再试黎曼猜想

黎曼泽塔函数如下，

黎曼猜想：这个泽塔函数的非平凡零点都在，

也就是实部为的那条线上（已知，平凡零点都在上）。

首先把自然数的倒数的幂次，用自然对数底的负幂次表示，以使得底数统一，

（上式已验证：ZetaExponential）

已知对数函数基于虚数单位的积分求和等价形式，即离散对数形式，

泽塔函数以离散对数形式表示为，

不难发现，这里有类似于的展开式，

的结构，我们从方程中抽象出递归通项，

（上式已验证，需要较少的递归项目，对项目数量具有严重依赖：ZetaRecursive）

考虑最后一项，其项目下标为虚数单位，

将最后一项的形式代回到泽塔函数，

展开之后，写成阶乘全加和的形式，

（上式已验证：ZetaRecursiveFactor）

从这个形式可以看出，泽塔函数不仅仅是一个项目极多的函数。它可由两个幂次极高的函数以及其自身复合而成。分析构成它的函数，可以帮助理解

泽塔函数，

同时将每个分量的分母抽象出来做函数，

不难看出，只使用我们就可以写出的点乘形式。用可以产生每一项的分子，用充当每一项的分母，于是，

现在让我们研究的性质，

写出通项，

此时设，

代入到通项中，

展开到类似于的递归通项，

也就是，

的形式，而对于来说，必须使得和构成的两个相邻整数构成比例关系（包括1和-1），否则就无法构成阶乘。

具体分析，

为了能够使得通项展开之后得到整数，首先选取特殊值，使得正弦函数结果0（消去虚数部分），符合这个要求的角度为，

带入正弦和余弦函数，

递归通项化简，

为了保证比例项为整数，只能得到，

此时，

因为，

即虚数单位是偶数（隐含了此处的虚数单位是，因为其中0是偶数，；而奇数作为虚数单位的时候）。因为下一项应为奇数，但它并不存在。所以其数值为0，

此时，

是方程，

的平凡解。但根据后文的分析，对于泽塔函数来说，

和实部为，

的情况相冲突，所以

不是泽塔函数的平凡解，也不是非平凡解（和非平凡解相冲突）。再观察，

如果，

括号里面就可以写成，

其倒数为，

只有这样递归展开之后才能获得收敛的序列，

将其泛化到其它递归通项，

由此可见这个处理方式是恰当的。

于是令，

求解比例常数，

得到的数值，

将的数值代回三角函数，

并带入递归通项，

也就是（先前已经给出的），

再看的情况，由于余弦函数是偶函数，所以平凡零点和相同。

对于非平凡零点来说，如果需要递归通项的大小递减，也就是序列收敛，需要，

通项为，

所以对于，仍然需要实部为才能使得递归展开之后获得收敛的序列。

综合正负两种情况，

只有在

的前提下，和才能具有几乎相同的形式，进而进行如下化简，

所以，通过令，

可以得到两个高次函数，

用这两个高次函数就可以推导出递推关系，

也就是泽塔函数的周期为2。现在让我们考虑，

既然我们可以构造阶乘形式的，我们也可以尝试构造非阶乘形式的递归通项，可以借用先前的递归通项模板，

对于进行展开，

可见所有的是可行的，

此时，

考虑模板，

对比结果，

发现是虚数单位的平方为-1造成的负数项和绝对值相等的正数项目相消造成了最终结果为0，

相继项正负交替，最终一定是偶数项且总和为0，

其它平凡零点同理。

有了这个基础，让我们看看复数零点为什么需要实部为。为了简化问题，避免分数反转，只考虑实部大于0的情况，

首先假定，

于是，

写出递归通项，

同时给出模板，

向平凡零点的通项模板靠拢，

乘以交替项以获得0结果，

由于数值部分中含有的不应当影响数值的大小（缩放系数），令其等于1，而也并无变化，可以用b直接替换，

化为，

所以递归通项为，

不难看出这个形式里面和的位置都反了，因为最开计算两项的关系的时候是按照倒数来算的，需要反过来。正确的形式为，

由此，我们构造了黎曼猜想的平凡解和非平凡解的形式。而只有这两种形式的原因在于需要构造基于虚数单位的交错项，而相邻两项若要交错则必须引入虚数单位的平方，所以递归通项的比例系数里面必须存在平方形式或者根号形式。这就是泽塔函数的平凡解为所有负偶数，以及非平凡解实部为1/2的原因。

计算交错项的原因在于，虽然我们要求和的数列可能具有无穷多（任意多）项，但是若它可以求和，就意味着无论正着计算还是倒着计算，和都必须是一样的。正着计算从1开始增大，倒着计算从-1开始减小。虚数单位的平方可以产生负数，所以引入虚数单位的平方即可倒着计数。而正着累加的结果，和倒着累加的结果绝对值显然相等，但符号相反。所以若可以实现双向计数，则总体累加的结果就一定是0。由于这个原则对于任意多项的数列都成立，所以可以用来计算任意大小的数值。

平凡零点和非平凡零点的差别在于，平凡零点基于发散数列，所以并不需要具有虚部的负数解。但非平凡零点必须引入虚部不然无法归零，所以每发现一个新的非平凡零点就意味着找到了一个新的质数。