关于自然数全加和的另一种算法

我们熟知自然数全加和，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

推导过程如下，

$$S_0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

$$1 - S_0 = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) = S_0$$

$$S_0 = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots$$

$$\begin{aligned} S_0 - S_1 &= (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots) \\ &= (1 - 1) + (-1 + 2) + (1 - 3) + (-1 + 4) + \cdots \\ &= 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots = S_1 \end{aligned}$$

$$S_0 = 2S_1$$

$$S_1 = \frac{S_0}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

$$\begin{aligned} S_1 - S &= (1 - 2 + 3 - 4 + \cdots) - (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots) \\ &= (1 - 1) + (-2 - 2) + (3 - 3) + (-4 - 4) + \cdots = -4 - 8 - 12 - \cdots \\ &= -4(1 + 2 + 3 + \cdots) = -4S \end{aligned}$$

$$S_1 - S = -4S$$

$$S_1 = -3S$$

$$S = -\frac{1}{3}S_1 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

这个解法并不难，非常容易看懂，但是并不容易真正理解。正负交错和无穷项计算，只需要保持方程的形态，就可以“预知”结果。但是这到底说的是什么意思？比如S_0和$1 - S_0$的结果相等，这个数值显然等于二分之一，但是若S_0为有限项，则它只能等于 0 或者等于 1，那么有限项和无限项的差别到底是什么？或者说，所谓“无限”，到底是什么意思？

现在让我们看一看这个问题的另一种解法，以便于了解“无限”的含义。

考虑数列和,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

把它乘以一个不定的数量k，先记住这件事，并且在最后要记得把它除掉，

$$k\sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} kn = 1k + 2k + 3k + 4k + \cdots$$

这个数列到底有多长，是不知道的，但是我们知道一件事，就是若它可以有确定值，则它必须有周期性。它有确定值吗？因为k不确定，所以它并没有确定值，但是k是我们后来加上的，k已经“吸收”了整个序列的不确定性，那么$\sum n$就可以有确定值。我们先假定它有确定值，也就是我们要验证得到的$-\frac{1}{12}$。既然有确定值，也就是有周期性，那么它就可以写成一个模的形式，或者说，用一个“圆”（具有周期）来描绘它。

具体来说，我们做一个由格子构成的直方图，第 1 列 1 个格子，长度为单位 1，高度为单位 1；第 2 列 2 个格子，长度为单位 1，高度为 2；第 3 列 3 个格子，长度为单位 1，高度为 3……现在的问题在于，这个直方图必须无限画下去，因为要实现$n \to \infty$。那么这个直方图怎么画？

答案是，没法画，我们终究只能截取到某一个n。但是，别忘了周期性，也就是说，哪怕这个直方图要任意的“无限”画下去，它最终也有“首尾相接”的时候。而一个直方图如何实现“首尾相接”呢？很简单，就是把它首尾相接。也就是说，把画它的这张纸卷起来（哪怕无限长），让第 1 列格子和最后 1 列格子接在一起，就构成了一个螺旋楼梯形状的纸筒（类圆柱）。显然你看到了，这里出现了“升维”操作，我们把二维的平面上的直方图，升维为一个三维空间中的纸筒。之所以这样做，是因为我们就是这样定义维数上升的：二维中的“无限”在三维中是“有限”的。

这样一来，我们就得到了在三维空间中，这个直方图的形态。若把它的侧面都补全，它就是一个圆柱体，若只考虑垂直侧面的底面，它就是一个圆。

我们继续考虑这样一个类圆柱体，看看它的特性。

不难写出它的侧面积为,

$$S = \frac{n \times (n-1)}{2}, n \to \infty$$

这个数是多少很成问题，但还有更成问题的，这个几何体的高是多少？因为最终$n \to \infty$，高度就是无限的。这样一个侧面积和高度以及体积都无限的圆柱体，我们怎么才能知道它到底是什么样子的？

我们用的是单位长度 1 为格子的长度，高度从 1 开始递增的方式构造了这个直方图。我们也可以把高度的单位换成k,让k去吸收高度的不确定性。这样的话虽然n和k都是不确定的（而且可以说非常大），但是它们的不确定性都是一维的，于是可以认为，

$$n \to \infty$$

$$k \to \infty$$

$$n = k$$

也就是两个无穷大可以认为是相等的，也就是说它们的不确定程度都是一样的。这时候，我们就可以大胆的认为，这个圆柱体的高，就是它两端数值的差，同时也是底面圆周的周长。

这个圆柱体的高有两种理解方式，

$$h = n - 0$$

$$h = n - 1$$

对于无穷来说，0 和 1 在这里并无本质差别，由此求得的h是基于不确定性高度误差的上下限的。于是就可以写出，

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = n - 0$$

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = n - 1$$

分别解方程，

$$n \times (n-1) = 2n$$

$$n^2 - 3n = 0$$

$$n \times (n-3) = 0$$

$$n = 0, n = 3$$

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = n - 1$$

$$n^2 - n = 2n - 2$$

$$n^2 + n + 2 = 0$$

$$(n-2)(n-1) = 0$$

$$n = 1, n = 2$$

可见全部n的取值为$n = 0,1,2,3$。n为 0 和 1 都无法构成直方图以及圆柱体（但不代表不能构成别的东西，也就是说，结果可能是多值的），暂时不需要考虑；此时两种情况就有两

种可能性，一种是 2，一种是 3。也就是说，虽然n和k都不确定，但是如果它们都是某个不定量的 2 倍或者 3 倍（“逻辑或”对应于“相乘”），则可以建立圆柱体的高就是侧面积这种认识（无穷大都相等）。那么我们就可以认为，

$$n = 2, k = 3$$

$$n = 3, k = 2$$

$$n' = k' = nk = n^2 = k^2 = 2 \times 3 = 6$$

也就是说，构成直方图，且允许直方图卷曲成类圆柱体，需要的是n^2至少为 6 的倍数，也就是模 6 等于 0。此处要进一步考虑不确定性（整数的奇偶性），则单位 1 需要缩减为自身的一半，那么n^2则必须为 12 的倍数，也就是模 12 等于 0。

回来看圆柱的底面，由于$n \to \infty$,它其实已经是一个圆面了。那么它就符合由实数构成周期的情况，也就是符合，

$$i + \frac{1}{i} = 0$$

的虚数单位的定义，也就是，

$$12 + \frac{1}{12} = 0 \; mod \; 12$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots) + \frac{1}{12} = 0 \; mod \; 12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

由上述分析可知，“无限”到底是什么？就是主观上的“超越限制，不被限制”，或者客观来说的不确定性。这种不确定性在数值的差异还比较小的时候，并不明显，当数值的差异极其巨大的时候，却体现为某种确定性。这有点像大数定理，当数量极为巨大的时候，事件的概率分布情况总是接近于正态分布这样一种确定的分布。

另外，从这个结果来说，可以简单的抽象出一个公式，

$$S = -\frac{1}{2n}$$

其中 1/2 是用来调整整数的奇偶不确定性的，这一点会在后面讨论。

所以回到最初的问题，到底什么决定了

$$S_0 = \frac{1}{2}$$

答案是，1 和-1 反复出现的次数，它是一个巨大的数量。$\frac{1}{2}$体现出来的是巨大数量的奇偶不确定性产生的确定性。

我们从这个研究中到底得到了什么？

确定微小而不确定数量的大量的不确定性，是如何构成最终的确定性的。毕竟我们不知道那个n到底是多少，这个大量的数量是不确定的。但是构成这n个数的排列方式是确定的（比如奇偶相继），而最终产生的模量（余量）又是确定的了。所以简单说，并不需要追求数量上的绝对的确定性，也可以通过维数的升降来获得某种确定性。

自然数全加和，其实就是黎曼ζ函数的$\zeta(-1)$的情况。现在让我们看看其他情况，已知，

$$\zeta(\mathrm{s})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

这是黎曼Zeta函数。我们先前讨论的是，

$$\zeta(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\cdots$$

此处列出几个其它参数对应的表达式和数值结果，

$$\zeta(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^0}=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\cdots$$

$$\zeta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

$$\zeta(-2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots=0$$

$$\zeta(-3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^3=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots=\frac{1}{120}$$

在计算$\zeta(-1)$的时候，我们首先把单位数量做成直方图（它是二维的），然后将直方图卷曲为三维的类圆柱，然后把这个二维的面积，或者说一维的长度（因为每个直方图竖条的底边都是 1，所以自动从二维降到一维），作为类圆柱的长度（高度差），也就是说，从低维的度量构造了高维的度量。

现在我们考虑$\zeta(0)$，如果也做直方图，有没有可能通过卷曲从低维构造高维的度量。不难看出，如果一定要这样做，那么它的周长（或者侧面积）就是n，高度就是 1，结果的奇偶不确定性仍然给出$\frac{1}{2}$，那么可以写出的是，

$$n = 1 - 0 = 1$$

单位 1 缩减为原来的一半，那么结果必须是 2 的倍数，根据虚数单位定义，

$$i + \frac{1}{i} = 0$$

也就是说，

$$2 + \zeta(0) = 0$$

$$\zeta(0) = \frac{1}{2}$$

可以测试一下，考虑到，

$$S_0 = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

计算，

$$\begin{aligned}\zeta(0) + S_0 &= (1 + 1 + 1 + 1 + \cdots) + (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots)\\ &= (1 + 1) + (1 - 1) + (1 + 1) + (1 - 1) + \cdots = 2 + 0 + 2 + 0 + \cdots = 2\zeta(0)\end{aligned}$$

$$\zeta(0) + S_0 = 2\zeta(0)$$

$$\zeta(0) = S_0 = \frac{1}{2}$$

看来结果是正确的。也就是说，这个类圆柱的高度为$\frac{1}{2}$。而这个$\frac{1}{2}$全部来自于不确定性的贡献。那么再考虑，

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \ln(n) + C$$

若不考虑不确定性，这个侧面积应当等于它的高度也就是，

$$\ln(n) + C = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\ln(n) + \frac{1}{n} = 1 - C$$

$$\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)+\ln(n)=1-C$$

$$\ln\left(\mathrm{n}e^{\frac{1}{n}}\right)=1-C$$

$$\mathrm{n}e^{\frac{1}{n}}=e^{1-C}$$

$$e^{1-C-\frac{1}{n}}=n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(1-C-\frac{1}{n}\right)n}=n$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n(1-C)-1}=n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-nC-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-nC}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{e^{1-C}}{1+\frac{1}{n}}=n$$

$$e^{1-C}=n\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

$$n=e^{1-C}-1=0.526198, C\approx 0.57722$$

套用公式，

$$S=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{2\times 0.526198}=-0.950213$$

也就是说，用低维度量构造高维度量的方法是可行的。虽然维数之间具有数量上巨大的差异，但是低维的某种模式，在高维上总有某种有意义的映射。

再看一个，

$$\zeta(-2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots=0$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

这个数值被认为是类圆柱的高度（差）或者面积（差）或者体积（差），则可以列出两种情况，

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n^2-1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n^2-0$$

分别计算，

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n^2 - 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)(n-1)$$

$$n(2n+1) = 6(n-1)$$

$$n = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{4}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n^2 - 0$$

$$(n+1)(2n+1) = 6n$$

$$n = 1, n = \frac{1}{2}$$

确实有整数数值得以解出，但是看上去都“不太好看”，不太像是升维的结果，那么让我们看看 3 次方也就是体积的情况，

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n^3 - 0$$

$$n(n+1)(2n+1) = 6n^3$$

$$(n+1)(2n+1) = 6n^2$$

$$n = -\frac{1}{4}, n = 0, n = 1$$

如果考虑多值，则构造 1 维，2 维，3 维的三种情况，就存在如下的

$$n = -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5 \pm \sqrt{23}i}{4}$$

一共 6 个结果我们只选择四个结果，

$$n = -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1,$$

其中 0 是绝对值最小的结果。也就是说它升维之后获得的“体积”（升维后有意义的度量）最小可以为 0。另外如果根据$n = -\frac{1}{4}$，得到

$$\zeta(-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$$

也是可以接受的。这体现了此类函数的多值性。

综上所述，我们仅仅使用了升维的概念，来处理无限多项相加的问题，就得到了极为简单的算法和较为“靠谱”的结果。另外我们发现在这个前提下，结果也是多值的，具体是多少，则要根据选择的视角来决定。

如果我们进一步考虑黎曼ζ函数的非平凡零点问题，也就是黎曼猜想，

$$\zeta(\mathrm{s}) = 0, \mathrm{s} = \frac{1}{2} + ti$$

用什么样的复数s才能让自然数s次方倒数的全加和卷曲升维之后能得到更上一个维度上的 0 值，也就是实现完整周期，或者模运算没有余量。

首先让我们敲定，代表不确定性的$\frac{1}{2}$是怎么来的。

对于整数来说，它或者是奇数，或者是偶数，那么这个数的概率数值就是奇数加上偶数，各自一半概率加起来再模单位 1 的结果，也就是说，

$$n_0 = 2k + 0$$

$$n_1 = 2k + 1$$

$$n \ mod\ 1 = \frac{n_0 + n_1}{2}\ mod\ 1 = \frac{2k + 0 + 2k + 1}{2} mod\ 1 = \frac{4k + 1}{2} mod\ 1 = \left(2k + \frac{1}{2}\right)(mod\ 1)$$
$$= (2k\ mod\ 1) + \left(\frac{1}{2}\ mod\ 1\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, k \in N$$

所以对于整数来说，在概率基础上模上另一个整数周期，余量最可能的情况就是单位 1 的一半，也就是$\frac{1}{2}$。

由此不难理解，

$$\zeta(0)\ mod\ 1 = (1 + 1 + 1 + \cdots)_k mod\ 1 = k\ mod\ 1 + \frac{1}{2}\ mod\ 1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

由此可知，见到$\frac{1}{2}$就可以不管它是奇数还是偶数，于是直接说，它是一个自然数（非负整数）。

黎曼猜想中，

$$\mathrm{s} = \frac{1}{2} + ti$$

是作为指数存在的，其中$\frac{1}{2}$自然也可以被认为代表了自然数本身（在无穷前提下不知道奇偶而体现的模周期余量）而且它还是这个前提下的自然数单位，就相当于先前说的将单位 1 减半，以符合概率要求。此处不同于ti，那么它就对应于余量的实数部分，而ti对应于

余量的虚数部分。这个余量不是出现在结果中，而是出现在指数上。指数上的余量使得结果中的余量为 0。

所以实际上，我们并不是要证明什么平凡零点还是非平凡零点，我们实际上要证明的是项的数量，就是虚数单位（的倍数）。

也就是说，如果方程

$$\zeta(\mathrm{s})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=0$$

有解（显然有解），且$\mathrm{s}\in\mathrm{C}$，也就是解在复数域里面，那么，它就一定是

$$s=a+bi$$

而i本身就是一个整数，它只是比较大而已，那么这个表达式就可以写成

$$s=(c+di)+bi$$

也就是

$$a=c+di$$

通过重新安排实数部分和虚数部分的比例关系，我们还可以把它写成，

$$s=(c+di)+bi=c+(b+d)i$$

也就是说，实数部分完全剔除虚数单位的倍数，而这时候，它就是一个有限的整数。而任何有限整数都只能是偶数或者奇数，也就是说它在无限域之中的映射就是余量$\frac{1}{2}$,

$$s=c+(b+d)i=\frac{1}{2}+[\left(c-\frac{1}{2}\right)mod\ i+(b+d)i]$$

我们总可以保证，

$$c-\frac{1}{2}<i$$

那么，

$$0<\frac{c-\frac{1}{2}}{i}<1$$

所以余量

$$0<i-\left(c-\frac{1}{2}\right)=i-c+\frac{1}{2}<1$$

所以，

$$\left(c-\frac{1}{2}\right)mod\ i=ki,(0<k<1)$$

代回原式，

$$s=\frac{1}{2}+\left[\left(c-\frac{1}{2}\right)mod\ i+(b+d)i\right]=\frac{1}{2}+[ki+(b+d)i]=\frac{1}{2}+(k+b+d)i=\frac{1}{2}+ti$$

而这种

$$s=\frac{1}{2}+ti$$

的形式，实际上就是最开始的，

$$s=a+bi$$

在虚数单位本质为整数前提下的另一种写法，所以无论如何，所有的解当然都可以写在

$$s=\frac{1}{2}+ti=a+bi$$

里面。其中$\frac{1}{2}$就代表了实数部分奇偶两种情况（也就是前面说到，它代表的是整数），而其它余量被合并到虚数部分的比例常数t里面了。要意识到虚数单位本质上就是一个比较大的整数，它要大于项数也就是大于最大的n。所以它无法在模运算的结果之中表达出来。但是如果给出更大的区间，则可以获得有限的数值。既然如此，我们总可以通过有限次的分裂和重组将虚数单位表现为一个对于n取模得到的更小的余量，以及一个不一定为整数（大多数情况下为实数）的倍数和虚数单位的乘积。

所以，ζ函数的平凡零点，

$$s=-2k,k\in N^{+}$$

显然也在

$$s=\frac{1}{2}+ti=a+bi$$

之中，只是

$$a=-2k,b=0$$

至于如何将a,b换成$\frac{1}{2}+ti$的形式，决定于i和k的关系，这里就不具体推导了。

若还有其它解，当然也一定在，

$$s=\frac{1}{2}+ti$$

范围（也就是全体复数）里面，只是需要找到对应关系罢了。由此而言，黎曼猜想试图告诉我们的只有一个很简单的原理：虚数单位是实在的，它具体是多少并不重要，它只是总是大于你能想象的最大的数值而已。

至此可以推断，ζ函数的非平凡零点，当然会全部出现在

$$s = \frac{1}{2} + ti$$

这条线上。若确定了虚数单位的大小，则实际上平凡零点也一样在这条线上。不仅如此，所有此类方程的解都在这条线上，因为这条线就是在给定虚数单位大小前提下的全体复数的集合。

所以，这个问题应该反过来理解：那些在$-2k$上的平凡零点，才是方程的特殊解（非平凡零点），而所谓的非平凡零点（也就是在$\frac{1}{2} + ti$上的），才是普通而正常的解。

最后，让我们讨论一下数集的由来。

从正整数开始，首先，有 1，2，3……这些正整数，用来计量事物的个数或者事件的次数。然后，有了一定的数量之后，就可以创造负整数，比如-1，-2，-3……这些负整数可以对应于，比某个给定数量少多少，或者还差多少就到达给定数量。比如给定数量为 10，那么-3 就对应于 7；给定数量是变化的，那么负整数对应的真实数值就是变化的，所以若正整数可以是绝对量或者相对量，那么负整数只能是相对量。负整数的出现，也就是比给定数量少了多少，进一步定义了 0，也就是比给定数量不缺少任何数量，或者说，就是给定数量本身。比如说，比给定数量 10，不缺少任何数量，那就是 10 本身，或者说比 10 少 0，就是 10 本身。现在有了正整数，负整数以及 0，这就构造了整数集。我们可以继续考虑它们的关系，比如任何两个整数相比较大小而只基于彼此的大小作为单位，却不基于共同的单位，比如 3 和 7 比较得到 3/7，或者 9 和 4 比较得到 9/4，它们的比较就可以构成一种新的结果，这个结果就叫有理数。这些相互比较的数都彼此相差不是太远，所以比较的结果也就是差异，并不接近于 0。既然有这种情况，就一定有不同的情况，也就是说，如果两个整数或者有理数之间的差异巨大，以至于差异和其中较大的几乎相等，那么这种比较结果，和它的倒数互相观察，就成了几乎彼此不可见的状态，而这种状态就叫正交。能够实现正交的两个数，其中大者已经超出了观测范围之外，以至于小者与大者的比值，可认为是 0，其中大者的大小就定义了虚数单位。虚数单位是这种比较关系之中大者超越可观测极限之后的对应物，因为超越观测极限之后的大小都可以认为没有区别，所以使用虚数单位作为这些更大数量的统称，而这个数量的倒数，显然也超出了较小观测范围的极限，成为观察意义上的无穷小，或者差异意义上的 0。此时我们就定义了复数集，其中实数是观察范围之内的数量的度量，而虚数则是观察范围之外的度量。这种观测内外的差异构成正交关系，体现为投影为 0 的无关性；若将一个数量分成两个部分，这两个看似不相关的部分之间构成正交关系并被测量，并将这种测量回归到观测范围，这就得到了无理数，比如 2 的平方根。有理数和无理数构成实数集。要指出的是，虚数单位先于无理数出现。虽然无理数也并不虚，但是若无超越观测之外的虚数，无理数是无法获得的。

那么，还有没有更大范围的数呢？从观测角度来说，观测范围之内和观测范围之外，这就已经涵盖了所有关于观测的可能性，应该没有其它数了，毕竟数是用来描述观测的，或者说是用来度量世界的。