欧拉角旋转公式

- 将旋转矩阵表达的姿态变换拆解成三次旋转角度以对应三个DOFs，有两种拆解方式：Fixed angles和Euler angles
- 旋转矩阵不是可交换的，因此旋转的顺序需要定义
- 使用Euler angles默认是对转动后的坐标系旋转

由R计算angle

Fixed angle

X-Y-Z Fixed Angles – 由R推算angles

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

If $\beta \neq 90^\circ$

$$
\beta = Atan2(-r_{31},\sqrt{{r_{11}}^2+{r_{21}}^2})
$$

$$
\alpha = Atan2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta)
$$

$$
\gamma = Atan2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)
$$

$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

Single solution

If $\beta = 90^\circ$

$$
\alpha = 0^\circ
$$

$$
\gamma = Atan2(r_{12}, r_{22})
$$

If $\beta = -90^\circ$

$$
\alpha = 0^\circ
$$

$$
\gamma = -Atan2(r_{12}, r_{22})
$$

Euler angle

Z-Y-Z Euler Angles - 由R推算angles

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

If $\beta \neq 0^\circ$

$$
\beta = Atan2(\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}, r_{33})
$$

$$
\alpha = Atan2(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta)
$$

$$
\gamma = Atan2(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta)
$$

If $\beta = 0^\circ$

$$
\alpha = 0^\circ
$$

$$
\gamma = Atan2(-r_{12}, r_{11})
$$

If $\beta = 180^\circ$

$$
\alpha = 0^\circ
$$

$$
\gamma = Atan2(r_{12}, -r_{11})
$$

对于任何一个旋转矩阵，他都可以用任何的方式拆解，也就是说旋转矩阵固定，表示两个坐标系的变换固定，此时用不同的方式拆解只是旋转的方式不同，但结果都相同。比如下面一开始是用xyz做的旋转变换，也可以用ZYZ的公式反算，**因为旋转矩阵都是一致的。**因此在机械臂的求逆解过程中，已知了旋转矩阵再用ZYZ公式计算出ZYZ Euler角也是合理的。

- Ex: Revisit Euler Angles-2的範例

$$ {}^{A}_{B}R_{X'Y'Z'}(60,30,0) = R_{X'}(60)R_{Y'}(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix} $$

若以ZYZ的公式反算，Euler Angles為何？

$R_{X'}(60)R_{Y'}(30)$

$$ \beta = Atan2\left(\sqrt{{r_{31}}^2 + {r_{32}}^2}, r_{33}\right) = Atan2\left(\sqrt{(-0.25)^2+0.866^2}, 0.433\right) = 64.3° $$

$$ \alpha = Atan2\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right) = Atan2\left(\frac{-0.75}{s\beta}, \frac{0.5}{s\beta}\right) = -56.3° $$

$$ \gamma = Atan2(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta) = Atan2(0.866/s\beta, 0.25/s\beta) = 73.9° $$