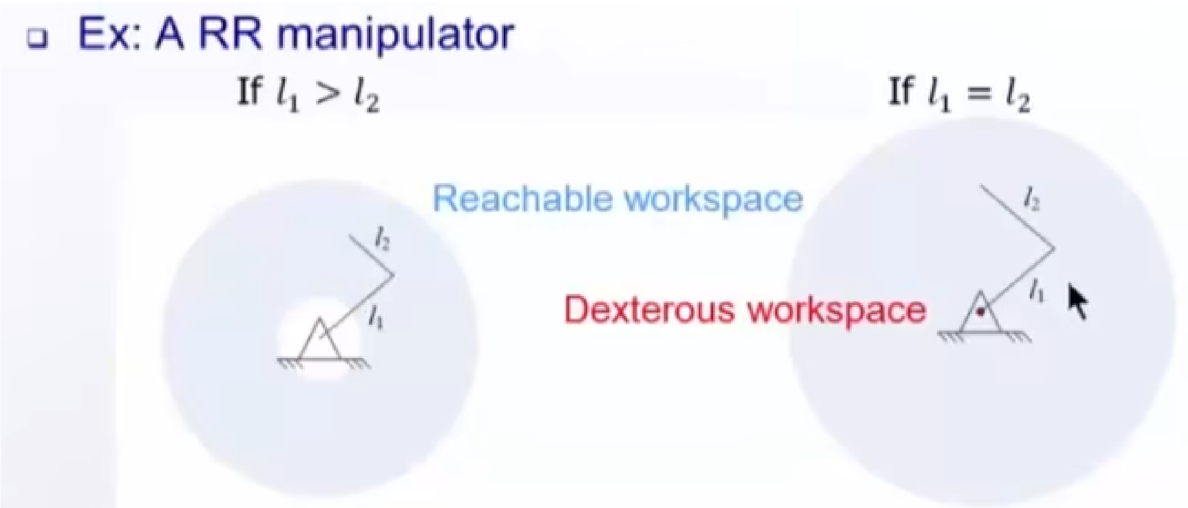
运动学逆解

空间

Reachable workspace（可达空间）：机器人末端至少有一个解可以达到给定位置的空间

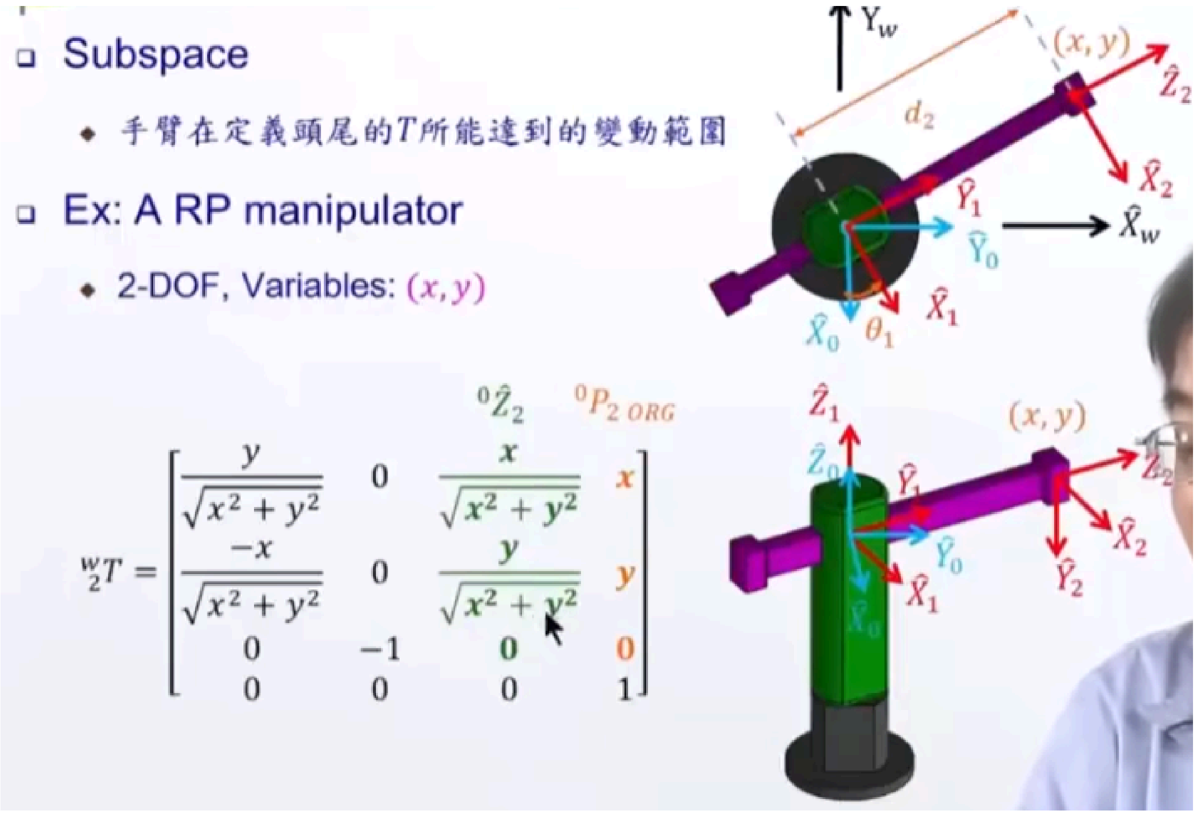
Dexterous workspace（灵巧空间）：手臂可以用任何姿态（角度）到达的位置空间

右图的固定点就是在Dexterous workspace。



Subspace：在给定目标点时，手臂能达到的姿态

比如这里姿态只能在第一列和第三列的前两行改变，其他位置的姿态都是无法变动的。



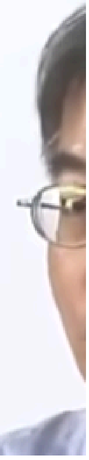
多重解

在非线性方程中，未知数与方程数相当并不意味着具有唯一解。

- 解的數目
  - 由於是nonlinear transcendental equations，6未知數6方程式不代表具有唯一解
  - 是由joint數目和link參數所決定

    Ex: A RRRRRR manipulator

a_i	解的數目
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
$All\ a_i \neq 0$	≤ 16



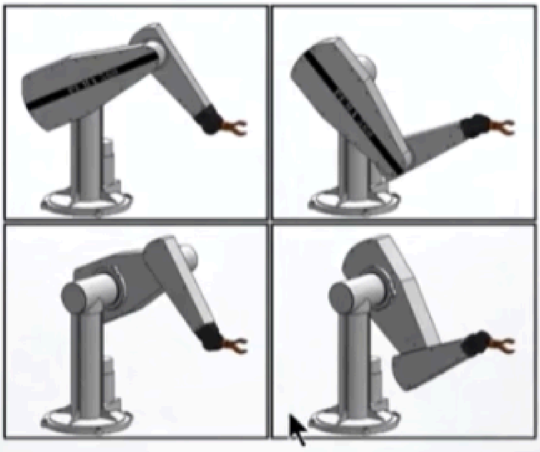
- Ex: PUMA (6 rotational joints)
  - 針對特定工作點，8組解
  - 前3軸具有4種姿態

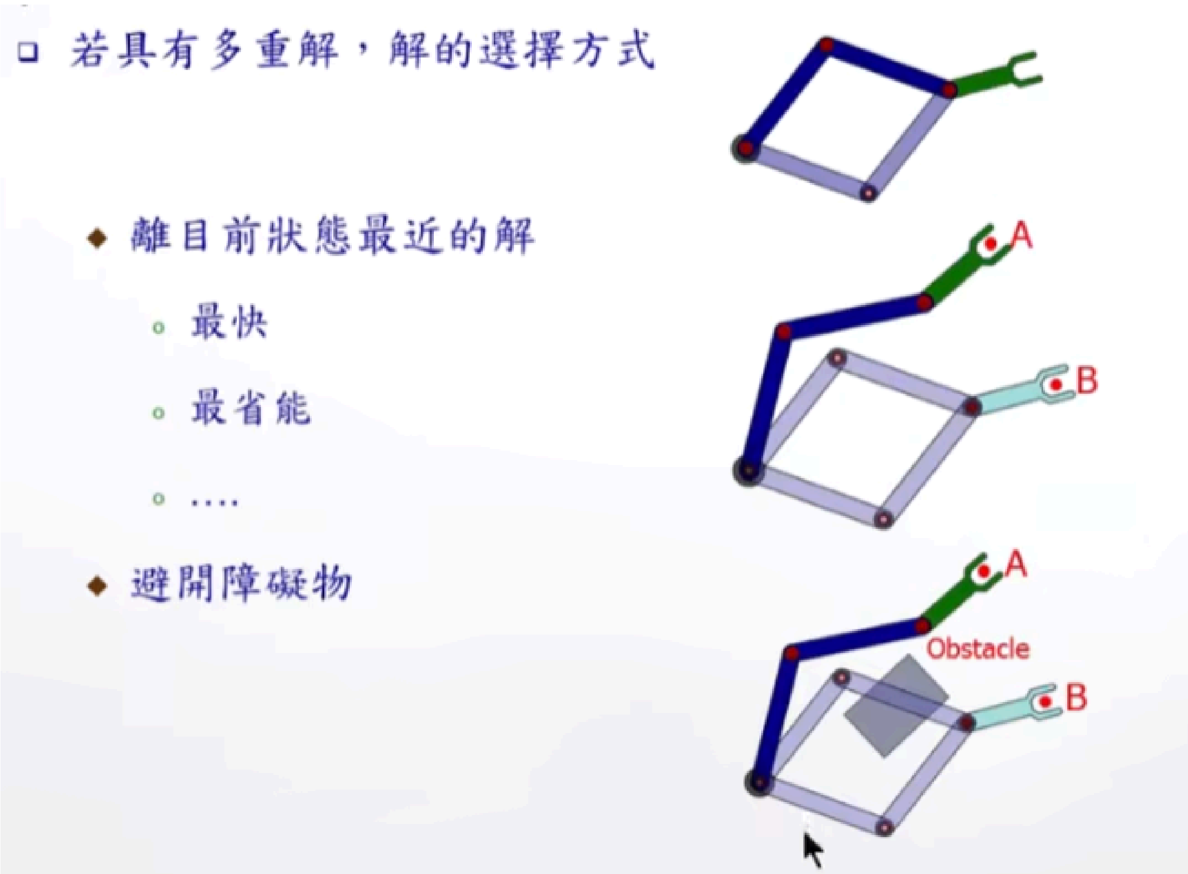
    如右圖所示
  - 每一個姿態中，具有2組手腕轉動姿態

    $\theta_4' = \theta_4 + 180^\circ$

    $\theta_5' = -\theta_5$

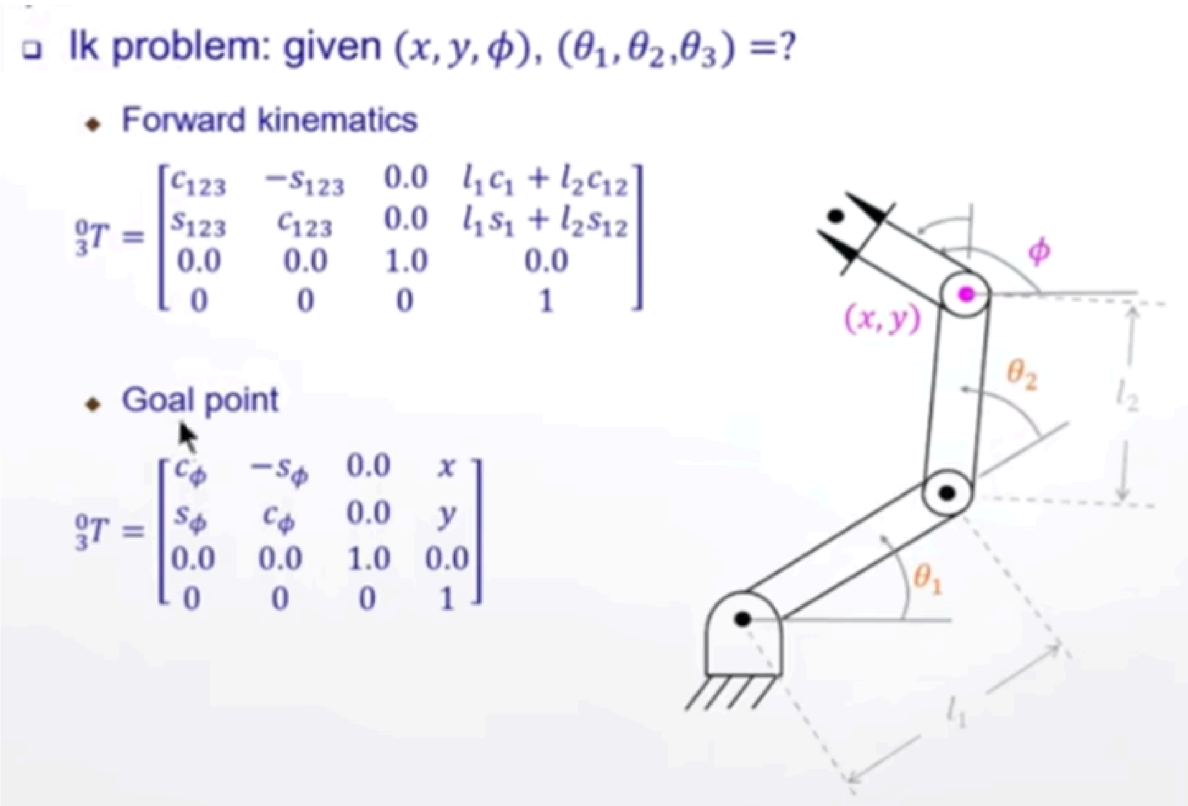
    $\theta_6' = \theta_6 + 180^\circ$
  - 若手臂本身有幾何限制，並非每一種解都可以運作

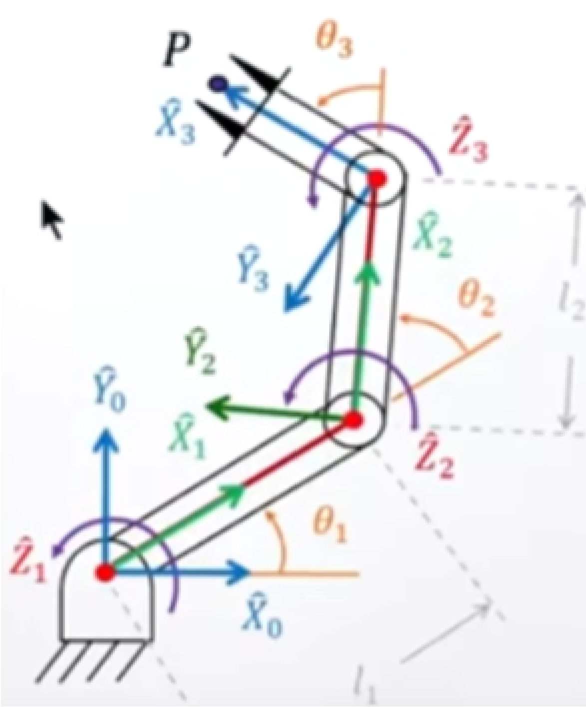




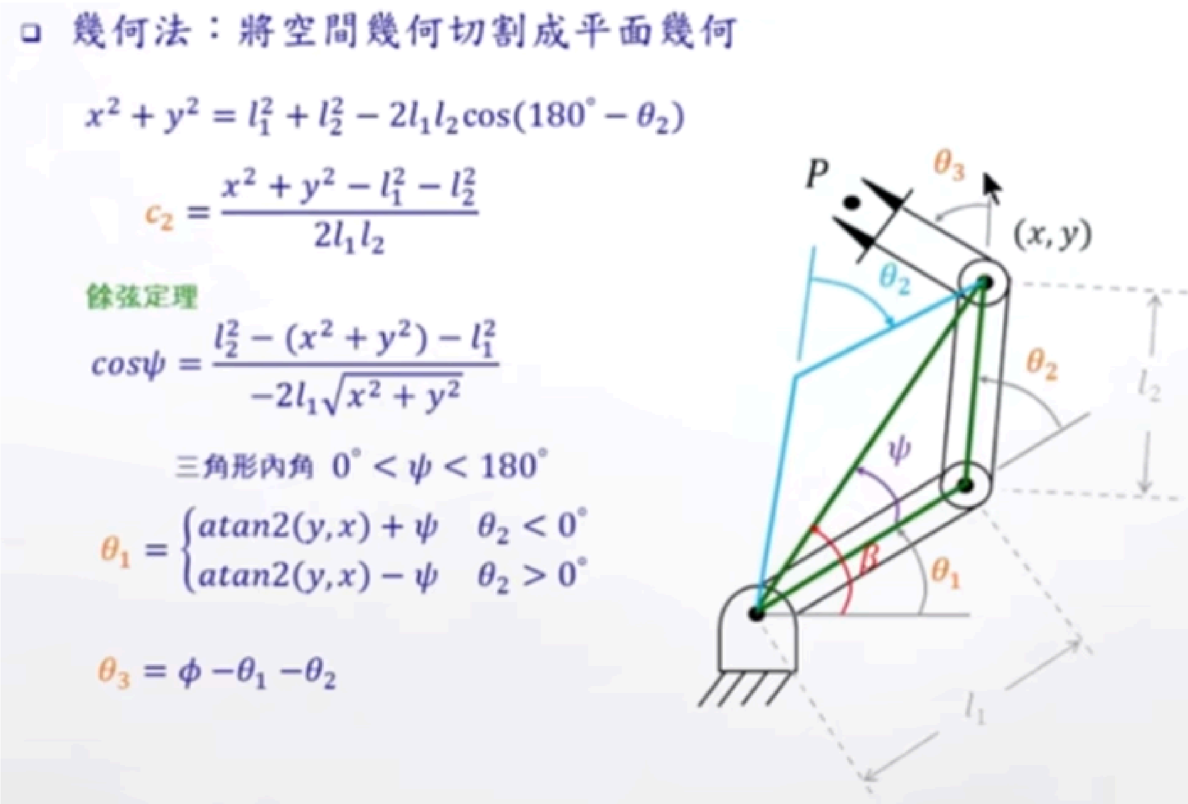
几何法求解

以一个只有平面转动的机械臂为例子，其中c_{123}是指$cos\theta_1 + cos\theta_2 + cos\theta_3$。而$\phi$是已知的角（这里是用的Craig表示法，给定的是最后一个轴原点的位置x,y和目标位姿相当于地杆的角ϕ），因此可以得到关系式$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$。





问题转化成了求解平面几何，使用余弦定理求解：



这里需要注意的是根据θ_2的正负有两组解。

代数法求解

平面RRR

仍以上面的平面RRR机械臂为例，根据已知的ϕ和x，y建立的变换矩阵与参数矩阵一一对应，即可建立方程：

代數解

- 建立方程式

$c_\phi = c_{123}$

$s_\phi = s_{123}$

$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$

$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$

$$
{}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- 解 θ_2

$$x^2 + y^2 = l_1{}^2 + l_2{}^2 + 2 l_1 l_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1{}^2 - l_2{}^2}{2 l_1 l_2}$$

> 1 or < 1: too far for the manipulator to reach

$-1 \leq \quad \leq 1$: "two solutions" $\theta_2 = cos^{-1}(c_2)$

- 將求得的 θ_2 帶入方程式

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} = (l_1 + l_2 c_2) c_1 + (-l_2 s_2) s_1 \triangleq k_1 c_1 - k_2 s_1$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} = (l_1 + l_2 c_2) s_1 + \quad (l_2 s_2) c_1 \triangleq k_1 s_1 + k_2 c_1$$

- 變數變換

define

$$r = +\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}$$

$$\gamma = Atan2(k_2, k_1)$$

then

$$k_1 = r \cos\gamma$$

$$k_2 = r \sin\gamma$$

And then

$$\frac{x}{r} = \cos\gamma \cos\theta_1 - \sin\gamma \sin\theta_1 = \cos(\gamma + \theta_1)$$

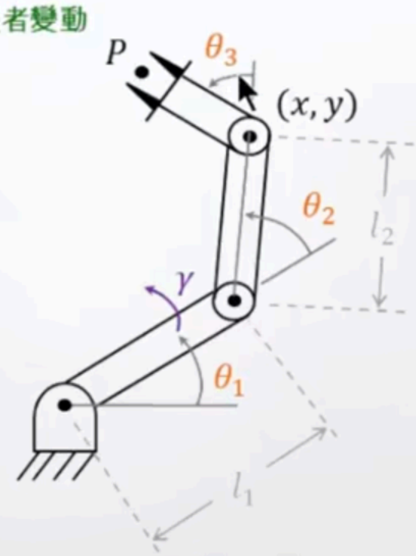
$$\frac{y}{r} = \cos\gamma \sin\theta_1 + \sin\gamma \cos\theta_1 = \sin(\gamma + \theta_1)$$

- 解 θ_1

$$\gamma + \theta_1 = Atan2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = Atan2(y, x)$$

$$\Rightarrow \theta_1 = Atan2(y, x) - Atan2(k_2, k_1)$$

當θ_2選不同解，$c2$和$s2$變動，k_1和k_2變動，θ_1也跟者變動



- 解 θ_3

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = Atan2(s_\phi, c_\phi) = \phi$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

三角函数方程求解

- Ex: 如何求得 $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ 的 θ？
  - 方法：變換到polynomials （4階以下有解析解）

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = u, \qquad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

  - 步驟：

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c$$

$$a\frac{1-u^2}{1+u^2} + b\frac{2u}{1+u^2} = c$$

$$(a+c)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}$$

a, b, c大小有限制, 不一定有解

$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}\right) \qquad a + c \neq 0$$

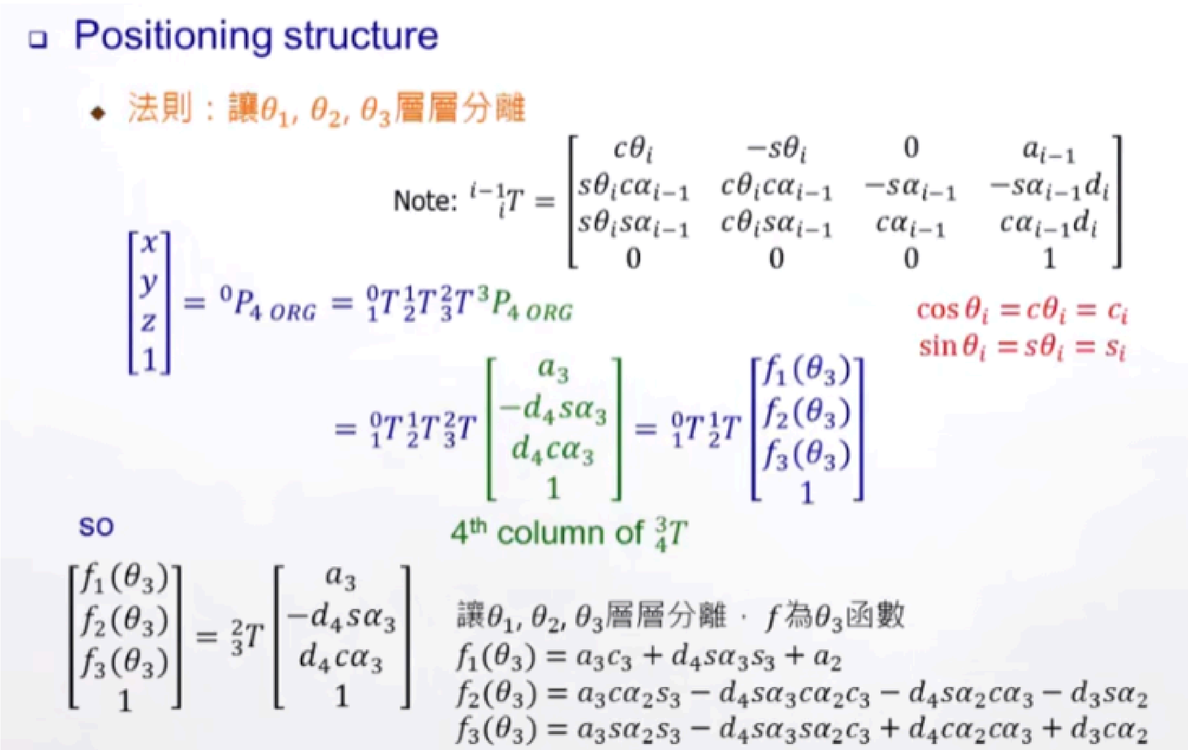
$$\theta = 180^\circ \qquad a + c = 0$$

6 Dof Puma 机械臂

对于六轴机械臂，如果有三个连续的轴交在同一点，则有解析解。

现在相当于给定了z4,z5,z6坐标系的原点坐标，手的具体位姿也默认已经规划好了，现在只关心如何控制前三个轴，使得最后三轴的原点能到达(x,y,z)点，因此不关心θ_4及以后的角。

采用层层分离的方法，分离每层的θ。



因为第0个坐标系的z轴默认是跟第一个的z轴重合的，因此T_0^1只在xy方向上有旋转，因此最后一步是这样转化的。

这样就将$\theta_1, \theta_2, \theta_3$分离开了，逐层求解。首先由于坐标轴1和0在原点上是重合的，因此有：

$$r = x^2 + y^2 + z^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$$

然后将g转化成显式只含有θ_2的式子，其余关于θ_3的部分用k表示。

- 下一步

$$ {}^{0}P_{4ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}_{1}T \begin{bmatrix} g_1(\theta_2,\theta_3) \\ g_2(\theta_2,\theta_3) \\ g_3(\theta_2,\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 g_1 - s_1 g_2 \\ s_1 g_1 + c_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix} $$

讓$\theta_1, \theta_2, \theta_3$層層分離，$g$為$\theta_2, \theta_3$函數

$$ \begin{aligned} g_1(\theta_2,\theta_3) &= c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1 \\ g_2(\theta_2,\theta_3) &= s_2 c\alpha_1 f_1 + c_2 c\alpha_1 f_2 - s\alpha_1 f_3 - d_2 s\alpha_1 \\ g_3(\theta_2,\theta_3) &= s_2 s\alpha_1 f_1 + c_2 s\alpha_1 f_2 + c\alpha_1 f_3 + d_2 c\alpha_1 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} r &= x^2 + y^2 + z^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \\ &= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3 + 2a_1(c_2 f_1 - s_2 f_2) \\ &= (k_1 c_2 + k_2 s_2)2a_1 + k_3 \end{aligned} $$

r僅為θ_2, θ_3函數

$$ \begin{aligned} k_1(\theta_3) &= f_1 \\ k_2(\theta_3) &= -f_2 \\ k_3(\theta_3) &= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3 \end{aligned} $$

并且由于z轴重合，因此有$z = g_3$

- 此外

$$ z = g_3 = (k_1 s_2 - k_2 c_2) s\alpha_1 + k_4 $$

z僅為θ_2, θ_3函數

$$ \begin{aligned} k_1(\theta_3) &= f_1 \\ k_2(\theta_3) &= -f_2 \\ k_4(\theta_3) &= f_3 c\alpha_1 + d_2 c\alpha_1 \end{aligned} $$

联立可得一个类似椭圆等式：

$$ \begin{cases} r = (k_1 c_2 + k_2 s_2)2a_1 + k_3 \\ z = (k_1 s_2 - k_2 c_2) s\alpha_1 + k_4 \end{cases} $$

- If $a_1 = 0$, $r = k_3(\theta_3) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3$
- If $s\alpha_1 = 0$, $z = k_4(\theta_3) = f_3 c\alpha_1 + d_2 c\alpha_1$
- Else

$$ \frac{(r-k_3)^2}{4a_1^2} + \frac{(z-k_4)^2}{s^2\alpha_1} = k_1^2 + k_2^2 $$

Solve θ_3 of all three cases by using "$u = \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$"

由于r和z都是已知，因此最后的椭圆方程是一个仅跟θ_3有关的式子，可以利用上一小节的方法求解。

最後

Using $r = (k_1 c_2 + k_2 s_2)2a_1 + k_3$ to solve θ_2

Using $x = c_1 g_1(\theta_2, \theta_3) - s_1 g_2(\theta_2, \theta_3)$ to solve θ_1

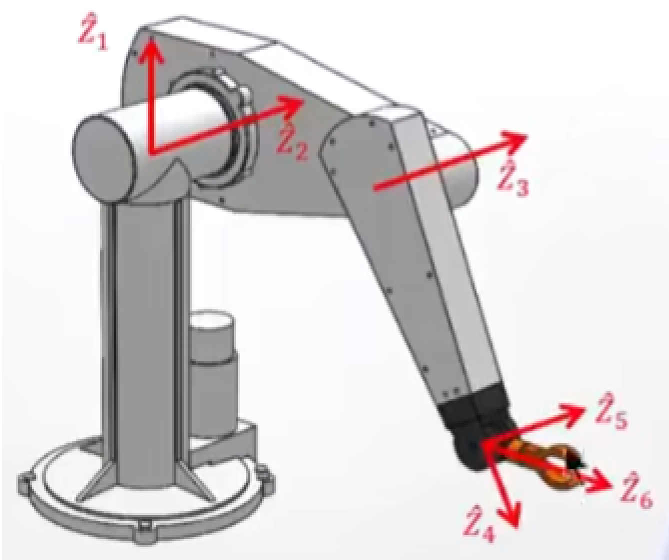
总结：每步用函数分离只是为了简化计算，核心是利用平方之和消除部分参数，使得方程只含有单独的某个参数。

在利用$x^2 + y^2 + z^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$时，利用了轴0原点与轴1重合的性质，将三个方程平方和相加，由于式子中有很多三角函数，因此平方相加后让方程变得很简洁。由于刚才利用的是平方和，每个独立的方程并没有使用，因此再利用比较简洁的$z = g_3$联立求解，这样就变成了显式只含有θ_2的式子，并且两个方程比较对称，可以再次利用平方和消掉θ_2，压缩方程至只含有一个方程一个未知数，然后求解θ_3，最后θ_1和θ_2也可以带回方程求解。

后三轴求解

Puma手臂的前三轴只负责移动，后三轴交于同一点，用于旋转，因此前三轴并不关心目标点的位姿，只关心它的位置。

而对于后三轴来说，其实并不关心坐标系原点在哪里，因为他们只负责转动，只关心转轴的方向。



根据后三轴的特性，其不必要再用DH表达法的方式逐个坐标系变换，而是可以将三个轴合并为一个完整的坐标系，通过Euler angle的ZYZ变换，实现这三个轴的转动。这样就可以直接利用Euler angle的求解公式计算出转角了，而不需要像前三轴那样复杂求解。

由于实际后三个轴并不是两两垂直的，Z4和Z6应该是都垂直于Z5，因此这种形式用ZYZ旋转很方便。并且为了让转轴满足ZYZ转动的定义，在做转动的时候需要做一些额外的转动。

从axis 3转到axis 4，从DH表达法看需要旋转θ_4，但由于接下来是ZYZ的Y轴的转动，而此时Y轴并没有对应上Z_5，因此还需要再多转π，即要转动$\theta_4 + \pi$。axis 4转到axis 5是转动$-\theta_5$。axis 5转到axis 6转动$\theta_6 + \pi$

- DH definition vs. Z-Y-Z Euler Angles