# 虚数单位的数值

我们知道虚数单位，它是-1的平方根，

反过来说，它的平方就是-1，

虽然看上去“没有道理”，但终究它的平方是一个实数。抛开负数这个前提不谈，一个实数是某个数的平方，那么这个数到底是多少，就是一个有意义的问题了。至于为什么可以抛开这个前提，其实我们已经讨论过，因为这里的-1并不是比0少一个，而是接近下一个周期开端的最大整数。

既然这个接近下一个周期的最大的整数，可以表现为一个负数，那么它的平方根，显然也可以表现为一个负数，但关键是，我们已经定义了它的平方根为一个符号，也就是虚数单位，这就遮蔽了我们探求它可能也可以表现为一个负数的可能性。毕竟，在模运算的基础上，负数只是一种从周期结尾向着下一个周期开头计数的方式。有了这个认识，就可以自动推导出，周期结尾的最大整数写为-1，那么它的平方根就应该比这个整数更小，或者说，作为负数，它的绝对值就比这个整数更大。那么这个数到底应该是多少呢，下面让我们参照欧拉方程，

这里涉及到虚数单位以及负数，它实际上是，

其中角度为，

时候的特例。而这个方程的图像对应于复平面上的单位圆。角度的具体数值并不重要，重要的是角度的增加是均匀的。也就是说，若考虑复利形式的指数方程，

它的指数形式，

就是这个本息复合的比率，

重复次的结果。换句话说，不管虚数单位的数值是怎么样的，

也就是说，最终的角度都是某个基本数量的整数倍，

已知的周期是，要保证为整数，则，

可见必须承担从无理数（假定虚数单位有实数数值）到整数的转换作用。需要指出的是，用复利类比本身就已经蕴含了的指数必须为整数的基本假设。基于这个基本假设，让我们进一步考虑自然对数底，我们知道，根据它的极限定义，

其条件是。因为涉及无穷，我们并不需要知道是整数还是有理数还是无理数，但是，它不是虚数。可是，现在要求的是虚数单位的数值，那么我们就应当考虑为虚数的情况。在模运算的基础上，显然可以认为，

实际上作为，也可以认为，

所以当我们考虑无穷的时候，其实是可以用虚数单位也就是的平方根来替换，

这个做法是有前提的，就是它必须在上下文确定，

所以可以解出，

虽然虚数单位此时不确定是多少，但在这个前提下，它就可以被认为是一个确定的数，由此极限形式，就可以去掉极限符号得到非极限形式，

当然这个形式的成立也是有前提的，就是它必须发生在的时候，而不是

的时候。根据，

得到，

将替换为,

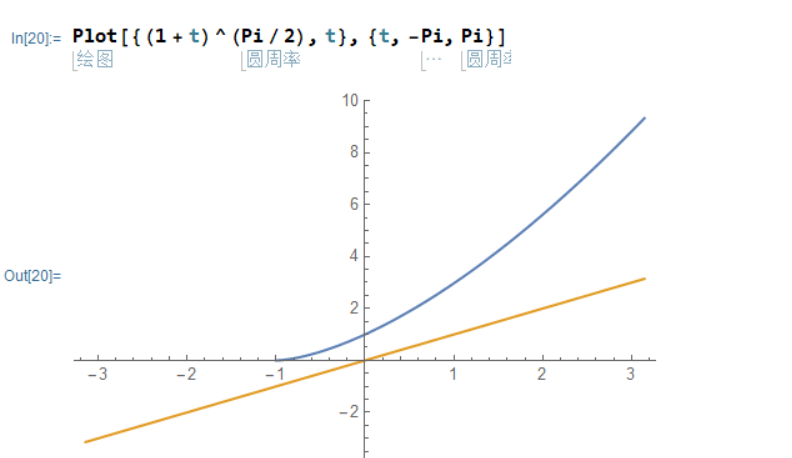
此时，我们知道，

用-1替换，是因为我们知道它的平方，却不知道它本身的数值，所以用它的平方的数值来探求它的数值，那么就需要把它的平方替换为实数-1，由此得到方程，

两边都取倒数，显然两边都不为0，

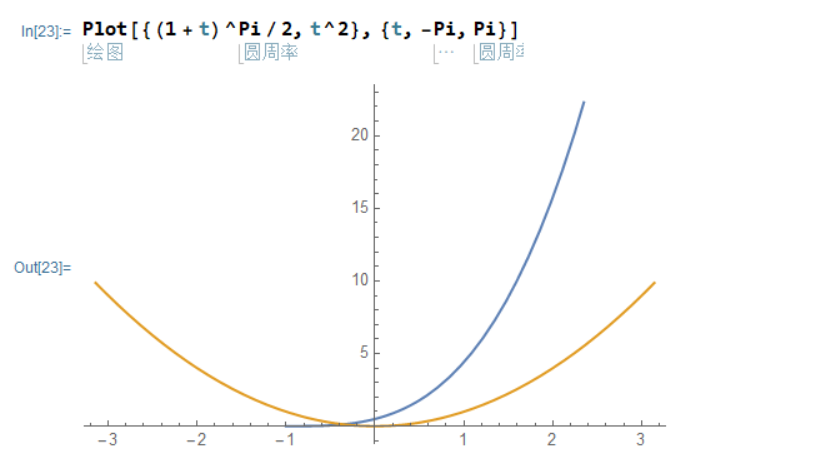
继续，用换元法，

画出图像，

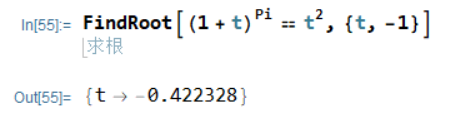


可见这个图像在实数范围是无解的，于是我们考虑将两边平方，

方程左边次数搞，右边次数低，在t大于0的前提下，左边的底数又大于右边的底数，这种情况无解，所以只能考虑t小于0的情况。此时的图像为，



可见交点在原点左侧，解的数值为负数。由于这个方程涉及无理数次幂，并不容易解决，所以选择数值解法，



具体数值为，

由此解出，它的倒数，

正如我们所猜测的，虚数单位若作为一个实数存在，它表述为一个负数，意味着它存在于上一个周期，这一点和-1是一样的，而且它的数值要小于-1，也就是说，它的绝对值要大于-1。反过来，根据，

这难道说，

事实上这就是角度和数值的对应关系，方程左边是和无限的相对关系，而右边则是和0的相对关系。由此来说，所有的负数都可以对应到相应的角度，也就是说，所有的和无限相对的差值，都可以对应到和0的差值（正数）上来，甚至根据复数的多值特性，还可以是多个和无限的差值（负数）都可以对应到和0的差值（正数）。

考虑的展开式，

这个方程展示了从折叠到的过程。它其实就是，

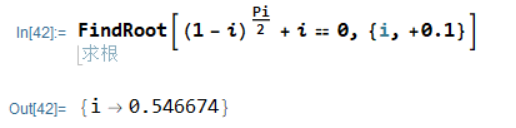
的非均匀递进形式，

对比，

可见变换后的形式，去掉了的影响。根据前面的分析可以认识到，的影响实际上是强制角度均匀步进而造成的结果，若不要求均匀步进，而是按照它自身的规律步进，则是不需要的。而这时候我们得到的，

就是欧拉方程的实际形式。现在对两边取平方根，

同样求数值解，



如果考虑整数情况，则在两个可选整数2和4之间，如果认为则的数值是任意的，如果认为，

也就是我们先前说过的，

回到欧拉方程的无自然对数形式，

此时用数值方法可以解出，

继续，

得到，

显然1不能构成底数，不然它的任意次幂都是1，所以把它加上一个微小的数值，也就是无限减去1的平方根的倒数，用它作为底数，乘上次幂，就得到无限减去1的平方根，也就是虚数单位。注意，此处的虚数单位是作为负数的虚数单位到正数的0到1之间的映射的结果。具体来说，按照，

此时方程左边的，右边的，这种情况下，

只能取第一项，

去掉自然对数底之后，就剩下了和以及0和1等整数常数。所以和就构成了互相依赖的函数关系，再次设，

仅对于虚数单位，进行等比提升，

这一步最为关键，是整个推导过程的核心。仅对于进行提升（也可以叫做旋转），是因为作为一个不知道具体数值却又有具体数值的数量，分为内外两种理解。对于外部来说，它就是一个单位，它的无限多次自乘的结果都是单位（绝对值为单位1），但它的内部具体是多少则由内部决定。方程中存在多个组成部分，我们假定1以及这些数量都属于外部数量，而具有内部数，且外部体现为1个单位，所以对于外部来说，内部数量的任意自乘都是数值不变的，可以进行单独的自乘，但是自乘一次的结果就对应于外部数量的-1，这样就可以和外部交互。所以通过部分自乘，我们就可以建立内部和外部的关系，这就使得完全无法接通的两个环境达到了融合。

假定非常大，那么是的最小单位。 考虑有限精度的圆周率，

周期作为一个整数可以如此构造，

此处，指的是单位1和最小单位的比率，则是特定精度的圆周率，是结果和单位1的比率。由于必须是整数，所以和存在互相锁定的关系。选定之后，和也相继确定，则最后也是确定的。同理若确定了精度，则和以及也都 可以确定了，所以精度直接决定了最小周期的大小，当然另一个不可省略的因素，就是观察者自身的单位1的大小。由此来说，观察者自身单位的大小和所观之物单位大小的比率，基于这个比率的圆周率精度以及计数能力对应的分辨率（虚数单位），共同决定了所观之物的周期。由于这些条件存在内在的联系，而联系并不唯一，所以所观之物的周期（测量结果）也不是唯一的。

当取最低精度，

的时候，可见整数，就是虚数单位，

当取无限精度的时候，

回到圆周率，

我们曾经讨论过和的差异，指出实际上是对某个长度进行无限二分获得的结果，但在二分的过程中引入了观察者的影响，造成测量的实际长度要短于被测的实际长度，

因为实际上就是观察者存在前提下的4，所以，就是观察者存在前提下的1，由此可以进一步的推导出，

也就是说，也是一种单位，是在观察者存在的前提下虚数单位的原像（整数）。不难看出，不论圆周率是否具有有限精度，如果是整数就不是整数，反之亦然。如果我们假定是整数，那么就起到了关联整数形式的虚数单位和实数形式的虚数单位的作用。另外，如果圆周率的精度有限，且决定于整数形式的虚数单位的数值（虚数单位的大小和把整体评分的次数有关），那么对于给定的整数得到的就是确定的，

具体来说，有限精度形式，

其中，

可见这里的指的是二分的次数，那么对于虚数单位，可以认为每次二分得到的虚数单位的数值加一，也就是，

所以，有限精度形式为，

也就是说，对于任意给定的整数虚数单位，比例系数都是确定的。比例系数是一个完全由圆周率的精度决定的常数，而圆周率的精度则决定于整数虚数单位的数值。所以一种整数虚数单位具有一种整数虚数单位对应的比例系数。假定，

可见这个比例常数相对俩说并不是一个很大的数值。

总结：既然比无限少一个的数量可以表示为-1，那么它的平方根也一定有一种表示方式，这个数值可以通过对欧拉方程的数值特化，

来获得。这样做我们就可以去掉自然对数底，而获得虚数单位和圆周率的直接关系，

通过换元可以解出，

此方程进一步导出了，

对其进行内部提升处理，得到，

这说明，包括开始的1和最后的1的以及其它部分都可以成为的倍数，也就是说，周期是的整数倍。但由于的存在，这个最小单位的测量数值会被扭曲，

具体的扭曲程度由的精度决定，而的精度可以由的数值决定的时候，扭曲的程度就可以用比例系数，

来表达，这个数值通常远小于虚数单位（整数）。

为了便于理解“内部”和“外部”的意义，这里给出一个思考题，圆周率的一个有限精度形式的十进制值为，

求它的十六进制形式。获得这个结果，只需要把小数点两边分开，左边和右边分别当成一个十进制数，分别转为16进制数，再把两边和小数点连接在一起，就可以得到，

算法上具体来说，就是对这个数的两边分别处理，比如对于右侧，反复的除以16取余数，把余数转换成十六进制，然后再把自身设为自身除以十六之后的整数结果。

现在反过来，已知有限圆周率的16进制形式，尝试将其转换成为它的十进制形式。

这个运算看上去很容易，但实际上并不容易。小数点左边的数仍然可以用普通的十六进制转换到十进制的方法来处理，就是先求值，转换成内存中的二进制形式，再按照除以10取余数并倒排的方式获得整数。但右边的就不这么容易。如果数值的大小在浮点数范围之内，就可以把对应的位转换成小数加到结果之中，比如十六进制的第一位小数对应的是，数字是2，那么我们就将加到结果之中。但是如果有限位的位数特别的多，达到数千位，那么这种方法就无法用常规的浮点数来容纳了。

这种存储于超长空间中的超长的纯小数，要如何转换为十进制的表示方式，就是我们当前面临的问题。这其实就涉及到了“内部”的概念。

我们知道最终，这个数一定可以写成十进制的形式，既然如此，就一定有十进制的位数，对于一个n位的二进制而言，最终可以写成的十进制位数位，

这个数的最大数值，其十进制的形式就是，

因为这个数值最终不可能到达1，所以它就是这个范围的最大值。对于位数特别多的16进制小数，从第一位小数开始，它的权重就是这个数的，第二位小数就是这个数的……以此类推。所以最终只需要把每一位的数值乘以其权重最终累加起来，就可以得到超长小数的整数形式，最终用常规的数制转换方法即可实现十六进制小数到十进制小数的转换。

回到“内部”的问题，我们并不限制有多少位的小数，也不限制到底用什么进制去存储，但是进制和数本身的大小决定了最终显示数字的长度，以十进制为例，就是决定了的9的个数，也就是这个单位1的大小，用它配合进制来表示小数的时候，就是这个数量除以进制的次数决定了此种进制每一位的数值。若无这种“内部”的观念，小数就无法正确的存储和表达。

在物理实相中，“内部”并不影响外部，但是对内部的观察，会扭曲“内部”的大小。当无限以及虚数单位足够大的时候，观察者对于未知的假定应用于二分法导致圆周率的数值随之变化，这就是扭曲发生的方式。这也意味着，反过来说，若无观察者效应这个前提，扭曲就是不存在的。