KKT条件

KKT条件是拉格朗日乘数法的推广，因为他在拉格朗日乘数法的基础上引入了对不等式约束的处理，即若gi(x)等于0，则λ大于0，否则λ=0。

对于一个凸问题：

问题P：

$$\begin{aligned} & minf(x) \\ s.t.\ \ & g_i(x) <= 0 \\ & h_i(x) = 0 \end{aligned}$$

假设x^*是问题P的局部最优解，且x^*在某种约束规范成立，则存在

1. $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{I} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0$
2. $\lambda_i >= 0, i = 1, \ldots, m$
3. $g_i(x^*) <= 0, i = 1, \ldots, m$
4. $h_i(x^*) = 0, i = 1, \ldots, I$
5. $\lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, \ldots, m$

这五个式子同时成立

其中条件2和5表示：若某个不等式项的λ=0，则其gi(x)就不等于0，此时可以理解为该约束没有起到作用，因为在凸优化中只有当自变量取到边界时才会达到最优解。若gi(x)=0，则λ就不等于0，**因此可以通过列举λi是否为0的情况，结合等式1，解出KKT条件下的最优解。**

对于不等式情况，如果最优解在可行域外，此时可行域内的最优解需要满足f(x)的负梯度=gx的梯度，即式子1；如果最优解在可行域内，则显然f(x)梯度为0的x就是最优解，所以KKT条件也合并了最优解在可行域外和可行域内的情况。