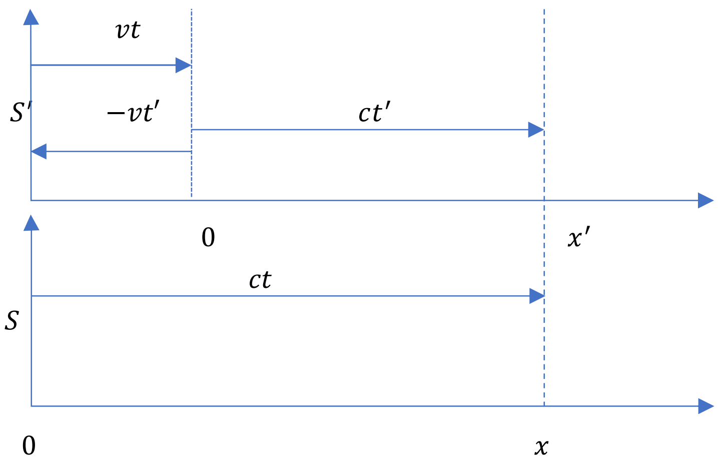
# 再论洛伦兹变换

坦白的说，洛伦兹变换是对于（狭义）相对论效应的误导性的解释，原因由下文详述。

下图给出了洛伦兹变换的形象描述，




考虑一列火车（称为惯性系$S'$），以相对于站在 0 点的观察者（称为惯性系$S$）相对速度为$v$，自左至右驶过 0 点，此时在火车上从左至右发射一个光子，经过一段时间之后，光子到达位置$x$，而这个位置，则是火车所在惯性系的对应位置$x'$。光子从 0 点出发，到达位置$x$，和到达位置$x'$是同一件事。而得到$x$和$x'$，两个（显然）不同的结果，（显然）是因为在两个不同的惯性系中分别观察而得到的。

依照上面的图像可以写出如下方程组，

$$x = x' + vt'$$
$$x' = x - vt$$

不难发现，若仅考虑宏观低速的情况，则可以按照伽利略变换中任意时空的时间流逝的速度都相等，则可以得到，

$$t' = t$$

代入方程

$$x = x' + vt$$
$$x' = x - vt$$

这两个方程其实是同一个方程的两种写法（移项并交换两端即可看出）。

从上述方程组导出洛伦兹变换，只需各自在方程右侧加上一个比例系数$k$，为区分伽利略变换，我们要求$k \neq 1$，

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = k(x - vt)$$

从经典洛伦兹变换的视角出发，加上这个比例系数是根据狭义相对论原理：一切物理定律在所有惯性系中都是等价的（具有相同的形式）。具体来说，就是相对运动的两个惯性系 A 和 B，如果 A 认为自己的一米长度是 B 的一米长度的 80%，则 B 也会认为自己的一米长度是 A 的一米长度的 80%。

一切物理定律在所有惯性系中都是等价的，这个基本假设并无问题，但后面的“举例来说”，却是一种错误的解释。确实有可能，在时间单位不变的前提下，A 认为自身单位长度是 B 单位长度的 80%，同时 B 也认为自身单位长度是 A 单位长度的 80%，但这只能是”认为“，而不是”事实“。那么事实是如何被误解的，又是因何被误解的，让我们继续讨论。
考虑方程，

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = k(x - vt)$$

分别提出$k$，

$$k = \frac{x}{x' + vt'}$$
$$k = \frac{x'}{x - vt}$$

可见在两个方程中，$k$都被定义为两种长度的比值，而且它既可以表达$S'$与$S$之间长度的比值，又可以表达$S$和$S'$之间长度的比值，或者说$k$具有，

$$k = \frac{p}{q}$$

的形式，同时也具有

$$k = \frac{q}{p}$$

的形式，而且两者同时存在并不冲突，也就是说，谁比谁的比值并不决定表达式的形式（当然数量的大小也不影响惯性系的等价性，因为根据狭义相对性原理，物理定律的形式并不决定于数量）。
所以在，

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = k(x - vt)$$

中假定右侧必须都是乘以$k$，才能满足“形式不变”的要求，是没有看到$k$作为两数比值的本质，而这个本质无论从表达式本身还是从物理现象中都可以体现出来。

所以事实上，若要方程组保持“物理定律在不同的惯性系中保持不变”，并不需要都乘以比例系数$k$。若我们让其中一个乘以$k$（是比值），另一个方程乘以$k$的倒数（也是比值）也一样符合这个要求，因为

$$k = \frac{p}{q}$$

以及

$$\frac{1}{k} = \frac{q}{p}$$

也就是

$$\frac{p}{q}$$

和

$$\frac{q}{p}$$

具有同样的形式。

现在让我们看看这种情况，

$$x = k(x' + vt')$$

$$x' = \frac{1}{k}(x - vt)$$

分别展开，

$$kx' + kvt' = x$$

$$kx' + vt = x$$

$$kt' = t$$

最终得到，

$$k = \frac{t}{t'}$$

这个结果指出，$k$只是两个惯性系时间的线性比值，若我们再引入不变的光速，则可以得到

$$k = \frac{ct}{ct'} = \frac{l}{l'}$$

也就是说，$k$是两个惯性系长度（或者长度单位）的线性比值。回到宏观低速情况，也就是

$$k = 1$$

这就是牛顿时空观，因为此时，

$$t = t'$$

$$l = l'$$

不难发现，这样写出方程组之后，两个惯性系之间就呈现出极为简单的线性关系，而不是像经典洛伦兹变换那样，要引入二次形式（平方和开方）。而且这种表达，和伽利略变换是可以直接兼容的。根据奥卡姆剃刀（简单有效）原则，这个形式显然要比经典洛伦兹变换的形式更为简单有效。

反过来说，要求右侧必须都乘以系数$k$以保证“物理定律的形式不变”这种做法，反而使得问题变得复杂而且拧巴，还进一步造成了“火车穿洞”等问题无解：火车和隧道相对运动，相对运动的尺会缩短，那么到底是火车的尺会缩短还是隧道洞口的尺会缩短，就决定了火车是否可以穿越隧道的结果。显然经典洛伦兹变换对这个问题的解答是无能为力的。而火车或者可以穿过或者不能穿过，它是一个经典力学问题，而不是一个量子力学问题，所以能否穿过是可以通过实验确定的（实验结果显然是能够穿过的，尺缩效应只在火车上发生，而不会在洞口上发生）。

根据上面分析可以看到，右侧的系数是$\frac{1}{k}$而不是$k$，整个问题的复杂度会下降一个维数，而且和伽利略变换具有很好的延续性。但是为什么不用倒数也能得到实验的支持呢？

这才是问题的核心：因为在某些条件下，

$$k = \frac{1}{k}$$

看到这样的写法，我们马上就会想到，

$$k = \pm 1$$

当然其中$k = -1$不可行，只有

$$k = 1$$

而这就退回到了伽利略变换。但是不要忘记，$k$本身是一个比值，我们总要考虑到

$$k=\frac{p}{q}$$

也就是说，我们要的不是$k$，而是$p$和$q$在什么情况下，它们的比值才能等于其倒数，

$$\frac{p}{q}=\frac{q}{p}$$

$$p^2=q^2$$

$$p=q$$

而这时候仍然得到

$$k=1$$

似乎又是一条死路。

然而事情到此并未完结，因为我们还有虚数单位没有尝试，比如令

$$p=i_p$$

$$q=i_q$$

也就是说，$p$和$q$分别取两个数值并不相等的虚数单位（参阅论文《虚数单位的意义》），那么可以看到，

$$k=\frac{p}{q}=\frac{i_p}{i_q}=\frac{-\frac{1}{i_p}}{-\frac{1}{i_q}}=\frac{\frac{1}{i_p}}{\frac{1}{i_q}}=\frac{i_q}{i_p}=\frac{q}{p}=\frac{1}{k}$$

上面的结果，我们可以这样理解：我们知道，虚数单位（及其倒数），或者代表很大的数，或者代表很小的数。当我们使用两个虚数单位做比值的时候，或者它们都很大，大到它们的大小差异可以忽略，或者它们都很小，小到它们的大小差异可以忽略，那么它们的比值，和它们比值的倒数就可以相等了（都等于 1）。也就是说，当我们谈论的不是伽利略变换($k=1$)，却仍然可以得到，

$$k=\frac{1}{k}$$

并获得实验的支持，则只有一种可能，就是构成$k$这个比例数值的相比的两个数量，或者都很大，或者都很小，而这样的数，我们通常用虚数单位来表示。其实不仅仅是虚数单位，我们知道，

$$i^2=-1$$

$$i^4=+1$$

所以也有可能，

$$k=\frac{p}{q}=\frac{i_p}{i_q}=\frac{-1_p}{-1_q}=\frac{1_p}{1_q}$$

这样看上去还是

$$k=1$$

只是我们需要知道这里的$1_p$和$1_q$，意味着虚数单位的四次方，它不是一个很小的数，而是一个非常大的数。那么构成$k$的到底应该是一个很大的数还是一个很小的数呢？

让我们回到，

$$k=\frac{x}{x'+vt'}=\frac{x_S}{x_{S'}}=\frac{p}{q}$$

我们知道这里的$x$和$x'$都不是很大的数，所以$p$和$q$更倾向于是很小的数（判断很大的数的比值和很小的数的比值是否相等是非常容易出错的，所以原则上来说不这样做），而且可以写成，

$$x_S q = x_{S'} p$$
这种形式就像是说，3 英寸等于 7.62 厘米，也就是数量和单位的乘积的对易方程（注意：这里的$x_S$和$x_{S'}$的单位都是米，而不是$q$和$p$。$q$和$p$表达的是米和某种更基本的单位之间的比例关系，这说明某种更基本的长度单位必须存在。）。
由此，我们可以将$q$理解为$S$系的长度单位，它应当是一个非常小的数，而把$p$理解为$S'$系的长度单位，它也是一个非常小的数。
$$k = \frac{p}{q} = \frac{U_{S'}}{U_S}$$
$$x_S U_S = x_{S'} U_{S'}$$

代入，
$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = \frac{1}{k}(x - vt)$$
得到，
$$x = \frac{U_{S'}}{U_S}(x' + vt')$$
$$x' = \frac{U_S}{U_{S'}}(x - vt)$$

$$U_S x = U_{S'}(x' + vt')$$
$$U_{S'} x' = U_S(x - vt)$$
$$U_S x - U_{S'} x' - U_{S'} vt' = 0$$
$$U_S x - U_{S'} x' - U_S vt = 0$$
$$U_{S'} vt' = U_S vt$$
$$\frac{t'}{t} = \frac{U_S}{U_{S'}}$$
$$tU_S = t'U_{S'}$$
类比于，
$$x_S U_S = x_{S'} U_{S'}$$
从时间和长度的倒数关系来看，这里的$t'$和$t$也不是单位，而是单位的数量，所以可以推断，时间和长度的单位在此前提下可以相等。

有了上面的讨论，此时我们已经可以做出判断，经典洛伦兹变换的形式，
$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = k(x - vt)$$
显然可以，但不是只能如此。另外它会造成速度的数值绝对不能超越已知光速数值的误解，而实际上，若只论长度和时间的比值，这个结果并不受到任何限制。

在引入虚数单位的深入理解之后，我们给出洛伦兹变换的精简形式，
$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = \frac{1}{k}(x - vt)$$
求解方程组可以得到，两个惯性系之所以出现相对运动，体现为特定相对速度，是因为两个

惯性系具有不同的时间以及不同的长度单位。两个单位的比值就是$k$或者它的倒数，这个数值之所以和其倒数相等，是因为两个单位都特别的小。虽然数值都很小，但它们只有线性关系，不涉及复杂的二次关系，由此也不存在平方开方以及所谓超光速产生虚数时间的问题。

还有一个问题：既然两个方程组都是对的，那么为什么还要提出精简形式呢？答案在于，经典形式来自于我们观察相对运动的两个物体而得到的经验做出的判断，但由于我们不能同时在两个相对运动的物体之上所以两个极小的单位到底谁更小，我们做不出有效的判断来（由此才出现了$k=\frac{1}{k}$，这样的误解）。但是，若我们自己要进入高速运动的状态，我们就必须做出有效的判断，否则我们甚至无法实现这种高速运动（因为不相信）。即便极其微小，终究我们必须认识到这种差异真实存在，这是我们可以实现远距离星际旅行的理论以及信念基础。所以精简形式终究要代替经典形式，我们才有可能突破“光速屏障”，用更少的时间，去更远的地方。

最后必须确定的是，长度单位变大，两点之间的距离就显得短；时间单位变大，走过单位时间以及所有时间就显得慢。而那个没有变过的，比如静止的观察者，是不会体现出所谓相对论效应（尺缩钟慢）的，而那个惯性系之间的数量上的“对称性”，并不是真实有效的（两数相比的形式对称性才是真实有效的）。这就是经典洛伦兹变换的谬误之处。

问题似乎至此已经得到解答，但新的问题也由此引发出来。

从动尺变短动钟变慢的角度理解，若有什么东西开始相对于原来的状态而被加速，那么我们就应该认为它所在的空间长度单位就会变大，由此其度量的空间长度数量就会变小。就像是，尺的刻度变宽，刻度的总数就会变小，而这个变宽的刻度间隔未被察觉，就只剩下了刻度总数变小的效果，而这就是尺缩效应。

可是新的问题在于，速度不仅有大小还有方向，难道只有特定方向上的速度是更大的？火车自左向右的加速使得尺缩效应出现，那么自右向左的是不是减速？尺缩这时候是否应当是尺胀？在这个问题上，显然经典洛伦兹变换的处理方式更为合理。

但是上述讨论，我们忽视了一个问题，就是，

$$k=\frac{1}{k}$$

成立的条件：这个条件要求构成比例常数

$$k=\frac{p}{q}$$

中的两个单位长度都很小，而且差不多大。差不多大的时候，就接近伽利略变换可以应用的条件，而洛伦兹变换的应用条件已经不是宏观低速，而是微观高速。也就是说，两个单位长度相差甚远。相差甚远的时候，$k$本身就变成了虚数单位（或者它的倒数）。而此时，

$$k+\frac{1}{k}=0$$

$$k=-\frac{1}{k}$$

如果只考虑绝对值，则又是

$$k = \frac{1}{k}$$

所以微观高速的情况下，经典洛伦兹变换显然又成立了。

回顾一下，

$$k = \frac{1}{k}$$

得以成立的条件，第一次是构成比例常数$k$的两个数都很小（理应如此），于是上式成立了；第二次是构成比例常数$k$的两个数相差甚远，由此使得$k$本身就很小或者很大，这又使得上式成立了。而这种使得上式成立的条件皆依赖于构成它的数值的大小，这本身就违背了物理定律的表现形式不随数量改变的原则。所以不管是宏观高速还是微观低速，都不应当使用这个方程。也就是说，不应当使用经典洛伦兹变换：它只是数量差异造成的幻觉。由此来说，

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = k(x - vt)$$

就不应该也不可能被转换为

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = \frac{1}{k}(x - vt)$$

的形式：而后者才是不依赖构成比例常数的数值的大小且更为简单有效的形式，也就是说，后者是正解，前者根本就不该出现。

总结来说，虽然不管是宏观低速还是微观高速，构成比例常数$k$的两个长度单位，总是能够保证，

$$k = \frac{1}{k}$$

由此让我们写出一个拧巴的方程组，

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = k(x - vt)$$

但无论如何，物理定律的形式都不应取决于数量的大小和比例关系，这就决定了这个方程组在特定情况之外的绝大多数情况下都是错的（不具备普适性）：如果单位长度的比值不大不小，上述方程组就会生效。

而无论数量如何变化都符合不变性原则要求的方程组，就只有，

$$x = k(x' + vt')$$
$$x' = \frac{1}{k}(x - vt)$$

也就是精简版的洛伦兹变换方程组才具有我们要求的普适性。

从上述分析也可以认识到，所谓宏观低速运动，指的相对运动的两个惯性系之间的长度单位都很小，但大小相近；而所谓微观高速运动，则指的是相对运动的两个惯性系之间的长度单位都很小，但大小相距甚远。而速度越高的，越接近光速的，单位长度和单位时间的大小就越大。