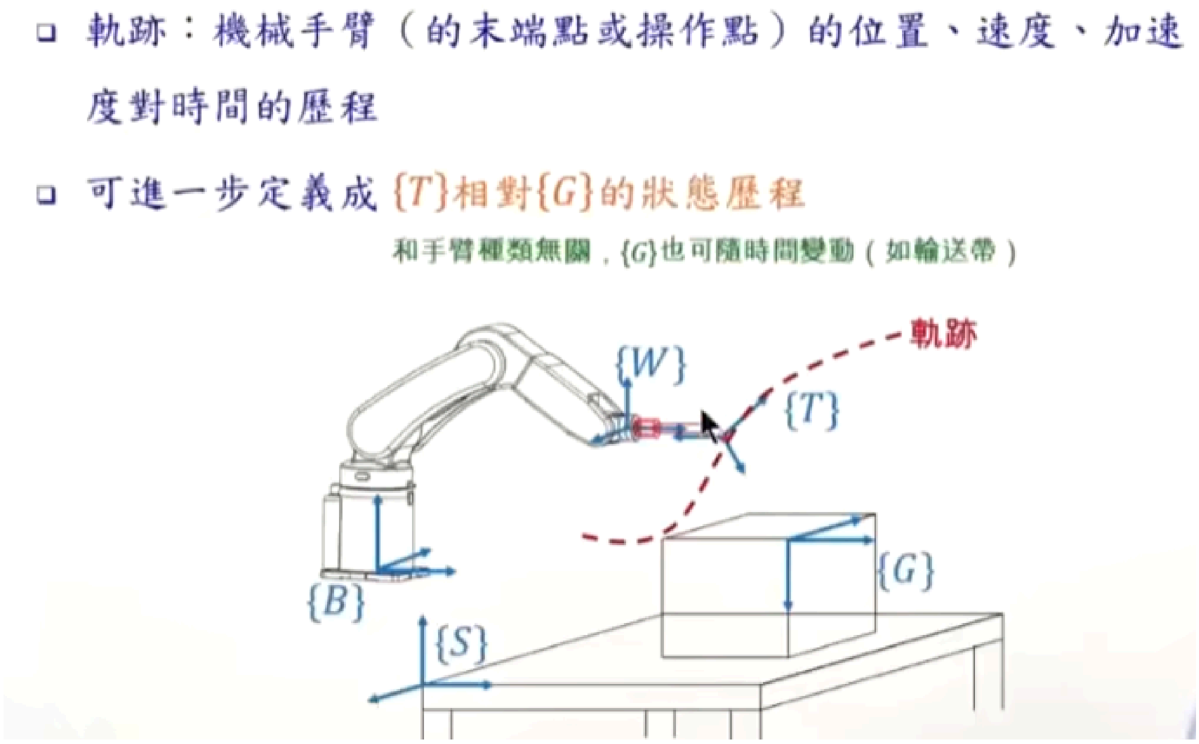
多项式轨迹规划

机械臂的规划有两种方式：在Joint space下和在Cartesian space下。区别在于前者是对驱动角进行规划，后者是对空间中的笛卡尔坐标系规划。

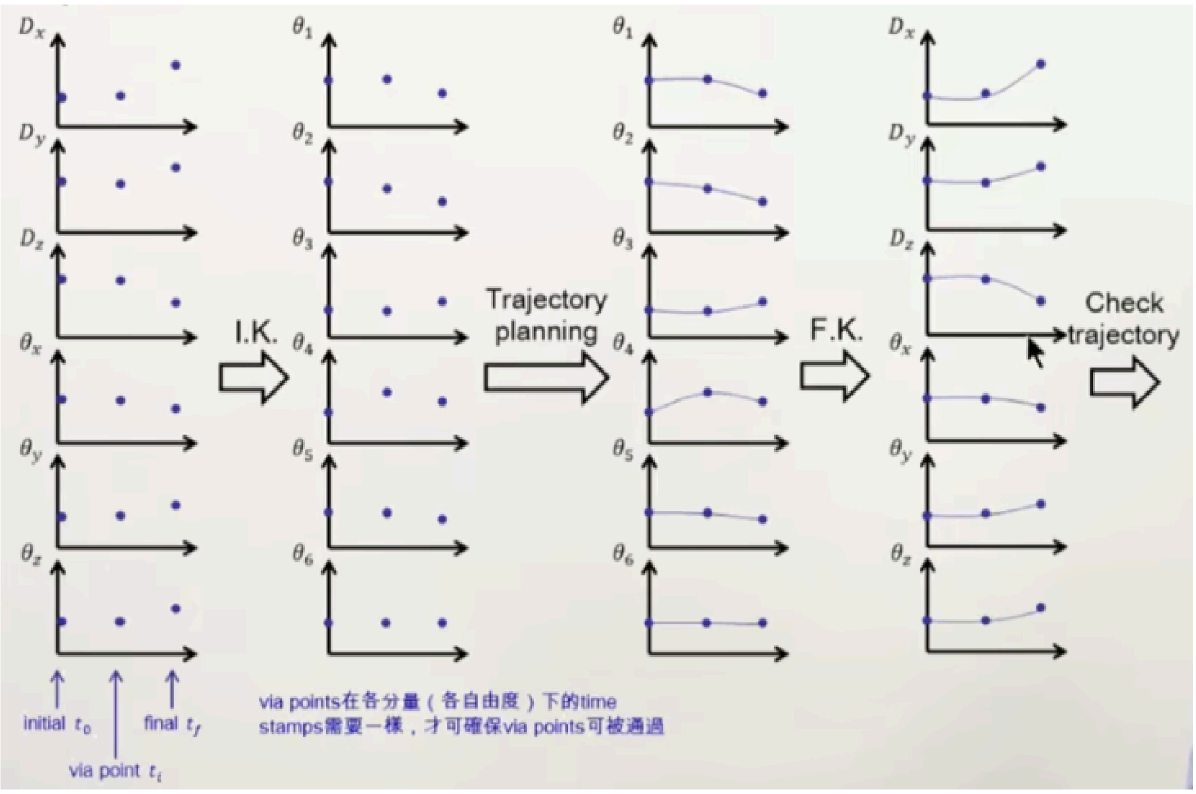
轨迹可以定义为是T相对于G的变换，T是机械臂上拿的工具坐标系，G是物体坐标系。这样的好处是即使G在移动，我们也只关心T与G的相对变换。具体求解应该是感知求出G的坐标系相对于世界坐标系S的变换，然后T根据实际需求在G的坐标系上做相对变换，进而求得T与世界坐标系的变换。由于T是工具的坐标系，因此还要转换成机械臂关节的实际位置，这里猜测是都转换到机械臂的地杆系B，然后在这个系下计算出机械臂实际要移动和旋转的位姿，由于T和W的变换关系应该是已知的，因此机械臂平移和旋转的目标状态就都可解。



手臂末端关节变换的世界系坐标用$(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$**来表示。**

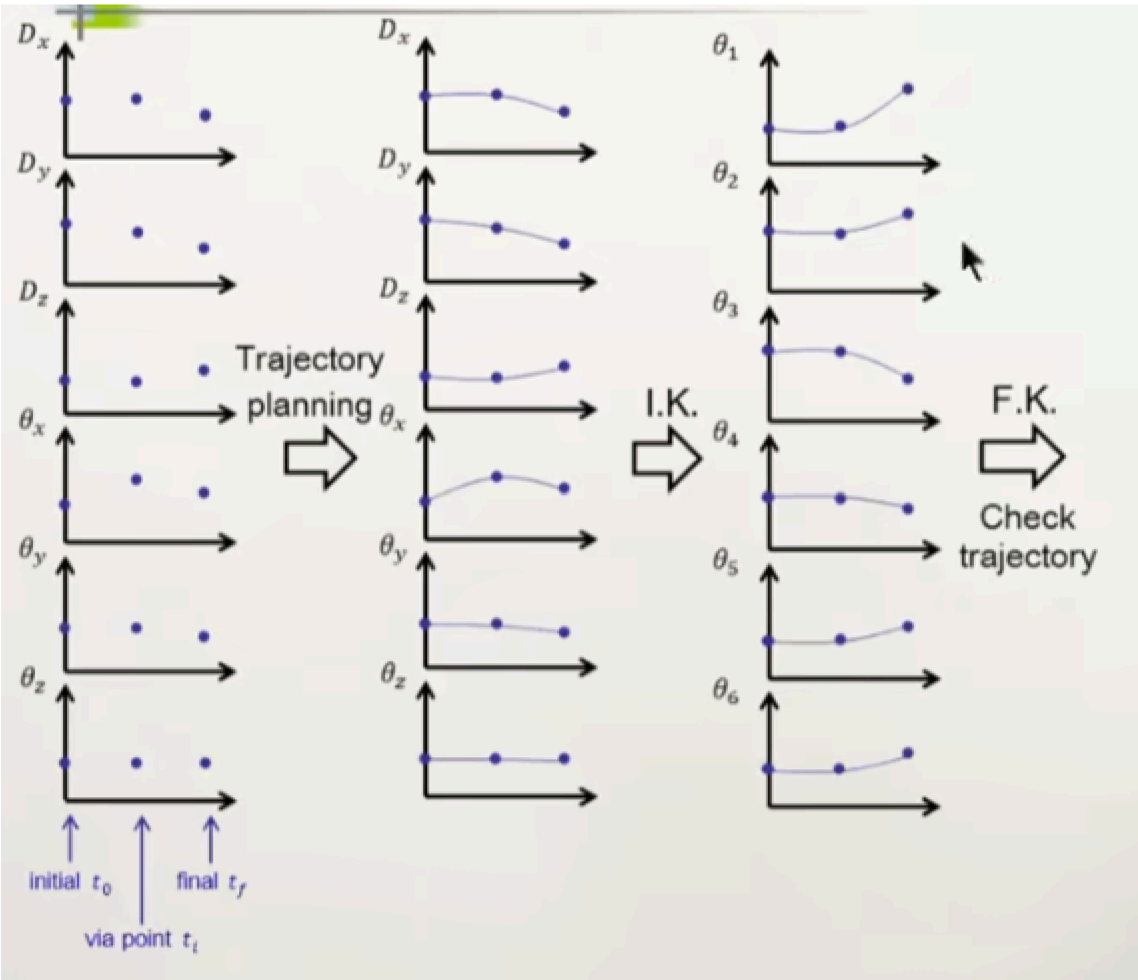
Joint space

1. 求逆解：将手臂的末端状态（目标状态的）转换成关节驱动角θ
2. 对所有θ进行轨迹规划
3. 前向运动学推导：将**每个时刻**关节空间的状态转换到手臂末端点的状态，并在笛卡尔坐标系下检查轨迹的可行性（避障性是否满足，是否有碰撞）



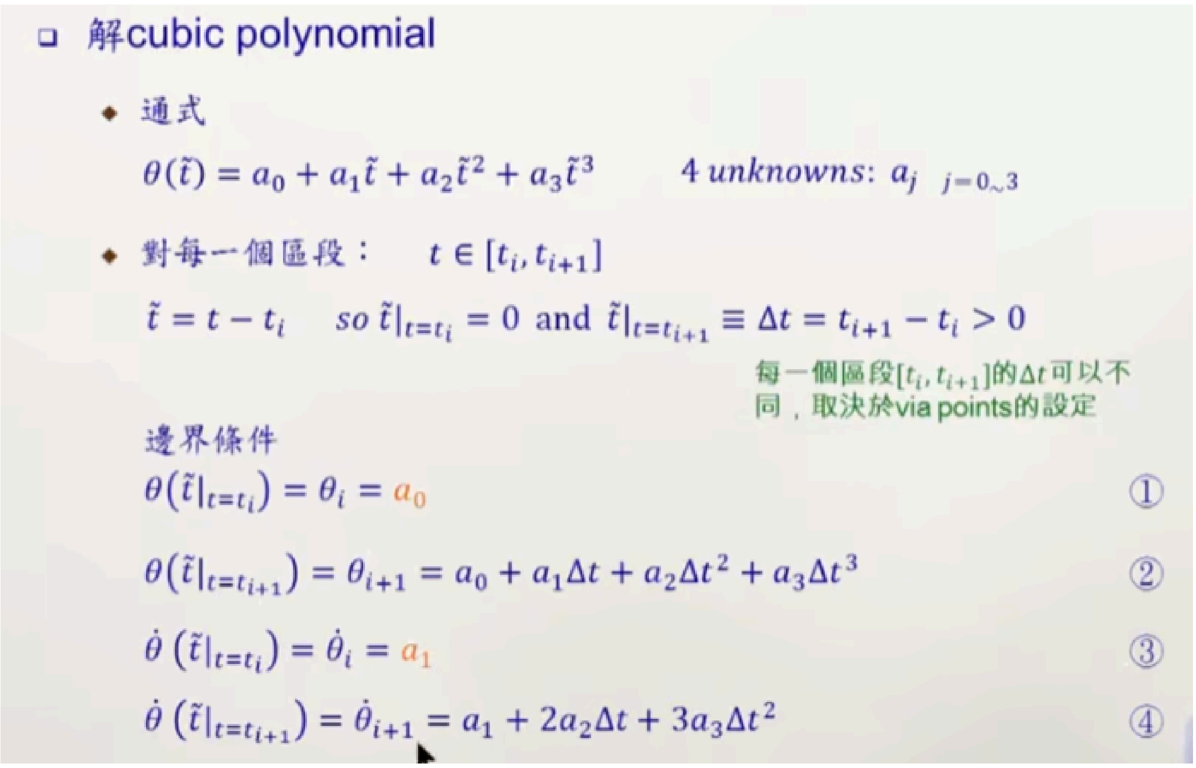
Cartesian space

1. 直接根据手臂的末端状态（目标状态）规划轨迹，$(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$每一轴都进行规划
2. 求逆解：将**每一时刻**手臂的末端状态转换到关节空间中
3. 检查在关节空间中轨迹的可行性，包括关节角的加速度是否过大、转动的角度是否超过关节最大转角



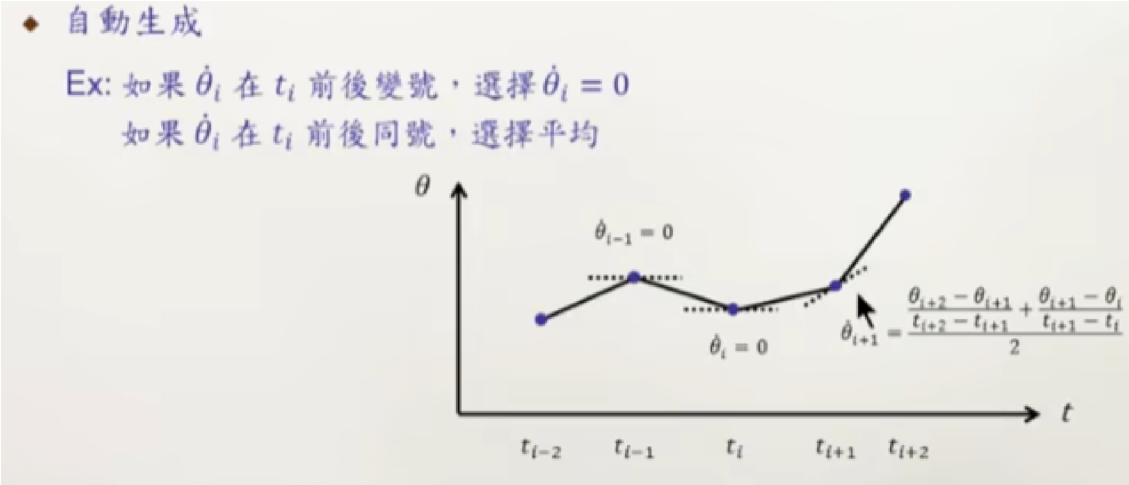
三次多项式轨迹规划

对于每一段轨迹，根据始末点的状态，使用三次多项式进行求解，并使用相对时间。



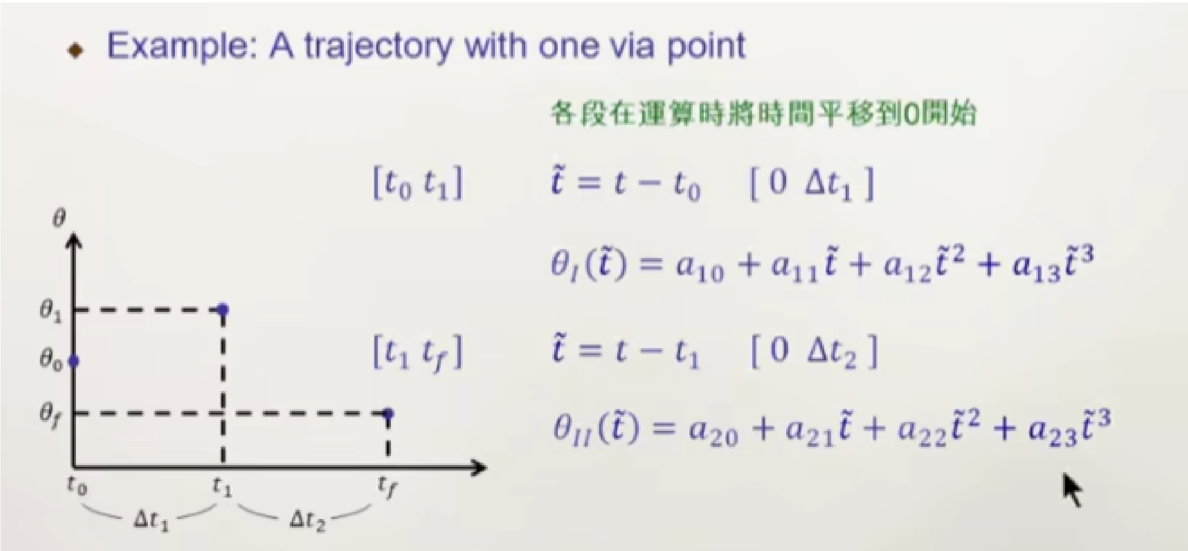
对于每一个via point的速度条件选取有三种方式：

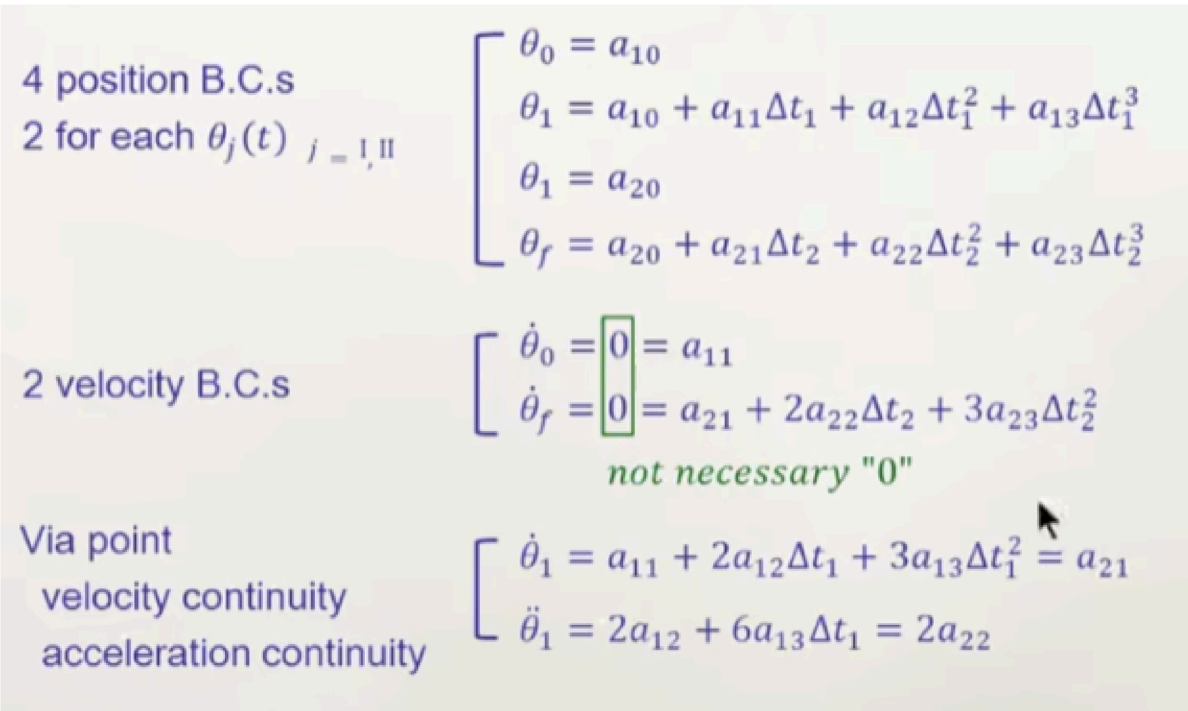
1. 直接定义每个via point的速度

2. 

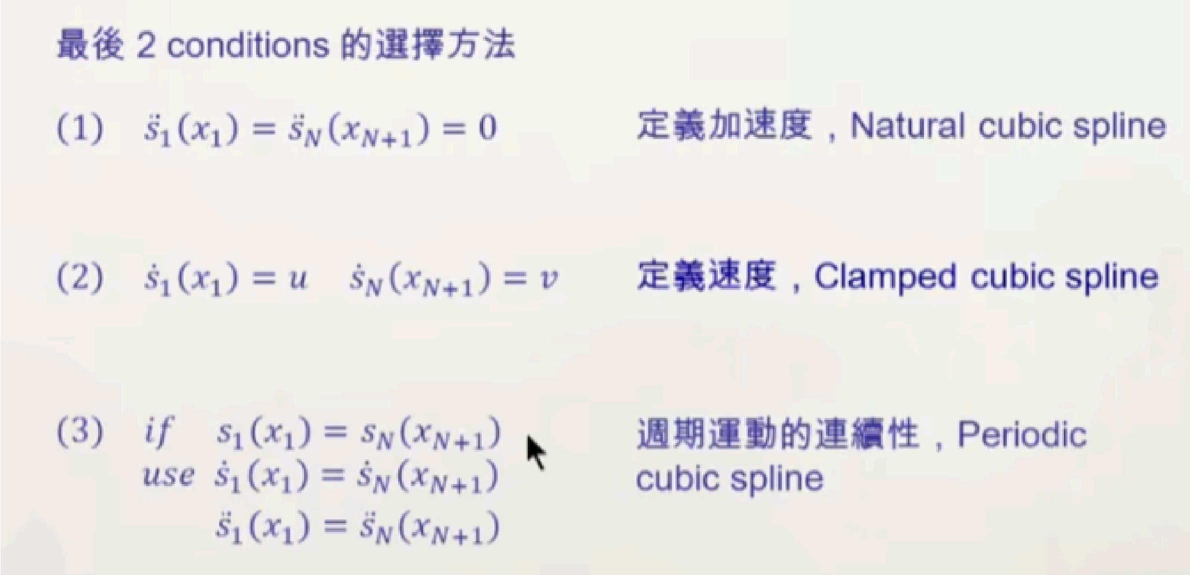
3. （实际用的）利用速度和加速度连续的条件求解多项式

对于具有N+1个点的规划，共有N段轨迹，每段轨迹由三次多项式表示，总共有**4N**个系数。其中有**2N**个位置的约束，因为每段轨迹都要约束首尾点的位置。另有**2(N-1)**个速度和加速度连续性约束，该约束只在via point上作用，因为首尾点相邻点只有一个，每个点有一个速度连续性约束和一个加速度连续性约束。以下是只有1个via point的情况：





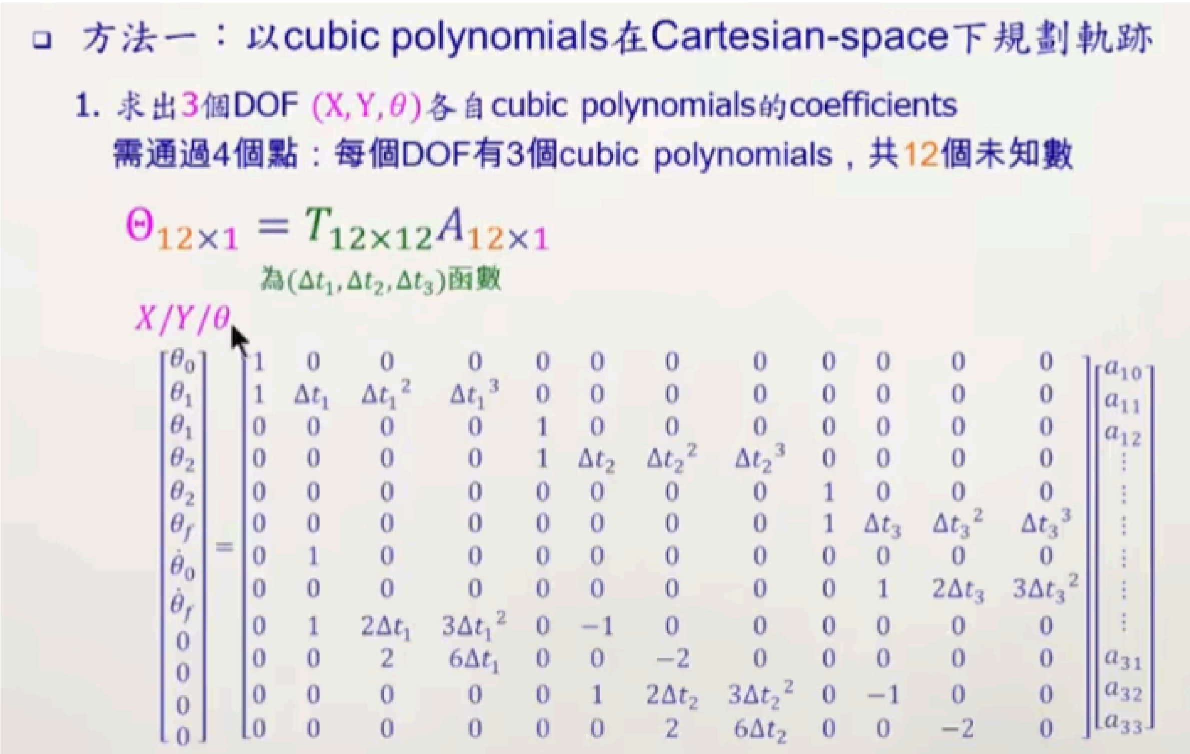
另外还需要有两个条件，这两个条件的选取有三种方式，均为对整段轨迹始末点的约束：



以平面RRR机械臂为例

不管在哪个space规划，方程组的T矩阵是相同的，因为两个方式都是将物理量参数化为多项式，而多项式的构建本身也就是利用了t=0时的值和t=t0时候的值，因此T矩阵代表的只是多项式的表达方法，跟实际的取值没有关系，相差的只是A和θ向量。

Cartesian space规划



Joint space规划

- 方法二：以cubic polynomials在Joint-space下規劃軌跡

1. I.K.，求出initial、via、final points的Joint angles $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$
2. 求出各$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ cubic polynomials的coefficients

   需通過4個點：每個Joint angle有3個cubic polynomials，共12個未知數

$$\Theta_{12\times 3} = T_{12\times 12} A_{12\times 3}$$

6 position B.C.s & acl. continuity

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2.3728 & 1.9552 & -2.7572 \\
0.7297 & 2.3005 & -2.2449 \\
0.7297 & 2.3005 & -2.2449 \\
0.0426 & 1.8668 & -1.3858 \\
0.0426 & 1.8668 & -1.3858 \\
-0.7688 & 1.9552 & -1.1864 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 27 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 27 \\
0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\\ \\ \\ \\ \\ A_{12\times 3} \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{bmatrix}
$$