深蓝学院

shenlanxueyuan.com

机器人学中的状态估计

大作业讲评

主讲人 李衡

大作业

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

论述题（大作业）：
给定一个综合的自动驾驶SLAM问题，含有传感器为：

- RTK
- IMU
- 车速计
- 激光传感器

请建立离散场景下车辆SLAM问题的数学模型，给出批量状态估计的MAP解法，使用矩阵李群方法，推导其线性化后模型（可以认为各传感器已符合某个给定的时间同步方案）。

该问题有一定的自由发挥空间，大家可以自己定义系统级别的处理方式。例如，IMU部分可以先与车速组合，得到相对运动估计，再作为系统相对运动的一次观测；或者也可以将IMU原始数据模型考虑进来，估计自身参数。

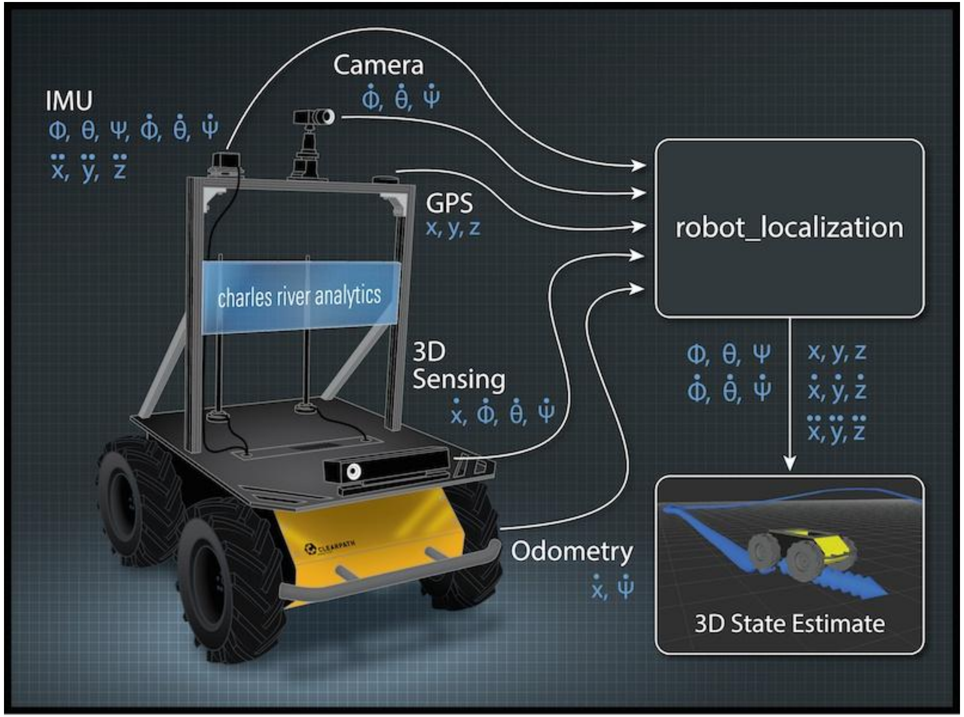
大作业

问题：

1、建立离散场景下SLAM问题数学模型

2、使用矩阵李群方法推导线性化模型

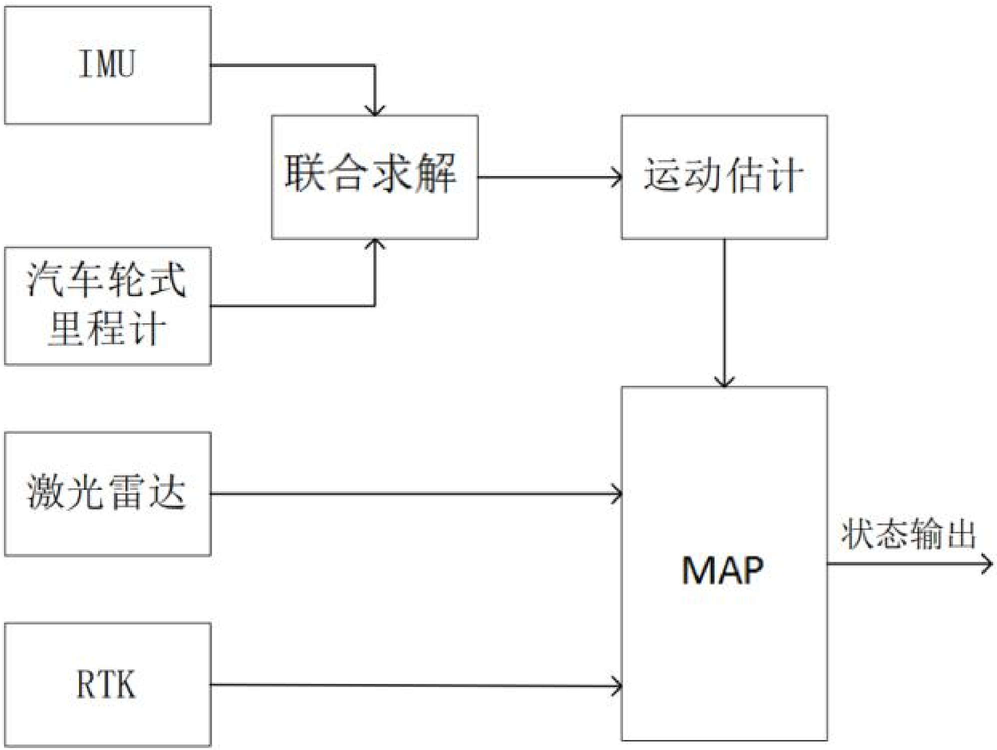
3、给出批量状态估计MAP解法



大作业

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

求解思路：



解答：

imu、车速计作为运动模型，激光、RTK作为测量模型

一、假设及定义：

1、世界坐标系固定于初始车辆坐标系

2、车辆坐标系与激光传感器坐标系重合

3、忽略地球自转等微小的运动量；

4、较短时间间隔内认为机器人匀速运动

5、RTK频率<激光雷达频率<imu频率=车速计频率

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

二、符号说明：

车辆坐标系：F_{v_k}

世界坐标系：$F_w = F_{v_0}$

Imu 坐标系：F_{i_k}

激光坐标系：F_{l_k}

RTK 坐标系：F_{r_k}

变换矩阵形式： $T_{w,v_k} = \begin{bmatrix} R_{w,v_k} & t_{w,v_k}^{v_k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

其中R_{w,v_k}表达了坐标 系$\mathcal{F}_{v_k}$到坐标系$\mathcal{F}_w$之间的旋转

$t_{w,v_k}^{v_k}$表达了坐标系$\mathcal{F}_{v_k}$的原点到坐标系$\mathcal{F}_w$原点之间平移向量在$\mathcal{F}_{v_k}$下的坐标

RTK、IMU 传感器坐标系到车辆坐标系的变换分别为$T_{r,v}$和$T_{i,v}$

大作业

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

三、状态变量：

设待估计的状态为$T_k = T_{v_k,w}$， k=1,...,K。

记状态变量

$$x = \{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$$

整个问题描述为给定传感器观测数据构建测量模型和运动模型，求状态变量 x 的批量式 MAP 解。

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

四、测量模型：

4.1 RTK测量模型

RTK 测量值为经度 ew，纬度 sn，海拔 al，记 t 时刻测量$g_t = [ew \quad sn \quad al]^T$，$g_0$表示世界坐标系原点的 RTK 测量值。设其与欧式空间中平移的非线性映射关系为$g(\cdot)$

$$\Delta g = g_t - g_0 = g(t_{wv}) \qquad (2.)$$

设x_k为第 k 个位姿，则 RTK 测量模型为：

$$\Delta g_k = g_k - g_0 = g(x_k) = g(D^T T_k S) + w_g \qquad (3.)$$

其中$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$用于提取出状态中的平移量, $w_g \sim N(0, R)$

为测量噪声。

大作业

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

利用一阶扰动模型对 RTK 的测量模型进行线性近似。定义状态变量中位姿的扰动：

$$\mathrm{T}_k = \exp(\epsilon_k^{\wedge})\, T_{op,k} \approx (\mathrm{I} + \epsilon_k^{\wedge}) T_{op,k} = T_{op,k} + \epsilon_k^{\wedge} T_{op,k} \qquad (4.)$$

RTK 平移的测量模型一阶近似为：

$$\begin{aligned} \Delta g_k &\approx g\left(D^T\left(T_{op,k} + \epsilon_k^{\wedge} T_{op,k}\right)S\right) \\ &\approx g\left(D^T T_{op,k} S\right) + G_k D^T \epsilon_k^{\wedge} T_{op,k} S \\ &= g\left(x_{op,k}\right) + J_k^g D^T \left(T_{op,k} S\right)^{\odot} \epsilon_k \qquad (5.) \end{aligned}$$

其中$J_k^g = \left.\frac{\partial g}{\partial T_k}\right|_{T_{op,k}}$。

4.2 IMU 和车速计测量模型

IMU 可以提供带噪声和偏置的角速度和加速度测量，其模型为：

$$\omega_k = \bar{\omega}_k + b_k^{\omega} + w_k^{\omega} \tag{6.}$$

$$a_k = \bar{a}_k + b_k^{a} + w_k^{a} \tag{7.}$$

其中b_k^{ω}和b_k^{a}分别表示角速度和加速度的测量偏差，w_k^{ω}和w_k^{a}表示角速度和加速度的高斯白噪声。偏差b_k^{ω}和b_k^{a}假设为随机游走的噪声模型：

$$b_{k+1}^{\omega} = b_k^{\omega} + w_k^{b\omega} \tag{8.}$$

$$b_{k+1}^{a} = b_k^{a} + w_k^{ba} \tag{9.}$$

假设两次 IMU 数据之间的角速度和加速度为常量，两次位姿T_k和T_{k+1}之间的相对旋转可以通过对角速度进行数值积分得到：

$$\begin{cases} \mathrm{R}_{k+1,k} = \exp\left(\sum_i (\tau_{i+1} - \tau_i)\omega_i^{\wedge}\right) \\ ,i\text{表示}[\tau_k, \tau_{k+1}]\text{之间的离散时刻} \end{cases} \tag{10.}$$

车速计给出车辆坐标系 x 轴正方向的速度v_x，噪声符合零均值高斯分布$\eta_x \sim (0, \sigma_{v_x}^2)$，$\eta_y \sim \left(0, \sigma_{v_y}^2\right)$，$\eta_z \sim (0, \sigma_{v_z}^2)$，假设车速计与 IMU 同频率。车速计的速度矢量为:

$$v = R\left(\begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix}\right) \tag{11.}$$

运动学模型：

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + a_k \Delta t \\ t_{k+1,k} &= v_k \Delta t + 0.5 a_k \Delta t^2 \end{aligned} \tag{12}$$

将车速计与 IMU 的测量进行融合，可以得到两次位姿之间的相对平移：

$$t_{k+1,k}=\sum_{i}((\exp(\tau_{i+1}+\tau_i)\,\omega_i^{\wedge})\times(v_i(\tau_{i+1}+\tau_i)+0.5\,a_i(\tau_{i+1}+\tau_i)^2)) \tag{13}$$

其中i表示$[\tau_k,\tau_{k+1}]$之间的离散时刻

综上得到两次位姿T_k和T_{k+1}之间的相对运动为：

$$T_{k+1,k}=\begin{bmatrix}\mathrm{R}_{k+1,k} & t_{k+1,k}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{14.}$$

4.3 激光传感器测量模型

激光传感器可以测量路标点在激光坐标系中的三维坐标，其测量模型为：

$$y_{jk} = z(x_{jk}) = T_k p_j \tag{15.}$$

测量值y_{jk}表示点p_j在位姿T_k下的激光雷达观测量。

其线性化展开式为(只考虑一阶扰动)：

$$\begin{aligned} y_{jk} &= D^T T_k p_j \\ &= D^T \exp\left(\epsilon_k^{\wedge}\right) T_{op,k} p_j \\ &\approx D^T\left(1 + \epsilon_k^{\wedge}\right) T_{op,k} p_j \\ &= D^T T_{op,k} p_j + D^T\left(\left(T_{op,k} p_j\right)^{\odot}\right)\epsilon_K \end{aligned} \tag{16.}$$

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

五、运动模型：

运动模型直接参考《机器人学中的状态估计》8.2 节中的模型，输入先验通过 IMU 和车速计信息替代。

SE(3)运动学公式为：

$$\dot{T} = \varpi^{\wedge} T \tag{17.}$$

其中$\varpi = \begin{bmatrix} \omega \\ \nu \end{bmatrix}$为广义速度，$\omega$为角速度，$\nu$为线速度。式中两个量分别受如下形式过程噪声影响：

$$\mathrm{T} = \exp(\delta\xi^{\wedge})\,\bar{T} \tag{18.}$$

$$\varpi = \bar{\varpi} + \delta\varpi \tag{19.}$$

则式(2)可分解为标称运动和扰动运动：

$$\text{标称运动：}\ \dot{\bar{T}} = \bar{\varpi}^{\wedge} \bar{T} \tag{20.}$$

$$\text{扰动运动：}\ \delta\dot{\xi} = \bar{\varpi}^{\curlywedge} \delta\xi + \delta\varpi \tag{21.}$$

大作业

对于离散时间模型，由于没有给出输入量ϖ，通过 IMU 和车速计得到的相对运动$T_{k,k-1}$，代替$\exp(\Delta t_k \varpi_k^{\wedge})$并将 IMU 和车速计的噪声统一为过程噪声$w_k \sim N(0, Q_k)$，得到标称运动和扰动运动：

标称运动：$\bar{T}_k = T_{k,k-1} T_{k-1}$ (22.)

扰动运动：$\delta\xi_k = Ad(T_{k,k-1}) \delta\xi_{k-1} + w_k$ (23.)

五、批量式 MAP 求解(参考书8.2.5)：

由于 RTK 频率低于激光雷达，所以并不是每组观测量都包含 RTK。定义观测量为：

$$y=\{y_{10},\cdots,y_{M0},y_0,\cdots,y_{11},\cdots,y_{M1},y_{12},\cdots,y_{M2},\cdots\cdots,y_{1\,10},\cdots,y_{M10},y_{10},\cdots\cdots,\cdots,y_{1k},\cdots,y_{Mk},y_k\} \quad (24.)$$

其中y_{10}表示位姿T_0下p_1的观测值，y_0表示位姿T_0下的 RTK 观测值。

5.1误差项(测量模型中线性化部分已推导)：

(1)
$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{v,k}(\mathbf{x}) &= \ln\left(\boldsymbol{\Xi}_k \mathbf{T}_{k-1}\mathbf{T}_k^{-1}\right)^{\vee} \\ &\approx \mathbf{e}_{v,k}(\mathbf{x}_{\text{op}}) + \underbrace{\text{Ad}\left(\mathbf{T}_{\text{op},k}\mathbf{T}_{\text{op},k-1}^{-1}\right)}_{\mathbf{F}_{k-1}} \boldsymbol{\epsilon}_{k-1} - \boldsymbol{\epsilon}_k \end{aligned} \quad (25.)$$

$$\mathbf{e}_{v,k}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0},\mathbf{Q}_k\right)$$

大作业

(2) $$\begin{aligned}\mathbf{e}_{y,jk}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}_{jk} - \mathbf{D}^T\mathbf{T}_k\mathbf{p}_j \\ &= \underbrace{\mathbf{y}_{jk} - \mathbf{D}^T\mathbf{T}_{\mathrm{op},k}\mathbf{p}_j}_{\mathbf{e}_{y,jk}(\mathbf{x}_{\mathrm{op}})} - \underbrace{\left(\mathbf{D}^T\left(\mathbf{T}_{\mathrm{op},k}\mathbf{p}_j\right)^{\odot}\right)}_{\mathbf{G}_{jk}}\boldsymbol{\epsilon}_k \qquad (26.)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_{y,jk}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{jk}\right)$$

(3) $$\begin{aligned}e_{y,k}(x_{op}) &= y_k - g(x_k) \\ &= y_k - g\left(D^T T_{op,k} S\right) - \underbrace{J_k^g D^T \left(T_{op,k} S\right)^{\odot}}_{G_k}\epsilon_k \qquad (27.)\end{aligned}$$

$$e_{y,k}(x) \sim \mathcal{N}(0, R_k)$$

5.2最小化批量式MAP问题：

$$J_{v,k}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases}\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{v,0}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\check{\boldsymbol{P}}_0^{-1}\boldsymbol{e}_{v,0}(\boldsymbol{x}) & k=0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{v,k}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{e}_{v,k}(\boldsymbol{x}) & k=1\ldots K\end{cases}$$

$$J_{y,k}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{y,k}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{e}_{y,k}(\boldsymbol{x}) \qquad (28.)$$

大作业

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

5.3 MAP问题求解：

$$\delta x = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_K \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} F^{-1} \\ G \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

$$e(x_{op}) = \begin{bmatrix} e_v(x_{op}) \\ e_y(x_{op}) \end{bmatrix}$$

$$e_v(x_{op}) = \begin{bmatrix} e_{v,0}(x_{op}) \\ e_{v,1}(x_{op}) \\ \vdots \\ e_{v,K}(x_{op}) \end{bmatrix}, e_y(x_{op}) = \begin{bmatrix} e_{y,10}(x_{op}) \\ \vdots \\ e_{y,M0}(x_{op}) \\ \color{red}{e_{y,0}(x_{op})} \\ \vdots \\ e_{y,1K}(x_{op}) \\ \vdots \\ e_{y,MK}(x_{op}) \\ \color{red}{e_{y,K}(x_{op})} \end{bmatrix} \quad (29.)$$

$$Q = diag(\check{P}_0, Q_1, \cdots, Q_K)$$

$$R = diag(R_{M0}, \color{red}{R_0}, \cdots, R_{MK}, \color{red}{R_K})$$

大作业

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} I & & & & \\ -F_0 & I & & & \\ & -F_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & I & \\ & & & -F_{K-1} & I \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_{10} & & & \\ \vdots & & & \\ G_{M0} & & & \\ G_0 & G_{11} & & \\ & \vdots & & \\ & G_{M1} & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & G_{1k} \\ & & & \vdots \\ & & & G_{Mk} \\ & & & G_k \end{bmatrix}$$

以上矩阵的详细分块为：

$$F_{k-1} = \mathrm{Ad}(T_{op,k}T_{op,k-1}^{-1}), k = 1, \ldots, K$$

$$e_{v,k}(x_{op}) = \begin{cases} \ln(\check{T}_0 T_{op,0}^{-1}) & k = 0 \\ \ln(T_{k,k-1}T_{op,k-1}T_{op,k}^{-1})^{\vee} & k = 1, \ldots, K \end{cases}$$

$$G_{jk} = D^T(T_{op,k}p_j)^{\odot} \quad , G_k = J_k^g D^T(T_{op,k}S)^{\odot}$$

$$e_{y,jk}(x_{op}) = y_{jk} - T_{op,k}p_{op,j}$$

$$e_{y,k}(x_{op}) = y_k - g(T_{op,k})$$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

最终得到普通形式的目标函数：

$$J(x) \approx J(x_{op}) - b^T \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T A \delta x \tag{30.}$$

其中

$$\mathrm{A} = H^T W^{-1} H, b = H^T W^{-1} e(x_{op}) \tag{31.}$$

最优扰动项δx^*由以下方程求得：

$$\mathrm{A} \delta x^* = b \tag{32.}$$

求得δx^*后更新状态变量：

$$\mathbf{T}_{\mathrm{op},k} \leftarrow \exp\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{\star\wedge}\right) \mathbf{T}_{\mathrm{op},k} \tag{33.}$$

迭代直到收敛。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening