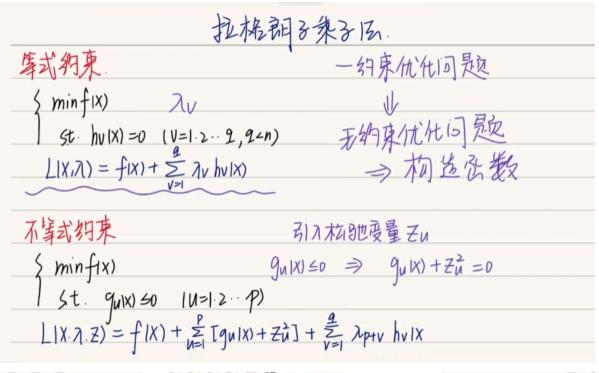
# 拉格朗日乘数法

用于将约束优化问题转化为无约束优化问题。<mark>(主要解决等式优化问题)</mark>

对于等式约束可以直接引入 $\lambda$ ,对于不等式约束要先通过松弛变量转化为等式约束,然后再引入 $\lambda$ ,最后对所有变量  $(x,\lambda)$  求导等于0,解出各个变量的值。



## 2. 迭代的拉格朗日乘子法

对于复杂的优化问题,目标函数或约束是非线性、不可解析时,需要迭代求解拉格朗日函数的解。

## 方法:

1. 写出拉格朗日函数:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x).$$

- 2. 使用数值优化方法 (如梯度下降、牛顿法):
  - 迭代优化 x,使得  $\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) o 0$ 。
  - 迭代调整  $\lambda$ ,使得约束  $h_i(x) o 0$ 。
- 3. 直到满足收敛条件:  $\nabla_x \mathcal{L} = 0$  且  $h_i(x) = 0$ 。

#### 特点:

• **需要迭代**: 每次更新 x 和  $\lambda$ , 逐步逼近最优解。

• 适用条件:复杂非线性问题。

### 示例:

$$\min f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$
 subject to  $h(x) = x^2 - 1 = 0$ .

• 拉格朗日函数:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = x^4 - 3x^2 + 2 + \lambda(x^2 - 1).$$

梯度条件:

$$abla_x \mathcal{L} = 4x^3 - 6x + 2\lambda x = 0, \quad h(x) = x^2 - 1 = 0.$$

• 解析法复杂: 联立方程难以直接求解。

• **迭代求解**: 通过数值方法逐步更新 x 和  $\lambda$  , 直到收敛。