数论总结

D. Same GCDs

https://codeforces.com/problemset/problem/1295/D

- 前置知识

辗转相除法（欧几里得算法）

$$\gcd(\text{较大数}, \text{较小数}) = \gcd(\text{较小数，二者余数})$$

通俗的数学语言表示：

$$\gcd(a\,,b) = \gcd(b\,,a \mod b)$$

PS : 有 $\gcd$ 出现要想到辗转相除法，每次都会忘记

欧拉函数

对于一个正整数 n , 欧拉函数 $\phi(n)$ 等于小于等于 n 的正整数中于 n 互质的数的数目

计算过程如下：

1. 首先将给定的数拆分为标准分解式的格式:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_r^{k_r}$$

2. 计算欧拉函数

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i - 1}(p-1)$$

补充欧拉函数的性质：

> $\phi(a \times b) = \phi(a) \times \phi(b)$, 当 n 为奇数时 $\phi(2n) = \phi(n)$
>
> $n = \sum\limits_{d|n} \phi(d)$
>
> 若 $n = p^k$ $(p\text{为质数})$, $\phi(n) = p^k - p^{k-1}$

- 拓展

更相减损术

$$\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$$

优化后的结果：

如果： $(2 \mid a) \wedge (2 \mid b)$ 则有 $\gcd(a, b) = 2\gcd(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

如果： $(2 \mid a) \wedge (2 \nmid b)$, 则有 $\gcd(\frac{a}{2}, b)$

此算法的复杂度为 $O(\log n)$

- 本题思路如下：

> $\sum\limits_{x=0}^{m-1}[\gcd(a,m)=\gcd(a+x,m)] \implies \sum\limits_{x=0}^{m-1}[\gcd(a,m)=\gcd((a+x) \mod m,m)]$
>
> $\implies \sum\limits_{x=0}^{m-1}[\gcd(a,m)=\gcd(x,m)]$， $(a+x)$ 在 x 从 $0 \to m$ 过程中会有且仅一次的覆盖整个取模空间
>
> 令 $\gcd(a,m)=\gcd(x,m)=q \implies \frac{\gcd(x,m)}{q}=1$, 这个 q 我们是知道的
>
> 即求 $\sum\limits_{x=0}^{m-1}[\frac{\gcd(x,m)}{q}=1]$, 稍微转化一下： $\sum\limits_{0\le i\le m}^{q|i}[\gcd(i,\frac{m}{q})=1]$
>
> 因为 $x<m$ ， 所以 $\sum\limits_{0\le i\le m}^{q|i}$ 实际上的范围就是 $1 \sim \frac{m}{q}-1$
>
> 这实际就是 $\phi(\frac{m}{q})$

D. Dima and Lisa

https://codeforces.com/problemset/problem/584/D

- 前置知识

哥德巴赫猜想

一个任意大于 2 的整数都可以分解成三个质数之和

附属猜想， 任何一个大于 2 的偶数都可以分解为两个质数之和

质数密度情况

通过数学证明证明出两两素数间的平均距离大致为 $\log n$