# 关于叉积

我们知道，向量的叉积可以帮助我们求出一个和已知两个向量构成的平面相互垂直的另一个向量（例如求法向量）。而且一般来说，都是求三维空间的向量的叉积。下面我们要讨论的就是各种“为什么如此”。

考虑两个相互不平行的三维向量，

它们的叉积，以行列式形式来表示为，

其中是三个维数上的单位向量。如果不用这些单位向量，则写成：

这样可以避免将视作虚数单位，或者形成四元数的数基，当然反过来说，这也可以被认为是四元数数基得以创造的原因。

三维向量叉积可以如此计算，那么二维的呢？很简单，我们将轴置零即可，

由于只有轴分量，而没有其它分量，我们可以认为它是轴上的向量或者一个标量。

为什么要讨论二维的情况呢？因为实际上，并没有维数，只有复数。我们知道，构成几何上的相继两个维数，是因为两者数量上具有巨大的差异，比如一个维数上的长度单位为1，那么和它垂直的方向，可以构造出另一个维数，另一个维数的单位长度要小于或者等于，也就是某种虚数单位大小的倒数；或者另一个维数的单位长度要大于或者等于也就是某种虚数单位的大小本身。这就可以在当前维数的基础上，上推或者下推一个维数出来。当然，如果考虑上推和下推出来的两个维数，他们两个之间就具有了的关系，而其中的显然小于1，所以可以被替换为1，由此出现的关系；或者说，其中的相对于而言显然也大于，这就又导致了的关系，也就是说，的关系仍然意味着正交。由此当前维数以及上推和下推得到的两个维数，三者之间总可以构成两两互相正交的关系，这其实就可以构造三维空间了。

我的意思是，用复数来构造三维空间的想法是完全可以实现的，或者说，现实正是如此。

那么复数又是什么呢？复数就是形如，

的数。要知道，它是一个数，而不是两个数。只是到底是多大在此并不重要，但它在现实中一定有一个确定的大小，这一点是和都一样的。比如，若有则有，

通常是因为或者它的倒数特别的大或者特别的小，而且又不影响计算的结果，我们就把它的具体数值刻意的忽略掉了：结果是我们想要的即可。

可计数性的可观测性必然对应了周期性，所以实际上任何一个数，都是复数；只是那个周期到底有多大，以及它是否体现出了周期性的效果。以整数虚数单位而言，如果一个整数的大小，尚未达到一个周期，那么就不用带上的部分，只写就是了；而如果这个整数总是周期的倍数，那么就只写就对了，因为此时。严格来说，并不完全对应周期的大小。这是因为它来自于如下定义，

而通常我们选择，

此时它是方程

的解，可见越大，它的倒数就越小，它就越接近，达到某个程度之后，就可以将其认为就是本身。

以上我们简述了虚数单位的由来。

那么向量呢？有了周期性，向量其实就是数量在周期性前提下的体现。周期性其实不属于这个数，而是属于观察者。考虑到一个有限能力的观察者，它的能力体现为，那么如果它观察11，就只能得到

的结果，也就是说，它是看不到11的，因为11超过了它的观察能力。但若有一个超越视角，我们仍然可以把11，用观察能力只有5的观察者的视角表达出来，这个时候，这个数就可以写成，

其中，

情况就是这样。所以说，一个复数，就是一个数而已，而它变得复杂，只是因为观察者自身存在限制。而这种限制，使得观察者看到的不再是一个数，而是一个复平面上的点或者它和原点构成的向量。换句话说，是观察者和所观之物，共同创造了复平面，也就是平面直角坐标系。

既然如此，我们用一个复数来表达平面上的点或者它和原点构成的向量，就再合适不过了:

要记得，和本质上并不是什么平面直角坐标系上面具有坐标数值的点，而是两个不同的数（一维的或者说标量），之所以出现了平面直角坐标系，是因为观察者具有的观察能力的上限为，这就和是一样的。

现在让我们考虑两者的“相乘”。

如果是点积，那就有

如果用复数对应实部虚部相乘，则有，

我们知道虚数单位代表周期性，所以可以认为在模结果中不必存在，所以

而

虽然是负数，但也并不影响其表达为

的形式，事实上只需要把结果的算法换为，

即可。若考虑闵式(闵可夫斯基)几何将时间的平方表达为负数，这就不难理解了。

所以说，点积实际上就是复数乘法，去掉虚部（被周期性屏蔽），以及反转负数项之后的结果。其实就算是不反转，也无所谓，只是两种定义的方式不同，导致计算方法不同而已。相比较而言，不反转反而更为自然一些。

那么二维向量或者复数的“叉积”如何计算呢？

还是考虑，

两者的叉积，显然也只能是复数相乘。但是观察者的视角却不同。在求点积的时候，观察者认为和的度量方式是一样的，也并未考虑周期性带来的维数提升。但是正如不考虑，就一定还有考虑的情况：周期性带来了维数的提升，那么从不同的维数看两个数值，结果是怎样的呢？从较低的维数观察，同时从较高的维数观察，我们就可以得到，

这就使得变成了，而它的“分量”上的虚数单位就彼此交换了。由此，

如果也去掉周期性的影响，则有，

我们用正交的视角重新观察而得到了，关于的复数乘法再对虚数单位取模，就得到了一种计算向量乘积的新方法。我们可以干脆就认为，一开始就是从正交方向观察的结果，则

那么这种新的乘法，就可以写成

这就是复数或者平面直角坐标系中向量叉乘的含义和由来。大小如此，那么方向呢？回顾，

它显然也是一个复数，只是它的虚数单位不是负的平方根，而是本身，或者说，1经过两次正交之后的结果，

所以显然，结果向量不会在或者的方向上，而是在和它们都垂直的方向上，也就是第三个维数上了。至于三维向量，两两之间的关系已经在上面说明了。

那么四维以及更高维数呢？我们只能认为，就像总是被认为是（它被认为是分界点，因为比这个数值小的都被认为是0），因为

那么事实上所有

都成立。也就是说，下推一次之后，两次或者更多次维数，都被视作是一次维数扩展的体现；而上推也是一样的，

由此来说，观察者最多同时观察三个维数，也就是这三个维数，倘若观察者的单位长度是1的话。若要观察更多的维数，则至少要移动到或者的层次，这样才能在那个层次上观察上下推出的两个维数。也就是说，世界可以是无限维数，但观察者（不管是谁，只要它具有上限和下限）只能同时观察到三个维数，这就是为什么说世界总是三维的。

至此叉积的数量以及方向等运算方法的由来，就说清楚了。还有就是更高的维数在更大的地方，更低的维数在更小的地方。

本质上就是复数，就是观察者和所观之物的数量关系。

由此扩展来说，在几何前提下讨论四维以及四维以上的问题，其实是没有什么意义的。这不是说维数本身被限制，而是说对于观察者来说，四维以及以上的几何空间总是体现为三维中的某种形式，因为观察者自身没有观察连续四个维数的能力（若包括观察点的能力，则至多具有观察四个维数的能力）。

所以，叉积到底是什么呢？二维或者复平面来说，就是两个数相乘。三维复杂一点，但是可以分成三组，各自都是两个数相乘。既然如此，一个三维的向量是什么样的呢？

上面已经讨论过，我们可以直接构造一个三维的向量：

我们确实知道，，但是前提是 而不是。

也就是说，对于后者而言，并不成立，所以三个分量是不能彼此化简的。

那么一个四维的向量，可以类比写出，

虽然说也不能简单的和1进行化简，得到，但是整个向量的跨度已经超越了中心和上下极限的范围（也就是3），无论在 上还是上都不可能看到四个分量正交出现，必定有某两个分量出现遮盖的情况，也就是说或者写成，

其中，

或者写成，

其中，

无论如何，还是三个分量而不是四个，更高维数的表达方式是类似的。这就是对于观察者而言，更多的维数也只能体现为三维，所以说对于观察者而言，世界总是三维的。

那么在物理现实中，或者说在物理时空中，一个物体总是具有三维空间中的坐标，它总是可以在三维空间中平移缩放（狭义相对论）或者旋转（广义相对论），那么能够实现这一点的最基本的条件，就是至少存在,或者说，这种长度单位之间的关系。由此我们又得到了一个关于物理实相的理解：至少有三种不同频率的振动，定义了三种不同的单位长度，进而才能形成一个三维的世界：两种是不够的，三种以及三种以上都行，三种以上的概率更大，而两种以上的维数或者卷曲在较低的维数中，如，或者展开在较高的维数里，如。那么当前时空可见的最大维数范围是怎样的呢？我们可以写出这样的向量，

只看的情况，以为中心维数，上推可到；以为中心维数，上推可到；以为中心维数，上推可到；以为中心维数，上推可到。四次上推就构成了的完整循环。换句话说，在维上已经完全看不到的投影了。所以如果认为应当包括，那就是说也应当包括，那么当前可见时空的最大维数就是9个维数；若不应当包括，则是7个维数；后一种说法的可信度更好，毕竟看不到，也同样意味着看不到。更大的维数当然存在，更小的维数也当然存在，只是对当前的核心维数的范围来说是可以认为都是不存在的。所以，当前时空可见的最大维数范围是7个维数。当然若有能力更改当前维数或者忽视虚数单位的周期性而将其还原为mod N的形式，则可见范围是无限的。

## 向量相乘

所谓向量，无非只是既有大小又有方向的量。我们知道周期性来自于观察者观察能力的有限性，以及所观之物相对于观察者而言的超越性。换句话说，就是有限的观察者对更大的所观之物无法一次性完整观察的现实状况。而这就创造了相继两个维数出现的条件。

也就是说，一把1米长的尺，测量一米二的长度，就一定会造成一维长度被扩展为二维面积的情况。平面就是这样从直线扩展而来。

现在，在平面中任取一个向量，我们让它旋转一个角度，我们知道这需要做一个运算，具体说就是乘法运算，那么这到底是什么意思呢？假定有向量以及旋转向量:

显然

也就是说已经正规化，相乘之后，的长度不会变化。所以不管现在的长度如何，指向何种方向，经过与相乘，它都会转过。

现在假定平面的宽度为100，高度为100，也就是说，所观之物的总量为

其中意味着多算的空位应当除去。对应的观察者的观察能力为

在这个平面中，A从左下角的(1,1)开始，指向右上角的(5,5)。它经过旋转45都之后，就得到从（1，1）指向（1，5）。从（1，1）到（5，1）比较容易理解，只需要在实数上重复5此或者增加4次。但是要知道的是，它仍然是乘法运算的结果，也就是说，此时的平面已经不是最开始的平面了。此时的平面是最开始平面的第五个副本。你们如果我们考虑的是旋转45度呢，那副本的数量就更大，次数就更多。因为如果宽度对应的数量被重复一次，就相当于对这个平面重复10次之后的结果。可见旋转要比平移重复的次数多得多。

所以，无论平移还是旋转，向量大小以及方向的改动都可以通过向量乘法来实现。那么在物理实相中，该怎么发生呢？现在回到例子，我们将A也正规化，

把R换成B，

乘积：

看到就不难明白转动是如何发生的了。

为什么要讨论这些？因为空间中的点，它确实就是一个向量，可是它之所以是一个向量，没有观察者的参与也不会实现（没有办法确定横向的最大长度），所以说单独说一个震动的频率（向量的长度），是没有意义的。那么有了观察者之后，如何让一个想浪变成另一种频率的向量（数量）呢？我们要用另一个向量去乘它。这就是B存在的缘由了。