拉格朗日乘数法

用于将约束优化问题转化为无约束优化问题。**（主要解决等式优化问题）**

对于等式约束可以直接引入λ，对于不等式约束要先通过松弛变量转化为等式约束，然后再引入λ，最后对所有变量（x、λ）求导等于0，解出各个变量的值。

拉格朗日乘子法

等式约束

约束优化问题 ⇓ 无约束优化问题 ⇒ 构造函数

$$\begin{cases} \min f(x) & \lambda_v \\ s.t.\ h_v(x)=0 & (v=1,2\cdots q,\ q<n) \end{cases}$$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{v=1}^{q} \lambda_v h_v(x)$$

不等式约束

引入松弛变量 z_u

$$g_u(x) \le 0 \Rightarrow g_u(x) + z_u^2 = 0$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t.\ g_u(x) \le 0 & (u=1,2\cdots p) \end{cases}$$

$$L(x,\lambda,z) = f(x) + \sum_{u=1}^{p} [g_u(x) + z_u^2] + \sum_{v=1}^{q} \lambda_{p+v} h_v(x)$$

用拉格朗日乘子法求解：

$$\min f(x) = x_1 + x_2$$

$s.t.\ x_1^2 - x_2 \le 0$ ✓ $\quad \lambda_1 \quad z_1^2$ ✓

$-x_1 \le 0$ ✓ $\quad \lambda_2 \quad z_2^2$ ✓

① $x_1^2 - x_2 + z_1^2 = 0$

$-x_1 + z_2^2 = 0$

② $L(x,\lambda,z) = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 - x_2 + z_1^2) + \lambda_2(-x_1 + z_2^2)$

③ $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$

$\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda_1$

2. 迭代的拉格朗日乘子法

对于复杂的优化问题，目标函数或约束是非线性、不可解析时，**需要迭代求解**拉格朗日函数的解。

方法：

1. 写出拉格朗日函数：
$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x).$$
2. 使用数值优化方法（如梯度下降、牛顿法）：
   - 迭代优化 x，使得 $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) \to 0$。
   - 迭代调整 λ，使得约束 $h_i(x) \to 0$。
3. 直到满足收敛条件：$\nabla_x \mathcal{L} = 0$ 且 $h_i(x) = 0$。

特点：

- **需要迭代**：每次更新 x 和 λ，逐步逼近最优解。
- **适用条件**：复杂非线性问题。

示例：

$$\min f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \quad \text{subject to} \quad h(x) = x^2 - 1 = 0.$$

- 拉格朗日函数：
$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x^4 - 3x^2 + 2 + \lambda(x^2 - 1).$$
- 梯度条件：
$$\nabla_x \mathcal{L} = 4x^3 - 6x + 2\lambda x = 0, \quad h(x) = x^2 - 1 = 0.$$
- **解析法复杂**：联立方程难以直接求解。
- **迭代求解**：通过数值方法逐步更新 x 和 λ，直到收敛。