量 子 场 论

第 2 章 量子标量场

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 7 月 29 日

第 2 章　量子标量场　　2.1 节　简谐振子的正则量子化

- 本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法
- 标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广
- **一维简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

- 其中 m 是质量，ω 是角频率，第一项是动能，第二项是势能

第 2 章　量子标量场　　2.1 节　简谐振子的正则量子化

本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法

标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广

一维简谐振子 (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

其中 m 是质量，ω 是角频率，第一项是动能，第二项是势能

在**量子力学**中，把**坐标** x 和**动量** p 两个**正则变量**看作**厄米算符**，要求它们满足**正则对易关系** $\boxed{[x,p] \equiv xp - px = \mathrm{i}}$

构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + \mathrm{i}p), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - \mathrm{i}p)$$

a 称为**湮灭算符** (annihilation operator)，$a^\dagger$ 称为**产生算符** (creation operator)

两者互为**厄米共轭** (Hermitian conjugate)

Charles Hermite
(1822–1901)

产生湮灭算符的对易关系

湮灭算符和产生算符的**对易关系**为

$$
\begin{aligned}
[a,a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x+\mathrm{i}p,m\omega x-\mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x,-\mathrm{i}p]+[\mathrm{i}p,m\omega x]) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x,p]+\mathrm{i}[p,x]) = -\mathrm{i}[x,p] = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

即 $\boxed{[a,a^\dagger]=1}$ ，同理推出 $\boxed{[a,a]=0}$ 和 $\boxed{[a^\dagger,a^\dagger]=0}$

产生湮灭算符的对易关系

湮灭算符和产生算符的**对易关系**为

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x + \mathrm{i}p, m\omega x - \mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x, -\mathrm{i}p] + [\mathrm{i}p, m\omega x]) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x,p] + \mathrm{i}[p,x]) = -\mathrm{i}[x,p] = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

即 $\boxed{[a, a^\dagger] = 1}$ ，同理推出 $\boxed{[a, a] = 0}$ 和 $\boxed{[a^\dagger, a^\dagger] = 0}$

反过来用 a 和 $a^\dagger$ 表示 x 和 p，有 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger)$，$p = -\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{m\omega}{2}}(a - a^\dagger)$

对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 意味着 $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$，于是将**哈密顿量**表达成

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2m}\frac{m\omega}{2}(a - a^\dagger)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{2m\omega}(a + a^\dagger)^2 \\
&= -\frac{\omega}{4}(aa - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) + \frac{\omega}{4}(aa + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) = \frac{\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \\
&= \frac{\omega}{2}(2a^\dagger a + 1) = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $N \equiv a^\dagger a$ 是个**厄米算符**，称为**粒子数算符**

粒子数算符的本征态

- N 是个**半正定**算符，对于**任意**态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) **非负**：

$$\boxed{\langle\Psi|\,N\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,a^\dagger a\,|\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0,}\qquad \text{其中}\ |a\Psi\rangle \equiv a\,|\Psi\rangle$$

- 因此，**哈密顿量** $H = \omega(N + 1/2)$ 是**正定**算符，$\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle > 0$
- 设 $|n\rangle$ 是 N 的**本征态**，满足**本征方程** $N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ 和**归一化条件** $\langle n|n\rangle = 1$
- 由 $n = \langle n|\,n\,|n\rangle = \langle n|\,N\,|n\rangle \geq 0$ 可知，**本征值** n 是一个**非负实数**

粒子数算符的本征态

- N 是个**半正定**算符，对于**任意**态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) **非负**：

$$\boxed{\langle\Psi| N |\Psi\rangle = \langle\Psi| a^\dagger a |\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0,} \quad \text{其中} \ |a\Psi\rangle \equiv a|\Psi\rangle$$

- 因此，**哈密顿量** $H = \omega(N + 1/2)$ 是**正定**算符，$\langle\Psi| H |\Psi\rangle > 0$
- 设 $|n\rangle$ 是 N 的**本征态**，满足**本征方程** $N|n\rangle = n|n\rangle$ 和**归一化条件** $\langle n|n\rangle = 1$
- 由 $n = \langle n| n |n\rangle = \langle n| N |n\rangle \geq 0$ 可知，**本征值** n 是一个**非负实数**
- 利用**对易子公式**

$$[AB, C] = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]$$

- 推出 $[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] = a^\dagger$ 和 $[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a$
- 故 $Na^\dagger = a^\dagger N + a^\dagger$，$Na = aN - a$，从而

$$Na^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger)|n\rangle = (n+1)a^\dagger |n\rangle$$

$$Na|n\rangle = (aN - a)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

升算符和降算符

- 可见，$a^\dagger|n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 都是 N 的**本征态**，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，因此

$$a^\dagger|n\rangle = c_1|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = c_2|n-1\rangle$$

- 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**
- **产生算符** $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符**
- **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符**

升算符和降算符

- 可见，$a^\dagger\ket{n}$ 和 $a\ket{n}$ 都是 N 的**本征态**，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，因此

$$a^\dagger\ket{n}=c_1|n+1\rangle,\quad a\ket{n}=c_2|n-1\rangle$$

- 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**
- **产生算符** $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符**
- **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符**
- 为确定归一化常数的值，进行以下计算，

对易关系

$$n+1=\bra{n}(N+1)\ket{n}=\bra{n}(a^\dagger a+1)\ket{n}=\bra{n}aa^\dagger\ket{n}=|c_1|^2\langle n+1|n+1\rangle=|c_1|^2$$

$$n=\bra{n}N\ket{n}=\bra{n}a^\dagger a\ket{n}=|c_2|^2\langle n-1|n-1\rangle=|c_2|^2$$

- 将 c_1 和 c_2 都取为**正实数**，得 $c_1=\sqrt{n+1}$ 和 $c_2=\sqrt{n}$，故

$$a^\dagger\ket{n}=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle,\quad a\ket{n}=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用**降算符** a 逐步操作
- 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a|n\rangle$, $a^2|n\rangle$, $a^3|n\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $\cdots$
- 由于 $n\geq 0$，必定存在一个**最小本征值** n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a|n_0\rangle = 0$
- 注意，$a|n_0\rangle = 0$ 是使**本征值停止减小**的**条件**
- 于是 $N|n_0\rangle = a^\dagger a|n_0\rangle = 0 = 0|n_0\rangle$，可见 $n_0 = 0$，即 $|n_0\rangle = |0\rangle$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用**降算符** a 逐步操作
- 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a\,|n\rangle$, $a^2\,|n\rangle$, $a^3\,|n\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $\cdots$
- 由于 $n \geq 0$，必定存在一个**最小本征值** n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a\,|n_0\rangle = 0$
- 注意，$a\,|n_0\rangle = 0$ 是使**本征值停止减小**的**条件**
- 于是 $N\,|n_0\rangle = a^\dagger a\,|n_0\rangle = 0 = 0\,|n_0\rangle$，可见 $n_0 = 0$，即 $|n_0\rangle = |0\rangle$
- 反过来，从 $|0\rangle$ 出发，用**升算符** $a^\dagger$ 逐步操作
- 得到本征值逐次增加的一系列本征态 $a^\dagger\,|0\rangle$, $(a^\dagger)^2\,|0\rangle$, $(a^\dagger)^3\,|0\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 1, 2, 3, $\cdots$
- 综上，**本征值** n 的取值是**非负整数**，是**量子化**的
- 可以用 $a^\dagger$ 和 $|0\rangle$ 将本征态 $|n\rangle$ 表示为 $|n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\,|0\rangle$

能量本征值

🔍 显然，$|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H\,|n\rangle = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n\,|n\rangle$$

🔭 相应的**能量本征值**为

$$\boxed{E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

🔬 **基态** $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**，这是**量子力学**的**特有**结果

能量本征值

显然，$|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H|n\rangle = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$\boxed{E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0=\omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**，这是**量子力学**的**特有**结果

可以将 $|0\rangle$ 看作**真空态**，将 $n>0$ 的 $|n\rangle$ 看作包含 n **个声子** (phonon) 的激发态，每个声子具有**一份能量** ω

这样一来，n 表示声子的数目，故**粒子数算符** N 描述**声子数**

$a^\dagger$ 的作用是**产生**一个声子，从而**增加**一份能量

a 的作用是**湮灭**一个声子，从而**减少**一份能量

这是将 $a^\dagger$ 和 a 称为**产生算符**和**湮灭算符**的原因

2.2 节　量子场论中的正则对易关系

- 对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统中的广义坐标 x 和 广义动量 p 提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系
- 接下来将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化
- 这需要涉及到绘景变换，在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

2.2 节　量子场论中的正则对易关系

- 对**简谐振子**进行**正则量子化**的关键在于将系统中的**广义坐标** x 和 **广义动量** p 提升为 **Hilbert 空间**上的**算符**，要求它们满足**正则对易关系**
- 接下来将这种方法推广到**场论**里，从而对**场**进行**正则量子化**
- 这需要涉及到**绘景变换**，在**量子力学**中，**Schrödinger 绘景**和 **Heisenberg 绘景**提供了两种**等价**的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系
- 在 **Schrödinger 绘景**中，**态矢** $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 代表**随时间演化**的物理态，而 Hilbert 空间上的**算符** O^{S} **不依赖于时间**

Erwin Schrödinger (1887–1961)

- 系统**哈密顿量算符** H **不含时间**，则 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 与 $|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 通过**幺正变换**联系起来：$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = e^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$
- 这里用到的**指数函数**对任意算符 A 定义为 $\boxed{e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}}$
- 于是 $$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}} = \mathrm{i}\frac{\partial e^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = He^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = \boxed{H|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}}$$
- 这就是 **Schrödinger 方程**，而 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = e^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 其实是方程的**解**

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢为 $\boxed{|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}}$

它不随时间演化，$\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0$

而算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，$\boxed{O^{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}$

由于 $[H, H] = 0$，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H$

Werner Heisenberg (1901–1976)

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢为 $\boxed{|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}}$

它不随时间演化，$\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0$

而算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，$\boxed{O^{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}$

由于 $[H, H] = 0$，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H$

故哈密顿量 H 在这两种绘景中是相同的，$\boxed{H^{\mathrm{H}} = H^{\mathrm{S}} = H}$

Werner Heisenberg (1901–1976)

$${}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\, O^{\mathrm{H}}(t)\, |\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\, |\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\, O^{\mathrm{S}}\, |\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$$

表明，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理

含时算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 满足 Heisenberg 运动方程

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O^{\mathrm{H}}(t)} = \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}}{\partial t}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t} = -H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}H$$

$$= -HO^{\mathrm{H}}(t) + O^{\mathrm{H}}(t)H = \boxed{[O^{\mathrm{H}}(t), H]}$$

等时对易关系

⌛ 上一节对**简谐振子**的**量子化**是在 **Schrödinger 绘景**中进行的，因为没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的**时间依赖性**

🛋 将正则对易关系改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 **Heisenberg 绘景**中的形式是

$$
\begin{aligned}
[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] &= [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} x^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} p^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} x^{\mathrm{S}} p^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} p^{\mathrm{S}} x^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} [x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \mathrm{i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

🪑 可见，正则对易关系的形式**不依赖于绘景**

⏰ 上式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) **对易关系**

等时对易关系

- 上一节对**简谐振子**的**量子化**是在 **Schrödinger 绘景**中进行的，因为没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的**时间依赖性**
- 将正则对易关系改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 **Heisenberg 绘景**中的形式是

$$\begin{aligned}[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] &= [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} x^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} p^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} x^{\mathrm{S}} p^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} p^{\mathrm{S}} x^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} [x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \mathrm{i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}\end{aligned}$$

- 可见，正则对易关系的形式**不依赖于绘景**
- 上式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) **对易关系**
- 接下来的讨论在 **Heisenberg 绘景**中进行，**省略**绘景的标志性上标 H
- 将讨论推广到具有 $\boldsymbol{n}$ **个自由度**的系统，记 $q_i(t)$ 为系统在 Heisenberg 绘景中的**广义坐标算符**，$p_i(t)$ 为相应的**广义动量算符**，它们是系统的**正则变量**
- 由于不同自由度**不应该相互影响**，这些算符需要满足的**等时对易关系**为

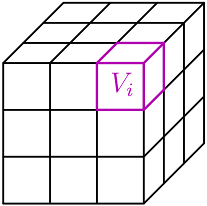
$$[q_i(t), p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

空间离散化

1.1 节提到，在**量子场论**中，为了平等地处理时间和空间，**空间坐标** $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的**参数**

场论讨论的是具有**无穷多个连续自由度**的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个**广义坐标**

为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间**离散化**，划分成无穷多个**小体积元** V_i，再取 $V_i \to 0$ **的极限**来得到**连续空间**的结果



空间离散化

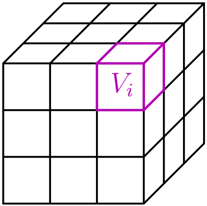
1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，空间坐标 $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的参数

场论讨论的是具有无穷多个连续自由度的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个广义坐标

为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间离散化，划分成无穷多个小体积元 V_i ，再取 $V_i \to 0$ 的极限来得到连续空间的结果

在体积元 V_i 中，定义相应的广义坐标

$$\Phi_i(t) \equiv \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\, \Phi(\mathbf{x},t)$$



这是场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 在 V_i 中的平均值

记 $\partial_\mu\Phi$ 和拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi)$ 在 V_i 中的平均值为

$$\partial_\mu\Phi_i \equiv \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\, \partial_\mu\Phi, \quad \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi)$$

离散化后的等时对易关系

当 $V_i \to 0$ 时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu \Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$，**拉格朗日量**表达为

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i\, \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义，在**体积元** V_i 中与**广义坐标** $\Phi_i(t)$ 相对应的**广义动量**是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)}$$

离散化后的等时对易关系

当 $V_i \to 0$ 时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu \Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$，**拉格朗日量**表达为

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i\, \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义，在**体积元** V_i 中与**广义坐标** $\Phi_i(t)$ 相对应的**广义动量**是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)}$$

相应的**等时对易关系**为

$$[\Phi_i(t), \Pi_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [\Phi_i(t), \Phi_j(t)] = 0, \quad [\Pi_i(t), \Pi_j(t)] = 0$$

引入 $\pi_i(t) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \dfrac{\Pi_i(t)}{V_i}$，则第一、三条等时对易关系可用 $\pi_i(t)$ 表达为

$$[\Phi_i(t), \pi_j(t)] = \mathrm{i}\, \frac{\delta_{ij}}{V_j}, \quad [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0$$

δ 函数

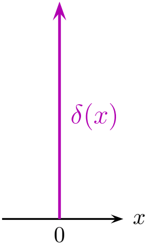
从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1$

对任意连续函数 $f(x)$ 有 $\boxed{f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-y)}$ （挑选性）

$\delta(x)$ 是偶函数，$\delta(x) = \delta(-x)$，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\pm ipx} = 2\pi\, \delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \quad x\,\delta(x) = 0$$



δ 函数

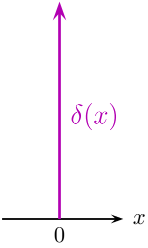
从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1$

对任意连续函数 $f(x)$ 有 $\boxed{f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-y)}$ （挑选性）

$\delta(x)$ 是偶函数，$\delta(x) = \delta(-x)$，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\pm ipx} = 2\pi\,\delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \quad x\,\delta(x) = 0$$



这里约定，函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ipx} f(x)$

Fourier 逆变换 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, \mathrm{e}^{ipx} \tilde{f}(p)$，$2\pi\,\delta(p)$ 是 $f(x) = 1$ 的 Fourier 变换

若方程 $f(x) = 0$ 具有若干个分立的单根 x_i，则 $\boxed{\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}}$

三维 δ 函数

用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$

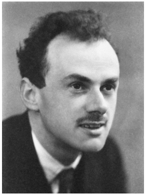
那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$，$\displaystyle\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$，有 $\displaystyle f(\mathbf{y}) = \int d^3x\, f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的**偶函数**，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$，满足 $\boxed{\displaystyle\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})}$

Joseph Fourier
(1768–1830)



Paul Dirac
(1902–1984)

三维 δ 函数

- 用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$
- 那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$，$\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$
- 对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$，有 $f(\mathbf{y}) = \int d^3x\, f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，以及

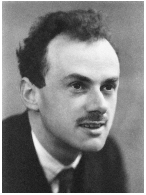
$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的**偶函数**，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$，满足 $\boxed{\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})}$
- 在三维空间中，**函数 $f(\mathbf{x})$** 的 **Fourier 变换**是

$$\boxed{\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

- **Fourier 逆变换**是 $\boxed{f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\tilde{f}(\mathbf{p})}$
- $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 是 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的 Fourier 变换

Joseph Fourier
(1768–1830)



Paul Dirac
(1902–1984)

量子场论中的正则对易关系

- $f(\mathbf{x})$ 在 V_i **上的平均值** $f_i = \sum_j f_j\, \delta_{ij} = \sum_j V_j\, f_j\, \dfrac{\delta_{ij}}{V_j}$
- $f(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \to 0$ **极限**形式
- 也就是说，在**连续极限**下，$\dfrac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
- $\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$
- $\pi_i(t) = \dfrac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t)$ **（共轭动量密度）**
- 因此，**等时对易关系**化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)] = 0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0$$

量子场论中的正则对易关系

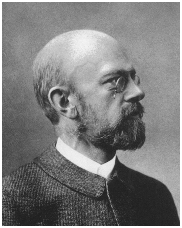
- $f(\mathbf{x})$ 在 V_i 上的平均值 $f_i = \sum_j f_j\,\delta_{ij} = \sum_j V_j\, f_j\, \dfrac{\delta_{ij}}{V_j}$
- $f(\mathbf{x}) = \int d^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \to 0$ 极限形式
- 也就是说，在连续极限下，$\dfrac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
- $\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$
- $\pi_i(t) = \dfrac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t)$ （共轭动量密度）
- 因此，等时对易关系化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0$$

- 推广到包含若干个场 Φ_a 的系统，假设不同的场相互独立，则

$$\boxed{[\Phi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi_a(\mathbf{x},t),\Phi_b(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=0}$$

- 这就是量子场论中的正则对易关系，它是场的正则量子化的出发点
- 此时，系统的正则变量 $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_a(\mathbf{x},t)$ 都是 Hilbert 空间上的算符



David Hilbert
(1862–1943)

2.3 节 实标量场的正则量子化

- 如果场 $\phi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，就称它为**标量场**
- 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$
- 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\boxed{\phi'(x') = \phi(x)}$$

- 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\boxed{\phi^\dagger(x) = \phi(x)}$$

- 量子化之后，$\phi(x)$ 是一个**厄米算符**

2.3 节　实标量场的正则量子化

如果场 $\phi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，就称它为**标量场**

在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$

则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\boxed{\phi'(x') = \phi(x)}$$

本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\boxed{\phi^\dagger(x) = \phi(x)}$$

量子化之后，$\phi(x)$ 是一个**厄米算符**

假设 $\phi(x)$ 是**不参与相互作用**的**自由**实标量场，相应的 **Lorentz 不变拉氏量**是

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}$$

其中 $m > 0$ 是实标量场的**质量**，第一项是动能项，第二项是质量项

Klein-Gordon 方程

注意到 $\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi = \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2]$

有 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi$

归纳起来得 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$

因此，**Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi$$

也就是说，$\phi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程**

$$\boxed{(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0}$$

这是实标量场的**经典运动方程**

Oskar Benjamin Klein
(1894–1977)

Walter Gordon
(1893–1939)

等时对易关系

实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x)$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ **的时间导数**，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ **因子**，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0 \phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也要引入 $1/2$ **因子**，否则 **Klein-Gordon 方程**中质量**不是** m，而是 $\sqrt{2}\, m$

等时对易关系

实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi(x)$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ **的时间导数**，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x)=\phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x)=\pi(x)$

如果在拉氏量 $\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-\dfrac{1}{2}m^2\phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ **因子**，就会得到 $\pi(x)=2\partial_0\phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也要引入 $1/2$ **因子**，否则 **Klein-Gordon 方程**中质量**不是** m，而是 $\sqrt{2}\,m$

现在，把**正则变量** $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 看作 **Hilbert 空间**上的**算符**

要求它们满足**等时对易关系**

$$\boxed{[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0}$$

这种做法称为**正则量子化**

2.3.1 小节　平面波展开

在量子力学中，无界空间里单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \exp(-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$$

有 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = E\exp(-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) = E\Psi$，$-\mathrm{i}\nabla\Psi = \mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{p}\Psi$

可见，$\hat{E} = \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符，$\hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\nabla$ 是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是 $\boxed{\hat{p}^\mu = \mathrm{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \mathrm{i}\partial^\mu}$

2.3.1 小节 平面波展开

在量子力学中，无界空间里单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$$

有 $\mathrm{i}\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=E\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=E\Psi$， $-\mathrm{i}\nabla\Psi=\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=\mathbf{p}\Psi$

可见，$\hat{E}=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符，$\hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是 $\boxed{\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=\mathrm{i}\partial^\mu}$

将平面波解改写成 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$，其中 $p^\mu=(E,\mathbf{p})$，$x^\mu=(t,\mathbf{x})$，则

$$\mathrm{i}\partial^\mu\Psi=\mathrm{i}\partial^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^\mu\Psi$$

因此，p^μ 是四维动量微分算符 $\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\partial^\mu$ 的本征值

平面波解 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 描述四维动量为 p^μ 的粒子

正能解和负能解

现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x) = \exp(-ik \cdot x)$

那么，$\partial^2\varphi = \partial^\mu\partial_\mu\varphi = \partial^\mu(-ik_\mu\varphi) = (-i)^2 k_\mu k^\mu \varphi = -k^2\varphi$

从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(k^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$，其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

正能解和负能解

现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x) = \exp(-\mathrm{i}k \cdot x)$

那么，$\partial^2\varphi = \partial^\mu\partial_\mu\varphi = \partial^\mu(-\mathrm{i}k_\mu\varphi) = (-\mathrm{i})^2 k_\mu k^\mu \varphi = -k^2\varphi$

从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(k^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$，其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

因此，对于**固定的 $\mathbf{k}$**，有两个线性独立的平面波解

$k^0 = E_{\mathbf{k}}$ 对应于**正能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = \exp[-\mathrm{i}(k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = \exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]$$

$k^0 = -E_{\mathbf{k}}$ 对应于**负能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) = \exp[-\mathrm{i}(k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = \exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]$$

一般解

从而，满足 **Klein-Gordon 方程**的**场算符** $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) + \tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)\right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的**算符**，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是**归一化因子**

这是一个形式为 **Fourier 积分**的**平面波展开式**，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维空间中无穷多个**动量模式**的叠加

一般解

从而，满足 **Klein-Gordon 方程**的**场算符** $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x)+\tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的**算符**，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是**归一化因子**

这是一个形式为 **Fourier 积分**的**平面波展开式**，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维空间中无穷多个**动量模式**的叠加

取上式的**厄米共轭**，得

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的 $\mathbf{k}$ **替换成** $-\mathbf{k}$ **不会改变**积分的结果，而 $E_{-\mathbf{k}}=E_{\mathbf{k}}$

自共轭条件

🏔 观察

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\
\phi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]
\end{aligned}
$$

🐐 可知，**自共轭条件** $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\phi(\mathbf{x},t)$ 意味着 $\tilde{a}_\mathbf{k}=a^\dagger_{-\mathbf{k}}$

🐅 注意，由 $\tilde{a}_\mathbf{k}=a^\dagger_{-\mathbf{k}}$ 可以推出 $\tilde{a}^\dagger_\mathbf{k}=a_{-\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}=a_\mathbf{k}$。因而

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].
\end{aligned}
$$

🦌 第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$

平面波展开式

- 对于

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

- 把动量记号 **k** 替换成 **p**，将 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)}$$

- 其中 $p\cdot x=p^0t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$，且 $p^0>0$，满足质壳条件 $\boxed{p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}$

- $a_\mathbf{p}$ 是湮灭算符，对应于正能解 $e^{-ip\cdot x}$

- $a_\mathbf{p}^\dagger$ 是产生算符，对应于负能解 $e^{ip\cdot x}$

- 共轭动量密度算符的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x},t)=\partial_0\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

2.3.2 小节　产生湮灭算符的对易关系

在三维空间中对 $\phi(\mathbf{x},t)$ 作 **Fourier 变换**，有

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int d^3x\left[a_{\mathbf{p}}e^{-i(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right]$$

这里比 Fourier 变换公式 $\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 多乘了一个 $e^{iq^0 t}$ **因子**，其中 $q^0 = E_{\mathbf{q}}$，使指数因子变成 $e^{iq^0 t}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = e^{iq\cdot x}$。利用

$$\int d^3x\, e^{\pm i(p-q)\cdot x} = \int d^3x\, e^{\pm i(p^0-q^0)t}e^{\mp i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$\int d^3x\, e^{\pm i(p+q)\cdot x} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$$

得

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}e^{-i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0 t}\right)$$

在第一步中，$p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，$q^0 = \sqrt{|\mathbf{q}|^2+m^2}$，两个三维 δ 函数分别要求 $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$，都导致 $p^0=q^0$，**对 d^3p 积分**即得第二步结果

产生湮灭算符的表达式

类似地，$\pi(\mathbf{x},t)$ 的 **Fourier 变换**为

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x \left[a_\mathbf{p}e^{-i(p-q)\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right]$$

$$= \int d^3p\, \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]$$

$$= \frac{-iq_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0t}\right)$$

从而 $\int d^3x\, e^{iq\cdot x}[\pi(x) - iq_0\phi(x)] = \int d^3x\, e^{iq\cdot x}\pi(x) - iq_0\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x)$

$$= \frac{-2iq_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}a_\mathbf{q} = -i\sqrt{2E_\mathbf{q}}\,a_\mathbf{q}$$

即

$$a_\mathbf{p} = \frac{i}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\, e^{ip\cdot x}\,[\pi(x) - ip_0\phi(x)]$$

取**厄米共轭**，并使用**自共轭条件** $\phi^\dagger = \phi$ 和 $\pi^\dagger = \pi$，得

$$a_\mathbf{p}^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\, e^{-ip\cdot x}\,[\pi(x) + ip_0\phi(x)]$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

令 $x^0=y^0=t$，利用**等时对易关系**推出

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int d^3x\,d^3y\,\left[e^{ip\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t)-ip_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ e^{-iq\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t)+iq_0\phi(\mathbf{y},t)\}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int d^3x\,d^3y\,e^{i(p\cdot x-q\cdot y)}\left[\pi(\mathbf{x},t)-ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t)+iq_0\phi(\mathbf{y},t)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int d^3x\,d^3y\,e^{i(p^0-q^0)t}e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\left\{iq_0[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]-ip_0[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int d^3x\,d^3y\,e^{i(p^0-q^0)t}e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\left[-i(p_0+q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]\\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\int d^3x\,e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

令 $x^0 = y^0 = t$，利用等时对易关系推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \left[e^{ip\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ e^{-iq\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)\} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, e^{i(p\cdot x - q\cdot y)} \left[\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0+q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

根据 δ 函数的性质 $f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，有

$$
\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{q}})t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 只在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处非零，取值 $+\infty$，而 $E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处取值为零

由于 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处奇性比较弱，有

$$(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0$$

故

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0$$

产生湮灭算符的对易关系

此外，

$$[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger - a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger = (a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}})^\dagger = [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}]^\dagger = 0$$

因此，可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的**乘积次序**，即

$$a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}, \quad a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

综上，**产生湮灭算符**满足**对易关系**

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

这是**简谐振子对易关系** $[a, a^\dagger] = 1$ 和 $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$ 在**量子场论**中的推广

2.3.3 小节　哈密顿量和总动量

- 自由实标量场的**哈密顿量密度**为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 注意到 $\pi = \partial_0\phi$，将**哈密顿量算符**表达为

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 根据 **Noether 定理**，实标量场的**总动量算符**是 $P^i = \int d^3x\,\pi\partial^i\phi$

2.3.3 小节 哈密顿量和总动量

- 自由实标量场的**哈密顿量密度**为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 注意到 $\pi = \partial_0\phi$，将**哈密顿量算符**表达为

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 根据 **Noether 定理**，实标量场的**总动量算符**是 $P^i = \int d^3x\,\pi\partial^i\phi$
- 利用等时对易关系，推出对易关系

$$\begin{aligned}[\phi(x), H] &= \frac{1}{2}\int d^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi^2(\mathbf{y},t)] \\ &= \frac{1}{2}\int d^3y\,\{\pi(\mathbf{y},t)[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] + [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\pi(\mathbf{y},t)\} \\ &= \mathrm{i}\int d^3y\,\pi(\mathbf{y},t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathrm{i}\pi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^0\phi(x)\end{aligned}$$

四维动量算符

再推出对易关系

$$[\phi(x), P^i] = \int d^3y\, [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t)] = \int d^3y\, [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t)$$

$$= \mathrm{i} \int d^3y\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t) = \mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, \phi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^i \phi(x)$$

四维动量算符

再推出对易关系

$$[\phi(x), P^i] = \int d^3y\, [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t)] = \int d^3y\, [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t)$$

$$= \mathrm{i} \int d^3y\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t) = \mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, \phi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^i \phi(x)$$

引入**四维动量算符**

$$\boxed{P^\mu = (H, \mathbf{P})}$$

将这两个对易关系合起来写成

$$\boxed{[\phi(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu \phi(x)}$$

可见，**场算符** $\phi(x)$ 与**四维动量算符** P^μ 的**对易子**相当于将**四维动量微分算符** $\mathrm{i}\partial^\mu$ 作用在 $\phi(x)$ 上

哈密顿量算符

将 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的**平面波展开式**代入，**哈密顿量算符**化为

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{ [(-\mathrm{i}p_0)(-\mathrm{i}q_0) + (\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})] \\
&\qquad \times \left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad + m^2 \left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} + a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{ (p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (-p_0q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \\
&\qquad \times \Big\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})(p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})(-p_0q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right] \Big\}
\end{aligned}
$$

哈密顿量算符的表达式

对 q 积分，得

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\Big[(E_\mathbf{p}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}\right)$$
$$+(-E_\mathbf{p}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_\mathbf{p}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_\mathbf{p}t}+a_\mathbf{p}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_\mathbf{p}t}\right)\Big]$$

根据**质壳条件** $E_\mathbf{p}^2 = |\mathbf{p}|^2+m^2$，第二步方括号中第二项**没有贡献**，从而

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_\mathbf{p}\left(a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_\mathbf{p}\left[2a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p})\right]$$

第二步用到**产生湮灭算符的对易关系** $[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{q}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$，于是

$$\boxed{H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_\mathbf{p}\,a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_\mathbf{p}}{2}}$$

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H=\omega a^\dagger a+\dfrac{\omega}{2}$ 向无穷多自由度的推广
- 半正定算符 $N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和

哈密顿量的正定性

自由实标量场的哈密顿量 $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$ 向无穷多自由度的推广

半正定算符 $N_{\mathbf{p}} \equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符

每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和

由 $\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $\boxed{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}}$

$\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的

H 的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，是真空的零点能，是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H=\omega a^\dagger a+\dfrac{\omega}{2}$ 向无穷多自由度的推广
- 半正定算符 $N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和
- 由 $\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $\boxed{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})=\int d^3x=\tilde{V}}$
- $\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的
- H 的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，是真空的零点能，是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和
- 一维简谐振子的零点能为 $E_0=\omega/2$，这是自由度为 1 时的结果
- 推广到无穷多自由度自然会得到正无穷大的零点能
- 如果不讨论引力现象，零点能通常并不重要，因为实验上只能测量两个能量之差
- 经过正则量子化之后，实标量场的哈密顿量 H 是正定算符，不存在负能量困难

哈密顿量本征态

 **哈密顿量** H 与产生算符和湮灭算符的**对易子**分别为

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]$$

$$= \int d^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[H, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int d^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$$

哈密顿量本征态

- 哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$
\begin{aligned}
[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \\
&= \int d^3 q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \\
[H, a_{\mathbf{p}}] &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int d^3 q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}
\end{aligned}
$$

- 故 $H a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$， $H a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$
- 设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E，则 $H\,|E\rangle = E\,|E\rangle$
- 从而，

$$
\begin{aligned}
H a_{\mathbf{p}}^\dagger\,|E\rangle &= (a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger)\,|E\rangle = (E + E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger\,|E\rangle \\
H a_{\mathbf{p}}\,|E\rangle &= (a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}})\,|E\rangle = (E - E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}\,|E\rangle
\end{aligned}
$$

- 可见，当 $a_{\mathbf{p}}^\dagger\,|E\rangle \neq 0$ 时，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 的作用是使能量本征值增加 $E_{\mathbf{p}}$
- 当 $a_{\mathbf{p}}\,|E\rangle \neq 0$ 时，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是使能量本征值减少 $E_{\mathbf{p}}$

总动量

将 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的平面波展开式代入，**总动量算符**化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int d^3x\,\pi\nabla\phi \\
&= -\int \frac{d^3x\,d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}(-ip_0)\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)(i\mathbf{q})\left(a_{\mathbf{q}}e^{-iq\cdot x}-a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq\cdot x}\right) \\
&= \int \frac{d^3x\,d^3p\,d^3q\,p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \\
&\qquad \times\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(p-q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}e^{i(p-q)\cdot x}-a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}e^{-i(p+q)\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \frac{d^3p\,d^3q\,p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\left\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(p_0-q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}e^{i(p_0-q_0)t}\right]\right. \\
&\qquad \left.-\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}e^{-i(p_0+q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i(p_0+q_0)t}\right]\right\} \\
&= \int \frac{d^3p\,E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)
\end{aligned}$$

化简总动量

作变量替换 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,(-\mathbf{p})\left(a_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)
\end{aligned}$$

因此这个积分为零，从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}&=\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left[2a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int d^3p\,\mathbf{p}
\end{aligned}$$

总动量表达式

- 由 $\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} = \int \mathrm{d}^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}$ 得 $\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} = 0$

- 于是，**自由实标量场**的**总动量**为

$$\boxed{\mathbf{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}}$$

- 即总动量是**所有动量模式所有粒子**贡献的**动量之和**

总动量表达式

- 由 $\int d^3p\,\mathbf{p} = \int d^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int d^3p\,\mathbf{p}$ 得 $\int d^3p\,\mathbf{p} = 0$

- 于是，自由实标量场的总动量为

$$\boxed{\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}}$$

- 即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和

- $\mathbf{P}$ 与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int d^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}]a_{\mathbf{q}} = -\int d^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}$$

- 即

$$\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad \mathbf{P}a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}\mathbf{P} - \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}$$

2.3.4 小节　粒子态

对于任意动量 $\mathbf{p}$ 对应的湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$，假设真空态 $|0\rangle$ 满足

$$\boxed{a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = 0}$$

归一化为 $\boxed{\langle 0|0\rangle = 1}$

将哈密顿量 $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + E_{\text{vac}}$ 作用到真空态上，得

$$H\,|0\rangle = E_{\text{vac}}\,|0\rangle, \quad E_{\text{vac}} \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3p\, \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$$

可见 $|0\rangle$ 的能量本征值是零点能 E_{vac}，真空态是能量最低的态

真空态不具有动量，即 $|0\rangle$ 的 $\mathbf{P}$ 本征值是零矢量，

$$\mathbf{P}\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = \mathbf{0} = \mathbf{0}\,|0\rangle$$

单粒子态

- 接着，定义**单粒子态**

$$\boxed{|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\, |0\rangle}$$

- 其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是**归一化因子**
- 根据 $Ha_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle$，有 $H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_{\mathrm{vac}}+E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}\rangle$
- 由 $\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 和 $\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle$ 得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger})\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle$$

单粒子态

接着，定义单粒子态

$$\boxed{|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a_\mathbf{p}^\dagger\, |0\rangle}$$

其中 $\sqrt{2E_\mathbf{p}}$ 是归一化因子

根据 $Ha_\mathbf{p}^\dagger\,|E\rangle = (E+E_\mathbf{p})a_\mathbf{p}^\dagger\,|E\rangle$，有 $H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_\mathrm{vac}+E_\mathbf{p})\,|\mathbf{p}\rangle$

由 $\mathbf{P}a_\mathbf{p}^\dagger = a_\mathbf{p}^\dagger\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_\mathbf{p}^\dagger$ 和 $\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle$ 得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,\mathbf{P}\,a_\mathbf{p}^\dagger\,|0\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}(a_\mathbf{p}^\dagger\,\mathbf{P}+\mathbf{p}\,a_\mathbf{p}^\dagger)\,|0\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,\mathbf{p}\,a_\mathbf{p}^\dagger\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle$$

相比于真空态 $|0\rangle$，单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 多了一份能量 $E_\mathbf{p}$，也多了一份动量 $\mathbf{p}$

因此，$|\mathbf{p}\rangle$ 描述的是一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子，这个粒子的能量为 $E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$

这满足狭义相对论中的色散关系

而拉氏量 $\mathcal{L}$ 中实标量场的质量 m 就是粒子的质量

可以看到，产生算符 $a_\mathbf{p}^\dagger$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积

- 将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$
\begin{aligned}
a_{\mathbf{p}}\,|\mathbf{q}\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

- 如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零
- 如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态 $|0\rangle$
- 可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$a_{\mathbf{p}}|\mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger}|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]|0\rangle$$
$$= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle$$

如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零

如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态 $|0\rangle$

可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积为

$$\boxed{\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle} = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\, a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]|0\rangle$$
$$= \boxed{2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$$

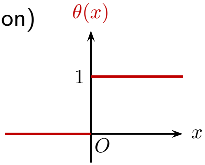
上式是 Lorentz 不变的，这是单粒子态归一化因子取成 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的原因，证明见下

内积 $\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 是发散的，原因在于产生算符 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 是在无界空间中讨论量子场平面波解时定义的，内积有限的粒子态可通过构造波包得到，见习题 2.3

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

- 接下来证明 $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是 Lorentz 不变的
- 引入 Heaviside 阶跃函数 (step function)

$$\boxed{\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$



- 对于满足质壳条件的四维动量 p^μ，p^0 的符号在任意惯性系中不会改变
- 即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变

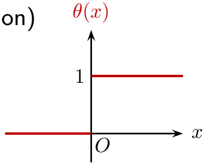
Oliver Heaviside
(1850–1925)

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

接下来**证明** $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是 **Lorentz 不变**的

引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Oliver Heaviside
(1850–1925)

对于满足**质壳条件**的四维动量 p^μ，p^0 **的符号**在任意惯性系中**不会改变**

即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下**不变**

一个**物理粒子**的四维动量 p^μ 满足**质壳条件** $p^2 - m^2 = 0$ 且**能量**为**正** $(p^0 > 0)$

任意 **Lorentz 标量函数** $F(p)$ 在**物理动量区域**上的 **Lorentz 不变积分**表达为

$$\int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)F(p)$$

单粒子态的内积

利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)F(p) = \int d^3p\, dp^0\, \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]\theta(p^0)F(p^0, \mathbf{p})$$

$$= \int d^3p\, dp^0\, \frac{\delta(p^0 - E_\mathbf{p})}{2E_\mathbf{p}}\, F(p^0, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3p}{2E_\mathbf{p}}\, F(E_\mathbf{p}, \mathbf{p})$$

第二步中 $\theta(p^0)$ 挑出**方程** $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$ 的**正根** $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_\mathbf{p}$

而 $\left.\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0 = E_\mathbf{p}} = 2p^0\Big|_{p^0 = E_\mathbf{p}} = 2E_\mathbf{p}$

可见，$\boxed{\frac{d^3p}{2E_\mathbf{p}}}$ 是 **Lorentz 不变的动量空间体积元**

单粒子态的内积

- 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \dfrac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p) = \int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\delta[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p})$$

$$= \int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\frac{\delta(p^0-E_\mathbf{p})}{2E_\mathbf{p}}F(p^0,\mathbf{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_\mathbf{p}}F(E_\mathbf{p},\mathbf{p})$$

- 第二步中 $\theta(p^0)$ 挑出**方程** $(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2=0$ 的**正根** $p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}=E_\mathbf{p}$

- 而 $\left.\dfrac{\partial[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_\mathbf{p}} = 2p^0\Big|_{p^0=E_\mathbf{p}} = 2E_\mathbf{p}$

- 可见，$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^3p}{2E_\mathbf{p}}}$ 是 **Lorentz 不变的动量空间体积元**

- 对任意 **Lorentz 标量函数** $g(\mathbf{q})$，根据 δ 函数的挑选性，有

$$g(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}^3p\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_\mathbf{p}}2E_\mathbf{p}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p})$$

- 最左和最右都是 **Lorentz 不变**的，则 $\boxed{2E_\mathbf{p}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$ 是 **Lorentz 不变**的，**证毕**

单粒子位置本征态

- 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\,|0\rangle$$

- 它与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq\cdot x}\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]e^{iq\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int d^3q\,\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})e^{iq\cdot x}\,\langle 0|0\rangle = e^{ip\cdot x}\end{aligned}$$

单粒子位置本征态

- 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle$$

- 它与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3q\,\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\langle 0|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\end{aligned}$$

- **量子力学**单粒子位置本征态 $|\mathbf{x}\rangle$ 与动量本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ **内积为** $\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$，其中 $(2\pi)^{-3/2}$ 是归一化因子

- 两个内积的**形式相似**，因此 $\phi(x)\,|0\rangle$ 类似于 $t = x^0$ 时刻的**单粒子位置本征态**，$\phi(x)$ 作用在 $|0\rangle$ 上相当于**在时空点** $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ **处产生一个粒子**

- 平面波展开式的**归一化因子** $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 使内积 $\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle$ 成为 **Lorentz 不变量**

n 粒子态

定义动量分别为 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n$ 的 n 个粒子对应的多粒子态为

$$|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}|0\rangle, \quad C_1=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\cdots\sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$$

根据 $Ha^\dagger_\mathbf{p}=a^\dagger_\mathbf{p}H+E_\mathbf{p}a^\dagger_\mathbf{p}$，$H$ 对它的作用给出

$$\begin{aligned}
H|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle &= C_1 H a^\dagger_{\mathbf{p}_1}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}|0\rangle = C_1(a^\dagger_{\mathbf{p}_1}H+E_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_1})\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}|0\rangle\\
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1}Ha^\dagger_{\mathbf{p}_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}|0\rangle + E_{\mathbf{p}_1}|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle\\
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2}H\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}|0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1}+E_{\mathbf{p}_2})|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle\\
&= \cdots = C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}H|0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1}+E_{\mathbf{p}_2}+\cdots+E_{\mathbf{p}_n})|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle\\
&= (E_{\text{vac}}+E_{\mathbf{p}_1}+E_{\mathbf{p}_2}+\cdots+E_{\mathbf{p}_n})|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

同理，$\mathbf{P}$ 对它的作用给出

$$\mathbf{P}|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\cdots+\mathbf{p}_n)|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle$$

多粒子态 $|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle$ 的能量和动量直接由各个粒子的能量和动量叠加贡献

标量玻色子

🐯 由对易关系 $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}
$$

🐂 可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的

标量玻色子

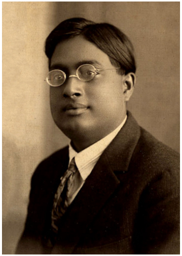
由**对易关系** $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

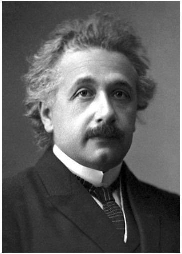
可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于**全同粒子交换**是**对称**的

因此**实标量场**描述的粒子是一种**玻色子**，称之为**标量玻色子** (scalar boson)，它服从 **Bose-Einstein 统计**

得到这个结论的关键在于**两个产生算符相互对易**



Satyendra Nath Bose
(1894–1974)



Albert Einstein
(1879–1955)

双粒子态的内积

双粒子态的内积为

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle$$

$$= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \right]$$

$$= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \Big[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} | 0 \rangle \Big]$$

$$= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \Big[(2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \Big]$$

$$= 4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \right]$$

此内积仅在两种条件下**非零**

一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2$，另一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$

粒子数密度算符

🐼 定义动量均为 $\mathbf{q}$ 的 $n_{\mathbf{q}}$ 个粒子对应的多粒子态

$$|n_{\mathbf{q}}\rangle \equiv C_2(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}|0\rangle, \quad C_2 = (2E_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}/2}$$

🐖 粒子数密度算符 $N_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 对它的作用为

$$\begin{aligned}
N_{\mathbf{p}}|n_{\mathbf{q}}\rangle &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}|0\rangle = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger \left[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\right](a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}|0\rangle \\
&= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}|0\rangle + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}|0\rangle \\
&= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^2 a_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-2}|0\rangle + 2(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}|0\rangle \\
&= \cdots = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}}|0\rangle + n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}|0\rangle \\
&= n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}|0\rangle
\end{aligned}$$

粒子数算符

在动量空间对粒子数密度算符进行积分，得到的是粒子数算符

$$N \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

由 $N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle$ 得

$$\begin{aligned} N |n_{\mathbf{q}}\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = n_{\mathbf{q}} |n_{\mathbf{q}}\rangle \end{aligned}$$

因此，$|n_{\mathbf{q}}\rangle$ 是 N 的本征态，本征值为粒子数 $n_{\mathbf{q}}$

一般多粒子态

🐼 更一般地，定义多粒子态

$$|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle \equiv C_3(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\,,\quad C_3=\prod_{i=1}^{m}(2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}$$

🦖 它描述动量为 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_m$ 的粒子分别有 $n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}$ 个的状态，则

$$\begin{aligned}
&N\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3 a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\,a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\\
&\qquad+n_{\mathbf{p}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}-1}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\Big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\,a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\Big]+n_{\mathbf{p}_1}\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=\cdots=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\Big]+(n_{\mathbf{p}_1}+\cdots+n_{\mathbf{p}_m})\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=(n_{\mathbf{p}_1}+\cdots+n_{\mathbf{p}_m})\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle
\end{aligned}$$

🐉 可见，N 确实是描述总粒子数的算符

2.4 节　复标量场的正则量子化

- 本节讨论**复标量场** $\phi(x)$，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$
- **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭记号** $*$ 改成**厄米共轭记号** $\dagger$
- 故自由复标量场的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi}$$

- 其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**

2.4 节 复标量场的正则量子化

- 本节讨论**复标量场** $\phi(x)$，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$
- **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭记号** $*$ 改成**厄米共轭记号** $\dagger$
- 故自由复标量场的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi}$$

- 其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**
- $\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(x)$ **线性独立**，是两个**独立**的正则变量，注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} = \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^\dagger$$

- 由 **Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$ 推出**经典运动方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi^\dagger(x) = 0$$

- 也就是说，$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 均满足 **Klein-Gordon 方程**

复标量场的分解

可以将**复标量场** ϕ **分解**为两个**实标量场** ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合，

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)$$

从而拉氏量化为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\
&= \frac{1}{2}[\partial^\mu(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)]\partial_\mu(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \\
&= \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_1)\partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_2)\partial_\mu \phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2
\end{aligned}$$

对比**实标量场拉氏量**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

可知复标量场的拉氏量相当于两个**质量相同**的实标量场的拉氏量

2.4.1 小节 平面波展开

- 接下来遵循 2.3.1 小节中的方法讨论**复标量场**的**平面波展开式**
- 区别在于**不能够应用自共轭条件**
- 从而，场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**为

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

- 第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$
- 由于复标量场不满足自共轭条件，**算符** $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$ **与** $a_\mathbf{k}$ **没有关系**，改记为 $b_\mathbf{k}^\dagger = \tilde{a}_{-\mathbf{k}}$
- 展开式变成

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

复标量场的平面波展开式

对 $\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$ **替换动量记号**

把**复标量场**的**平面波展开式**整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)}$$

其中 p^0 满足**质壳条件** $p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0$

复标量场的平面波展开式

对 $\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$ 替换动量记号

把复标量场的平面波展开式整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)}$$

其中 p^0 满足质壳条件 $p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0$

取厄米共轭，就得到 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$a_\mathbf{p}$ 和 $b_\mathbf{p}$ 是两个相互独立的湮灭算符

$a_\mathbf{p}^\dagger$ 和 $b_\mathbf{p}^\dagger$ 是两个相互独立的产生算符

等时对易关系

🔍 $\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

🔬 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

👣 $\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为**厄米共轭**

等时对易关系

$\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为**厄米共轭**

等时对易关系为

$$\boxed{\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]&=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0\\
[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]&=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0\\
[\phi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]&=[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=[\phi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0
\end{aligned}}$$

产生湮灭算符的对易关系

利用**等时对易关系**推出以下**产生湮灭算符的对易关系**

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \\
[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \\
[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= [b_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0
\end{aligned}
$$

具体推导过程见 **2.4.2 小节选读内容**

这说明 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 与 $(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 是两套**不同**的产生湮灭算符，描述**两种不同的玻色子**

2.4.3 小节 U(1) 整体对称性

类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 **U(1) 整体变换**

$$\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x)$$

其中实常数 q 是 **U(1) 荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**

则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$ 不变，系统具有 **U(1) 整体对称性**

2.4.3 小节 U(1) 整体对称性

类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 **U(1) 整体变换**

$$\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x)$$

其中实常数 q 是 **U(1) 荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**

则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$ 不变，系统具有 **U(1) 整体对称性**

相应的 **U(1) 守恒流**为 $\boxed{J^\mu = iq\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi}$，满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$，它是一个**厄米算符**，

$$(J^\mu)^\dagger = \{iq[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi]\}^\dagger = -iq[(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi] = iq\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi = J^\mu$$

U(1) 守恒荷算符是

$$Q = iq\int d^3x\,\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^0}\phi = iq\int d^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi] = iq\int d^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi)$$

U(1) 守恒荷算符

- 利用**平面波展开式**，将 **U(1) 守恒荷算符**化为

$$
\begin{aligned}
Q &= \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi) \\
&= \mathrm{i}q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big[\left(b_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-\mathrm{i}E_{\mathbf{k}})\left(a_{\mathbf{k}}e^{-\mathrm{i}k\cdot x} - b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{\mathrm{i}k\cdot x}\right) \\
&\qquad - (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}})\left(b_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{k}}e^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{\mathrm{i}k\cdot x}\right)\Big] \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}})\left[a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}e^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}})\left[b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}e^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\right]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\left[a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}e^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t}\right] \\
&\qquad + (E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})\left[b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}e^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t}\right]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)
\end{aligned}
$$

正粒子和反粒子

由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^{\dagger}\right)$$

$$= \boxed{\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^{\dagger}b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,q}$$

上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^{\dagger}b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$

正粒子和反粒子

- 由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$

$$= \boxed{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\, b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, q}$$

- 上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$
- 可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 **U(1) 荷**为 q，称为**正粒子**
- 另一方面，$(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有**相反的 U(1) 荷** $-q$，称为**反粒子**
- 因此，复标量场描述一对**正反标量玻色子**
- 除去零点荷，总荷 Q 是**所有动量模式所有正反粒子**贡献的 **U(1) 荷**之和

正粒子和反粒子

- 由对易关系 $[b_\mathbf{p}, b_\mathbf{q}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} - b_\mathbf{p}b_\mathbf{p}^\dagger\right)$$

$$= \boxed{\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} - q\,b_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{p}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,q}$$

- 上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}$ 的系数是 q，而粒子数密度算符 $b_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{p}$ 的系数是 $-q$
- 可见，$(a_\mathbf{p}, a_\mathbf{p}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 $\mathrm{U}(1)$ 荷为 q，称为正粒子
- 另一方面，$(b_\mathbf{p}, b_\mathbf{p}^\dagger)$ 描述的粒子具有相反的 $\mathrm{U}(1)$ 荷 $-q$，称为反粒子
- 因此，复标量场描述一对正反标量玻色子
- 除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的 $\mathrm{U}(1)$ 荷之和
- 这里单个粒子的荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是相加性的，并且来自于一种内部对称性，因而是一种内部相加性量子数 (internal additive quantum number)
- 实际上，任何反粒子的所有内部相加性量子数都与相应的正粒子相反

不存在负概率困难

如果将**复标量场** $\phi(x)$ 替换成**量子力学**的**单粒子波函数** $\Psi(x)$，则

$$\frac{Q}{q} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi]$$

与**单粒子概率密度** $\rho = \dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} - \dfrac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi\right)$ 的全空间积分类似

但是，这里 $\dfrac{Q}{q}$ **的本征值**被解释为**正粒子数**与**反粒子数**之**差**，显然是**可正可负**的

也就是说，在**量子场论**中 $\dfrac{Q}{q}$ 与**单粒子在空间中的概率没有关系**

因而**不像量子力学**那样存在**负概率困难**

纯中性粒子

如果对实标量场作类似的 U(1) 整体变换，则自共轭条件使得

$$e^{iq\theta}\phi(x)=\phi'(x)=[\phi'(x)]^\dagger=[e^{iq\theta}\phi(x)]^\dagger=e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x)=e^{-iq\theta}\phi(x)$$

上式要求 $q=0$

因此，对实标量场不能进行非平庸的 U(1) 整体变换

自共轭条件使实标量场描述的粒子不能具有任何非零的内部相加性量子数

也就是说，正粒子与反粒子是相同的

实标量场描述的是一种纯中性粒子 (truly neutral particle)

哈密顿量和总动量

- 经过进一步计算，得到复标量场的**哈密顿量算符**

$$\boxed{H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}}$$

- 除了**零点能**，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子的能量之和
- **正粒子**与**反粒子**具有**相同的质量** m，因而动量为 $\mathbf{p}$ 时能量均为 $E_{\mathbf{p}}$
- 另一方面，复标量场的**总动量算符**为

$$\boxed{\mathbf{P}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}})}$$

- 总动量是所有动量模式所有正反粒子的动量之和
- 具体推导过程见 **2.4.4 小节选读**内容