虚数单位的意义

作者：杨威

Email：yyl_20050115@hotmail.com

摘要：本文从自然数和周期性开始讨论，试图用更直观形象的方法阐释虚数单位的真实意义。

从 0 开始

让我们观察自然数。

当我们说自然数的时候，它有两种定义，一种定义包括 0，另一种定义不包括 0。后者通常应用于数论，前者则应用于其它情况。

在这里，我们选择数论上关于自然数的定义，这样做是因为，在“某种意义上”，0 不同于其它自然数。

到底怎样不同于其它自然数？

考虑除了 0 之外的其它自然数，以及基本的加法运算，

1，2，3，4，5，6，7，8……

所有这些自然数，任何两个相加起来，都会得到一个和原来两个数不同的新的自然数，例如 1+1=2，2 不同于任何一个 1；3+8=11，11 也不同于 3 和 8。

换句话说，如果某个自然数代表一个数量，加法代表一种数量变换的方法，另一个自然数代表变换需要改变的数量，那么，这些自然数，都符合同一个规律：原

来的数量被改变之后，会得到新的数量。

显然，在最基本的加法运算上，0 不是这些自然数的同类，不仅如此，在其它四则运算上，都不是这些自然数的同类。

也就是说，0 是特别的。

1+0=1，使得加法这种状态改变的方式在任何其它自然数上都失效的原因是，改变的数量为 0。从这个角度上理解，我们选择数论关于自然数的定义的方式，也就是说，0 不是自然数。

那它是什么数呢？

0 和周期性的关系

就连最基本的加法运算，都使得 0 和其它自然数互为异类，那么 0 又是怎么才获得存在的合理性的呢？这显然不是因为阿拉伯数字的占位要求，因为除了这种表示方式，数字还有太多可以表示的方式。事实上我们需要一个理由，“把 0 创造出来”，尽管这个工作有着再次发明轮子的嫌疑。

除了“没有“（客观上的不存在，也包括主观上的无效果）这个概念需要数来表达，这个时候我们有必要创造出 0 来；还有一个可能，就是”一个周期的开始“（其实这两者是一回事，后面的讨论中具体说明）。

一个 12 小时周期的机械钟表，是从 1 点开始的，到 12 点结束。而一个 24 小时

周期的电子表，从 0 点 0 分 0 秒开始，到 23 点 59 分 59 秒结束。两者都是我们习惯的计时方法。现在，我们把 12 小时的机械钟表和 24 小时的电子表的特点混合一下，创造一个特殊的机械钟表：原来写着 12 的地方，现在换成 0。此时，这个机械钟表就成了，从 0 点开始，到 11 点 59 分 59 秒结束的机械钟表。显然这个钟表的周期和原来是一样的。除了有 0，没有 12 之外，其它都没有区别。为什么把 12 换成 0？因为这样做，有着非常明显的优势。比如，如果我们把 12 小时周期改成 15 小时周期，按照这种方式，0 还是 0，不用变。

经过这种改造，我们不用问 0 点是几点，它就是 0 点，就像 1 点就是 1 点。不过我们确实可以问：在这个钟表上的“负一“点，是几点？

既然是 12 小时周期的机械钟表，开始时刻是 0 点，那么向前拨一个小时，就是“负一“点了，看时针，正好指在 11 的位置上（分针秒针归零）。

也就是说，11 点经过了 1 个小时之后，就是 0 点了（也就是原来的 12 点）。

我们把这个情况记录下来可以写成，

$$11 + 1 = 0$$

或者写成

$$-1 = 11$$

这显然不对，严格的写法应该是

$$-1 = 11\ (mod\ 12)$$

在上面的例子中，我们通过将周期 12 换成 0，就得到了负数和正数的对应关系。也就是说，通过定义 0，我们就同时定义了负整数。0 在周期性的基础上，把正

整数（或者自然数）一一做了镜像（注意镜像的方式），得到的结果，就是负整数，而正整数、负整数和 0，共同构成了整数集合。换句话说，没有 0 就没有负数，没有周期性，就没有借助 0 创造负数的基础。

周期性基础上的扩展

上述例子里面，钟表意味着周期性，0 意味着周期的起点，-1 意味着上一个周期最接近这个周期开始的那个位置或者数量。对于周期为 12 的情况，则有

$$11+1=0$$

假定我们不知道周期到底是多大，或我们不在意周期到底多大，那么我们可以把上式抽象为，

$$x+1=0$$

由此不难看出先前把 12 换成 0 的好处，若非如此，就不能做这种抽象了。

对上式，两边都减去 1 得到，

$$x=-1$$

换句话说，如果我们看到一个负整数，比如绝对值最小的那个负整数单位，就是 -1，那么我们就可以想到，其实是有一个周期存在的，这个周期最小的长度是 2，最大长度没有任何限制，而具体周期是多少，我们不知道。需要再次强调的是，虽然我们不知道，不意味着周期不存在。因为负整数是通过创造 0 的方式，从正整数映射过来的，而 0 是周期性的表现。

这种映射，并不是说，-1 对应于 1，-2 对应于 2 的这种符号翻转，这种符号翻转是人为的操作，而不是真正获得负整数的自然过程。真正获得负整数的自然过程则是在周期存在的前提下，-1 意味着“倒数第 1 个“，对于周期 12 而言，就是 0，1，2，3……11 序列中的最后一个，也就是 11。只有这样理解负整数，才能保

证 0 同时被正确定义，也就是说这种扩展方式才是自然的。

所以所有的负整数，都是在周期性以及模运算的基础上获得定义的。

从另一个角度也能解释这样定义的原由：你借给我 10 元钱，我还了你 9 元，还有 1 元没有还：以 10 元作为整体，我还欠你 1 元来把它补齐。换句话说，没有一个充分大的总量是没法谈论负整数的，否则就涉及到凭空创造的问题。所以总是把负整数当作一个"补数"，也就是再补上 1 元，才是完整的 10 元，这种理解才是正确的。

所以当我们看到-1 的时候，应当想起，在它后面，还有"一大堆东西"，它自己是不能孤立存在的。而这种认识负整数的方式，正好符合有限或者闭合空间的理解（比如黎曼几何）。而由于 0 的定义依赖于周期性，负整数定义依赖于 0 的定义，那么实际上除了有限和闭合之外，并没有其它有意义的理解了。换句话说，只要你用整负数，你所讨论的范围就是闭合的，（我们不能数那些没有的数，因为想象并非现实）或者说，若要非有限或不闭合，目前来说，数就必须是正整数。

有限整数域中最大的数

当我们写出

$$x + 1 = 0$$

显然 x 就是一个负整数了，它就是-1。至于它隐含的周期是多少，我们不知道。我们只能假定，无论如何周期是够用的，所以不会出现计算那些不存在的数的问题。

那么, x 到底是多少呢？只要给了周期, 我们就知道是多少。比如给了周期为 12, x 就可以是 11；给了周期是 100，x 就可以是 99。

对于这种映射关系，虽然单独给出 x，你不知道它的原像，但是给了周期，就知道了。但不是一一对应的关系。因为若给定周期是 100，x 也可以是 199。

这时候你会看到，不仅是

$$x + 1 = 0$$

还有

$$x' + 1 = 2 \times 0 = 0$$

这就是你熟悉的模运算，反过来用而已。

由此也可以看到，0 确实和其它自然数不一样，它不仅仅使得加法失效，也使得所有加法的衍生过程都失效了。可是它的失效，并不是真的让什么东西没有了，而是说，“每一个开始都是一样的，不可区分的”。如果开始不可区分，那么曾经经历的也就没有了意义，如果算上当前这个开始也不可区分，则所有的经历皆没有了意义，也就是说，这就符合了“存在过，却没有留下效果”的定义。0 的另一个定义则是什么也没有，而对于观察者而言，这两个定义在大多数情况下都是不可区分的。

现在让我们只考虑一个周期的问题，也就是 0 不乘以 2 或者更大的数的情况。这个时候我们说，

$$x + 1 = 0$$

隐含了一个周期，如果给出周期的数值（比如 12），x 就能得到实际的值，而不是一个相对于周期的抽象概念“负一”。所以同一个表达式中的 x，实际上是有至少两个值的。一个是在了解周期前提下获得的“真值”，另一个则是“先前某个周期

中相对于其下一个周期开始的相对值”。

对于这一点而言，写成

$$x + 1 = 0 \, mod \, n$$

就把问题说全了，此时 n 就是周期。

可是，这是一种基于“上帝视角”的表达方式。考虑一个计数器，它显然是有计数能力的，如果它的周期是 12，它以整数为步长，从 0 开始计数，那么单个周期中最后一个数显然就是 11，而不是 12。就像是二进制没有二（二进制的 10 不是一个数字而是两个数字的组合），十进制没有十（十进制的 10 也不是一个数字而是两个数字的组合）一样。对 n 取模的这种表达方式将会永远无法写出来，除非你站在这个计数器之外。

用一个更为生动的例子来说明：如果一个人一生，从出生就在数数，从 0 开始，每秒数 1 个数，始终不停止，那么到他死去的时候，他能数的最大的数，显然是有限的，比如这个数是 m，而他数过的数的个数必然是 m+1 个。而这个 m+1 这个数，他却在此生不会数出来，而这个 m+1，就是周期。这个数只能在另一个比他更长命的观察者的观察中得到。这就是为什么，

$$x + 1 = 0$$

和

$$x + 1 = 0 \, mod \, n$$

都对，而且 x 会得到两个值的原因。因为观察者是自己还是他人，是不会得到一样的结果的。

对于自己而言，一个周期中最大的那个数，就是“倒数第一个数“；而对于一个具有更大能力的观察者而言，这个数就是被观察者周期减去 1。由此而言，对于有限的观察者自己而言，所谓最大的数，就是-1（如果你熟悉二进制的补码表示，你就知道对于一个字节而言，-1 的补码形式就是 255，也就是非补码表示中最大的那个正数。在非补码表示中，一个字节可以表示的整数范围是 0~255）。

有限实数域中最大的数

周期性意味着有限性，所以当我们谈论最大的实数的时候，是在周期性前提下，说的只能是特定周期中的最大的实数。这时候我们只是把整数情况扩展一下而已。对于整数，第一步扩展，通常来说，不是直接到实数，而是到有理数。从有理数的定义可以知道，只要能写成两个整数相除的形式，就是有理数。而无理数，则总是写成有理数的连分数形式（不必证明，但不难理解）。从结构上来说，有理数就是最基本的无理数。那么有理数和无理数构成实数域，我们只需要考虑有理数前提下最大的数就行了，无理数比这个情况更复杂，但原则是一样的（考虑黄金分割率以及 2 的平方根的连分数形式）。

当我们说数数的时候，我们指的是，1，2，3，4，5……

而这也意味着，1 个 1，2 个 1，3 个 1，4 个 1，5 个 1……

也就说，我们计算的是 1 重复的次数。数数的结果，也就是 n 个 1 是多少。

当然它就是 n，只是这个时候，n 也可以不再被理解为次数，而是所有这些 1 加起来总的数量。

不仅仅如此，我们在能够度量 1 的重复次数的同时，实际上也有能力度量另一个数值，也就是什么东西重复了多少次才得到 1。一种情况是你选择单位 1，单位 1 重复了 x 次，能够得到整体，这个整体计数为 x；还有一种情况，用特定单位重复 x 次来获得 1，此时这个特定单位就是 x 的倒数。

不难发现，1 被重复 x 次则达到可允许重复次数对应的最大数量（更大的数量当然存在，但是不能在一次运算中完成）；而 1 若被 x 平分一次，则得到一次分割可以获得的最小数量（更小的数量当然存在，但不能在一次运算中完成）。

考虑到我们先前的表达式，在不知道周期大小的情况下，可以写出

$$x + 1 = 0$$

意思是，在最多重复 x 次之后，又发生了 1 次，则完成了当前周期，开启了下一个周期，所以 x 就是在整数前提下一个周期中的最大值。这个形式只描述了“次数”上的关系，而非数量上的关系。

而如果我们对数量上的效果进行评估，试图找到一个最“紧凑“形式：使得数量 1 被重复 x 次之后，再加上 1 次重复而完成一次周期的过程中，x 尽可能得到更大的最大值，那么我们就能写出

$$1 \times x + 1 \div x = x + \frac{1}{x} = 0 \ mod \ n$$

不难看出，在周期大小已知的情况下，尽可能多重复的次数（x并不必须是整数），这就意味着最后一次的数量（x的倒数的值）尽可能的少。此外，因为除法运算被引入，x的倒数就自动的升级为有理数。需要重申的是，这个表达式与上一个

表达式最大的区别在于 1 在这个表达式中不再是“次数”，而是“单位数量”，这个表达式关注的是数量在两种状态中的分配方式如何决定次数的大小，而上一个表达式则只关注“次数”本身，这才是本质，而非整数还是实数（有理数）的问题。

对于无法超越自身极限的被观察者本身，模运算并不体现，但周期性将会体现，则上式只留下了如下形式，

$$x+\frac{1}{x}=0$$

想要知道这个时候x到底是多少，我们就只需要简单的解方程算法即可。可以猜到的是，它肯定不是-1，但它由-1 导出，所以也是一个单位。

显然x不为 0，这是因为无论是否是整数，x为 0 的话，就没有办法再用 0 作为周期的表达方式了（指的是方程右侧）。于是我们可以对方程左右两边同时乘以x，得到

$$x^2+1=0$$

方程左右两边同时减去 1 得到

$$x^2=-1$$

两边同时开平方得到

$$x=\pm\sqrt{-1}$$

如果我们只取正根，则有

$$x=\sqrt{-1}=i$$

这就是虚数单位的由来。

正如你所看到的，它确实不是想象出来的东西，而是具有实际意义的。只是因为不知道或者根本无法知道周期究竟是多少（超出观察者观察的能力），而没有得

到确定的值而已。

这个虚数单位，就是某个未知的实数范围中，最大的那个实数。而它的倒数，则是这个范围中绝对值最接近 0 的那个“最小”的实数。
它可以大到什么程度？它可以大到，再增加绝对值最小的那个数量（增量几乎为 0），就完成了这个周期，开启了下一个周期。而它的倒数可以小到什么程度？它的倒数可以小到，如果再小一点，就可以被当作“不存在”来认识的程度（若不考虑积累效应的话）。

假定我们故意不给出这个实数范围的周期，我们习惯性的不会把它想得很小，而是想得很大。

那么，很大有多大？
不难发现，这个表达式并不限制周期的大小，也就是说，要多大都可以，在满足周期性的前提下，要多大都符合要求。

那么我们在此可以引入无限大的概念，因为这个大的程度是不受限制的（周期性前提不可忽略）。同时，它的倒数，其绝对值靠近 0 的程度也是不受限制的。也就是说，虚数单位若被理解为无限大，它的倒数则完全符合微积分中无穷小的定义。

然而，方程右端的 0 的定义对周期性的要求是，不管多大，必须有周期。而周期

性是有限性的体现，也就是说，即便只是就数学而言，无穷小可以到达也是不成立的。但正如先前说到正数并不受到 0 的周期性限制，正的（实数）无限大是可以成立的，负的无限大则依赖于相应的正的无限大和 0 而获得定义。

需要指出的是，确实可以用正数的无限大的倒数来定义无穷小，但这是人为的操作，而在周期性前提下则可以自然导出倒数的定义，所以按照以自然导出为正确的原则，不应当用人为的倒数操作来定义无穷小。当然不仅仅如此，即便正数可以无限大，但无限大本身的体现则无法由有限的观察者来观察，比如无限大的倒数无穷小，将会远远超过有限观察者观察能力的上限（无法观察到更小的存在），对于观察者而言，即便允许积累效应存在，这种无穷小积累的结果也是没有影响的 0，而非微积分意义上的微分单位。更何况，即便正数的无限大不受到周期性的限制而可以存在，但终究也会因为观察者的寿命有限，而终将无法体现出实际的效果来。所以这两个极限，对于观察者而言，都是没有效果的。

总的来说，无限不是不存在，而是其存在性，不是用数可以真正去度量和描述的。它不是太大就是太小，虽然复数表达方式并不限制取值范围，但是周期性仍然要求有限性，而无限则不符合周期性的要求，因为必须有周期性，本身就是一种限制。我们知道最大的数集就是复数集，从上述讨论中可以得出一个理解：没有周期性的（称为随机的），也就是没有办法被限制的（称为无限的），或者说不具有规律性的，并不是用数可以表达。

从实数到复数

有了虚数单位，就不难定义复数了。

形如

$$z = a + bi, a \in R, b \in R$$

特别的若 a 为 0，则 z 为纯虚数；若 b 为 0，则 z 为实数；若 a，b 都为 0，则 z 就是 0。

虚数单位的存在，体现着周期性。事实上，如果周期足够大，它的倒数足够小，那么它几乎就等于周期本身（还是会小一点）。

那么

$$z = a + bi$$

的含义，就相当于，在某个周期已知的前提下，b 周期数量之后又增加了 a 数量的结果。

比如我们认为此时周期是整数 4，此时虚数单位i就是 4（你可能会认为 i 的值是$x + \frac{1}{x} = 4$的根，也就是 3.73205……，但是别忘记模运算对整数的作用，也就是$4 + \frac{1}{4} = 0 \; mod \; 4$）；同时 a 是 1，b 是 2，那么实际上，

$$z = a + bi = 1 + 2 \times 4 = 9$$

这岂不是太好了，因为 z 最后只是一个数而已，而不用写成那么复杂的形式。

事实上，也没人愿意写成复杂的形式，除非有“不得已”的原因。

那么是什么原因，必须要写成复数形式呢？

考虑计算机中，存储数据的方式：如果按照整数，一个字节，8 位存储数值的范围为 0~255, 或者-128~127, 分别按照无符号有符号两种方式; 两个字节 16 位, 可以存储的数值范围为 0~65535，或者-32768~32767；若是 32 位则是 0~4294967296 或者-2147483648~ 2147483647。如果是浮点数,一律都有正负符号，按照广泛使用的 IEEE754 标准，32 位浮点数的范围为-3.40282347 乘以 10 的 38 次方到 3.40282347 乘以 10 的 38 次方；而 64 位浮点数的范围则是-1.7976931348623157 乘以 10 的 308 次方到 1.7976931348623157 乘以 10 的 308 次方。

无论多大，有限位的存储范围总是有限的。不仅范围有限，还有一个问题，就是精度也有限。

比如对于 64 位浮点数而言，10 的 308 次方加上 1（也就是 10 的 0 次方），等于多少?

（正好）等于 10 的 308 次方。这是因为，10 的 308 次方太大，1 相比较而言太小，加起来的结果，1 就相当于是 0 一样，只能被舍弃了。如果一定不舍弃，64 位浮点数的存储能力是不够的，就只能再增加更多的二进制位数。

这种情况就相当于

$$z = a + bi$$

中虚数单位等于 10 的 308 次方，b 等于 1，a 等于 1，为了 a 不会在计算过程中被彻底忽视，就只能把 a 和 b 分开写（而周期是否存储不做讨论，只需要知道周

期非常大或者非常小即可）。

从这个例子中可以看到，如果一个数必须写成复数形式，通常是因为周期或者太大，或者太小，也就是说虚部和实部完全不在同一个数量级上，而是在超大区别的两个不同数量级上。

我们经常用复数来表示向量，比如二维空间中，用 a 表示实轴上的坐标，b 表示虚轴上的坐标，我们就得到了复平面上的一个点或者从原点指向这个点的一个向量。我们在复平面中，认为i也是一个单位，它“应该”和 1 一样大，而事实上，它们相去甚远。从周期性来理解，整个横坐标轴必定有最大值和最小值，也就是说有周期性和有限性，而横坐标的正半轴的全部长度，对应的只是纵坐标正半轴的一个单位长度。这才是真实的情况。如果在我们在习惯的复平面中画一个圆心在原点以虚数单位i大小为半径的“单位圆”，那么它的真实情况，则是一个非常非常扁的椭圆，横轴方向“无限”拉长，椭圆和纵轴的两个交点只在原点上下各偏移一个单位的位置上。

如果我们以划分（下文具体讨论）来理解虚数单位以及复平面，那么虚数单位就只是对于 1 的划分次数，单位 1 仍然是 1，横轴和纵轴的单位 1 并无差别（但是虚数单位对应的数量要比实际的 1 略微小一点），那么单位圆仍然是圆的，只是纵轴上要刻画的刻度要达到虚数单位那么多个。这使得虚轴上的精度远高于实轴上的精度，因为虚轴上的单位 1 被分成虚数单位那么多个刻度，而实轴上的单位 1 就是一个刻度。

为什么可以建立复平面呢？

因为 a 的单位 1，和 b 的单位i之间，具有极大的差异，而具体差异的情况则是 1 投射到i上，得到的是i的倒数，若在非积累前提下比它稍微小一点，就相当于没有效果的 0，而对于极大的i而言多一点和少一点并没有严格的差异。而i到 1 的投射并不存在，因为i是 1 的整数倍，则不会有多余的数量落在 1 的内部，而全部都会落在 1 的边界上。由此可以看出实部和虚部所对应的坐标轴延展的方向始终都是“互不相关”的，也就是彼此投影为 0。互不相关，也就是正交关系，这正是复平面也可以被理解为平面直角坐标系的平面的原因。不过严格说来，i的倒数也可以选择多一点的情况，这时候低维数到高维数的投影就不再为 0（比 0 稍微大一点），正交性就不再严格，整个平面也不再是真正的直角坐标平面，x 和 y 之间存在内在的联系。至于复平面到底应当如何理解，决定于你需要的方式。

需要指出的是，复数可以对应于向量，那么反过来向量也可以对应于复数。复数可以对应于二维向量，而向量则可能具有更多的维数。我们确实可以用超复数，比如四元数等形式来表达对应的向量，但是，从彼此投影为 0 的角度来看，超复数不是必须的，也就是说超复数总是可以被转化为常用的二维的复数的形式。

此外，从互不相关引入的正交概念构造向量或者对应的复数的做法，有很大的任意性，比如牛奶的重量和价格可以构成一个向量，但并不意味着它们之间有什么数学意义上的内在的关系，所以即便是写成向量或者复数，也不应当被写成一个单一的数量形式，就像是 3 公斤牛奶加上 5 元钱没有办法化成最简形式 - 除非

给出每公斤牛奶的价格，或者每元钱对应的牛奶的质量；若必须化简，则这些换算关系就起到周期的作用了。

所以，应当说在周期性得已保证的基础上，周期和单位之间在数量级上的巨大差异，是创造复数形式的最自然的理由，但不是唯一的理由。

为什么是单位

为什么虚数单位i是一个单位？

我们不难知道，1 是单位，虚数单位是 1 这个单位重复的次数。那么为什么i自身也是一个单位？

这是因为当我们写出

$$x+\frac{1}{x}=0\ mod\ n$$

的时候，不管 n 多大，它本质上都是“把整体平均分成几份”的意思，也就是说，是对整体的均分次数。比如最开始我们提到的 12 小时机械钟表，和 24 小时电子表。他们都是对时间的均匀划分方式，区别在于 12 小时机械钟表需要两次用 12 均分才能把一整天的时间分开，而 24 小时电子表只需要用 24 均分一次即可。事实上，我们也可以设计 18 单位或者 27 或者 32 单位的钟表，只是这时候，我们要重新定义一个单位（对于 24 均分一整天的情况，这个单位称为小时）的大小了。

这也提醒我们，遇到复数或者任何出现虚数单位i的地方，都有一个待划分的整

体，这个整体是更上一个层面上的 1：相对于单位 1，叫做整体 1。由于虚数单位i和整体 1 的差异只有它自身的倒数那么大，而这个倒数通常都随着i的急剧增大而非常的小，所以i几乎就和整体 1 的大小相等（表达方式不同，但是所指是同一个事物），所以我们可以认为虚数单位i在不严格的前提下，可以被视为整体 1，这样一个单位。

上述原则，以数学形式表达如下。

让我们固定实数$n, n > 0$，并在实数（不是整数）范围讨论x，为了让x尽可能的大，可以写出：

$$ax + \frac{b}{x} = n$$

这时候，对于任何尽可能大的x显然可以找到一个$a, a > 0$，以及一个配合a存在的$b, b > 0$，满足上述方程。我们知道如果x非常大（可以比n还大，此时$0 < a < 1$），a的绝对值一定非常小，而且ax会占有n的绝大部分，使得b也很小，a和b不一定在同一个数量级，但是，都可以小到认为彼此相等，也就是说，

$$a \approx b$$

由此

$$ax + \frac{b}{x} \approx ax + \frac{a}{x} \approx n$$

按照周期性原则，可以写成

$$ax + \frac{a}{x} = 0$$

或者

$$ax + \frac{a}{x} = a\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

在a很小，但不为 0 的前提下，两边乘以$\frac{1}{a}$，也可以得到，

$$x+\frac{1}{x}=0$$

然而此处存在一个问题，既然在实数前提下，随着任意取得更大的x，以及相配合的a，ax本身就可以完全划分n，为什么还需要$\frac{b}{x}$?

这是因为，$\frac{b}{x}$或者其等价量$\frac{1}{x}$相对于x的单位，也就是 1 而言，若略微小一点，就相当于 0。

$$ax+\frac{b}{x}\approx ax+\frac{a}{x}\approx ax+0\approx n$$

这样做，在对n进行x划分的同时，还留下了额外的空间：这个额外的空间看似不影响x划分，但是若对其进行积累操作，则有可能造成非 0 的影响。换句话说，在原来处理问题的空间中增加了一个额外的维度。这种增加额外维度的方法，不一定是故意发明的。比如当我们处理的问题中，较大的数量和较小的数量相差极大的时候，较小的数量就可以或者经常被不精确的舍入，而这种认知上的能力局限性，本身就可以造成额外维度的出现。

划分

对于同一个整体n，按照上面给出的形式，我们其实可以给出多种划分方式：

$$a_0x_0+\frac{b_0}{x_0}=a_1x_1+\frac{b_1}{x_1}=a_2x_2+\frac{b_2}{x_2}=\cdots=n$$

而这些形式，在周期性前提下，最终都可以写成

$$x+\frac{1}{x}=0$$

也就是说，

$$x_0+\frac{1}{x_0}=x_1+\frac{1}{x_1}=x_2+\frac{1}{x_2}=\cdots=0$$

也就是说，对于整体 1 而言，存在不同的虚数单位i_n，这些i_n可以被理解为不同的划分次数，或者配合相应的倒数形式，而称为不同的划分方式。

$$x_n+\frac{1}{x_n}=0$$

不仅如此，在两项上进行乘方的方式，也是有意义的划分。这是因为x本来已经意味着倍数，在它上面乘以其它数量可以被x的其它取值替代。所以，有必要考虑比数乘更有意义的运算，比如乘方：

$$x^n+\frac{1}{x^n}=0$$

也就是说，大项是单位 1 的x^n倍，小项是单位 1 平分x^n次。

但是不难看出，如果我们使用换元法，

$$X=x^n$$

$$x^n+\frac{1}{x^n}=X+\frac{1}{X}=0$$

可见表达式（全部或者一部分）可以下降为更低维数的形式，我们把这种情况称为“折叠效应”。

如果我们换成，

$$x^a+\frac{1}{x^b}=0$$

若a和b存在公因子，则可以通过换元法去掉公因子，

$$a=ck$$

$$b=dk$$

$$x^a+\frac{1}{x^b}=x^{ck}+\frac{1}{x^{dk}}=(x^k)^c+\frac{1}{(x^k)^d}=X^c+\frac{1}{X^d}=0,X=x^k$$

由此可知，若要

$$x^a+\frac{1}{x^b}=0$$

不会出现折叠效应，a和b必须互质。

不仅如此，考虑到如果a为合数，比如

$$a = jk$$
$$x^a + \frac{1}{x^b} = x^{jk} + \frac{1}{x^b} = U^k + \frac{1}{x^b} = V^j + \frac{1}{x^b} = 0, U = x^j, V = x^k$$

此时仍然会发生部分折叠效应。所以无论a还是b，都必须是质数，才能完全避免折叠效应。也就是说，为了避免自身和互相的折叠效应，避免降维，我们必须用两个质数作为两项的指数。

折叠效应会发生，是因为我们在划分整体 1 的过程中倾向于先从小的划分数量进行划分，比如先用 4 把整体划分为 4 等分，如果 4 分不够用（比如不够精细）我们才会用 8。作为整数而言，显然得至少可以划分为 8 份，才能这样做，而至少能划分为 8 份显然也支持划分为 4 份。而为什么是指数而不是倍数？这也是因为对事物可划分的数量只能从最粗略的开始尝试，如果发现无法继续用指数（开方）来处理，才开始考虑倍数。而目前x本身就已经是倍数了，所以我们只需要考虑指数即可。

如果划分的总份数是$A = 3^6$，我们会先尝试用$3^3 = 27$作为单位然后确定份数。事实上我们开始的时候根本就不会知道可以划分的总份数是3^6，也不知道单位是 27；我们会把 27 当作一个单位，这个单位的平方是整体 1，因为整体 1 确实可以按照$3^6 = (3^3)^2$来划分（后验结果），所以我们最开始把整体 1 开平方就好，就像$A = U^2$。然后，如果需要，才把单位 1，也就是U，再开 3 次方$U = M^3$，才得到最小单位$M = 3$。对U开 3 次方，是因为对U开平方不会得到整数，而对U开 3 次方恰好得到整数。而且继续对结果M开方的话，也不再能得到整数了。实际上这时候我们才知道整体 1，可以划分为3^6份。换句话说，只要能折叠，就一定会折叠。除非整体 1 对应的是质数指数次划分，否则我们总是首先看到折叠后的结

果。如果整体 1 确实对应的是质数指数次划分，我们就不需要也不能展开折叠，而是一次性获得所有的划分次数。折叠效应相当于我们在认识整体 1 的可分能力过程中自动进行的质因数分解过程。我们总是先尝试小的质数，如果结果是整数，则可以进入下一个层次的划分。

折叠效应也体现出，在整体 1 可以被划分的总次数未知的前提下，（开方）运算的次数反而成为更重要的数量。这也体现了运算和数量之间存在对称性关系。

同理，x的任何次方对于x自身而言都是整数倍，即除以x余数为 0，

$$x^a \, mod \, x = \, x^i \, mod \, x = x^j \, mod \, x = x \, mod \, x = 0$$

所以，折叠使得

$$x^{jk} + \frac{1}{x^b} = U^k + \frac{1}{x^b} = V^j + \frac{1}{x^b} = 0, U = x^j, V = x^k$$

中U,V和x不可区分，

$$x^{jk} + \frac{1}{x^b} = x^j + \frac{1}{x^b} = x^k + \frac{1}{x^b} = 0$$

也就是说，如果指数是合数，则它和它的任何一个质因数作为x的指数体现出来的效果，不可区分。这也就是“折叠”这个名字的由来。

在指数为质数的前提下，考虑如下表达式，其中$p \in Primes, q \in Primes, p \neq 2, q \neq 2$

$$x^p + \frac{1}{x^q} = 0$$

而这时候，p和q都是奇数，而它们的和一定是偶数，即，若存在p和q，则一定存在偶数$2n$,使得

$$2n = p + q, n \in N, p > 2, q > 2$$

由此可以考虑如下问题:

如果存在偶数$2n, n > 2$，是否一定可以写出

$$2n = p + q, p \in Primes, q \in Primes$$

的形式？

根据“陈氏定理”，任何一个偶数总可以写成

$$2n = p + q, p \in Primes, q \in Primes, p > 2, q > 2$$

或者

$$2n = p + t, t = rs, p \in Primes, r \in Primes, s \in Primes, p > 2, r > 2, s > 2$$

两种形式之中的至少一种形式。

假设，某个偶数$2n$，就只能写成

$$2n = p + t, t = rs, p \in Primes, r \in Primes, s \in Primes, p > 2, r > 2, s > 2$$

的形式；意思是，有一个偶数就只能写成一个质数和两个质数乘积的和的形式，

且它不可能写成任何两个质数的和的形式。

相应的，我们可以写出它的划分形式：

$$x^p + \frac{1}{x^t} = x^p + \frac{1}{x^{rs}} = x^p + \frac{1}{x^s} = x^p + \frac{1}{x^r} = 0$$

不难看出，这个偶数对应的所有可能划分形式，都是折叠形式（没有平直形式）。

现在，让我们把分数写成负指数形式，

$$x + \frac{1}{x} = x^{+1} + x^{-1} = 0$$

然后考虑

$$2n = p + q, p \in Primes, q \in Primes, p > 2, q > 2$$

的情况，

$$x^p+\frac{1}{x^q}=x^p+x^{-q}=0$$

如果我们把x换成它的倒数$\frac{1}{x}$，这等价于p和q交换正负号，或者说交换正负指数项，则得到，

$$x^{-p}+x^q=x^q+\frac{1}{x^p}=0$$

可以看出，无论对于正负指数项，无论是否交换，项目对于 1 而言，都只有一步运算。

但是对于

$$x^p+\frac{1}{x^t}=x^p+\frac{1}{x^{rs}}=x^p+x^{-rs}=x^p+x^{-t}=0$$

如果根据对称性交换指数的正负号，则得到，

$$x^{-p}+x^t=x^{-p}+x^{rs}=x^{-p}+(x^r)^s=x^{-p}+(x^s)^r=0$$

这意味着对于 1，可以乘/除x^p，只需要一次运算；同样对于 1，乘/除x^t的时候，可以先乘以x^r然后再乘s次方，或者先乘以x^s再乘以r次方。s和r先相乘的情况不会出现，因为折叠会优先发生。所以有 2 种算法可选，而 2 种算法每一种都需要两次运算。

现在，让我们考虑方程左边正指数项，因为根据对称性，我们只需要考虑正负指数项之一：x^p作为正指数项，可以在一次运算中完成，但是方程本身的对称性使得x^t也可以在指数交换符号之后成为正指数项；但的x^t必须在两次运算中才能完成，这与正指数项在一次运算中完成相矛盾。反过来，x^{-t}若作为负指数项必须在两次运算中完成，对称性若将x^{-p}交换为负指数项，它也应当在两次运算中完成，但是它只需要在一次运算中完成。

可见试图保证$t=rs$的数量不变将破坏运算次数守恒的对称性。

如果保持运算次数的对称性（只能都是一次，无法都是两次），则要求x^t必须在一次运算中完成，这就会得到折叠的结果，

$$t' = r$$

或者

$$t' = s$$

而此时

$$2n' = p + t' = p + r$$

或者

$$2n' = p + t' = p + s$$

而这两个结果又都与

$$2n = p + t = p + rs$$

相矛盾。

可见试图保持运算次数的对称性则会破坏偶数$2n$不变的对称性。

由此可知，p为质数且t只能（注意，必须强调“只能“）是两个质数的乘积，使得运算次数守恒和偶数数量守恒相矛盾。

已知t或者是一个质数，或者是两个质数的乘积，而此时已经证明，t只能是两个质数的乘积不成立；那么另一个选项就必须成立。

也就是说，不存在一个偶数，它只能写成一个质数和两个质数乘积之和，不能写成两个质数的和；简化为，不存在一个偶数不能写成两个质数之和，即每个偶数都可以写成两个质数之和。

所以，对于任意一个偶数，总有质数q，使得

$$2n = p + q$$

成立。也就是说，一个大于 4 的偶数，总能写成两个质数的和的形式。

为什么要强调一次运算还是两次运算？

一次运算相当于“存在”，比如说，

$$x + \frac{1}{x} = 1 \times x + 1 \div x = 0$$

$1 \times x$和$1 \div x$都只是 1 次运算，但是它们也可以被理解为x和$\frac{1}{x}$两种现实中“不经改变就存在“的数量。但如果有一个量必须（注意“必须”两个字）经过两次运算才能得到，那么，它就不是一个可以被理解为“不经改变就存在”的数量，而只能是函数运算的结果。

在上面的讨论中，如果

$$2n = p + t$$

只能写成

$$2n = p + rs$$

的形式，就会导致

$$x^p + \frac{1}{x^t} = x^p + \frac{1}{x^{rs}} = 0$$

必须包含，除了“存在”之外的一次额外运算。

所以它在“存在”的前提下，两次运算就只能折叠到一次运算（的结果），也就是说，只能存在

$$x^p + \frac{1}{X^r} = x^p + \frac{1}{x^r} = 0, X = x^s$$

对应于

$$2n' = p + r$$

或者

$$x^p+\frac{1}{X^s}=x^p+\frac{1}{x^s}=0, X=x^r$$

对应于

$$2n'=p+s$$

而根本不可能存在

$$x^p+\frac{1}{x^t}=0$$

这就导致了“一个偶数$2n$不存在”的假象：无论你怎么看它，它都表现为$2n'=p+r<p+rs=2n$或者$2n'=p+s<p+rs=2n$的这种荒谬结论。因为自然数中不会缺少一个偶数，所以这是不可能的。所以假设的前提，$2n$只能写成$2n=p+rs$的形式不成立。所以任何一个偶数$2n$都不会只能写成$p+rs$，而一定可以写成$2n=p+q$。

根据上面给出的概念，我们还可以用另一个视角来理解这个问题。

在通过$2n=p+t$形式“寻找”下一个更大的偶数的时候，由于折叠效应必定会发生，所以真实的$2n$在$t=rs$的形式下将不会被发现，这使得某个偶数“丢失”（整体 1 内部不会含有，具有这个数量的最小单位的单位 1）了。不仅如此两两加起来等于这个偶数的质数也因此而丢失了，以及由这些质数在$2n=p+t$的形式下可以继续搜寻的其它偶数也丢失了。

举例来说，不难发现，第一个符合

$$2n=p+rs$$

形式的偶数是

$$12=3+3\times 3$$

根据折叠原理，实际看到的偶数为

$$6=3+3$$

所以 12 丢失了；由于 12 丢失了，12 所有的倍数（比如 24，36）和次方（比如

144）也丢失了。而如果对于 12 而言只有

$$2n = p + rs$$

形式按照，

$$2n = p + q$$

不可以成立，那么，

$$12 = 5 + 7$$

导致 5 和 7 也丢失了；5 和 7 所有的倍数和次方都丢失了。而根据

$$2n = p + q$$

不可以成立的要求， 5 和 7 的丢失，导致上一个偶数，

$$10 = 5 + 5$$

以及下一个偶数，

$$14 = 7 + 7$$

也丢失了，10 和 14 所有的倍数和次方也丢失了。

由于

$$16 = 11 + 5$$

5 已经丢失，所以 16 以及 16 的倍数和次方也丢失了，同时 11 以及 11 的倍数以及次方也丢失了。

从上述偶数丢失的过程描述可以看出，只要某个偶数只能写成

$$2n = p + rs$$

且发生折叠（在探索更大数量的存在性过程中必定发生），这个偶数前后的大量（可能是全部）的自然数都会丢失。但这显然和全体自然数都一个不少的可以存在于现实之中，且数量无限相矛盾。所以，某个（大）偶数只能写成

$$2n = p + rs$$

的形式不成立，它必须至少有一种划分，保证

$$2n = p + q$$

形式，其中p, q为两个大于 2 的质数。

需要特别指出的是，由于引入了新的概念，并且构造条件极为特殊，我并不认为上述讨论属于严格的证明。与其说是证明，不如说是关于我们如何认识世界的规律的总结，以及对这种规律的应用。而这种规律关系到人类认知世界的能力，由此而言，这个问题很可能是根本就无法证明的。也就是说，如果确实有一个偶数不能写成质数之和的形式，只能等到我们观察到它的效果（折叠效应导致的结构上的缺损），否则无法确定它是否存在（这里的存在指的是偶数数量造成的静态效果，而不是计数到偶数个数量的动态过程）；而自然中存在所有的偶数这种想法，很可能只是我们对于“计数能力可以无条件无限保持”的盲目信任而已。

定义式的图像

考虑

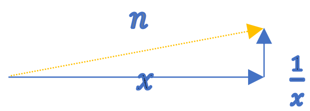
$$x + \frac{1}{x} = 0 \, mod \, n$$

如果把它画出来，是什么样的？

x意味着 1 的重复，现在我们在平面上画一个单位长度的线段，认为其长度为单位 1。然后，在水平方向上，我们把它重复x次，就得到一条长度为x的线段，线段的长度为整体 1 减去一个微小的余量，如下所述。

在线段的结尾，我们还要加上一个$\frac{1}{x}$那么长的线段，首先得把刚才单位 1 长度线段平均分成x份，然后取其中一份。而这个$\frac{1}{x}$的线段，在x线段延展的方向，也就

是水平方向上的投影应当为 0。显然，只要比$\frac{1}{x}$长度略微短一丁点，就符合要求了，因为相对来说，这个长度小于最短长度$\frac{1}{x}$。我们无法精确的知道这小一丁点到底有多小，所以直接用$\frac{1}{x}$这个长度，也就是说，这个小一丁点的长度的上限就是$\frac{1}{x}$那么长（开区间），然后把它画在接连x线段的结尾，并垂直x线段的方向上。不难看出从第一条线段开头到第二条线段结尾的黄色线段的长度，就是n。需要指出的是，n看似是直角三角形的斜边，应该有两个直角边的长度的和大于斜边的长度，但是这里的$\frac{1}{x}$我们是当作 0 来理解的，因为没法画出正好比$\frac{1}{x}$小一丁点的长度，所以直接用了$\frac{1}{x}$这个长度，而小一丁点的长度就是 0。所以在这个前提下n并不比x更长（若要求n和x都是整数，则更是如此）。



反之，纯粹从图像来看，由于竖直线段的长度不可能比$\frac{1}{x}$更小（否则就被当作 0 了），所以我们知道x和n之间的夹角，此时就是最小值（略微大于 0 度的最小值）。由此可以看出定义式本身就构造了一个具有最小角度的直角三角形的拓扑结构。其中x和n都不是真实的长度，而是对整体 1 均分的次数，而对单位 1 均分x次的结果$\frac{1}{x}$才是真实的长度，如果单位 1 是真实长度的话；显然，这个微小长度得重复

$$x^2+1$$

次才能得到整体 1 的长度，如果整体 1 才是真实长度的话。

需要指出的是，在x作为均分次数的前提下，说若单位 1 为真实长度R，则这个最小长度为

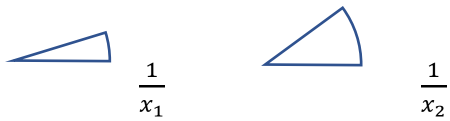
$$l=\frac{R}{x}$$

若总体 1 为真实长度L，则这个最小单位长度为

$$l = \frac{L}{1 + x^2}$$

对于任意给定的真实长度L，均分次数x越大，每个均分的长度l就越小，l的大小极为接近均分次数的平方的倒数。

现在，让我们假定整体 1 为确定的真实长度L，给以$x_1(n_1)$和$x_2(n_2)$两种均分方式，假定两者的差异非常大。但是，若画图的话，由于两种均分方式都是对同一个长度R的划分，水平直角边和斜边在两种情况下都一样长（此时都认为是单位 1）；唯一不同的，是两个倒数$\frac{1}{x_1}$和$\frac{1}{x_2}$的长度有差别。而为了保证两个n总是一样长，在两个倒数相对较大的时候，我们就不得不把倒数长度的这条线段“掰弯”，而原来两个直角三角形将会变成两个扇形；其实水平的x的长度仍然略小于倾斜的n的长度，只是我们“必须”认为二者长度相等。



从图中不难看出，两个扇形的半径相等，弧长有

$$\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$$

其原因则是，

$$x_1 > x_2$$

也就是第一个均分的次数比第二个均分的次数更多。由于一般情况下均分的次数都非常大，导致倒数长度都比较小，上面图中的情况只为了便于观察而给出。若倒数长度不会被“掰弯”,直角三角形三边关系通常都会成立。要知道这些倒数长度是如此之小，它们是直的还是弯的已经没有实质上的差别了。这是从差异的角度理解。从共同点的角度理解，不同的x_1, x_2本质上是对同一个单位 1 进行不同数

量的均分。按说这是观察者的行为，并不应当影响到所管之物的状态，就像不管把单位 1 平分多少次，得到多少个不同的最小单位，都不能改变 1 的本质一样。但是不同的均分次数，却使得最小单位在积累的过程中，按照相同速度积累却产生不同的增量（因为最小单位大小不同）。这意味着观察者和所观之物在观察过程中彼此纠缠，共同导致了最终的结果。当然，选择均分次数，也不完全是观察者的主观过程，观察者选择均分次数也受到所观之物以及环境的实际情况影响，所以这种彼此纠缠的情况并不是十分显而易见的。

需要特别指出的是，这两个扇形图中，在现实中，要么斜边半径存在，要么横边半径和倒数长度的弧存在，两者不可能同时存在，因为两者表达的是同一个概念，也就是真实长度L本身。不难看出，如果我们先要求横边半径和倒数长度的弧存在，然后把它换成斜边半径，此时横边半径和倒数长度的弧就会消失，然后，我们再以斜边半径为新的横边半径并配以倒数长度的弧，作为下一个阶段过程主体，然后再把它替换成新的斜边半径。就这样，我们实际上可以在每一个周期做一次替换，我们知道在

$$l=\frac{1}{x^2+1}L$$

也就是说，在

$$x^2+1$$

个周期之后，长度L就会被“实现“一次，也就是画出总长度和周期一样长的折线。事实上，x越大，越不像折线，越像圆弧。

但情况并非如此简单，因为每一个周期都会出现一个余量，

$$m = n - x = \frac{1}{x}$$

虽然在一个周期中可以忽略，但是在多个周期的积累之后还是会产生影响，也就是说，不可忽略的影响将会体现为，

$$m(x^2+1) = \frac{1}{x}(x^2+1) = x + \frac{1}{x}$$

也就是说，经过了一个完整的L周期，

$$L_1 - L_0 = \ x + \frac{1}{x}$$

我们知道x或者对应的n都只是对L的划分方式，所以，超出最原始的x或者n的横向半径都是不可能的，因为我们不能通过划分L来使得L变大，但却可以通过积累$\frac{1}{x}$使得L变大。这些要求使得我们只能做一件事，就是增加一个维数。

那么，相继两个平面之间的间隔是多少呢？

由于我们已经确立了重复L的行为，这使得我们更倾向于将$\frac{1}{x}$作为非 0 来理解。这时候$\frac{1}{x}$就同时具有两种含义。一种含义在于那些略小于$\frac{1}{x}$的值将被当作 0 存在于平面上；此外，正好等于$\frac{1}{x}$的则成为两个相继的L重复之间在第三维上的“阶梯”差异。也就是说，最开始由n和x以及$\frac{1}{x}$构成的三角形并不闭合，n的终点位并不位于原来的平面上：重复L周期的行为，导致$\frac{1}{x}$不再模糊。略微小于$\frac{1}{x}$的理解创建了垂直于横向半径的第二维；同时正好等于$\frac{1}{x}$的理解则创建了第三维。

不仅如此，如果我们考虑方程的另一种形式，

$$x = n - \frac{1}{x}$$

或者

$$n = x - \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x}$因为太小，增加或者减少这个数量只有在积累前提下才有意义。所以负的$\frac{1}{x}$对于

图像而言显然也是可以的。也就是说，在每一个L周期的过程中都进行负增量过程。只要总量充分大，负增量过程也可以一直进行下去，直到无可减小为止。

正负增量过程都可以在自然中发生。由于所有的其它参数都已经对应到几何表象，只剩下旋向，所以不难知道，（左右）旋向拓扑结构正是正负增量过程的体现。正负增量过程，在守恒律的前提下是可以互补的。比如，旋线 A 和 B，如果“被配置成同步状态”（纠缠态），此时若强制 A 进入增量操作状态，在守恒律的前提下，B 将必然进入负增量操作状态。

具体是什么条件才能支持正负增量过程呢？

观察

$$x + \frac{1}{x} = 0\ mod\ n$$

和

$$x + \frac{1}{x} = \ n$$

如果x和n都是整数，就不存在$n > x$的可能性，$\frac{1}{x}$虽然存在，但是也不会有积累效应;这个时候，先前提到的不等边的扇形，就变成真正的扇形。L的重现周期就可以在同一个平面中完成，而不需要做升维处理。反过来说，若x和n都不是整数，而（至少）是某些非整数形式的有理数，那么正负增量操作就可以自然发生了（考虑自然对数 e 的指数函数形式）。有理数x和n且不能是整数，则意味着$\frac{1}{x}$必须被计算，而且$\frac{1}{x}$的内部在接近 0 的那个部分，可能还有内在的结构。比如若以$\frac{1}{x}$的数量为整体 1，则它内部仍然可以按照

$$x' + \frac{1}{x'} = 0\ mod\ n'$$

的规律进行划分。这种写法特别申明，x'不一定等于x，划分的份数不必相同，但是方式可以被延续（也可以不延续）。而对于x和n且都是整数的情况，$\frac{1}{x}$的内部显然也可以按照同样的方式划分，但是，无论是否划分，或者怎么划分，都因为$\frac{1}{x}$没有累加效应而不会产生增量操作。这相当于，一旦到达整数层面，在此之下的层面将不会产生影响，整数将层面彼此隔绝。对于三维空间中的旋线来说，显然$\frac{1}{x}$还有内部结构，否则不可能构成旋线。但$\frac{1}{x}$的内部是否也是旋线则决定于x'是否是整数。

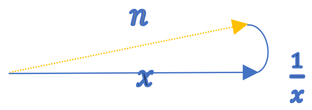
旋线过程是自动的，无论正负增量。虽然自动，但仍然可以用一个参数来描述自动的过程，整个参数就是“时间”，也就是L周期重复的次数。

比如重复一次对应于时间增加一个单位。或者重复

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

次，则对应于时间增加一个最小单位。由于L本身的数量会随着正负增量的操作不断变化，所以问题会变得更为复杂，比如如果L增长为原来的 2 倍，或者减少为原来的 1/2 都会出现明显的效应。而增长到 2 倍与减少到 1/2 的明显效应指出在增减两个方向上并不是线性变化而是指数变化（或者对应的对数变化），所以在线性前提下，增减操作并不具有对称性（宇称不守恒）。

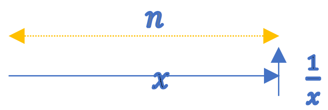
这一部分最后要讨论的是定义式构成图像的另一种情况：n不是斜边，而是和x长度。对于等边的扇形情况而言，$\frac{1}{x}$可以被认为是弯曲的弧，而这时候n和x都和$\frac{1}{x}$彼此垂直。



这个时候，如果求x和n所夹的锐角α的大小，则有

$$\alpha = \frac{\frac{1}{x}}{n} = \frac{\frac{1}{x}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

有了这个认识，我们还可以得到如下图像



这个图像需要一点想象力去理解。图中的n确实是$x + \frac{1}{x}$的长度。但是其中$\frac{1}{x}$是竖着画的。按照图中的形式，显然n要更长一些。但是由于$\frac{1}{x}$无论在x方向上还是在垂直x的方向上，其长度都几乎是 0，只是图中无法画一个几乎是 0 的长度，所以n的长度也不需要比x长太多，只要和x的长度大致相等并且略微多一丁点即可。

在这个基础上讨论，就可以认为$\frac{1}{x}$是以n为半径的一个圆周的最微小的弧长。这个弧长对应于一个中心角和两条半径。这两条半径的长度显然一样，都是n。在这个扇形中，由于弧长实在太小，两条半径几乎互相靠在了一起。但无论如何，中心角的大小等于弧长比半径的值

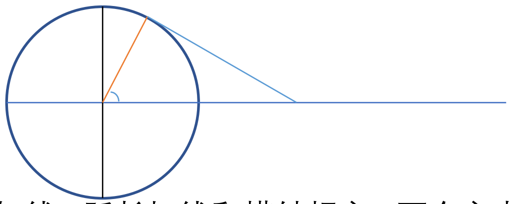
$$\alpha = \frac{1}{1 + x^2}$$

也就是中心角度的定义不因为处于极限情况而发生改变。

需要特别指出的是，这种写法，我们假定了某个单位 1 被重复且被均分，从数量上来看，这个单位 1，并不是半径。半径是被当作整体 1 来划分的。这个 1 是相关于x的，也就是说，在特定的x划分前提下，伴随x一起创生出来的单位。如果x发生变化，这个单位也随之变得不同。

这里体现的是x对半径在内部划分的能力。半径可以在内部划分为x等分，那么它应当也可以在外部被扩展到x倍。

为了获得x，或者找到长度为半径的x倍的线段，我们画出如下图像，



在半径和圆周的交点上做切线，延长切线和横轴相交。两个交点之间的线段的长度，和半径的比，就是中心角度β的正切值。

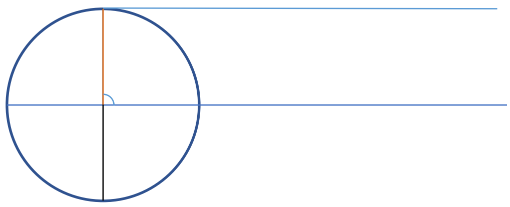
$$k = \tan(\beta)$$

切线总是垂直于半径，正如$\frac{1}{x}$和x互相垂直，若要把半径 1 扩展x倍，显然这条线段也要和半径互相垂直。垂直可以保证方向，那么这条切线段的长度是否是半径的x倍呢？

让我们逐渐增大中心角β的大小，β的改变影响切线段和半径的比值，也就是中心角的正切值。我们知道中心角逐渐趋近于

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

的过程中，切线段的长度将越来越大，



中心角β变成直角的时候，切线似乎永远无法和横轴相交。这时候正切值似乎是无限大的（要多大都可以）。

不过不管多大，它垂直于半径的条件必须被满足。也就是说，半径和圆周的交点的长度，是半径的$\frac{1}{x}$，就可以使得交点和半径相互垂直；那么反过来，只要这条

线段的长度达到x，它就可以和半径相互垂直。需要指出的是，若线段长度未能达到x^2，则这条线段并不能构成一个更大的圆周的半径，所以按照这个模式构造更大或者更小的圆需要保持的比例为x^2或者其倒数。

总结一下：切线段的长度随着角度的增大而增大，但并不需要无限长的射线，只需要切线段长度达到半径的x倍即可保证它和半径相互垂直。显然此时切线和横轴仍然有交点，只是交点离着圆心非常远而已。

由上述分析可以知道，哪怕中心角是直角，切线段仍然是有限长的。切线段的长度和半径长度的比值（中心角的正切值）始终为x，这与半径和微分弧长的比值相等。也就是说，

$$k = \tan(\beta) = x = \frac{1}{1/x}$$

特别的，当$\beta = \frac{\pi}{2}$时$x = i$，也就是说：

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$arc\tan(i) = \frac{\pi}{2}$$

既然如此，

$$\alpha = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + k^2}$$

也就是说，在中心角为β的时候，对应一个正切值k，这个正切值又决定了此刻半径和微分弧长的比，也就是微分角度α的大小。不考虑β，只关心正切值k对微分角度α的影响，可以写出

$$k = \tan(\beta)$$

$$\frac{d\beta}{dk} = [arc\tan(k)]' = \alpha = \frac{1}{1 + k^2}$$

也就是

$$[arc\tan(x)]' = \alpha = \frac{1}{1 + x^2}$$

这与使用微积分方法推导出的反正切函数的导数形式完全一致。

这说明在这种情况下，$\frac{1}{x}$或虚数单位的倒数，确实就是微积分中的无穷小。由此，我们可以在微积分运算中使用一个可人为指定的常数来代替“无限趋近”的过程量，而得到完全一样的结果（对于有限的观察者而言甚至不损失计算结果的精度），而这将使得微积分运算获得极大的简化。

虚数单位和圆周率

在上文分析中我们可以知道，圆心角所对应的正切值决定了在那个角度上，微分弧长和半径的比值，也就是角度的微分。

$$[arc\tan(x)]' = \alpha = \frac{1}{1+x^2}$$

这个表达式，可能会被问及这样的问题：在正切值为 1 的时候，也就是对边比斜边为 1:1 的情况下，难道微分弧长和半径的比是 1:2=0.5 吗？

0.5 对于整个圆周只有$2\pi \approx 6.28$而言，一点都不像是“微分”，因为它是一个几乎接近$\frac{\pi}{4}$也就是半个直角那么大的角度。

但事实确实如此。这个角度如此之大，是因为x或者说对半径的划分次数只有 1 次（意思是保留原样，而没有进行划分），而这个时候最小单位$\frac{1}{x}$，单位 1，都是 1，整体 1 则是

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

也就是说，算上半径和微分弧长，也只是对整体 1 划分了 2 次。这个时候得到 0.5 这样的较大而粗略的数值，是恰如其分的，因为只能如此。所以说，决定什么叫做“微分”的并不是相对的大小，而是划分的次数。换句话说，不是所观之物

的自身性质，而是观察者使用的手段对应的分辨率。

假定观察者能够细分半径的最大能力对应的数量为，

$$x = i$$

那么，从$x = 0$到$x = i - 1$我们就可以得到一共i种划分半径的方式。因为i的数量确实不受限制，所以我们可以称其为无限，但是它必须具有周期性的要求又使得它必须是有限的。由此无论称i是无限的还是有限的都对，只是观察视角可能造成表述的差异。

考虑一下，对于i种划分方式而言，如果我们把每一种方式产生的微分角度（或者微分弧长，如果令半径总是等于 1 的话）加起来，会得到什么呢？

不需要复杂的微积分，我们只是用求和的方法即可，

$$S = \sum_{x=0}^{i-1} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + 0^2} + \frac{1}{1 + 1^2} + \frac{1}{1 + 2^2} + \frac{1}{1 + 3^2} + \cdots + \frac{1}{1 + (i - 1)^2}$$

上式当作有限项之和或者无限项之和都可以，这取决于我们怎么理解i。

这其实是受到$\frac{\pi}{4}$的数值算法的启发而得到的。

我们知道，使用矩形法计算定积分，

$$\int_0^1 [arc\tan(x)]' dx = \frac{\pi}{4}$$

可写出如下公式，

$$S'' = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

同理，对于项数为i的无限项，可以写出，

$$S = \sum_{x=0}^{i-1} \frac{1}{1 + x^2}$$

对这个表达式进行数值计算，比如$i = 10000000$，也就是一千万项的时候，结果约为 1.56494041781479，这个数比$\frac{\pi}{2} \approx 1.5707963267949$小 0.0058559010402。

计算函数如下（C#）：

```
double CalculateHalfPi(long i)
{
        double s = 0.0;
        for(long x = 0; x < i; ++x)
        {
            s += 1.0 / (1.0 + (x + 0.5) * (x + 0.5));
        }
        return s;
}
```

需要指出，实际计算中x增加 0.5 然后再平方是为了使得数值更接近真实情况。0.5 是实验得到的最佳数值，取 0.5 可能与采样定理有关（保持信号不变形需要采样频率至少为信号频率的两倍）。

我们知道这个函数的数值形式，越到后面的项，数值越小，也就是对整体之和的影响越来越小，所以即便再在后面增加 10 倍的求和项，也不会使得这个误差改变太多。

但这个接近于 0.006 的差异已经可以提醒我们，它就是$\frac{\pi}{2}$本身的计算式。只是因为，除了有限项以及舍入造成的误差之外，数列的规律性指出，数列中并没有能够导致这个数量出现的项存在。

若去掉数值计算中收敛速度的影响，回归到无限项前提下，正常的表达式应当是这种形式（这个形式更慢）：

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{x=1}^{i} \frac{1}{1 + x^2}$$

它的意义是，单位圆的半径，对于i种划分而言，就有i个微分弧长与全划分的比值，这些比值实际上就是中心角。这些中心角，从最粗划分对应的微分角度的到

最细划分对应的微分角度，累计起来的结果，就是圆周率的一半，也就是$\frac{\pi}{2}$。

无限项的展开式形式为，

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+1^3}+\frac{1}{1+1^4}+\cdots$$

因为这些项相加的顺序并不重要，这些项不仅可以以角度理解，还可以以弧长或者面积理解。这时候，它表示的是单位圆面积的一半。

把这个表达式进一步还原为更原始的形式，并尝试手工计算：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{4+\frac{1}{4}}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{1}\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\left(4+\frac{1}{4}\right)+\cdots}{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)\cdots}$$

$$P=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{P-\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)\cdots+P-2\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)\cdots+P-3\cdots}{P}$$

$$=\frac{iP}{P}-\left[\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\cdots}{P}+\frac{2\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)\cdots}{P}+\cdots\right]$$

$$=i-\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2}{2+\frac{1}{2}}+\frac{3}{3+\frac{1}{3}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}+\cdots$$

$$i=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2}{2+\frac{1}{2}}+\frac{3}{3+\frac{1}{3}}+\cdots\right)+\left(\frac{\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}+\cdots\right)$$

由此可以看出，对于整体 1，使用

$$x+\frac{1}{x}=0$$

的方式跑遍每个整数，则每个整数都被分为x部分和$\frac{1}{x}$部分。$\frac{\pi}{2}$是所有那些$\frac{1}{x}$部分占整体 1 划分总数的比率之和。实际上我们也可以试着计算所有x部分所占的比率之和。

$$\bar{S}'=\sum_{x=0}^{i-1}\frac{(x+0.5)^2}{1+(x+0.5)^2}$$

一千万项的结果约为 9999998.43506271，非常接近一千万。

虽然i确实可以被简单理解为无限多个 1 的和，但它是有内在结构的，

$$i=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2}{2+\frac{1}{2}}+\frac{3}{3+\frac{1}{3}}+\cdots\right)+\left(\frac{\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}+\cdots\right)=B+S$$

$$B=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2}{2+\frac{1}{2}}+\frac{3}{3+\frac{1}{3}}+\cdots$$

$$S=\frac{\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}+\cdots=\frac{\pi}{2}$$

$\frac{\pi}{2}$是较小部分相对于各自整体的比率之和，这就是$\frac{\pi}{2}$和i的内在关系；较大部分的比率之和是随着i增大而发散的，或者说，它等于$i-\frac{\pi}{2}$。这个关于i的表达式也隐含了一个信息，也就是i在这个条件下，是一个整数：考虑把 B 和 S 的对应项加起来，每一个对应项的和都等于 1，而整体是所有这些 1 的和，所以是整数。

知道$\frac{\pi}{2}$和i的关系到底有什么用呢？

比如说，在宏观世界，我们总是可以测量圆周或者圆周运动中周长和直径的比值，其一半就是$\frac{\pi}{2}$。同时，我们总是可以通过数值计算来获得更高精度的圆周率，以及对应的$\frac{\pi}{2}$。如果在测量中，我们发现精度到达某个程度之后，无论如何也无法再增加，这时候我们就可以通过和数值计算的对比，来确定这个时候所用的迭代

次数，也就是i此时的实际数值。换句话说，我们就可以知道宏观到微观之间的比例关系。或者说，宏观世界的单位长度，到底是微观世界单位长度的多少倍。

无限多项的乘积或者求和

无限项的乘积或者求和，或者收敛，或者发散。

比如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots=2$$

这个求和结果是收敛的，最终收敛于 2。但是也有不收敛的情况，比如

$$\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+4+\cdots$$

我们知道，具有最大表现能力的数是复数。在复数前提下，已经不要求数量到底有多大（多大都可以），但是周期性必须被保证。只要我们能写出数，我们至多可以用的就是复数。而能写出的数至多就是复数。所以，周期性已经隐含在任何一个关于数的求和或者乘积的表达式里面了。也就是说，虽然有些数列求和的结果不会趋向特定的值，但是它在周期性前提下，也可能趋向特定的值。比如，不知道经过多少个周期之后，剩余的量（模运算的结果），是一个特定的值或者趋向特定的值。这也是可以理解的。因为终究，数列的和或者乘积必须在周期性的前提下表现出点什么，哪怕是 0，也就是完整的周期，或者比虚数单位更小，都是可以接受的。也就是说，用数写出的表达式，哪怕具有无限多项，哪怕不知道周期是多少，都仍然可以计算出一个结果，哪怕这个结果是 0。

复变函数研究以复数为自变量的函数，实际上就已经隐含了周期性要求。而对不

收敛的数列求和或者乘积进行解析延拓，正是对上述理念的应用。由此我们可以知道，比如

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

并不是说自然数全部加起来能够得到一个负数（而且还是分数），而是说，存在一个尚未标明的周期。在这个周期存在的前提下，使得，全体自然数之和再增加划分的倒数，就从新的周期开始。

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{1}{12} = 0$$

由于划分总是和观察者相关，所以这个划分也不是绝对的（所以此类问题完全可能是多解的）。但确实存在某些受到偏爱的划分方式，比如此处

$$x = 12 = 2 \times 2 \times 3$$

（看到 12, 不妨考虑一下, 为什么把半天的时间划分为 12 小时？一天 24 小时？）要知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1)$$

它其实是黎曼 Zeta 函数在

$$s = -1$$

上的结果，而 Zeta 函数的计算式依赖三角函数，或者说，严重依赖复数的定义，所以为什么 12 划分受到偏爱，应当从几何（人类认知空间的方式）的角度去理解。观察以下计算式，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

当

$$s = -1$$

可以求得，

$$\zeta(-1)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}(-1)\Gamma(2)\zeta(2)=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}$$

怎么理解这个结果，如果不用复杂的计算？

考虑我们推导

$$arc\tan(i)=\frac{\pi}{2}$$

的过程：虽然切线为x倍半径足以满足半径和微分弧长的关系，但是要满足构造具有维数差异的一大一小两个圆，则需要x^2倍的半径作为大圆的半径。同时构造两个维数的差异，应当避免折叠的发生，也就是说，小圆半径不可继续为微分弧长的x倍，假设为y。显然x和y必须互质。那么，在大圆的半径和小圆半径的比等于

$$\frac{R}{r}=x^2y$$

的前提下，两个圆就不会在同一个平面上了：根据维数之间互不影响的原则，从大圆半径为 1 的角度看，若有一个数量，比

$$\frac{1}{x^2y}$$

更小，它就可以视为完全无影响的 0。

虽然，x和y只需要保持互质即可，但是总有一个最小的选择，使得关系成立，而此时

$$x=2$$
$$y=3$$
$$\frac{R}{r}=x^2y=2^2\times 3=12$$

由此可知，若依赖三角函数进行计算，三角函数自身的关于无穷小的规律（维数原则）就会影响计算结果。$\zeta(s)$的计算式显然符合这个情况。对全加和取最小周期 12 来划分，是这个前提下唯一的选择。

正如$\frac{\pi}{2}$值得是所有划分比率的和的小部分。我们应当用类似的观点理解：自然数的全加序列，也可以无序，但每个数必须出现一次。这就像是对整体 1 进行划分，每种划分方式都必须出现一次，才能取得一个单位，这个单位的较小部分为$\frac{\pi}{2}$。我们可以认为$\zeta(s)$的所有全加和都是这种划分到单位的映射。

$$\zeta(-1)=\sum_{n=1}^{\infty} n=1+2+3+4+\cdots$$

可被认为是对整体 1 进行 1 次，2 次，3 次……划分之后得到的所有单位之和，这样一个新的单位。然而正如我们所知，它不像对虚数单位的划分的较小部分可以收敛为$\frac{\pi}{2}$，这个序列的全加和必定发散。但是发散的结果仍然对于周期而言存在余量（模周期不为 0）。现在，我们已经知道，周期的最佳值是 12，那就是说，这些划分的分母将会在 12 上进行通分。为什么会出现分数？这是因为，所有这些整数都是划分，就相当于x，而

$$x+\frac{1}{x}=0$$

要求必须有一个分数余量与其对偶：

$$\frac{1}{x}=-x$$

根据周期性，我们把后面几项写成和周期的相对形式，也就是对应的负数形式，

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)$$

根据每一项各自在其周期中的对偶性，上式又可以进一步写成，

$$\begin{aligned}\zeta(-1)&=1+2+3+4+\cdots+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)\\&=1+2+3+4+\cdots+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\end{aligned}$$

这就是通分的原因。分母最终是自然数的全乘积。

如果不通分，

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

显然如果每一个项都是周期；若周期都一样，那结果就是 0。但是这些周期彼此

不同，所以也存在通分前提下的解，来获得公用的周期。全加和最终表示为一个假分数。根据上面所说的周期 12，可以写成

$$\zeta(-1)=\frac{\cdots}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdots}=\frac{\cdots}{12\cdot2\cdot5\cdot6\cdots}=\frac{1}{12}\frac{\cdots}{\cdot2\cdot5\cdot6\cdots}$$

由此可知，$\zeta(-1)$作为$\frac{1}{12}$的倍数，当然是可以的，也是在特定前提下的结果。

$$\zeta(-1)=\frac{1}{12}\frac{\cdots}{\cdot2\cdot5\cdot6\cdots}=\frac{1}{24}\frac{\cdots}{5\cdot6\cdots}$$

事实上，若要提高精度，避免舍入问题，也可以考虑周期 24，也就是$\frac{1}{24}$的倍数，正如我们规定 24 小时为 1 天。

如果我们把自然数看成对时间段的长度划分，比如 1 对应把整体 1 划分 1 次，5 对应把整体 1 划分 5 次，那么全加和要求所有这些时间的最小单位能够通分。当然使用自然数全乘积可以符合这个要求。但这并不是必须的。因为考虑到我们用时间度量周期性过程，只要保持维数之间没有干扰就可以了，而保证没有干扰的最小划分是 12；而按照采样定理，可以完全精确描述时间的最小划分是 24。在这个基础上，我们可以精确的把任何划分方式前提下得到的时间段长度加起来获得一个时间总长，而丢失的精度在几何意义上不影响结果。

让我们继续考虑

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

的平凡零点

$$s=-2k,k\geq1$$

承认周期性就意味着，从后向前倒数的若干项可以用负数表示，

$$\begin{aligned}\zeta(-2k)=\frac{1}{1^{-2k}}+\frac{1}{2^{-2k}}+\frac{1}{3^{-2k}}+\cdots&=1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\cdots\\&=1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\cdots+(-3)^{2k}+(-2)^{2k}+(-1)^{2k}\\&=1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\cdots+3^{2k}(-1)^{2k}+2^{2k}(-1)^{2k}+1^{2k}(-1)^{2k}\\&=1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\cdots+3^{2k}\cdot1+2^{2k}\cdot1+1^{2k}\cdot1\\&=1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\cdots+3^{2k}+2^{2k}+1^{2k}=2\zeta(-2)\end{aligned}$$

由于正偶数次方的存在，负数的平方和对应正数的平方相等，无限项的和分裂为两个相等的无限项之和。这就迫使，

$$2\zeta(-2)-\zeta(-2)=0$$
$$\zeta(-2)=0$$

其实，从周期性和正负相抵的角度考虑，所有 s 为负偶数情况下的全加和都可以认为是自身等于自身的二倍，而被认为是 0。而所有的 s 为负奇数的情况，则可以认为是两端围绕 0 而正负相抵。所以结果也是 0，这些使得数列不收敛的数值，最终结果都是 0。这一点是从周期性得到的，而不是从微积分得到的。由于观点不同，结果不同并不奇怪。

关于黎曼 Zeta 函数的非平凡零点，

$$s=\frac{1}{2}+ti$$

我们也用同样的方法处理，把从后向前倒数的项写全，

$$\zeta(s)=\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}=\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}}+\cdots+\frac{1}{(-4)^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{(-3)^{\frac{1}{2}+ti}}$$

$$+\frac{1}{(-2)^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}+ti}}$$

$$=\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}}+\cdots+\frac{1}{(4i^2)^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{(3i^2)^{\frac{1}{2}+ti}}$$

$$+\frac{1}{(2i^2)^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{(1i^2)^{\frac{1}{2}+ti}}$$

$$=\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}}+\cdots+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}i^{2\left(\frac{1}{2}+ti\right)}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}i^{2\left(\frac{1}{2}+ti\right)}}$$

$$+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}i^{2\left(\frac{1}{2}+ti\right)}}+\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}i^{2\left(\frac{1}{2}+ti\right)}}$$

$$=\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}}+\cdots+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+ti}i^{2ti+1}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ti}i^{2ti+1}}$$

$$+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ti}i^{2ti+1}}+\frac{1}{1^{\frac{1}{2}+ti}i^{2ti+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}i^{2ti+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}\left(1+\frac{1}{i^{2ti}}\frac{1}{i}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i^{2ti}}\right)$$

不难从中看出，为什么 s 的实部是$\frac{1}{2}$如此重要：

$$(-1)^{\frac{1}{2}}=i$$

而周期性允许正负相抵，必然使得-1被乘到倒序的对应项上，而只要对其求平方根，就可以和正向的序列对应相加，也就是导出每个正负项对都等于 0 的情况，此时只需要

$$i^{2ti+1}=-1=i^{4m+2},m\geq 0$$
$$i^{2ti}=+1=i^{4m},m\geq 0$$

即可。显然，这是可能的。这里并未论证非平凡零点必须都在

$$s=\frac{1}{2}+ti$$

上，而是说，给出了t和i之间的关系。

$$2ti+1=4m+2$$
$$2ti=4m+1$$
$$t=\frac{4m+1}{2i}$$

或者

$$2ti=4m$$
$$t=\frac{4m}{2i}=\frac{2m}{i}$$

换句话说，就是i作为周期在实数范围中映射的结果，比如，对于不同的周期要求，i应当如何去配合。

对于最简单的情况，$m=0$，有

$$t=\frac{4m+1}{2i}=\frac{1}{2i}$$

或者另一种情况，

$$t=\frac{2m}{i}=\frac{0}{i}=0$$

此时，

$$s=\frac{1}{2}+ti=\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

或者

$$s=\frac{1}{2}+ti=\frac{1}{2}+0i=\frac{1}{2}$$

我们暂时只考虑$s=1$的情况，

$$\zeta(s)=\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=\zeta(1)$$

的展开式，不难看出，

$$t=\frac{1}{2i}$$

的时候，

$$\zeta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}i^{2ti+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}\left(1+\frac{1}{i^{2ti-1}}\frac{1}{i^2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i^{2ti}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{i}0=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

考虑欧拉给出的关系式,

$$(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^s}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5^s}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7^s}\right)}\cdots$$

以及,

$$t=\frac{1}{2i}$$

可以得出,

$$\zeta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)}\cdots=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{2-1}{2}\right)}\frac{1}{\left(\frac{3-1}{3}\right)}\frac{1}{\left(\frac{5-1}{5}\right)}\frac{1}{\left(\frac{7-1}{7}\right)}\cdots=\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}\left(1+\frac{1}{i^{2ti}}\frac{1}{i}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ti}}\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i^{2ti}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i}\right)$$

$$=\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{0}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=0$$

0 意味着结果是周期的倍数。如果不把i当作虚数单位而只是当作一个整数,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{i}\left(i+\frac{1}{i}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

这是一个递归定义, 它可以展开为,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{{i_1}^2+1}{{i_1}^2}\frac{{i_2}^2+1}{{i_2}^2}\frac{{i_3}^2+1}{{i_3}^2}\frac{{i_4}^2+1}{{i_4}^2}\frac{{i_5}^2+1}{{i_5}^2}\cdots\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\cdots$$

我们假定i_n的取值越来越大, 则最后一项,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{{i_n}^2+1}{{i_n}^2}=1$$

那么我们就可以考虑每个项和其对应项之间的对应关系，引入有理数k使得对于某个项和对应位置上的项具有如下关系：

$$\frac{i^2+1}{i^2}=k\frac{p}{p-1}$$
$$(i^2+1)(p-1)=ki^2p$$
$$i^2p-i^2+p-1=ki^2p$$
$$ki^2p-i^2p+i^2-p+1=0$$
$$i^2p(k-1)+i^2=p-1$$
$$i^2[p(k-1)+1]=p-1$$
$$i^2=\frac{p-1}{pk-p+1}$$

不应指望这里的p必须是质数（实际上它是一个分子和分母必须互质的有理数），因为对应关系也不是一一对应的，但是相似的形式可以帮助我们更容易找到质数的位置。在最简单的情况下，

$$k=1$$
$$i^2=\frac{p-1}{pk-p+1}=\frac{p-1}{p-p+1}=\frac{p-1}{1}=p-1$$
$$i=\sqrt{p-1}$$

也确实存在这样的p以及i，比如$p=17,i=4$。继续

$$i^2=\frac{p-1}{pk-p+1}$$
$$pki^2-pi^2+i^2-p+1=0$$
$$pki^2-pi^2-p+i^2+1=0$$
$$i^2+1=-(pki^2-pi^2-p)$$
$$-p[i^2(k-1)-1]=i^2+1$$
$$p=\frac{1+i^2}{1+i^2(1-k)}$$
$$\frac{1}{p}=\frac{1+i^2(1-k)}{1+i^2}=\frac{k+(1-k)+i^2(1-k)}{1+i^2}=\frac{k+(1-k)(1+i^2)}{1+i^2}$$
$$=1-k+\frac{k}{1+i^2}=1+k\left(\frac{1}{1+i^2}-1\right)=1+k\left(\frac{1-1-i^2}{1+i^2}\right)$$
$$=1-k\frac{i^2}{1+i^2}=1-k\frac{i}{i+\frac{1}{i}}$$

$$1-\frac{1}{p}=k\frac{i}{i+\frac{1}{i}}$$

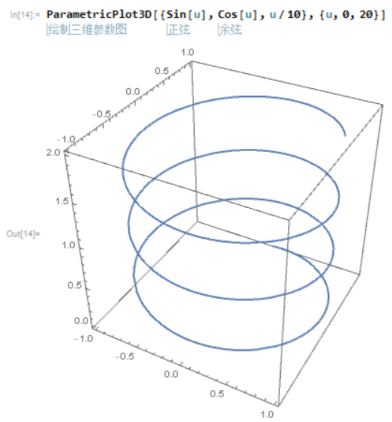
为了保证$p>0$，则k的取值范围是，$0\le k\le 1$

按照上述表达式写出算法，并用程序计算。在 10 以内计算出 91 个潜在的质数，其中 45 个是真正的质数，命中率约为 49%。而这些质数包含 40 以内的全部质数。算法演示函数以及辅助函数如下（C#）：

```
static bool IsPrime(long n){
    n = n >= 0L ? n : -n;
    if (n <= 1) return false;
    if (n == 2) return true;
    for (long i = 2; i < n; ++i) if ((n % i) == 0) return false;
    return true;
}
static long Gcd(long a, long b){
    while (true){
        if (b == 0) return a;
        long t = a % b; a = b; b = t;}
}
static void AlgorithmDemo(long n = 10){
    var ds = new HashSet<long>();
    long searched = 0;
    for (long i = 1; i <= n; ++i) {
        long i2 = i * i, i2_1 = i2 + 1;
        //k=r/s,p=t/b
        for (long s = i; s >= 1; --s) {
            for (long r = s - 1; r >= 1; --r) {
                long t = i2_1 * s, b = i2 * (s - r) + s;
                long g = Gcd(t, b);
                t /= g; b /= g;
                if (b > 1) {
                    searched++;
                    int rc = 0;
                    if (t == 2 || (t & 1L) == 1L){
                        ds.Add(t);
                        if (IsPrime(t)) rc++;}
                    if (b == 2 || (b & 1L) == 1L){
                        ds.Add(b);
                        if (IsPrime(b)) rc++;}
                    if (rc == 1) Console.Write("PART-FAKE:");
```

```
                    else if (rc == 0) Console.Write("BOTH-FAKE:");
                    else if (rc == 2) Console.Write("BOTH-REAL:");
                    Console.WriteLine(
                        "{7}:t={4},b={5}:n={0},n^2={1},r={2},s={3},g={6}",
                        i, i2, r, s, t, b, g, searched);
    } } } }
    long pc = 0;
    foreach (var v in ds) if (IsPrime(v)) pc++;
    Console.WriteLine("Searched:{3},Primes ratio:{0}/{1}={2}",
        pc, ds.Count, (double)pc / (double)ds.Count, searched);
}
```

以下图像为旋线的示意图:



圆周率和角度的弧度制

圆周率π是一个单位么？从我们对

$$arc\tan(i) = \frac{\pi}{2}$$

的理解来看，π即便是一个单位，也不如$\frac{\pi}{2}$更为基本，而从

$$arc\tan(1) = \frac{\pi}{4}$$

则有理由认为$\frac{\pi}{4}$才是最基本的。由角度和虚数单位的对应关系，我们甚至可以写出:

$$\mathrm{F}(i^2) = \mathrm{F}(-1) = \pi$$

虽然不叫做反正切，但是此时的映射关系，也确实可以创造出一个函数来。

这些选择之中，

$$arc\tan(1) = \frac{\pi}{4}$$

的性质最好：因为它比π和$\frac{\pi}{2}$都更为基本，而且其数值运算过程能够收敛（在有限次数值计算之后，能够和真实值相当吻合）。除了我们先前提到的表达式，它还有另一种表达式，在反正切的展开，

$$arc\tan(t) = \frac{t}{t^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{t}{t^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n$$

的前提下，有

$$\begin{aligned} arc\tan(1) = \frac{\pi}{4} &= \frac{t}{t^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{1^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\frac{1^2}{1^2+1}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

这个表达式可以展开为我们熟悉的形式，

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

或者写成

$$\frac{\pi}{2} = \left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

不难看出，这实际上是一种连分式的形式。不同于全加和形式的反正切的积分展开式，这是一个递进相乘的形式。这个形式之所以特殊，在于它也确实可以写成全加和形式，但是全加和形式并不比这个形式更好。比如我们知道，

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

可以展开为，

$$e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

这是全加和形式，而它还有另一个形式

$$e=\left(1+\frac{1}{1}\left(1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}(\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

这种形式同

$$\frac{\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

具有完全一致的结构。这种连分式结构，提示了在各个层次上的相似性，以及运算层次必须有限，否则无法开始：因为只能从最内一项开始向外计算，从最后一项开始向前计算。

现在让我们讨论

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

除去最开始的$\frac{1}{2}$，其它每相邻两个层次，都具有规律性，

$$P_n=1+\frac{n}{2n+1}P_{n+1}$$

我们考虑无限项的情况，若要数列收敛，则末尾最后两项将会接近相等，而此时

$$P=1+\frac{n}{2n+1}P$$
$$2nP+P=2n+1+nP$$
$$nP+P=2n+1$$
$$(n+1)P=2n+1$$
$$P=\frac{2n+1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}$$

当$n\to\infty$时有，

$$P=2-0=2$$

也就是说无穷嵌套数列的最内层的项为 2（确切值略小于 2）。观察，

$$P_n=1+\frac{n}{2n+1}P_{n+1}$$

如果分母不是$2n+1$而是$2n$则上式写成

$$P_n = 1 + \frac{n}{2n} P_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} P_{n+1}$$

配合最内层的大小为 2，则可以得到，

$$2 = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(\cdots 2 \cdots)\right)\right)$$

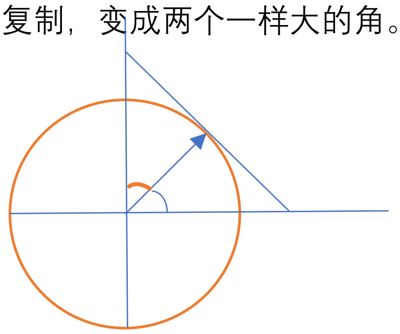
也就是说，2 的一半加上 1，再取一半再加 1，反复如此，最终得 2。如果还原最开始去掉的$\frac{1}{2}$，则有

$$1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(\cdots 2 \cdots)\right)\right)\right)$$

也就是说，它确实就是一个单位，而且就是 1。

我们知道$\frac{\pi}{4}$的正切值，确实就是 1。但是这是如何算出来的？如果不用微积分的方式，怎么理解？

考虑$\frac{\pi}{4}$的正切值，其对边长度等于邻边长度，在图中，表现为切点到和横轴交点的切线段和半径构成的等腰直角三角形，此时圆心角就是$\frac{\pi}{4}$。现在，让我们把这个角以半径为对称轴做一个镜像复制，变成两个一样大的角。



假定，对这两个一样大的角，我们用两种不同的方式去理解和生成。然后把结果平均一下，就得到两种理解的平均结果。比如两种方式之中的一种方式叫做保持原样，而另一种方式，则考虑对直角边（也就是半径）细分的程度。具体来说，比如此时对直角边的细分程度为直角边长度的$\frac{1}{n}$，那么，这个经过复制之后的角和原来的角加起来，也就是这个直角，将是两个直角边和一个微分长度构成的。这个微分长度指的是半径和圆周的交点或者微小的弧，它既是平行半径的，也是

垂直半径的而且它的长度不超过细分的能力，也就是$\frac{1}{n}$。此时，两条直角边和微分弧长之和为（假定半径长度为 1），

$$2+\frac{1}{n}=\frac{2n+1}{n}$$

那么其中一条直角边占总长度的比例就是

$$\frac{n}{2n+1}$$

而从开始到最后，我们都假定直角边的长度为 1，两个直角边的长度为 2。由于微分弧长不能算作任何一个直角边的一部分，所以对于任何一个 n 划分而言，它的长度都只能视为 0，由此，从 n 最大的划分开始，我们得出（平均）一条直角边的长度为

$$\frac{n}{2n+1}(2)$$

而两条直角边的和为（另一条直角边长度为 1，不计算，直接加上）

$$1+\frac{n}{2n+1}(2)$$

由此可见，观察者的观察能力决定了对长度（直角边）的划分次数，而这个次数虽然不影响直角边的长度也不影响半径的长度，但是它影响微分弧长的长度，这种介于有影响和无影响之间的状态，使得划分次数必须被引入到表达式中，而且我们应当从最大的划分次数，也就是最大的精度开始。

有了最大精度前提下的两个直角边的和，对其取一半，当然可以，但是考虑到精度的递减，我们不能简单的取一半，而是要把划分次数的影响继续考虑进来，这时候，我们可以写出

$$1+\frac{(n-1)}{2(n-1)+1}\left(1+\frac{n}{2n+1}(2)\right)$$

也就是把两个单位长度合成一个长度的基础上，再进行划分，而此次划分的精度略微减小。去掉在这个精度上的微分弧长以及一条直角边共同所占的比例，就剩

下另一条直角边的比例；然后用前一步求得的总长，乘以这个比例，就得到这一条直角边的(平均)长度。再加上在这个划分精度前提下的另一条直角边的长度，作为下一个精度更低的划分前提下，要处理的总长度。这样一直下去，直到只划分一次为止。而此时仍然要加上另一条直角边的长度（单位 1)，再把结果平分，得到的就是$\frac{\pi}{4}$；如果不平分，得到的就是$\frac{\pi}{2}$。

显然这样一个精度递减的过程是有意义的。不难看出，这个过程保证了无限前提下的所有精度的划分，都能综合在一起：不管度量精度多大，这种划分形式都能保证这个精度可以被接受。每个层次中增加的单位 1，实际上也可以理解为在更粗略的精度上得到了最大程度的划分，每一个括号里面的两个项目也等价于对精度略微低一些和精度略微高一些的两种划分方式做平均处理。而这个平均的方式是受到当前精度影响的（直到精度为 1，则可以平分了)。

从 1 到无限，任何与$\frac{\pi}{4}$构成的关系，都是平滑关系，因为$\frac{\pi}{4}$的结构保证了所有可能的划分都被支持。1 比 0 划分被映射到 0（角度），1 比 1 划分被映射到$\frac{\pi}{4}$，1 比i划分被映射到$\frac{\pi}{2}$。

有了对$\frac{\pi}{2}$和$\frac{\pi}{4}$等特殊角度的理解之后，我们可以尝试考虑一个任意的弧度制角度的大小，是什么意思。

考虑，

$$\theta = k\frac{\pi}{2} = k\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots 2\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(k+\frac{k}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots 2\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(k+\frac{1}{3}\left(k+\frac{2k}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots 2\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(k+\frac{1}{3}\left(k+\frac{2}{5}\left(k+\frac{3k}{7}\left(1+\frac{4}{9}(\cdots 2\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(k+\frac{1}{3}\left(k+\frac{2}{5}\left(k+\frac{3}{7}\left(k+\frac{4}{9}(\cdots 2k\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

可见，乘数k会被分配到每一个可能出现 1+的地方。也就是原来的“另一条直角边”的长度的相对值。我们假设$0 \leq k \leq 1$，那么这就意味着另一条直角边可能会“缩短”。比如从圆上的切点到横轴的这条切线段的长度，如果在每一个划分的前提下都缩小到原来的一半（总长度不是缩小一半），则对应的角则变成$\frac{\pi}{4}$；若切线段长度在每一个划分的前提下都增长为原来的2倍(总长度增远远大于2倍)，对应角度就是π。

可以看出，这里的线段长度的倍数关系，不是一个简单的线性关系，而是与划分层次同在的倍数关系，是所有划分层次都遵从的倍数关系。在划分层次趋于无限的前提下，倍数或者约数的关系也同样是平滑的（含有自然数倒数的全乘积所以可以总可以划分任何自然数)。

自然对数底的指数曲线

为什么总是说，“如果不用微积分”？

因为微积分要求无限大以及无穷小。而实际上，在周期性前提下，充分大或者充分小，就可以实现无限大以及无穷小才能实现的效果。这就意味着，在这个前提下无限并不是必不可少的。在探索了直角的正切值等运算对应的结构的实际含义之后，本质更清楚的展现出来：无限性假定非但不是必不可少的，在某些情况下，还是应当避免的。因为当数量大于某个程度或者小于某个程度之后，就已经不再仅仅是数量的问题，还会引入结构上的改变。换句话说，如果一个数量等级足够高（数量足够大），它完全就可以被认为是更高维数的东西；反之如果足够低（数量足够小），也可以被认为是一个更低维数的东西。

在通常的认识中，维数之间的差异是不可超越的，然而我们已经看到，所谓的不可超越，也只是太大或者太小而造成的表现而已。由此不难理解，一个无限维数的世界，和一个没有维数概念的世界，是同一个世界。而到底有多少个维数，只受到观察者观察能力的限制：比如人类可以同时观察空间中的 0，1，2，3 这 4 个维数，那就意味着，无论自然存在多于这个数量的维数的世界，还是少于这个数量的维数的世界，对于人类观察者都一样，终究都是 4 维世界（这里不考虑时间的问题）或者通常所说的 3 维世界（忽略 0 维的存在）；也不管人类观察者存在于第几个维数上，人类观察者能够观察和理解的，也总是那个维数上下不超过 4 个维数的范围。除非，人类自身发展出更多维数的观察能力。这就是为什么世界是 3 维的（忽略 0 维）原因。

对于这个样一个 3 维（若不含 0 维）世界，我们早已准备好去认识它。而且也有一个最基本的结构来描述它，就是旋线。

我们都知道，点最基本，然后点运动成线，线运动成面，面运动成体。这似乎是说，点是最基本的。然而，如果点的内部有结构，也就是说，存在-1 维，-2 维，-3 维或者更多的负数维，那么，点只是更低维数的结构的宏观体现，那么它就不是最基本的了。所以从“最基本的”这个角度去考虑，点线面体，都一样基本，都一样不基本。从它们一样不基本的角度去考虑，一个真正基本的存在，是这些所有表象的共同体现，换句话说，四个相邻的维数，一定可以构成的那个结构，才是最基本的东西。而旋线，在符合这个要求的基础上，比球更为基本。

给出旋线的表达式，

$$e^{\theta i}=cos\theta+isin\theta$$

考虑它的来源，

$$e^{x}=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}\cdots$$

带入

$$x=\theta i$$

$$e^{\theta i}=\frac{(\theta i)^0}{0!}+\frac{(\theta i)^1}{1!}+\frac{(\theta i)^2}{2!}+\frac{(\theta i)^3}{3!}+\frac{(\theta i)^4}{4!}+\frac{(\theta i)^5}{5!}+\frac{(\theta i)^6}{6!}+\frac{(\theta i)^7}{7!}\cdots$$

由此可以把整个序列分成奇数次幂全加和和偶数次幂全加和两个部分，

$$i\cdot sin(\theta)=\frac{(\theta i)^1}{1!}+\frac{(\theta i)^3}{3!}+\frac{(\theta i)^5}{5!}+\frac{(\theta i)^7}{7!}+\cdots=i^1\left(\frac{\theta^1}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$cos(\theta)=\frac{(\theta i)^0}{0!}+\frac{(\theta i)^2}{2!}+\frac{(\theta i)^4}{4!}+\frac{(\theta i)^6}{6!}+\cdots=i^0\left(\frac{\theta^0}{0!}-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)$$

上述两个展开式本身非常重要：如果认为i是一种划分，是一个很大的数，那么，就不应该考虑

$$i^{4n+2} = -1, n \geq 0$$

也就是说，数列就像自变量为实数的e指数函数那样发散，而不会出现正负交错，数量相抵的问题。而导致最终可以替换为正弦和余弦两个三角函数的组合，则是因为虚数单位i和负数单位-1 的特殊关系。

关于微积分的替代算法，还有什么有意义的例子吗？让我们考虑自然对数底e的定义：

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

这里出现了极限运算，其中取极限的是自然数n，极限运算说的是，当它趋向于无穷大的时候，

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

的结果收敛到自然对数底e。根据我们对于虚数单位i的了解，我们知道，i就是那个当前周期中，尽可能大的数（划分），可以说要多大有多大，而这就符合了趋向于无限的条件。也就是说，若要表达

$$n \to \infty$$

只需要

$$n = i$$

即可，当然

$$n = ki, k \geq 1$$
$$n = i^k, k \geq 1$$

当然也是可以的，目前n只需要取最小值，其它情况可以用换元法来处理。

也就是说，

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$$

这就是用极限数值代替极限运算的方法。

这种方法很有用，不仅仅是少写字而已。

我们继续讨论，就可以发现它的其它好处。

我们知道欧拉方程，

$$e^{\pi i}+1=0$$

它实际上是旋线表达式在自变量为圆周率π的时候的特例，

$$e^{\theta i}=cos(\theta)+i\cdot sin(\theta)$$
$$\theta=\pi$$
$$e^{\pi i}=\ cos(\pi)+i\cdot sin(\pi)=-1+i\cdot 0=-1$$

也就是

$$e^{\pi i}+1=0$$

有了新的表达方式，我们就可以写出，

$$e^{\pi i}=\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}\right]^{\pi i}=\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i\pi i}=\left(1+\frac{1}{i}\right)^{\pi i^2}=-1$$

也就是，

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{\pi i^2}=i^2$$

不难看出，如果i是半径，则πi^2可以理解为以i为半径的圆的面积；如果i为边长，则i^2可以理解为以i为边长的正方形的面积。所以我们可以形象的写出，

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{\circ}=\blacksquare$$

当然，这只是一种形象的表达方式，并不意味着什么原理。

现在让我们具体讨论后面的原理。

因为除去了极限运算的影响，我们很容易看出，

$$1+\frac{1}{i}$$

就是那个比 1 稍微大一丁点的量。我们知道 1 的任何次幂都等于 1，所以 1 的幂次并没有太大的意义。但是增加一丁点就不一样了。当它进行足够多次幂的运算之后，就可以和任何一个大于 1 的数的指数一样获得显著的效果。具体来说，我们可以计算一下，

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^1=1+\frac{1}{i}$$

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^2=\left(1+\frac{1}{i}\right)^1\left(1+\frac{1}{i}\right)^1=1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}=1+\frac{2}{i}+\frac{1}{i^2}$$

此时获得 3 项。但是，只要i充分大，$\frac{1}{i^2}$就充分小，可以小到被视为 0 的程度（小于$\frac{1}{i}$即可认为是 0）。这一点其实等价于微积分中的高阶无穷小。因为即便累加i（无限多）个$\frac{1}{i^2}$，也看不到明显的影响；最大的影响，不过是$\frac{1}{i}$，所以，直接把$\frac{1}{i^2}$忽略即可。也就是，

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^2=1+\frac{2}{i}+\frac{1}{i^2}=1+\frac{2}{i}+0=1+\frac{2}{i}$$

继续

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^3=\left(1+\frac{1}{i}\right)^1\left(1+\frac{1}{i}\right)^1\left(1+\frac{1}{i}\right)^1=\left(1+\frac{1}{i}\right)^2\left(1+\frac{1}{i}\right)^1=\left(1+\frac{2}{i}\right)\left(1+\frac{1}{i}\right)^1$$
$$=1+\frac{1}{i}+\frac{2}{i}+\frac{2}{i^2}=1+\frac{3}{i}+\frac{2}{i^2}=1+\frac{3}{i}+0=1+\frac{3}{i}$$

这里的$\frac{2}{i^2}$也可以直接忽略。由此，我们看到，随着n从 1 开始增大，总有

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^n=1+\frac{n}{i}+0=1+\frac{n}{i}$$

在i为整数的前提下，可令

$$n=i$$

则有

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^n=1+\frac{i}{i}=1+1=2$$

也就是说，

$$e'=\left(1+\frac{1}{i}\right)^i=\left(1+\frac{i}{i}\right)=2$$

为什么不是 2.71828……？

因为获得 2.71828……的结果只是前有限项之和，而且其中高阶无穷小也起了非 0 的作用。如果i真的是观察者可以计数的极限，则观察者就无法写出i的数值。以及小于i且大于 0 的任何数值（这些数值都是 0）。这时候结果只能由推理得出。推理得出的结果是 2，而不是 2.71828……。

进而讨论

$$e^{\pi i}+1=0$$

也就是,

$$e^{\pi i}+1=\left(1+\frac{i\pi i}{i}\right)+1=0$$
$$1+\pi i+1=0$$

我们知道,

$$\pi=2+\frac{1}{3}\left(2+\frac{2}{5}\left(2+\frac{3}{7}\left(2+\frac{4}{9}\left(2+(\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

即在离散条件下，圆周率指的是平行横轴的两个单位长度到横轴上的映射，而垂直横轴的映射为 0，所以,

$$\pi=2$$
$$1+\pi i+1=1+2i+1=0$$
$$2i=-2$$
$$i=-1$$

这显然和我们假定i为整数相符。也就是说，此时的虚数单位，为

$$x+1=0$$
$$x+\frac{1}{x}=x^2+1=0$$

这两种情况中的第一种情况。

回到最基本的表达式,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

我们需要的极限运算中的底数，是一个比 1 略微大一丁点的数量，所以若要用i来表示，则它必须写成

$$1+\frac{1}{i}$$

的形式，如果写成

$$1+\frac{1}{i^k},k>1$$

则它就相当于

$$1 + 0 = 1$$

但是对于指数n，却没有这么严格的要求。也就是说，我们总可以写出，

$$e_k = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i^k}, k \geq 1$$

取最简单的情况，$k = 2$，

$$e_2 = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i^2}$$

此时不要考虑$i^2 = -1$，只是写出

$$e_2 = 1 + \frac{1}{i} i^2 = 1 + i$$

$$e_2{}^{\pi i} + 1 = \left(1 + \frac{i^2 \pi i}{i}\right) + 1 = 0$$

$$(1 + \pi i^2) + 1 = 0$$

同理，

$$\pi = 2$$
$$2i^2 = -2$$
$$i^2 = -1$$

$$i = \pm\sqrt{-1}$$

由此可见，通过对指数n做出不同的设定，且对π进行离散化取值，我们可以得到各种不同的虚数单位，

$$i_k = (-1)^{\frac{1}{k}}, k \geq 1$$

我们通常使用的虚数单位，只是这些情况中的特例，i_2而已；这个特例被广泛使用，是因为在乘方运算上，负数的乘方只有奇数次和偶数次两种情况：奇数次乘方结果为奇数，偶数次乘方结果为偶数。所以，从乘方运算角度理解，偶数次使用$i_2 = (-1)^{\frac{1}{2}}$可以表达各种i_{2k}，而奇数次则只用$i_1 = (-1)^{\frac{1}{1}}$，就可以表达各种i_{2k+1}。但是，从其逆运算也就是开方运算的角度理解，对于不同的k，

$$i_k \neq i_{k'}$$

也就是说虽然，

$$i_3 = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$i_5 = (-1)^{\frac{1}{5}} = -1$$

但实质上，

$$i_3 \neq i_5$$

这是因为，这里所提到的-1，是比整个周期少 1 的意思；所以即便周期相等，比周期少 1 的这个数量开不同次方，结果显然是不同的。尽管从表面上看，都显示为-1。

现在，把i_k代回e_k，就得到，

$$e_k = \left(1 + \frac{1}{i_k}\right)^{(i_k)^k}, i_k = (-1)^{\frac{1}{k}}, k \geq 1$$

当i_k已经给出确定的数值，则可以得到对应的e_k。

其中，

$$e_1 = \left(1 + \frac{1}{i_1}\right)^{i_1} = 2, i_1 = (-1)^{\frac{1}{1}} = -1$$

是这种表达方式的最简形式。

此外，考虑

$$x_p{}^{+p} + x_q{}^{-q} = 0$$

$$x_p = i_p = (-1)^{\frac{1}{p}}$$

$$x_q = i_p = (-1)^{\frac{1}{q}}$$

$$x_p{}^{+p} + x_q{}^{-q} = \left[(-1)^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right]^p + \left[(-1)^{\left(-\frac{1}{q}\right)}\right]^q = (-1)^{\left(\frac{1}{p}\right)p} + (-1)^{\left(-\frac{1}{q}\right)q} = -1 + \frac{1}{-1}$$

$$= i_1 + \frac{1}{i_1} = 0\ mod\ 2$$

也就是说，

$$x_p{}^{+p} + x_q{}^{-q} = 0$$

总可以写成

$$i_1+\frac{1}{i_1}=0$$

的形式：当前是 11 点，过 1 小时之后，是下一个周期的 0 点的形式。

所以如果周期总是整数，则它一定是偶数；此时虚数单位i_k总是奇数，或者是周期本身（比如 2），或者是质数以及质数的乘积。

如果因为折叠效应而真的缺少某个偶数，而这个偶数作为一个周期存在，那么在小得多的数量级上会丢失若干虚数单位，以至于在更小范围发生连锁反应，这会造成相当多的整数丢失，而这种丢失很容易被察觉。

这正是为什么

$$2n=p+q$$

必须成立的进一步解释。

总结一下，我们从

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^n=1+\frac{n}{i}+0=1+\frac{n}{i}$$

的方式可以看出，这种指数形式的本质，是随着n的增加而积累最小单位$\frac{1}{i}$的过程，配合适当的指数，则可以实现

$$e^{\pi i}+1=0\ mod\ C$$

（其中 C 为周期）的周期性循环。这种增长的过程在最小单位$\frac{1}{i}$上是平滑的。而周期性配合平滑的增长，则导致循环拓扑和均等增量共同给出了圆周的图像。能够观察这一周期性的观察者，将会自然连接两个相继的周期，在圆周图像的基础上再增加一个维度。这就是旋线。正弦和余弦两个三角函数，在周期内按照虚数单位的奇数或者偶数次幂，将当前的数值投射在相继两个维数上。这就构成了周期内的两个维数。最小单位作为点，正弦和余弦对应的奇偶次幂分别构成两个周期内的维数，以及外部观察者所看到的周期性之间的连续性，分别对应于 0，1，2，3 维。旋线同时包含四个维数，并且四个维数的过渡是平滑而自然的。由此也

可以知道，这样一个结构，对于下一个四个维数的周期而言，可以被认为是一个0 维（点）的存在。反过来看，给定空间中的一个点，也就是一个没有内部结构的存在；那么，它的内部结构，就是这样一种存在：它是一条旋线。

那么，具体来说，构成旋线，需要什么条件？

很简单，就是一个能够创造虚数单位i的条件。周期性显然保证，不然就没有办法使用数量取描述。而要保证i的存在，就要保证存在巨大的差异。这不只是一个观察能力的问题，也是一个存在性的相对性问题：我们用 1 纳米那么长的长度去度量一个人的身高，就符合创造i的条件。但这不只是一个度量问题，因为本质上，我们需要有什么东西，确实是 1 纳米那么长。如果没有那种东西，这种度量就是没法实现的，显然相应的关系也不能成立，相应的效应也无法体现。

除了存在性的相对性体现出巨大的差异之外，其它过程，都是“自动”的。无论是旋线自动生成的过程，还是旋线自发发展的过程，包括左旋右旋或者是正负增量，都可以是自动发生的。但观察者也是必须的，不然这些过程都没有意义，或者说，被理解为过程，也不是必须的。所以总结来说，只需要观察者，以及巨大的差异，就可以构造旋线，或者维数，或者几何空间了。

数以及周期性的本质

从一个改造的机械钟表开始，我们就在讨论“过一个小时之后，就是下一个周期的开始了”。也就是说，我们始终在讨论这种表达式，

$$x^k+1=0, k\geq 1$$

不难看出，这其实也就是，

$$e_k = \left(1 + \frac{1}{i_k}\right)^{(i_k)^k}$$

$$e_k^{\pi i_k} + 1 = 0$$

要导出的结果。

容易看出，在这里无论是 1 个单位，比如 1 小时，还是尽可能的小，比如说$\frac{1}{i}$，都是必须的。为什么呢？

因为周期性，也因为周期性必须表达出来，才有周期性。

如果有一个周期，它是 12，那么为什么我们不用 12，而用 11+1=0？

这是因为，如果我们已经知道了周期是 12，那直接设定或者使用就行了。但是，我们怎么才能知道一个未知周期到底有多大？

我们需要观察重复出现的模式。比如钟楼传出的钟声，如果没有有声和无声的间隔，它一直响或者一直不响，都无法知道到底响了几次，或者一次的时间长度。所以无论周期还是频率，这些最基本的可计数的东西，都必须至少有两种状态。通过分辨两种状态的差异，来理解每一种状态各自的周期长度或者单位长度。我们可以通过某些方式使得一种状态占据绝对的主导，但至多如此，而不能真正消灭另一种状态。如果真的消灭了另一种状态，占据主导状态的也就无所谓主导了。（至少）两种不同的状态必须以某种形式共生，必须互相定义彼此，才能进行进一步的度量，才能被区分和理解。所以现实中，如果（整数）周期是 12，那就意味着极限情况，一种状态至多占 11 个单位，另一种状态占 1 个单位，而不是一种状态占 12 个单位，且只有这一种状态。因为这样的话，周期 12 就没有意义了：如果它连续发生，观察者认为它的周期是多少都行。

我们从一种状态的视角理解的话，比如认为状态 S 就是我们关注的状态，那么两种状态则意味着 S 状态或者其它状态，其它状态可以是任何状态，只要不是 S 状

态即可。我们通过度量 S 状态占用的时间单位个数，以及非 S 状态占用的时间单位个数，可以同时知道周期的长度以及 S 状态的占空比（非 S 状态，可能不是同一种状态）。通过观察非 S 状态出现的次数，就可以知道周期出现的次数。在时间上是这样，在空间上也是这样。

比如我们用键盘打字，每行的结尾要输入回车。我们假定输入字母是 S 状态，那么回车就是非 S 状态。那些即便占空比极小的非 S 状态，并不因为占空比极小而不重要，反而它还是一个周期开始或者结束的最重要的标志。

我们就是这样认识周期性的。事实上若无周期性，我们就不会去数数。只有那些重复出现的，才有数量上的意义。重复出现本身就是周期性的体现。而之所以能够重复出现，则在于你总可以用特定的方式将连续的分割开来。也就是说，没有间断就没有计数，正如没有往复就没有计数一样。

所以，本质上来说，只要能计数，就一定隐含了周期性和间断性。虽然通常状况下，我们总是忽略周期和微小的间断，并且这种忽略也不会造成很大的问题。但是，当我们理解和描述微观世界的本质的时候，这些基本观念就不可忽视了。

在时间上的周期性，如果和特定存在绑定，就可以构成空间上的周期性。空间上的周期性就好像是在键盘上打字。同种存在就好像是那些字母，而另一种或者非此种存在，就像是回车。我们用非同种存在结束当前的周期，开始下一个周期。这样就可以划定空间的范围。不断的重复这种“重复-间隔”模式，就可以自然的构成“直角坐标系”。

而如果使用旋线的方式，则更为自然。因为结构是在最小单位均匀的增加过程中自发构建而成的，或者说，这样的结构和其构成过程是完全平滑的。可以想象出

用旋线的旋线（以至于无限层次的旋线）方式来构造连续的维数的可能性。而这样一个图像所对应的本质，只是具有不同尺度的存在，“杂乱”的混合在一起而已。从杂乱到有序，只需要巨大的差异以及观察者的存在，其它的过程则可以自发的发生：这也正是从拓扑创造几何的一种自然过程。

导数的另一种算法

试计算

$$y = x^2$$

的导数。

对于任何具有微积分基础的人而言，只要你把背下来的导数表中的公式默写出来即可：

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

现在，让我们不用导数的极限定义（导数是一种极限运算），而是用虚数单位的倒数来计算一下。

令

$$\Delta x \to 0 = \frac{1}{i}$$

则

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{\left(x + \frac{1}{i}\right)^2 - x^2}{\frac{1}{i}} = \frac{x^2 + \frac{2x}{i} + \frac{1}{i^2} - x^2}{\frac{1}{i}} = \frac{\frac{2x}{i} + \frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i}}$$

$$= 2x + \frac{1}{i}$$

不难发现，结果与导数表上给出的不同。不同之处也显而易见，就是多了一个无穷小$\frac{1}{i}$。

如果不看导数表，而是按照极限算法自己推导一下也不难，

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

到这一步的时候，我们不能让$\Delta x = 0$，否则会出现分母为 0 的情况。所以我们必须将分式拆开，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)$$
$$= 2x + 0 = 2x$$

注意在这一步，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)$$

到下一步的推导过程中，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x}$$

中的Δx不可被当作为 0，否则不能当作分母存在，而对于

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)$$

而言，Δx当然也不能被当作为 0，但是其极限为 0。这就出现了它到底是不是 0 的问题。当然求导作为一种极限运算，用极限的观点就可以屏蔽“它是不是 0”的疑问，也就是说，不管它是不是 0，我们都认为“它的极限是 0”。但如果刨除极限运算的屏蔽作用，而是要问它到底是不是 0，我们将无从回答。因为

$$\frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

中Δx不是 0，而Δx若不是 0，则结果，

$$y' = 2x + 0 = 2x$$

又不能成立，所以这种极限运算，就导致了“不用极限运算就会自相矛盾，使用极限运算则会遮蔽现实”的情况。而如果我们使用，

$$y' = 2x + \frac{1}{i}$$

的方式来表述结果，则可以清晰的看到，此处导函数和自变量的关系，并不只是自变量的二倍，还多一个无穷小余量。如果不需要它，你确实可以忽略它；如果需要它，它可以被传递到需要的地方加以利用。最重要的是，这种表述在不屏蔽问题的同时，也是无内在矛盾的。在这里，$\frac{1}{i}$所表达的意思是，$2x$之外确实还有一个余量，它是一个无穷小量：它决定于观察者的观察能力，它是还能够观察到的最小值，比这个值更小的数值，将会被当作为 0。也就是说，它不是 0，也不可能是 0，除非你硬性的或者不得不认为它是 0。由此，它是有资格作为分母而存在的，所以除法运算是对的。但是被直接当作 0 而进行加法运算的做法，则是武断的。也就是说，在

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 2x + 0 = 2x$$

之中，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

是精确的，而

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0$$

则是人为的。

如果观察能力非常强大，使得i非常大，而$\frac{1}{i}$非常小，以至于可以忽略不记，那当然是最理想的情况。然而，尤其是处理微观尺度上的问题的时候，由于测量能力有限，i的大小可能大打折扣，而$\frac{1}{i}$也会比想象的大得多，对结果的影响也不再可以忽略不记，那么这个时候，认为

$$\frac{1}{i} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0$$

将会带来严重的困扰。因为这个时候，

$$y' = 2x + r, r \gg \frac{1}{i_0}, i_0 \to \infty$$

若是对其做积分，余量会被严重放大，而在结果上产生“观察者效应”：之所以得到这个结果，不全是因为所观之物的本质，也包括了观察者自身观察精度造成（非常严重）的影响（这也是量子力学中一个被普遍接受的观点）。

反之，如果这种影响总是可以忽略不记，那么积分和求和在$\frac{1}{i}$选取恰当的值的前提下，就是完全等价的。也就是说，超越性不再成为不可逾越的障碍，任何可以用积分计算或者无法用积分计算的问题，都可以用数值方法获得精确的数值解。

0 是什么

最后一个不得不讨论的问题：0 的意思到底是不是什么也没有？

显然$\frac{1}{i}$并不是真正的“什么也没有”，但是，在需要它的时候，总是足够的。

而

$$x+\frac{1}{x}=0$$

中方程右边的 0，作为周期的开始，似乎只是一个标志，而不是一个数量。但是，就算是一个标志，它也是有值的。不然无法对其做乘法，比如可以两边同时乘以x。我们知道虽然$\frac{1}{i}$可以在i为任意大的时候，取得任意接近 0 的值；但是，如果它乘以某个非 0 的数，并不能真正得到 0。也就是说，0 才是那个不管和多大的数相乘，都能让结果都一样小的无穷小。不同于i的任意大而产生的$\frac{1}{i}$的任意小，0 这种任意小并没有被任何周期所限制。由此认为 0 是一个没有周期性的真正的无穷小，应该是恰当的。但需要说明的是，只要是无穷小，就不是什么也没有。或者说，什么也没有是不能用数来表示的：因为什么也没有，本身没有办法被累

加或者重复累加，所以加法和乘法对它都不成立。显然或者说我们规定，加法和乘法对于 0 是成立的，所以 0 并不是什么也没有。

既然 0 就是实质上的无穷小，我们也可以写出

$$12+0=0$$

也就是说 0 总可以作为间隔出现。这种间隔总是比任何人为的间隔都小。但这种情况也意味着，

$$6+0=0$$

或者换成其它任何数都行。换句话说，自然本身的周期性和间隔性总大于观察者的观察能力。在一个方程中，如果出现 0，它就意味着它是所有无穷小以及所有高阶无穷小中最小的那一个；在运算中出现 0，则意味着它是所有运算过程中出现的所有无穷小以及所有高阶无穷小中最小的那一个。这种自然的无穷小，才是自然无限性的体现。而其它无穷小，只是不同观察者有限的观察能力的体现。所以 0 的含义，不是什么也没有，而是无限；这也等价于，什么也没有就是无限（当然也没有限制本身）。

基于 0 总是可以被认为是高阶无穷小的原则，我们可以写出

$$i+\frac{1}{i}=\frac{1}{i^2}$$
$$i^3+i=1$$
$$i^2\cdot i+i=1$$
$$-i+i=1$$
$$0=1$$

正如没有任何数自身相乘能得到负数，虚数单位i的存在，显然另有所指；这里出现的

$$0=1$$

也必定自有它的道理，至此恕不赘述了。

总结和扩展

虚数单位并不是想象出来的不实在的数，而是在周期性信息不完全的前提下，仍然能够正确描述周期性以及周期和单位之间关系的一种基本的表达方式。若给以完整的周期性信息，它就可以回归为一个普通的实数。这使得它更像是一个变量，或者以周期为自变量的函数。在要求不严格的情况下，可以认为它就是周期本身。

由 0 和负数的定义必须依赖于周期性可以知道，确实可以存在无限大，但并不真的需要无穷小。而虚数单位的倒数，正是初等数学到高等数学（基于微积分）之间的桥梁。在给定周期前提下，它才是实际上的无穷小，因为比它再小一点的话，就可以在非积累运算的过程中，将其当作 0 而不计它的影响了。但是正如它不是真正的 0，它的积累效应同样有效，而这也是积分运算得已成立的原因。

此后，我们讨论了复数的结构以及产生的原因；划分和折叠原理($2n = p + q$)；旋线的自发过程和两种旋向；以弧度制表示的角度和虚数单位i之间的关系；无限项数列的全加和和全乘积问题（黎曼 Zeta 函数）；提出了一种命中概率较高的获得质数的算法；讨论了欧拉方程的含义；非极限概念下的导数的简单算法以及和极限概念下的导数算法的差异；以及最后，数和周期性的本质和对 0 的解释。

这些对于虚数单位的本质的讨论，可以帮助我们进一步理解，比如物理时空的维数概念，从拓扑到几何的映射关系，电子的结构，量子力学中的波函数到底是什么意思，量子纠缠到底是不是超距作用，狭义相对论中的光速为何不能超越或者如何超越，以及广义相对论中空间弯曲的本质。关于这些物理应用上的具体问题，

会在以后的篇幅中具体讨论。