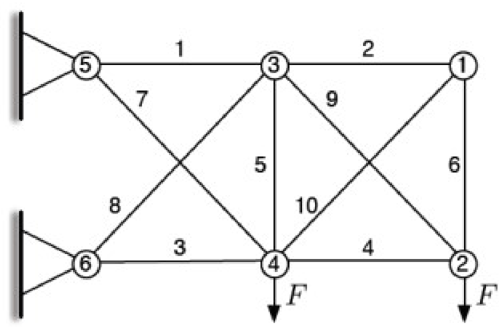
Contents

Problem

問題描述



在以下的已知條件下，給定桿件截面半徑，利用有限元素分析法求各桿件的位移、應力與反作用力：

- 整體架構處在靜力平衡的情況下
- 所有桿件截面皆爲圓形
- 材料爲鋼，楊氏係數 E = 200 GPa，密度 ρ = 7860 kg/m3，降伏強度 σy = 250 MPa
- 平行桿件與鉛直桿件（桿件1至桿件6）長度皆爲 9.14 m
- 桿件 1 至桿件 6 截面半徑相同爲 r1，桿件 7 至桿件 10 截面半徑相同爲 r2
- 所有桿件半徑的最佳化範圍爲 0.001 至 0.5 m 之間
- 在節點 2 和節點 4 上的負載 F 皆爲 1.0 × 107 N 向下

並在以下條件下最佳化桿件的總重量及桿件半徑

$$min_{r1,r2} \quad f(r1, r2) = \sum_{i=1}^{6} m_i(r1) + \sum_{i=7}^{10} m_i(r2) \tag{1}$$
$$subject\ to\, |\sigma i| \leq \sigma y \tag{2}$$
$$\Delta_{s2} \leq 0.02 \tag{3}$$
$$where f : \text{所有桿件質量} \tag{4}$$
$$\Delta_{s2} : node2\text{位移} \tag{5}$$
$$\sigma y : \text{降伏應力} \tag{6}$$
$$\sigma i : \text{所有桿件應力} \tag{7}$$

。

Solution

Step1.有限元素分析法程式建立:用以計算所有桿件應力、應變及反作用力:參考了orientation上建立了3個fuction來處理有限元素法。

跟著orientation上的提示先定義各參數數值，參考pdf中element table 2-2，先建立node矩陣記錄了個節點的x及y座標。 並輸入楊氏係數E。

```
function [sigma, Q] = sol_TenBarTruss(r1, r2)
定義各參數數值%
E。=200*10^9;
  node=[18.28,9.14;18.28,0;9.14,9.14;9.14,0;0,9.14;0,0];
```

參考pdf中element table 2-3輸入計算剛性矩陣所需的桿件面積A，桿件長度L及桿件夾角theta(角度部分原本使用pdf中的公式後acos但角度常常不對導致剛性矩陣錯誤所以最後使用acot計算。

```
  A=zeros(10,1);
  A(1:6,1)=r1^2*pi();
  A(7:10,1)=r2^2*pi();
  L=zeros(10,1);
  L(1,1)=sqrt((node(5,1)-node(3,1))^2+(node(5,2)-node(3,2))^2);
  L(2,1)=sqrt((node(3,1)-node(1,1))^2+(node(3,2)-node(1,2))^2);
  L(3,1)=sqrt((node(6,1)-node(4,1))^2+(node(6,2)-node(4,2))^2);
  L(4,1)=sqrt((node(4,1)-node(2,1))^2+(node(4,2)-node(2,2))^2);
  L(5,1)=sqrt((node(4,1)-node(3,1))^2+(node(4,2)-node(3,2))^2);
  L(6,1)=sqrt((node(2,1)-node(1,1))^2+(node(2,2)-node(1,2))^2);
  L(7,1)=sqrt((node(5,1)-node(4,1))^2+(node(5,2)-node(4,2))^2);
  L(8,1)=sqrt((node(6,1)-node(3,1))^2+(node(6,2)-node(3,2))^2);
  L(9,1)=sqrt((node(3,1)-node(2,1))^2+(node(3,2)-node(2,2))^2);
  L(10,1)=sqrt((node(4,1)-node(1,1))^2+(node(4,2)-node(1,2))^2);
  theta=zeros(10,1);
  theta(1,1)=acotd((node(5,1)-node(3,1))/(node(5,2)-node(3,2)));
  theta(2,1)=acotd((node(3,1)-node(1,1))/(node(3,2)-node(1,2)));
  theta(3,1)=acotd((node(6,1)-node(4,1))/(node(6,2)-node(4,2)));
  theta(4,1)=acotd((node(4,1)-node(2,1))/(node(4,2)-node(2,2)));
  theta(5,1)=acotd((node(4,1)-node(3,1))/(node(4,2)-node(3,2)));
  theta(6,1)=acotd((node(2,1)-node(1,1))/(node(2,2)-node(1,2)));
  theta(7,1)=acotd((node(5,1)-node(4,1))/(node(5,2)-node(4,2)));
  theta(8,1)=acotd((node(6,1)-node(3,1))/(node(6,2)-node(3,2)));
  theta(9,1)=acotd((node(3,1)-node(2,1))/(node(3,2)-node(2,2)));
  theta(10,1)=acotd((node(4,1)-node(1,1))/(node(4,2)-node(1,2)));
```

跟著orientation提示先建立K空白矩陣及計算10桿結構之剛性矩陣。

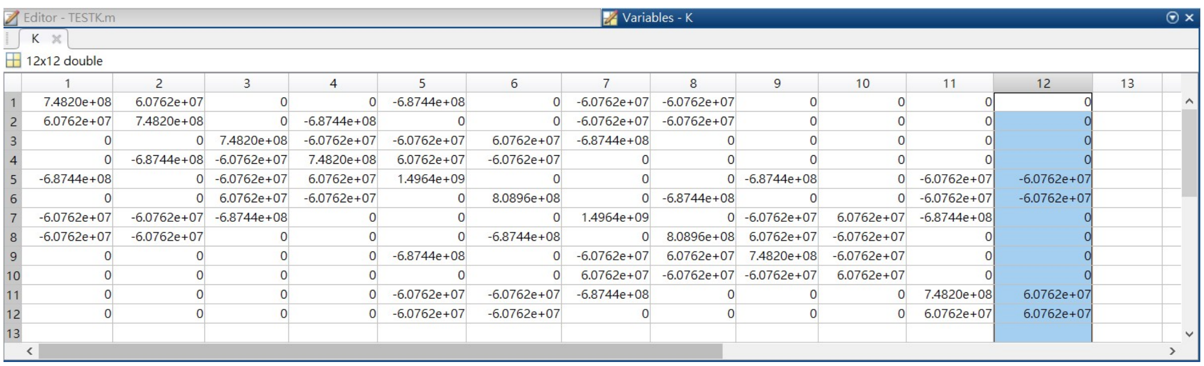
```
  % 開一個空白的剛性矩陣 (stiffness matrix)
  K=zeros(12);
  % 計算 stiffness matrix 可使用( add_element 函數)
  K = add_element(K,A(1,1),E,L(1,1),theta(1,1),3,5);
  K = add_element(K,A(2,1),E,L(2,1),theta(2,1),1,3);
  K = add_element(K,A(3,1),E,L(3,1),theta(3,1),4,6);
  K = add_element(K,A(4,1),E,L(4,1),theta(4,1),2,4);
  K = add_element(K,A(5,1),E,L(5,1),theta(5,1),3,4);
  K = add_element(K,A(6,1),E,L(6,1),theta(6,1),1,2);
  K = add_element(K,A(7,1),E,L(7,1),theta(7,1),4,5);
  K = add_element(K,A(8,1),E,L(8,1),theta(8,1),3,6);
  K = add_element(K,A(9,1),E,L(9,1),theta(9,1),2,3);
```

```
    K = add_element(K,A(10,1),E,L(10,1),theta(10,1),1,4);
```

add element 函數與orientation相同為

```
function K = add_element(K, A, E, L, theta, node1, node2)
    c = cosd(theta); s = sind(theta);
    temp = A*E/L*[c^2 c*s; c*s s^2];
    K((2*node1-1):(2*node1), (2*node1-1):(2*node1))...
    = K((2*node1-1):(2*node1), (2*node1-1):(2*node1)) + temp;
    K((2*node2-1):(2*node2), (2*node2-1):(2*node2))...
    = K((2*node2-1):(2*node2), (2*node2-1):(2*node2)) + temp;
    K((2*node1-1):(2*node1), (2*node2-1):(2*node2))...
    = K((2*node1-1):(2*node1), (2*node2-1):(2*node2)) - temp;
    K((2*node2-1):(2*node2), (2*node1-1):(2*node1))...
    = K((2*node2-1):(2*node2), (2*node1-1):(2*node1)) - temp;
end
```

透過檔案TESTK.m跑r1=0.1(m),r2=0.05(m)的情況確保剛性矩陣正確



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	7.4820e+08	6.0762e+07	0	0	-6.8744e+08	0	-6.0762e+07	-6.0762e+07	0	0	0	0	
2	6.0762e+07	7.4820e+08	0	-6.8744e+08	0	0	-6.0762e+07	-6.0762e+07	0	0	0	0	
3	0	0	7.4820e+08	-6.0762e+07	-6.0762e+07	6.0762e+07	-6.8744e+08	0	0	0	0	0	
4	0	-6.8744e+08	-6.0762e+07	7.4820e+08	6.0762e+07	-6.0762e+07	0	0	0	0	0	0	
5	-6.8744e+08	0	-6.0762e+07	6.0762e+07	1.4964e+09	0	0	0	-6.8744e+08	0	-6.0762e+07	-6.0762e+07	
6	0	0	6.0762e+07	-6.0762e+07	0	8.0896e+08	0	-6.8744e+08	0	0	-6.0762e+07	-6.0762e+07	
7	-6.0762e+07	-6.0762e+07	-6.8744e+08	0	0	0	1.4964e+09	0	-6.0762e+07	6.0762e+07	-6.8744e+08	0	
8	-6.0762e+07	-6.0762e+07	0	0	0	-6.8744e+08	0	8.0896e+08	6.0762e+07	-6.0762e+07	0	0	
9	0	0	0	0	-6.8744e+08	0	-6.0762e+07	6.0762e+07	7.4820e+08	-6.0762e+07	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	6.0762e+07	-6.0762e+07	-6.0762e+07	6.0762e+07	0	0	
11	0	0	0	0	-6.0762e+07	-6.0762e+07	-6.8744e+08	0	0	0	7.4820e+08	6.0762e+07	
12	0	0	0	0	-6.0762e+07	-6.0762e+07	0	0	0	0	6.0762e+07	6.0762e+07	
13													

接著建立力矩陣，題目施加了2個力分別在節點2和節點4的-y方向因此力矩陣的為下，Fr為Fresuced根據manual節點5.6為固定端計算位移矩陣用不到所以計算位移矩陣只需用到Fr。

```
% 建立力矩陣
 F=[0 0 0 -1*10^7 0 0 0 -1*10^7 0 0 0 0]';
   Fr=F(1:8,1);
```

最後建立空白位移及應力矩陣後，計算應力、應變及反作用力完成有限元素分析法部分，Qr為Qreduced原因跟Fr一樣，QF為用來計算反作用力時使用沒有將節點5.6位移歸零

```
 % 建立空白位移矩陣
   Q =zeros(12,1);

   % 計算位移量 (F = KQ)
   Kr=K(1:8,1:8);
   %QF=inv(K)*F;
   Qr= inv(Kr)*Fr;
   Q(1:8,1)=Qr;
   % 建立空白應力矩陣
   sigma = zeros(10,1);

   % 計算應力 (stress) 可使用( compute_stress 函數)
   sigma(1,1)= compute_stress(Q,E,L(1,1),theta(1,1),3,5);
   sigma(2,1)= compute_stress(Q,E,L(2,1),theta(2,1),1,3);
```

```
    sigma(3,1)= compute_stress(Q,E,L(3,1),theta(3,1),4,6);
    sigma(4,1)= compute_stress(Q,E,L(4,1),theta(4,1),2,4);
    sigma(5,1)= compute_stress(Q,E,L(5,1),theta(5,1),3,4);
    sigma(6,1)= compute_stress(Q,E,L(6,1),theta(6,1),1,2);
    sigma(7,1)= compute_stress(Q,E,L(7,1),theta(7,1),4,5);
    sigma(8,1)= compute_stress(Q,E,L(8,1),theta(8,1),3,6);
    sigma(9,1)= compute_stress(Q,E,L(9,1),theta(9,1),2,3);
    sigma(10,1)= compute_stress(Q,E,L(10,1),theta(10,1),1,4);

    % (optional) compute reactions
    %KR=K(9:12,1:12);
    %R =KR*QF;
```

Step2.使用fmincon進行最佳化:參考mamual中fmincon部分建立1個主程式及2個function執行最佳化。

首先先建立目標函數檔也就是最佳化目標所有桿件總重，也就是6根半徑r1長9.14m的圓形桿件及4根半徑r2長9.14根號2之總重。

```
function f= object_function(r)
f =6*r(1)^2*pi()*0.914*7860+4*r(2)^2*pi()*7860*0.914*sqrt(2);
```

接著加入建立非線性拘束條件檔，條件爲桿件受力不超過降伏應力及最大位移的節點2位移不超過0.02m。

```
function [g,geq]= nonlcon(r)
[sigma,Q]=sol_TenBarTruss(r(1),r(2));
g(1)=-(min(sigma)+2.5*10^8);
g(2)=max(sigma)-2.5*10^8;
g(3)=sqrt(Q(3)^2+Q(4)^2)-0.02;

geq=[];
```

依照題目給予上下界r=0.001 0.5，最後建立主程式檔執行最佳化。

```
clear all
clc

r0=[0.25,0.25];
A = []; % 線性不等式拘束條件的係數矩陣
b = []; % 線性不等式拘束條件的係數向量 AX <= b
Aeq = []; % 線性不等式拘束條件的係數向量
beq = []; % 線性等式拘束條件的係數向量 AeqX = beq
lb = [0.001; 0.001]; % 設計空間的upper bounds
ub = [0.5; 0.5]; % 設計空間的lower bounds
options = optimset ('display','off','Algorithm','sqp');
[r,fval,exitflag] = fmincon(@(r)object_function(r), r0, A, b, Aeq, beq, lb, ub,
    @(r)nonlcon(r),options);
```

得到最佳半徑爲r1=0.3(m),r2=0.2663(m)，最輕重量爲212410kg。

最後繪製其設計空間、可行解空間與目標函數值，程式有點冗長寫在主程式14-62行。

fval	2.1241e+04
i	50
j	50
lb	[1.0000e-03;1.0...
MD	*2500x2 double*
MDT	1813
options	*1x1 struct*
Q	*12x1 double*
r	[0.3000,0.2663]