

运动学逆解

空间

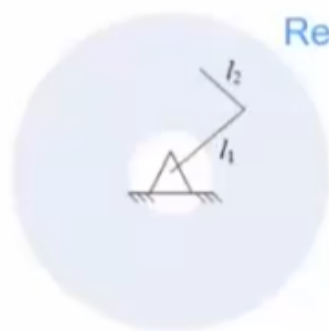
Reachable workspace (可达空间)：机器人末端至少有一个解可以达到给定位置的空间

Dexterous workspace (灵巧空间)：手臂可以用任何姿态（角度）到达的位置空间

右图的固定点就是在Dexterous workspace。

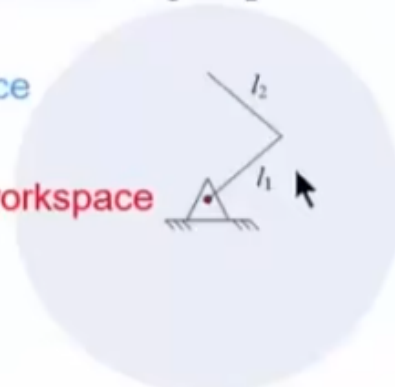
□ Ex: A RR manipulator

If $l_1 > l_2$



Reachable workspace

If $l_1 = l_2$



Dexterous workspace

Subspace：在给定的目标点时，手臂能达到的姿态

比如这里姿态只能在第一列和第三列的前两行改变，其他位置的姿态都是无法变动的。

□ Subspace

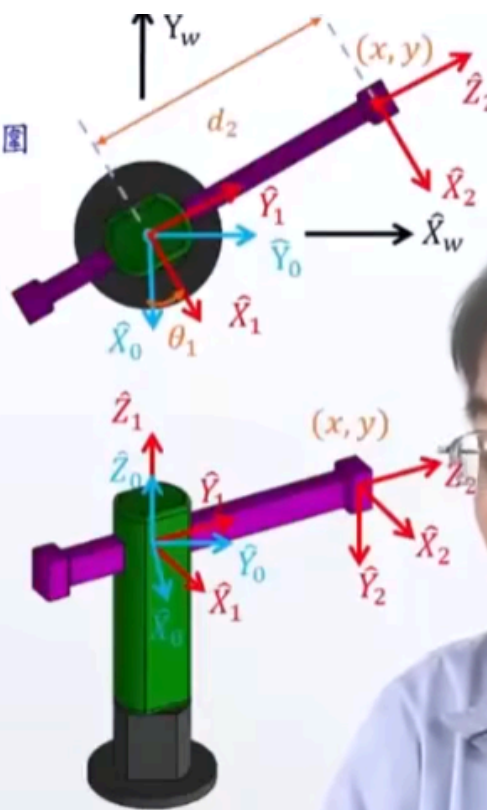
- ◆ 手臂在定义头尾的T所能达到的变动范围

□ Ex: A RP manipulator

- ◆ 2-DOF, Variables: (x, y)

$${}^w_2T = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^0\hat{Z}_2$ ${}^0P_2 ORG$



多重解

在非线性方程中，未知数与方程数相当并不意味着具有唯一解。

□ 解的數目

- ◆ 由於是nonlinear transcendental equations，6未知數6方程式不代表具有唯一解
- ◆ 是由joint數目和link參數所決定

Ex: A RRRRRR manipulator

| a_i | 解的數目 |
|-----------------------|-----------|
| $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ | ≤ 4 |
| $a_3 = a_5 = 0$ | ≤ 8 |
| $a_5 = 0$ | ≤ 16 |
| All $a_i \neq 0$ | ≤ 16 |

□ Ex: PUMA (6 rotational joints)

- ◆ 針對特定工作點，8組解
- ◆ 前3軸具有4種姿態

如右圖所示

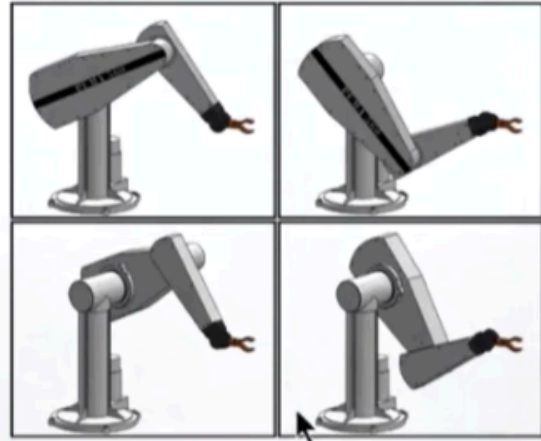
- ◆ 每一個姿態中，具有2組手腕轉動姿態

$$\theta'_4 = \theta_4 + 180^\circ$$

$$\theta'_5 = -\theta_5$$

$$\theta'_6 = \theta_6 + 180^\circ$$

- ◆ 若手臂本身有幾何限制，並非每一種解都可以運作

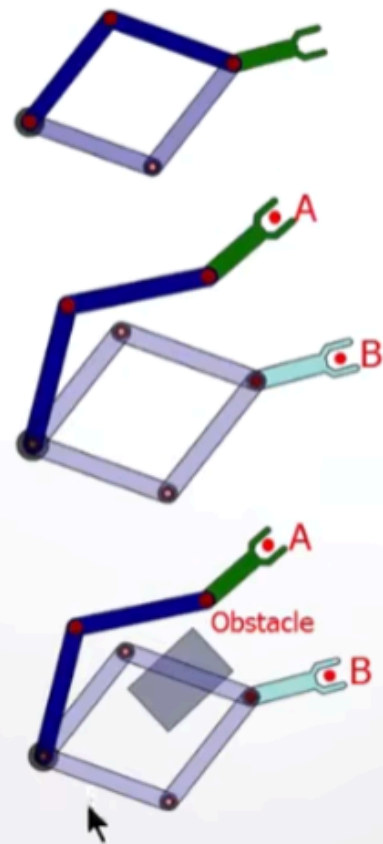


□ 若具有多重解，解的選擇方式

◆ 離目前狀態最近的解

- 最快
- 最省能
-

◆ 避開障礙物



几何法求解

以一个只有平面转动的机械臂为例子，其中 c_{123} 是指 $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3$ 。而 ϕ 是已知的角（这里是用的Craig表示法，给定的是最后一个轴原点的位置 x,y 和目标位姿相当于地杆的角 ϕ ），因此可以得到关系式 $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ 。

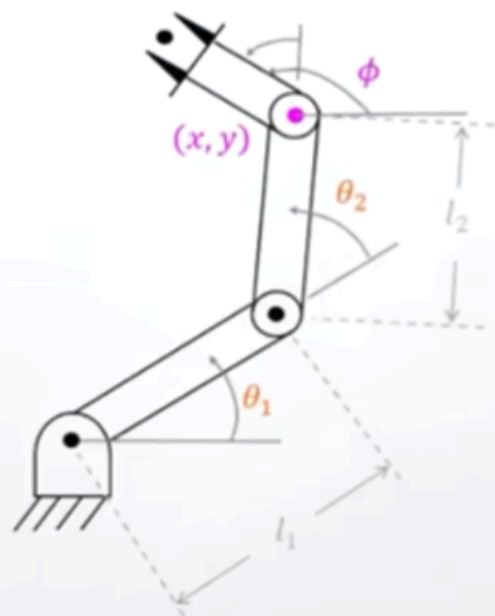
□ 1k problem: given (x, y, ϕ) , $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = ?$

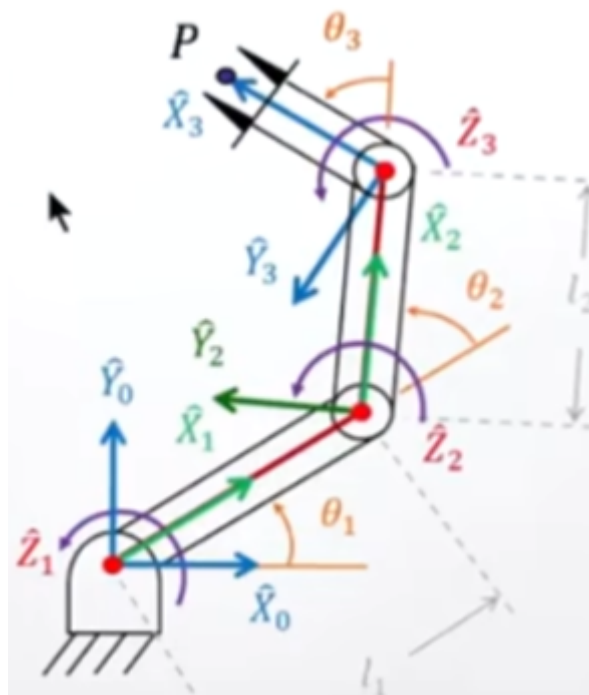
◆ Forward kinematics

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆ Goal point

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





问题转化成了求解平面几何，使用余弦定理求解：

□ 幾何法：將空間幾何切割成平面幾何

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(180^\circ - \theta_2)$$

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

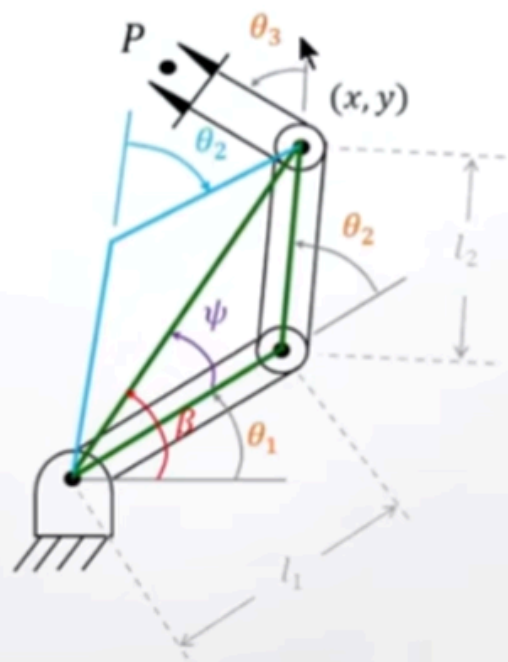
餘弦定理

$$\cos\psi = \frac{l_2^2 - (x^2 + y^2) - l_1^2}{-2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

三角形內角 $0^\circ < \psi < 180^\circ$

$$\theta_1 = \begin{cases} \text{atan2}(y, x) + \psi & \theta_2 < 0^\circ \\ \text{atan2}(y, x) - \psi & \theta_2 > 0^\circ \end{cases}$$

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$



这里需要注意的是根据 θ_2 的正负有两组解。

代数法求解

平面RRR

仍以上面的平面RRR机械臂为例，根据已知的 ϕ 和 x, y 建立的变换矩阵与参数矩阵——对应，即可建立方程：

□ 代數解

◆ 建立方程式

$$c_\phi = c_{123}$$

$$s_\phi = s_{123}$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆ 解 θ_2

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

> 1 or < -1: too far for the manipulator to reach

-1 ≤ ≤ 1: "two solutions" $\theta_2 = \cos^{-1}(c_2)$



◆ 將求得的 θ_2 帶入方程式

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} = (l_1 + l_2 c_2) c_1 + (-l_2 s_2) s_1 \triangleq k_1 c_1 - k_2 s_1$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} = (l_1 + l_2 c_2) s_1 + (l_2 s_2) c_1 \triangleq k_1 s_1 + k_2 c_1$$

◆ 變數變換

define

$$r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

then

$$k_1 = r \cos \gamma$$

$$\gamma = \text{Atan2}(k_2, k_1)$$

$$k_2 = r \sin \gamma$$

And then

$$\frac{x}{r} = \cos \gamma \cos \theta_1 - \sin \gamma \sin \theta_1 = \cos(\gamma + \theta_1)$$

$$\frac{y}{r} = \cos \gamma \sin \theta_1 + \sin \gamma \cos \theta_1 = \sin(\gamma + \theta_1)$$

◆ 解 θ_1

$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \text{Atan2}(y, x)$$

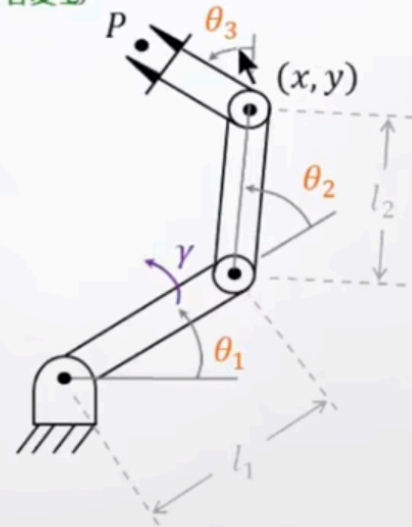
➡ $\theta_1 = \text{Atan2}(y, x) - \text{Atan2}(k_2, k_1)$

當 θ_2 選不同解， c_2 和 s_2 變動， k_1 和 k_2 變動， θ_1 也跟者變動

◆ 解 θ_3

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{Atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi$$

➡ $\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$



三角函数方程求解

□ Ex: 如何求得 $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ 的 θ ?

◆ 方法：變換到polynomials (4階以下有解析解)

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = u, \quad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

◆ 步驟：

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c$$

$$a \frac{1-u^2}{1+u^2} + b \frac{2u}{1+u^2} = c$$

$$(a+c)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}$$

a, b, c大小有限制, 不一定有解

$$\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}\right) \quad a+c \neq 0$$

$$\theta = 180^\circ \quad a+c = 0$$

6 Dof Puma 机械臂

对于六轴机械臂，如果有三个连续的轴交在同一点，则有解析解。

现在相当于给定了 z_4, z_5, z_6 坐标系的原点坐标，手的具体位姿也默认已经规划好了，现在只关心如何控制前三个轴，使得最后三轴的原点能到达 (x, y, z) 点，因此不关心 θ_4 及以后的角。

□ 若6-DOF manipulator具有三個連續的軸

交在同一點，則手臂有解析解

□ 一般，會把後三軸如此設計

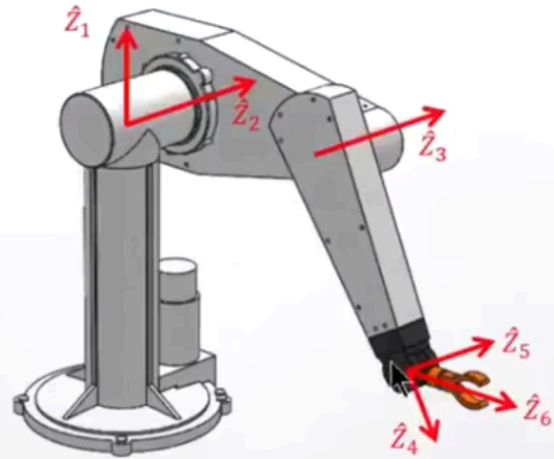
◆ 前三軸：產生移動

◆ 後三軸：產生轉動

□ Ex: A RRRRRR manipulator

◆ 因後三軸交一點

$${}^0P_{6\text{ ORG}} = {}^0P_{4\text{ ORG}}$$



采用层层分离的方法，分离每层的 θ 。

□ Positioning structure

◆ 法則：讓 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 層層分離

Note: ${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0P_{4\text{ ORG}} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P_{4\text{ ORG}}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= c\theta_i = c_i \\ \sin \theta_i &= s\theta_i = s_i \end{aligned}$$

$$= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s\alpha_3 \\ d_4 c\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 {}^1T_2 \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix}$$

4th column of 3T_4

SO

$$\begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2T_3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s\alpha_3 \\ d_4 c\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

讓 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 層層分離 · f 為 θ_3 函數

$$f_1(\theta_3) = a_3 c_3 + d_4 s\alpha_3 s_3 + a_2$$

$$f_2(\theta_3) = a_3 c\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 c\alpha_2 c_3 - d_4 s\alpha_2 c\alpha_3 - d_3 s\alpha_2$$

$$f_3(\theta_3) = a_3 s\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 s\alpha_2 c_3 + d_4 c\alpha_2 c\alpha_3 + d_3 c\alpha_2$$

因为第0个坐标系的z轴默认是跟第一个的z轴重合的，因此 T_0^1 只在xy方向上有旋转，因此最后一步是这样转化的。

这样就将 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分离开了，逐层求解。首先由于坐标轴1和0在原点上是重合的，因此有：

$$r = x^2 + y^2 + z^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$$

然后将g转化成显式只含有 θ_2 的式子，其余关于 θ_3 的部分用k表示。

◆ 下一步

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 {}^1T_2^T \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 \begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(\theta_2, \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 g_1 - s_1 g_2 \\ s_1 g_1 + c_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

讓 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 層層分離， g 為 θ_2, θ_3 函數

$$g_1(\theta_2, \theta_3) = c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1$$

$$g_2(\theta_2, \theta_3) = s_2 c \alpha_1 f_1 + c_2 c \alpha_1 f_2 - s \alpha_1 f_3 - d_2 s \alpha_1 \quad \rightarrow$$

$$g_3(\theta_2, \theta_3) = s_2 s \alpha_1 f_1 + c_2 s \alpha_1 f_2 + c \alpha_1 f_3 + d_2 c \alpha_1$$

$$r = x^2 + y^2 + z^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad r \text{ 僅為 } \theta_2, \theta_3 \text{ 函數}$$

$$= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3 + 2a_1(c_2 f_1 - s_2 f_2)$$

$$= (k_1 c_2 + k_2 s_2) 2a_1 + k_3$$

$$k_1(\theta_3) = f_1$$

$$k_2(\theta_3) = -f_2$$

$$k_3(\theta_3) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3$$

並且由於 z 軸重合，因此有 $z = g_3$

◆ 此外

$$z = g_3 = (k_1 s_2 - k_2 c_2) s \alpha_1 + k_4 \quad z \text{ 僅為 } \theta_2, \theta_3 \text{ 函數} \quad \rightarrow$$

$$k_1(\theta_3) = f_1$$

$$k_2(\theta_3) = -f_2$$

$$k_4(\theta_3) = f_3 c \alpha_1 + d_2 c \alpha_1$$

聯立可得一個類似橢圓等式：

$$\begin{cases} r = (k_1 c_2 + k_2 s_2) 2a_1 + k_3 \\ z = (k_1 s_2 - k_2 c_2) s \alpha_1 + k_4 \end{cases}$$

◦ If $a_1 = 0$, $r = k_3(\theta_3) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3$

◦ If $s \alpha_1 = 0$, $z = k_4(\theta_3) = f_3 c \alpha_1 + d_2 c \alpha_1$

◦ Else

$$\frac{(r - k_3)^2}{4a_1^2} + \frac{(z - k_4)^2}{s^2 \alpha_1} = k_1^2 + k_2^2$$

➡ Solve θ_3 of all three cases by using " $u = \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$ "

由於 r 和 z 都是已知，因此最後的橢圓方程是一個僅跟 θ_3 有關的式子，可以利用上一小節的方法求解。

□ 最後

Using $r = (k_1 c_2 + k_2 s_2)2a_1 + k_3$ to solve θ_2

Using $x = c_1 g_1(\theta_2, \theta_3) - s_1 g_2(\theta_2, \theta_3)$ to solve θ_1

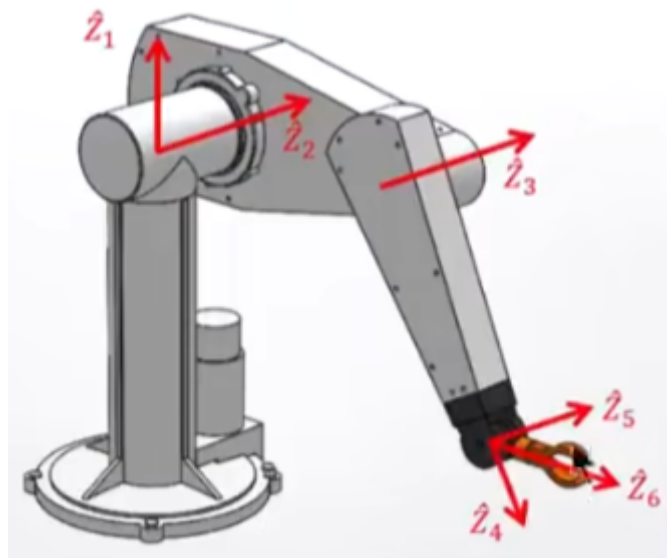
总结：每步用函数分离只是为了简化计算，核心是利用平方之和消除部分参数，使得方程只含有单独的某个参数。

在利用 $x^2 + y^2 + z^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ 时，利用了轴0原点与轴1重合的性质，将三个方程平方和相加，由于式子中有很多三角函数，因此平方相加后让方程变得很简洁。由于刚才利用的是平方和，每个独立的方程并没有使用，因此再利用比较简洁的 $z = g_3$ 联立求解，这样就变成了显式只含有 θ_2 的式子，并且两个方程比较对称，可以再次利用平方和消掉 θ_2 ，压缩方程至只含有一个方程一个未知数，然后求解 θ_3 ，最后 θ_1 和 θ_2 也可以带回方程求解。

后三轴求解

Puma手臂的前三轴只负责移动，后三轴交于同一点，用于旋转，因此前三轴并不关心目标点的位姿，只关心它的位置。

而对于后三轴来说，其实并不关心坐标系原点在哪里，因为他们只负责转动，只关心转轴的方向。



根据后三轴的特性，其不必要再用DH表达法的方式逐个坐标系变换，而是可以将三个轴合并为一个完整的坐标系，通过Euler angle的ZYZ变换，实现这三个轴的转动。这样就可以直接利用Euler angle的求解公式计算出转角了，而不需要像前三轴那样复杂求解。

由于实际后三个轴并不是两两垂直的，Z4和Z6应该是都垂直于Z5，因此这种形式用ZYZ旋转很方便。并且为了让转轴满足ZYZ转动的定义，在做转动的时候需要做一些额外的转动。

从axis 3转到axis 4，从DH表达法看需要旋转 θ_4 ，但由于接下来是ZYZ的Y轴的转动，而此时Y轴并没有对应上 Z_5 ，因此还需要再多转 π ，即要转动 $\theta_4 + \pi$ 。axis 4转到axis 5是转动 $-\theta_5$ 。axis 5转到axis 6转动 $\theta_6 + \pi$

□ DH definition vs. Z-Y-Z Euler Angles

