# 关于费马大定理

费马大定理又称费马最后定理，它作为猜想被费马提出之后经历了三百年的时间最终被怀尔斯证明。现在，让我们基于对虚数单位的认识，尝试考虑关于这个证明的其它解法。

费马猜想指的是，当整数

时，方程

没有正整数解。前提是，我们先考虑的情况，也就是我们熟悉的勾股定理的情况。此时，

显然有正整数解（比如），或者通解，

先放下整数解不谈，只考虑勾股定理成立的原因。它可以对应到几何问题上，也就是说，一个直角三角形两条直角边和斜边的关系。若不考虑整数，则在实数范围，一定可以得到三个实数，使得

但是这不是重点，重点是它作为直角三角形的代数形式，具有对应的几何意义。那么这种几何意义到底是什么呢？

我们知道相互垂直的意思就是正交关系，或者说投影为0，而虚数单位和1的关系，以及1和虚数单位的倒数的关系，也是如此。换句话说，这种关系的代数形式就是，具体写成方程，就类似于，

如图，被替换成某个更小数值和虚数单位的乘积，也是一样。但是要保持单位为1，以实现和方向彼此正交。看上去其实是,实际上（远大于）。

具体讨论这个虚数单位，因为虚数单位的定义为，

通常我们使用的是，

现在将带入，

这就相当于和换了位置，也就是一条直角边和斜边换了位置。这是不对的。所以不是正确的选择，正确的选择更为简单，就是

此处一般来说都比较大。它还可以写成，

由此还原勾股定理的方程，

对于给定的直角三角形来说，最长边就是斜边，斜边的长度就是周期的最大长度，

而周期长度的最小值，可以用最短边长度加一来获得。我们知道三条边里面两条都是带虚数单位的，一般来说虚数单位都比较大，所以最短的的长度就可以确定虚数单位的最小值，另外，对于这种结构来说就足够了。于是有，

以及，

由于

所以可以获得

（需要注意，虽然看上去应当小于，但这个结果是模运算的结果，周期的 重复并未计入其中，若计入周期重复的次数，重复的次数应当少于重复的次数）

可见这个条件是无论如何都可以满足的，不管是不是整数都行。

现在，让我们把方程推广到高次，

其它都不变，我们仍然可以写出，

现在的问题是，无论如何，当，上面的方程都无法写成类似

的左边两项相乘等于右边的平方，或者左边三项相乘等于右边的立方的形式进而写成，

进而根据

进行开方获得正好的，但这是不可能的。因为这种形式，最多就是

而不会是，

因为为了避免虚数单位引入的和的交换，我们就只能使用虚数单位，

另外因为有多少个绝对值相等的项目才能开出对应的次方，一方面因为只有一个单位1和一个虚数单位，另一方面因为每一项都必须是或者的形式，两项之外更多的项显然也是写不出来的（考虑无限下降法）。

由此我们可以知道，为什么只在二维上存在勾股定理：为了避免边交换，只能选择作为唯一的虚数单位，于是只存在单位1和虚数单位两个绝对值相等的单位，方程就至多只有两个绝对值相等的根，所以最多两个根的方程的根的立方以及更高次方是没有意义的。再简单来说，虽然是三元二次方程，但是引入虚数单位之后，可以消去一个元，称为二元二次方程。又因为二次方程两个解可以分别用1和虚数单位构成，二者的绝对值又相等，所以二元二次方程可以等价降解为二元一次方程。显然二元一次方程是具有无限多解的。其它三元高次方程，没有这两个条件，就算引入虚数单位之后可以消去一元，高于二次的二元高次方程也借助1和虚数单位之外的其它单位构成高次解的高次开方，高次根号里面的项目数量不够根号的次数，所以开出整数解是不可能的。

可见，基于对虚数单位的理解，再考虑这些困难的问题，显然要简单多了。

解释：为什么

可以开方得到

因为根据模运算的原则，

只是在涉及虚数单位运算的时候，我们习惯性的不写。

算法的核心在于，在模运算中，加上周期和减去周期的效果是一样的，只是让下一个周期发生的运算，放在上一个周期中进行。在获得之后再把周期调整回来即可。

解释：为什么可以用虚数单位来解？

无论是勾股定理，还是

都是二元及以上不定方程。二元及以上本身就已经说明了其中任何两个变量之间无相关性，也就是说，二元就意味着相互正交的两个维数。方程本身具有三个变量，第三个变量依赖另外两个变量，或者说前两个是自变量，第三个是前两个自变量的函数，所以这种三元结构，本质上是至少二维的（也可能是三维或者更高维数的）。这样就可以引入虚数单位，用虚数单位表达正交或者互不相关的概念。在勾股定理的例子中，就是假定和各自占据一个维数，而函数值和在同一个维数。事实上单从数量考虑，和的数量要比大得多，而这个大得多的最小值，就是至少是的若干倍。也就是说，看似无关的两个维数实际上被虚数单位联系在一起，虚数单位虽然可以超级大，但也可以不那么大。看懂了相继两个维数（等价于两个互不相关的自变量）的本质并不是真的互不相关，我们就可以把三元二次的不定方程用虚数单位的视角消去一元，变成二元二次。较低维数的那个自变量就变成了单位1，或者某个大于1的常数。既然两个相继的维数不是真的互不相关，那么无限多间隔相继的维数也一定不是真的互不相关，所以实际上两个变量终究还是相关的，这就是可以消去一元的原因：互不相关是表象的不是本质的，在特定的虚数单位前提下，相关性总是存在的，实在不行的话，我们可以根据模运算的法则自己创造两者的相关性。虽然说这样并不保证得到整数，但在这一步上我们并不需要保证得到整数，因为后续推导我们会发现，不管是不是整数，后面的过程都无法提供有效的因式分解结果，或者说，看上去像是一个数的几次方的多项式乘积形式，也就是说，不只是没有整数解，有理数解也没有（但可能有实数解）。

这个解法的最核心内容就是对维数的理解：我们先前认为互不相关或者投影为0的两个维数，实际上投影不为0，只是非常小，小于虚数单位的倒数。这个解析几何上的理解映射到纯粹的代数运算上，就是两个互不相关的变量并不是真的互不相关，而是可以存在于两个连续或者不连续的相继的维数上。这就是消元得以实现的根据。其它的计算过程并不重要，正如没有有理数解就肯定没有整数解，是不言自明的。