关于勾股定理

简单示例

世人皆知勾股定理，也称毕达哥拉斯定理。
它指的是，直角三角形中三条边之间的长度关系符合两条直角边长度的平方的和等于斜边长度的平方。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

比如，三条边长度分别为 3，4，5 或者 5，12，13：

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

或者给出公式：

$$a = 2mnt$$

$$b = (m^2 - n^2)t$$

$$c = (m^2 + n^2)t$$

这是整数范围中的情况，当然也可以在实数范围内找到例子，比如

$$1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

我们这里要讨论的，不是计算问题，而是这个定理究竟要说明的是什么。

深入讨论

说到勾股定理，我们就不能不说直角三角形。可是，正如 3，4，5 这三个数以及一系列整数都可以构成勾股数，这个定理似乎并不只在于三角形。或者说，三角形本身也意味着一些非几何上的东西。

而说到非几何的东西，我们最直接想到的可能就是拓扑了。简单说，拓扑没有长度的概念，而把这个定理引入了拓扑，就使得拓扑具有了长度性质，进而获得了我们熟悉的欧氏几何。

那么勾股定理，是如何在没有长度的前提下，导出了长度的概念呢？

让我们回顾《虚数单位的意义》中最后部分提到的周期问题：使用若干次幂的结果加上 1 等于完整周期的定义，我们可以获得若干种不同的虚数单位：

$$(i_k)^k + 1 = 0, k \geq 1, k \in N$$

$$i_k = (-1)^{\frac{1}{k}}, k \geq 1, k \in N$$

其中最简单的情况，

$$i_1 = -1$$

最常用的虚数单位，

$$i_2 = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} = i$$

还有其它形式。由于各种形式在-1 的开方运算过程种都可以使用i_2来表示，所以其它形式并不常用。不过如果已知周期，那么其它形式则不能用这种简单的方式来表达。

直角三角形和虚数单位之间的关系，在《虚数单位的意义》一文中也做过解释：由于虚数单位总是很大，而它的倒数又可以被视为 0，所以虚数单位或者单位 1，和虚数单位的倒数，天生的具有投影互相为 0 的性质。而这正好符合直角关系的要求。

因为虚数单位和单位 1，都和虚数单位的倒数所表达的长度具有正交性，所以即便使用最简单的形式，

$$i_1 = -1$$

我们也可以构造直角关系。也就是说，存在一些三角形，它的直角边长度并不需要满足

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

的标准形式，只需要满足

$$x + 1 = 0$$

的形式即可。而即便这种形式，需要指出的是，其中的

$$x = i_1$$

也必须表达周期性。也就是说，最简单的情况，比如

$$13 + 1 = 0$$

其中周期

$$x = 13$$

那么那个剩下的 1 呢？

那个 1 是一个过渡阶段，一个周期 13 完成之后，经历了一个过渡阶段 1，然后下一个周期重新开始。正如对于标准的虚数单位情况，x尽可能的大，要求$\frac{1}{x}$尽可能的小，此时在

$$i_1 + 1 = 0$$

的条件下，我们只有整数可用，而最小的有效整数，就是 1。

我们是这样认识周期性的：如果周期之间没有一个最小的间隔，那么周期就无法体现出来。此时周期性体现为不间断的恒常性。若恒常性没有开始和结束，则其无法在有比较的前提下获得存在性。也就是说，没有起始终止的恒常和不存在无法区分。

直角三角形最大的特点就是有一个直角。而直角对应了正交性，正交性则对应了虚数单位的周期性，以及周期性对应了最小间隔必须存在。

那么，当我们看到一条直角边为 13，那么我们就知道完整周期的大小其实是

$$13 + 1 = 14$$

其中 13 为周期的实部，1 为周期的虚部。这里的实部和虚部与复数中的实部和虚部的本意是相同的。而对于这种最简单的情况，实部总是大于 0 的整数，虚部总是 1。

就像是说，在这个周期中有 13 个起作用的有效位置（实部），和 1 个不起作用，只分割周期的无效位置（虚部）。

现在，让我们试着修改这个周期，让它具有 18 个有效位置，我们应该怎么做呢？
显然，要增加 5 个有效位置，

$$13 + 5 = 18$$

但是这种做法需要 18 的个位置，在一个周期中是无法容纳的。所以我们要把原来的周期扩展两倍，新的周期具有的位置总数为

$$13 \times 2 = 26$$

扩展到两倍是因为周期只能按照整数倍扩展，而增加的数量小于一个周期。不难看出，结果是 26，而不是 28。也就是说扩展的只有有效位置，而没有附带无效位置。如果带上，则有 28 个位置。但是此时有两个无效位置，和一个周期只有一个无效位置的最小周期原则不符。

扩展之后具有 26 个位置的新周期中，也只有 18 个位置是有效的，剩下

$$13 - 5 = 8$$

个位置，是无效的。而这 8 个位置，也不符合最小周期原则。
一个周期中有 8 个无效位置，是不可接受的，因为一个周期只能有 1 个无效位置。而 8 个无效位置必须分配到 8 个周期中。由此我们可以得到如下分布情况：
每个周期有

$$13 + 5 = 18$$

个有效位置，以及 1 个无效位置。周期总长度为，

$$18 + 1 = 19$$

至少有

$$13 - 5 = 8$$

个周期（也就是对应这么多个无效位置），才能使得周期扩充之后的结果不损失结构和有效性的。这就得到了，至少

$$(13 + 5) \times (13 - 5) = 18 \times 8 = 144 = 12^2$$

个有效位置。显然这时候我们获得的位置已经不是线性排列的，而是一个方阵了。
不难算出，这个方阵，每行都有 12 个有效位置以及必须有的 1 个无效位置。所以它是一个 12 行 13 列的方阵（我们特意选取 13 和 5，是为了保证结果为整数 12 的平方）。
我们需要一个新的周期，来对应有效位置扩展情况

$$13 + 5 = 18$$

以及无效位置扩展情况

$$13 - 5 = 8$$

所共同造成的结果。这个结果不一定必须是方阵（比如在实数范围中讨论），但是这个结果的原因是两个数的乘积，那么这个结果最好也是两个数的乘积，而且最好两个数相等这就意味着，对结果求平方根，即可以获得这两个相等的数，当作一个数理解。
其中每个周期为

$$12 + 1 = 13$$

个位置，一共有

$$13 \times 12 = 156$$

个位置，其中有 12 个是无效位置（在每个周期的结尾都有 1 个）。

总的来说，一个新的周期，横竖排列的前提下，可以获得对周期 13 做增量为 5 的修改之后

能得到的同样效果。即有效位置的数量相等（新周期重复自身次），无效位置遵循最小周期原则。
为了增加有效位置，我们使用了

$$(c+b)(c-b)=(13+5)\times(13-5)=13^2-5^2=12^2$$

的形式.
其实，如果我们要增加无效位置，也是一样的。只是这时候我们要用

$$(a+bi)(a-bi)=(12+5i)\times(12-5i)=12^2-(5i)^2=12^2+5^2=13^2$$

对增加的位置乘以虚数单位，使得它从有效位置变成无效位置；或者说，从每行一个无效位置的角度来理解，则是使得它从有效位置，变成了行数。

这种一加一减的方式，显然是要对应于实部和虚部的关系才建立起来的。由于除了实部和虚部之外，并没有第三种选择，所以结果总是方阵，而且必须是两项乘积。是方阵，就意味着不是立方体或者更高维的结构。那么试图在整数范围内，寻找更高维的结构对应的基础结构，比如立方体的变长，则变得没有道理。也就是说，虽然可以写出

$$a^3+b^3=c^3\cdots a,b\in N$$

其中a和b为自然数，但是c同样为自然数的可能性就很小了。
需要特别指出的是，我们在这里仅分析可能性，而不是要证明费马大定理。

以上讨论的是在虚数单位等于-1 的情况下，为什么勾股定理可以成立。或者说，勾股定理的本质是什么：如果对已知周期进行扩充（把单位 1 分成更多的份数），扩充实部使得等效的周期中的实部总量（或者占空比）更少，扩充虚部使得等效的周期中实部总量（或者占空比）更大。因为扩充实部造成的额外周期的引入远小于扩充虚部照成的额外周期的引入。也就是说，扩充虚部引入的有效位置要比只扩充实部引入的有效位置更多。

实数范围中的情况

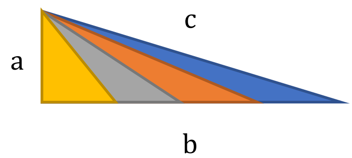
对于给定直角三角形，我们假定三条边 a，b，c，其中 c 为斜边。
让我们考虑连续情况，其中

$$x+\frac{1}{x}=0$$

至少在直角边上应当被保证：

$$a=i_a$$
$$b=i_b$$
$$(i_a)^2=(i_b)^2=-1$$

考虑下图中的直角三角形，



左边的直角边长度为a，根据

$$a^2+1=0$$

可以令水平直角边黄色的部分长度为 1，也就是说黄色部分的长度为

$$1=-a^2$$

虽然棕色的三角形左边的边和底边并不严格垂直，但是我们可以假定倾斜的程度仍然符合垂直的要求。事实上只要不是和底边平行，我们都可以取垂直分量和水平分量，而由于虚数单位意味着巨大的差异，垂直分量的实际值远大于水平分量（周期很大，周期的若干倍相比较于周期内的数量则超级大），水平分量总是可以忽略不记，于是几乎任何非平行的角度都和垂直相等价。

此时我们认为棕色三角形的左侧边的长度也是a，虽然看上去不像，但是相比较于底边的 1 而言，两者不可区分。同时底边上，棕色线段的长度也是 1，同样符合

$$1=-a^2$$

同理，橙色和蓝色线段的长度也都是 1。为了简化和区分我们只画出四种颜色。现在让我们假定，从上面的顶点发出射线，把底边平均分为 b份，每一份的长度都是 1，也就是说，底边的长度为

$$b=1\times b=-a^2\times b=-a^2b$$

虽然

$$-a^2=1$$

任何数乘以 1，都相当于什么也没做；但是，这种方式，我们可以建立a和b之间的关系。

现在，让我们考虑实际的数量换算：如果b是 1 的倍数，那么a则对应周期的倍数（a 和 b 不平行则理解为垂直主导），即实际数量上，a应当写成对应的数量，

$$ai$$

由此，把当前周期b，增加a个无效位置，求等价周期的算法是，

$$t=\sqrt{(ai)^2+b^2}$$

要是使得t能够存在，则

$$(ai)^2+b^2$$

应当体现为某个数的偶数次方形式。具体计算一下，

$$(ai)^2+b^2=b^2-a^2=(-a^2b)^2-a^2=a^4b^2-a^2=a^2(a^2b^2-1)=a^2(a^2b^2+a^2)$$
$$=a^4(b^2+1)$$

我们知道，

$$a=i_a$$
$$b=i_b$$

也就是说，同时存在，

$$a^2+1=0$$
$$b^2+1=0$$

所以

$$(ai)^2+b^2=a^4(b^2+1)=a^4\times 0=a^4\times 0^4$$

我们确实可以认为两个数的平方之和的结果为 0，但是要知道的是，这个 0 并不意味着什么也没有，而是意味着周期以及周期的整数倍甚至任意次方。

如果我们把周期的a倍当作一个单位，则有新的单位

$$u=a\times 0$$

于是

$$(ai)^2+b^2=a^4\times 0^4=(a\times 0)^4=u^4$$

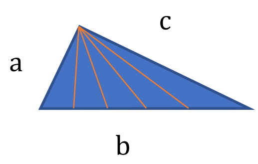
因为同样不能平行于b，所以这里的u应当和a一样被理解为某种虚数单位，

$$u^2 + 1 = 0$$
$$u^2 = -1$$
所以,
$$(ai)^2 + b^2 = u^4 = (u^2)^2 = (-1)^2$$
由此可以得出，如果存在周期
$$c = i_1 = -1$$
则可以写出,
$$(ai)^2 + b^2 = c^2$$
但这并不是我们熟悉的形式。我们可以把
$$i^2 = -1$$
再次带入,
$$(ai)^2 + b^2 = -a^2 + b^2 = b^2 - a^2 = c^2$$

$$b^2 - a^2 = c^2$$
$$a^2 + c^2 = b^2$$
这才是我们熟悉的形式。

看来求得的c边才是真正的另一条直角边，而b边是斜边。当然，这也符合要求，因为几乎所有的不同颜色的三角形，都不必是真正的直角三角形。

实际的图形是这样的:



不难发现，这里的c直角边使用的是
$$i_1 = -1$$
模式，而另一条a直角边使用的是
$$i_2 = \sqrt{-1}$$
模式。也就是说，如果c的长度单位为整数，则a的长度单位几乎必须是非整数的实数。

a的单位在c上的投影，总是
$$i_2 = \sqrt{-1} = \frac{-1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i_2}$$
因为
$${i_2}^2 = i_1$$
显然投影为
$$\frac{1}{i_2} = \frac{1}{i} = 0$$
符合投影为 0 的条件。反过来，c的单位在a上的投影,
$$i_1 = -1 = \frac{1}{-1} = \frac{1}{i_1}$$
因为
$${i_1}^2 = (-1)^2 = 1 = i_0$$

也就是说，两条直角边的单位在对方的长度方向上的投影为 0。

所以直角三角形这种几何关系，是根据虚数单位的层次关系构建的。最简单的虚数单位-1，以及稍微复杂一点的虚数单位-1 的平方根，这两个单位具有天生的正交关系。而它们彼此可以互通并形成有效的对应物，则需要将它们都平方之后。这使得其中-1 的平方根的单位的长度可以进入到-1 的单位长度，以及-1 的单位长度可以进入到 1 的单位长度，进而两者可以在 0 的单位长度上进行累加，并重新兑换到-1 或者 1 的平方根单位上（到哪个单位都行）。

能够用勾股定理的方式计算坐标系上两点之间的距离，也基于两种相继的虚数单位的存在，也就是说，对同一个周期进行两种不同形式的观察。两种观察导致了天生正交的两种单位的产生。所以一个平面直角坐标系，可以仅仅描述同一种东西，这种东西只需要可以被两种（通常是i_1和i_2）相继的虚数单位描述即可。同理如果是空间直角坐标系，则需要相继三种不同的虚数单位。

如果仔细观察上述三角形的情况，不难发现，它其实可以具有 4 个相继的（虚数）单位，i_0，i_1，i_2以及i_3。或者使用标准的虚数单位形式，则是i^0, i^1, i^2, i^3。这使得我们用勾股定理来计算两点间的距离的做法，直到 3 维（4 维若包含点）空间都成立。但正因虚数单位的 4-周期性，4 维（5 维若包含点）以及更高维数的空间距离就不适合于使用这种方式来计算了：若一定用这种方式，则会出现计算结果被周期性折叠的情况（量子纠缠等超距作用）。

也就是说，5 维以上的空间中，不要计算距离，除非距离的定义被限定在连续的 4 维空间里面：这里的空间不包含时间概念，所以这指的并不是 4 维空间加上 1 维时间的意思。

全部单位的集合

根据

$$ {i_2}^2 = i_1 = -1 $$
$$ {i_1}^2 = i_0 = 1 $$

不难猜到，

$$ {i_4}^2 = i_2 $$
$$ {i_8}^2 = i_4 $$

i_1，i_2，i_4，i_8在对方的长度方向上的投影都为 0。
从虚数单位的周期性可以知道，只需要四个不同的虚数单位，就可以构成虚数单位的循环。如果我们只考虑单位，则

$$ i_0, i_1, i_2, i_4 $$

就足够了（四元数）；但是如果要求只使用虚数单位，则需要

$$ i_1, i_2, i_4, i_8 $$

才行。

回到最初给出的关于虚数单位的定义，我们可以进一步给出所有非 0 单位的定义（无论虚实）：

$$ i_k = (-1)^{\frac{1}{k}}, k \geq 1, k \in N $$

$$i_0 = (-1)^0 = 1$$

不难看出，此时，

$$\frac{1}{k} = 0, k = 0$$

由此可以得出，

$$\frac{1}{0} = 0$$

当然，作为周期而言，我们也可以写出，

$$0 + \frac{1}{0} = \frac{1}{0} + 0 = 0$$

这也体现了 0 才是真正的无穷小这样一个事实。进一步讲，根据模式，

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

可以写出，

$$0^2 + 1 = 0$$

此时，0 也可以被当作虚数单位（的倒数），它的初值就是无穷小，而它的倒数（也等于自身）则是无限大。我们也可以把上式扩展为，

$$0^k + 1 = 0, k \geq 0, k \in N$$

对于

$$k = 0$$

的情况，

$$0^0 + 1 = 1 + 1 = 0$$

对于其它情况，

$$0^k + 1 = 0 + 1 = 0$$

无论对于何种情况都有，

$$0 = 1 \cdots 1 = 0$$

这可以称为“空即是色，色即是空”。

又因为，

$$\frac{1}{0} = 0$$

可以得出，

$$1 = \frac{1}{0} = \infty$$

也就是

$$1 = \infty \cdots \infty = 1$$

这可以称为“一即无限，无限即一”。

由此我们给出所有可以称为单位的数量集合：

$$U = \left\{0, i_k = (-1)^{\frac{1}{k}} (k \geq 0), \frac{1}{0}\right\}$$

费马大定理（Fermat’s Last Theorem）

时至今日，费马大定理的证明已经获得，在 358 年之后，由英国数学家怀尔斯给出。

更多的证明也已多余，但我们仍然可以从一个不同的角度，来理解它的含义：因为，它的形式和勾股定理如出一辙。

费马大定理指的是，关于x, y, z的不定方程，

$$x^n + y^n = z^n \ (x, y, z, n \in N)$$

在

$$n \geq 3$$

的时候，无解（无自然数x, y, z满足方程）。
现在让我们仔细考虑这个“定理”。
当$n = 1$的时候，

$$x^n + y^n = x^1 + y^1 = x + y = z = z^1 = z^n(n = 1)$$

显然总可以找到自然数x, y, z满足这个不定方程。x, y可以任取，此时总有相应的z存在（自然数集合和加法运算构成半群）。

当$n = 2$的时候，

$$x^n + y^n = x^2 + y^2 = z^2 = z^n(n = 2)$$

这就是勾股定理。本文开篇的时候已经给出了符合勾股数的公式。计算不是问题。问题在于勾股定理的意义，而此时，经过上文的论述，这个意义已经清楚了：我们把方程写成如下形式，

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$z^2 - x^2 = z^2 + i^2x^2$$
$$z^2 + (ix)^2 = y^2$$

这个方程的意思是，z 个有效位置的基础上，增加 x 个无效位置（或者周期）之后，得到的等效有效位置的总量。换句话说，在引入周期概念之后，方程的形式发生了变化，变化后的形式，才有“意义”（不再只是数学形式）。

这里所用的虚数单位，符合

$$i^2 + 1 = 0$$

也就是说，它就是i_2，或者最常用的虚数单位i。而其它可用的虚数单位重新列出如下，

$$(i_k)^k + 1 = 0, k \geq 1, k \in N$$

$$i_k = (-1)^{\frac{1}{k}}, k \geq 1, k \in N$$

为什么要考虑虚数单位？因为它有一个最大的好处，就是，它几乎就是周期的大小。而周期只是周期，并没有确定的大小。也就是说，用虚数单位处理周期问题，只要周期存在（一定存在，这是数学本身的性质），那么，不管周期多大，它都可用。

需要再次说明的是，

$$i_k = (-1)^{\frac{1}{k}}$$

这种表示方式，是假定了不能超过周期才写出的。若观察者可以超越周期的极限，表达式可以写成

$$i_k = (N-1)^{\frac{1}{k}}$$

其中 N 就是周期的大小。由此我们知道，

$$(i_k)^k = \left[(N-1)^{\frac{1}{k}}\right]^k = (N-1)^{\frac{1}{k}\times k} = (N-1)$$

不仅如此，我们还能知道，

$$[(i_k)^k]^2 = (N-1)^2 = N^2 - 2N + 1 = 1\ (mod\ N) = [(i_k)^2]^k$$

所以不难看出，从任何虚数单位求到 1 的过程，都是一样的，首先乘以 k 次方，达到-1，然后再平方，得到+1，也就是模周期之后，余数为 1。对于常用虚数单位i_2而言，$k = 2$。

现在让我们回到费马大定理的形式，

$$x^n + y^n = z^n\ (x, y, z, n \in N)$$

让我们假定当

$$n \geq 3$$

的时候，存在满足方程的自然数x, y, z，需要指出的是，此处我们并不是为反证法做铺垫，而只是为了写出统一的形式：

$$x^n + y^n = z^n$$
$$z^n - x^n = y^n$$
$$z^n + (i_k)^k x^n = y^n$$

此时在指数上，不仅仅有n，还有了k。那么 k 和n是什么关系呢？

从结果上来说，显然我们不要在结果中留下任何虚数单位，也就是y^n不是（纯）虚数。所以选择已经被限制在，只有k和n 相等的条件下了，

$$k = n$$

原式可以写成

$$z^n + (i_n)^n x^n = y^n$$

也就是，

$$z^n + (i_n x)^n = y^n, i_n = \sqrt[n]{0-1}$$

不难看出，对于勾股定理而言，

$$z^2 + (i_2 x)^2 = y^2, i_2 = \sqrt[2]{0-1}$$

对于$n = 1$则有

$$z^1 + (i_1 x)^1 = y^1, i_1 = \sqrt[1]{0-1}$$

这就是我们需要的统一形式。

继续观察

$$z^n + (i_n x)^n = y^n$$
$$z^n = y^n - (i_n x)^n$$

$$z^n = y^n + (i_n)^n (i_n x)^n = y^n + (i_n i_n x)^n = y^n + \left({i_n}^2 x\right)^n$$

$$\left({i_n}^2 x\right)^n + y^n = z^n$$

再继续观察，

$$y^n = z^n - \left({i_n}^2 x\right)^n = z^n + (i_n)^n \left({i_n}^2 x\right)^n = z^n + \left(i_n {i_n}^2 x\right)^n = z^n + \left({i_n}^3 x\right)^n$$

继续观察，

$$z^n = y^n - \left({i_n}^3 x\right)^n = y^n + (i_n)^n\left({i_n}^3 x\right)^n = y^n + \left(i_n {i_n}^2 x\right)^n = y^n + \left({i_n}^4 x\right)^n$$

不难发现，关于x的项，每次移动到方程右边再移动回来，就构成一个周期，虚数单位上的幂次就要增加 2，也就是说，t个周期之后，可以写出

$$\left({i_n}^{2t} x\right)^n + y^n = z^n, t \geq 1$$

对比最初的形式，

$$x^n + y^n = z^n$$

不难发现，此时，只有

$${i_n}^{2t} = 1 = (-1)^2$$

才能满足两种形式的等价性，

也就是说，我们知道

$${i_n}^n = -1$$

也就知道了

$${i_n}^{2n} = (-1)^2 = 1$$

也就是说，为了满足条件，实际上，

$$t = n$$

原方程的最终形式为，

$$\left({i_n}^{2n} x\right)^n + y^n = z^n$$

$${i_n}^{2n^2} x^n + y^n = z^n$$

$${i_n}^{2n^2} = \left({i_n}^{n^2}\right)^2 = 1$$

$${i_n}^{n^2} = +1$$

考虑下面的结果，不能选择-1，只能选择+1，由此得到，

$${i_n}^{n^2} x^n + y^n = z^n$$

由此可以解出，

$$i_n = i_1 = -1, (n = 1)$$

$$i_n = i_2 = +i, (n = 2)$$

$$i_n = i_1 i_2 = -i, (n = 2)$$

也就是说，n的取值，只有 1 和 2 两种。

为什么$n = 3$不行?

$${i_3}^9 x^3 + y^3 = z^3$$

$$\left({i_3}^3 x\right)^3 + y^3 = z^3$$

$$(-x)^3 + y^3 = z^3$$

得到的方程的形式发生了变化，

$$y^3 = z^3 + x^3$$

不难看出所有奇数次结果都是错误的形式。

如果$n = 4$，

$$i_4{}^{16}x^4 + y^4 = z^4$$

$$\left(i_4{}^4x\right)^4 + y^4 = z^4$$

$$(-x)^4 + y^4 = z^4$$

虽然此时-1 的 4 次方可以得到+1，但是考虑，

$$y^4 = z^4 - \left(i_4{}^4x\right)^4 = z^4 + i_4{}^4\left(i_4{}^4x\right)^4 = z^4 + \left(i_4{}^5x\right)^4 = z^4 + \left(i_4i_4{}^4x\right)^4 = z^4 + (i_4x)^4$$

$$= z^4 + x^4$$

这时候方程的形式又发生了错误。这种情况是通过对偶数次做移项操作得到的，所以其它偶数次也必定存在同样的问题。总的来说，3 以及 3 以上的奇数，4 以及 4 以上的偶数，都存在形态在移项过程中不能保持的问题。仿照勾股定理，如果我们也假定 x，y，z 是直角三角形的三条边，而它们的关系不再是平方和关系（也不是线性关系），那么，3 以上幂次的关系导致三角形的三条边会交换位置。

显然，在不考虑周期性的前提下，三条边交换位置是不可能的，因为交换位置只能是引入周期性之后才能获得的结果：然而，不引入周期性也是不可能的，因为我们讨论的是数，不管它有多大，它都受到周期性限制（数的本质）。如果我们只是考虑 3，4，5 这种比较小的数，我们只需要穷举即可。然而当我们讨论到任何数的任何次方，唯一可以使用的特性就是（以虚数单位和 0 所表达的）周期性了。
很明显，

$$i_1 = -1$$

可以直接导致三条边交换位置，$i_k, k \geq 3$也是如此。
然而，为什么$n = 2$不会产生交换位置的结果?
在

$$i_n{}^{n^2}x^n + y^n = z^n$$

之中，因为，

$$n^2 = 2^2 = 4$$

且

$$i_n = i_2 = i$$
$$i^{4m+2} = -1$$
$$i^{4m+4} = +1$$

基本虚数单位i总能在向左然后向右的移项周期中直接调节正负符号。而其它$i_k, k = 1, k \geq 3$，则无法和移项的过程同步：一个周期正好需要移动两次，而$i_k, k = 1, k \geq 3$的虚数单位没法在两次移动中完成自己的周期。这就是为什么i_2能够保持三条边不会交换位置的原因。由此可以想到，如果存在更多项，那么$i_k, k \geq 3$的情况就会有解了（事实也确实如此）。

正如，太大的数和太小的数遇到一起，使得我们不得不建立虚数单位这种比例关系；运算的步骤和数量之间也具有内在的相互影响的能力。我们曾经认为，运算可以无关于数量，正如加法并不受到加数和被加数的影响，但事实上是，它们之间完全可能具有深刻的内在联系。这一点实际上已经在关于质数的和的问题中讨论过一次了$(2n = p + q)$。某些问题之所以困难，是我们将观察者和所观之物严格对立，忽视了它们内在的联系而造成的结果，而这个简单的证明就是这个论断的最好证据之一。