关于圆周率的新认知

从自然对数底的泰勒展开，

可以得出的展开式，

它可以被认为是，以0为周期的单位1，以1为周期的单位1，以2为周期的单位1等所有自然数为周期的单位1分阶段合成（体现为阶乘的倒数）之后全加的结果。它显然也是一个单位，因为它的定义为，

而，

可用于它的数值计算，但由于计算中可取的项数有限，所以最终和真实的的大小必定会有区别。极限形式可以被认为是一个不会停止的动态过程，而其展开式则意味着过程的某个阶段得到的数值。用其展开式获得数值，可能会在某个更高的要求的前提下引入误差或者说失真。但若要计算数值，这个失真几乎是不可避免的。只有当可计算性被无限保证的前提下，引入的误差才有可能被纠正。

考虑关于圆周率的一个例子，

对其分析，可以抽象出，

类比于，

我们可以导出的近似值，

的形式，但经过计算发现，

误差占约为千分之三点六。这个误差对于圆周率和自然对数底来说都是不可接受的。暂时不理会自然对数底，只看圆周率的一半，

虽然，

并不能真正替换，但它却给出了一个很好的启发：如果只考虑

而不是，那么的形式就非常接近于1/2：

类比于，

若p类比于q，则类比于h，

所以可以认为是某种形式的2，那么就是某种形式的4。那么“某种形式”到底是“什么形式”？我们不看作为某种形式的2，只看作为某种形式的1，而它则是由“类1/2”构成的“类等比数列”，正如首项为1/2，公比为1/2的等比数列的无穷项和为,

而这个“类等比数列”，产生的结果小于1，具体为，

这个数值比一半(0.5)大一些，比三分之二(0.667)要小。

我们究竟应当如何理解？

首先我们先回到圆周率，可知，

此处我们引入复平面，

im

i

-1 1 re

正好可以对应于图中深红色的部分，其中第一项的2指的是和两个部分的长度。第二项的系数2，则是圆弧部分的一半的两倍。方括号中的部分，指的就是圆弧部分的一半，也就相当于的部分，但不是1，而是。那么这个部分，

具体应该怎么理解呢？

一个周期从0开始，顺着箭头首先走过深红色的右侧部分到达+1，然后经过圆弧的部分到达-1，再顺着箭头回到0。从+1到-1的过程，由于周期长度到底是多少，是任意的，所以这中间的长度到底是多少也是不知道的。但是，从1开始，先要达到虚数单位也就是周期长度减去1的平方根，然后再从到达周期长度减去1。这个过程不是一个均匀的等差过程，而是一个在对数前提上均匀的等比过程。也就是说，某个微小的量从1开始，不是不断累加，而是不断自乘，先是达到虚数单位，然后再达到周期减1，

如果对这个过程取对数，就可以得到微小变化累加的表达式，

这是这个过程的一种描述方式。另一种描述方式，把-1到1的增长过程做线性的理解，我们不知道总长是多长，但是我们可以把总长分成3部分或者说大于1的奇数个部分，一部分是已完成，一部分是将完成，一部分长度未知。未知长度占三个部分的比例可能有各种情况，已完成和未完成占的比例总是奇数分数中的最大偶数分数，剩下的就是未知的比例。也就是说，已完成的比例，未完成的比例，以及未知部分的比例分别为，

三者的和为整个部分，

由于未知部分占比具有全部可能性，虽然它只占1份，但是分的份数不同，占比也不同，正如我们在构造自然对数底的时候用阶乘的倒数统一了到阶乘数为止的所有单位，我们也可以用同样的方式，统一所有的已完成部分的比例。也就是，

正如我们把所有单位都加起来构成一个单位，我们把所有完成部分的比例加起来构成一个完成的单位，这个完成的单位加上已经完成的一个单位1（深红色箭头），就是全部完成单位的一半，

已完成的和未完成的被认为是等价的，所以全部被认为是已完成的比例的两倍，

让我们尝试一下用语言描述这个方程：

整体的一半表达为多重分辨率。如果把整体分成2份（加上未知部分作为1份一共3份），取其中的1份，叫做一半；如果把整体分成4份（加上未知的部分作为1份一共5份），取其中的2份，叫做一半；如果把整体分成6份（加上未知部分作为1份一共7份），取其中的3份，叫做一半；如果把整体分成8份（加上未知部分作为1份一共9份），取其中的4份，叫做一半……把整体分成8份（加上未知部分作为1份一共9份）取其 一半，再把这一半分成6份（加上未知部分作为1份一共7份）取其一半，再把这一半分成4份（加上未知部分作为1份一共5份）取其一半，再把这一半分成2份（加上未知部分作为1份一共3份）取其一半，就得到了一个可以被分成份（实际上是份）的整体的一半；还可以加上一个可以被分为份（实际上是份）的整体的一半，诸如此类。当趋于无穷，把所有可以被分成份（实际上是份）的那些整体的一半加起来，就得到了，可以被所有不同的未知部分占比的形式的二分方式分成两半的一个整体的一半。也就是任何带有未知部分的整体的一半。把它乘以 2 倍再加上 2 ，就得到整体本身，这个整体就是带有未知部分的任何可二分整体。

回到原题。未知的占比究竟是多少？因为未知占比不确定，所以未知的部分并未被计入到总量之中。这种算法也使得未知的部分不影响总量的结果。但如果一定要计算未知的比例，在这种算法中，应当为，

（接近于空气中氧气的比）

现在让我们整合两种划分方式，从1到-1，也就是从1到，再从到，对用于从0到再从到，把两种划分方式映射起来，就是

根据前面的分析，

如果是均匀的刻度，

如果还要算上k，

也就是说彼此相乘的微小变化单位为。由上述分析可以知道，圆周率并不是什么自然中的常数，而是我们认识世界的一种方式，在数学上的体现。

回到复平面，

im

i

-1 1 re

一个实际的周期并不是从1开始的。我们习惯于从1开始，对应于角度为0，到达i，对应于角度为，然后到达-1，对应于角度为。这并不是真正的线性增长。线性增长是从0开始，先到达1，然后到达总量的一半，然后到达-1，再到达0，也就是回到开端。从0到1以及从-1到0，对于角度而言是没有映射的。而这个0到1以及-1到0被认为是圆周的半径。当然，它也确实是指数步进的单位1，而指数若能够步进，则至少要使用自然对数底（因为纯粹的1的任意次幂都是1），只有当认为虚数单位就是指数步进刻度的时候，才会有，而如果选取最小的步进单位，

那么从1到-1的步进步数就是

总的从0到0的步数就是

可见，

就描述了从角度到周期中实际数值的映射过程。0度的角不对应于起始的0，而是对应于1，不对应于终止的0，而对应于-1。其中0到1和-1到0的部分是没有角度对应的。另外，这是单程周期，而如果需要再从0回到-1，回到i，再回到1，再回到0，则需要另一个相反的周期。复平面上的一个单位圆，对应的是过程的一个来回。

你认为的复平面上的单位圆 实际上的复平面上的单位圆

语言难于描述这个过程，让我们用图像再描述一遍，

我们通常说的一个角度为的完整周期就是由上面图中所示的两个过程复合而成。从绿色的圆点出发增长到1，开始圆弧过程到-1，然后横向走回到0；此时已经完成了一个周期，然后从绿色的原点出发，顺着蓝色箭头到-1，再进入下半段的蓝色圆弧，退回到+1，然后横向回归到绿色的原点。这里的横向红色的从0到1，从-1到0的过程，以及蓝色的从0到-1，以及从1到0的过程在角度变化的过程中并没有显现出来。所以即便是平滑的线性过程，角度的变化也没有包含4个横向的阶段。如果按照线性过程理解，角度变化过程缺没有考虑红蓝两色横向的4个单位1，只考虑了金色部分对应的过程。金色部分对应的过程看上去是一圈，而这一圈实际上是“去了又回”的一圈，而不是我们常说的，从0到下一个0的一圈。从0到下一个0的一圈，红色的路径就已经实现了。而连续发生的从0到1到虚数单位到-1到0的过程，则应当按照紫色的路径来实现。紫色路径的周期，只有金色路径周期的一半。

周期为的金色过程描述的是指数增长和指数下降的周期过程，而周期为的紫色过程只包含了指数增长或者指数下降的周期过程。但无论哪一种，根本上都不是线性过程。根据上面讨论的圆周率的含义，我们知道这个过程可以是自发发生的，但是周期的大小则是观察者决定的（所以才有未知的部分占比不确定的问题）。既然周期大小是观察者决定的，那么自发发生的过程也可能只是观察者自己的选择，也就是说，人择原理：观察者选择了那些自发增长的过程，并把这样的过程理解为圆周运动所对应的圆周率，而不是二倍的圆周率。而观察者理解的二倍的圆周率，则是他选择了自发增长的过程和自发下降的过程的交替过程。总结一下，存在两种都叫做“周期”的概念，周期指的是“去而又回”，周期指的是“周而复始”。“去而又回”的本质是“升降交替”，“周而复始”的本质是“单增”或者“单减”。

当未知长度的单位1和已完成长度的单位1之间的比例不是1:1而是其它的数值的时候，不难看出，这时候的圆周率就变成了“椭圆周率”。你可能要说，这不是椭圆积分吗？对了，这就是椭圆积分。但是我们不要考虑什么椭圆积分，也就是“术”，而是从“术”去探寻后面的本质，也就是“道”。比如椭圆的周长为啥没有初等形式？

不难理解，是写不出初等形式的。这里的初等形式就是不用什么无穷展开式的形式，就能表达的，无穷展开式也可以被认为是积分的计算式，这就必然引入高等数学的微积分。对于自然对数底e，我们可以写一个简单的极限形式，但是上面分析可以看出圆周率无法写成简单的极限形式。可是为什么呢？为什么必须写成无穷展开形式？这里有一个关键的原因，就是它不是等比数列，而是“类等比数列”，也就是说，它并不基本。正如分析中看到的，它的每一个细节都是重要的，不可忽略的，不可压缩的，数值上不重复的。这些细节必须都如其所是的展现和应用，才能得到预期的结果。比如我们可以考虑一下，“世界的深度”问题。

我们知道，已知的物理世界中的最小长度单位是普朗克长度，其数值约为

小于这个长度的长度数值是没有意义的。我们想知道的是，圆周率的精度要达到多少才能满足精确的描述到这个长度而不出错。

根据奈奎斯特定理，只要精度可以达到这个长度的一半，就不会出错。也就是，

比如现在有1米的长度，它含有多少个“半普朗克长度？

因为圆周率的本质是无穷分辨率二分法，那么我们要做的就是给出1米要二分多少次才能实现的倍，也就是，

也就是把1米二分117次就能到达的尺度。而要满足从1到的所有分辨率，则

中的，

也就是算上第一个1一共118项。用WallisProductForPi程序计算，

=3.1415926535897932384626433832795028837117542690193978304300692906910722764246484779868671982472968461145914502030480042149194000360931827741286277693646703759569539131095642059921717455856699298162590746974495626887754567548573247048

Iterates = 118, Digits = 233, Duration = 00:00:00.0069917

算上最开始的3，一共234个十进制位。也就是说，一个半径1米的圆盘，若要精细的计算其周长和面积，用上面给出的234个十进制位的圆周率，就可以精确到普朗克长度的一半，也就是精确到物理世界的最大分辨率。据查，已知人类可观测的最大长度为

那么最大和最小尺度之间的比率为

将204带入WallisProductForPi，得到，

=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944587513348308572560229674272821127637787898485165318568647570710675728761324048835622098710634183609348219866616974523465089020053331090156730307545037331007369768879293569304740977253050027216660075271319160441643206305077047929875585522104215303330035764504506317993204269519538392068950265924625668981683394944286112129077815440181088261161977466484203656470088070977234403307910403981

Iterates = 204, Digits = 448, Duration = 00:00:00.0088822

算上最开始的3，一共449个十进制位。也就是说，从可观宇宙的最大长度到微观世界的最小长度，用449位十进制的圆周率就足够精确了。