# 关于自然数全加和的另一种算法

我们熟知自然数全加和，

推导过程如下，

这个解法并不难，非常容易看懂，但是并不容易真正理解。正负交错和无穷项计算，只需要保持方程的形态，就可以“预知”结果。但是这到底说的是什么意思？比如和的结果相等，这个数值显然等于二分之一，但是若为有限项，则它只能等于0或者等于1，那么有限项和无限项的差别到底是什么？或者说，所谓“无限”，到底是什么意思？

现在让我们看一看这个问题的另一种解法，以便于了解“无限”的含义。

考虑数列和，

把它乘以一个不定的数量，先记住这件事，并且在最后要记得把它除掉，

这个数列到底有多长，是不知道的，但是我们知道一件事，就是若它可以有确定值，则它必须有周期性。它有确定值吗？因为不确定，所以它并没有确定值，但是是我们后来加上的，已经“吸收”了整个序列的不确定性，那么就可以有确定值。我们先假定它有确定值，也就是我们要验证得到的。既然有确定值，也就是有周期性，那么它就可以写成一个模的形式，或者说，用一个“圆”（具有周期）来描绘它。

具体来说，我们做一个由格子构成的直方图，第1列1个格子，长度为单位1，高度为单位1；第2列2个格子，长度为单位1，高度为2；第3列3个格子，长度为单位1，高度为3……现在的问题在于，这个直方图必须无限画下去，因为要实现。那么这个直方图怎么画？

答案是，没法画，我们终究只能截取到某一个。但是，别忘了周期性，也就是说，哪怕这个直方图要任意的“无限”画下去，它最终也有“首尾相接”的时候。而一个直方图如何实现“首尾相接”呢？很简单，就是把它首尾相接。也就是说，把画它的这张纸卷起来（哪怕无限长），让第1列格子和最后1列格子接在一起，就构成了一个螺旋楼梯形状的纸筒（类圆柱）。显然你看到了，这里出现了“升维”操作，我们把二维的平面上的直方图，升维为一个三维空间中的纸筒。之所以这样做，是因为我们就是这样定义维数上升的：二维中的“无限”在三维中是“有限”的。

这样一来，我们就得到了在三维空间中，这个直方图的形态。若把它的侧面都补全，它就是一个圆柱体，若只考虑垂直侧面的底面，它就是一个圆。

我们继续考虑这样一个类圆柱体，看看它的特性。

不难写出它的侧面积为，

这个数是多少很成问题，但还有更成问题的，这个几何体的高是多少？因为最终，高度就是无限的。这样一个侧面积和高度以及体积都无限的圆柱体，我们怎么才能知道它到底是什么样子的？

我们用的是单位长度1为格子的长度，高度从1开始递增的方式构造了这个直方图。我们也可以把高度的单位换成,让去吸收高度的不确定性。这样的话虽然和都是不确定的（而且可以说非常大），但是它们的不确定性都是一维的，于是可以认为，

也就是两个无穷大可以认为是相等的，也就是说它们的不确定程度都是一样的。这时候，我们就可以大胆的认为，这个圆柱体的高，就是它两端数值的差，同时也是底面圆周的周长。

这个圆柱体的高有两种理解方式，

是因为，

对于无穷来说，0和1在这里并无本质差别，由此求得的是基于奇偶（0或者1）不确定性高度误差的上下限的。于是就可以写出，

分别解方程，

以及，

可见全部的取值为。为0和1都无法构成直方图以及圆柱体（但不代表不能构成别的东西，也就是说，结果可能是多值的），暂时不需要考虑；此时两种情况就有两种可能性，一种是2，一种是3。也就是说，虽然和都不确定，但是如果它们都是某个不定量的2倍或者3倍（“逻辑或”对应于“相乘”），则可以建立圆柱体的高就是侧面积这种认识（无穷大都相等）。那么我们就可以认为，

也就是说，构成直方图，且允许直方图卷曲成类圆柱体，需要的是至少为6的倍数，也就是模6等于0。此处要进一步考虑不确定性（整数的奇偶性），则单位1需要缩减为自身的一半（后面有详细说明），那么必须为12的倍数，也就是模12等于0（我们也可以考虑前提下的所有两两组合，以及三三组合等等，结果仍然是6的倍数）。

回来看圆柱的底面，由于,它其实已经是一个圆面了。那么它就符合由实数构成周期的情况，也就是符合，

的虚数单位的定义，也就是，

由上述分析可知，“无限”到底是什么？就是主观上的“超越限制，不被限制”，或者客观来说的不确定性。这种不确定性在数值的差异还比较小的时候，并不明显，当数值的差异极其巨大的时候，却体现为某种确定性。这有点像大数定理，当数量极为巨大的时候，事件的概率分布情况总是接近于正态分布这样一种确定的分布。

另外，从这个结果来说，可以简单的抽象出一个公式，

其中1/2是用来调整整数的奇偶不确定性的，这一点会在后面讨论。

所以回到最初的问题，到底什么决定了

答案是，1和-1反复出现的次数，它是一个巨大的数量。体现出来的是巨大数量的奇偶不确定性产生的确定性。

我们从这个研究中到底得到了什么？

确定微小而不确定数量的大量的不确定性，是如何构成最终的确定性的。毕竟我们不知道那个到底是多少，这个大量的数量是不确定的。但是构成这个数的排列方式是确定的（比如奇偶相继），而最终产生的模量（余量）又是确定的了。所以简单说，并不需要追求数量上的绝对的确定性，也可以通过维数的升降来获得某种确定性。

自然数全加和，其实就是黎曼ζ函数的的情况。现在让我们看看其他情况，已知，

这是黎曼函数。我们先前讨论的是，

此处列出几个其它参数对应的表达式和数值结果，

在计算的时候，我们首先把单位数量做成直方图（它是二维的），然后将直方图卷曲为三维的类圆柱，然后把这个二维的面积，或者说一维的长度（因为每个直方图竖条的底边都是1，所以自动从二维降到一维），作为类圆柱的长度（高度差），也就是说，从低维的度量构造了高维的度量。

现在我们考虑，如果也做直方图，有没有可能通过卷曲从低维构造高维的度量。不难看出，如果一定要这样做，那么它的周长（或者侧面积）就是，高度就是1，结果的奇偶不确定性仍然给出，那么可以写出的是，

单位1缩减为原来的一半，那么结果必须是2的倍数，根据虚数单位定义，

也就是说，

可以测试一下，考虑到，

计算，

看来结果是正确的。也就是说，这个类圆柱的高度为。而这个全部来自于不确定性的贡献。那么再考虑，

若不考虑不确定性，这个侧面积应当等于它的高度也就是，

套用公式，

也就是说，用低维度量构造高维度量的方法是可行的。虽然维数之间具有数量上巨大的差异，但是低维的某种模式，在高维上总有某种有意义的映射。

再看一个，

这个数值被认为是类圆柱的高度（差）或者面积（差）或者体积（差），按照先前的做法，可以列出两种情况，

分别计算，

还有，

确实有整数数值得以解出，但是看上去都“不太好看”，不太像是升维的结果，那么让我们看看3次方也就是“体积”的情况，

如果考虑多值，则构造1维，2维，3维的三种情况，就存在如下的

一共6个结果我们只选择四个结果，

其中0是绝对值最小的结果。也就是说它升维之后获得的“体积”（升维后有意义的度量）最小可以为0，但是我们无法写出，

因为0不是有效的虚数单位的取值，而只能写出，

另外如果根据，

就可以得到，

也是可以接受的。这体现了此类函数的多值性。

综上所述，我们仅仅使用了升维的概念，来处理无限多项相加的问题，就得到了极为简单的算法和较为“靠谱”的结果。另外我们发现在这个前提下，结果也是多值的，具体是多少，则要根据选择的视角来决定。

如果我们进一步考虑黎曼函数的非平凡零点问题，也就是黎曼猜想，

用什么样的复数才能让自然数次方倒数的全加和卷曲升维之后能得到更上一个维度上的0值，也就是实现完整周期，或者模运算没有余量。

首先让我们敲定，代表不确定性的是怎么来的。

对于整数来说，它或者是奇数，或者是偶数，那么这个数的概率数值就是奇数加上偶数，各自一半概率加起来再模单位1的结果，也就是说，

所以对于整数来说，在概率基础上模上另一个整数周期，余量最可能的情况就是单位1的一半，也就是。

由此不难理解，

由此可知，见到就可以不管它是奇数还是偶数，于是直接说，它是一个自然数（非负整数）。黎曼猜想中，

是作为指数存在的，其中自然也可以被认为代表了自然数本身（在无穷前提下不知道奇偶而体现的模周期余量）而且它还是这个前提下的自然数单位，就相当于先前说的将单位1减半，以符合概率要求。此处不同于，那么它就对应于余量的实数部分，而对应于余量的虚数部分。这个余量不是出现在结果中，而是出现在指数上。指数上的余量使得结果中的余量为0。

所以实际上，我们并不是要证明什么平凡零点还是非平凡零点，我们实际上要证明的是项的数量，就是虚数单位（的倍数）。

也就是说，如果方程

有解（显然有解），且，也就是解在复数域（修正：不是完整的复数集合，而是复数集合中实部为自然数的子集，虚部可能也只是有理数，此处看不出虚部是否必须为实数，后文也需要此修正）里面，那么，它就一定是

而本身就是一个整数，它只是比较大而已，那么这个表达式就可以写成

也就是

通过重新安排实数部分和虚数部分的比例关系，我们还可以把它写成，

也就是说，实数部分完全剔除虚数单位的倍数，而这时候，它就是一个有限的整数。而任何有限整数都只能是偶数或者奇数，也就是说它在无限域之中的映射就是余量，

我们总可以保证，

那么，

所以余量

所以，

代回原式，

而这种

的形式，实际上就是最开始的，

在虚数单位本质为整数前提下的另一种写法，所以无论如何，所有的解当然都可以写在

里面。其中就代表了实数部分奇偶两种情况（也就是前面说到，它代表的是整数），而其它余量被合并到虚数部分的比例常数里面了。要意识到虚数单位本质上就是一个比较大的整数，它要大于项数也就是大于最大的。所以它无法在模运算的结果之中表达出来。但是如果给出更大的区间，则可以获得有限的数值。既然如此，我们总可以通过有限次的分裂和重组将虚数单位表现为一个对于取模得到的更小的余量，以及一个不一定为整数（大多数情况下为有理数）的倍数和虚数单位的乘积。

所以，函数的平凡零点，

显然也在

之中，只是

至于如何将换成的形式，决定于和的关系，这里就不具体推导了。

若还有其它解，当然也一定在，

范围（也就是由整数构成虚数单位的复数）里面，只是需要找到对应关系罢了。由此而言，黎曼猜想试图告诉我们的只有一个很简单的原理：虚数单位是实在的，它具体是多少并不重要，它只是总是大于你能想象的最大的数值而已。

至此可以推断，函数的非平凡零点，当然会全部出现在

这条线上。若确定了虚数单位的大小，则实际上平凡零点也一样在这条线上。不仅如此，所有此类方程的解都在这条线上，因为这条线就是在给定虚数单位（为整数）大小前提下的全体复数的集合。

所以，这个问题应该反过来理解：那些在上的平凡零点，才是方程的特殊解（非平凡零点），而所谓的非平凡零点（也就是在上的），才是普通而正常的解。

最后，让我们讨论一下数集的由来。

从正整数开始，首先，有1，2，3……这些正整数，用来计量事物的个数或者事件的次数。然后，有了一定的数量之后，就可以创造负整数，比如-1，-2，-3……这些负整数可以对应于，比某个给定数量少多少，或者还差多少就到达给定数量。比如给定数量为10，那么-3就对应于7；给定数量是变化的，那么负整数对应的真实数值就是变化的，所以若正整数可以是绝对量或者相对量，那么负整数只能是相对量。负整数的出现，也就是比给定数量少了多少，进一步定义了0，也就是比给定数量不缺少任何数量，或者说，就是给定数量本身。比如说，比给定数量10，不缺少任何数量，那就是10本身，或者说比10少0，就是10本身。现在有了正整数，负整数以及0，这就构造了整数集。我们可以继续考虑它们的关系，比如任何两个整数相比较大小而只基于彼此的大小作为单位，却不基于共同的单位，比如3和7比较得到3/7，或者9和4比较得到9/4，它们的比较就可以构成一种新的结果，这个结果就叫有理数。这些相互比较的数都彼此相差不是太远，所以比较的结果也就是差异，并不接近于0。既然有这种情况，就一定有不同的情况，也就是说，如果两个整数或者有理数之间的差异巨大，以至于差异和其中较大的几乎相等，那么这种比较结果，和它的倒数互相观察，就成了几乎彼此不可见的状态，而这种状态就叫正交。能够实现正交的两个数，其中大者已经超出了观测范围之外，以至于小者与大者的比值，可认为是0，其中大者的大小就定义了虚数单位。虚数单位是这种比较关系之中大者超越可观测极限之后的对应物，因为超越观测极限之后的大小都可以认为没有区别，所以使用虚数单位作为这些更大数量的统称，而这个数量的倒数，显然也超出了较小观测范围的极限，成为观察意义上的无穷小，或者差异意义上的0。此时我们就定义了复数集，其中实数是观察范围之内的数量的度量，而虚数则是观察范围之外的度量。这种观测内外的差异构成正交关系，体现为投影为0的无关性；若将一个数量分成两个部分，这两个看似不相关的部分之间构成正交关系并被测量，并将这种测量回归到观测范围，这就得到了无理数，比如2的平方根。有理数和无理数构成实数集。要指出的是，虚数单位先于无理数出现。虽然无理数也并不虚，但是若无超越观测之外的虚数，无理数是无法获得的。

那么，还有没有更大范围的数呢？从观测角度来说，观测范围之内和观测范围之外，这就已经涵盖了所有关于观测的可能性，应该没有其它数了，毕竟数是用来描述观测的，或者说是用来度量世界的。