关于圆周率

大约20年前的2005年，我在上大学的时候，网上流传这样一段程序，被称之为“外星人计算圆周率程序”。程序如下：

long a = 10000, b, c = 2800, d, e, f[2801], g;

main() {for (; b - c;) f[b++] = a / 5;

for (; d = 0, g = c \* 2; c -= 14, printf("%.4d", e + d / a), e = d % a)

for (b = c; d += f[b] \* a, f[b] = d % --g, d /= g--, --b; d \*= b); scanf("%s");}

这一段C语言的程序仅仅用了4行代码，就计算出圆周率的前800位，

31415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185

当时不由得为其赞叹。对圆周率的展开式的研究，可以帮助认识到底什么是圆，或者说圆的结构到底是什么样的，于是一场探求圆的真相的旅程就此开始了。

二十年后，让我们对这个旅程做一个阶段性的总结。

据说这个代码的的算法来自于沃里斯乘积，

但这一点终未能证实。不过这并不影响我们的分析，因为具体分析代码，可以得到，

两边都除以2，得到，

我们目前只关心即可，因为它是某种“单位”，而它的倍数只是简单的乘进去到每一项即可。此外，它还有其它的写法，比如把嵌套展开，

写成求和的形式，

我们的问题不在于它是什么形式，而是在于这个形式到底代表了什么意思。

先前在“楼梯悖论”中讨论过复平面和平面直角坐标系的差别。简单说，就是复平面是有“旋向”的，而平面直角坐标系则可以认为是两个旋向同时存在且是相互等价的。正如图论中的有向图节点之间的边是有源和宿之分的，而无向图节点之间的边只起到链接节点构成关系的作用。为了简化问题，我们只讨论复平面的正旋向，而不考虑另一个旋转的方向。

在复平面中，我们画出坐标系：实轴正半轴的单位为1，也就是

虚轴的正半轴的单位为，也就是，

实轴的负半轴的单位为-1，也就是

虚轴的负半轴单位为，也就是

然后就转回到实轴的正半轴了。这四个值，看上去都是单位，但是实际上单位的大小大相径庭。我们知道虚数单位代表着周期，它可以非常大，相对于实轴正半轴的单位1来说，虚轴正半轴的单位可以认为是无穷大（决定于的大小），而实轴负半轴又是这个无穷大的平方那么大，以及虚轴负半轴又是这个无穷大的立方那么大，这些都是“单位”，但是一个比一个大得多。所以实际上复平面按照其实际数量来说，并不是像它看上去那么方方正正的，而是遵循渐开线的原则逐渐扩展的，而且相邻两个维数之间构成的单位方格也不是方方正正的，而是扭曲放大的。正如你所想象的，这样的图像“一点都不圆”，复制若干次旋转不同角度之后就像是星系中的多个旋臂构成的漩涡一样。

那么，到底是什么使得这个复平面显得方方正正，而中心的单位圆显得“圆”起来的呢？是观察者。比如虽然虚轴正半轴的单位比实轴正半轴长的多，但是我们知道，

所有轴的正负半轴，都符合，

也就是所有轴的单位对于虚数单位同余为0。既然如此，我们也不难想到，不仅仅是轴，复平面单位圆上的每一条半径，模上虚数单位的结果也必须是0，不然圆周上就会有“毛刺”，圆就不圆了。

所以，由此我们可以看出这样一种现实，从单位圆的实轴正向开始，辐射出的每一条“半径”，都符合

那么，我们就可以把这些“半径”的长度都列出来，

而

这就构成了半径的集合。在第一象限，半径的实际长度就是1到的自然数长度，这些长度显然都可以模1。但这不符合，

于是我们把所有一周的长度都乘以虚数单位，那么所有这些长度都可以模，这时候我们得到这些“半径”集合为，

这相当于把先前的单位圆逆时针旋转了90度。以下我们用这个旋转了90度的单位圆进行讨论，以保证这些半径模都等于0（避免旋转90度之前，的情况），而且要知道四个象限的情况是中心对称的，由此我们只需要研究第一象限即可（旋转前的第二象限）。

可见在这个结构中，相继两条半径的长度关系就是

的关系，而它们在平面之中又都没有而造成的毛刺，所以复平面上的单位圆实际上就是若干倍虚数单位的长度所坐落的地方，那些半径具有和实轴正半轴的不同的夹角，其实就对应于实际长度的倍数和虚数单位之间的比值。

最接近这一的图像就是一个螺旋楼梯：第一级台阶（半径）的长度为一个虚数单位，第二级台阶有第一个级阶两倍那么高。因为两倍的高度，它的总长度，就相当于第一级台阶长度的两倍，但是这两倍被折叠在一起，不是使得台阶变长了，而是把台阶垫高了；第三级台阶则是把三倍第一级台阶的长度折叠了两次，成为第一级台阶高度的三倍……

在垂直地面的方向上看，台阶都一样长，只是具有和初始方向不一样的夹角，但实际上若能从侧面观看，台阶一级比一级高，呈等差数列，整个高度分四个部分，第一部分高度为1到虚数单位，第二部分为虚数单位到，第三部分为到，第四部分为到。

现在我们要求的不是别的，而是台阶构成的单位圆的周长。因为四个部分是一样的（所以才叫单位圆），我们只需要求第一个部分的长度（也就是），然后乘以4（也就是）即可。那么，我们如何求四分之一的圆周长度呢？

显然我们只知道虚数单位的大小，并没有给出周边长度的信息，但这里的结构给了我们提示。正如我们在求自然数全加和的时候，结构决定了即便无限仍然可以用无限对无限去求出确定的结果。

若要求周长，就要求出每一个半径圆心另一侧的“端点”的长度，可是这个“端点”的长度怎么求？首先我们先看半径，对于第n层楼梯，其长度为，那么垂直它的“切点”的相对（于1的）单位长度就可以写成，

这个长度的真实单位是半径，所以实际的长度为，

可见这也是在本地消去虚数单位的影响的一种实践，这使得半径的大小和弧长的关系脱钩了。进一步来说，而若要构成切线，则需要再加上2个点，分别放在切点两侧，这样的话长度就变成了，

也就是一个切点的长度，加上两边两个单位长度。而这个切线的长度是在切向上，我们需要的长度不是在切向上，而是在径向上，于是我们还得对它取倒数（实现正交关系），求相对长度，也就是得到，

由于在加2个点的时候，我们引入的是相对关系，所以这个径向上的长度又必须依赖一个基准，而这个基准又只能是前一个点的切向长度（圆周的弧上无全局单位，只能走一步看一步），所以到当前点的长度，则需要把先前所有的相对关系都计算到里面，才能得到这个点的实际长度（第一项不是相对关系，它只能是半径本身，所以全乘部分不包括半径本身，半径必须单独乘出来），

而从到所有这些点的长度的总和加上最初的基准长度也就是半径，就是四分之一圆周的长度，

现在我们把所有的长度都缩小倍，

把项数改成无限（把数量模糊掉）就得到了纯粹的半圆周率，

把它展开，就得到，

这就是圆周率的由来。

有了这些认识，就不难理解一些问题，比如圆周率的超越性。它的结构要求它，显然是不可能出现循环的。它的精度在于“项数改成无限”的那一步，求和上限的虚数单位实际上就是求和的项数。或者说将这个四分之一圆周划分的份数，或者楼梯的阶数。随着这个阶数的增长，整个圆周的划分就越来越细。

现在让我们看看圆周率的精度和划分次数的关系，比如

如果我们发现某个圆周率的数值

那么，我们就可以说，在这个系统里面，

当然现实的情况中虚数单位不会这么小。但这给了我们一个获取本地空间虚数单位大小的方式。比如我们知道光速是一种虚数单位，它的物理数值为299792458m/s，但我们不知道米和秒之间的关系。如果我们能通过测量圆周率知道这个虚数单位的数学数值，我们就能得知米和秒之间的具体对应，就可以把米和秒彻底统一起来了。

为了说清上述圆柱到底是什么样子的，让我们求它的“体积”也就是总量。

我们知道半径，

也就是旋转楼梯的每一个台阶的长是10个单位。然后分为四个阶段，第一个阶段（第一象限）的总数，

第二个阶段（第二象限），

第三个阶段（第三象限），

第四个阶段（第四象限），

总量，

可见这是一个极大的数字，而这只是第一个周期而已。

回到，

可见各项的大小是不均匀的，第一项的数值为1，第二项为1/3，第三项为2/15，第四项为2/35……正如我们求得这个结果的时候，是带着虚数单位的，也就是说，它原来的样子是，

所以在的前提下，这些有限倍数的项可以认为是等大的。但如果真的要在1而不是的基础上来看这些项目，显然符合从大逐渐变小的规律。这也隐含了，为什么用正多边形拟合圆的时候，会出问题。因为本质上这些“阶梯”是底边长度不同的三角形，它们不可能构成真正的正多边形。所以宏观尺度下的完美的圆，在半径长度和其对应弧切线长度相接近的时候，就会退化成不规则的多边形。所以，简单的假定圆是完美的，实际上只是一种由巨大的数量差异造成的幻觉。

有了也就有了和，也就有了角度。这样的话，我们就可以定义角度这个概念了。

比如角度，

观察，

如果认为，

这显然是不对的，因为这样就把当成了半径。回到

若要乘以，也只能在1的基础上，

对于起点1来说，它实际上相当于

也就是说，若要包含第一项，则应当写成，

展开为，

由此可见，若要乘以，就得和乘以一样，

其中，

相当于把切线的长度变为为原来的倍。也就是说，对于做比例变换，实际上改变的是切线上点的切向上的长度的比例。这就是所谓的角度。而不是改变了半径的长度。

最后一个问题，欧拉公式，

到底要说明的是什么。从欧拉函数的四个特殊值可以看出，

可见这个函数的作用是将角度映射回它原来的数值。在螺旋楼梯的例子中，我们用虚数单位的倍数搭建楼梯，并构造角度，角度是一系列先前角度微分的累积。现在我们将这个角度也就是角度微分的累积，还原为对应的虚数单位的倍数。我们知道，

具体观察，，

解析这个方程，其中

也就是，

是把以虚数单位为半径，四分之一圆周的弧的长度当成周期，取倒数，也就是获得这个周期对应的最小单位（如果为虚数单位，最小单位为），然后把这个单位乘以，也就是当前的阶梯序号即当前阶梯的虚数单位重复的次数，然后整体求倒数，就得到当前垂直圆面的长度单位，而这个单位仍然是相对单位，需要基于所有的先前单位的比例关系才能获得实际的长度，一直到单位1为止。而这个比例关系的总体效果，就是，

所以，从第一个单位1开始累积，此后是那些和半径为虚数单位的四分之一圆周有关的弧长微分的累积，最终构成了四分之一圆周的“高度”，也就是虚数单位。总结来说，如果先前求，求的是从到的过程中，阶梯的圆型底面的四分之一圆周的弧长；那么关于自然对数的次幂，求的就是到过程中阶梯垂直圆型底面的高。

正如先前我们用，

表达任意角度，我们也可以用

来求任意角度对应的“高度”。所以这个高度就可以写成，

由于这个高度包含虚数单位的奇数和偶数次项，那么也就自然出现含有虚数单位和不含虚数单位的两种情况，而这两者，就分别用正弦和余弦表示了。

其实这时候，才真正创造了实轴和虚轴上的有效度量。也就是说，先有了虚数单位的累积，然后根据虚数单位的4次幂周期，构成了复平面；然后，虚数单位半径的等差数列，构成了实轴（正半轴）到虚轴（正半轴）的角的度量，以角度为基础，又构造了从实轴（正半轴）到虚轴（正半轴）的高度的度量，而高度度量可以分解为虚数单位的奇数次和偶数次，而奇数次和偶数次又可以映射回到四个半轴，这又构成了四个半轴的长度的内化刻度的度量。也就是说，

里面的和，说的根本不是复平面上的事，而是垂直于和轴的轴上的高度。高度的涉及虚数单位的部分放在了轴，不涉及虚数单位的部分放在了轴。这样的话，高度和不涉及虚数单位的，以及涉及虚数单位的，就构成了三个维数。这个高度，在先前分析的结构的时候，只是作为楼梯的高度，一个辅助求切线单位z长度的量存在，而并未直接体现在的结构之中，而在中，则以

体现了出来，这里的就对应了

中的，两者的位置互为倒数，是因为它们最终具有相互正交的指向。所代表的向量无论如何都在圆面之中，而代表的则必须垂直于圆面。由于两者垂直，可以认为，如下关系成立，

也就是说，角度对应阶梯的序号。

由此就构成了坐标，

这样一个三维关系。我们知道，

以为半径的螺旋楼梯，转了一圈，从升到，而第二圈会从升到。虽然根据周期性，它呈现出的摆动，但是本质上，高度仍然是幂次的而不是乘数的。也就是说，两个周期的高度不是等距的。若要等距，我们就得把它取对数，这里肯定是自然对数，

由此可见，若我们对取对数，并除以的对数，我们就可以得到在方向上的等距螺线，而且，

这就得到了我们想要的等距螺线，而且我们知道角度对应方向上的4个单位。

在这里总结一下，以上分析，都是基于“单位”的。计算圆周率的时候，我们考虑的是做一个单位来理解，而它的倍数则作为某种比例缩放来理解。同理欧拉函数，也是用弧长来作为单位的，其它弧长则是基于这个单位的比例缩放来理解的。若是不从单位去理解，而假定1为单位，那么像是

中多个相乘的情况就无法解释了。所以，首先出现的是，

然后才是

在这一类问题上，1不是单位，以及才是，这是非常反直觉的认识。

回到问题本身，要知道我们现在讨论的是一个数，它很大，是观察者所提供的虚数单位的若干倍甚至若干次方，但是它体现出来的却不是一个数，而是具有三个分量的向量。这三个向量可以构造一个三维空间的基。不难想到，如果这个数本身或者是观察者提供的虚数单位发生变化，这个结构也会随之变动。而这种变动若能保持某种规律，观察的结果就完全可能是一个在复平面中旋转的圆周运动，或者在复空间中旋进的螺线。

而这只需要观察者或者所观之物其一（或者两者共同）出现数量上的变更而已。我们假定观察者自身不变，所观之物，也就是这个数不断增长（也可以认为是所观之物的增长快于观察者的增长），增长或者负增长都可以，那么我们在这样一个三维空间之中就会看到一条不断旋转前进的螺线。

举一个具体的例子，你认为地球围绕太阳转吗？当然如此。但是，从上述角度来说，也可以认为它并没有围绕任何东西旋转，只是承载它的空间，在增长而已。至于太阳对地球的引力，也可以仅仅认为是空间增长的速率，靠近太阳的和远离太阳的不同，而地球所在空间最终选择了一种速度，以平衡和适应太阳周边空间增长的速度而已。我们把地球想象为一个质点，太阳是一个质量更大的质点。

我们暂时不考虑太阳巨大的质量产生引力的问题，这超过了当前讨论的范围。只考虑地球绕着太阳转的事实。我们把太阳当作指数螺线的中心，那么距离太阳为的轨道上，我们就可以认为那个轨道上布满了振动，而那些振动就是一大堆都具有，

形式的“数”在增长的过程。那些“数”不必在那个轨道上，或者说无所谓在哪，而那些数，用为虚数单位去观察，它们就构成了轨道。它们也根本无需“旋转”，只是因为不同圈层的旋转速率不同，而显示出切向上的相对运动。那些个“数”，就构成了那个圈层的空间，或者说轨道。而那些不同圈层的数，就构成了太阳周围的整个空间，或者说所有的轨道。地球在地球的轨道上，也就是说，它被那个空间承载着，或者和那个轨道所对应的空间能够进行交互。既然运动只是一个不断增长的过程，那么很自然的，增长就一定会达到某一个程度，而那个程度的数量，对于具有无限可能性的宇宙来说，也显然是存在的。就像随着数列长度的增加，等差数列或者等比数列，一定会超过某个极限，而那个极限数量显然也必须是存在的，因为一切数量都是存在的。

若是增长还没有到达那个数量，就只是时候不到而已。而那个数量，在前面的讨论中已经说过，它就是三维空间的某个位置。所以说，太阳周围的振动圈层，承载并和地球交互，直到振动增长达到某个数量，而那个数量显然也是存在的，只是目前还没有到达而已。

既然虚数单位可以表示一个极大的数（超出可数范围），那么它的倒数就可以表示一个很小的数（被认为是0）。考虑，

这个数，它也可以写成，

这里就成为某种单位，比如我们认为它指的是时间单位，那么这个指的就是我们可以区分的最小时间单位，而那个更大的导致的更小的都被认为是一样的。由此来说，不管怎么变化，

也就是一个周期的长度（的对数）都等于4，所以这样的话，我们就用这种结构同时获得了最小单位时间和单位长度，最小单位时间就是我们选择的，单位长度，我们指的是在z方向上的单位长度（取对数），它就是4；而完成一个最小单位时间对应的长度（取对数）就是四分之一个单位长度，也就是1。最小的单位时间，不变的单位长度，两者相比，我们就得到了最大的单位速度，也就是说，这个速度就是，

如果不取对数，那么四分之一周期完成的长度就是本身，结果就是，

不难发现，这就是数学意义上的光速。在z方向上完成单位长度1（或者），用时为最小时间，这个结果就是光速。同样的单位长度，若是用时更少，也因为更大的虚数单位和这个最大的虚数单位不可区分，它的倒数也无法更小，所以结果的速度，就不可能超过这个极限。所有超过这个极限的长度和时间的比值，最终都会被认为就是这个极限。由此来说，并不是没有超光速，而是超光速的，被虚数单位的周期性效果屏蔽了。更大的虚数单位体现为更大的结构，而不是速度。

我们究竟干了什么？我们其实什么也没干。我们只是观察了一种数量的增长过程，我们是有限的，我们自己的观察能力限制了观察结果的上限。那些超越上限的数量增长被我们的能力屏蔽掉了，它们用其它方式表现了出来。另外我们自身的限制，使得这种数量增长具有了“几何意义”。