第一节　　排列组合与概率重要知识点梳理

一、 计数原理与排列组合

1、 **加法原理**：（分类计数原理）做一件事，完成它可以有 n 类方法，在第 1 类方法中有m_1种不同方法，在第 2 类方法中有m_2种不同方法，……，在第 n 类方法中有m_n种不同方法，那么完成这件事共有$\mathrm{N}=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法。

2、 **乘法原理**：（分步计数原理）做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第 1 步有m_1种不同方法，做第 2 步有m_2种不同方法，……，做第 n 步有m_n种不同方法，那么完成这件事共有$\mathrm{N}=m_1m_2\cdots m_n$种不同的方法。

3、 排列组合

（1） 排列与排列数：从 n 个不同元素中，任取 m（m≤n）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列；从 n 个不同元素中取出 m（m≤n）个元素的所遇不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号A_n^m表示。排列数公式如下，规定$0!=1$，$A_n^n=\mathrm{n}!$.

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},(\mathrm{m}\le \mathrm{n},\mathrm{m},\mathrm{n}\in N^*)$$

（2） 组合与组合数：从 n 个不同元素中，任取 m（m≤n）个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号C_n^m表示。组合数公式如下。

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_n^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!},(\mathrm{m}\le \mathrm{n},\mathrm{m},\mathrm{n}\in N^*)$$

（3） 圆排列：从 n 个不同的元素中不重复地取出 m（1≤m≤n）个元素排在一个圆周上，叫做这 n 个不同元素的一个 m-圆排列；如果一个 m-圆排列旋转可以得到另一个m-圆排列，则认为这两个圆排列相同。n个不同元素的m-圆排列数如下，特别地，当 m=n 时，n 个不同元素做成的圆排列的总数为$(\mathrm{n}-1)!$.

$$\frac{A_n^m}{m}=\frac{n!}{m\cdot(n-m)!}$$

二、 事件与概率

1、 概率：事件 A 发生的可能性的大小，称为事件 A 发生的概率，记为$\mathrm{P(A)}$.

2、 事件

（1） 必然事件：在一定条件下必然发生的事件，$\mathrm{P(A)}=1$；

（2） 不可能事件：在一定条件下不可能发生的事件，$\mathrm{P(A)}=0$；

（3） 随机事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，$\mathrm{P(A)}\in(0,1)$.

3、 等可能事件与概率：如果一次试验只有有限种结果（记为 n 种），称为由 n 个基本事件组成，而且所有结果出现的可能性都是相等的，那么每一个基本事件互为等可能事件；如果一次试验由 n 个等可能的基本事件组成，事件 A 由其中 k 个基本事件组成，那么事件 A 的概率为$\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}, 0 \le \mathrm{m} \le \mathrm{n}$.

4、 互斥事件：不可能同时发生的事件叫互斥事件；如果事件 A、B 互斥，那么事件 A+B 发生（表示 A 或 B 至少有一个发生）的概率$\mathrm{P(A+B)=P(A)+P(B)}$；进一步推广为，如果事件$A_1, A_2, \dots, A_n$彼此互斥，那么$A_1, A_2, \dots, A_n$至少有一个发生的概率为$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

5、 对立事件：事件 A、B 互斥，且二者必有一个发生，则 A、B 为对立事件，记 A 的对立事件为$\overline{\mathrm{A}}$，其概率$\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=\mathrm{P}(\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}})=1$.

6、 独立事件：

（1） 事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样两个事件叫做相互独立事件；两个相互独立事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率之积，即$\mathrm{P(AB)=P(A)P(B)}$；进一步推广，如果事件$A_1, A_2, \dots, A_n$相互独立，那么$A_1, A_2, \dots, A_n$同时发生的概率为$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$；

（2） 独立重复试验：如果 n 次重复试验中，每次试验的结果都不依赖于其他各次试验的结果在，则称这 n 次试验为独立重复试验；如果在一次试验中，某事件发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验中这件事发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^k$.

7、 条件概率：条件概率是指事件 A 在另外一个事件 B 已经发生条件下的发生概率，表示 为$\mathrm{P(A|B)}$；条件概率公式为$\mathrm{P(A|B)}=\frac{\mathrm{P(AB)}}{P(B)}$，特别地，若 A、B 为相互独立事件，$\mathrm{P(A|B)}=\frac{\mathrm{P(AB)}}{P(B)}=\frac{\mathrm{P(A)P(B)}}{P(B)}=\mathrm{P(B)}$.

8、 古典概型与几何概型

（1） 如果实验中只可能出现有限多种结果（基本事件），并且各种结果出现的可能性相同，则这种概率模型称为古典概型；古典概型实验中共有 n 个基本事件，而事件 A 由 k 个基本事件组成，那么事件 A 的概率为$\mathrm{P(A)}=\frac{k}{n}, 0 \le \mathrm{m} \le \mathrm{n}$.

（2） 如果实验只可能出现无限多种结果（基本事件），并且各种结果发生的概率只与构成该事件区域的长度、面积或体积有关，那么称这样的概率模型为几何概型；

$$\mathrm{P(A)}=\frac{\text{构成事件 A 的区域长度、面积或体积}}{\text{全部结果构成的区域长度、面积或体积}}.$$

第二节　　历年真题详解之排列组合与概率

【例 1】5 个人中每两人之间比赛一场，若第 i 个人胜 $x_i(i=1,2,3,4,5)$场，负 $y_i(i=1,2,3,4,5)$场，则（　　）**（清华 2017 年 114 标测 28）**

A. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ 为定值　　B. $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$ 为定值

C. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 为定值　　D. $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2$ 为定值

【解答】AB

AB 中 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=\frac{1}{2}\times 20=10$，为定值

CD 中 ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+{x_5}^2$和${y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2+{y_4}^2+{y_5}^2$之间没有直接关系。

【评析】组合构造题目。对于 CD，可以直接构造几种情况来验证 CD。

【例 2】求满足 $m\,|\,2016$，$n\,|\,2016$，而 mn 不整除 2016 的（m,n）的个数(　　　) **（清华 2017 年 114 标测 20）**

A. 916　　B. 917　　C. 918　　D. 919

【解答】918

由于 2016= $2^5\cdot 3^2\cdot 7$，所以 $m=2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\cdot 7^{m_3}$，$n=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot 7^{n_3}$，满足 $0\le m_1,n_1\le 5, 0\le m_2,n_2\le 2, 0\le m_3,n_3\le 1,$ $m_1+n_1>5$ 或 $m_2+n_2>2$ 或 $m_3+n_3>1$。考虑反面情况的个数，则满足条件的（m,n）的个数共有 $(5+1)(2+1)(1+1)-21\times 6\times 3=918$。

【评析】简单的数论题目，只需考虑唯一因子分解定理即可。对计数过程的加法与乘法要非常熟悉。

【例 3】已知 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)=1$，则（　　）**（清华 2017 年 114 标测 32）**

A. $P(\bar{A}|\bar{B})=0$　　B. $P(\bar{B}|\bar{A})=1$　　C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(\bar{B}|A)=1$

【解答】BC

由于 $P(A|B)=1$，所以 B 为 A 的子集，$\bar{A}$ 为 $\bar{B}$ 的子集，所以 $P(\bar{B}|\bar{A})=1$，$P(A\cup B)=P(A)$。

【评析】概率论与集合论的一些知识。注意 $P(A|B)$ 是已知 B 发生时 A 发生的概率。

第三节　　集合论重点知识整理

1、 容斥原理

用|A|表示集合 A 中元素的个数，则

（1）　$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

（2）　$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + \left|A\cap B|\cap C\right|$

（3）　设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为有限集合 S 的子集，则

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right| + \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

2、 抽屉原理：

（1）把 n+1 个元素按照任意确定的方式划分成 n 个集合，那么一定存在某一个集合里含有两个或两个以上的元素；

（2）　把 m 个元素按照任意确定的方式划分成 n 个集合（$m, n\in N^*$），那么一定存在某个集合中含有$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$个或$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$个以上的元素；

（3）　把无穷多个元素按照任意确定的方式划分成 n 个集合，那么一定存在某一个集合里含有无穷多个元素。

第四节　历年真题详解之集合论与组合计数

【例 1】某校共 2017 名学生，其中每名学生至少要选 A、B 中的一门课，也有些学生选了两门课。已知选修 A 的人数占全校人数介于 70%~75%，选 B 的人数占 40%~45%。则下列正确的是（　　）**（清华 2017 年 429 标测 21）**

A. 同时选 A、B 的可能有 200 人　　B. 同时选 A、B 的可能有 300 人

C. 同时选 A、B 的可能有 400 人　　D. 同时选 A、B 的可能有 500 人

【解答】BC.

注意到每人至少选 A、B 中的一门，故$|A|+|B|-|A\cap B|=2017$。分别取$|A|$、$|B|$的最大值和最小值，得到$(70\%+40\%-1)2017\le(75\%+45\%-1)2017$，

$\therefore 201.7\le|A\cap B|\le 403.4$，故选 BC。

【评析】容斥原理的考察，非常基础。

【例 2】已知所有元素均为非负实数的集合 A 满足：$\forall a_i, a_j\in A, a_i\ge a_j$,均有 $a_i+a_j\in A$ 或 $a_i\text{-}a_j\in A$，且 A 中任意三个元素的任意排列均不构成等差数列，则集合 A 的元素个数可能

为（　　）**（清华 2017 年 114 标测 22）**

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【解答】B

显然 $0 \in A$

A.设 $A=\{0,a_1,a_2\}$，则 $a_2-a_1=a_1$，于是 $0,a_1,a_2$ 成等差数列，错误。

B.取 A={0,1,3,4}满足条件，正确

C. 设 $A=\{0,a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，于是由 $0<a_4-a_3<a_4-a_2<a_4-a_1$ 知，

$a_4-a_3=a_1, a_4-a_2=a_2, a_4-a_1=a_3, 0, a_2, a_4$ 成等差数列，错误

D. $A=\{0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，于是和 C 中相似的处理方法可以得到

$a_1+a_4=a_2+a_3=a_5$，由于 $a_4+a_3>a_5$，所以 $a_4-a_3=a_2-a_1=a_1$，于是 $0,a_1,a_2$ 成等差数列，错误。

【评析】集合问题向来是组合数学中的重点。对所给集合的条件反复运用，数学灵感较好的同学应该不难想到 C、D 中的处理方法。

【例 3】$S=\{1,2,...,25\}, A\subseteq S$，且 A 的所有子集中元素之和不同。则下列选项正确的有（　　）**（清华 2017 年 429 标测 3）**

A. $|A|_{\max}=6$　　B. $|A|_{\max}=7$

C. 若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,则$\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{a_i}<\frac{3}{2}$　　D. 若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,则$\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{a_i}<2$

【解答】AD.

一方面，取 A={25,24,23,21,18,13}，是一个满足题意的构造，$|A|=6$。

另一方面，若 $|A|=7$，则 $|A|$ 的全体非空子集个数为 $2^7-1=127$ 个。

而设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_7\}$，其中 $a_1>a_2>\ldots>a_7$。

考虑 A 中的小于等于 4 元的非空子集，其有 $C_7^4+C_7^3+C_7^2+C_7^1=35+35+21+7=98$ 个。

而 A 中小于等于 4 元的非空子集的元素和一定在$[a_7, a_1+a_2+a_3+a_4]$中，至多有 $a_1+a_2+a_3+a_4-a_7+1$ $\le a_1+a_2+a_3+a_4\le 25+24+23+22=94$ 种，与所有子集元素之和不同矛盾!故 $|A|_{\max}=6$。

对于 CD，容易验证 1,2,4,8,16 是使得 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{a_i}$ 最大的取值，且 $\frac{3}{2}<\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{a_i}<2$。故 D 正确。

【评析】标准的组合构造题目。对于此类题目，学会构造是很关键的。一般而言，当你构造出 6 个的解答，发现 7 个给不出来后，完全可以直接猜出 A 而不去证明；上述答案的证明已经达到竞赛中等水平了。而 CD 用二进制的思想很容易想到，不再赘述。

第五节　数列重点知识整理

一、　等差数列与等比数列的性质

设数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为 d；数列$\{b_n\}$为等比数列，公比为 q（$q\neq 0$）.

a) 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=An^2+Bn, A=\dfrac{d}{2}, B=a_1-\dfrac{d}{2}$ ；$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列；

等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n=A-Aq^n, A=\dfrac{b_1}{1-q}, q\neq 1$ ；若$|q|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\dfrac{b_1}{1-q}$.

b) 若$m,n\in N^*$， 则$a_m-a_n=(m-n)d$，$\dfrac{b_m}{b_n}=q^{m-n}$.

c) 若$m+n=r+s$ ，则$a_m+a_n=a_r+a_s$ ，$b_mb_n=b_rb_s$；

若$m\in N^*$，且$m\geq 2$，则$a_{m+1}+a_{m-1}=2a_m$ （等差中项），$b_{m+1}b_{m-1}=b_m^2$（等比中项）；

若$\{a_n\}$为等差数列，且$\sum\limits_{l=1}^{k}i_l=\sum\limits_{l=1}^{k}j_l$ ，则$\sum\limits_{l=1}^{k}a_{i_l}=\sum\limits_{l=1}^{k}a_{j_l}$ ；

若$\{b_n\}$为等比数列，且$\sum\limits_{l=1}^{k}i_l=\sum\limits_{l=1}^{k}j_l$，则$\prod\limits_{l=1}^{k}a_{i_l}=\prod\limits_{l=1}^{k}a_{j_l}$.

d) 若l,m,n成等差数列，则a_l,a_m,a_n也成等差数列；

若l,m,n成等比数列，则b_l,b_m,b_n也成等比数列；

若$\{a_n\}$为等差数列，则$a_i,a_{i+j},\cdots a_{i+kj},\cdots$仍是等差数列；

若$\{b_n\}$为等比数列，则$b_i,b_{i+j},\cdots b_{i+kj},\cdots$仍是等差数列。

e) 设S_n,T_n 分别为等差数列$\{a_n\}$、等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和，则

$S_m,S_{2m}-S_m,\cdots,S_{pm}-S_{(p-1)m},\cdots$ 仍为等差数列（$m>1,p\geq 3$），公差为m^2d ；

$T_m,T_{2m}-T_m,\cdots,T_{pm}-T_{(p-1)m},\cdots$ 仍为等比数列（$m>1,p\geq 3$），公差为q^m ；

若$\{b_n\}$为等比数列，$P_m=\prod\limits_{i=1}^{m}b_i$ ，则$P_m,\dfrac{P_{2m}}{P_m},\cdots,\dfrac{P_{pm}}{P_{(p-1)m}},\cdots$仍为等比数列。

f) 数列$\{c^{a_n}\}(c\neq 0)$ 为的等比数列，公比为c^d ；若 q>0，数列$\{\log_c b_n\}(c>0,c\neq 1)$ 为

等差数列，公差为$\{\log_c q\}$ 。

二、数列求和

（3） 分组求和法：将原数列分解成可用公式法求和的若干数列，利用常用的特殊数列求和公式求和。

i. $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

ii. $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

iii. $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

（4） 倒序相加法：类比于等差数列求和公式的推导，将数列首尾配对进行求和。

（5） 错位相减法：类比于等比数列求和公式的推导，适用于形如$\{a_n\cdot b_n\}$ 的数列的前 n 项求和，其中$\{a_n\}$、$\{b_n\}$分别为等差数列和等比数列。

（6） 裂项相消法：将数列的每项分解为两项之差，通过累加前后相消。

i. $n(n+1)=\frac{1}{3}\left[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\right]$

$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}\left[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\right]$

ii. $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

iii. $n\cdot n!=(n+1)!-n!$

$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

iv. $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

三、 数列通项公式与递推

（1） 若给出数列$\{a_n\}$前 n 项和的公式，根据$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$求出数列通项，注意考察$n=1$ 的情况是否满足所求通项。

（2） 若给出数列的初始值和递推关系，即为递推数列，根据递推式的类型用不同方式求通项。

i. 一阶递推：$a_1=a$（a为常数），$a_{n+1}=p(n)a_n+q(n),p(n)\neq 0$

形如 $a_{n+1}=a_n+q(n)$，采用累加法，即

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}q\left(k\right),n\geq 2$$；

形如$a_{n+1}=p(n)a_n$，采用累乘法，即

$$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_1\cdot p\left(1\right)\cdot p\left(2\right)\cdots p\left(n-1\right),n\geq 2$$

形如$a_{n+1}=pa_n+q(n),p\neq 1$，两边同除以$p^{n+1}$，转化为$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q(n)}{p^{n+1}}$，采用累加法；

或采用待定系数法，得到$a_{n+1}+m\cdot q(n+1)=p\left[a_n+m\cdot q(n)\right]$，采用累乘法；

ii. 二阶递推：$a_1=a,a_2=b$（a、b为常数），$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n,p,q\neq 0$

若$p+q=1$，有$a_{n+1}-a_n=-q\left(a_n-a_{n-1}\right)$，从而$\left\{a_{n+1}-a_n\right\}$为等比数列，可以先求出$a_{n+1}-a_n$，再求$a_n$；

若$p+q\neq 1$，则存在α、β 满足$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta\left(a_n-\alpha a_{n-1}\right)$，从而解出$\alpha$、$\beta$的值，求出$\left\{a_{n+1}-\alpha a_n\right\}$的通项表达式，再求$a_n$；

利用特征方程法，其特征方程为$x^2=px+q$，方程的两根为α、β，如果$\alpha\neq\beta$，则$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$；如果$\alpha=\beta$，则$a_n=\left(An+B\right)\alpha^n$，其中A、B为常数，根据初始值$a_1,a_2$求出。

iii.分式线性递推：$a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d},c\neq 0,ad-bc\neq 0$

其特征方程为$x=\frac{ax+b}{cx+d}$，该方程的根称为该数列的不动点；若该数列有两个相异不动点α、β，则数列$\left\{\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$为等比数列；若仅有唯一不动点$\alpha$，则$\left\{\frac{1}{a_n-\alpha}\right\}$为等差数列。

第六节 真题详解之数列

【例 1】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(m+1,n+1)=f(m,n)+f(m+1,n)+n$，$f(m,1)=1$，$f(1,n)=n$，其中 $m,n\in N^*$，则（　　）**（清华 2017 年 114 标测 25）**

A. 使 $f(2,n)\ge 100$ 的 n 的最小值是 11　　B. 使 $f(2,n)\ge 100$ 的 n 的最小值是 13

C. 使 $f(3,n)\ge 100$ 的 n 的最小值是 19　　D. 使 $f(3,n)\ge 100$ 的 n 的最小值是 20

【解答】AC

根据题意，$f(1,n):1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\ldots,$

$f(2,n):1,3,7,13,21,31,43,57,73,91,111,\ldots,$ $f(3,n):1,3,8,18,35,61,98,148,\ldots,$

设 $a_n=f(2,n),b_n=f(3,n)$，则有递推公式

$a_n=2n+a_{n-1},b_n=n-1+a_{n-1}+b_{n-1},$

于是可以得到通项公式为：$a_n=n^2-n+1,b_n=n+\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

AB 中 $f(2,n)\ge 100$ 的 n 最小值为 11.

CD 中 $f(3,n)\ge 2016$ 的 n 最小值为 19。

【评析】用函数皮套着的数列题。乍一看非常难算，但将其化成数列后就成为熟悉的知识点，通过数列的知识对其解决。

【例 2】$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均为等差数列，已知 $a_1b_1=135,a_2b_2=304,a_3b_3=529,$ 则下列是 $\{a_nb_n\}$ 中的项的有（　　）**（2017 清华 429 标测 5）**

A. 810　　B. 1147　　C. 1540　　D. 3672

【解答】ABCD.

$\because\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均为等差数列，$\therefore\{a_nb_n\}$ 的通项必为一个二次函数形式。利用拉格朗日插值公式，设 $a_nb_n=Q(n)$，则

$Q(n)=Q(1)\dfrac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)}+Q(2)\dfrac{(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)}+Q(3)\dfrac{(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}$，代入 1、2、3 的值化简有 $Q(n)=28n^2+85n+22$。

验算知 $Q(4)=810$，$Q(5)=1147$，$Q(6)=1540$，$Q(10)=3672$。

【评析】很繁琐的一道题。首先得知道拉格朗日插值公式：若 $f(x)$ 为一个 n-1 次多项式，

已知 $f\left(x_1\right)=a_1$， $f\left(x_2\right)=a_2$，……， $f\left(x_n\right)=a_n$，（其实就是 n 个方程组解 n 个待定系数）则

$$f\left(x\right)=f\left(x_1\right)\frac{\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\ldots\left(x-x_n\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)\ldots\left(x_1-x_n\right)}+f\left(x_2\right)\frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\ldots\left(x-x_n\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)\ldots\left(x_2-x_n\right)}+\ldots+ f\left(x_n\right)\frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)}{\left(x_n-x_1\right)\left(x_n-x_2\right)\ldots\left(x_n-x_{n-1}\right)}.$$

理解它很容易，将 $x=x_1$ 代入上式，发现右边一连串代数式里只有第一项是 $f\left(x_1\right)$，其他都是 0；代入其他的取值也是。

那么在用完拉格朗日插值公式后，就是考验计算基本功了。在考试中遇到的这个题，可能要花大量时间，建议直接跳过吧。

第七节　课后自我练习

【练习 1】一个人投篮命中率为 $\frac{2}{3}$，直到连续投进两个才停止，则他停止时恰投 4 次的概率为？**（清华 2017 年 114 标测 31）**

【解答】$\frac{4}{27}$

投篮次数为 4 的概率是四次投球情况为：进、不进、进、进，或不进、不进、进、进，概率和为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$。

【评析】关键是分析到：恰投 4 次才停止时，最后三次的结果一定是“不进、进、进”。

【练习 2】集合 A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}，从中取出三个元素构成集合 A 的子集，且所取得的三个数互不相邻，这样的子集个数为(　　　　) **（清华 2017 年 114 标测 7）**

A. 56　　　　B.64　　　　C.72　　　　D.80

【解答】56

原题等价于从{1,2,3,4,5,6,7,8}中任取三个数 $a,b,c\left(a<b<c\right)$，然后元素 $a,b+1,c+2$ 即为满足条件的三个元素。所以共有 $C_8^3=56$ 种选取方法。

【评析】组合计数问题。关键在于怎样找到易于计算的一一对应关系。

【练习 3】若存在满足下列三个条件的集合 A,B,C，则称偶数 n 为“萌数”： **（清华 2017 年 114 标测 29）**

(1)集合 A,B,C 为集合 M={1,2,…,n}的 3 个非空子集，且 A,B,C 两两交集为空集，$A\cup B\cup C=M$；

(2)集合 A 中所有数为奇数，集合 B 中所有数为偶数，所有 3 的倍数都在集合 C 中；
(3)集合 A,B,C 中所有数的和分别记为 S_1,S_2,S_3, $S_1=S_2=S_3$
下列说法正确的是（　　）
A. 8 是“萌数”　　B. 60 是“萌数”　　C. 68 是“萌数”　　D. 80 是“萌数”

【解答】ACD

集合 M 中所有元素的和为 $S_M=\dfrac{n^2+n}{2}$，考虑 $3|S_M$，于是 $n=6k,6k+2\left(k\in N^*\right)$，当 $n=6k$ 时，集合 M 中所有 3 的倍数之和大于 $\dfrac{1}{3}S_M$，集合 C 中元素之和大于 $\dfrac{1}{3}S_M$，不符

当 $n=6k+2$ 时，$S_M=18k^2+15k+3$，其中 3 的倍数和为 $6k^2+3k$，而所有奇数的和为 $9k^2+6k+1$，所有偶数的和为 $9k^2+9k+2$，那么只需要找若干和为 k 的奇数，若干和为 k+1 的偶数放入 C 集合中，所以 k 为奇数，$n=12l-4$ 形式的数是必要条件，通过验证 A、C、D 三个选项，进行构造。

A: 5、7；4、8；1、2、3、6

C: $k=11$，将奇数 11，偶数 4,8 和 3 的倍数一起放入集合 C 中

D: $k=13$，将奇数 13，偶数 4,10 和 3 的倍数一起放入集合 C 中

【评析】组合题目，根据条件自然想到去估算集合 C 来确定一个数是“萌数”所需要满足的条件。

【练习 4】若 N 的三个子集满足 $|A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=1$，且 $A\cap B\cap C=\phi$，则称(A,B,C)为 N 的“有序子集列”。现有 N={1,2,3,4,5,6}，则 N 有（　　）个有序子集列。**（清华 2017 年 429 标测 25）**
A. 540　　B. 1280　　C. 3240　　D. 7680
【解答】D
对于任一个“有序子集列”(A,B,C)，必然存在一个三元组(x,y,z)，使得 $x\in A\cap B$，$y\in B\cap C$，$z\in C\cap A$。若 $A\cup B\cup C$ 中还有除了（x,y,z）的其他元素，记为 t，那么 t，只在（A,B,C）之一出现（或者根本不出现）。
另一方面，对于任一个三元组（x,y,z），都能通过令 $x\in A\cap B$，$y\in B\cap C$，$z\in C\cap A$ 的形式，构建出一个“有序子集列”（A,B,C）。

N 中的三元组（x,y,z）有 $C_6^3=20$ 个。而对于 $N\setminus\{x,y,z\}$ 中的其他元素，每一个都有 4 种可能：不属于 $A\cup B\cup C$、属于 A、属于 B、属于 C。且（A,B,C）又有 6 种交换的顺序。

∴总数为 $C_6^3\cdot 4^3\cdot 6=7680$ 种。

【评析】较难的组合计数问题。先证明计数方式是一一对应的，再通过分步计数原理去算出

答案。