从无限到虚数单位

什么叫无限呢？这个问题似乎很难回答，但是若按照字面意思，就是没有限制而已。

显然我们说的是数学，不是别的。数学上说一个数是无限大的，到底有多大呢？还是按照一样的原则，就是不限制它有多大。那么不限制到底有多大呢？就是多大都行，也就是多小都行，虽然我们一般都往大了看。

所以一个无限大的数，其实不是说要非常非常的大，而是说，它多大都可以，虽然我们一般都往大了看。

现在问题来了，一个多大都行的数，是个什么数？按照我们的理解，它不就是一个”代数”或者说变量吗？当然也可以这么说，但是这么说并不体现它的最重要的性质。因为说变量说的是这个符号可以任意取值，而无限大的这个数它不是任意取值的问题，而是它就是那个东西本身。

那么这样一个东西如何表述？

首先是它不能被限制。那么对于数来说，什么才是限制？数本身无所谓限制，但计数却有限制，而这个限制就在于计数者或者观察者，观察者自己的计数能力，就是数的限制。比如一个人一秒钟数一个数，从出生开始到一百岁整死掉，这些时间所对应的秒数，也就是他能数的最大的数，也就是他计数的限制。

如果超过这个数呢？那就只能“下辈子”再说了，如果有下辈子的话。那么如果真有下辈子呢？从哪开始数数呢？按照我们的习惯，从零开始数数。

也就是说，若要表述这个限制，这个数就是“下辈子的0之前的那一个”，就是这个最大的数。用方程来写的话，就是，

好了，现在我们对这个最大的数（这里只考虑整数）有了一个最基本的认识。

但是这个认识还不够。虽然我们确实可以描述无限，以至于确实有了一把衡量无限的尺，但是这个尺没有刻度，只能一整个的度量，那么如果还有一个大一点的或者小一点的无限，两个放在一起怎么比较呢？因为这两种情况的是不可区分的。

正如所有尺都有刻度，我们也得给这个尺标上刻度，至少要标一个刻度吧。

那么在哪标呢？一个刻度，最直接想到的就是中间也就是说算数平均数，

即整体的一半那个地方。于是，整体的大小为0，它的一半还是0，这个想法显然失败了。还有别的地方吗？我们也可以考虑它的平方根，也就是几何平均数，这时候整体的大小还是0，它的平方根还是0，又失败了。

回来观察，

如果不用0，而用呢？算数平均数是，几何平均数是，但问题在于，这还是代数而不是数。不定，结果也不定，虽然没有限制，但没有实现对无限的本质上的抽象。

但这个方程稍微处理一下，就可以写成，

算数平均数和几何平均数就可以写成和。其中可以认为是-1的一半。可是-1在这里可以有两个意思，一个是相对于0少一个，一个是相对于无限少一个，也就是说，其实0就有两个意思，一个是完全没有，一个是重新开始。所以-1也有两个意思，于是也继承了这两个意思，从数量上来说，这两个意思是不可区分的。

所以就剩下一个选项，也就是几何平均数。

它是什么意思呢？它就是“几何意义上的无限的一半”。有了这个数值，就可以使用无限标尺了。

但是在使用之前，得先说清楚：这时候的0，说的是重新开始，但是这是计数者的重新开始，而不是被计数事物的重新开始，被计数事物是不是能重新开始还是说到没到重新开始的程度，是不知道的，但是在重新开始之前都是可计数的。所以虽然不限制被计数者的数量，但是计数者本身就是自己的限制是需要被认识到的。还有就是，超越计数者计数能力的部分到底有多大，

计数者可能永远都不知道，也无法做出假设来，唯一知道的就是比极限更大。

不仅如此，是多大，也是不知道的，正如0是多大，-1是多大都是不知道的。

那么一个不知道多大的数，又不用变量来表述，有什么意义呢？

其实就在于假定的“下辈子”，也就是那个0，或者说周期性。虽然不知道有多大，但是只要它有周期性，就会体现出一些特殊的性质。所以你大可以认为-1和都是为了周期性而存在的。

但是也千万别忘了，这是计数者自己的一厢情愿，被计数者到底有没有周期性，是不知道的。但是也千万别忘了，为啥计数者会想到周期性，正是因为计数者生活在有周期性的世界里面，不然他为何要计数？计数本身就是对单位数量的重复，本身就是周期性的实作。

所以你大可以认为，选择周期性就有周期性，选择没有周期性就没有周期性。或者说，选择周期性，就有数量的意义，选择没有周期性，就无所谓数量的意义。而所谓无限，显然是选择周期性的前提下，才有意义的，虽然多大不知道也无需知道，但是周期性是必须要有的，也就是说，数学上的无限，还是有限制的，那个唯一的限制就是周期性。这也意味着，更广义的无限是存在的，同时周期性也不必须是它存在的必要条件。

这就是虚数单位的由来。

所以当你见到虚数单位的时候，你就不用考虑那个数有多大了。同时你也知道，它只是目前不知道多大或者并不需要知道多大而已，如果需要的话，它终究是有大小的。

它的平方（-1）描述的是一种上限，但这个上限不意味着被计数者的上限，只意味着计数者自身能力的上限。在这个数之上，完全可能是另一番景象，只是计数者没法知道而已。计数者只能通过不断提高自身计数能力的上限来知道，否则计数者就会回归到自身的周期之中，这是计数的周期性导致的必然宿命。当然，你也可以不计数，那就无所谓上限了。

再扩展一些来说，我们定义一个数，它的平方是-1，

解方程取算数平方根，

也就是虚数单位，按照上面给出的解释，它就是无限的平方根，或者说，无限（-1）和单位1的几何平均数。

这个几何平均数，显然也是无限的，所以我们还可以做一下变换，

也就出现这个结果。我们先前说的是，无限，我们一般都是往大了看。所以-1应该说是一个非常大的数，那么显然它的平方根也是一个非常大的数。这里又出现了它的倒数，那么它的倒数就是一个非常小的数。如果x被认为是（常规意义上的）无限大，那么它的倒数就是（常规意义上的）无穷小了。于是我们就得到了那个“要多小就有多小”，但是不等于0的无穷小。

如果我们要把标尺多分几个刻度呢？比如偶数个刻度，那么我们就可以写出，

可能你不熟悉，但是它的倒数，你就可以认为它是阶无穷小。

这个时候其实就可以叫做“超虚数单位”了。

但是一般来说用不上，因为就像我们用二进制就可以描述任何数量，我们只需要二分法就可以表述对无限的各种程度的划分。也就是说，对于无限这种情况，只有一个刻度的尺其实是够用的，因为本来这把尺就可以伸缩，虽然还有更多刻度的尺能给出更丰富的表述形式。就像用一只眼睛可以看到画面，而两只眼睛就能借助视差，从而看出立体来。

东西还是那个东西，观察者变了，能力提升了，东西也显得不一样了：这恐怕就是所谓的“升维”。但这也给我们带来一个启示，就是看上去一样的，可能根本不同。

比如按照虚数单位的定义，

但是不仅如此，

也就是说，你看到1，它不一定是什么，它可能就是一个单位，也可能是一个周期，也可能是两个周期或者多个周期，也可能是，也就是单位或者周期的倒数。你看到一个事物，它可能是这个样子，也可能只是它本来样子的伪装，甚至它可能有各种样子，每一个都是它真实的样子。

于是，你就可以意识到，整个世界都可以压缩在一个点上；于是你就可以意识到，一个点即可以是整个世界 - 再说就不是数学了。

回到数学，形如，

的方程以（一阶）无穷大加上（一阶）无穷小等于0的形式给出虚数单位的定义。

写出指数形式，

更美观一些。对于“超虚数单位”，可以写成，

不难看出，当n=0的时候，不考虑x是否为0，会出现

也就是，

这不是错误。这个说的是，能构成可计数周期的最小周期长度是2。这也是二进制是最小可计数的进制的原因。当然此时等于多少也已经没有差别了。这就是我们的计数系统可以提供计数能力的原因：至少有两种不同的东西，或者状态，才能分辨，才能计数。比如有和无，黑和白，大和小。但是，正如先前所说的，你也可以选择不计数，是否计数是你的选择。

数学是一种工具，它也带来一个认识世界的视角，但是，正如先前所说的，是否使用数学是你的选择。

最后，我要说的是，你是自由的，你总有选择。