# 论角度的意义

本文尝试讨论角度到底是什么意思。

我们知道反正切函数的导数，

整理一下，

这时不难看出，结果的分母和分子的特点，尤其是出现了，

的形式。由于这个形式的含义为虚数单位定义表达式中的周期，由此我们可以猜测关于角度（以及其微分）和虚数单位的关系。

让我们回归到最基本的三角函数定义，在平面直角坐标系中，从原点发出一条射线，在射线上取一点，它的坐标为，构成线段，这条线段和横轴的夹角为，我们称的正切值为，

为了简单起见，我们只讨论第一象限的情况，其中。由此可以得出反正切的定义，

即若知道这个夹角的正切值为，反求其对应的角度。此为反正切函数的定义。

带入微积分，正切函数的导数，即为

反正切函数也就是角度对正切的导数，

也就是说，反正切函数在，

处的导数，即角度上的导数（角度的正切值的微分比上角度的微分），为这个角的正切值的倒数，比上正切值和正切值倒数之和。或者说，如果认为正切值的倒数是角度对应的正切值的微小变化量，那么倒数和倒数之和就是角度的微小变化量。

也就是说，当，我们可以认为，

其中为某个比例数。由于可以比较大，而却可以很小，所以正常来说不等于1。换句话说这是一个从很大范围到很小范围的映射。由于，

我们可以假定一个很大的和很大的，若为单位，仍然很大。这样的话，

也就是说，我们可以认为这件事的条件，是，或者说，的单位远大于的单位，由此才能写出如上形式。若也就是的微小变化，就是当时的微分，或者说，当为单位的时候，就是的微分，那么就是此时的周期，或者说的周期。

在上，的微小变化量若是的微分等于（即一阶无穷小），则角度的变化量，就是这个微分对应的周期，

因为，若为周期对应的虚数单位，则有，

于是有，

也就是说，

这个值看上去很大，但考虑到我们已经要求了比例常数在此时充当虚数单位，即

所以，我们已经知道了，

不过，经过了这样一番运算，我们了解到一点，就是这里的角度变化量等于0的原因，不是因为太小，而是因为周期性，是因为

导致的。而我们知道通常在角度较小的时候不会太大。而此时却要求非常的大，那么这是如何满足的呢？显然若和的单位比例是，就不可能这么大，只有当

的时候，也就是说，的单位为的至少倍数的时候（反之亦然），才会出现这个结果。这便从另一个侧面证明了，所谓正交或者直角关系，就是一个维数的单位为另一个维数的单位的虚数单位倍。只有这样，才能构成递进关系的两个维数，也就是第维和第维。

而这个两个维数构成的夹角的微分变化，在每个横纵比例上都符合其大小，就是比例关系构成的周期，而这个周期的结果，必须环绕，也必须是0。

虚数单位特别大或者特别小，由此而遮盖了的有限倍数，

这才构成了角度微分可以等于0的客观条件，

换句话说，当有限且没有那么大的时候，就不再成立了。由此我们确实可以算出特定上的微分角度。由此我们也知道，失去了无限精度屏蔽条件之后，对于不同的，的大小也不会再均匀，圆也不是完美的圆了，而是现实中的圆了。

回到标题，所谓角度，总可以由一系列的角度微分积累而成，

或者说，将角度还原为它的比例关系，

半径终究不变，于是角度就在半径为单位的前提下，等价于一系列弧长的总和。

考虑，

这就是在角上的弧长，或者说对应的和上的弧长。角度的微分，就是在此处

和半径与的比例的乘积。我们将其定义为

若是从轴来看，则有

从

可知，

可见两者的旋向是相反的。这又由此说明了虚数单位和平面直角坐标系的内在联系：平面直角坐标系的本质就是隐含虚数单位的复平面。

尤其是，当我们意识到，虚数单位实际上总是有限的，只是很大而已，我们就会发现：从原点开始，顺着横轴正方向一直往前走，就会走到纵轴的负半轴，然后再次经过原点，到达纵轴的正半轴，继续沿着纵轴的正方向往上走，就会走到下一个层次的横轴的负半轴，再顺着这个层次的正方向往前走，就走到这个层次的原点以及这个层次的正半轴……将若干周期的环绕压平在一个平面上，我们就得到了无限延展的图像：把它旋转倾斜45°，我们就得到了。

到底什么是角度呢？

这个问题应当澄清为：角度的微分（可取变化量的最小值）是什么意思？

它关系到两个维数之间数量的比例关系，这是它存在的基础。也就是，

中的

的部分。它也决定于在这一点上的以及的变化情况，也就是

这两者的乘积，就是这个角度上可取的角度变化量的最小值。

这个描述显然不让人满意，但由于角度不同，变化量也不同，所以恐怕我们终究难于找到一个一言以蔽之的说法。但无论如何，角度都可以理解为，当前的数量，在它存在于的两个连续维数中的相对位置。

再回到表达式，

可见此处角度的微分，就是此处斜率的微分和余弦函数平方的比值。