ACM图论专题

曾宇祥

SY1406122

1 ACM图论专题——概念及定理

(1) 定理（握手定理）

设$G=(V,E)$是有e条边的无向图，则$2e=\sum_{v\in V}deg(v)$.

(2) 定理

无向图有偶数个奇数度顶点。

(3) 定理

设$G=(V,E)$是带有向边的图，于是

$$\sum_{v\in V}deg^-(v)=\sum_{v\in V}deg^+(v)=|E|$$

(4) 定义　一些特殊的简单图

完全图　n个顶点的完全图(表示成K_n)是在每对不同顶点之间都恰有一条边的简单图。

圈图　圈图$C_n(n\geq 3)$是由n个顶点$v_1,v_2,\cdots,v_n$以及边$v_1,v_2,v_2,v_3,\cdots,v_{n-1},v_n,v_n,v_1$组成的。

轮图　对$n\geq 3$来说，当给圈图C_n添加另一个顶点，而且把这个新顶点与C_n里n个顶点逐个连接时，就得到轮图W_n。

n立方体图　n立方体图Q_n是用顶点表示2^n个长度为n个位串的图。两个顶点相邻，当且仅当他们表示的位串仅仅相差一位。

(5) 定义　偶图

偶图　把简单图G的顶点集分成两个不相交的非空集合V_1和V_2，使得图里的每一条边都连接着V_1里的一个顶点与V_2里的一个顶点（因此G里没有边是连接着V_1里的两个顶点或V_2里的两个顶点），则称G为偶图（二分图）。当此条件成立时，称（V_1,V_2）为G的顶点集的一个二部划分。

(6) 定理　偶图

一个简单图是偶图，当且仅当能够对图中的每个顶点赋以两种不同的颜色，而不让相邻的顶点被赋以相同的颜色。

(7) 定义　完全偶图

完全偶图 完全偶图$K_{m,n}$是顶点集分成分别含有m和n个顶点的两个子集的图。两个顶点之间有边当且仅当一个顶点属于第一个子集而另一个顶点属于第二个子集。

(8) 定义　子图与并图

子图　图$G=(V,E)$的子图是图$H=(W,F)$, 其中$W\subseteq V$而且$F\subseteq E$。

并图　两个简单图$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=<V_2,E_w>$的并图是顶点集$V_1\cup V_2$和边集$E_1\cup V_2$的简单图。G_1和G_2的并图表示为$G_1\cup G_2$。

(9) 定义　图的同构

设$G_1 = < V_1, E_1 >$和$G_2 = < V_2, E_2 >$是简单图，若存在一对一的和映射上从V_1到V_2的函数f，且f具有这样的性质：对V_1里所有的a和b来说，a和b在G_1里相邻当且仅当$f(a)$和$f(b)$在G_2里相邻，就说G_1和G_2是同构的。这样的函数f称为同构。

(10) 定义　通路

设n是非负整数且G是无向图。在G中从u到v的长度为n的通路是G的n条边$e_1, e_2, \cdots, e_n$的序列，是的$f(e_1) = x_0, x_1, f(e_2) = x_1, x_2, \cdots, f(e_n) = x_{n-1}, x_n$，其中$x_0 = u$而$x_n = v$。当这个图是简单图时，就用顶点序列$x_0, x_1, \cdots, x_n$表示这条通路。若一条通路在相同的顶点上开始和结束，即$u == v$且长度大于0，则它是一条回路。若通路或回路不重复地包含相同的边，则它是简单的。

(11) 定义　无向图的连通性

若无向图每一对不同的顶点之间都有通路，则该图称为连通的。

(12) 定理　无向图的连通性

在连通无向图的每一对不同顶点之间都存在简单通路。

(13) 定义　割点和桥

有时删除一个顶点和它所关联的边，就产生带有比原图更多的连通分支的子图。把这样的顶点称为**割点**。从连通图里删除割点，就产生不连通的子图。同理，把一旦删除就产生带有比原图更多的连通分支的子图的边称为**割边**或**桥**。

(14) 定义　有向图的连通性

若每当a和b都是一个有向图的顶点时，就有从a到b和从b到a的通路，则该图是**强连通**的。

若在有向图的底图里，任何两个顶点之间都有通路，则该图是**弱连通**的。有向图G的子图是强连通的而不包含在更大的强连通子图中，即极大强连通子图，可称之为G的强连通分支或强分支。

(15) 定理　计算顶点之间的通路数

设G是带有相对于顶点顺序$v_1, v_2, \cdots, v_n$的邻接矩阵A的图（允许带有无向或有向边、带有重边和环）。从v_i到v_j的长度为r的不同通路数目等于A^r的第(i, j)项，其中r是正整数。

(16) 定义　欧拉回路

图G里的欧拉回路是包含着G的每一条边的简单回路。图G里的欧拉通路是包含着G的每一条边的简单通路。

(17) 定理　欧拉回路

连通多重图具有欧拉回路当且仅当它的每个顶点都有偶数度。

连通多重图具有欧拉通路但无欧拉回路当且仅当它恰有2个奇数度顶点。

(18) 定义　哈密顿回路

在图$G = (V, E)$里，若$V = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$并且对$0 \le i < j \le n$来说有$x_i \ne x_j$，则通路$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$称为哈密顿通路。在图$G = (V, E)$里，若$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$为哈密顿通路，则$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_0$为哈密顿回路。

(19) 定理　哈密顿回路

狄拉克定理　如果G是带n个顶点的连通简单图，其中$n \ge 3$，并且G中每个顶点的度数至少为$n/2$，则G有哈密顿回路。

奥尔定理　如果G是带n个顶点的连通简单图，其中$n \ge 3$，并且对于G中每一对不相邻的顶点u和v来说，都有$deg(u) + deg(v) \ge n$，则G有哈密顿回路。

(20) 定义　可平面图

若可以再平面化出一个图而边没有任何交叉，则这个图是可平面的。这种画法成为这个图的平面表示。

(21) 定理　欧拉公式

欧拉公式　设G是带e条边和v个顶点的连通可平面图。设r是G的可平面表示里的面数，则$r = e - v + 2$。

推论　若G是带e条边和v个顶点的连通可平面图，其中$v \geq 3$，则$e \leq 3v - 6$。

推论　若G是连通可平面图，则G有度数不超过5个顶点。

推论　若连通平面简单图有e条边和v个顶点，$v \geq 3$并且没有长度为3的回路，则$e \leq 2v - 4$。

(22) 定理　库拉图斯基定理

若一个图是可平面的，则通过删除一条边u, v并且添加一个新顶点w和两条边u, w与w, v，所获得的任何图也是可平面的。这样的操作成为**初等细分**。若可从相同的图通过一系列初等细分来获得图$G_1 = (V_1, E_1)$和$G_2 = (V_2, E_2)$，则它们是**同胚**的。

库拉图斯基定理 一个图是费平面的当且仅当它包含一个同胚于$K_{3,3}$或K_5的子图。

(23) 定义　图着色

简单图的**着色**是对该图的每个顶点都指定一种颜色，使得没有两个相邻的顶点颜色相同。

图的**色数**是着色这个图所需要的最少颜色数。

(24) 定理　四色定理

四色定理　平面图的色数不超过四。