CS 225: Probability and Computing Homework Final

Zihao Ye

July 29, 2016

PROBLEM 1

考虑概率方法.
假设 S 为有 n 个节点, m 条边的不含 H 的图, 则由题意, 在完全图 G 中将 S 中所有的边染成一种颜色, 不会出现同色的子图 H.
现在进行如下操作:

- 枚举颜色 i.
- 在 G 中随机 sample S 的一个同构子图 S_i, 将它染成颜色 c_i(不管它之前是否被染色过).

定义随机变量 X_e:

$$X_e = \begin{cases} 0 & e \text{ has been colored during the algorithm.} \\ 1 & e \text{ hasn't been colored during the algorithm.} \end{cases}$$

令 $X = \sum\limits_{e \in E} X_e$, 则

$$E[X] = \binom{n}{2}\left(1 - \frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^k \leq \binom{n}{2} e^{-2\log n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

因此存在一个 outcome 使得 $X = 0$, 即所有边都被染色且不存在同色的子图 H.

PROBLEM 2

(a)

$$E[X_{np}] = \binom{n}{3} p^3$$

设 $X_{np}^{(t)}$ 为三角形 t 的三条边是否都被选, 可以证明 $\left\{X_{np}^{(t)}\right\}$ 之间 pairwisely independent. 因此

$$Var\left[X_{np}\right] = \binom{n}{3} Var\left[X_{np}^{(t)}\right] = \binom{n}{3} p^3(1-p^3)$$

.

由 *Chebyshev Inequality* 可以得到:

$$Pr\left[\left|X_{np} - \binom{n}{3}p^3\right| \geq t\right] \leq \frac{\binom{n}{3}p^3(1-p^3)}{t^2}$$

下面考虑使用 *Martingale* 得到的界:

令 X_i 为 e_i 是否被选, $f(\mathbf{X})$ 为三角形的个数, 则:

$$Y_i = E\left[f(X_1, \cdots, X_n) \mid X_1, \cdots, X_i\right]$$

是一个 *Doob Sequence*, 且满足条件

$$|Y_k - Y_{k-1}| \leq n-2$$

由 *Azuma's Inequality* 得:

$$Pr\left[\left|f(\mathbf{X}) - E\left[f(\mathbf{X})\right]\right| \geq t\right] \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{n(n-1)(n-2)^2}\right)$$

PROBLEM 3

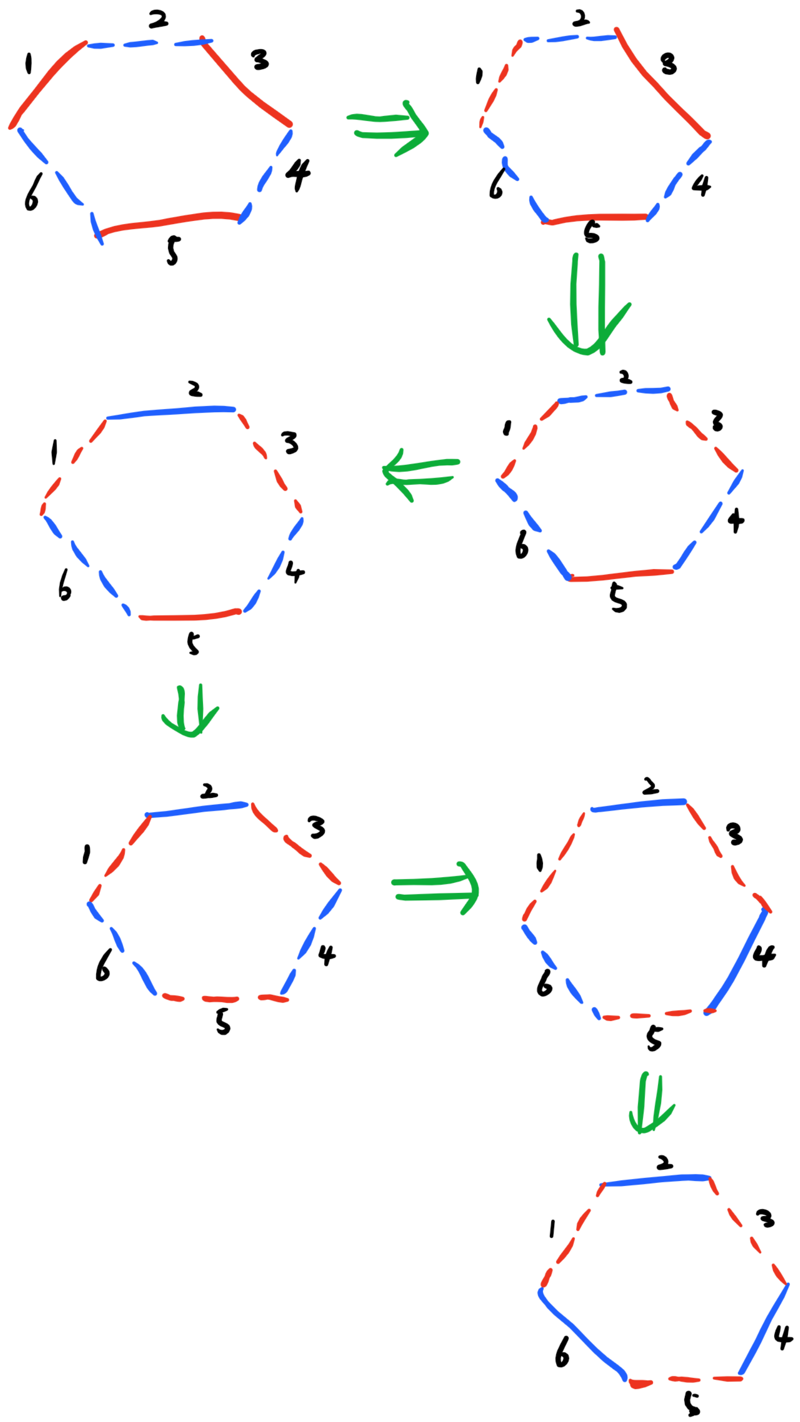
由之前对 sample matching 的分析, 证明 *rapidly mixing* 的关键在于证明

$$\max_{M,M'} \frac{2m\left|\left\{(I,F) \mid (M,M') \in \gamma_{IF}\right\}\right|}{|\Omega|} \in poly(n) \in \left(\log|\Omega|\right)^{O(1)}$$

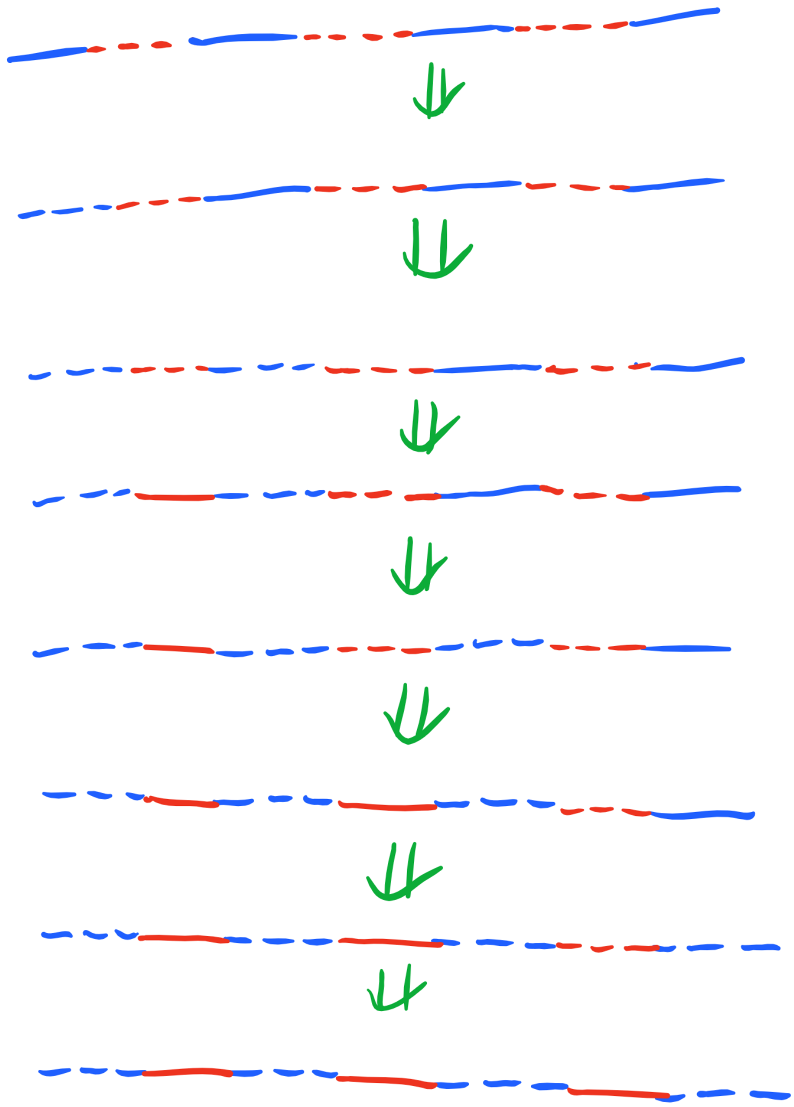
之前允许 *edge exchange* 的情况下, 通过特别地构造 *Canonical Path*, 证明了

$$\left|\left\{(I,F) \mid (M,M') \in \gamma_{IF}\right\}\right| = O(|\Omega|)$$

下面令 $\left|\left\{(I,F) \mid (M,M') \in \gamma_{IF}\right\}\right|$ 为 P_{IF}.
现在证明即使只允许 *edge addition* 和 *edge deletion* 的情况下, P_{IF} 仍然是 $O(|\Omega|)$.
在之前的证明中使用了 *encoding* 的方法, 在这里我们仿照这一方法.
对于每个 I 和 F, 将所有 $I \bigoplus F$ 的 *path* 和 *loop* 编号, 并给每个 path 和 loop 中的边编号 (path 从顶点开始, loop 从任意一个点开始).
对于 *loop* 和 *path*, 分别按如下的 *Canonical Path* 进行 transition.

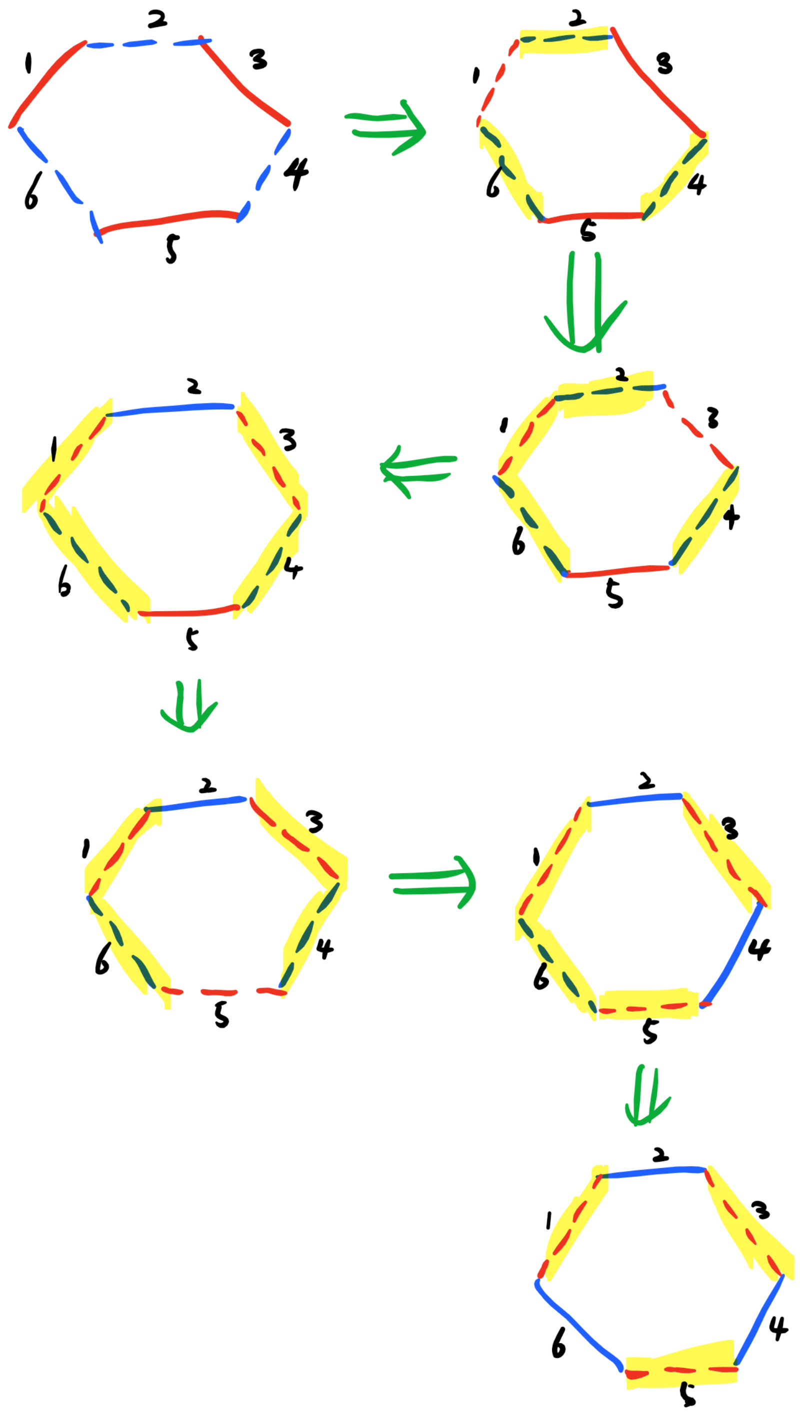


loop

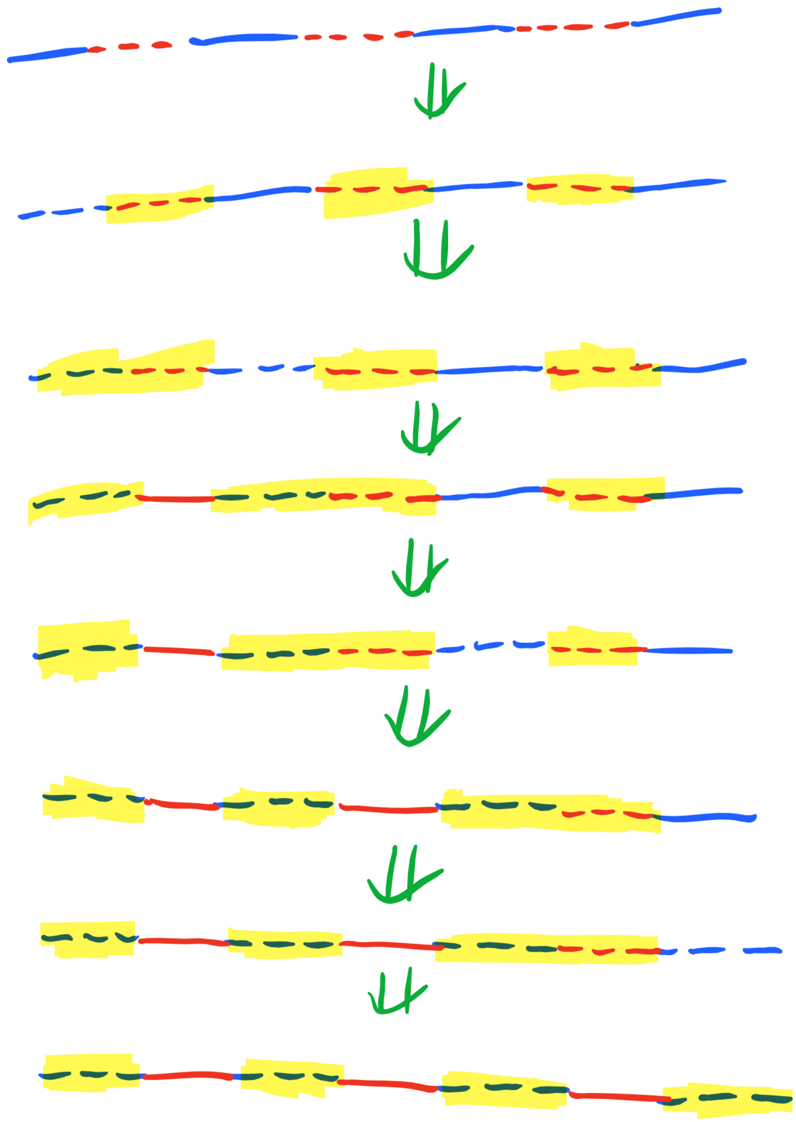


path

为了计算 P_{IF}, 在给定 (M, M') 的情况下, 我们需要找到一个从 (I, F) 到 matching 的映射 (因为我们希望 $P_{IF} = poly(n) \times |\Omega|$).
事实上 $I \oplus F - (M \cup M')$ 并不是一个 matching: 如下图:



loop to matching



path to matching

所以我们需要做一些修改:

1. 注意到, loop 在去掉一条边之后与 path 的操作是类似的, 所以我们去掉 I 中编号最小的边.
2. 注意到, path 上会存在有两个相邻边同时被选的情况, 此时我们只选择编号最小的那一个, 这样就将 (I, F) 映射到了一个 matching.

但是这并不是一个单射, 所以我们需要记录一些信息, 对于修改 (2), 我们记录丢弃的那一条边的唯一编号. 对于修改 (1), 注意去掉这条边之后我们无法判断当前所在 component 是一个 loop 还是一个 path, 因此用一个 bit 来记录这个信息 (0: loop, 1: path, etc.).

因此我们得到了一个 $(I,F) \to \left(\text{matching}, E, \{0,1\}\right)$ 的单射, 有

$$P_{IF} \le 2\Omega \times |E| = O(m \cdot \Omega)$$

$$\rho = \max_{M,M'} \frac{2m\left|\left\{(I,F) \mid (M,M') \in \gamma_{IF}\right\}\right|}{|\Omega|} = O(m^2) \in poly(n)$$

$$\tau(\epsilon) \le 4\left(\log N + 2\log\frac{1}{2\epsilon}\right) \cdot poly(n) \in \left(\log|\Omega|\right)^{O(1)}$$

因此这个 *Markov Chain* 是 *rapidly mixing* 的.

ACKNOWLEDGEMENT

感谢游宇榕提供了一份讲述 sample matching 的带详细动画的 PDF(by Ivona Bezáková), 让我理解了带 exchange 版本的 *rapid mixing* 推导过程.