质数”相对于的大小。这个值距离0也就是的距离为3，也就是更远一些，这个负数对应的正数也更小一些（也许就是3本身），相对于更近于0即的对应的正数而言。从这一点上来说，至少逻辑是正确的：单位大小要小于整体大小。

有了

实际上我们还可以计算，如果相差1，对应的所有质数的和能相差多少：

但也许，的倒数的差值更重要：

结果也是一个负数。意味着更大的对应更小的，或者说，随着的增大，的密度在减小，而且密度的减小是均匀的，线性的。

是什么意思？对于每一个质数而言，都是它重复的次数（大于1），是筛子作为一个整体，在特定质数分量也就是一层上的排列方式，也可以叫做这一层“网孔”的排列方式；但是这个网孔和普通筛子的网孔相反，这个筛子的网孔不允许特定数值（合数）通过，而没有网孔的地方，则允许特定数值（质数）通过。

这个筛子可以被认为具有无限个层次，每一个层次的网孔密度都是不同的，当这个筛子的长度是有限的前提下如此；是无限的前提下也可以认为所有层次的筛子网孔的密度都是相同的，但这又使得无限层次等价于一个层次了。不过即便是一个层次，它仍然是一个筛子。

我们无法处理无限，只能处理有限，我们真实的筛子，只能有有限长度。这个长度能处理的则是一个有限的自然数范围（从0开始的范围）。那么，一个有限的自然数范围需要一种什么样的筛子来处理呢？或者说，最多多少个网孔，最少多少个网孔？

网孔数量，应该等于总长度除以网孔的间距。

所以最多，需要长度除以2那么多个网孔；最少需要长度除以已知的最大质数那么多个网孔：

这其实给了我们一个提示：对于有限范围而言，已知的最大质数，可以影响也就是的取值。我们知道：

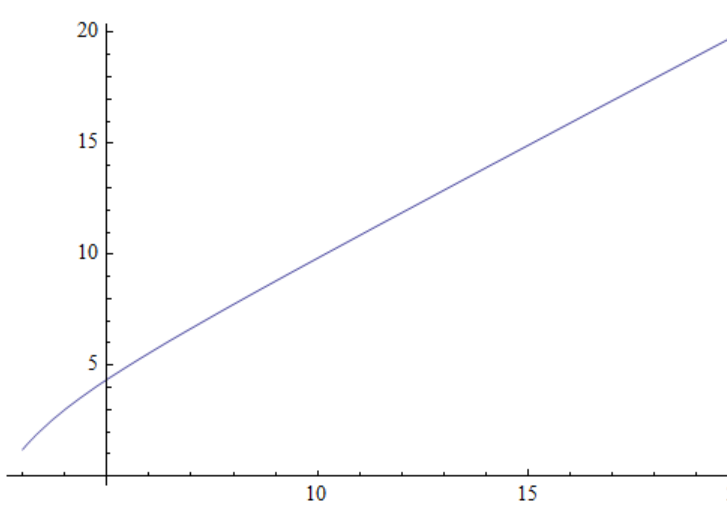
若为有限数，则可以写成：

若选择筛子，至少要有那么多个网孔（原因？）。

给定了，那么也就是，在自然数范围内的质数的总和，它将会随着长度来变化。换句话说，，若再复杂一点，，也是可以的。具体来说，我们可以根据现在知道的最大质数，求出下一个质数来。那么，从第一个质数开始，总能求出下一个质数，我们将可以求出全部的质数，换句话说，也就是质数公式。

这是一个负数结果，真实的质数之和应该是正数结果，我们进一步把它调整为：

令，画出图像为：



例如，对于而言，最大的网孔大小向上可以取为7，那么，所有的网孔大小也就是质数则为这些质数的和。这和图像的结果是很接近的（此时函数值约为19.9569）。

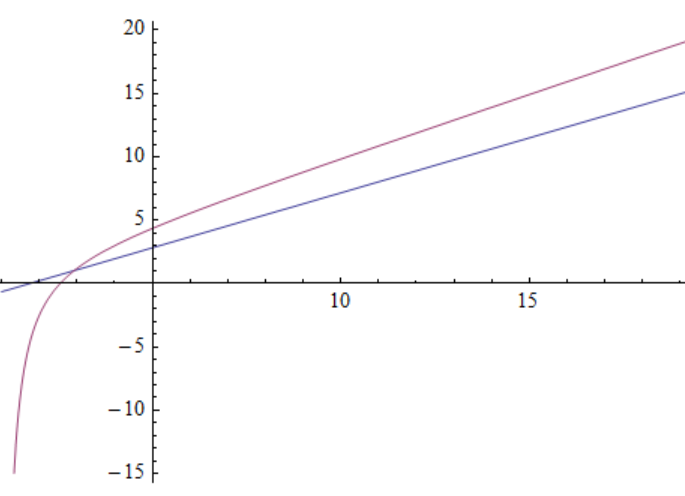
以下为实际的前几个质数之和相对于给定范围的增长而变化的图像：



以下是用这些散点拟合的图像：



以及两个图像的比较：



其中红色曲线为的曲线 ，蓝色为离散数值的拟合曲线。可以看出横坐标大于3之后二者的斜率是非常接近的。

由此可知：

的意思是，假定在每一个位置都有质数，那么在这个位置的质数就是。

显然这只是一个假设，只有很少的位置上才有质数。但如果有方法判断是不是质数，

//算法细节：

然后，关于

它指的是，任何一个偶数都可以写成两个质数之和（这是简化的描述）。

它实际上就是哥德巴赫猜想的形式，或者说，最终形式。现在，我们已经有了陈式定理，它说的是，任何一个（充分大的）偶数，都可以写成两个质数之和，或者一个质数与另外两个质数乘积之和。这就是形式。

现在，让我们假设，存在一个偶数，只能写成形式，那意味着什么呢？根据我们对维数的理解，它就意味着两个相继维数的加法（出现乘法就意味着提升，所以要乘上虚数单位）。也就是说，

对应于复数而言，相当于它具有非整数的（比如分数的）维数；对于派生于复数系统的自然复数而言也是如此。然而，整个自然复数系统的构造完全建立于自然数的乘法（以及对应的次方累加）运算方式，也就是说，根本没有办法在这个系统中产生分数或者其它非整数或者非自然数（相对于无限以及负的分数另有意义）；由此，也无法产升非整数或非自然数的维数。换句话说，这个数无法由系统产生，也不是系统的成员。既，它不是自然数。

而我们已经给出假设，存在这样的一个偶数（显然是自然数），只能以这种方式存在；结果获得的是，它不是自然数，或者说这个偶数不存在于自然数之中（自然数中缺少这个偶数），这就和假设出现了矛盾，所以假设不成立。也就是，存在一个偶数只能写成质数和另外两个质数乘积的和，不成立。

那么，为了保证不缺少任何一个偶数（缺少一个偶数是不可能的），关于任意给定的偶数，就只剩下一个成立的描述方式，它就是：任何一个偶数都（至少必须）可以写成两个质数之和。

由此，形式得证。

那么这个猜想，或者定理，对应的数学意义是什么呢？

它意味着，自然数是一维线性的：所有自然数的总和只占一个维数，可以完整的放在也一维空间里面，而不会溢出。换句话说，它和一维空间具有等价性。这也就是我们可以用它来作为数轴的刻度的原因。

另外需要说明的是，若要对于包括2在内的任何偶数都成立，则需要认为1也是质数。这和我们认为“1既是质数又是合数”并不矛盾。若认为指的是纯质数，则质数应当表示为：

所以完整的形式为：

你可能会怀疑这个证明的正确性：换一个系统，可能就不会有这个问题吧，比如一个只用递增1来构造的自然数系统？然而可以证明，不同的系统，只要产生相同的结果，它们就是等价的。事实上从可以含有指数相加的形式，就已经说明，递增构造自然数的方法是蕴含在我们的系统之中的，是我们的系统不可缺少的一部分。由此，可以说，这个证明是完整的。

既然自然数是线性的，这就意味着，它的维数是从1开始的。那么任何自然数的表示应当可以（而不是只能）写成

这才是自然数的正确表示方式。它本质上就是“虚的”。

有了这些作为前提，让我们看以下对一个自然数的操作：

比如自然数

这里我们省略两边都乘以的一个，也就是把本质的虚数当做实数来算。要说明的是，我们是故意把一个可以放在一维空间的自然数写成两个相继维数的和的方式，我们这么做是为了下面的讨论做准备。

现在，有了这样一个自然数，我们要对它进行转动或者说升维操作，具体来说，就是把它转过的角度，或者提升等价的维数，我们应该可以得到一个新的自然数。虽然写成了的形式，虽然是进行了维数提升，但是，这都在乘法范围内成立，所以提升的结果，也不会超出自然数范围之外。也就是说，

然后，提出一个问题：对于

的展开式，如果加上或者减去若干项，得到的结果，再反转次，尝试回到

的形式，那么这时候，它是否还是一个自然数？

这个问题等价于：

是否可以从一个自然数的次自乘来获取。

现在让我们只考虑减去若干项的情况（加上是一样的，减去则更简单）。

我们知道，对于

它可以展开为：

现在，若我们把展开结果的最高次之外的其它项都减去，只剩下最高次项，再看看回转之后会有什么结果。也就是说，我们关注的是

是否可以得到自然数。

对于，也就是对于进行1次提升，经过处理之后，再进行1次调低。

去掉其中的项，得到

现在我们要把调低1次，且只看数量（不考虑）：

若要满足结果为自然数，则必须有

为自然数，因为被减数是自然数，减数也必须是自然数，这样差才能是自然数。

除了之外，其它值都无法使得结果得到自然数（都是分数）。

为什么要求这个结果为自然数呢？因为，如果它不是自然数，那么由任意高次提升返回的调低过程，一定会经从2次到1次的调低过程，由此，也无法得到自然数：这个系统无法产生系统之外的结果。也就是非自然数无法用产生自然数的方式产生。那么一旦出现非自然数，就不必再考虑用自然数去产生它了。一旦在低次发现无法产生自然数，就再也不需要在高次考虑用低次的自然数去产生它了。

虽然有一个特例，，但此时，

仍然不是一个自然数的平方，它开方的结果也不是自然数。也就是说，一旦经过剔除低次项，只剩高次项的操作，从2次返回1次，或者从任意高次返回1次，都不可能返回自然数状态。或者说，用“乘积”的方式来获得自然数是无法实现的。

那么，为什么还有

呢？

我们已经尝试过“乘积”，结果失败了；现在，我们只剩下“内积”可用了。

这也是一个乘法和加法操作的组合，显然它也必定产生一个自然数结果。剩下的无非是，这个结果是否也是自然数的平方。我们可以做如下代换，以保证结果是一个自然数的平方：

可以看出，以内积的方式，确实可以获得，两个自然数的平方和为另一个自然数的平方。

如果再做一次内积呢？

要知道一次内积的结果，是一个数，但也是一个高维向量（因为它的单位是，具体参考前面关于复数的讨论），只是它的虚部为0，所以：

再做一次内积：

可以看出，次内积的结果为：

或者严格的说，

也就是说，用内积方式获得高次方的和，只能得到这种形式。

这个系统只有两种这一类的运算，也就是乘积和内积，然而第一种方式，提升到2次以及以上，就无法还原；第二种方式，当，我们得到的形式就完全不是需要的：

形式，而是

形式。换句话说，只要，

就无法从系统的运算中产生（这是一个以乘法为基础的系统）。

那么其次方根，

也不可能是这个系统产生的。

所以，

也就是，对于自然数（或正整数）而言，若，则不定方程

没有自然数（正整数）解。这是“费马大定理”在“自然复数”系统中的一个证明方式。

总结一下，无法实现

是因为

在

时，作为一个整体结果，无法从自然数和自身的乘法（两种乘法的任何一种）来获得，所以也不能写成自然数乘次方的形式；意思是，它只能是加出来的（只有乘和加两种运算）。

让我们继续考虑自然数相关的问题，也是最后一个问题。

考虑这样一个等比数列前项的和：

如果把两边都乘以，可以得到：

继续计算二者的差

若令，则有

如果，且令则有

此时，我们令

继续，我们让，也就是让为质数，

现在，我们求所有的乘积：

不难发现，这个值就是所有自然数（不包括0）的倒数之和，也就是

进一步，如果我们用替换，则可以得到

这个关于的函数，就叫做黎曼Zeta函数：

那么，它是什么意思呢？

它是自然数的若干次方的倒数之和。从前面的分析我们已经知道，求一个自然数的倒数，相当于求它的单位：5个单位1为5，相对于5而言它的1次单位就是（5的）；那么它单位的单位，就是5的的也就是，那么它的n次单位为。意味着所有自然数的次单位之和。为实数，但它也可以是复数：

的形式。只是这时候又会涉及无限而已。同样由于相对于无限，任何有限数的大小都可以认为是相同的（接近于0），所以这些不同自然数的次单位可以认为都是相等的。对于无限的整体，它乘以次单位，就获得了次实性，也就是说，

累加所有这些实性的结果，得到完整的实性，

而这个实性的程度，相对于（或者任何有限范围）而言，可以度量：

也就是说，指的是：以所有自然数的次单位之和为标准对（或者任何有限范围）进行实性程度的度量的结果。

在这里，我们使用了

这其实是一个示意性的做法，或者说，非常粗糙的等价。考虑任何一个数（无论有限还是无限），我们如何用单位来度量它？

显然，最粗糙的方式，是用最接近它的已知数来度量它，比如对于而言，要度量它，最粗糙的方式是用自己来度量自己，这个结果永远是1。但是，对于一个不知道大小的数呢？我们只能用尽可能大的单位来尽可能粗糙的度量它。结果也会是一个有限数；正常情况下，还有一个余量。要完全度量它，我们还要继续度量它的余量。这时候，我们只能选择一个比原来的尺度更小的一个尺度作为单位来度量它；同样也会得到一个有限数，和一个余量；继续，我们只能用更小的单位，并得到有限数和余量。直到我们没有更小的单位为止，当然这时候，余量只能舍弃了。

现在，假设，我们只有自然数可用，并且用它来度量自然数。被度量的自然数可以是有限数，或者无限本身。那么更小的一个尺度就是先前一个自然数减去1；另外，一个0.5这样的数可能就只能被舍弃了。但是，如果我们要把单位本身继续度量下去，那么0.5就相当于把1当做10前提下的5，这时候，又可以继续度量了。

假设我们要用自然数作为单位度量无限本身呢？那么可以知道，最后一个可用的最小的单位只能是1，最大的那个可用单位将会接近或者根本就是无穷本身。我们把这些单位从小到大排列，显然也只有一种排列。如果对于给定数只进行一个层次的度量，就像是把0.5舍弃而不探究它的可度量性，那么我们就得到一个序列：

如果我们要对其做超过一个层次的度量，我们我们也会得到类似的序列：

可见，其中是度量的深度。如果指的是无穷本身，那么我们将会得到的是，

那么以这些单位为基础来做出对无穷的度量，就相当于我们对一个波形进行频谱分析，求出它每一个高次谐波的强度，当然，对于本身而言，对应于一个给定的度量深度，它只有一个频谱，所以把这些每个分量上的强度加在一起，就可以认为是用这种方式的这个深度度量而得到的特征值，

而这个特征值比上，就是这种方式在上对进行度量的（相对）结果。

既然给定的对于进行度量只会产生一种频谱，那么我们可以假设，就只用一个频率来度量就足够了。我们假定这个频率为，我们认为它是一个自然数，虽然实际上这根本就不可能。它只是一种方便表达的方式，至于到底是多少，我们不知道。

此时，

这时候，我们就可以用一个来理解一个自然数无穷序列的和中的每一个自然数；因为我们已经假定了它们是“相等的”。这里的显然也和中的是不相等的。我们目前只假设他们是相等的。

如果难于理解，那就让我们用有限的例子来做类比。比如，被度量的这个数量为5，它就对应于（或者），而自然数单位为2，它就对应于。我们要对5进行一个层次的度量，这就对应于。

显然这个结果有余数，或者说，不是2的整数倍。

我们要的度量，是没有余数的度量：因为我们把所有频谱分量都加在了一起，它的余数只能小于自然数1（且大于0）。换句话说，那个结果一定是没有余数所对应的“某一种1”。所以选择2作为是不够的。让我们选择5作为：

这是我们需要的结果。对于其它的，以及结果和对应的无限结果，可以列举如下：

若

综合在一起可以看出，

从这些列出的值可以看出，是数值倒转的分点。

也就是说，

现在让我们回来看真实的的取值情况：

这里出现了一系列的“不可思议”的结果。然而，如果回忆一下复数系统处理无限的时候会因为环绕而造成不符合直觉的结果，那么这些结果就是可以接受的。我们可以通过有限的例子（比如5的例子），来推出结果到底是如何对应无限的；也就是说，去掉环绕的影响，还原结果的本来面目。比如：

而那些等于0的取值，实际上说的是的高次方在上的投影为或者，也就是0：

对于正整数值：

为什么能够还原它的本来面貌？

让我们只看一种情况：

这正是我们使用1来作为单位度量的情况，而这个结果正是：

也就是说，用无限多个1度量最终会产生一个用1无法度量的余量，它是。实际上也可以是别的小于1大于0的实数，但获得的正好是，则说明了这种度量方法是具有极限精度的。此外，负数意味着正数（相对于）的补集，也获得了证实。

那么，应该怎么理解？

让我们做一个对比：

可以看出，同样趋于无限，但比在给定同样有限项的前提下，数值要小；或者说，趋向无限的速度要慢。所以不可能有

然而

又是成立的，所以只能认为，和对于的解读不同；

考虑

它相当于对函数

在离散值上求“积分”（也就是求和，或者求图形面积）。它显然不是一个三角形或者梯形，但是，它在数量上可以相当于一个三角形或者梯形的面积。对于有限数，它的面积，一定小于对应的三角形或梯形的面积：

当,

所以的意思可以认为是

由此，我们可以对还原之后的函数值做一个排序：

越小函数值越大，这一点和是一致的。

注意：

从这个关系可以看出，存在一个，

是一个很关键的点，我们知道，

这一点很关键，因为它来自于求三角形（或梯形）的面积：

这个三角形（或梯形）的两个直角边长度是相等的（等腰直角三角形）。当两边的长度都是本身（但单位不同）。把这个面积还原为累加的形式：

它的每一项都是无限除以一个自然数（除0之外）的倒数，这相当于用无限除以这个自然数获得的值来度量无限本身。这显然是用自然数方式对无限进行度量能够获得的最大精度。而且，它不是，它比更基本。为什么更基本呢？

我们可以借用无限的关系来推导出的环绕值：

反过来再导出和自身的关系，可以得到：

这也可以解释，

由此可以知道

才是它的真实值。现在再排序：

还记得，我们用1度量，得到余量为吗？如果再多用一个1呢？我们将会得到一个环绕结果，它就是，也就是说，

所以和都是（在自然数基础上）的体现，相当于

更基本是因为它比更接近。

回忆那些：

的本来含义，是对的投影为0；那么在自然数度量的前提下，只能是对

二者之一的投影为0。因为这些值都在负向上，所以它们应该是对

进行投影获得为0的结果，也就是说，

由此也不难得到，一定也有对

进行投影获得0的结果，也就是说，存在

我们知道，相对于投影为0的，它们的（这些点叫做平凡零点）；

那么，这些相对于投影为0的，它们的（这些点叫做非平凡零点）应该是什么样的？

在继续讨论之前，我们先看一看平凡零点，

是怎么实现的。比如说，

我们知道对于有限数，

将

而

两者相比较：

也就是：

回顾：

可以看出，函数的参数，最终决定了非环绕结果的指数。也就是

我们也知道，

所以实质上函数的参数直接决定了结果的倍数。那么观察，

就不难看出，必定具有：

的形式（必定含有系数，可以通过变换作为实部单独提取出来）。

现在，让我们考虑产生的第一个“提升”（实质上是调低）结果，它也应当符合正交的原则，也就是说，

不同于

二者的比例关系是相反的。这是因为，（在实轴正半轴）随着增大逐渐减小。

具体来说，是需要一个

使得

这种度量方式获得的对无限的度量，得到的结果是度量结果的。这显然是用精度更低（更粗糙的尺）的单位来度量才能获得这种结果。而如果为正实数（负数是平凡零点存在的空间），且，那么我们只能得到更高精度的单位度量的结果（无法出现），所以若为实数，它就不能大于。由此而言，它只能是一个复数（无限数）。它所对应的有限数，其非环绕的真实值是小于的，但它写出的形式，却不是小于的。符合这个要求的，就只有

的形式了。不仅如此，所有的基于的“提升”：

都存在同样的问题。也就是说，所有能够使得相对于的环绕结果为0的那些都是复数，且它们都有共同的实部，它们都可以写成

或者说，的所有非平凡零点都在平行于虚轴的直线

上。

## 时空

回到点的例子，如果我们令点的维数为0维，所有点构成了维数为1维的“直”线（具体说为无限多点首先构成了“直”线的单位，然后无限多线的单位构成了无限长的“直”线），所有“直”线构成了维数为2维的“平”面，所有“平”面构成了维数为3维的“立体”；或者，以空间而言，所有0维空间构成1维空间，所有1维空间构成2维空间，所有2维空间构成3维空间。那么，4维空间在哪？

换句话说，为什么物理或者几何空间只有四个维数而没有五个或更多 ？

观察

而

也就是说，并不是没有第五个（第四维），而是它按照乘以无穷的方式升维的结果，和0维等价。或者说，它被投射到了0维上。或者说，它也是三维空间中的一个（0维的）点。由于这种投射方式，任意维，最终都会被投射到

维上（意思是它对应于相应维的一个实数）。这就是我们看不到高于三维（或者低于0维）空间（或物体）的原因。从复数的复平面空间到物理和几何空间确实有一段距离，但可以证明，物理或几何空间只有四个维数的原因正在于此。由此也可以知道，如果要去四维或者更高维物理或几何空间，或者去维或者更低维物理或几何空间，我们只需要使用乘以或者除以的方式来实现。如果要去到下一组四维空间，我们要乘以，如果要去到上一组四维空间，我们要乘以。而下一组四维和上一组四维以及当前的四维若同时存在（确实如此），则可以称为当前时间线上的过去（世界），现在（世界）和未来（世界）。如果乘以我们就可以到达相邻的（过去或未来的）相反世界，在相反的世界，相反在于它们的始末状态和我们的始末状态是相反的。我们的世界从0到的过程，在那些世界则从到0发生。而这个相反顺序并不体现在时间上，而是会体现在空间（时空）上，这类似于，在我们这个世界电子是自由的，而在相反世界，正电子是自由的。这是一个比喻，至于究竟是怎样的，还需要进一步研究。

对于当前世界而言，当前世界有四个连续的物理或者几何维数，最小的维数和过去的三个维数构成向后可观的最大范围，最大的维数和未来的三个维数构成向前可观的最大范围。加起来一共是个维数，加上一个自由的单向的绝对时间，一共11个维数。这里可观指的是，可以观测或能直接产生影响。过去方向的以及以下的维数虽然可以重叠在同样的空间里面，但它已经被0维遮盖了，所以无法观测它，未来方向的以及以上的维数被维遮盖了，所以也无法观察。可观的区域为维。所以以及以下，以及以上的（每四个相邻维数构成的）世界，就是和当前世界平行的过去和未来世界。如果不区分时间的方向，则它们就是（当前时间线上）和当前世界平行的平行世界。

虽然已经知道这些，但目前的问题是，我们似乎连乘以一个都无法实现，因为它毕竟是一个无限数。但是，如果意识到所有的（除了绝对时间和自然本身）实际上都可以是有限的，那么我们终将有办法实现这个操作。

回到复平面

由于复平面所表示的数是三维的，那么复平面本身也必须是三维的。或者说，叫复空间。因为

虽然不可区分，但是

也就是说，不同的是可区分的。而作为指数可独立于以及它们所构成的平面，所以本身就可以作为平面之外的第三维存在，进而构成复空间。

此外，

意味着也能影响（进而影响的大小）的大小，既不必完全独立于复平面之外，它可以在复平面之中存在映射，所以说，这个复空间本身，也是平面的，它既是三维的又是二维的。所以对于某些情况而言，用二维的复平面就足够了。除非我们需要用它来映射到三维的物理世界。而这也意味着，某些三维存在，本质上是二维或者一维的（比如光）。

那么，的方向呢？让我们从任何一个

开始，乘以一个，得到

这意味着提升一个维度。从另一个角度而言，也可以说，提升一个密度。正如一个本来稀疏的数1，变成一个致密的数，若它的“体积”（所占的空间）不变的化。

再乘以一个，得到

这就又提升一个密度（维度）。也就是说，变成一个更为致密的数1，它的单位为单位的单位也为。

继续提升

为什么不写？因为密度的增加不会环绕（虽然数量的投射还是会环绕）。所以，

不关心，只关心密度，则得到密度的值，

所以的方向，就是密度不断增大的方向。更大的密度也对应更高的密度维数（应当和物理维数和几何维数相区别）。若密度的增加是随着时间自发进行的（原因在后面讨论），那么密度增加的方向，就是时间的正方向。所以在密度增加的方向上的前方，就是当下的未来，也就是现在过去未来同时存在的前提下的未来。显然，在自然中，一切密度均当下存在（因为无限没有限制），那么，更小的密度构成的世界（和维数）以及更大的密度构成的世界（和维数），都当下存在，而时间的方向指向密度自发增大的方向，所以当下的未来世界就是当下密度更大的方向上的那些世界的总和。而绝对时间意义上的过去已经消失，未来尚未出现，这对于所有的密度的存在而言都是如此，所以，绝对时间并不是一个存在（非物）。那些当下存在的过去和未来，都只是不同密度上的空间体现。

由于数量的投射会发生环绕，所以密度更大的未来会被卷曲在当下的0维物理或几何空间里面。而当下的世界则被卷曲在过去的0维物理或几何空间里面。如果以一个原子为模型，若我们的视角放在原子核和原子皮之间的半径上，那么未来在从原子皮指向原子核的方向上，原子核意味着未来；过去在从原子核指向原子皮的方向上，原子皮意味着过去。这是对于物质而言的例子；对于空间则刚好相反。因为空间被认为是“等密度”的。所以密度更大（也就是数量更大）的，只能在等密度前提下，体现为体积更大。密度更小的则体现为体积更小。所以对于几何或物理空间而言，更高维数的空间在更大的地方。这两条加起来，可以实现一个非常有趣的运动方式：在一个很小的点消失，在很大的空间的另一个地方出现。因为很小的那个点和很大的空间的另一个地方具有相同的密度。

现在让我们考虑一个环绕复平面中心半径为逆时针转动速率为的圆周运动。如果以时间为横轴，虚轴为纵轴，可以在时间图像上画出一条正弦曲线。正弦曲线和圆周运动有着对应的关系。那么在密度上是如何对应的呢？

虽然我们还没有“开发出”三角函数，也就无法处理连续的角度，但是离散的四个值之间的线性关系，已经可以给我们做出一个参照了。从到的线性长度，对应于转过的角度为 ，根据对称性，从到转过的角度也是，对应于，所以从角度上理解，旋转一周转过的角度为，它对应于，可见，一个在时间上的线性连续转动，等价于密度空间上的指数密度递增。

角度和密度对应如下：

角速度：

也就是在时间之内转过角度，则对应于，在时间内增加密度到当前密度的倍。

比如，在时间之中，从过去的世界转到了当前的世界。

如果有另一个转动，具有

那么，在相同的时间则有

也就是说，具有的转动在相同时间里面已经转到了未来的世界（过去现在未来都映射在当下）。所以，不同的转速，意味着在相同时间里面，能够达到的不同密度提升。转速越高，相同时间里面的密度提升越大。如果和初始时具有相同的转速，现在提高了转速，那么在相同时间里面达到比更高的密度，随着时间积累，这种提高会越来越多。所以相对于而言，的密度始终在提升。和将总是保持一个密度差异，而且这个密度差异是逐渐增大的（在某个方向上运动的具有不同速度的两个物体，随着时间增加，物体之间的相对距离逐渐拉大）。

如果把和中的一个换成空间（另一个仍然是物体），则可知，物体本身在“旋转”（密度自增），空间本身也在“旋转”（密度自增），而如果空间的密度和物体的密度的增速不同，那么就会显示出物体正在旋转的现象（这里的物体指的是微观粒子，宏观物体是否旋转决定于其微观粒子运动状况的总和），因为空间是被假定为不会旋转的。

现在有了复平面上的数和密度之间的关系，不妨问一问，最大的密度（若体积一定的话），或者说，最大的体积（若密度一定的话），或者说，最大的数有多大？

这个定义是递归的，它可以使得的次方的层次个数无限扩展下去。

前面我们曾经讨论一个数是否是实的。这里实的不是实数的实（Real），而是充实的实（Solid）。一个数是实的，要求这个数的单位是无限的。或者说，对于观察者而言，是完全致密的，或者至少是不可划分到更小的单位的。

对于一个实数（Real）而言，实际上只向下考察一个层次即可。但是对于一个用于描述现实世界的数而言，只向下考察一个层次是不够的。因为观察者本身也是系统中的一员，也具有四次循环的维数结构，所以观察者完全有能力在连续的四个维数上观察所观之物的实性。所以一个现实的数，或者一个代表现实中存在的物理量的数，它应当被写作在观察者的四个连续维数上都有分量表示的向量。也就是说，它应该是一个四元数的形式。

也可以换成这种写法

通常我们可以把观察者的观察空间设定为空间直角坐标系，再加上一维时间。这个方法可以给出所观之物在物理时空中的相对位置。而我们暂时不考虑这么远，只考虑一个物理存在（和观察者一样存在于物理世界，所以具有连续四个维数上的实性）的实性问题。

给定一个完全实性的单位

用它作为单位，我们可以描述任何一个物理存在，在当前可观测范围内的每一个维数上的实性。那么一个“物理数”在这个给出的正交基下的表示为：

用负的指数来表示维数的层次是因为负的方向表示更小的数值。我们假定更高的维数的总量是更低维数的总量的堆积（但如果说的是密度，那么最小的反而具有最大的密度）。此处的每一个都对应了相应维数上的比例关系。

为什么需要四个？两个不够吗？

回忆乘以转到过程中的“箭头”，而不是等号。

意思是在这个转动过程中存在不一定等于1的比例关系；这个问题在到的转换过程中一样存在。这使得从的过程中的四个长度里面，保持长度（也就是的大小）相等，保持长度相等，而的长度可以发生一次变化，长度可以发生一次变化，结果是即便相反的两个方向的长度也不一定相等。所以必须用完全的四个维数来描述单位密度，必须用完全的四个比例数来描述相对于单位的相对密度。

0维上的比例关系意味着对于而言的单位1的密度是对于而言单位1的密度的比率；维上的比例关系意味着对于而言的单位1的单位1的密度是对于而言单位1的单位1的密度的比率……以此类推。

我们知道对于物理数而言，每一个维数其实都不必具有真正的无限密度。只要它不能被继续划分成更小的单位即可。对于相邻的层次维数而言，只要它最小的那个维数的单位不能被继续划分成更小的单位即可。也就是说，若是有限数，只要不能被继续划分，那就可以保证整个以及以为基础的所有的都是实的。

现在假定一个世界完全由各种各样的构成，而他们都以为基，那么实际上而言，不管是多大或者多小，这些都会认为彼此是实的，也就是整个世界是实的。这是因为每一个都没有能力去分解自己或者其它的最小单位。它们的最小单位都是一样大的。而现实中，观察者选择了观察观察者自己的世界（也只能这么选择），也就是说，观察者以自己作为这个标准，来选择符合这个标准的所有的来构成观察者可以观察的世界。那显然，观察者将使用自己的观察极限（最小单位），来设定所有构成可观世界的的被观察极限；那些不符合这一极限设定原则的将无法被观察。这样一来，显然这个可观世界都具有相同的最小单位，而且这个最小单位的真正大小是无关紧要的，或者任意的。无论多大多小都不会影响这个世界的实性。

但是，我们仍然可以通过别的方式来判别这个世界是否是“绝对实”的（也就是这一项为真正的），那就是用的“个数”和时间的比例关系来判断。如果单位时间对应的的个数为无限多个，那么就是绝对实的。

这是什么意思？意思是，对于任意一个给定的长度（它显然只能由最小单位乘以一个数值），如果总是可以使用0时间既可以走完这个长度，那么的最小单位就是绝对实的。如果这个时间不为0，它的最小单位就是有限数，也就是说，它不是绝对实的，而是相对实的（或者空的或者有内部结构的）。设为最小长度，为对应于的长度（倍的最小长度），

如果其中的

对于单位时间长度：

则有

若对于任何时间

仍然有

公式虽然简单，但是这种表达方式还是过于复杂。用最简单的语言来描述：如果系统中的运动能达到无限速度，那它就是绝对实的（具有无穷可分的最小单位）；如果系统中的运动速度具有上限，那么它就不是绝对实的。而这个速度的上限，就是单位时间对应的最小长度的个数。这句话意味着，此时我们只能用时间来度量空间，因为已经没有更小的空间长度可用了。这也意味着，绝对时间的密度是（真正）无限的，它总可以用来度量任何东西。同理绝对空间，或者自然本体本身的密度也是（真正）无限的。在绝对时空之中，两点之间没有距离，因为可以不需要时间，就从一点到达另一点。同理，密度越高，两点之间的距离就越短，或者说，需要完成一个给定距离的时间就越短。如果有能力，提升飞行器（所在空间）的密度，使得它进入高密度的空间（或状态），然后在高密度的空间运行一个较短的时间，再返回低密度空间，那么，它就可以用很少的时间，走完很大的距离。

既然如此，那么，对于我们作为观察者的我们的世界而言，其最小单位是什么样的呢？

它是我们的世界中最大的速度的对应物。而这个速度，就是光速

它的意思是，对应于1秒的时间长度，我们这个世界的最小单位长度大约为米。这个值看上去和“最小”并不匹配。这是因为我们使用的时间单位秒和长度单位米，都不是自然的，而是主观的。我们假定这个最小长度单位为

如果则意味着1纳秒的时间对应于米。

如果则意味着1纳纳秒的时间对应于米

这样看上去就更像最小单位了。当然对应的，时间也得选择更小的单位。

用时间和速度定义长度，我们可以获得最小单位长度；反过来用长度和速度，我们可以定义最小单位时间，它是最小单位长度的对应物。或者说，最小单位长度和最小单位时间是同时定义的。用这种方法，我们只能获得它们的关系，而不能获得它们各自的“绝对值”。但完全可能用其它方法获得它们之中的任何一个的绝对值，并进而求出另一个。比如，如果我们能够求出这个世界的最大频率（如果有的话），则可以求出最小时间间隔（单位），进而求出最小长度单位的绝对值。

既然最大速度为有限数，那么我们的世界的密度最小单位就是有限的，所以这个世界就不是无限致密的。既然最小单位都是有限的，那么作为最小单位的若干次方的其它相继的高维单位也都是有限的。

的每一个分量都是有限的。以上用来代表有限性。但是这只是一种表述方式。实际上各个分量之间由于存在间隔的比例不定的问题而不（必须）成幂次关系。

所以严格来说，应该写成：

这时候，就又了对应关系

也就是说，每个无限都是有限的。另外意味着维，它是当前世界维数的下界。如果我们可以不断减小这个密度的数值，我们就可以不断的向后回退到当前时间线上当前世界的相对过去世界。反之，如果我们能不断增大这个密度的数值，就可以使得对应的向前移动到当前时间线上的当前世界的相对未来世界。这就相当于直接改写的数值，或者说，有了改动这个数值的能力，我们就可以进行在当前时间线上相对于我们这个世界的时间旅行了。需要再说一次，这种旅行到达的过去和未来，都是当下同时存在的过去和未来，其本质上是当下此世界的平行世界。绝对时间意义上的过去已经消失，未来尚未出现，绝对时间的过去和未来，并无意义。

如果时间单位一定，密度增大就等价于长度单位增大，这也就是，进入更高密度的空间或者状态，然后在更高的密度上运行较短的时间，既可以实现更大的距离。也就是说，超光速运动首先应用于远距离空间旅行，如果不要求“回到原密度”，那么它就是一个时间旅行了。

那么，超光速到底是什么样子呢？根据狭义相对论有：

这是狭义相对论中时间和速度之间的关系。从0逐渐增大到，从逐渐减小到0。

实际上这个方程已经显示出了“在更高的密度上可以用更少的时间实现相同的距离”。

从0到的过程，就是最小单位的相对密度从，逐渐到达的过程，也就是逐渐转过或者的过程。

这个过程由于被误认为是要实现无限密度的提升而无法完成。这种错觉主要来自于具有共同最小单位的物理实数彼此无法划分最小单位的这个事实。另外，所有加速方式（包括电磁方式和动量定理方式）都基于这个最小单位的加速方式（证据是力的传递速度不大于光速），所以实际上整个系统中没有任何一个能够获得更大密度的方法：要让1这个密度增大到16，则需要把1的每一个再平均分成4份。但由于我们没有小于1的数可以使用（1已经是最小的了），所以平均分成4份就无法实现，平均分成16份就更无法实现了。也就是说，要获得更大的密度，就得借助于具有更大的密度的切分工具。

另一方面，转过或者的过程意味着密度乘以自身的一次方，既然我们最小的那个维数这样做了，那么我们认为，其它的相邻维数都要这样做，以保证一个物理实体的完整性和维数的连续性：

这时候又出现一个更大的问题：

相当于从原来0维的点升级到1维的线，也就是全部的点的集合。

相当于从原来1维的线升级到2维的面，也就是全部的线的集合。

相当于从原来2维的面升级到3维的体，也就是全部的面的集合。

相当于从原来3维的体升级到4维的“全部的体”。

这个发散的过程将引入一个非常大的集合（所有的无限实质上都是有限的）。比如全部的体，意味着整个三维空间的一切体。如果这里的密度对应的是物体的质量（等于密度乘以体积），那么这个值就意味着无限大的质量。这才是无法转到光速的最主要原因。这也是质量随着速度增大不断增大的原因。所以说，这是常规加速方式的本质：同时提升一个物体每一个维度的密度。

现在，让我们换一个思路，如果我们只允许

那么我们就不会遇到发散问题。

向上的乘法，乘以可以等价于向下的除法，除以。而最小维数的向下除法，相当于每一个维数都实现向下除法（但是得注意比例关系的对应，比如从到的转动的比例关系需要保持），也同样可以保证维数的连续性和完整性。而且这种提升的实现是立即的，不是那种逐渐的转动过程（可以称为“立即转动”），结果一样，甚至更好。

实现这个过程，我们需要一个比1更小的数量。而这个数量只能通过1和1之间的关系产生。如果1和1都是首尾对齐的，那就无法产生一个比1小比0大的数。换句话说，只要把1和1错开放置，那么它们的差就可以比1小。这就是一个相位差的问题。

为了实现“立即转动”，让我们尝试如下的方法。

已知，

由于在这里是一个有限的值，则确实可以通过确定并改变的方法来改变它的数值。但我们现在没有三角函数可用，也无法展开这个过程，所以只能放在后面有机会的时候再讨论。

此外，再次回忆乘以转到过程中的“箭头”，而不是等号。

意思是在这个转动过程中存在不一定等于1的比例关系，这使得我们必须用四个维数而不是两个；那么反过来，如果我们有办法让着两个转动过程都保证等于1的比例关系，那么我们就可以把四个维数缩减为两个。这时候完全映射到上，完全映射到上；也就是两个虚数半轴被完全映射到两个实数半轴上。这样我们就有机会直接接触更高一维的密度。有机会使用更高一维密度作为工具。

假设我们已经能够立即获得，那么在三维空间里面两点之间的距离就投射到了四维空间的0距离上。一维空间的两点之间的距离，也就是一个线段的长度，在二维空间中的不同方向上具有不同的投影长度。极限情况下，其投影长度为0。那么，同理，三维空间里面两点的距离若投射到四维空间，也存在极限为0的长度。也就是说，可以寻找一种方式，使得在三维空间里面的两点之间的距离为0。而这正是的时候我们要获得的效果。注意这里说的0，如同无穷具有有限值，也具有实际上非0的有限值。但是它和最小单位重合，也就是说，它就是最小单位本身，或者说，只需要一个最小单位来代表这个长度0。相对于基于这个最小单位的世界而言，这显然是极小的（不可能更小的）。

那么，若则有：

随着越来越大，也越来越大。

但是考虑的来源，它是一个三角形导出的结果。

也就是说，是没有意义的。定义了一个圆的半径。如果那只能意味着一个新的圆的存在它的半径。我们知道最大速度对应于一个世界的最小单位密度。若则只能意味着存在另一个世界它的最大速度对应于它的最小单位密度（比我们的更大），而在其中是一个相对速度。换句话说，原来斜边的长度为，一个直角边长度为的三角形，现在要画成斜边的长度为，一个直角边长度为的三角形。也就是斜边和直角边要交换了。这样构成的三角形，仍然是符合

也就是

所以，我们永远看不到一个直角边长度大于斜边长度的直角三角形，因为若是如此，直角边和斜边的位置就交换了（这是因为我们已经随之转换了视角，使得我们自己的极限速度变成了）。

由此可知，

永远不会出现。

那么，如果它出现意味着什么？

它意味着虚时间，既时间间隔升高1维

也就是无穷多的时间，既有限的时间被投影到无限的时间。

具体而言：

当，意思是，本来需要时间，现在，在加速之后（未加速），只需要的时间；当，意思是本来需要时间，现在，在加速之后（加速后为），只需要的时间，这意味着更快的（几乎立即，但不是真的立即）完成同样的位移；当，意思是本来需要时间，现在，在加速之后（加速后为），只需要的时间，也就是需要无限多的时间，这意味着无限缓慢或者无法完成任何位移，也就是说，这个运动相对于观察者而言是静止的。所以说，虚时间的含义是绝对静止。

既然（若则），那么我们就不必再考虑虚时间的问题了。虽然速度具有上限是无法避免的，但是速度所描述的密度是没有上限的。

其中可以替代的作用，使得用乘以来提升维数的转动继续下去，也就是说，最小密度的提升可以无限继续。而这时候，对应的时间可能会取负值。负的时间意味着过程的相反。但究竟如何相反，可能要看到之后才能理解。但无论如何相反的也只是它的相对体现（可能以时间或者空间的方式来实现），绝对时间本身是没有相反方向的（同理它也没有正向，它只有当下）。

只要找到了“立即转动”的方式，就找到了时空旅行的方法。就可以在实质上超光速运动，意思是：首先，使用维数的非同步加速的“立即转动”方式，我们可以不通过常规加速方式而立即达到光速；然后我们确实可以获得一个在绝对数值上更大的但这时候会出现交换，使得相对数值再次减小，但是本质上还是超越了光速；不仅如此，立即转动使得我们可以在更深层的含义上超过光速，通过升维的方式缩短三维空间之中两点之间的距离；不仅如此，还可以实现时间旅行。

到底什么是密度？密度对于一个点来说，就是它内部的数量。因为它的定义是总数除以体积。一个点没有大小，它的“体积”只能称为“内部”；我们讲的是数学上的密度，所以整个数量也没有单位（所以总是用无穷和0表示，因为无法相对于其它东西而做出比例数来）。

现在，我们已经有了描述给定世界中的任何一个点的密度向量：

它的每个分量对应于那个密度层次（幂次）上的单位。而且它的最小值也是已知的，相邻两个密度层次的投射比例也是已知的，那么实际上我们就可以得到空间中这个点的密度的数值。如果不讨论它所占的空间，那么密度的数值就是它的总量。

可以用在空间堆方块的方式来理解这个过程：最小的那个方块的大小为，把它排列成行，行的长度为，然后把行继续排列成列，列的长度为，然后把行列构成的面继续堆积成体，体的高度为，那么，堆积起来的体积（或者成为总量）就是：

因为是有限值，且大小已知（未知也可以），每两个相近的维数的长度的比例关系也已知（或者至少得到保持），那么就是一个确定值。

这是什么意思呢？以我们的世界为例，它具有一个最小密度数值，它可以用最小长度或者最小时间来表示。现在，如果我们选定单位时间为时间单位，也就是只考察单位时间中发生的情况，那么，最小密度若使用最小长度来表示，它就是

现在，为单位时间，那么

所以对于单位时间而言

这个最小的长度，被当作单位1来理解，而其他的长度，都是这个长度的倍数。

现在让我们用最小长度做一个横向排列，这时候按理说我们应当得到的长度为

但是，“横向”本身就意味着比点高一个维度，所以计算它的总量的时候还得乘以它的单位，所以真正的（或者说实的）长度为：

由此，你不难看出为什么一个实数要写成平方形式了。

然后，我们把这个横向的排列做一个纵向的累加，得到

再把横向累加做一个立体累加，

如果只看数目，三者相乘，它正好意味着一个三维世界中物体的体积。

最高一次没有乘以的原因是我们只需要一个三维世界的有限的体积，而不是所有三维体积的总和。

但现在我们计算的不是体积，而是一个存在物的总量。它是若干个更小的单位存在物的总量的总和。或者说，它至少是一个一维长度，如果我们把那更小的单位存在物的长度当作0维的话。

更小的单位存在物的长度为0维，也就是说，为单位1，其它都是这个单位存在物的内部的结构；存在物的总量为更小单位存在物长度的总和（这里只是借用长度这个概念，实质上不要求它们必须是线性排列的，尤其不要求它们按照直线排列），说的就是：

也就是求个1，对于最小单位而言到底是多少。

现在让我们展开这个总量，也就是，用整个系统的最小单位长度来表示这个总量，同样用上面给出的堆积法：

是密度之间的关系属性，是这种关系的数量。这也意味着每一个这种关系的实例，都对应于一个实体。这个实体就是所说的单位存在物。

究竟是什么？看到了，你应当已经想到，它实际上就是质能方程：

按照分别代表的含义，可以更进一步的写出：

意思是，能量等于单位质量的若干倍和光速平方的乘积。

其中单位质量的含义则是在整个系统之中每一个都具有的，维密度和维密度的关系系数的乘积；质量是物体含有的单位质量个数的总和；能量，是物体（作为存在物而言）的总量，基于单位长度的相对值。而这些度量，都只能发生在单位时间之内。

所以首先要知道，一切都是随着时间变化而变化的，只有我们选取了单位时间之后，质量和能量才有意义，或者说，才能使用单位长度来度量。然后，质量是质量单位的倍数，所以质量单位才是真正的物理量。而质量单位对应于单位存在的两个内在维数的关系系数的乘积。和倍数一样，都是纯数（单位为1）。由此构成了对应的物理单位。不难看出，时间单位是人为选定的，长度单位是可以用光速导出的，质量单位数值也是可以计算或者测量得到的；而能量单位，由于质量单位在此是纯数，所以能量单位就是光速的平方，其中光速的单位可以被定义为，所以能量的单位为。

如果我们只保留时间单位（秒），其它物理量都可以从这个单位和一些常数来导出。其中长度单位（米）：

这是因为，

秒这个单位是任选的，而且没有理由认为某个单位的选择方式比另一个更好。只有哪个对于人来说更直观更舒适而已。还有一个单位也很重要，它是时间的倒数，既频率的单位Hz。

它也可以被认为是从时间单位导出的，但是，不难想到，时间单位也可以由它导出。

另外，对于光（量）子而言，我们有

所以如果你无法理解密度是什么，那么对于光子而言，它正比于频率。因为光子没有大小，它所有的能量都集中在一点之中，或者说，单位时间里，它所有的数量都集中在一点之中。而单位时间的数量，说的就是频率，或者说广义的频率就是单位时间的数量。由此可以看出物质因为具有内在的能量，所以是有频率的，这个频率和它的能量等价。所以在哲学上，将存在称为“振动”是合理的。

数学上，我们知道

实际上是相对于的数值，也就是说，它的单位是最小单位长度的三次方。

既它的“数学单位”是1的立方。这正好说明它是一个三维量。

关于光的动量，有

所以动量的物理单位为1，数学单位为。

说质量的单位为纯数，可能并不恰当，因为作为纯数它的内部结构仍然有两项乘积（平方）的形式。换句话说，它可能仍然是复合单位。如果如此，那么所有的相关数量都要提升两个（或者几个）维数。比如

由于物质的结构暂时是不清楚的，这个值究竟是多少，有待进一步研究。

实数究竟为什么要写成平方形式？

本质上因为实数本身是“线性”且“具有实性”的。它对应一条线，虽然不必是直的。是线性的，也意味着它不是“点性”的，不是“面性”的，也不是“体性”的；或者至少它首先不是这些性质，其后可以堆积出这些性质来。

线性自身无法产生自身，它是点性堆积的结果。所以说，这就已经蕴含了对象“点”和操作“堆积”。堆积的单次运算是“加”，重复的堆积运算是“乘”，被堆积的对象就是点。例如，

这体现的就是对“大小为的点”的堆积。又因为它是实性的，那么它的单位就必须是实的。或者说，它的单位可以被无穷划分（或其不可区分的等价形式）。然而实性的点和对点的堆积运算取得线的长度是相互矛盾的。这是因为实性的点要求点的大小是0（或者其等价的有限数），大小为0的点无法在有限次运算之后堆积成长度为有限数的线。所以我们得把点提升到和线同一个层次上，这也符合同种事物才可以相累加的原则（所以说“大小为的点”这种说法根本就是错误的）。对于具有密度数值的点（这是点内部的属性），提升一次之后获得的单位线长度（点的内在属性到外在表现的投射），然后才能进行累加。要注意的是，这里的点提升到线，并不是那个从一个点提升到所有的点而构成线的过程，因为这个提升实际上是用向下扩展来实现的。

我们是用了这种方式，才能获得实性的线的长度，它相当于，一个长度数值，乘以一个实性的单位，

而这个单位需要从点的实性映射到线的实性，所以需要进行一次提升，所以它是点的密度的平方。由于线是由点构成的，所以线必定表示为点的密度的平方乘以一个系数的形式。

对应的，实数总是可以表示为一个系数乘以一个平方的形式。

为了保证实性，线组合成面也需要做同样的处理，也就是说，先把线提升到面的单位，其面积为线长乘以线的单位

然后再做有限数量上的累积

“单位的提升法”，可以使得累加过程从无穷累加，映射到有限累加。这使得数可以从无限之中获得有限的表达方式。低维无限在高维有限且为单位，这是一个很重要的性质。

如果

也就是说，对于无限密度而言，一条线的长度，本质上是一个负实数，一个面的面积，本质上是一个正实数。反过来，一个负实数，是长度的概念，一个正实数，是面积的概念。负负得正的原因是虚数单位的二次方的平方等于1。

所以，无论正实数负实数，都一定可以写成平方乘以系数的形式，其中正实数一定可以写成四次方乘以系数的形式。反过来，一个实数总可以由平方乘以系数的形式产生。或者说，符合这种产生方式的数就是实数。

当然实数也有其它形式良好的表达方式，比如以

为单位的，或者以

为单位的数，也都是良好定义的实数。

回到狭义相对论，如果光速意味着（最小时间单位对应的）最小长度单位，那么一个不够光速的速度是什么意思呢，尤其是是什么意思？

如果简单认为就是一个更小的长度单位，那么显然我们破坏了为最小长度单位的前提，而且尤其是，若它意味着最小长度单位为0，我们就完全破坏了有限世界的前提。也就是说，若是真正的0，也就是真正的0速度，那它只能存在于无限时空里面，它是绝对静止的。然而现实中的一切都是相对运动和相对静止的，描述的是相对运动的速度以及相对静止。所以只能认为在概念上，和不是同一个层面上的东西。

也就是说，对于

而言，在上，它是最深的一层。而一定没有达到这个层次，它只能是

这三个维数层面中一个或者几个层面上的概念。此外，它不同于这个固定值，它是具有从的范围的。它到底是什么意思，让我们继续讨论，从指数函数

和它对应的复数形式

以及它的三角函数表示

来讨论角度连续的转动过程到底意味着什么。

## 指数过程和三角函数

前面讨论过的表达式，

也注意到它是递归定义的，如果不考虑，就剩下，

若把定义的过程在绝对时间（它是非负且自增的）上展开，则可以写成：

这里定义了一个过程。我们用时间间隔将时间分割成一系列的时间片，每个时间片上对这个过程的数值做一次采样。可以发现，当相邻两个时间片的间隔趋向于0的时候，

对应的数值的差接近于0，

或者说二者相等。若拉大时间间隔，可以发现过程的数值随着时间增加逐渐减小。

这个过程是一个自发过程，它是由它自身的递归定义方式决定的。这意味着我们只能观察它，不能影响它。一般递归过程总有一个起始状态或者一个终止条件，显然这个过程没有终止条件，而且，它也没有起始状态。虽然可以强行定义

但是右侧的1成了没有定义的数值，于是这个定义是无效的（无效的定义不影响计算）。

它不仅仅是逐渐减小的，它逐渐减小的速度（数量比上时间间隔）也是逐渐减小的。如果它减小的速度是恒定的，那么显然，它最终会减小到0（不考虑负数）。然而，它减小的速度本身就随着时间减小。那么，它最终无法减小到0。类比运动学的说法，它是一种加速度为负的变加速过程。

计算方法如下（C#）：

double OneLess(ulong n = 0, ulong max = 10000, ulong m = 10000)

{

if (m == 0)

throw new System.ArgumentOutOfRangeException(nameof(m));

if (n < max)

{

double oneLess = OneLess (n + 1, max, m);

return oneLess - oneLess / m;

}

return 1.0;

}

从定义可以看出，这个函数可以通过把它的唯一的减号改成加号的方式，获得一个OneMore函数，而OneMore函数其实就是E函数。

double OneMore(ulong n = 0, ulong max = 100, ulong m = 10000)

{

if (m == 0)

throw new System.ArgumentOutOfRangeException(nameof(m));

if (n < max)

{

double oneMore = OneMore(n + 1, max, m);

return oneMore + oneMore / m;

}

return 1.0;

}

其中的参数m需要特别设置，还得保证它不为0，这比起E函数而言要麻烦一些；所以我们不如直接改写E函数，使得它同时支持OneLess和OneMore的功能。

double E(ulong n = 1, ulong max = 100, double x = 1.0)

{

return n == 0 || n >= max

? 1.0

: 1.0 + x / n \* E(n + 1, max, x);

}

为此，我们为函数E添加一个新的变量x（并做一些其它的优化）：对于OneMore和OneLess函数而言，它可以取正1，负1或者0，缺省取正1。分别对应对1进行增加，减少或者不变的操作，缺省为增加操作。而它的取值范围隐含了它实际上还可以取任意实数值。

观察指数函数:

递归关系为：

它和，

1. + x / n \* E(n + 1, max, x)

完全一样。由此可以看出，扩展了的函数：

double E(ulong n = 1, ulong max = 100, double x = 1.0)

其实就是的有限等价形式（或称数值计算方法）：

double E(ulong n = 1, ulong max = 100, double x = 1.0)

另外注意边界条件，当n为

n == 0 || n >= max

函数值为1.0。这个定义域实际上和：

是同一个范围。这意味着的有限等价形式中的迭代变量n，可以取“负值”（表现为正值的补集与{0}的并集），这时候它的值为恒定的1.0。因为n的递增代表的是绝对时间的递增，所以这个1.0意味着在绝对时间为负数的时候，的值恒定不变，是稳定的1。由此可以导出，负的绝对时间，是恒常不动的时间。也就是说，它是不断变化的时间的补集，所以如果提起负的绝对时间，那就是在说恒常（对应的，虚的绝对时间说的是无限时间，实的绝对时间说的是无限可分的绝对时间）。

回到对过程的讨论。

这个过程是一个自发过程，它得以定义的条件，首先是有和无的强行划分，然后是实数的实性必须被保证（需要写成平方形式），除此之外，没有其它要求。而这两个要求，其实都是观察者对世界的解释方式造成的：观察者要求世界是可以区分有无的，而且是可以无限划分的。

在这两个前提之下，这个过程就是自动进行的。换句话说，只要观察者要求这两点，他观察到的任何对象都必定有这个过程发生（那些没有这个过程发生的对象或者是不可区分有无得，或者是无法无限划分的，但这都无法被感知）。所以它是一个非常基本的过程。

说“它最终无法减小到0”是因为它的减小过程可以用乘以无穷次方来表示，而这个值是的倒数。

虽然这个数意味着它不可能减小到以下（计算过程中，它的结果会逐渐比这个有限数大一些），但是，它的本质仍然是不断的减小。

我们知道，这个数意味着密度，这个密度就是密度单位1。而它随着时间减小，则意味着密度随着时间减小。一个数的密度不断减小的过程，正是一个数从无限实性，逐渐走向空性的过程（实性越来越低）。虽然实性减小存在极限，但减小的过程不会终止。

这是一种什么性质，我们并不知道，但是它可以类比于“热力学第二定律”：在自然过程中，一个孤立系统的总混乱度（即“熵”）不会减小。因为热力学第二定律可以用来定义绝对时间的正方向（虽然它只有当下），而这个性质也可以用来定义同样的东西 。

随时间的增加，一切所观之物的（单位）密度逐渐减小（我们也可以考虑负值和虚数值，结果都是一样的）。那么一切所观之物（单位）密度逐渐减小的方向，就是绝对时间的正方向。

然而，这对于观察者而言，是一个“很不理想”的现实：它意味着，一切会随着时间的运行走向衰败和毁坏。

那么，一个积极的或者具有美学理想主义的观察者，将会使用一种方式，通过不断的重新调整自己，来选择一个不会随着时间逐渐走向毁坏的世界，进而确保物质和能量守恒定律永远成立。相对而言，如果这是一个定律，这个定律应当称为“不守恒”或者“自发毁坏”定律。

如果你也不喜欢这个定律，那么，让我们，回到这个定律成立的条件：如果我们不能避免区分有无（或者说实现观察），那么我们至少可以避免追求实性。也就是不再追求那些用平方形式构成的实数构成的世界，而承认非平方形式的世界的真实性，那么我们看到的世界就不会是这样的自发毁坏的世界了。非平方形式的世界其实就是虚数构成的世界。而在虚数构成的世界中，物质和能量守恒定律可能仍然无法保持。但是“存在性的守恒定律”可以保持，因为保持它的正是观察，或者说，对存在的存在性的认定本身。

如果没有这种调整，“顺其自然”，那么自发毁坏就无法避免。然而生物恰好实现了这种调整。而且，我们也可以使用这种调整来避免自发毁坏造成的各种问题。

那么究竟怎么调整呢？对于这个衰败的过程，我们可以反其道而行之，以抵消它的影响。

对于递归定义，可以看出：

它的“减号”操作是它产生递减数值的根本原因。在每一次递归迭代之中，我们只需要用“加号”操作来抵消掉这个递减影响就可以了。也就是说，如果有

那么，就有

然而我们做不到这一点。这是因为，这个过程是所观之物自身的过程，我们无法去修改它的这个过程（除非把自己变成它）。我们能做的，只能是在无限之中选取那些符合我们要求的数量（一定存在），用这些符合的数量代替不符合的数量，构成我们需要的世界（这就是“新陈代谢”）。

也就是说，我们至多可以写出：

用作为选择条件，选择构成我们的世界的那些存在（实际上就是振动），来构成我们需要的世界。而这个值，经历无穷时间之后，也有极限，它实际上就是：

不难看出，同样作为自发过程，也是有方向的，它的方向是“反衰败”的方向。而这正是我们希望的方向。我们把衰败的方向定为时间的正向，那么的方向就是时间的负向？显然不是。的方向是随着时间逐渐增大，“衰败”的方向是随着时间逐渐减小，它们都随着时间，而不是逆着时间，所以它们都是时间的同向。但它们彼此又在数量上产生相反的结果。所以它们在数量上是相反的。那么我们选择那一个为正呢？我们作为生物而言，会选择自身的特质作为基本的参照物，所以我们选择的方向为时间的正向，自发衰败的方向为时间的反向。时间反向的意思是随着时间逐渐减小，而不是时间逆转（这是不可能的）。因为正向使得密度增大，所以所有使得密度增大的方向都被定义为时间的正向，所有使得密度减小的方向，都被定义为时间的负向。这里的时间的含义不是绝对时间的含义，而是当下的过去现在和未来的含义。

那么，这和自发旋转有什么关系呢？唯一的关系就是线性增加的角度（旋转）对应指数增加的密度；反过来指数增加的密度也对应线性增加的角度。这里指数增加的密度，也可以是指数基数增加而指数不变，结果增加的密度。一个数的单位1，随着时间增加而增加，就使得它和原来的自己产生了一个角度，这个角度和人为乘以产生转动的角度没有本质区别。这使得即使不对它做任何操作，它都会发生自发的旋转，虽然这个旋转要比人为制造的旋转小得多。

要知道，是我们选择了这样的（如此旋转的）数构成我们的世界，用以抵消那些逆向自发旋转而走向衰败的数。我们更积极一些，选择更快的转动（在单位时间转动更多角度，既在单位时间增加更多密度），也是可以的，这个时候我们要对

里面的

项乘上一个缩放因子x，具体怎么做后面讨论。

任何实际的数量，都是有限数。我们实际上不认识任何一个无限数。或者说，无限根本就不是数。数是由无限这种不是数的存在衍生出来的有限的存在。那么在现实中，也不可能是真正的无限形式。它只能是它在某个维数范围之内的有限等价形式。其中具有实际的最大值，0具有实际不为0的最小值。由此应该写成如下形式：

可以看出，递增指数函数

的取值范围为

尤其是，如果那么，

对于那些实性不足的基本单位而言，只能选择整数值，也就是的正整数，这时候的取值就在

之中。

既然观察者决定它观察的对象具有何种转动模式，那么定义

的就是观察者，而不是所观之物本身。

需要特别特别注意的是，当我们说，用以下方式来实现“反衰败”的时候，

即便只是一个有限等价物，它仍然是一个不变的。也就是说，虽然这种方式可以改变单位1，但是它不能改变1的内部单位（由体现）。回忆上一章最后一部分，相对速度和单位时间的最小长度具有本质上的差异。不难看出，就是而改变速度的方式，无法改变，只能基于的原因，则在于这个方式就是

其中无论如何都是不变的。这就是相对速度的真正含义。所以当你看到具有相对速度运动的物体，那么你可以知道，它正在“反衰败”（也可能是“衰败”）的过程中。

对应的，“立即转动”的方法就是改变的数值（等价于改变，或者改变）。

让我们继续研究的指数函数，

它的级数展开式为：

回忆它的有限等价形式：

double E(ulong n = 1, ulong max = 100, double x = 1.0)

{

return n == 0 || n >= max

? 1.0

: 1.0 + x / n \* E(n + 1, max, x);

}

不难看出，x其实是一个控制过程发展变化的参数，它可以控制在变化过程中的大小比例和变化方向。所以说其实可以认为是一个更为可控的。

到此，我们说的都是实数。现在让我们考虑，如果是复数的情况。

不难看出，它是一个的实数指数和纯虚数指数的乘积，而实数指数是什么，我们已经清楚了，无需再讨论。剩下的就是，若指数是纯虚数，它是什么意思。

这也就是说，用纯虚数替换控制参数，对于程序而言，我们应该得到如下伪代码：

double E(ulong n = 1, ulong max = 100, imaginary x = 1.0i)

{

return n == 0 || n >= max

? 1.0

: 1.0 + x / n \* E(n + 1, max, x);

}

不难看出，除了函数签名关于变量x的类型从双精度变成了虚数之外，没有别的变化。

使用意味着我们要用虚数，也就是单位为虚数单位的实数来控制1随着时间进行的迭代过程的增减和比例。

回忆

对应的有限表达形式：

double OneMore(ulong n = 0, ulong max = 100, ulong m = 10000)

{

if (m == 0)

throw new System.ArgumentOutOfRangeException(nameof(m));

if (n < max)

{

double oneMore = OneMore(n + 1, max, m);

return oneMore + oneMore / m;

}

return 1.0;

}

可以按照递归展开时后推的原则，把它重写为：

double OneMore(ulong n = 0, ulong max = 100, ulong m = 10000)

{

if (m == 0)

throw new System.ArgumentOutOfRangeException(nameof(m));

if (n < max)

{

return 1.0 + OneMore(n + 1, max, m)/ m;

}

return 1.0;

}

它对应于表达式：

不难看出，计算的次数越多，以下两者的等价性越明显，

虽然OneMore方法多一个参数，而且它收敛较慢，但它才是理论上的正确计算方法。

而它对应的无限表现形式为

这个过程把每一个的单位1都展开了，对于无限运算，展开的次数是，对于有限运算，展开的次数是OneMore函数中的变量max。

这样看仍然不清楚，我们再把它变换一下：

无限数还是不清晰，让我们看有限数：

对应的离散形式（C#伪代码）：

double Em(ulong n = 1, ulong max = 100, imaginary ti = 1.0i, ulong m = 10000)

{

if (m == 0)

throw new System.ArgumentOutOfRangeException(nameof(m));

return n == 0 || n >= max

? 1.0

: 1.0 + t / m \* Em (n + 1, max, ti, m);

}

其中递归的次数，或者嵌套的深度，是由max来决定的。

虽然被展开的是单位1，但都是虚数单位的单位1。

由于有四个值，分别对应于，所以这个递归定义的展开也是有周期的：每展开一次，意味着把自身带入自身一次；每展开2次，为一个周期。同时为了保证周期完整，我们也可以要求max=4k,既4的倍数。

考虑：

再次展开：

所以有

其中

意味着下一个周期的展开，所以一个周期实际上只包含前面四项。

对于一个周期而言，

看着很复杂，但是的性质可以使得四项进行两两分组，也就是实数项放在一组，虚数项放在一组，并且将的高次做环绕处理，

对于

我们把都映射到实数上的那些项目累加起来，用一个函数代表它，叫做；同理，把所有映射到虚数的项目累加起来（不算虚数单位），叫做。让我们只计算一个周期的情况，则有：

最终结果：

则把所有的过程都映射到了到范围之中。这个表达式虽然来自于无限嵌套的递归定义，但是它最终的结果，却是一个平铺的求和运算。同理完整的和的定义如下：

这可以称为离散的正弦和余弦函数。

其对应的无穷形式只需要把换成即可，而若要计算得更精确，则需要取一个更大的max值，当然若要无限精确，max也要换成。所以完整的无限形式为：

这是连续的余弦和正弦函数。

而无论是否无限，

的形式保持不变。

可以看出这种正弦和余弦函数的展开方式与使用导数获得的展开方式不同，这是因为它来自于的递归展开式。我们熟悉它们的导数展开式（泰勒公式）：

它们可以很好的合成

但是逐渐递增的n（）使我们看不出它的层次结构，我们需要一个递归形式的表达方式来表达它的自相似结构。类比于

两种等价的模式，显然我们也可以写出和的（非递增的）递归形式。而递归的自相似结构使得我们可以只需要观察一个递归周期就可以了解它的基本属性了。

既然是如此，那么呢？

是否可以写成递归形式呢？

其中

代码如下（C#）：

double PiX(ulong n = 1, ulong max = 100)

{

return n < max

? 2.0 + 1.0 / 2.0 \* PiX(n + 1, max)

: 4.0;

}

其实根本无需数值计算方法是，我们可以一眼看出它的结果：它的一半是2，它的另一半是全部的一半……显然它的全部就是4；也就是所表达的循环周期。

还有一个问题，就是到底应该等于几？回到它的含义，可以知道，它是和之间存在的个数。如果把经过的0当作真正的什么也没有来看待，这个数值是2,；但显然它不能被当作什么也没有来看待，因为它和的大小在同一个层次上，由此才能相加（不同层次不能相加），所以2不可取；如果把0当作1个来看待，这个数值是3，但1个层次并不递归，也无法写成对应的极限形式；或者，总共的个数为2n+1,数值按照递归计算，而这个计的结果不可能得到4；所以4这个结果是不对的。所以只有

这种递归定义的方式是正确的。对应的代码如下（C#）：

double PiY(ulong n = 1, ulong max = 100, ulong m = 10000)

{

if (m == 0)

throw new System.ArgumentOutOfRangeException(nameof(m));

return n < max

? 2.0 + 1.0 \* m / (2.0 \* m + 1.0) \* PiY(n + 1, max, m)

: (2.0 \* m + 1.0) / m;

}

为了让

这个函数的最小值为3，但作为递归的无限形式3本身也不可取（1次不算递归）。所以的值为3到4中的一个数值（也不包括4），当很大，递归次数也非常多的时候，计算发现它将收敛于。

由于它并不是一个单位形式，因为每一项都含有2，所以直接按照递归形式写出极限形式注定导致发散；但是它的一半却是一个单位形式：

这相当于把系数做后推处理。

按照的极限表达式：

可以得出：

而才是在无限递归的形式上和具有等价结构的“结构数”，因为的结构是一种单位结构，所以同样具有这种结构的才是真正的单位，本身并不是真正的单位。所以，应当由

作为角度的基本单位。虽然继续用在大多数情况下也是没有问题的。

既然具有同样的结构，那么

就相当于一种，或者说用当作控制系数的，让我们试着把提取出来：

解出

如果按照转动规则

这就是用和表示的结果。所以说确实也是一种，它的控制系数是一个复数。而结果

是一个数的5次方根，这意味着这个值决定于5次方之外，根据密度层次每4次方完成一个环绕周期的原则，它的大小决定于下一个（或者上一个，决定于你从哪个方向去看）密度周期的最小长度单位（表现为）。所以说这个值本身就是“穿越的”。具体而言，要从它身上减去一个，也就是减去1，获得的大小，就是0的一半的大小，这说明0的大小是决定于5次密度（当前密度周期）之外的。

如果用的相对长度为1来替换，

根据对的解释不同，实际上还有一种算法：

如果按照

则有，

如果用的相对长度为1来替换，

可以看出，

虽然后者更接近我们熟悉的结果，但两种算法下都小于。这说明我们对的取值偏大了。这并不意味着我们算错了，这只是意味着在5次密度之外的那个应当小于当前密度上。

继续讨论，

的展开定义中都有，换句话说，我们实际上只计算了整周期的情况，而如果展开过程不是4的整数倍，那么，我们就没有把这些数值计算进来。

继续看，

可以看出这两个表达式具有相同的核心部分

和一个不同的“偏移量”

其中m若使用来替换，可以看出核心部分

我们知道旋转过程中，

所以可以得到，

区别于离散形式或者数值计算方法，我们把无穷形式也称为连续形式。

在连续形式中，单周期内的正弦和余弦共用的核的值为；所以其全体的累加和也共用一样的核。

偏移量部分

分开写

可见，在偏移量部分也被分别投射到了实数和纯虚数上。

继续看，

你没有看错，它的结果是一个实数！

我们做了什么才能得到这个结果？

对比：

对于4n次的展开我们唯一做的事情，就是让，而这在转动过程中，已经被证明为正确的了。

让我们累加所有的来得到：

然而

注意：虽然这里有的要求，但我们并未遵守它，因为我们已经不需要担心无限的问题了。

所以

要说明的是，此处不限于之间，而是可以在整个实数域上取值，要求只有一个，就是展开的次数，必须为4的整数倍。然而如果不是4的整数倍呢？

这时候一定还有一些“余量”，而它也一定可以写成分别映射到实数和虚数两个部分的余弦和正弦函数，也就是说，

一个由若干完整周期产生的实数，一个由不完整周期或者余量产生的实数，以及一个由不完整周期产生的虚数，这三个量，正好构成一个三维结构。其中不完整周期的部分构成一个平面，完整周期的部分构成第三个维数。它和这个平面正交是因为它是这个平面的完整数量的整数倍。

走到这里，一些现象已经可以给出解释了。

首先要说明的是，空间几何抽象于物理时空，而物理时空是数学空间在一组特定常数上的应用。而这组特定常数决定于使用这些物理观念的观察者本身。

然后从形象上，也就是空间几何上来说，我们知道是和与所构成的复平面垂直的第三个维度。然而我们知道复平面作为一个平面而言，只有两个维度，第三个维度在哪？

事实上，复平面有两个维度这个说法是错的。因为复平面本身代表的是相继的四个维度的转换过程，两个相邻坐标轴之间是一个维度提升的过程空间，比如从0维到1维的提升的过程空间。对于三维空间直角坐标系，每个都是一个维度，两两构成第二个维度，三个一起构成第三个维度。那么，我们可以假设：几何或者物理空间的0维点对应于复平面上的，1维线比如说轴对应于，2维面比如说两个轴构成的平面对应于，3维比如说三个轴构成的空间对应于。具体是不是这么对应的，还得具体分析。

但是，这里有一个问题 ，尽管我们知道复平面有四个维度，和物理或者几何空间有一个对应关系，但我们仍然需要把立体几何的第三个维度正确的画出来，而且要把它正确的投射到复平面之中：因为我们知道复平面意味着一切存在（数），第三个维度确实不可能在复平面之外。换句话说，我们可以画出一个三维坐标系，其中任何一个点，它最终还得投射到复平面的上。

观察

说明，最终第三个维数要投射到实数轴上。以下是的图像：



对于而言，

如果那么就是为比例系数的OneLess，也就是逐渐衰落的过程。我们不考虑这个过程，因为我们需要的是OneMore。那么我们得到的就是恒定的1。我们只考虑的情况，其中还有3种情况：，，而且越是接近1，就越大，它将趋向，而这说明我们得到了需要的反衰落OneMore的效果。事实上它和的效果是等价的；我们将得到本身，当我们得到一个负实数。我们知道负数是线性的（正数是面性的）。所以它符合作为一个新维数的要求。不仅如此，

表达式也把

的投射范围限定到了到区间，而这正好验证了用

作为角度单位的合理性。这时

所以我们可以看到，前两个维数，在复平面的第一象限，

而第三个维数，在实轴的负半轴上，关系为

这时候，物理空间的三个维数就对应到了复平面的之中。那么，物理或者几何空间的点在哪里？根据维数提升的逆向分析，它只能在轴上。

很显然，复平面和三维空间直角坐标系之间的关系是复杂的，不是一一对应的。但是，为什么三角函数还是可以用在两种截然不同的环境里面呢？因为本质上，无论是复平面还是平面直角坐标系，还是三维空间直角坐标系之中的相邻两个轴之间的关系，都是正交的。提升一个维数，把一个有限数映射到高维之中的映射结果只能是0，反过来高维的有限数映射到低维的结果则是无穷，因为环绕的缘故，它还是0；所以维数空间的相邻坐标轴肯定是正交的。而同理，在由两个坐标轴构成的2维平面上如果两个坐标轴也满足互相投影为0，它们就也是正交的。

我们终于得到了一种从三维空间直角坐标系到复平面的对应关系。但是这种关系很别扭。当我们说一个点的三维坐标为的时候，我们希望它的维数为0（一个维数为0的点具有三维坐标系中的一个由三个数描述的位置）。也就是说，最好是对应到上。这当然也是可以的。只是将维数的坐标向着负向平移两个单位。

看到了吗？没有什么对应于，而那正是光速所在的维度和密度。

回忆我们引入的时候，是为了主动的抵消“自然衰败”的过程。那时候是一个控制过程方向和比例的参数。我们把用复数代换进而发现只需要考虑即可，虽然这时候我们还不知道它的意思。

意味着它的最高维最终要映射到复平面的实数轴上。虽然它是一个负值，但是它和正值只差一个方向，所以我们用作为它最终的映射（半）轴。而说明它是一个点，它在物理的三维直角坐标系中具有坐标为。不仅如此，我们还能找到三个几何（物理）维数和三个密度维数之间的对应关系：

注意这个关系不是完全的一一对应的，或者说，不等于：

## 速度和加速度

让我们考虑在空间中运动的一个点，它具有（与我们作为观察者而言相对的）运动速度，它是一个物理存在，这就意味着它有内部的结构，有自己的质量和体积（我们暂时不考虑它的体积，只认为它是一个有质量的很小的点）。它在我们作为观察者而定制的三维空间直角坐标系中，具有一个坐标。经过一段时间之后，它将会到达，那么，它是怎么到达的？

它无法依赖其它，只能借助自己的运动来实现，虽然它相对于自己而言是没有运动的。我们现在只有一个办法来改变它的状态，那就是让它按照的方式来增长。但是我们也知道，的方式本身就包含了的方式。所以我们可以尝试用的方式来增长它。为了避免混淆，我们用替换，用。

根据

使用而不是原因在于我们要求，因为我们不需要“衰减”的方式，不需要不变的方式以及等价于的方式，也不需要的方式。我们只需要：

那么

增长的结果，是一个数量。然而，对于有限系统而言，在单位时间里面。那么对应的

也是一个长度，也是单位时间的长度。我们再把它变换一下：

这样我们就可以把两边都颠倒一下，

由于

所以不可能使用常规取对数的方法获得需要的结果。但如果我们不考虑正负，只计算绝对值，则有，

它的图像为：



这里可以看出，当接近0.5，就已经了，但是，我们若把当做一个整体（事实也是如此），那么它的倒数才是决定因素。所以不存在0.5的问题。不过，如果不当做一个整体呢？那就有问题了。

我们用

替换原来的

如果最小长度就是，那么，

就意味着存在一个“相对速度”，

需要指出，这里的并没有选定任何观察者（参考系），它虽然也叫做相对速度，但它实际上是相对于光速的相对速度，而不是相对于观察者（我们）的相对速度。相对于具有观察者的相对速度，它也可以称为“绝对相对速度”。

所以在这种情况下，单位时间“产生”的密度提升为

也就是相对速度对应密度提升。

如果呢？

即可获得，如果相对速度，相对的密度提升

也就是没有相对密度提升（如果考虑比稍微小一点，那么密度非但没有提升，反而下降了）。

由

可以看出，是必要的，因为随着，，，，

所以说，用这种方式，若要使得，它将会产生的密度提升，而这是做不到的。

观察函数 的图像：



发现如果那么

的数值相对于，非但不是升高的，反而是降低的。随着时间降低的的指数函数意味着在时间的负方向上运动（这里的时间指的不是绝对时间）。

但是它对应的

却没有中间的分割点。这是因为

这个代换造成的。我们这样做主要是为了能够获得和相乘的系数。但这也意味着引入了反向的转动，所以才有这个分割点出现。但这并不是一个单纯的数学技巧问题，它是有着实际物理意义的。

考虑到的本质是“绝对相对速度”，也就是说，它是一个物体在不依赖和其它物体相对运动关系的前提下就具有的“相对速度”（相对于光速），那么我们常说的相对速度，则应当写成绝对相对速度的差值。也就是说，存在类似于这样的关系，

这时候0.5作为一个分点，恰好可以把速度分成相反的两个方向。如果范围在是速度的正方向，那么就是速度的反方向；0.5是相对于观察者不动的速度。两个运动速度如果方向相同，则它们的相减并取绝对值，可以获得相对速度的绝对值；如果两个运动速度方向相反，则应当让它们的相加。为了实现这个要求，我们令

显然这个平移变换不影响

的结果。由此我们可以认识到，如果且为观察者的绝对相对速度，那么是可以取得的最大值，此时只有才能满足要求。也就是说，如果观察到一个运动的相对于观察者的速度大于光速的一半，这就等价于观察者自己的密度正在降低。这也就是说，如果把自己的速度从0加速到略微超过光速的一半，观察者自己就已经走在时间的反向上了。所以如果要去当前时间线上的当下的相对过去世界，那么只要超过光速的一半就可以了，而且超出的越少，返回得越快。虽然这也并不容易，但这是能做到的，且要比达到以及超过光速容易的多（具体还是要看选择的方法）。

从

可以看出，虽然乘以一个虚数单位，但是的结果是个实数，它不依赖于的大小存在，所以说它也不受到改变的影响。

对于相对速度而言同样有，

说明它可能存在一些“自发存在”的值。

这个方程不一定有解，它决定于的大小。

可以用如下的方法画出它的图像（Mathematica），求出两条线的交点也就找到了解。

当时图像如下：



可以看出此时存在两个交点。两个交点的横坐标都大于0.5。，

这是什么意思？意思是，在满足相对速度大于0的条件下，存在一些“先定”的相对速度，它们自发的满足密度提升的要求。另外，它们也定义“先定”的长度单位。

有了相对速度的概念之后，我们就可以讨论相对距离或者长度的概念了：经过一段时间之后，物体将到达一个位置，那个位置和当前的位置之间的距离为：

这可以用来定义三维物理时空之中两点之间的距离。不难发现，这个距离是依赖相对速度定义的。所以严格说，两点之间的距离决定于经过它的运动速度，假如运动是匀速的话；若速度，

不难发现这里的相对速度和相对距离都和狭义相对论的结果不同。这主要是因为使用了不同的方法。但如果我们用的是最小长度单位来度量两点之间的距离，则完全是另一回事；尤其是可变的时候。

到底什么叫位置？回到物理维数到密度维数的对应，

可以看出，一个三维空间中的点的坐标，对应于复平面或者密度（提升）空间中的一个相于特定配置的密度配置。这个特定配置就是观察者选择的坐标原点，往往这个坐标原点就是观察者自己的密度配置。说从一点经过一段时间的运动到达另一点，意味着在密度（提升）空间之中从一种配置，逐渐提升（也包括下降）到另一种配置。若两种配置完全相同（包括环绕之后的结果），它们就是同一个位置。

这看似容易理解，比如，但如果加入环绕的影响，就可能出现同一个三维位置对应非常多个高维或者低维空间中的位置。当我们可以在密度（或者维数）空间中运动之后，这一点会显得非常重要。

不仅如此，

在

过程中，只有

上的数量发生了变化，余量,也就对应于，并无变化，也就是说，整个过程都是“平动”的，没有发生转动。这意味着整个过程中，

不变。也就是

不变，也就是

不变。所以它叫做匀速（直线）运动。至于为什么是直线，可以简单说，至少目前为止，没有什么原因使其运动路径为曲线。那么，如果

变化了呢？这也只能意味着变化了，这就是加速运动了。也就是说，这里转动和加速是等价的。只是如果加速发生在运动方向上，那么转动则发生在垂直运动方向的平面中。这里说的转动是真实的物理或者几何空间的转动，不是维数上升对应于在复平面中的转动。然而不难发现，此处两者是统一的，这也是转动这个词的来源。

如果，

是均匀变化的，那么这个运动就叫做匀加速（直线）运动。均匀变化意味着对时间（不要和混淆）的一阶导数为常数，也就是，

考虑一个质点的转动，它就意味着在它转动平面的垂直方向上具有一个相对的加速度，而这个加速度对应的速度就有一个方向（加速度的方向是另一回事），这正是左手定则或者右手定则可以用来确定向量方向的原因。即便它本身不转动，也就是加速度为0，但是速度并不为0，虽然相对于观察者而言，其垂直平面方向上的速度可能为0，但是它自身的

中必须大于0。也就是说，相对静止的，也是绝对运动的。那么这个运动就有方向，它的方向还是一样的（可以由左手或者右手定则给出）。这意味着，一个质点，哪怕相对于观察者而言是不转动的，相对于自己也是不转动的，但它在绝对时空之中是仍然是转动的。

由此，如果我们想要一个质点相对于我们具有一个相对速度，

做匀速直线运动，而现在它相对于我们静止，那么我们只需要让它在需要它运动的方向的垂直平面上转动起来，那么它就应当获得一个在运动方向上的速度变化。那么我们怎么才能做到这一点呢？

考虑在转动平面上的转动，令以避免和时间冲突，

需要指出这里的只是用来配合三角函数而存在的，它们并不直接对应于垂直运动方向上的平面直角坐标系中的任何坐标（我们也根本没有选定任何坐标系）；但是这并不影响，复数系统中的和物理系统中的具有可以一一对应的关系。我们也只关心，所以这里并不讨论在平面上的实际对应关系。

如果是一个定值，它就不是转动，而是位置。所以要随着时间变化

为单位时间转过的角度，也就是角速度，以弧度制表示；为从给定时刻开始经历的时间。

这才是转动。由此，它边缘一点的线速度为

为边缘距离中心的半径。实际上我们只需要关心角速度即可，因为

我们需要发生变化，这样才能产生的变化，因为：

需要注意的是，虽然保证了随着时间增加，但是它的三角函数，

却可能因为而环绕，也就是随着时间增加而不动（这是绝对转动却看似不动的原因）。所以我们应该在的取值上避免的发生。为什么不在上避免呢？因为时间存在最小单位，任何都是最小单位的倍数，所以根本就无法避免。

假设已经避免了环绕，然后我们需要

发生变化，也就是，

以下是的图像：



是一个从（大于）0时刻开始就非常大的负数，如果为一个不变的值。我们不需要负数，因为它会使得质点向我们需要的相反方向运动。由此，我们得让反过来旋转才行（具体怎么才是正转可能需要实验才能知道）。

此时图像反转：



但启动一个转动，不可能意味着是不变的。它必定是逐渐变大的。假定是不变的（也就是说，它是一个匀角速度运动），那么它产生的也会随着时间增加不断减小。实际上减小得相当快。到2个单位时间的时候，就已经接近0了。所以我们不能指望时间自己增加来提供加速度。但是作为启动而言，这已经足足够了。

然而如果我们想要它具有更大的初始速度，或者更进一步的，可以具有不断增加的速度，或者说稳定的加速度呢？显然我们不能指望时间自己去完成。若要：

必须也随着时间变化，此时

以下为的图像：



这又是一个负值。为了获得正值（这时候负值意味着减速，所以必须获得正值），

它在时间起点的时候更大，或者说我们需要一个时间起点时候非常大的，然后让它随着时间逐渐减小（其减小的过程按照图像和表达式给出的进行），就可以保证

显然我们只有两个转动方向，而同一个过程只能向着一个方向转动，因为惯性不允许我们随意来回转动，所以

也就是说，最开始就正着转就对了。虽然速度开始的时候指向反向，但是加速度指向正向而且加速度比较大。最终还是会走向正向。

如果长度除以时间为速度，那么这里说的是；速度除以时间为加速度，那么这里说的是，如果继续除以时间为加加速度，则说的是，那么，

则是一个加加加速度（它具有加加加速度的量纲）。或者如果我们认为只是一个常数，只考虑的变化，那么它可以称为一个匀加角速运动。

有了

我们就可以让这个质点向某个方向匀加速运动而去。

但是这里还有一个问题，我们需要一个时间起点时候非常大的，这个要求是反常的。因为通常的转动，其角速度必须从0逐渐增大，不可能最开始的时候就是非常大的。除非我们有办法做到让它最开始就非常大，否则我们只能让它逐渐增大到需要的大小（由于惯性作用而只能如此），再通过符合图像和表达式的规律的方式将其减速，这样才能产生我们需要的加速度。这是两个问题，其中一个是产生巨大的转速，一个是产生精确可控的减速过程。这两者都很难。可能后者通过计算机来控制是较为容易的。而前者，也许只能通过逐渐加速的方式获得需要的初始角速度，也许还有其它办法。

如果想要匀加加角速运动呢？那么恐怕只能用

这个时候需要反转，而且要更精确的控制时间和角速度的关系。然而要知道，这时候已经涉及时间的四次导数，也就是进入了的层面，这已经相当于直接操作最小长度单位的大小了。实际上也就是我们需要的“立即转动”。

那么，匀加加加角速运动呢？这已经是5维（密度维，其实也是时空维）的问题了，它可能已经环绕了。如果并未环绕，那么可以考虑所有“加+”角速运动都能实现，对应的则是相应次数的导数。但是这也要求初始角速度越来越大，很可能达到超过光速的程度。那么我们也许只能通过先跳跃到下一个4维（密度）区间来实现到更多4维区间的跳跃；而这其实也是一种环绕。但是，4次和5次以及更多次导数的想法到底能否实现，暂时还是不清楚的。

我们要质点加速运动，究竟要干什么呢？实际上我们是要产生力的效果！

根据狭义相对论，力和加速度是不可区分的。也就是说，这相当于对质点施加一个让它走向目标方向的力。可是，为什么要这么复杂？我们直接对其施力不就可以了吗？为什么要让它加加速转动？

因为这个方法，不单对另一个质点有效，而且，对观察者自己也有效。也就是说，观察者自己如何给自己施力？这是不可能的。就像人不可能拉着自己的头发把自己提起来。观察者只能通过和其它物体的作用力和反作用力的方式来给自己施力。然而我们知道一个哪怕相对不旋转的物体，它本身还是旋转的。如果我们能改变自己的旋转方式，使得旋转的角速度符合图像和公式给出的规律，那么，我们就可以给自己施力了。

显然需要一个相反于地球引力方向的力，才能把物体提起来。现在，我们若能控制物体的旋转方式，它自己就可以把自己提起来了。具体而言，向某个方向加速转动，则增加它受到的向下的力；向某个方向，从某个高速度减速转动，则增加它受到的向上的力，也对应的减小它受到的重力。

但对于重力这种情况而言，最主要的问题则是转速不可能无限减小，也就是说，通过这种方式获得的反重力效果可能无法长期维持（也许反复重置到初始条件可以实现反重力效果的维持，其转速变化正如一个三角波的波形）。这也说明了重力的产生，并非按照此方式实现（不然它也无法维持）。所以我们真的得考虑在最小长度单位尺度上来实现反重力的目标，这也是密度提升或者下降法的体现，也是在更高或者更低的维数（密度维数）上解决问题的方法。

可以看出，我们只有一个目的，那就是反重力，广义而言，就是反引力。

## 引力

力是改变物体运动状态的原因，具体说，就是运动速度的大小和方向的原因。现在，我们根本没有使用力，只是使用了垂直运动速度方向上的加速的转动，就改变了物体运动速度的大小和方向。当然严格来说，（目前）我们还是使用了力，只是发生在了和运动垂直的方向上。

和运动垂直的方向上的作用却能改变运动方向上的数值，这说明这种正交关系是“不严格”的。这也说明了物理时空的正交关系是不严格的，也就是说，它在复平面中不是正交的（已经说明过了）。

我们不知道什么叫做力，但是我们知道，若能让改变，那么质点的运动状态，也就是速度（相对速度）就改变了。这在本质上而言是改变了质点的密度增长（也可能是减小）方式，也就是改变，

在单位时间里面的增长量。

而且力能改变物体的能量（动能）同样也是在说这个事实。

我们模仿“衰退定律”，制造了指数函数

我们使用控制增长的方向和比例。当我们开始引入虚数单位，

我们实际上就已经在1的次单位（或者说最小单位，实际上它是最大密度）的层面上来控制增长的方向和比例了。这意味着，当我们写出的时候，我们就已经获得了“立即转动”的能力。因为我们可以用这个参数来控制也就是的相对大小（在离散条件下，就是m的相对大小）。

具体而言，对于每个展开周期中的，

它的图像的：



如果那么就是为比例系数的OneLess，也就是逐渐衰落的过程。我们不考虑这个过程，因为我们需要的是OneMore。那么我们得到的就是恒定的1。我们只考虑的情况，其中还有3种情况：，，而且越是接近1，就越大，它将趋向，而这说明我们得到了需要的反衰落OneMore的效果。事实上它和的效果是等价的；我们将得到本身，当我们得到一个负实数。我们知道负数是线性的（正数是面性的）。所以它符合作为一个新维数的要求。

这一段阐明了的取值范围和它对应的产生的的结果；因为两个余量只决定空间中的两个次要坐标（旋转平面），所以不考虑它们。当我们得到一个负实数，这一点我们已经通过匀速直线运动阐释了。而，我们暂时也不考虑它。只考虑的情况，这时候，它其实就是。再重申一次我们控制的单位不是1，而是。

也就是说，在这个范围，我们可以获得任何一种想要的的大小。或者说，在这个层面上，的大小是可变的。对于后者而言，它是“从来就如此”的。

假设有一个质点A，它具有一个最小单位，这就相当于对于一个标准的，存在

加入地球作为一个质点E，具有最小单位，这就相当于对于一个标准的，存在

显然标准是观察者任选的，所以

难道么？如果，那就有

也就是说，二者的“绝对相对速度”相等，那么“相对相对速度”就等于0：

简单说，质点A就不会落在地面上，而是会浮在空中了。

反过来，它落在地面上的原因，正是因为

也是就是，不管为什么，地球和它附近的一个质点之间，具有不同的最小单位长度。这是地球产生引力的原因。

可以看出，这个表达式无法给出到底哪一个最小单位的密度更大。但只要二者存在差异，就会产生引力效应。注意，是引力效应。无论怎么变化，都是引力效应，而不是斥力效应。想要实现斥力效应，也许只能有

但我们暂时不考虑它。

也正如

指出的，若我们实现

我们就实现了反引力，也就是消去了引力造成的影响，而无需斥力（别忘了我们选择OneMore而构造的原因，就是为了避免衰落，而对应的正是衰落本身）。

至于哪一个更大，实际上是可以区分的：A会“主动”落在地面上，而地面不会“主动”落在A上，这不是一个简单但的可以互换的关系，这种说法完全符合直觉。

回到地球的视角，它具有引力的含义在于它和其它物体具有不同的，那么似乎是每个物体都有各自的，这样大家才能产生彼此的引力。然而在微观并不需要这一点。因为引力是微观的力在宏观堆积的结果。至于究竟是怎么堆积而造成的，我们可以看看引力的平方反比定律：

可以看到，在距离地球质心为处的某个点上，存在一个随着增长而减小的绝对相对速度。具体而言，若

在那两点上的（同一个检测）物体的速度

所以在那两点上的地球绝对相对速度有

又因为

也就是说，随着半径增加，地球在半径所在空间上的对应越来越小。由此可知，地球质心的是最大的，无穷远的是最小的。

也就是说，

是最大的。而不同的质量也对应了不同的，这说明堆积操作可以影响堆积体的的大小。换句话说，这也是“立即转动”而提升密度的一种方式。所以，一切具有引力的天体，比如行星，恒星，星系等等，都在以“立即转动”方式提升密度。要知道，

中是一个速率，它要乘以时间才是最终结果，所以密度增长随着时间演化的结果为，

若本来就很大（很接近于1），那么随着时间演化，密度将会变得非常非常的大，以至于它会变成一个超越当前四个密度的以至于进入高维密度（也包括空间）的存在。换句话说，它也是低维通向高维的“自然通道”，如果在其中使用的方式来减小密度，那么就可以从高密度返回到低密度。也就是说，它可以建立从低密度到高密度又到低密度的桥梁。换句话说，这样一个高密度的“黑洞”，也可以被当作一个“虫洞”（如果有密度自降的天体，也可以当作返回当前密度的出口，或者叫做“白洞”），用来实现在当前密度的远距离空间旅行，或者穿越密度的时间旅行。

质量为M的物体的史瓦西半径为：

我们知道它的本来面目是

也就是说，是按照常规加速方式来获得的，它为什么不可能达到我们已经讨论过了。而光速完全不能在那个层次上定义，所以并不存在光无法逃出的情况。

先前我们用转动的方式改变了物体运动速度的大小，而没有改变它的运动方向。现在可以尝试，改变它的运动方向，而不改变它的速度数值的大小。也就是匀速圆周运动。

回到