# G. 赌徒问题

命题人： 清华大学 陈鸿基
验题人： 清华大学 吴作同
清华大学 张艺缤

# 题目大意

- 给定 $n, m, k$
- 求满足以下要求的无序正整数 $n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的数量
  - $1 \le a_1 \le \cdots \le a_n \le m$
  - 记 $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$，那么对 $i = 1, \cdots, n$，都有 $a_i | ks$
- 求方案数
- $1 \le n \le 10, 1 \le m \le 2000, 1 \le k \le 10^9$

# 做法？

- 先考虑一个暴力一点的做法
- 枚举 $s$，对给定的 $s$ 而言，相当于用 $ks$ 的因数跑一个多重背包
- 因数 $i$ 的体积为 $i$，放入 $n$ 件物品后总体积为 $m$，求方案数
- 记 $\sigma(k,m)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}[j|ik]$
- 复杂度为 $O\big(mn\sigma(k,m)\big)$，因为对于 $s=1,\cdots,m$，总共只有 $\sigma(k,m)$ 个物品，对每个物品需要各跑一次 $O(nm)$ 的背包
- 如何估计 $\sigma(k,m)$ 的范围？

# 做法？

- 当 $k$ 包含因数个数较少时，$\sigma(k,m) \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}[j|i] = O(m\log m)$
- 当 $k$ 包含较多种（质）因数时，$\sigma(k,m) \to O(m^2)$
- 在本题数据范围下，可以认为 $\sigma(k,m)$ 近似小常数 $O(m^2)$
- 也就是说总复杂度将近 $O(m^3 n)$，虽然复杂度不满但足以超时

# 优化一下

- 但是在有 $k$ 的影响下，显然不需要对一些因数重复跑背包
- 例如，如果 $k$ 有一个在 $m$ 范围内的大质数 $p$，那么相当于要对 $p$ 多跑 $O(m)$ 次 $O(nm)$ 的背包
- 自然的想法：对当前背包容积 $s$，取一个 $s$ 的因数 $d$，使得能整除 $ks$ 但不能整除 $kd$ 的数最少
- 对于由 $k$ 引入的额外的因数，这一优化能显著减小实际跑背包的次数，从而通过本题