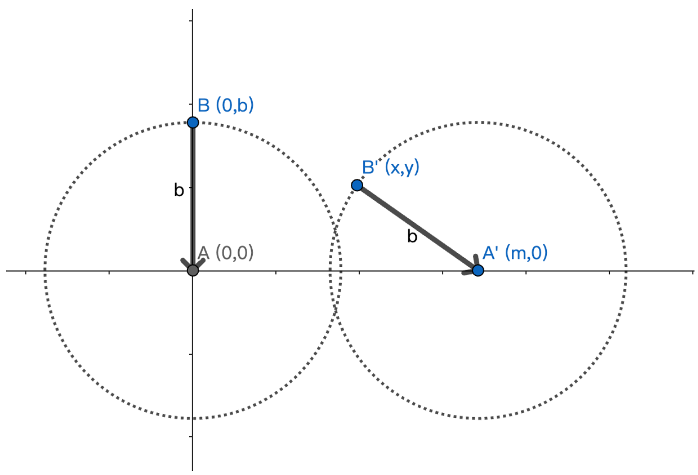
ODE EXERCISE

Melonsheep

September 2024

1 P31 4.

跟踪：设某 A 从 Oxy 平面上的原点出发，沿 x 轴正方向前进，同时某 B 从 (0,b) 开始跟踪 A，即 B 的运动方向永远指向 A 并与 A 保持等距 b，试求 B 的运动轨迹。



- **列关系式：**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x-m} \tag{1}$$

$$(x-m)^2 + y^2 = b^2 \tag{2}$$

•**ODE 求解：**(2) 式化简代入 (1) 式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}$$

两边同时积分得

$$x + \int \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y} \mathrm{d}y = 0$$

- **求解不定积分** $\int \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y} \mathrm{d}y$:

令 $y = b \sin m$,

原式 $= \int \frac{b \cos m}{b \sin m} b \cos m \, \mathrm{d}m = b \int \frac{\cos^2 m}{\sin m} b \cos m \, \mathrm{d}m = b \int \frac{\cos^2 m}{\cos^2 m - 1} \mathrm{d}(\cos m)$

令 $\cos m = n$,

原式 $= b \int \frac{n^2}{n^2 - 1} \, \mathrm{d}n = b \int 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \, \mathrm{d}n = b(n + \frac{1}{2} \ln |\frac{n-1}{n+1}|) + C$
其中 $n = \cos m = \cos \arcsin \frac{y}{b}$

- **公式代换:**

$$\arcsin x_0 = \arccos \sqrt{1 - x_0^2}, x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

令 $\frac{y}{b} = x_0$
则 $\cos \arcsin \frac{y}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}$
即 $n = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}$

- **代回原式有:**

$$x + \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b}{2} \ln |\frac{\sqrt{b^2 - y^2} - b}{\sqrt{b^2 - y^2} + b}| = C$$

其中 $x > 0, y > 0$
使用初值条件 B(0,b) 解得 C=0
故 B 的光滑运动轨迹为:

$$x + \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b}{2} \ln |\frac{\sqrt{b^2 - y^2} - b}{\sqrt{b^2 - y^2} + b}| = 0$$

其中 $x \geq 0, y > 0$

•**Additional illustration:**

proof that:

$$\arcsin x_0 = \arccos \sqrt{1 - x_0^2}, x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
&y = \arcsin x_0 \\
&\Rightarrow x_0 = \sin y \\
&\Rightarrow \sqrt{1 - x_0^2} = \cos y \\
&= \arccos \sqrt{1 - x_0^2} \\
&\Rightarrow \arcsin x_0 = \arccos \sqrt{1 - x_0^2}
\end{aligned}$$

QED.