

# 多项式轨迹规划

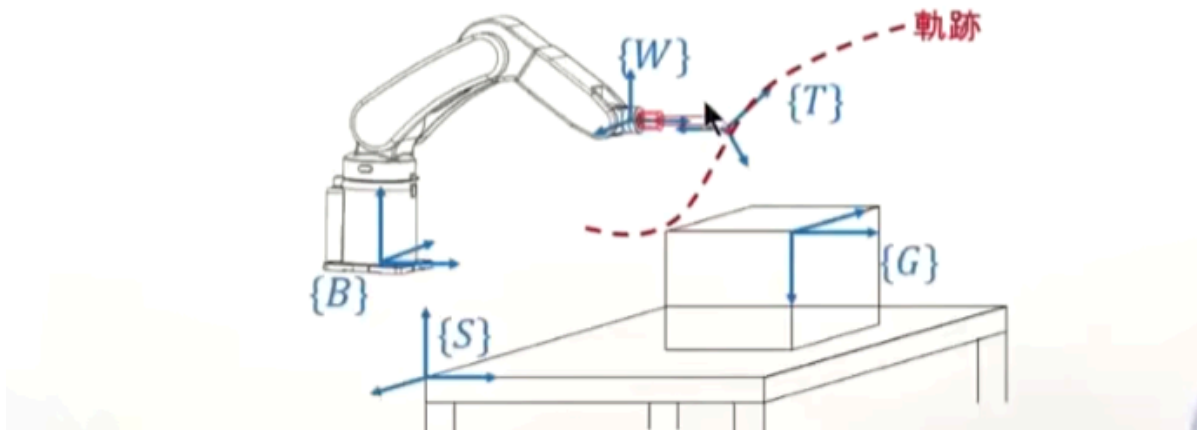
机械臂的规划有两种方式：在Joint space下和在Cartesian space下。区别在于前者是对驱动角进行规划，后者是对空间中的笛卡尔坐标系规划。

轨迹可以定义为是T相对于G的变换，T是机械臂上拿的工具坐标系，G是物体坐标系。这样的好处是即使G在移动，我们也只关心T与G的相对变换。具体求解应该是感知求出G的坐标系相对于世界坐标系S的变换，然后T根据实际需求在G的坐标系上做相对变换，进而求得T与世界坐标系的变换。由于T是工具的坐标系，因此还要转换成机械臂关节的实际位置，这里猜测是都转换到机械臂的地杆系B，然后在这个系下计算出机械臂实际要移动和旋转的位姿，由于T和W的变换关系应该是已知的，因此机械臂平移和旋转的目标状态就都可解。

□ 軌跡：機械手臂（的末端點或操作點）的位置、速度、加速度對時間的歷程

□ 可進一步定義成  $\{T\}$  相對  $\{G\}$  的狀態歷程

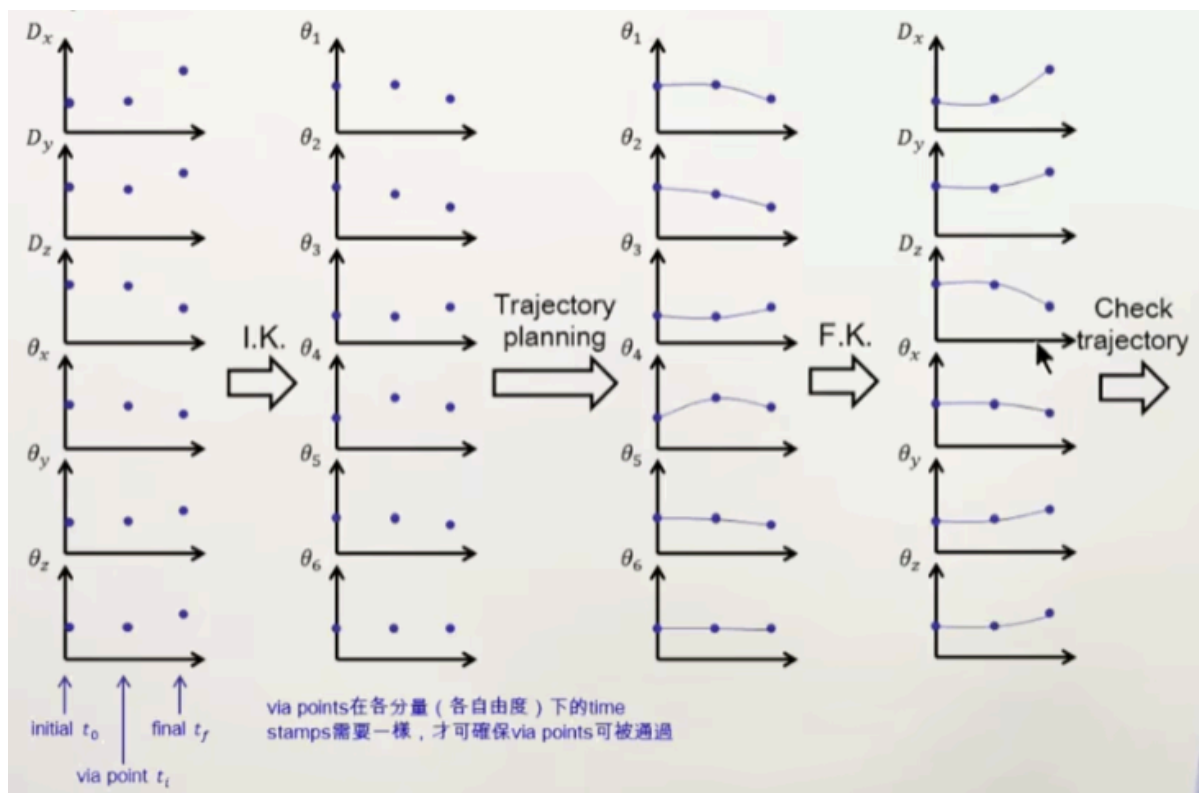
和手臂種類無關， $\{G\}$  也可隨時間變動（如輸送帶）



手臂末端关节变换的世界系坐标用  $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$  来表示。

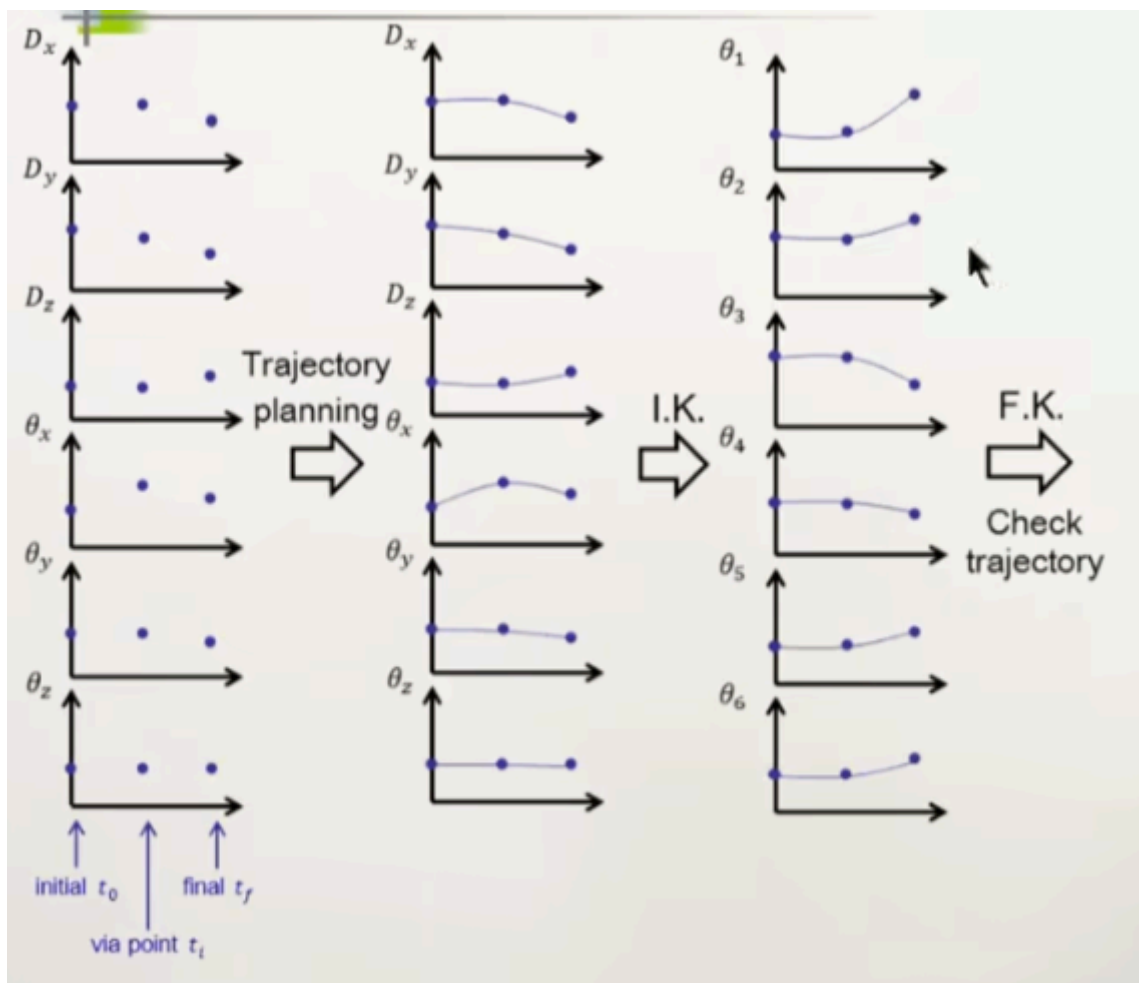
## Joint space

1. 求逆解：将手臂的末端状态（目标状态的）转换成关节驱动角 $\theta$
2. 对所有 $\theta$ 进行轨迹规划
3. 前向运动学推导：将**每个时刻**关节空间的状态转换到手臂末端点的状态，并在笛卡尔坐标系下检查轨迹的可行性（避障性是否满足，是否有碰撞）



## Cartesian space

1. 直接根据手臂的末端状态 (目标状态) 规划轨迹,  $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$  每一轴都进行规划
2. 求逆解: 将**每一时刻**手臂的末端状态转换到关节空间中
3. 检查在关节空间中轨迹的可行性, 包括关节角的加速度是否过大、转动的角度是否超过关节最大转角



## 三次多项式轨迹规划

对于每一段轨迹，根据始末点的状态，使用三次多项式进行求解，并使用相对时间。

### □ 解cubic polynomial

#### ◆ 通式

$$\theta(\tilde{t}) = a_0 + a_1\tilde{t} + a_2\tilde{t}^2 + a_3\tilde{t}^3 \quad 4 \text{ unknowns: } a_j \quad j=0 \sim 3$$

#### ◆ 對每一個區段： $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\tilde{t} = t - t_i \quad \text{so } \tilde{t}|_{t=t_i} = 0 \text{ and } \tilde{t}|_{t=t_{i+1}} \equiv \Delta t = t_{i+1} - t_i > 0$$

每一個區段 $[t_i, t_{i+1}]$ 的 $\Delta t$ 可以不同，取決於via points的設定

邊界條件

$$\theta(\tilde{t}|_{t=t_i}) = \theta_i = a_0 \quad ①$$

$$\theta(\tilde{t}|_{t=t_{i+1}}) = \theta_{i+1} = a_0 + a_1\Delta t + a_2\Delta t^2 + a_3\Delta t^3 \quad ②$$

$$\dot{\theta}(\tilde{t}|_{t=t_i}) = \dot{\theta}_i = a_1 \quad ③$$

$$\dot{\theta}(\tilde{t}|_{t=t_{i+1}}) = \dot{\theta}_{i+1} = a_1 + 2a_2\Delta t + 3a_3\Delta t^2 \quad ④$$

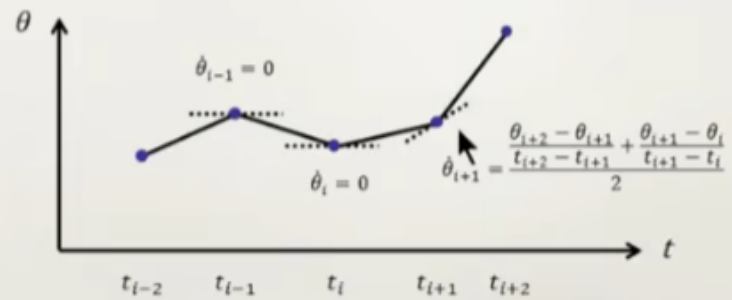
对于每一个via point的速度条件选取有三种方式：

1. 直接定义每个via point的速度

## 2. 自動生成

Ex: 如果  $\dot{\theta}_i$  在  $t_i$  前後變號，選擇  $\dot{\theta}_i = 0$

如果  $\dot{\theta}_i$  在  $t_i$  前後同號，選擇平均

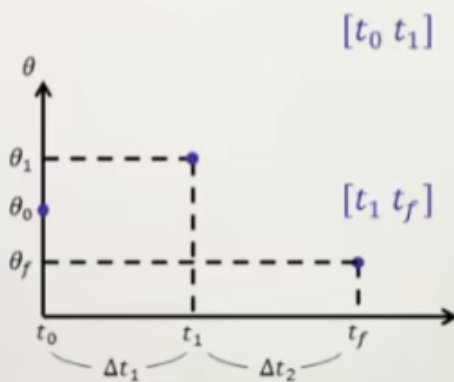


## 3. (实际用的) 利用速度和加速度连续的条件求解多项式

对于具有N+1个点的规划，共有N段轨迹，每段轨迹由三次多项式表示，总共有4N个系数。其中有2N个位置的约束，因为每段轨迹都要约束首尾点的位置。另有2(N-1)个速度和加速度连续性约束，该约束只在via point上作用，因为首尾点相邻点只有一个，每个点有一个速度连续性约束和一个加速度连续性约束。以下是只有1个via point的情况：

### Example: A trajectory with one via point

各段在運算時將時間平移到0開始



$[t_0 \ t_1]$

$$\tilde{t} = t - t_0 \quad [0 \ \Delta t_1]$$

$$\theta_I(\tilde{t}) = a_{10} + a_{11}\tilde{t} + a_{12}\tilde{t}^2 + a_{13}\tilde{t}^3$$

$[t_1 \ t_f]$

$$\tilde{t} = t - t_1 \quad [0 \ \Delta t_2]$$

$$\theta_{II}(\tilde{t}) = a_{20} + a_{21}\tilde{t} + a_{22}\tilde{t}^2 + a_{23}\tilde{t}^3$$

4 position B.C.s

2 for each  $\theta_j(t) \ j = I, II$

$$\begin{cases} \theta_0 = a_{10} \\ \theta_1 = a_{10} + a_{11}\Delta t_1 + a_{12}\Delta t_1^2 + a_{13}\Delta t_1^3 \\ \theta_1 = a_{20} \\ \theta_f = a_{20} + a_{21}\Delta t_2 + a_{22}\Delta t_2^2 + a_{23}\Delta t_2^3 \end{cases}$$

2 velocity B.C.s

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = 0 = a_{11} \\ \dot{\theta}_f = 0 = a_{21} + 2a_{22}\Delta t_2 + 3a_{23}\Delta t_2^2 \end{cases}$$

not necessary "0"

Via point

velocity continuity

acceleration continuity

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = a_{11} + 2a_{12}\Delta t_1 + 3a_{13}\Delta t_1^2 = a_{21} \\ \ddot{\theta}_1 = 2a_{12} + 6a_{13}\Delta t_1 = 2a_{22} \end{cases}$$

另外还需要有两个条件，这两个条件的选取有三种方式，均为对整段轨迹始末点的约束：

### 最後 2 conditions 的選擇方法

(1)  $\ddot{s}_1(x_1) = \ddot{s}_N(x_{N+1}) = 0$  定義加速度，Natural cubic spline

(2)  $\dot{s}_1(x_1) = u \quad \dot{s}_N(x_{N+1}) = v$  定義速度，Clamped cubic spline

(3)  $\text{if } s_1(x_1) = s_N(x_{N+1})$   
 $\text{use } \dot{s}_1(x_1) = \dot{s}_N(x_{N+1})$   
 $\ddot{s}_1(x_1) = \ddot{s}_N(x_{N+1})$  週期運動的連續性，Periodic cubic spline

## 以平面RRR机械臂为例

不管在哪个space规划，方程组的T矩阵是相同的，因为两个方式都是将物理量参数化为多项式，而多项式的构建本身也就是利用了t=0时的值和t=t0时候的值，因此T矩阵代表的只是多项式的表达方法，跟实际的取值没有关系，相差的只是A和θ向量。

## Cartesian space规划

□ 方法一：以cubic polynomials在Cartesian-space下規劃軌跡

1. 求出3個DOF (X,Y,θ) 各自cubic polynomials的coefficients

需通過4個點：每個DOF有3個cubic polynomials，共12個未知數

$$\Theta_{12 \times 1} = T_{12 \times 12} A_{12 \times 1}$$

為 $(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3)$ 函數

X/Y/θ

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta t_1 & \Delta t_1^2 & \Delta t_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t_2 & \Delta t_2^2 & \Delta t_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t_3 & \Delta t_3^2 & \Delta t_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\Delta t_3 & 3\Delta t_3^2 \\ 0 & 1 & 2\Delta t_1 & 3\Delta t_1^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\Delta t_1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\Delta t_2 & 3\Delta t_2^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\Delta t_2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

## Joint space规划

□ 方法二：以cubic polynomials在Joint-space下規劃軌跡

1. I.K.，求出initial、via、final points的Joint angles ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ )

2. 求出各( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) cubic polynomials的coefficients

需通過4個點：每個Joint angle有3個cubic polynomials，共12個未知數

$$\theta_{12 \times 3} = T_{12 \times 12} A_{12 \times 3}$$

$$\begin{array}{l} \text{& acd. continuity 6 position B.C.s} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 2.3728 & 1.9552 & -2.7572 \\ 0.7297 & 2.3005 & -2.2449 \\ 0.7297 & 2.3005 & -2.2449 \\ 0.0426 & 1.8668 & -1.3858 \\ 0.0426 & 1.8668 & -1.3858 \\ -0.7688 & 1.9552 & -1.1864 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} A_{12 \times 3} \end{array} \right]$$