# 关于叉积

我们知道，向量的叉积可以帮助我们求出一个和已知两个向量构成的平面相互垂直的另一个向量（例如求法向量）。而且一般来说，都是求三维空间的向量的叉积。下面我们要讨论的就是各种“为什么如此”。

考虑两个相互不平行的三维向量，

它们的叉积，以行列式形式来表示为，

其中是三个维数上的单位向量。如果不用这些单位向量，则写成：

这样可以避免将视作虚数单位，或者形成四元数的数基，当然反过来说，这也可以被认为是四元数数基得以创造的原因。

三维向量叉积可以如此计算，那么二维的呢？很简单，我们将轴置零即可，

由于只有轴分量，而没有其它分量，我们可以认为它是轴上的向量或者一个标量。

为什么要讨论二维的情况呢？因为实际上，并没有维数，只有复数。我们知道，构成几何上的相继两个维数，是因为两者数量上具有巨大的差异，比如一个维数上的长度单位为1，那么和它垂直的方向，可以构造出另一个维数，另一个维数的单位长度要小于或者等于，也就是某种虚数单位大小的倒数；或者另一个维数的单位长度要大于或者等于也就是某种虚数单位的大小本身。这就可以在当前维数的基础上，上推或者下推一个维数出来。当然，如果考虑上推和下推出来的两个维数，他们两个之间就具有了的关系，而其中的显然小于1，所以可以被替换为1，由此出现的关系；或者说，其中的相对于而言显然也大于，这就又导致了的关系，也就是说，的关系仍然意味着正交。由此当前维数以及上推和下推得到的两个维数，三者之间总可以构成两两互相正交的关系，这其实就可以构造三维空间了。

我的意思是，用复数来构造三维空间的想法是完全可以实现的，或者说，现实正是如此。

那么复数又是什么呢？复数就是形如，

的数。要知道，它是一个数，而不是两个数。只是到底是多大在此并不重要，但它在现实中一定有一个确定的大小，这一点是和都一样的。比如，若有则有，

通常是因为或者它的倒数特别的大或者特别的小，而且又不影响计算的结果，我们就把它的具体数值刻意的忽略掉了：结果是我们想要的即可。

可计数性的可观测性必然对应了周期性，所以实际上任何一个数，都是复数；只是那个周期到底有多大，以及它是否体现出了周期性的效果。以整数虚数单位而言，如果一个整数的大小，尚未达到一个周期，那么就不用带上的部分，只写就是了；而如果这个整数总是周期的倍数，那么就只写就对了，因为此时。严格来说，并不完全对应周期的大小。这是因为它来自于如下定义，

而通常我们选择，

此时它是方程

的解，可见越大，它的倒数就越小，它就越接近，达到某个程度之后，就可以将其认为就是本身。

以上我们简述了虚数单位的由来。

那么向量呢？有了周期性，向量其实就是数量在周期性前提下的体现。周期性其实不属于这个数，而是属于观察者。考虑到一个有限能力的观察者，它的能力体现为，那么如果它观察11，就只能得到

的结果，也就是说，它是看不到11的，因为11超过了它的观察能力。但若有一个超越视角，我们仍然可以把11，用观察能力只有5的观察者的视角表达出来，这个时候，这个数就可以写成，

其中，

情况就是这样。所以说，一个复数，就是一个数而已，而它变得复杂，只是因为观察者自身存在限制。而这种限制，使得观察者看到的不再是一个数，而是一个复平面上的点或者它和原点构成的向量。换句话说，是观察者和所观之物，共同创造了复平面，也就是平面直角坐标系。

既然如此，我们用一个复数来表达平面上的点或者它和原点构成的向量，就再合适不过了:

要记得，和本质上并不是什么平面直角坐标系上面具有坐标数值的点，而是两个不同的数（一维的或者说标量），之所以出现了平面直角坐标系，是因为观察者具有的观察能力的上限为，这就和是一样的。

现在让我们考虑两者的“相乘”。

如果是点积，那就有

如果用复数对应实部虚部相乘，则有，

我们知道虚数单位代表周期性，所以可以认为在模结果中不必存在，所以

而

虽然是负数，但也并不影响其表达为

的形式，事实上只需要把结果的算法换为，

即可。若考虑闵式(闵可夫斯基)几何将时间的平方表达为负数，这就不难理解了。

所以说，点积实际上就是复数乘法，去掉虚部（被周期性屏蔽），以及反转负数项之后的结果。其实就算是不反转，也无所谓，只是两种定义的方式不同，导致计算方法不同而已。相比较而言，不反转反而更为自然一些。

那么二维向量或者复数的“叉积”如何计算呢？

还是考虑，

两者的叉积，显然也只能是复数相乘。但是观察者的视角却不同。在求点积的时候，观察者认为和的度量方式是一样的，也并未考虑周期性带来的维数提升。但是正如不考虑，就一定还有考虑的情况：周期性带来了维数的提升，那么从不同的维数看两个数值，结果是怎样的呢？从较低的维数观察，同时从较高的维数观察，我们就可以得到，

这就使得变成了，而它的“分量”上的虚数单位就彼此交换了。由此，

如果也去掉周期性的影响，则有，

我们用正交的视角重新观察而得到了，关于的复数乘法再对虚数单位取模，就得到了一种计算向量乘积的新方法。我们可以干脆就认为，一开始就是从正交方向观察的结果，则

那么这种新的乘法，就可以写成

这就是复数或者平面直角坐标系中向量叉乘的含义和由来。大小如此，那么方向呢？回顾，

它显然也是一个复数，只是它的虚数单位不是负的平方根，而是本身，或者说，1经过两次正交之后的结果，

所以显然，结果向量不会在或者的方向上，而是在和它们都垂直的方向上，也就是第三个维数上了。至于三维向量，两两之间的关系已经在上面说明了。

那么四维以及更高维数呢？我们只能认为，就像总是被认为是（它被认为是分界点，因为比这个数值小的都被认为是0），因为

那么事实上所有

都成立。也就是说，下推一次之后，两次或者更多次维数，都被视作是一次维数扩展的体现；而上推也是一样的，

由此来说，观察者最多同时观察三个维数，也就是这三个维数，倘若观察者的单位长度是1的话。若要观察更多的维数，则至少要移动到或者的层次，这样才能在那个层次上观察上下推出的两个维数。也就是说，世界可以是无限维数，但观察者（不管是谁，只要它具有上限和下限）只能同时观察到三个维数，这就是为什么说世界总是三维的。

至此叉积的数量以及方向等运算方法的由来，就说清楚了。还有就是，更高的维数在更大的地方，更低的维数在更小的地方。

本质上就是复数，就是观察者和所观之物的数量关系。

由此扩展来说，在几何前提下讨论四维以及四维以上的问题，其实是没有什么意义的。这不是说维数本身被限制，而是说，对于观察者来说，四维以及以上的几何空间总是体现为三维中的某种形式，因为观察者自身没有观察连续四个维数的能力（若包括观察点的能力，则至多具有观察四个维数的能力）。

所以，叉积到底是什么呢？二维或者复平面来说，就是两个数相乘。三维复杂一点，但是可以分成三组，各自都是两个数相乘。