数学建模算法与实践

微分方程数值解应用案例1

ODE介绍和多级火箭升空问题

HY Deng

dhy0826@126.com

内容提要

❶ **微分方程Matlab解析解**

❷ 微分方程Matlab数值解

❸ 案例1：火箭升空问题

❹ 案例2：嫦娥三号软着陆轨道设计子问题

❺ 案例3：多层高温作业专业服装设计问题

❻ 案例4：高压油管的压力控制问题

微分方程模型介绍

- 微分方程建模：速度、加速度以及所处位置随时间的变化等，一般可以用微分方程或方程组表示
- 应用领域：物理学（如动力学等）模型，航空航天（火箭、宇宙飞船技术）模型，考古（鉴定文物年代）模型等，生态模型（人口、种群数量），医学（传染病）
- 连续与离散：微分方程（组）、差分方程（组）

微分方程解析解

- 引例：求解微分方程 $\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+y(t)=te^{-t}, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-2 \end{cases}$

- Matlab求解微分方程：dsolve

```
y=dsolve('eq1','eq2', ... ,'cond1','cond2', ... ,'v')
```

说明：其中y为输出， eq1、eq2、...为微分方程，cond1、cond2、...为初值条件，v为自变量

dsolve 的几点使用说明

- 微分方程中用 D 表示对 自变量 的导数，如:

  Dy → y'; D2y → y''; D3y → y'''

- 如果省略初值条件，则表示求通解;
- 如果省略自变量，则默认自变量为 *t*

```
dsolve('Dy=2*x','x');   % dy/dx = 2x
dsolve('Dy=2*x');       % dy/dt = 2x
```

- 初始条件的描述: y(a)=b,Dy(a)=d
- 若找不到解析解，则返回其积分形式

微分方程解析解

- 引例：求解微分方程 $\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+y(t)=te^{-t}, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-2 \end{cases}$

```
y=dsolve('D2y+2*Dy+y=t*exp(-t)','y(0)=1','Dy(0)=-2','t')
```

```
>> y=dsolve('D2y+2*Dy+y=t*exp(-t)','y(0)=1','Dy(0)=-2','t')
y =
1/exp(t) - t/exp(t) + t^3/(6*exp(t))
```

微分方程解析解

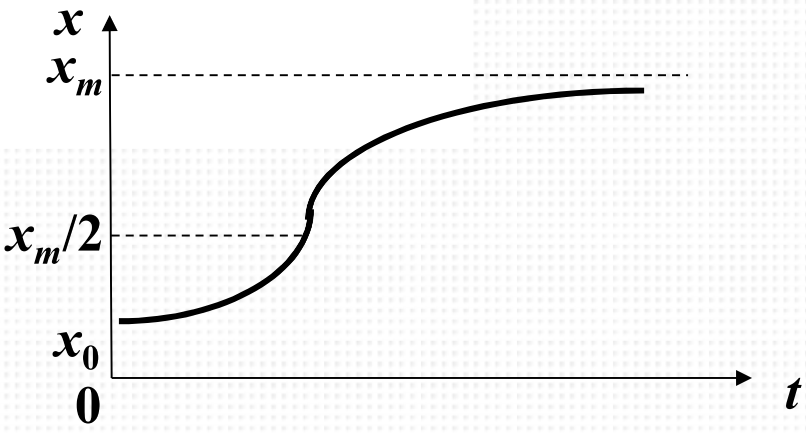
- 例： 求解阻滞增长模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx\left(1 - \dfrac{x}{x_m}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Command Window

```
>> syms r xm x0
>> x=dsolve('Dx=r*x*(1-x/xm)','x(0)=x0','t')
x =
-(xm*(tan(-(xm*(- (r*t)/xm + (2*atan((2*x0*i)/xm - i)*i)/xm)*i)/2) + i)*i)/2
>> x=simplify(x,100)
x =
(x0*xm*exp(r*t))/(xm - x0 + x0*exp(r*t))
```

$$\boxed{x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}}}$$



dsolve 练习1

例 :求微分方程 $xy'(x)+y-e^x=0$ 在初值条件 $y(1)=2e$ 下的特解.

```
y=dsolve('x*Dy+y-exp(x)=0','y(1)=2*exp(1)','x')
```

dsolve 练习2

例: 求微分方程组在初值条件下的特解.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x|_{t=0} = 1 \\ y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

```
[x,y]=dsolve('Dx+5*x+y=exp(t)','Dy-x-3*y=0', ...   'x(0)=1',
'y(0)=0', 't')
```

内容提要

❶ 微分方程Matlab解析解

❷ **微分方程Matlab数值解**

❸ 案例1：火箭升空问题

❹ 案例2：嫦娥三号软着陆轨道设计子问题

❺ 案例3：多层高温作业专业服装设计问题

❻ 案例4：高压油管的压力控制问题

微分方程解析解与数值解

- 解析解：只有很少一部分微分方程（组）能求出解析解
- 数值解：大部分微分方程（组）只能利用数值方法求数值解

微分方程数值解

❑一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \quad x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

❑离散化：计算出解函数 $y(x)$ 在一系列离散节点

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

处的近似值

$$\boxed{y_i \approx y(x_i), i = 1, 2, \cdots, n}$$

❑微分方程数值解：把上述离散解称为常微分方程的数值解

微分方程模型介绍

- **步长**：通常采用等距节点，节点的距离称为步长. 如果把区间$[a, b]$ n等分，则 $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$
- **离散化方法**：计算出解函数 $y(x)$ 在一系列离散节点

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

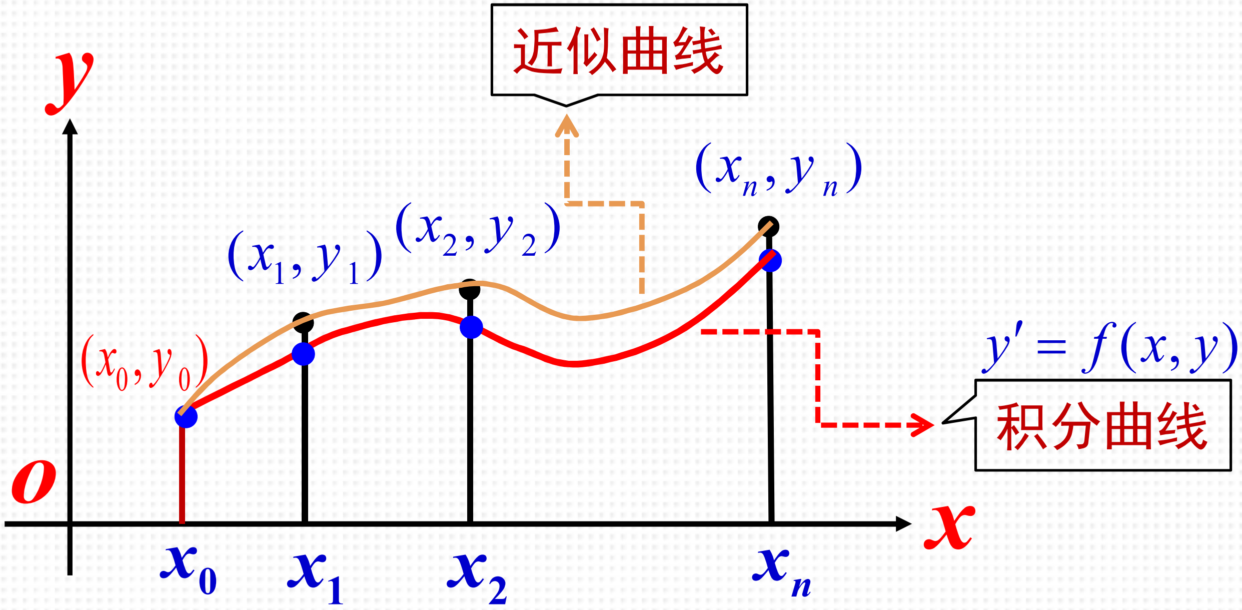
处的近似值

$$\boxed{y_i \approx y(x_i), i = 1, 2, \cdots, n}$$

- **微分方程数值解**：把上述离散解称为常微分方程的数值解

数值解的几何意义

❑解析解和数值解的几何意义：



❑初值问题解析解：表示过点(x_0, y_0)的一条（光滑）曲线

❑初值问题数值解: 表示一组离散点列 (x_i, y_i) （或一组数据点）

数值解的原理介绍

- 离散化（差分）：在离散节点x_i，有

$$\begin{cases} y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

- 离散方法1：数值微分

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \approx f(x_i, y(x_i))$$

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, N-1}$$

- 称为Euler格式，当初值y_0已知时，可递推求出 $y_1, y_2, \cdots, y_N$

数值解的原理介绍

- 离散化：在离散节点x_i，有

$$\begin{cases} y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

- 离散方法2：泰勒公式

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) \approx y(x_i) + hy'(x_i) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, N-1}$$

数值解的原理介绍

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

- 离散方法3：数值积分
- 对微分方程两边分别关于x积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

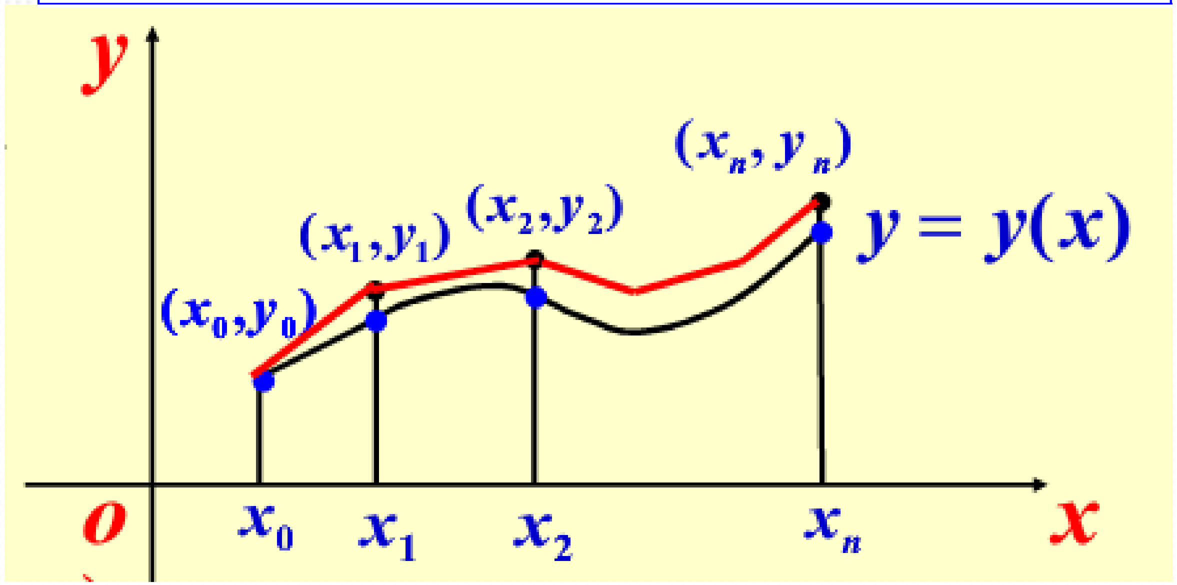
$$y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx f(x_i, y(x_i))(x_{i+1} - x_i)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, N-1}$$

数值解的原理介绍

- 欧拉法的几何意义

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, N-1$$



- 欧拉法：显格式，一阶方法

数值解的原理介绍

- 显格式和隐格式：通常隐格式稳定性好

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, N-1}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, N-1}$$

- *p*阶方法：如果局部截断误差为 $O(h^{p+1})$

- 多步方法：

例如四阶经典Runge-Kutta方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_{n+1/2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(x_{n+1/2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2), \\ K_4 = f(x_{n+1}, y_n + hK_3). \end{cases}$$

Matlab数值求解

[T, Y] = solver(odefun, tspan, y0)

- y0 为初值条件
- tspan为求解区间；
- T (向量) 中返回的是分割点的值(自变量)
- Y (向量) 中返回的是解函数在这些分割点上的函数值
- solver 为Matlab的ODE求解器（可以是 ode45、ode23、ode113、ode15s、ode23s、ode23t、ode23tb）
- 没有一种算法可以有效求解所有ODE问题，对于不同的ODE，可以调用不同的求解器

Matlab主要ODE求解器

求解器	ODE类型	特点	说明
ode45	非刚性	单步法；4，5 阶 Runge-Kutta 方法；累计截断误差为 $(\Delta x)^3$	大部分场合的首选方法
ode23	非刚性	单步法；2，3 阶 Runge-Kutta 方法；累计截断误差为 $(\Delta x)^3$	使用于精度较低的情形

Matlab数值求解举例

❑例：求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y}, 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

❑第1步：编写微分方程函数

```
function dy=odefun(x,y)
dy=y-2*x/y;
```

❑第2步：调用ODE命令

```
y0=1;
xspan=0:0.1:1;
[X,Y]=ode45('odefun',xspan, y0)
```

Matlab数值求解举例

输出结果:

Command Window

X =	Y =
0	1.0000
0.1000	1.0954
0.2000	1.1832
0.3000	1.2649
0.4000	1.3416
0.5000	1.4142
0.6000	1.4832
0.7000	1.5492
0.8000	1.6125
0.9000	1.6733
1.0000	1.7321

解析解:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y}, 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
4    %求数值解
5 -  y=dsolve('Dy=y-2*x/y','y(0)=1','x')
```

```
y =
(2*x + 1)^(1/2)
```

$$y = \sqrt{2x+1}$$

Matlab数值求解举例

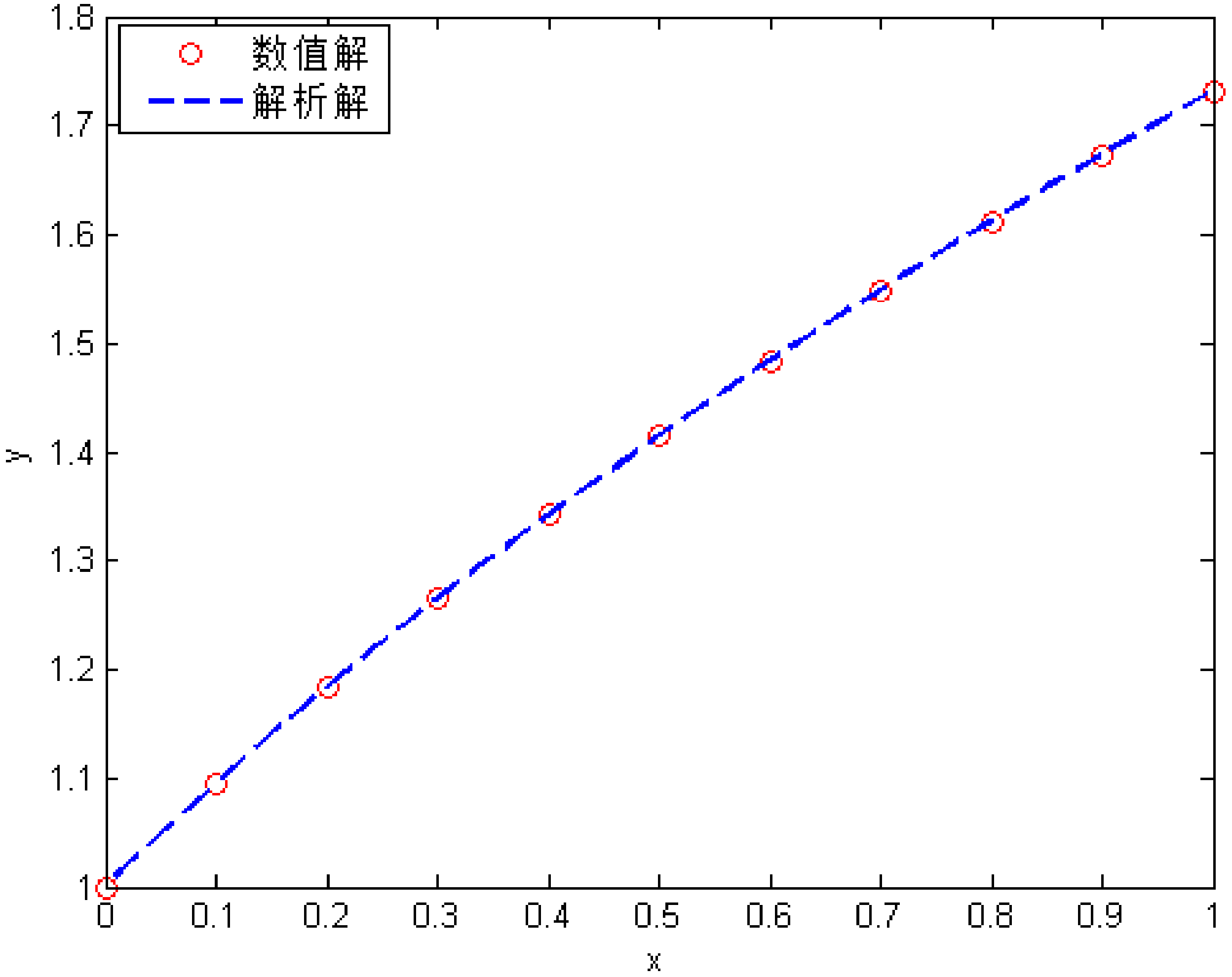
❑数值解与解析解比较:

```
new_x=linspace(0,1,100);
new_y=subs(y,'x',new_x);
plot(X,Y,'ro')
hold on
plot(new_x,new_y,'b--','Linewidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('数值解','解析解')
%最大绝对值误差
err=max(abs(subs(y,'x',xspan)-Y'))
```

Matlab数值求解举例

❑数值解与解析解比较：

```
err =
  9.1977e-009
```



高阶微分方程数值解

- 先化为一阶微分方程组：对于高阶微分方程，须先转换为一阶微分方程组，再进行求解
- 例：求下面初值问题的数值解

$$\begin{cases} y'''(t) + 2(y''(t))^2(y'(t) - 4) - \sqrt{y(t)} = 0, 0 \leq t \leq 12 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

高阶微分方程数值解

- 第1步：引入变量：$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases}$

- 高阶微分方程转化为一阶微分方程组：

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = -2y_3^2(t)(y_2(t)-4) + \sqrt{y_1(t)} \end{cases}$$

Matlab数值求解举例

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = -2y_3^2(t)(y_2(t)-4) + \sqrt{y_1(t)} \end{cases}$$

❑第2步：编写微分方程函数

```
function dy=odefuns(t,y)
dy = zeros(3,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=y(3);
dy(3)=-2*y(3)^2*(y(2)-4)+sqrt(y(1));
```

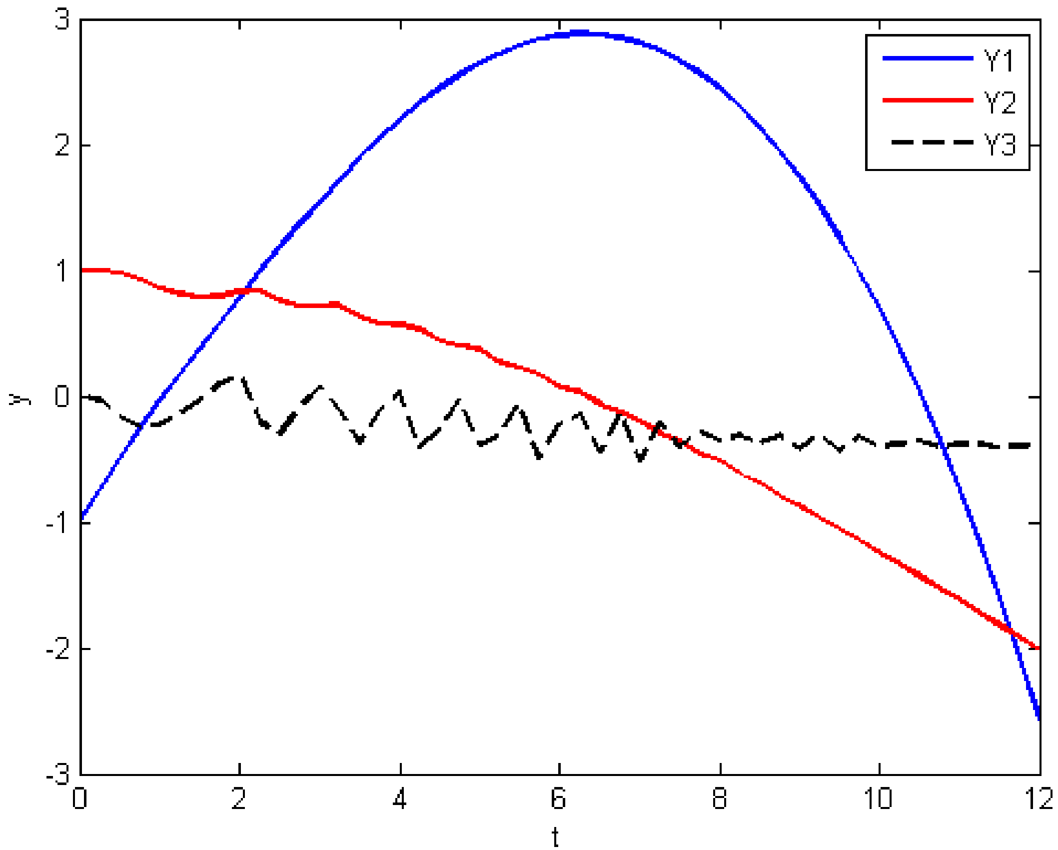
Matlab数值求解举例

❑第3步：调用数值解命令

```
tspan =0:0.25:12;
y0=[-1 1 0];
[t,Y]=ode45('odefuns',tspan,y0);
plot(t,Y(:,1),'b-','Linewidth',2)
hold on
plot(t,Y(:,2),'r-','Linewidth',2)
plot(t,Y(:,3),'k--','Linewidth',2)
xlabel('t')
ylabel('y')
legend('Y1','Y2','Y3')
```

Matlab数值求解举例

- 思考：Y1, Y2, Y3代表的含义是什么？
- 函数值，导数值，二阶导数值



高阶微分方程数值解

❑练习：已知Lorenz模型的状态方程为

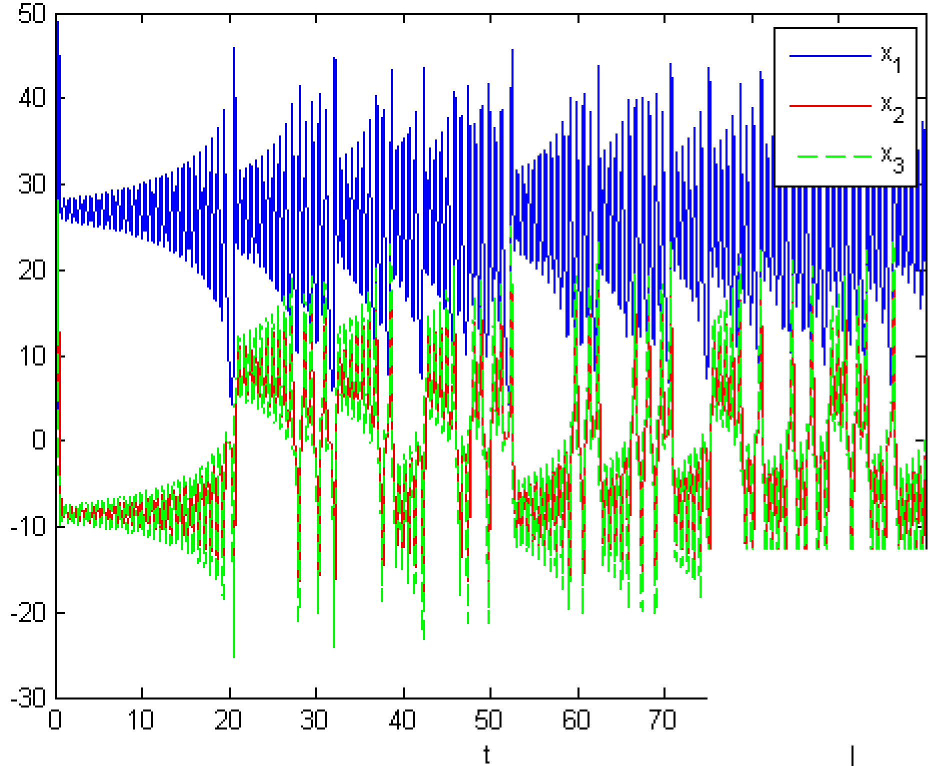
$$\begin{cases} x_1' = -\beta x_1 + x_2 x_3, \\ x_2' = -\rho x_2 + \rho x_3, \\ x_3' = -x_1 x_2 + \sigma x_2 - x_3 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, x_3(0) = 10^{-10} \end{cases}$$

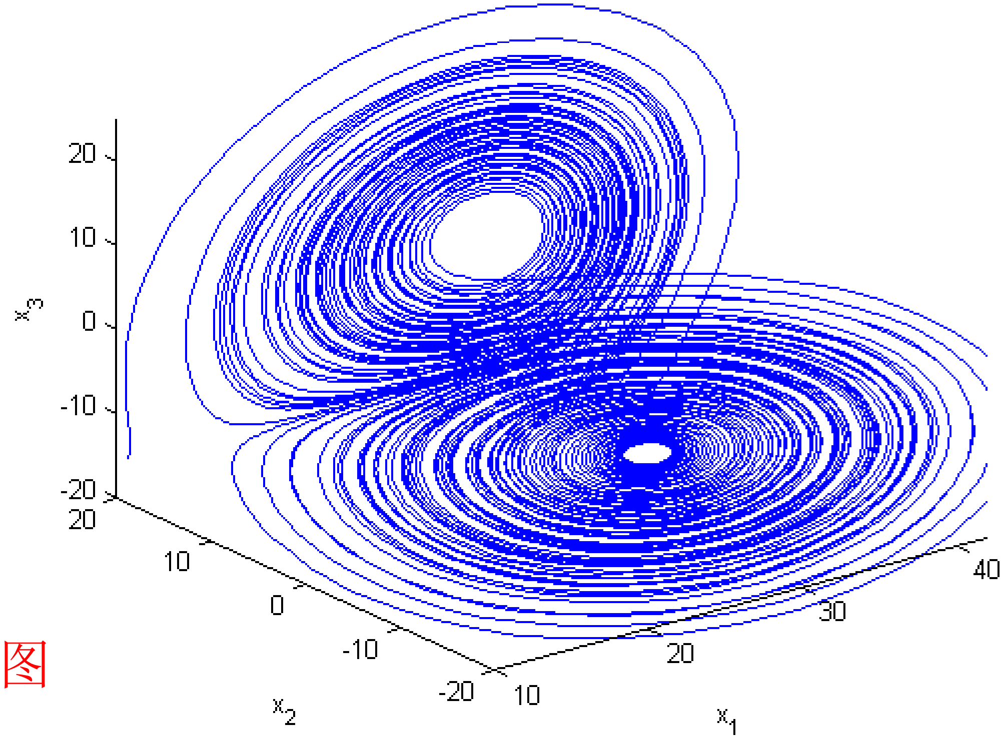
取 $\beta = \dfrac{8}{3}, \rho = 10, \sigma = 28$ ，求该模型 $t \in [0, 100]$ 的数值解，并分别绘制状态曲线和相空间图.

高阶微分方程数值解

❑图形显示结果

```
tspan=0:0.01:100;
x0 =[0;0;1e-10];
[T,X] = ode45('Lorenz',tspan,y0);
plot(T,X(:,1),'b-','Linewidth',1)
hold on
plot(T,X(:,2),'r-','Linewidth',1)
plot(T,X(:,3),'g--','Linewidth',1)
figure(2)
plot3(X(:,1), X(:,2), X(:,3));
axis([10 42 -20 20 -20 25])
```





❑相空间图

内容提要

❶ 微分方程Matlab解析解

❷ 微分方程Matlab数值解

❸ 案例1：火箭升空问题

❹ 案例2：嫦娥三号软着陆轨道设计子问题

❺ 案例3：多层高温作业专业服装设计问题

火箭升空问题

一个二级火箭的总重量为2800公斤。第一级火箭的重量为1000公斤，其中燃料为800公斤。第一级火箭燃料燃烧完毕后自动脱落，第二级火箭立即继续燃烧。第二级火箭中的燃料为600公斤。假设火箭垂直向上发射，两级火箭中的燃料同质，燃烧率为15公斤/秒，产生的推力为30000牛顿。火箭上升时空气阻力正比于速度的平方，比例系数为0.4公斤/米。

(1)建立第一级火箭燃烧时火箭运行的数学模型，并求第一级火箭脱落时的高度、速度和加速度。

(2)建立第二级火箭燃烧时火箭运行的数学模型，并求火箭所有燃料燃烧完毕瞬间（关闭前和关闭后）的高度、速度和加速度。

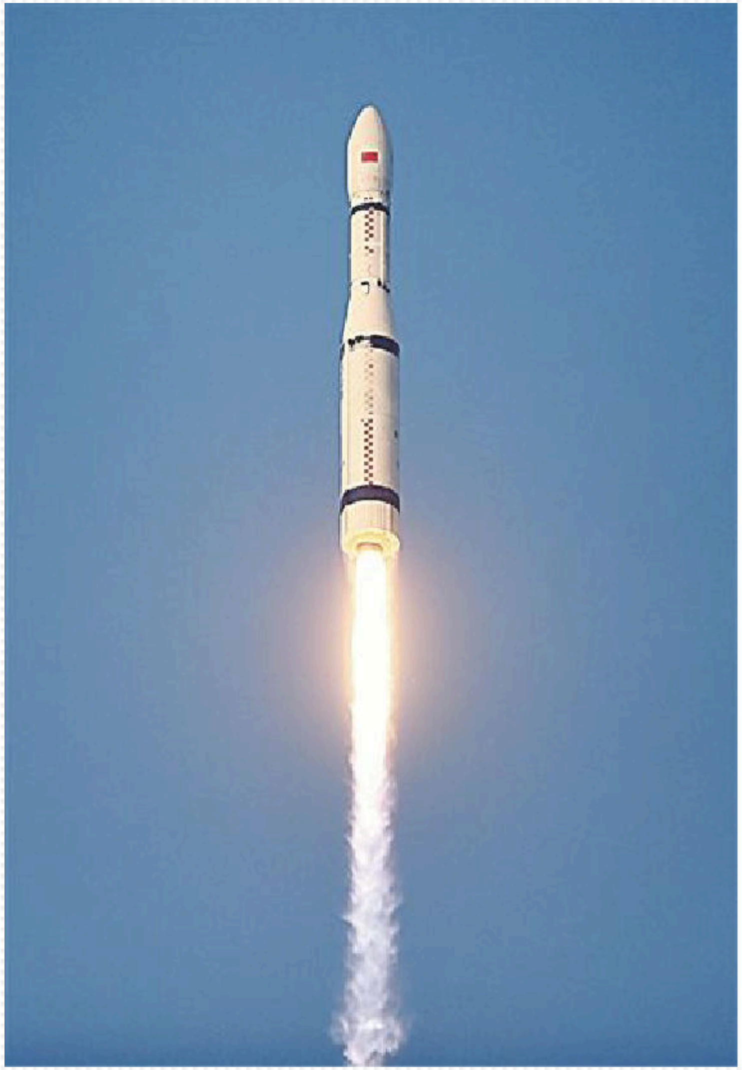
(3)建立第二级火箭脱离后火箭运行的数学模型，并求火箭高度达到的最大值。

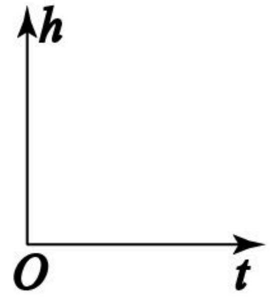
(4)建立到达最高点后火箭运行的数学模型，并求火箭降落到地面时的速度和加速度。

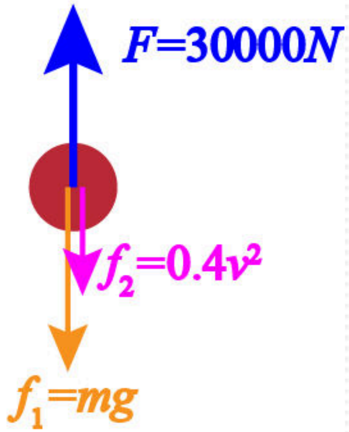
(5)把上述四个过程综合拼接起来，分别给出整个运行过程的高度、速度和加速度的动态变化过程曲线。

受力分析

- 重力
- 空气阻力
- 火箭推力







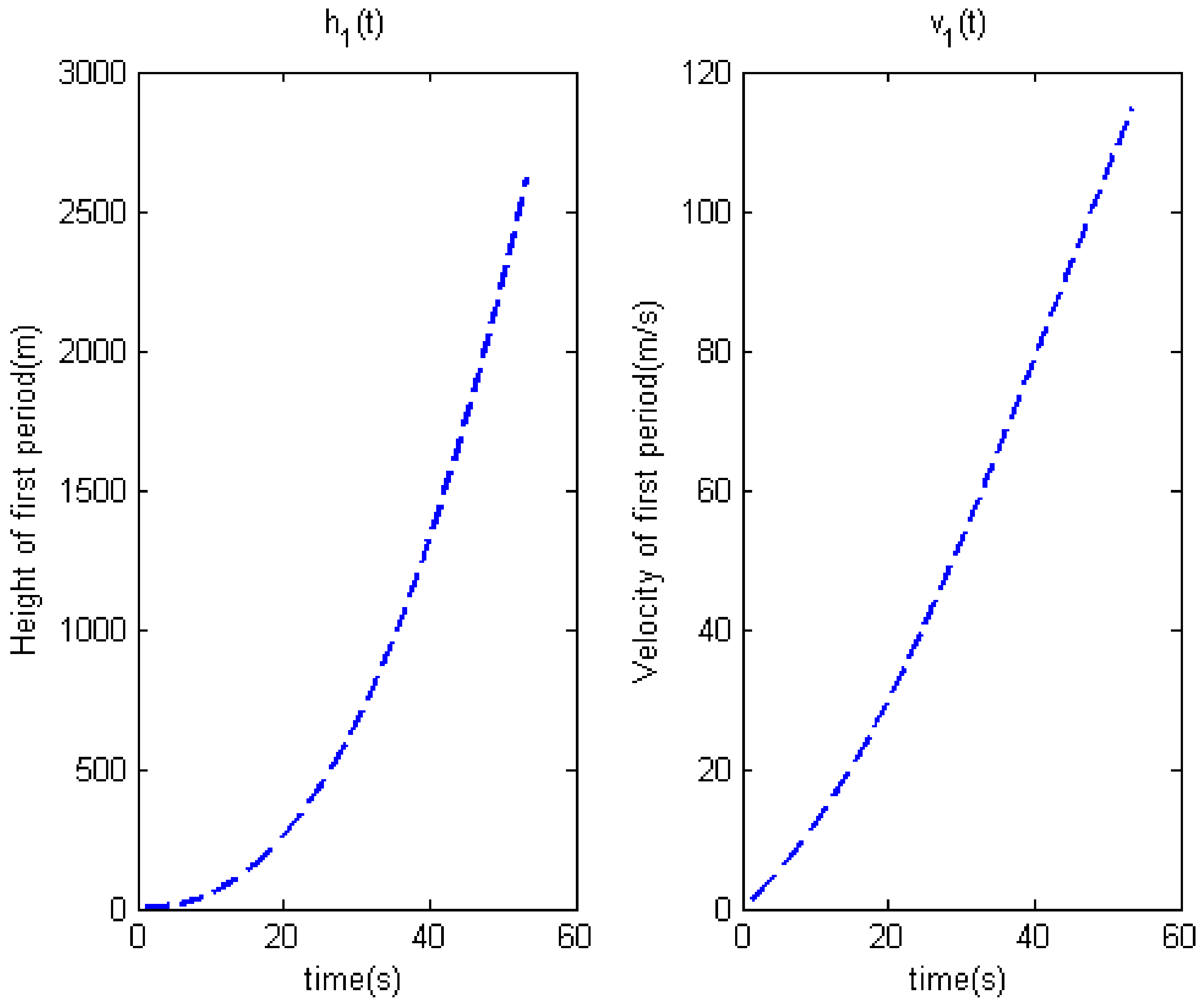
实验提示

- 根据牛顿第二定律建立模型

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=F-mg-0.4v^2,$$

第一阶段：第一级火箭运行

$$\begin{cases}\dfrac{dh_1}{dt}=v_1,\\ \dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{30000-(2800-15t)g-0.4v_1^2}{2800-15t},t\in\left[0,\dfrac{800}{15}\right]\\ h_1(0)=0,\\ v_1(0)=0\end{cases}$$



一级火箭脱落前运行过程

第二阶段：第二级火箭脱落前

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = v_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{30000 - (2600 - 15t)g - 0.4v_2^2}{2600 - 15t}, \qquad t \in (800/15, 1400/15) \\ h_2(800/15) = h_1(end), v_2(800/15) = v_1(end). \end{cases}$$

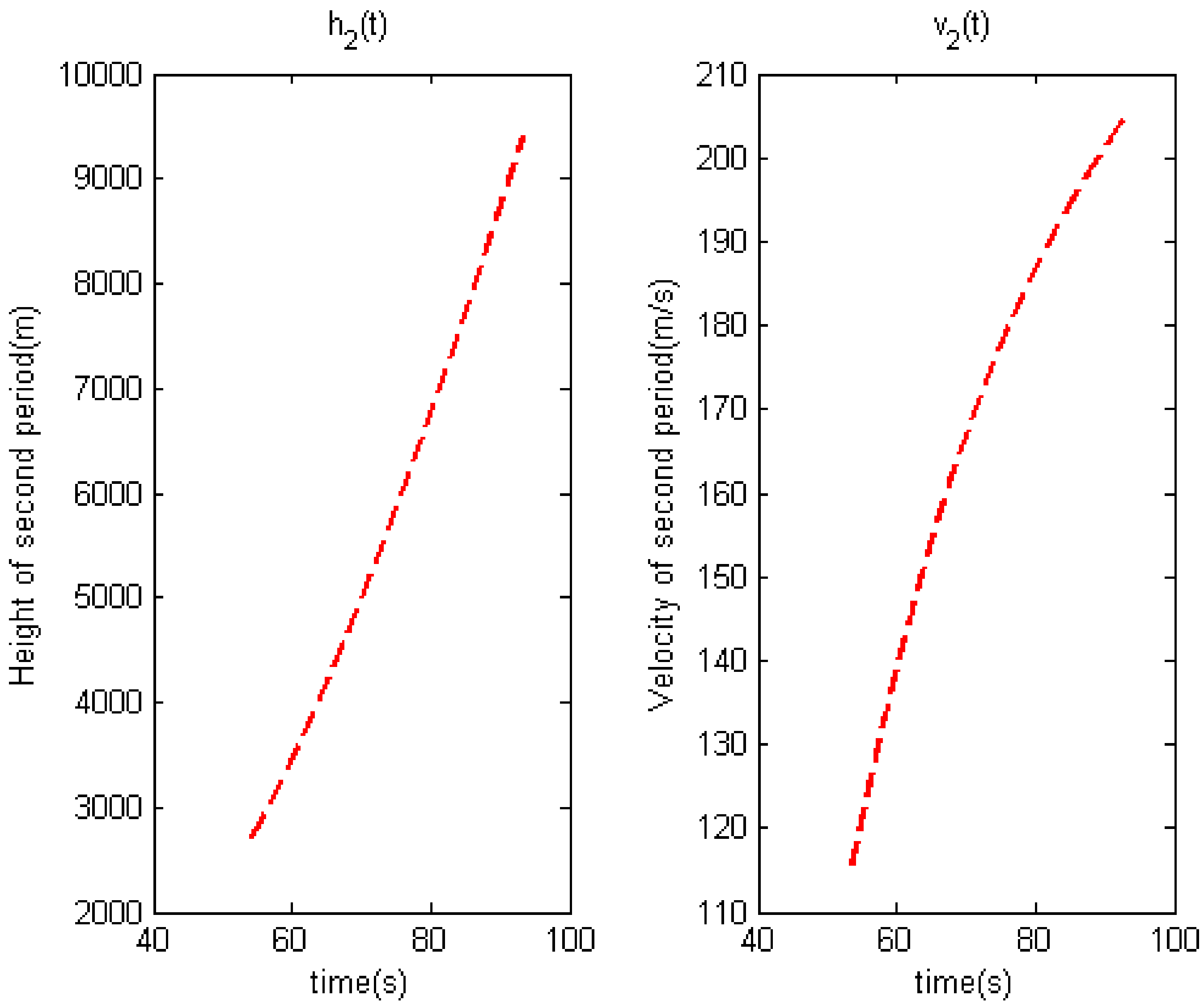
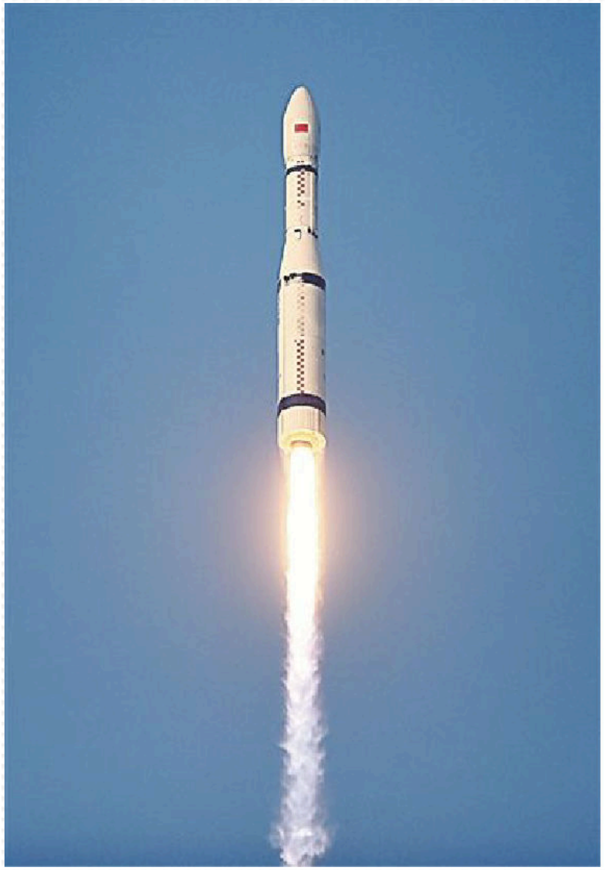
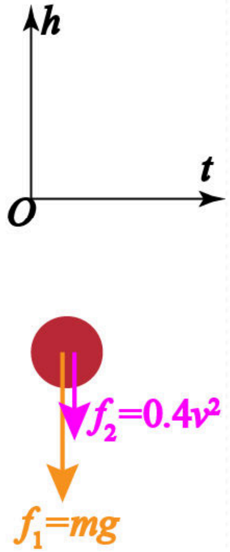


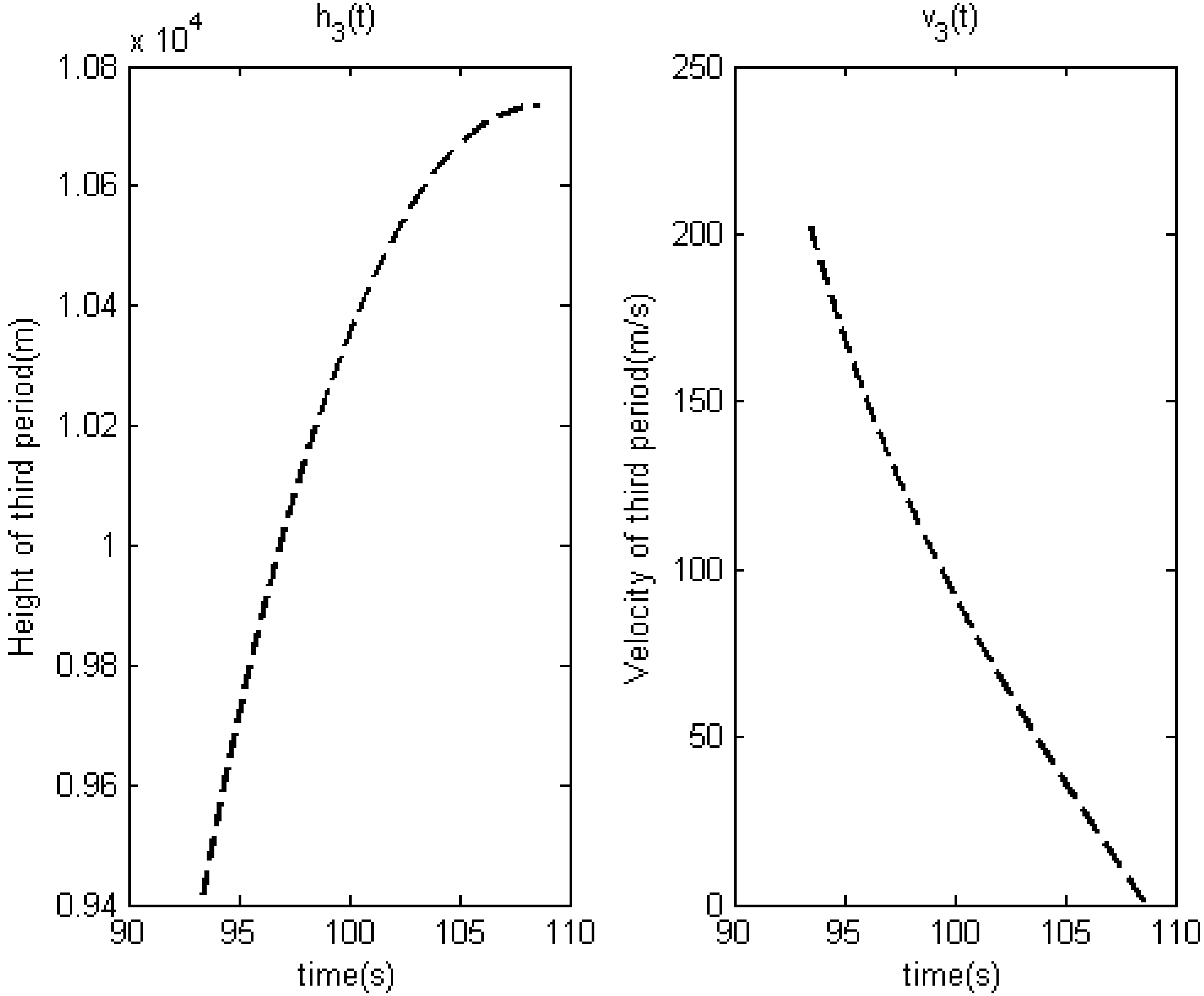
图 二级火箭脱落前运行过程

第三阶段：第二级火箭脱落后，到达最高点之前

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-1200g-0.4v^2}{1200}, \end{cases}$$



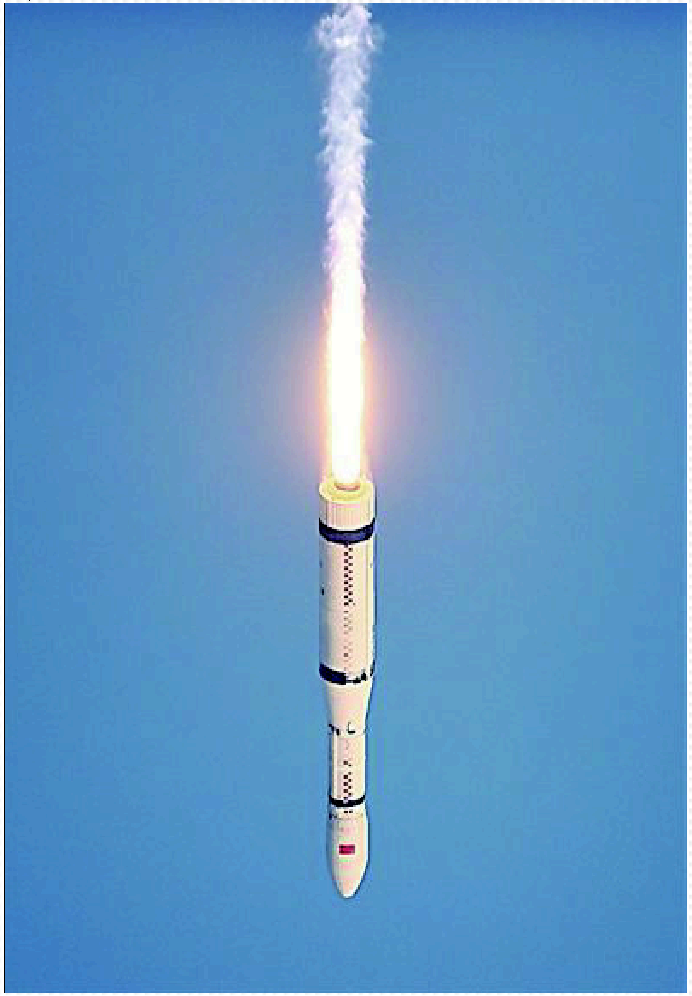


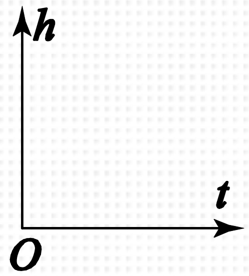


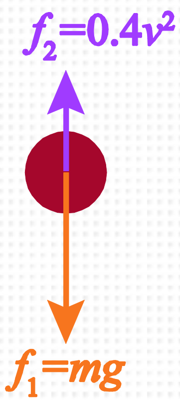
二级火箭脱落后到达最高点之前

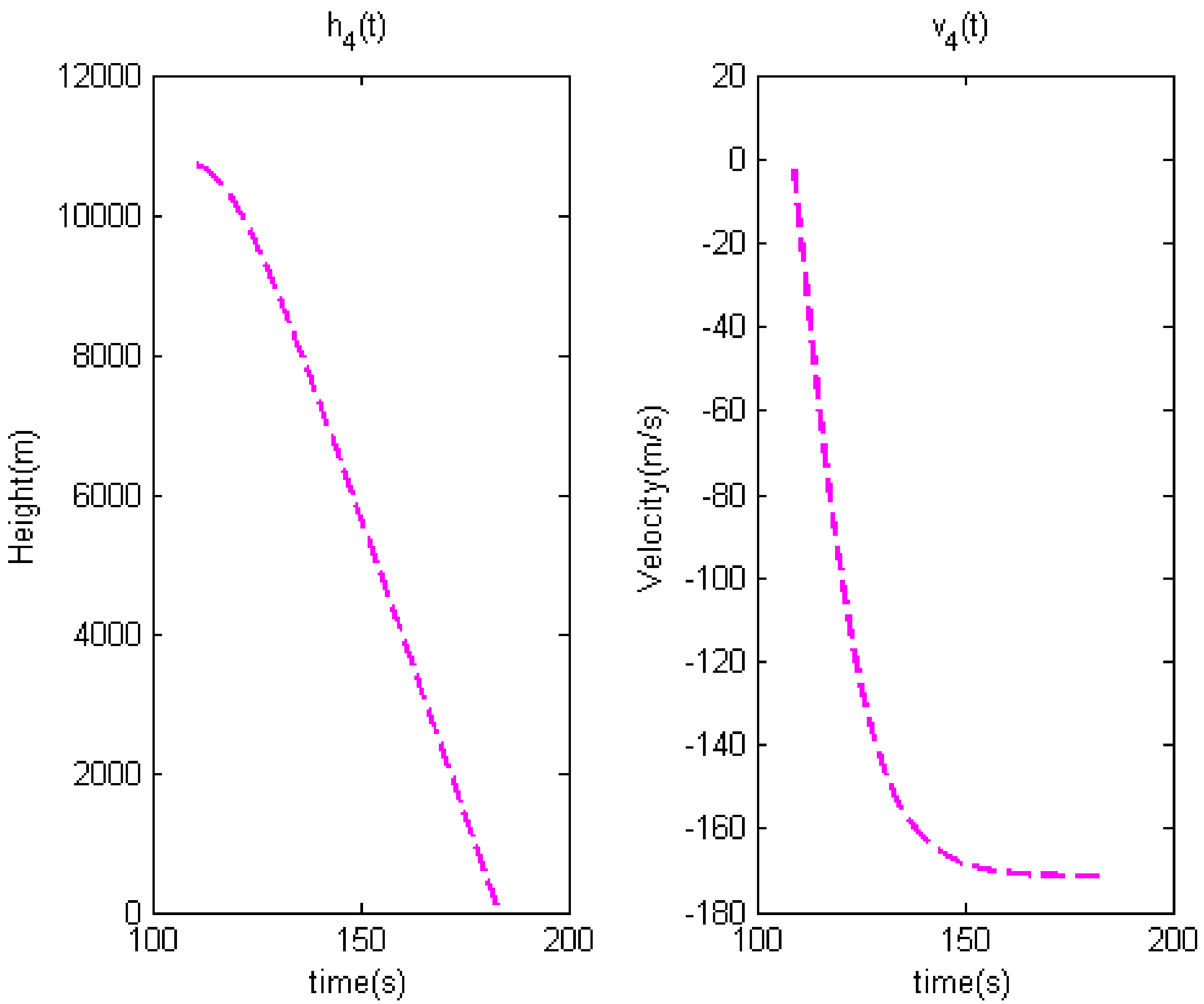
第四阶段：到达最高点之后

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{0.4v^2 - 1200g}{1200} \end{cases}$$

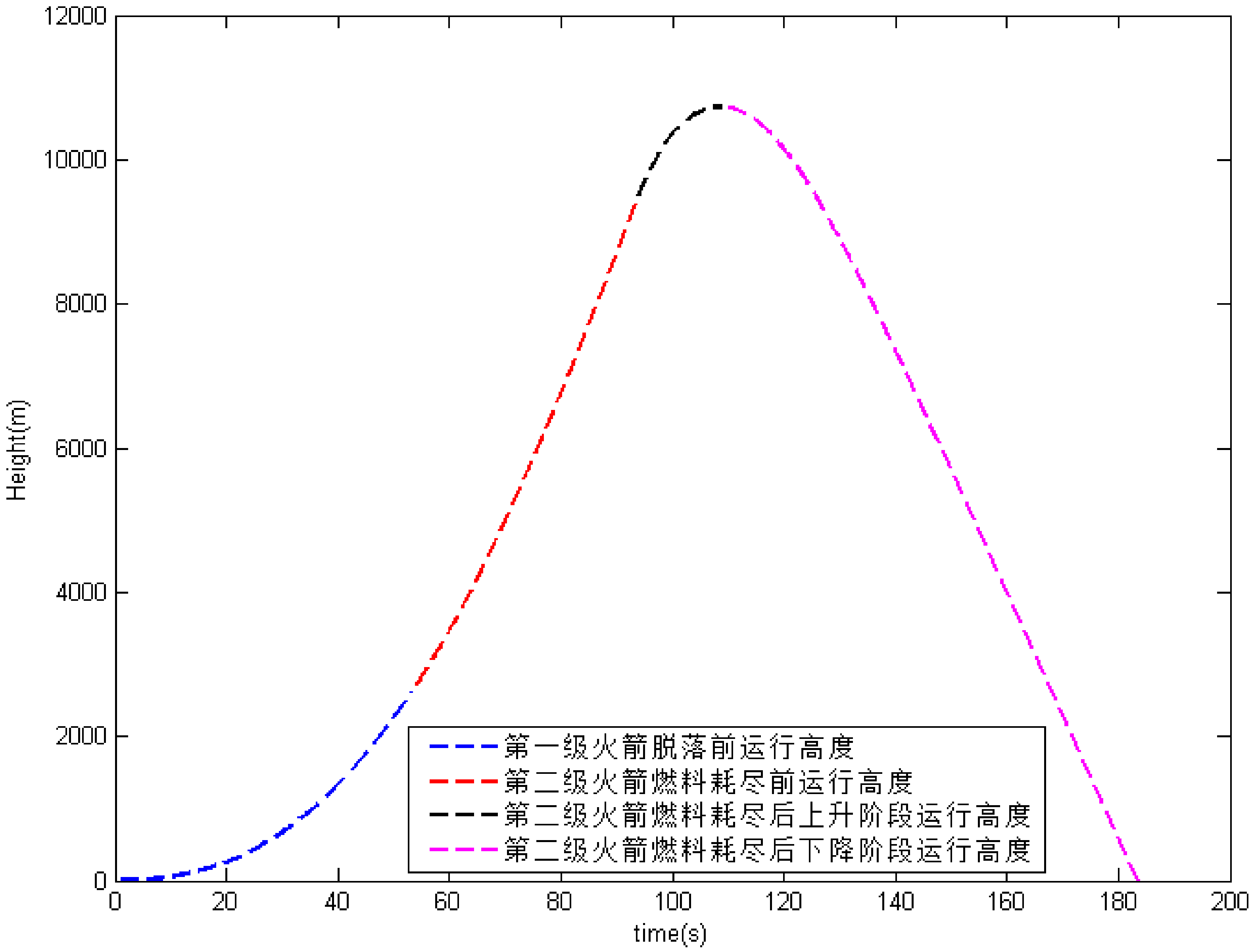




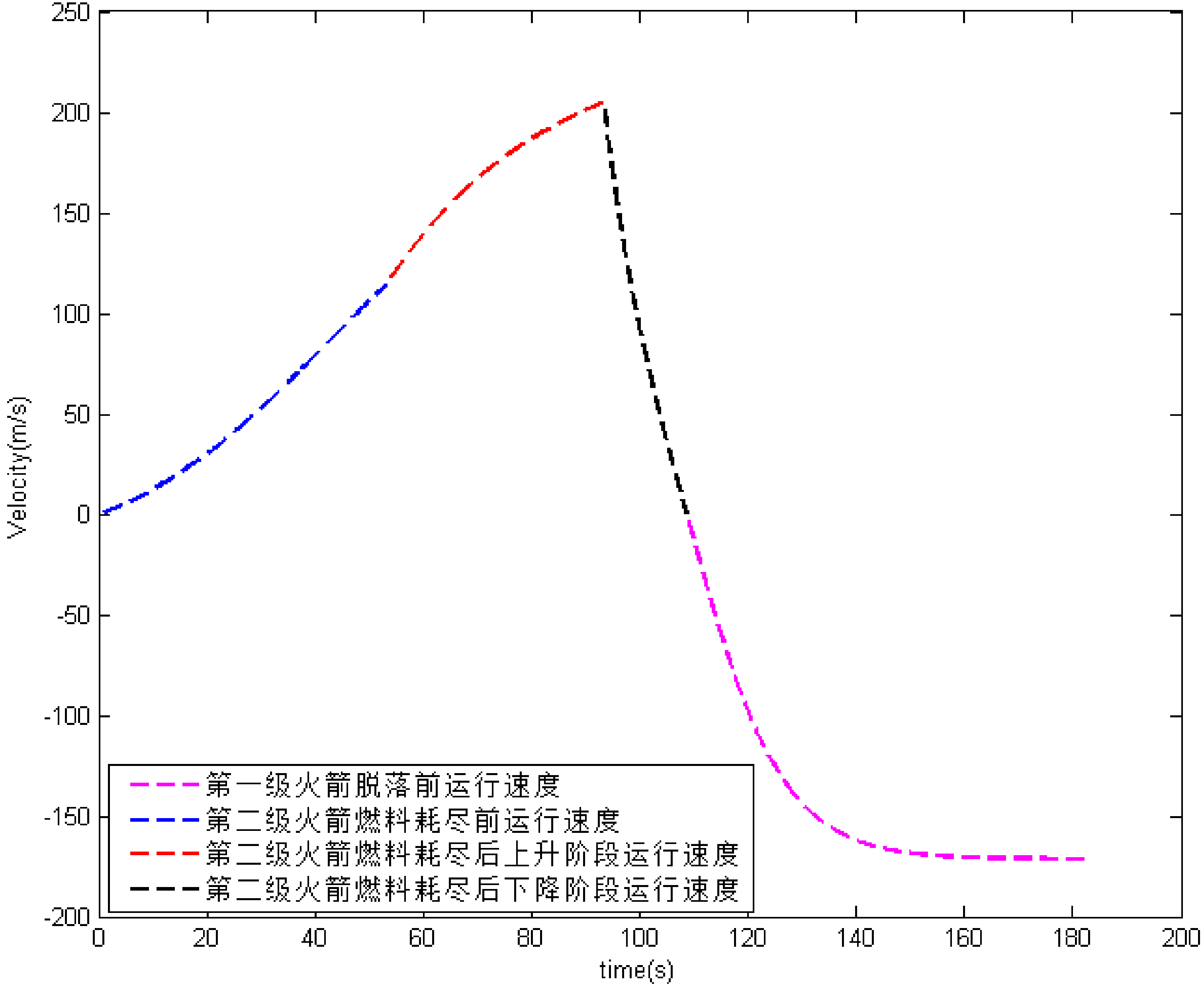




二级火箭到达最高点之后



12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
Height(m)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
time(s)
第一级火箭脱落前运行高度
第二级火箭燃料耗尽前运行高度
第二级火箭燃料耗尽后上升阶段运行高度
第二级火箭燃料耗尽后下降阶段运行高度



250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
Velocity(m/s)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
time(s)
第一级火箭脱落前运行速度
第二级火箭燃料耗尽前运行速度
第二级火箭燃料耗尽后上升阶段运行速度
第二级火箭燃料耗尽后下降阶段运行速度

- 待续：详见微分方程数值解part2

Thanks !