# 从勾股定理到费马大定理

有了几何平均数这个概念，让我们考虑一下勾股定理。

a c

b

已知上图a，b，c三条边的长度符合勾股定理，

为什么会有这种情况？或者说斜边到底是什么意思？问这个问题，因为我们可以把斜边当作横纵折线的无限细分版本。但即便如此，斜边的长度仍然只能是两个直角边的和而不可能是平方和的平方根。我们知道现实的极限尺度是普朗克长度，所以完全可以认为这个三角形在普朗克长度的尺度上就退化为折线了。既然如此，勾股定理岂不是完全不可能成立了？如果它总能成立，那么究竟在什么条件下，勾股定理才能成立？

现在，假定我们引入无限-1和它与1的几何平均数，也就是虚数单位。因为虚数单位特别大，所以使用它的倒数作为长度的最小单位。现在让我们把a，b，c各自都乘上长度的最小单位，使其微观化然后再将其宏观化，以处理微观折线的问题，

在最小单位基础上度量的三条边，就像是我们在普朗克长度基础上度量的长度，结果就只能剩下不为0的颗粒度构成的折线，所以考虑折线的情况我们先假定，

或者，

但是写成这种方式的时候，就是两个极大的长度合成为一个更大的长度。虽然可以把虚数单位提取出来，但是和这两个极大的长度的和已经超出了虚数单位本身，

而大于虚数单位就会出现模运算，

模运算的结果不可能小于，而且整除的结果必然大于1，

所以在虚数单位为周期的基础上，

也就是说，引入虚数单位之后，导致了两个直角边长度的和与斜边长度的和不相等。

同理，对于，

的情况，也是一样，和之和包含的数量的整数倍，仍然需要取模运算的结果，并且计算出，

虽然虚数单位被认为是任意大小的数，但是它一旦确定，它的倒数就有最小值。这个值的某个比例缩放的结果，其中低于最小值的就会被截断，导致结果出现错误。你可能会说，既然如此，总是可以把虚数单位调整到比可能出现截断的条件更小的数值，但是对于实数来说，实数的精度和截断的极限两者存在竞争关系。也就是说，这件事是在有限的时间里面无法完成的：总可以找到更大的虚数单位以及更小的倒数来对抗实数系数的截断问题，同样也总可以找到更高精度的实数来反抗这种反截断的措施，这件事恐怕是永远做不完的。

这才是一个几何系统：几何系统的本质就是假定两个相继维数之间，存在真实的无关性，一个维数到另一个维数上的投影无论如何都为0，不管精度如何扩展都是如此，但是要注意的是，这是一种假定，一种为人所知的假定。

既然我们无法确定虚数单位或者说它的倒数，我们还不如放弃这个想法，而是考虑虚数单位的平方，也就是周期-1的情况下，该怎么处理。

既然有，

也就是，

方程左右两端相等是应该的，但是因为虚数单位导致的周期性，两边无法相等。所以我们尝试将两边平方，看看在升维前提下是否有可能在更高维数下相等，

此时，所有项公用的单位是。其中ab的系数是，它无论如何都是新单位的2倍，也就是说，它模上就一定等于0，所以这一项在模运算的前提下总是为0的，原方程化为，

现在去掉0项，把所有的写成实数，

三个项都带有相同的不为0的单位，虽然极其小，但可以同时约掉，使其重新宏观化，于是得到，

这就是勾股定理的由来。总结来说，就是通过对虚数单位的平方，来去掉实数精度和虚数单位精度的竞争，用升维的方法，最终在有限的时间获得有限且有意义的结果。

实际上如果我们选择-1为虚数单位，1为周期，也是一样的。此时，

各项公共单位为，其中的系数在模运算的前提下也是0，也一样应当换成0，

去掉0项且将虚数单位的平方写成实数，

要知道这里分母上的1是一个周期一个巨大的数量，而分子上的1只是单位，但因为虚数单位的周期性而显现相同的数值，通过约掉单位而使其宏观化（实际上是乘以1这个周期性的巨大数量）。

约去所有的单位，得到，

总结一下，我们是如何获得勾股定理的。首先使用，

对三个边进行微观化操作，获得微观可行的长度等量方程，虽然我们知道这个加法可能有错误，

这个方程对于任意精度的微观三边关系并不成立，所以对方程两边进行平方操作以提升维数，降低精度竞争带来的影响。这个平方操作对于和两种情况都适用，

展开，

公用的单位是，且ab项的系数为，它确定性的是单位的整数倍，所以在模运算的前提下必定为0，

去掉0项，

用新的单位将方程宏观化，

得到，

至此，勾股定理再次得证。此处我们证明的是关于任意精度实数的勾股定理，但是我们还知道，若不考虑精度问题，仅仅是整数，也仍然有符合勾股定理的勾股数，公式为，

其中，m和n为整数，

首先使用，

对三条边微观化，

因为为整数，都为整数，所以并无精度竞争问题，虚数单位的数值可以任选（需要足够大），

此时只能得到

虽然不是因为精度竞争问题而升维，但是n=0同样不可接受。

所以需要两边平方，用升维解法处理，

左右两边已经相等，不需要再做其它操作。因为为整数，都为整数，微观化也无需消零的操作即可完成，直接合并同类项的结果也相等，所以这三组数可以作为整数实现勾股定理。

最后再考虑一下费马大定理。费马大定理（原费马猜想）指的是，

当整数的时候，关于的方程，

没有整数解。

我们试着用反证法证明。

首先如果整数a或者b有任何一个为0，则另外一个只能和c相等，但这不是我们要的整数解。我们需要三者都不为0。

假定就是对于给定的一组整数解。首先选择虚数单位以便于微观化，

对各项微观化，因为都是整数，所以这里的虚数单位不存在和实数竞争的问题（但存在周期性大小的问题也需要升维），于是虚数单位可以是任选的，

对方程两边再进行n次幂运算，

根据二项式定理，

举例来说，

可见由于不存在精度问题，包括两端在内，任何中间的项目都是虚数单位幂次的整数倍，右边也是虚数单位的整数倍，所以经过模运算必然得到，

这显然对于任何给定的整数都成立。既然本来就是整数，不存在精度问题，而由此虚数单位可以任选，我们就选取作为虚数单位，重新微观化，

再乘以n次幂，

举例，

不难发现，这组数对于任选的也成立，以至于对于任选的都成立，也就是说，存在一组整数，可以满足任意的n，使得，

那就是说，这组整数必须同时满足，任选的两种情况，比如，

把第一个方程带入第二个方程，

结果为，

这和相矛盾。既然整数没有精度冲突的问题，用虚数单位来解决此定理的想法就无需再考虑了。升维方法也并不能排除可因式分解或者合并同类项的可能性，所以最后，只能考虑用二项式定理分解合并，看看能否找到规律。

既然假定c的高次幂总能分解为两个部分，我们就把c本身分解为两个部分，然后看一个部分固定，另一个部分是如何变化的。

具体来说，

直到前面的部分达到c的一半（奇数的话为c-1的一半）。

总结通式为，

令，

也就是把拆分成两个部分，一个开头的加上后面的余量，根据二项式定理，项目的总数量为n+1，去掉开头的一个剩下n个，因为n>=3，所以R至少有三项（所以不可能构成二次形式）。

起初，被拆分为和两个部分，它的n次幂可以写成，

即假定存在三个非零正整数，使得方程，

成立。注意此时，

由对称性可以假定，

展开当前已有的，

对比可见，

把也分成和余量两部分且分离出，

引入整数，把也分成和余量两部分且分离出,

已知，

所以，

在方程两端加上，得到，

也就是，

解出，

这与

矛盾。综上所述，对于任何整数，

满足，

且，

的一组整数，

不存在。

那么，究竟为什么，一个大于1的整数的三次以上幂，无法写成两个和其等幂非零整数之和？原因出人意料的简单，就是因为根据二项式定理，两个等幂整数还需要若干混合项才能满足二项式定理要求的条件。前面已经验证，几何前提对于整数来说并不构成消项的条件，那么虚数单位的引入也就无济于事。由此来说二项式定理展开得到的混合项就必须存在，而等幂整数的和正好缺少必要的混合项。所以整数三次以上幂无法写成两个等幂整数之和的原因就在于缺少必要的混合项，而且也无法换成几何前提将其忽略，也就是说，就算引入复数也是无法成功的。

从上面的分析可以看出，引入虚数单位解决的问题就是实数造成的无限精度问题。必须找一个可以比实数更精确的虚数单位才能通过升维解法解决精度竞争的问题。但是整数根本就没有精度竞争问题，也就是说它的精度是确定的1的倍数，所以它可以适用于任意选定数值的虚数单位。所以整数和实数的区别就在于，整数可以适配任意虚数单位，而实数会和特定虚数单位发生精度竞争，进而只能通过升维方法解决精度竞争的问题，而具体的方法就是引入虚数单位的整数倍，并用对虚数单位数量的模运算对其进行修剪。这就是勾股定理所要表达的意思。

再回顾勾股定理，到底两直角边的长度的总和是怎么缩减为斜边的长度的（7=5是怎么实现的）：是因为几何维数差异要求了虚数单位存在（它很小但是不为0），而虚数单位存在就要求了必须按照模运算处理，最终那些比虚数单位倒数更小的被认为是向着更小方向的无限运算，而这时候那些周期的倍数就被归零了，就剩下了平方和的平方根。由此也说明了两个相继的维数上的数值，在几何意义上，并不是真正相互无关的。只是因为存在虚数单位和它的倒数，才使得两个维数从数量上得以分开。高于某个单位的，其重复次数就是高维的数值，低于这个单位的，其自身单位重复的次数，才是这个低维的数值。几何上的维数划分就是这样实现的。当我们不去具体的考虑这个数值是多大的时候，就认为它是-1或者它的平方根，具体认为是什么根据具体的情况决定。

现代数字系统容易给人带来一种错觉，让人认为世界是不连续的。比如屏幕上的像素非常小，斜边最终只能表现为阶梯，又比如CPU的时钟频率达到数GHz，时间可以分成非常微小的碎片。我们的世界就像是某种细小的时间和长度分割的结果。但是，正如你看到的，细小的长度本身并没有极限，也就是说，总可以用更细小的长度去划分世界。也就是说无穷小本身也是有大小的，但这个大小是没有办法被限制的，所以还有更小的无穷小。包括普朗克长度和普朗克时间，实际上也是根据我们对于电子长度和频率的认识来构建的，当电子不同，这些极限也会随之不同。世界在某种程度上确实可以认为是不连续的，但是，不连续的程度却是没法限制的，所以无限精度的不连续总可以被认为是连续的。而且根据我们分析斐波那契数列的结果，可以说，就算是不连续终究不可能消除，连续性也总是充分的和足够的。由此可见，也许我们正身处牢笼，但是我们总能穿破它，进而回归自由。