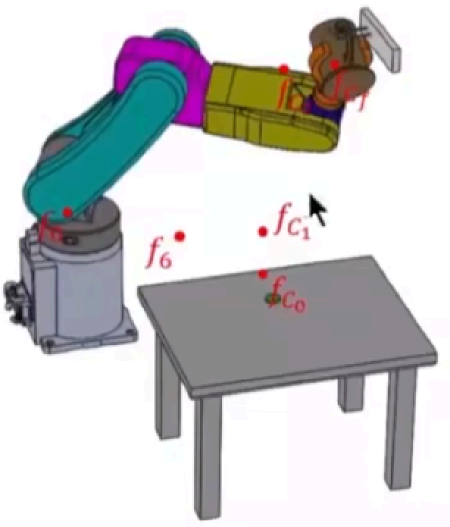
轨迹规划流程

任务定义

- 任務：規劃手臂「將杯子從桌面拿起到放上杯架」間的整段軌跡
- 輔助條件：加上兩個via points
  - 垂直拿起杯子一小段距離
  - 到達杯架前，調整到適當姿態，讓被子能順利放上杯架



物体各状态的位姿和旋转矩阵

在该问题下以地杆axis 0为世界系

C是指cup，即待拿取的物体，首先列出任务要求的物体在各状态下相对地杆（世界系）的位姿，并求出变换矩阵。

- 設定2：彙整成總表以利後續軌跡規劃

對world frame角度，以XYZ fixed angle計算

	Time	X	Y	Z	Φ_x	Φ_y	Φ_z
P_0	0	550	270	19.5	0	0	35
P_1	2	550	270	79.5	0	0	35
P_2	6	330	372	367	0	-60	0
P_f	9	330	472	367	0	-60	0

- 設定3：求出各點的Transformation Matrix ${}^0_CT$

$$
{}^0_CT_0 = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & 0 & 550 \\ 0.5736 & 0.8192 & 0 & 270 \\ 0 & 0 & 1 & 19.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0_CT_1 = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & 0 & 550 \\ 0.5736 & 0.8192 & 0 & 270 \\ 0 & 0 & 1 & 79.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0_CT_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & 372 \\ 0.866 & 0 & 0.5 & 367 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0_CT_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & 472 \\ 0.866 & 0 & 0.5 & 367 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

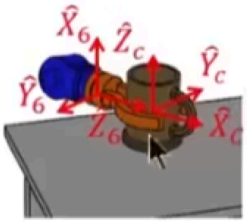
求解每个状态下手腕处相对地杆的位姿T_6^0

其中平移部分用于前三轴求解，旋转部分用于后三轴求解。

❑ 設定4：求出各點的Transformation Matrix ${}^0_6T$

$$
{}^0_6T = {}^0_CT\,{}^6_CT^{-1} = {}^0_CT \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 206 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}
$$

Recall：



$$
{}^0_6T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5736 & 0.8192 & 381.3 \\ 0 & -0.8192 & 0.5736 & 151.8 \\ 1 & 0 & 0 & 19.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0_6T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5736 & 0.8192 & 381.3 \\ 0 & -0.8192 & 0.5736 & 151.8 \\ 1 & 0 & 0 & 79.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0_6T_2 = \begin{bmatrix} -0.866 & 0 & 0.5 & 227 \\ 0 & -1 & 0 & 372 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 188.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0_6T_f = \begin{bmatrix} -0.866 & 0 & 0.5 & 227 \\ 0 & -1 & 0 & 472 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 188.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

根据变换矩阵整理出每个状态的位姿表：

❑ 設定5：從${}^0_6T$得知${}^0P_{6\,ORG}$在各點的位置和姿態

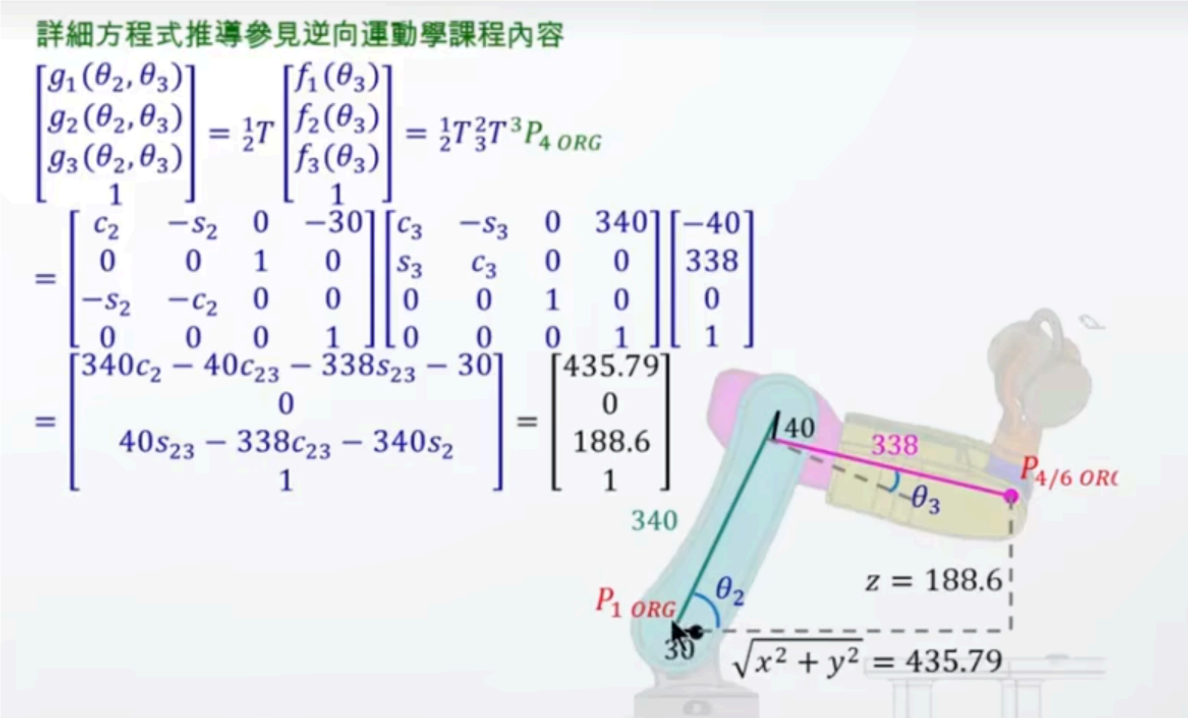
	Time	X	Y	Z	Φ_x	Φ_y	Φ_z
P_0	0	381.3	151.8	19.5	-145	-90	0
P_1	2	381.3	151.8	79.5	-145	-90	0
P_2	6	227	372	188.6	0	-30	180
P_f	9	227	472	188.6	0	-30	180

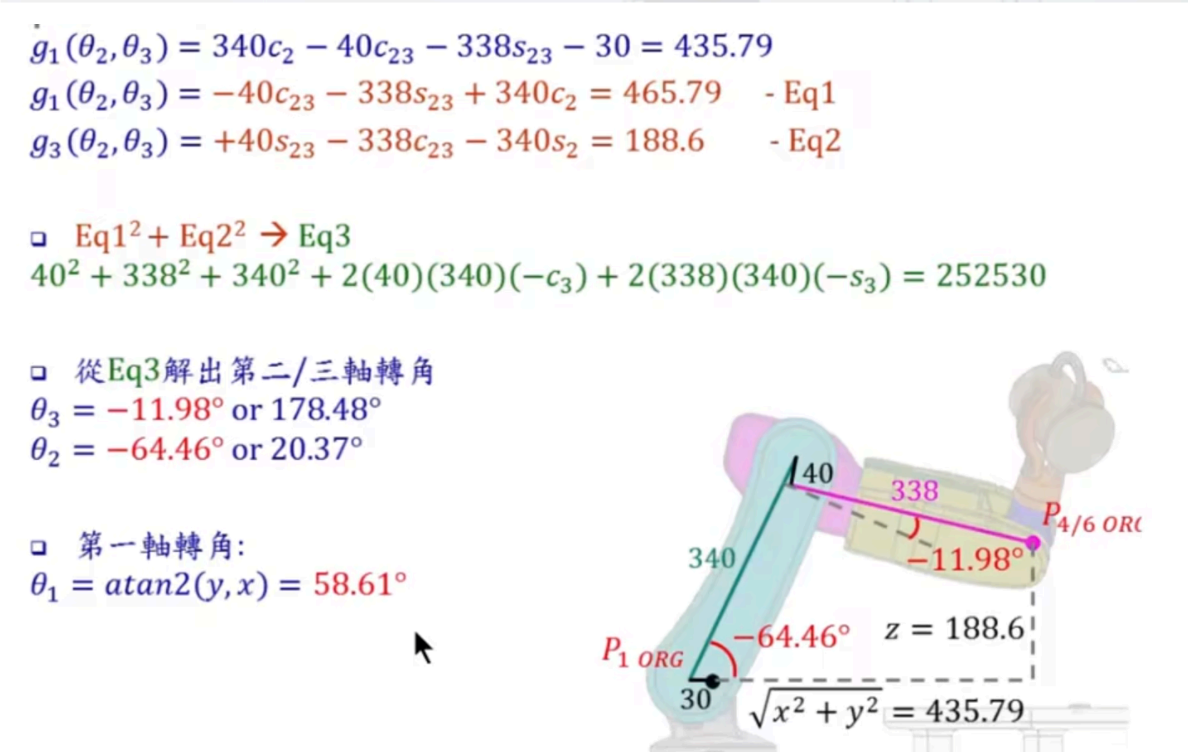
在Cartesian space或joint space下进行轨迹规划

使用三次多项式或直线进行轨迹规划，求得每一时刻的位姿。如果是在Cartesian space下求解的，需要将每一时刻的位姿转化成转角。

前三轴角度求解

这里因为指定了是PUMA手臂，有些参数可能就是0了，所以就不需要再像之前那样层层嵌套了，直接求解也不是很负责，关键就是利用平方和。注意：这里把T_0^1直接作用在了(x,y,z)上





所以其实实际求解就先为了方便，把坐标做一个T_1^0的变换，然后利用$x^2+y^2+z^2=g_1^2+g_2^2+g_3^2$，这就可以变成只含$\theta_2$和$\theta_3$的式子，然后再随便跟$g_1$、$g_2$、$g_3$其中一个联立就行。由于4,5,6轴的原点是相同的，所以用哪个表示都行，但需要是相对地杆下的位姿，所以前面才需要求解T_6^0。

后三轴角度求解

首先求出R_3^0:

- 先求出${}^0_3R$:

$$
{}^0_3R = X(\alpha_0)Z(\theta_1)X(\alpha_1)Z(\theta_2)X(\alpha_2)Z(\theta_3)
$$

$$
{}^0_3R = X(0^\circ)Z(58.61^\circ)\,X(-90^\circ)Z(-64.46^\circ)\,X(0^\circ)Z(-11.98^\circ)
$$

$$
{}^0_3R = \begin{bmatrix} 0.1222 & 0.5064 & -0.8536 \\ 0.2003 & 0.8298 & 0.5209 \\ 0.9721 & -0.2346 & 0 \end{bmatrix}
$$

求解后三轴的角度其实就是在求解R_3^6的欧拉角，因为θ_4是axis 3 到axis 4的转角。

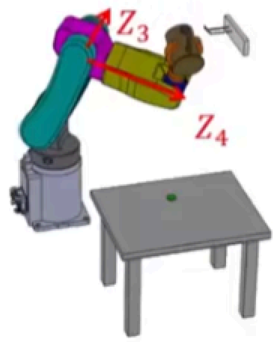
由于后三轴的角是通过欧拉角的ZYZ求解的，也就是要以axis 3这个坐标系为基准轴，先绕着Z_3旋转，然后绕旋转后的Y轴旋转，最后绕旋转后的Z轴旋转，这里就是将后三个坐标系合并成了一个坐标系，这样就转化成只绕自己坐标系旋转，就可以利用欧拉角的性质求解。用ZYZ的方式求解是机械臂的结构特性。

此时X_3是垂直于Z_3和Z_4的。如果想利用ZYZ求解，就要让Z_3与Z_4重合，因为后三轴的坐标系是设计成可以利用ZYZ旋转的，而旋转是从Z_3开始的。这样就要让Z_3旋转90度，也就是绕X轴顺时针旋转90度。这样旋转的初始坐标系就满足了ZYZ的要求。

- 為讓手臂姿態和ZYZ重合，需先做${}^3_4R$之中對X軸之旋轉：${}^{0}_{3''}R = {}^0_3R\,X(\alpha_3)$

$$
{}^{0}_{3''}R = {}^0_3R\,X(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0.1222 & 0.8536 & 0.5064 \\ 0.2003 & -0.5209 & 0.8298 \\ 0.9721 & 0 & -0.2346 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3''}_{6}R = {}^{0}_{3''}R^{-1}\,{}^0_6R = \begin{bmatrix} 0.3802 & 0.2003 & 0.9030 \\ -0.7393 & 0.5209 & 0.4268 \\ -0.5558 & -0.8298 & 0.05 \end{bmatrix}
$$



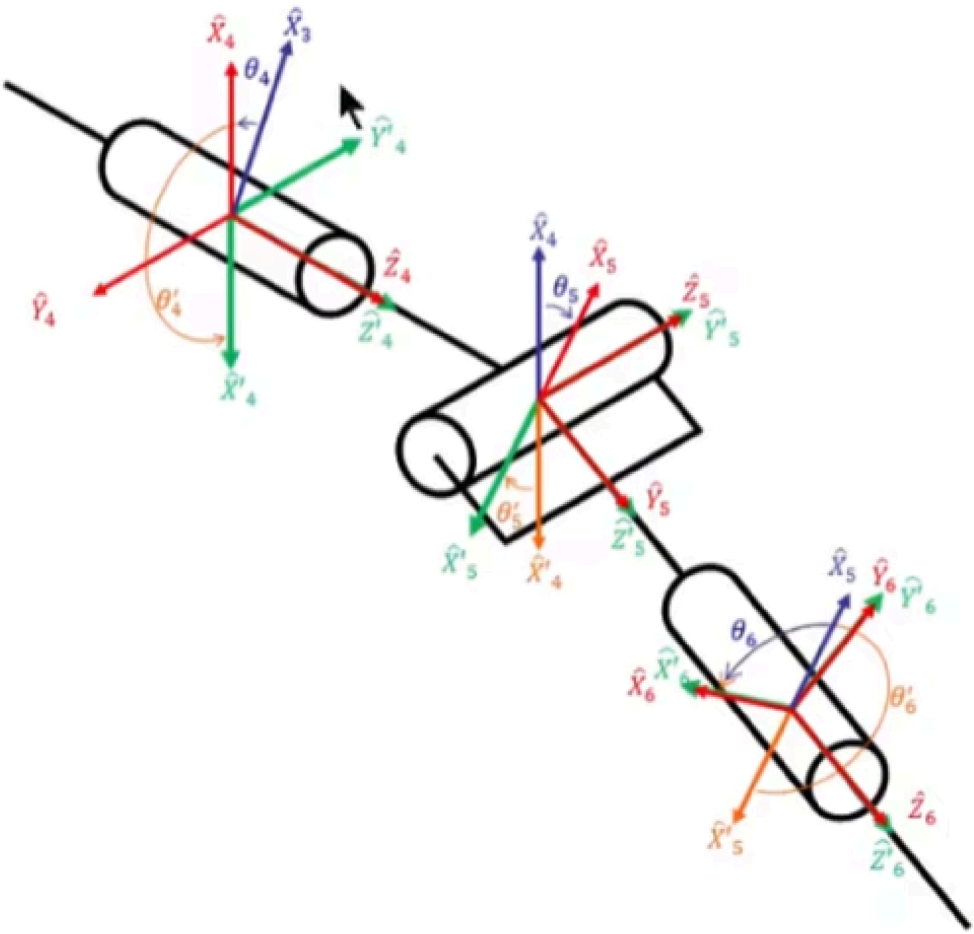
詳細方程式推導參見逆向運動學課程內容

$$
\beta = Atan2\left(\sqrt{r_{31}{}^2 + r_{32}{}^2}, r_{33}\right) = -87.13^\circ \ or\ 87.13^\circ
$$

$$
\alpha = Atan2\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right) = -154.70^\circ \ or\ 25.30^\circ
$$

$$
\gamma = Atan2\left(\frac{r_{32}}{s\beta}, \frac{-r_{31}}{s\beta}\right) = 123.81^\circ \ or\ -56.19^\circ
$$

DH definition vs. Z-Y-Z Euler Angles



求解出来ZYZ的欧拉角α, β, γ后，理论上来说这就是一个3到6的变换，也就是R_6^3，但实际上由于这种转动方式并不是按照DH轴定义的坐标系方向进行旋转的，因此求解并没有结束，还需要对应到DH表达法中实际的θ。

在进行第一个Z的转动时，可以看出求解出的$\alpha = \theta_4$，此时axis 3完全转换到了axis 4上（我猜这里是因为已知旋转矩阵，求解ZYZ欧拉角的唯一性，而Z4Z5Z6又是按ZYZ的形式构建的，所以α, β, γ应该就对应了axis 3转到axis 4/5/6），那么下一步就应该是对Y轴旋转，在DH表达法中对应了θ_5，但此时Y轴的方向和Y_5是反向的，因此如果想跟DH表达法中的θ_5进行对应，**在第一步的Z轴旋转时需要额外多转180度。**下一步是对Y轴转，ZYZ求解出来的β是按Y轴与Z_5反向算的，因此$\beta = -\theta_5$。最后是对Z轴转，同理为了跟DH表达法中的θ_6对应，求解出的γ与θ_6又相差了180度。

总结一下就是经过ZYZ求解出的欧拉角虽然也能代表着3到6的变换，但其每一步的旋转的欧拉角与DH表达法中的转角没有对应上，为了保证统一，需要将ZYZ求解出的欧拉角进行修正，使其成为DH表达法中的转角。

- ZYZ的 (α, β, γ)和DH的$(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$，在$(\theta_4, \theta_6)$有$+180°$的差異，需補回來

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= \alpha + 180° &= \quad 25.30° \; or \; -154.70° \\
\theta_5 &= \beta &= \quad -87.13° \; or \; 87.13° \\
\theta_6 &= \gamma + 180° &= \quad -56.19° \; or \; 123.81°
\end{aligned}
$$