量子场论讲义

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html

更新日期：2026 年 2 月 28 日

© 2018–2026 余钊焕 版权所有

目　录

第 1 章　预备知识 **1**

1.1　量子场论的必要性 2

1.2　自然单位制 3

1.3　Lorentz 变换和 Lorentz 群 4

1.4　Lorentz 矢量 12

1.5　Lorentz 张量 18

1.6　作用量原理 24

1.6.1　经典力学中的作用量原理 24

1.6.2　经典场论中的作用量原理 26

1.7　Noether 定理、对称性与守恒定律 28

1.7.1　经典场论中的 Noether 定理 28

1.7.2　时空平移对称性 31

1.7.3　Lorentz 对称性 34

1.7.4　U(1) 整体对称性 38

习题 39

第 2 章　量子标量场 **43**

2.1　简谐振子的正则量子化 43

2.2　量子场论中的正则对易关系 46

2.3　实标量场的正则量子化 51

2.3.1　平面波展开 52

2.3.2　产生湮灭算符的对易关系 54

2.3.3　哈密顿量和总动量 56

2.3.4　粒子态 59

2.4　复标量场的正则量子化 63

2.4.1　平面波展开 64

2.4.2　选读：推导产生湮灭算符的对易关系 65

2.4.3　U(1) 整体对称性 68

2.4.4　选读：推导哈密顿量和总动量 69

习题 71

第 3 章　Poincaré 对称性与粒子态　75

3.1　量子 Poincaré 变换 75
3.2　Lorentz 代数和 Poincaré 代数 78
3.3　粒子态 87
3.3.1　有质量的粒子 89
3.3.2　无质量的粒子 97
习题 102

第 4 章　量子矢量场　111

4.1　Lorentz 群的矢量表示 111
4.2　量子场的 Lorentz 变换 113
4.2.1　量子标量场的 Lorentz 变换 113
4.2.2　量子矢量场的 Lorentz 变换 115
4.3　有质量矢量场的正则量子化 117
4.3.1　极化矢量与平面波展开 119
4.3.2　选读：推导产生湮灭算符的对易关系 129
4.3.3　选读：推导哈密顿量和总动量 132
4.4　无质量矢量场的正则量子化 138
4.4.1　无质量情况下的极化矢量 138
4.4.2　无质量矢量场与规范对称性 141
4.4.3　选读：推导产生湮灭算符的对易关系 145
4.4.4　物理极化态 147
习题 154

第 5 章　量子旋量场　157

5.1　Lorentz 群的旋量表示 157
5.2　Dirac 旋量场 163
5.3　Dirac 方程 167
5.4　Dirac 旋量场的平面波展开 170
5.4.1　平面波解的一般形式 170
5.4.2　Weyl 表象中的平面波解 173
5.4.3　哈密顿量和产生湮灭算符 182
5.5　Dirac 旋量场的正则量子化 184
5.5.1　用等时对易关系量子化 Dirac 旋量场的困难 184
5.5.2　用等时反对易关系量子化 Dirac 旋量场 185
5.5.3　U(1) 整体对称性 189

5.5.4 粒子态 190
习题 194

第 6 章 量子场的相互作用 199
6.1 相互作用绘景 201
6.1.1 例 1：实标量场 204
6.1.2 例 2：有质量矢量场 206
6.2 时间演化算符和 S 矩阵 210
6.3 Wick 定理 218
6.3.1 正规乘积和 Wick 定理 218
6.3.2 选读：Wick 定理的证明 223
6.4 Feynman 传播子 227
6.4.1 实标量场的 Feynman 传播子 227
6.4.2 复标量场的 Feynman 传播子 230
6.4.3 有质量矢量场的 Feynman 传播子 232
6.4.4 无质量矢量场的 Feynman 传播子 234
6.4.5 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子 235
6.5 散射截面和衰变宽度 238
6.5.1 跃迁概率 239
6.5.2 散射截面 242
6.5.3 两体散射运动学 246
6.5.4 衰变宽度 250
6.5.5 衰变运动学 252
习题 257

第 7 章 Feynman 图 261
7.1 Yukawa 理论 261
7.1.1 κ^1 阶 Feynman 图 264
7.1.2 κ^2 阶 Feynman 图 273
7.2 动量空间 Feynman 规则 287
7.3 ϕ^4 理论与对称性因子 291
7.4 一般内外线 Feynman 规则 296
习题 301

第 8 章 量子电动力学 305
8.1 U(1) 规范对称性与 QED 305
8.2 正负电子湮灭到正负 μ 子 311
8.2.1 不变振幅 311

8.2.2 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧 313
8.2.3 非极化散射截面 316
8.2.4 极化振幅 319
8.3 手征性与螺旋度 326
8.4 Coulomb 散射 330
8.4.1 $e^-\mu^-$ 散射 330
8.4.2 e^-p 散射 332
8.4.3 Coulomb 势能和 Yukawa 势能 335
8.5 交叉对称性和 Mandelstam 变量 343
8.6 Compton 散射 349
8.6.1 光子极化求和与 Ward 恒等式 350
8.6.2 非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式 353
8.6.3 高能行为和极化振幅 359
8.6.4 正负电子湮灭到双光子 366
习题 367

第 9 章 分立对称性和 Majorana 旋量场 371
9.1 标量场的分立变换 371
9.1.1 标量场的 P 变换 371
9.1.2 标量场的 T 变换 377
9.1.3 标量场的 C 变换 379
9.2 旋量场的分立变换 381
9.2.1 旋量场的 C 变换 381
9.2.2 Majorana 旋量场 386
9.2.3 旋量场的 P 变换 388
9.2.4 旋量场的 T 变换 392
9.3 矢量场的分立变换 395
9.3.1 有质量矢量场的 C、P、T 变换 395
9.3.2 电磁场的 C、P、T 变换 398
9.4 CP 变换 400
9.5 C、P、T 对称性 402
9.6 Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量 407
9.6.1 左手和右手 Weyl 旋量 407
9.6.2 Dirac 和 Majorana 旋量场的分解 412
9.6.3 手征旋量场 417
9.7 费米子数破坏过程的 Feynman 规则 419
9.7.1 拉氏量和 CP 对称性 419

9.7.2 Feynman 规则 421
9.7.3 应用 428
9.7.4 另一个例子 432
习题 435

第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数 439
10.1 渐近态和渐近场 439
10.2 Källén-Lehmann 谱表示 442
10.3 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式 449
10.4 多点关联函数的微扰论 456
10.5 多点关联函数的 Feynman 图 461
10.5.1 两点关联函数的 Feynman 图 462
10.5.2 四点关联函数的 Feynman 图 469
10.5.3 切断 Feynman 图 472
10.6 光学定理和不稳定粒子 473
习题 482

第 11 章 路径积分量子化 483
11.1 量子力学中的路径积分量子化 483
11.2 标量场的路径积分量子化 492
11.2.1 Feynman 核 492
11.2.2 多点关联函数和生成泛函 497
11.2.3 四维 Euclid 空间和 Feynman 传播子 503
11.2.4 微扰展开和 Feynman 图 511
11.2.5 连通关联函数 516
11.2.6 复标量场 519
11.3 旋量场的路径积分量子化 523
11.3.1 Grassmann 数 523
11.3.2 生成泛函和 Feynman 传播子 529
11.3.3 Yukawa 理论 534
11.4 量子电动力学的路径积分量子化 541
11.4.1 电磁场的路径积分量子化 541
11.4.2 旋量 QED 550
11.4.3 标量 QED 553

主要参考书目 561

参考文献 563

英汉对照 567

索　引 573

第 1 章　预备知识

量子场论 (quantum field theory) 与**粒子物理** (particle physics) 密切相关。粒子物理研究物质的基本结构和基本相互作用，组成物质的基本单元是**粒子** (particle)。自然界中存在 4 种基本相互作用，即**引力相互作用** (gravitational interaction)、**电磁相互作用** (electromagnetic interaction)、**强相互作用** (strong interaction) 和**弱相互作用** (weak interaction)，支配着基本粒子的运动和转化。

基本粒子指尚未发现内部结构的粒子。目前已发现 3 代基本**费米子** (fermion)，每一代包含带电**轻子** (lepton)、**中微子** (neutrino，即中性轻子)、下型**夸克** (quark)、上型夸克各一种。第 1 代基本费米子包括电子 (e)、电子型中微子 (ν_e)、下夸克 (d) 和上夸克 (u)；第 2 代包括 μ 子 (μ)、μ 子型中微子 (ν_μ)、奇夸克 (s) 和粲夸克 (c)；第 3 代包括 τ 子 (τ)、τ 子型中微子 (ν_τ)、底夸克 (b) 和顶夸克 (t)。某代某种费米子与它在另一代中相对应的费米子具有相同的量子数，但质量不同。以上提到的每种费米子都具有相应的**反粒子** (antiparticle)，其质量与正粒子相同，但所有的内部相加性量子数相反。

夸克的种类也称为**味道** (flavor)，6 种味道的夸克 d、u、s、c、b、t 具有不同的质量。每一味夸克都具有 3 种**颜色** (color)，同味异色的夸克具有相同质量，严格构成颜色三重态，这种结构与描述强相互作用的**量子色动力学**有关。多个夸克可以通过强相互作用组成**复合粒子**，称为**强子** (hadron)，比如，一个**介子** (meson) 由一个正夸克和一个反夸克组成，一个**重子** (baryon) 由三个正夸克或三个反夸克组成。除 3 代中微子以外，其它基本费米子都具有**电荷** (electric charge)，参与电磁相互作用，相应的理论称为**量子电动力学**。所有基本费米子都参与弱相互作用，它与电磁相互作用统一由**电弱规范理论**描述，这个理论包含了量子电动力学。电弱规范理论和量子色动力学一起组成了**标准模型** (standard model)。

在标准模型中，费米子的相互作用由一些基本**玻色子** (boson) 传递。传递夸克间强相互作用的规范玻色子称为**胶子** (gluon)，传递电磁相互作用的规范玻色子是**光子** (photon)，传递弱相互作用的规范玻色子是 $W^\pm$ 和 Z 玻色子。此外，还存在一种 **Higgs 玻色子**，它与电弱规范对称性的自发破缺及基本粒子的质量起源有关。

标准模型是在研究基本粒子如何参与电磁、强、弱相互作用的过程中建立起来的，它的理论基础就是量子场论。在粒子物理理论和实验发展的过程中，量子场论起着极为关键的作用。反过来，粒子物理研究也极大地促进了量子场论的发展。

量子场论的理论体系高度复杂，涉及到数学和物理的多个领域。本章先讨论一些在量子场论学习中需要用到的预备知识。

1.1　量子场论的必要性

量子力学是描述微观世界的物理理论。然而，非相对论性量子力学的适用范围有限，不能正确地描述伴随着高速粒子产生和湮灭的相对论性系统。为了合理而自洽地描述这样的系统，需要用到量子场论，它结合了量子力学、狭义相对论和场 (field) 的概念。

在量子力学的基础课程中，量子化的对象常常是由**粒子**组成的动力学系统。如果对相对论性的粒子作类似的量子化，会遇到一些困难。1926 年，**Klein-Gordon 方程** [1, 2] 被提出来描述单个粒子的相对论性运动。它是第一个相对论性的波函数方程，形式为

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{x}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi(\mathbf{x}, t), \tag{1.1}$$

其中 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 是粒子的波函数，$\hbar \equiv h/(2\pi)$ 是**约化 Planck 常数**，c 是真空中的**光速**。它给出的自由粒子能量是

$$E = \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}\,, \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{p}$ 为粒子动量，m 为粒子静止质量。可见，能量 E 可以为正，取值范围为 $mc^2 \leq E < \infty$；也可以为负，取值范围为 $-\infty < E \leq -mc^2$。即使粒子的初始能量为正，也可以通过跃迁到负能态而改变能量的符号。能量可取负无穷大意味着稳定的基态不存在，这在物理上是不可接受的，称为**负能量困难**。另一方面，通过 Klein-Gordon 方程构造符合概率守恒的连续性方程，则应该将粒子在空间中的概率密度定义为

$$\rho = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \right). \tag{1.3}$$

然而，这样定义的 ρ 不总是正的，有可能在一些空间区域中取负值，不符合物理上对概率密度的要求。这就是**负概率困难**。

Klein-Gordon 方程出现负概率困难的根源在于方程中含有波函数对时间 t 的二阶导数。Paul Dirac 于 1928 年提出的 **Dirac 方程** [3] 克服了这个问题，它只包含对时间的一阶导数，且符合狭义相对性原理。Dirac 方程描述**自旋** (spin) 为 1/2 的粒子，一开始是用来描述**电子** (electron) 的。Dirac 方程能够保证概率密度正定和概率守恒。但是，负能量困难仍然存在。

为了解决负能量困难，Dirac 提出**真空** (vacuum) 是所有 $E < 0$ 的态都被填满而所有 $E > 0$ 的态都为空的状态 [4]。这样一来，*Pauli 不相容原理*会阻止激发态中一个 $E > 0$ 的电子跃迁到 $E < 0$ 的态，因而激发态电子的能量总是正的。所有 $E < 0$ 的态组成了负能海，如果负能海中缺失一个带着电荷 $-e$ 和能量 $-|E|$ 的电子，即产生一个空穴 (hole)，那么空穴的行为等价于一个带着电荷 $+e$ 和能量 $+|E|$ 的**反粒子**，称为**正电子** (positron)。正电子在 1932 年被 Carl Anderson 发现 [5]。

但是，上述 Dirac 空穴理论仍然面临一些困难，比如，为何没有观测到无穷多个负能电子具有的无穷大电荷密度所引起的电场？另一方面，Dirac 方程一开始作为描述单粒子波函数的方程提出来，但 Dirac 的解释却包含了无穷多个粒子。而且，像光子和 α 粒子这样具有整数自旋的玻色子并不满足 Pauli 不相容原理，空穴理论无法解决它们的负能量困难。此外，Dirac 方程只能描述自旋 1/2 的粒子，不能解决整数自旋粒子的负概率困难。

用相对论性的波函数方程描述单个粒子会遇到这么多困难，是否意味着处理这些问题的基础本身就不正确呢？确实是这样的。量子力学的一条基本原理是：观测量由 Hilbert 空间上的厄米算符 (Hermitian operator) 描写[1]。然而，**时间**显然是一个观测量，却没有用一个厄米算符来描写它。在 Schrödinger 绘景 (picture) 中，描述微观系统的状态时可以让态矢依赖于一个时间参数 t，这是时间的概念进入量子力学的方式，但并没有假定这个参数是某个厄米算符的本征值。另一方面，粒子的空间位置 $\mathbf{x}$ 则是位置算符 $\hat{\mathbf{x}}$ 的本征值。可见，在量子力学中，对时间和空间的处理方式是完全不同的。而在狭义相对论中，Lorentz 对称性将时间和空间混合起来。因此，在结合量子力学与狭义相对论的过程中出现困难，也是正常的。

那么，如何在量子力学中平等地处理时间和空间呢？一种途径是将时间提升为一个厄米算符，但这样做在实际操作中非常困难。另一种途径是将空间位置降格为一个参数，不再由厄米算符描写。这样，我们可以在每个空间点 $\mathbf{x}$ 处定义一个算符 $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$，所有这些算符的集合称为**量子场** (quantum field)。在 Heisenberg 绘景中，量子场算符还依赖于时间 t，表达为

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{\Phi}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}. \tag{1.4}$$

如此，量子化的对象变成是由依赖于时空坐标的场组成的动力学系统，这就是**量子场论**。这里 Hilbert 空间上的算符用 ˆ 符号标记，为了简化记号，后面将省略 ˆ 符号。

在量子场论中，前面提到的困难都可以得到解决。现在，像 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程这样的相对论性方程描述的是自由量子场的运动。真空是量子场的基态，包含粒子的态则是激发态，激发态可以包含任意多个粒子。量子场论平等地描述正粒子和反粒子，由正反粒子的产生算符和湮灭算符表达出来的哈密顿量是正定算符，不再出现负能量困难。在量子场论中，不再将 (1.3) 式中的 ρ 解释成单粒子概率密度，而将它解释为单位体积内正粒子数与反粒子数之差，因而不存在负概率困难。

1.2 自然单位制

量子场论是结合量子力学和狭义相对论的理论，因而时常出现约化 Planck 常数 $\hbar$ 和真空中的光速 c，这一点可以从上一节的几个公式中看出来。为了简化表述，通常采用**自然单位制**，取

$$\boxed{\hbar = c = 1.} \tag{1.5}$$

从而，Klein-Gordon 方程 (1.1) 化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\Psi(\mathbf{x},t) = 0. \tag{1.6}$$

[1]在量子力学中，微观系统的状态由复数域上的 Hilbert 空间中的矢量描述，这样的矢量称为**态矢** (state vector)，而相差一个复数因子的两个态矢描写同一状态。**Hilbert 空间**是完备的内积空间，是一种具有加法、数乘和内积三种运算的线性空间。从 Hilbert 空间到 Hilbert 空间的映射称为**算符** (operator)，它将一个态矢映射成另一个态矢。

根据 $1 = c = 2.998 \times 10^{10}$ cm/s，有

$$1\ \mathrm{s} = 2.998 \times 10^{10}\ \mathrm{cm}. \tag{1.7}$$

利用转换关系

$$1 = \hbar = 6.582 \times 10^{-22}\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{s}, \quad 1 = \hbar c = 1.973 \times 10^{-11}\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{cm}, \tag{1.8}$$

可得

$$1\ \mathrm{s}^{-1} = 6.582 \times 10^{-22}\ \mathrm{MeV}, \quad 1\ \mathrm{cm}^{-1} = 1.973 \times 10^{-11}\ \mathrm{MeV}, \tag{1.9}$$

故

$$1\ \mathrm{GeV}^{-1} = 6.582 \times 10^{-25}\ \mathrm{s} = 1.973 \times 10^{-14}\ \mathrm{cm}. \tag{1.10}$$

可见，在自然单位制中，速度没有量纲 (dimension)；长度量纲与时间量纲相同，是能量量纲的倒数；能量、质量和动量具有相同的量纲。可以将能量单位电子伏特 (eV) 视作上述有量纲物理量的基本单位。

精细结构常数 (fine-structure constant)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036} \tag{1.11}$$

是没有量纲的，它的数值在任何单位制下都应该相同。因此，自然单位制不可能将 $\hbar$、c、ε_0 和 e 这四个常数同时取为 1。在量子场论中，通常再取**真空介电常数**

$$\boxed{\varepsilon_0 = 1,} \tag{1.12}$$

同时可得真空磁导率 $\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1} = 1$，这样做其实是采取了 Heaviside-Lorentz 单位制。从而，不同于 Gauss 单位制，真空 Maxwell 方程组中不会出现无理数 4π，写作

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{1.13}$$

这样的单位制称为**有理化**的自然单位制。现在，精细结构常数可以简便地表达为 $\alpha = e^2/(4\pi)$，而单位电荷量

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} = 0.3028 \tag{1.14}$$

是没有量纲的。4π 因子会出现在 Coulomb 定律中，点电荷 Q 的 Coulomb 势表达成

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r}. \tag{1.15}$$

1.3　Lorentz 变换和 Lorentz 群

描述高速运动的系统需要用到**狭义相对论** [6]，它有以下两条基本原理。

图 1.1: 惯性系 O' 相对于惯性系 O 沿 x 轴方向以速度 β 作匀速运动时，事件 P 在两个惯性系中的坐标。

(1) **光速不变原理**：在任意惯性参考系中，真空中的光速具有相同的大小。

(2) **狭义相对性原理**：在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式。

任意两个惯性参考系的直角坐标由 **Lorentz 变换** [7] 联系起来。如图 1.1 所示，设惯性坐标系 O' 沿着惯性坐标系 O 的 x 轴方向以速度 β 匀速运动，事件 P 在 O 系中的坐标为 (t, x, y, z)，在 O' 系中的坐标为 (t', x', y', z')，则 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{1.16}$$

其中 **Lorentz 因子** $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$，而 $0 \le |\beta| < 1$。这种 Lorentz 变换称为沿 x 轴方向的**增速** (boost) 变换。在此变换下，有

$$\begin{aligned} &t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t-\beta x)^2 - \gamma^2(x-\beta t)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \frac{1}{1-\beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta x t - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta x t) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

可见，$t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下不变，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)。Lorentz 不变量在不同惯性系中具有相同的值，这体现了 Lorentz 变换所对应的**对称性** (symmetry)，即 **Lorentz 对称性**，它也称为 *Lorentz 不变性*。

将时间坐标和空间坐标结合起来，构成四维 **Minkowski 时空** [8]，坐标记为

$$\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}), \quad \text{其中 } \mu = 0, 1, 2, 3.} \tag{1.18}$$

上式中四种记法是等价的。$\mathbf{x} = (x, y, z)$ 是一个三维空间矢量，用粗直体表示。x^μ 是一个**逆变** (contravariant) 的 Lorentz 四维**矢量** (vector)，“逆变”指它的**指标** (index) μ 写在右上角。受到 (1.17) 式的启发，定义 Lorentz 不变的**四维矢量内积** (inner product)[2]

$$x^2 \equiv x \cdot x \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2. \tag{1.19}$$

[2] (1.19) 式在记号上有点混乱，第一个 x^2 是内积的记号，而第二个 x^2 代表第 2 个空间坐标，需注意区分。

引入对称的 **Minkowski 度规** (metric)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.20}$$

这里写出了度规的矩阵形式，将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作行和列的编号，空白的矩阵元是零。也就是说，$g_{00} = +1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$，其它分量都是 0。从而，把内积 (1.19) 化为求和式，

$$x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \tag{1.21}$$

上式第三步采用了 **Einstein 求和约定**：

不写出求和符号，**重复的指标即表示求和**。

除非特别指出，后面默认使用这个约定。在上式中，用同个字母表示的指标分别在上标和下标重复出现并求和，这称为**缩并** (contraction)，是 Lorentz 不变量的特点。

为了进一步简化记号，定义**协变** (covariant) 的 Lorentz 四维矢量

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x}). \tag{1.22}$$

“协变”指的是指标 μ 写在右下角。于是，内积 x^2 的表达式 (1.21) 简化为

$$x^2 = x^\mu x_\mu. \tag{1.23}$$

可以将 (1.22) 式看成用度规 $g_{\mu\nu}$ 缩并掉 ν 指标，将逆变矢量 x^ν 的指标降下来，变成协变矢量 x_μ。从方阵的角度看，度规 $g_{\mu\nu}$ 的逆为

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

满足

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \tag{1.25}$$

其中 **Kronecker δ 符号**定义为

$$\boxed{\delta^a{}_b = \delta_a{}^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b. \end{cases}} \tag{1.26}$$

Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有相同的矩阵形式，但更一般的度规可能与它的逆不同。将 (1.22) 式 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma, \tag{1.27}$$

最后一步对指标 ν 缩并，而 $\delta^\sigma{}_\nu$ 的作用是将 x^ν 的指标 ν 换成 σ。上式这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 缩并掉 μ 指标，将协变矢量 x_μ 的指标升起来，变成逆变矢量 x^σ。可见，逆变矢量与协变矢量是一一对应的，它们是对同一个 Lorentz 矢量的两种等价描述。

利用 Kronecker 符号的定义 (1.26)、(1.25) 式和度规的对称性，推出

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma}, \tag{1.28}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}. \tag{1.29}$$

这两条式子表明，度规也可以用来对度规自身的指标进行升降。

将 Lorentz 增速变换 (1.16) 表达成矩阵与列矢量的乘积形式，得

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

用四维矢量记号改写为

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,} \tag{1.31}$$

其中

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

注意，将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 视作矩阵时，偏左的指标 μ 表示行的编号，偏右的指标 ν 表示列的编号。$\Lambda^\mu{}_\nu$ 的特点是保持内积 $x^2 = x^\mu x_\mu$ 不变，从而使 $x^\mu x_\mu$ 在不同惯性系中具有相同的值。我们将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 推广为**所有保持 $x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换**，称为（齐次）**Lorentz 变换**。由于

$$x'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta, \quad x^2 = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \tag{1.33}$$

图 1.2: 惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角时，事件 P 在两个惯性系中的坐标。

要得到 $x'^2 = x^2$，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须满足**保度规条件**

$$\boxed{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}.} \tag{1.34}$$

空间旋转变换保持 $|\mathbf{x}|^2$ 不变，由 (1.19) 式可知，这种变换也保持 x^2 不变，因而属于 Lorentz 变换。如图 1.2 所示，惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角，事件 P 在两个惯性系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z. \tag{1.35}$$

因而相应的 Lorentz 变换矩阵为

$$[R_z(\theta)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

可以验证它满足保度规条件 (1.34)。

$\delta^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是单位矩阵 $\mathbf{1}$，它是一个特殊的 Lorentz 变换，使得 $x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$，即 x^μ 在这个变换下不变。也就是说，$\delta^\mu{}_\nu$ 是**恒等变换**。对于任意 Lorentz 变换 $\Lambda^\alpha{}_\beta$，引入

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \equiv g^{\mu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta,} \tag{1.37}$$

那么，由 (1.34) 和 (1.25) 式得

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho\Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta}g_{\alpha\rho}\Lambda^\alpha{}_\beta\Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta}g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \tag{1.38}$$

上式表明，先作 Λ 变换，再作 Λ^{-1} 变换，相当于作恒等变换。也就是说，由 (1.37) 式定义的 Λ^{-1} 是 Λ 的**逆变换**，因而也是一个 Lorentz 变换。在这些记号下，协变矢量 x_μ 的 Lorentz 变换表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu}x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma}x_\sigma = x_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu. \tag{1.39}$$

Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，就必定满足保度规条件

$$g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}, \tag{1.40}$$

于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}g^{\mu\gamma}g_{\rho\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}g^{\nu\phi}g_{\sigma\tau}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\tau}\delta^{\gamma}{}_{\nu}g^{\nu\phi}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} = g^{\nu\phi}\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda^{\beta}{}_{\phi}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

这给出了保度规条件 (1.34) 的等价形式

$$g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g^{\alpha\beta}, \tag{1.42}$$

由此可得 $\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}g^{\rho\alpha}g_{\nu\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha} = g^{\mu\beta}g_{\beta\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$。

将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 视作矩阵 Λ，则其转置矩阵 Λ^{T} 的分量满足 $(\Lambda^{\mathrm{T}})_{\nu}{}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$。这是因为前面已经约定偏左的指标是行指标，偏右的指标是列指标，而转置操作将矩阵的行列指标左右交换。由保度规条件 (1.34) 得

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = (\Lambda^{\mathrm{T}})_{\alpha}{}^{\mu}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}. \tag{1.43}$$

在最右边的表达式里，重复的相邻指标发生缩并，对应于矩阵乘法。用 g 代表度规矩阵，将上式写成矩阵等式

$$\Lambda^{\mathrm{T}}g\,\Lambda = g. \tag{1.44}$$

相应的行列式为 $\det(g) = \det(\Lambda^{\mathrm{T}})\det(g)\det(\Lambda) = \det(g)[\det(\Lambda)]^2$，因此 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1. \tag{1.45}$$

Lorentz 坐标变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ 的 Jacobi 行列式是

$$\mathcal{J} = \det\left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right] = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \det(\Lambda), \tag{1.46}$$

于是 Lorentz 变换将体积元 d^4x 变换为

$$\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\,\mathrm{d}^4x = |\det(\Lambda)|\,\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x. \tag{1.47}$$

可见，Minkowski 时空的体积元 d^4x 是 Lorentz 不变的。

可以用 $\det(\Lambda)$ 的值给 Lorentz 变换分类，$\det(\Lambda) = +1$ 的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换，$\det(\Lambda) = -1$ 的变换则是**非固有** (improper) Lorentz 变换。此外，由保度规条件 (1.34) 得

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2, \tag{1.48}$$

即

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2 \geq 1, \tag{1.49}$$

故 ${\Lambda^0}_0 \geq +1$ 或 ${\Lambda^0}_0 \leq -1$。${\Lambda^0}_0 \geq +1$ 的 Lorentz 变换称为**保时向** (orthochronous) Lorentz 变换，${\Lambda^0}_0 \leq -1$ 的变换称为**反时向** (antichronous) Lorentz 变换。

在数学上，对称性由**群论**描述。同一类对称变换的集合称为一个**群** (group)，群元素（可简称为群元）具有乘法，两个群元素的乘积就是两次对称变换相继作用，满足以下四个条件。

(1) 群对乘积具有**封闭性**，即群 G 中任意两个群元的乘积仍属于此群：

$$g_2 g_1 \in G, \quad \forall\, g_1, g_2 \in G. \tag{1.50}$$

(2) 群乘法满足**结合律**：

$$g_3(g_2 g_1) = (g_3 g_2) g_1, \quad \forall\, g_1, g_2, g_3 \in G. \tag{1.51}$$

(3) 群 G 中必有一个**恒元** e，对应于恒等变换，它与任一群元 g 的乘积仍为 g：

$$eg = ge = g, \quad \forall\, g \in G. \tag{1.52}$$

(4) 任一群元 g 都可以在群 G 中找到一个**逆元** g^{-1}，它对应于逆变换，两者之积为恒元：

$$\forall\, g \in G, \quad \exists\, g^{-1} \in G, \quad \text{使得 } g^{-1} g = g g^{-1} = e. \tag{1.53}$$

在线性代数中，矩阵具有乘法，因而一些可逆方阵的集合能够依照自身乘法关系构成群，称为**矩阵群**。

群乘法讲究运算次序，$g_1 g_2$ 不一定等于 $g_2 g_1$，也就是说，交换律不一定成立。满足交换律的群称为 **Abel 群**，不满足的称为**非 Abel 群**。如果群 G 的子集 H 中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称 H 是 G 的**子群** (subgroup)，记作 $H < G$。

满足

$$O^{\mathrm{T}} O = O O^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \tag{1.54}$$

的实方阵 O 称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)。所有 N 阶实正交矩阵构成**正交群** $\mathrm{O}(N)$。对 (1.54) 式取行列式，得 $1 = \det(O^{\mathrm{T}}) \det(O) = [\det(O)]^2$。可见，实正交矩阵 O 的行列式为

$$\det(O) = \pm 1. \tag{1.55}$$

由 $\det(O) = 1$ 的 N 阶实正交矩阵 O 构成的群称为**特殊正交群** $\mathrm{SO}(N)$。显然，$\mathrm{SO}(N) < \mathrm{O}(N)$。非 Abel 群 $\mathrm{SO}(3)$ 描述三维空间中的所有旋转变换，称为**空间旋转群**。Abel 群 $\mathrm{SO}(2)$ 描述二维平面上的所有旋转变换，或者说，描述绕某条固定轴的旋转变换，如 $R_z(\theta)$，因而 $\mathrm{SO}(2) < \mathrm{SO}(3)$。

满足

$$U^{\dagger} U = U U^{\dagger} = \mathbf{1} \tag{1.56}$$

的复方阵 U 称为**幺正矩阵** (unitary matrix)。所有 N 阶幺正矩阵构成**幺正群** $\mathrm{U}(N)$。对 (1.56) 式取行列式，得 $1 = \det(U^{\dagger}) \det(U) = [\det(U)]^* \det(U) = |\det(U)|^2$。可见，幺正矩阵 U 的行列式满足

$$|\det(U)| = 1. \tag{1.57}$$

图 1.3: Lorentz 群的四个连通分支示意图。**1**、$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别代表恒等变换、宇称变换和时间反演变换，$\tilde{\Lambda}$ 是固有保时向分支中的任意元素。

由 $\det(U) = 1$ 的 N 阶幺正矩阵 U 构成的群称为**特殊幺正群** $\mathrm{SU}(N)$。显然，$\mathrm{SU}(N) < \mathrm{U}(N)$。

所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群。保度规条件 $\Lambda^{\mathrm{T}} g\, \Lambda = g$ 是正交条件 (1.54) 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $\mathrm{O}(1,3)$。$\mathrm{O}(3)$ 群对应于 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的纯空间部分，因而 $\mathrm{O}(3) < \mathrm{O}(1,3)$。所有固有 Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}(1,3)$，显然 $\mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$。

Lorentz 变换可以用一组连续变化的参数（如 β、θ 等）来描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数的变化区域称为**群空间**。群空间中的一个点就对应着一个群元。如果群空间中的任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通**的，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**。

Lorentz 群是一个混合连续群，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支，如图 1.3 所示，分别是满足 $\det(\Lambda) = +1$ 和 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 的固有保时向分支、满足 $\det(\Lambda) = +1$ 和 $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ 的固有反时向分支、满足 $\det(\Lambda) = -1$ 和 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 的非固有保时向分支、满足 $\det(\Lambda) = -1$ 和 $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ 的非固有反时向分支，四个分支之间互不连通。恒元（即恒等变换）在固有保时向分支里，这个分支是 $\mathrm{SO}(1,3)$ 的子群，称为**固有保时向 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$，它包含物理上联系惯性参考系的所有 Lorentz 变换。*Lorentz 不变量通常指的是在固有保时向 Lorentz 变换下不变的量*。归纳起来，存在子群从属关系 $\mathrm{SO}(2) < \mathrm{SO}(3) < \mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3) < \mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$。

这里引入两个特殊的 Lorentz 变换。定义**宇称** (parity) 变换为

$$\boxed{\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},} \tag{1.58}$$

它是非固有保时向的，亦称为**空间反射** (space inversion) 变换。它的作用是让时空坐标 x^{μ} 的所有空间分量反向。定义**时间反演** (time reversal) 变换为

$$\boxed{\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{T}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix},} \tag{1.59}$$

它是非固有反时向的，它的作用是让 x^{μ} 的时间分量反向。对于固有保时向 Lorentz 群中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$，乘上宇称变换或(和)时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$、$\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支。

类似地，O(3) 群也是混合连续群，具有两个连通分支。包含恒元的分支是 SO(3) 群，对应于 $\det(O) = 1$。另一个分支对应于 $\det(O) = -1$，里面任意元素可由 $\mathrm{diag}(-1, -1, -1)$ 乘以 SO(3) 群元素得到。

1.4　Lorentz 矢量

如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G，这些矩阵构成群 G 的一个 m 维**线性表示** (linear representation) $D(G)$。具体来说，需要建立一种*同态映射*，使群 G 中任意群元 g_1 和 g_2 分别对应于表示 $D(G)$ 中的表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$，而 g_2g_1 对应于表示矩阵 $D(g_2g_1)$，且满足**同态关系**

$$\boxed{D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1).} \tag{1.60}$$

$D(G)$ 中的一个矩阵可以一一对应于 G 中的一个群元，或者对应于 G 中的多个群元。数学上称 G 与 $D(G)$ **同态** (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$，如图 1.4 所示。利用群的 m 维线性表示，可以将对称变换视作 $m \times m$ 矩阵，将变换作用的对象视作 m 维列矢量，所有这样的列矢量构成一个 m 维线性空间，称为相应的**表示空间** (representation space)。

取群中所有元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的**恒等表示**，也称为*平庸表示*。如果群 G 中的每个群元一一对应于表示 $D(G)$ 中的每个矩阵，则称 G 与 $D(G)$ **同构** (isomorphism)，记

图 1.4: 群 G 与线性表示 $D(G)$ 同态示意图。上方的图表示一一对应，即同构；下方的图表示多一对应。

作 $G \cong D(G)$，此时称 $D(G)$ 是 G 的**忠实表示** (faithful representation)。如果 $D(G)$ 中所有矩阵都是幺正的，则称 $D(G)$ 是**幺正表示**。矩阵群本身就是自己的一个表示，称为*自身表示*，也称为**基础表示**。

如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中对应的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在统一的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1}D_1(g)S, \quad \forall\, g \in G, \tag{1.61}$$

则称这两个表示是**等价**的。等价表示是在表示空间中取不同的基底得到的，没有本质上的差别。如果表示 $D(G)$ 的每个表示矩阵 $D(g)$ 都可以通过同一个相似变换化为相同形式的阶梯矩阵，

$$S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G, \tag{1.62}$$

其中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 是方阵，$M(g)$ 可以是零矩阵，则称 $D(G)$ 是**可约表示**，否则称 $D(G)$ 为**不可约表示** (irreducible representation)。由同态关系 (1.60) 得

$$S^{-1}D(g_2g_1)S = S^{-1}D(g_2)D(g_1)S = S^{-1}D(g_2)SS^{-1}D(g_1)S, \tag{1.63}$$

因而 (1.62) 式意味着

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_1(g_2g_1) & M(g_2g_1) \\ & D_2(g_2g_1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D_1(g_2) & M(g_2) \\ & D_2(g_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(g_1) & M(g_1) \\ & D_2(g_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1(g_2)D_1(g_1) & D_1(g_2)M(g_1) + M(g_2)D_2(g_1) \\ & D_2(g_2)D_2(g_1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.64}$$

故

$$D_1(g_2g_1) = D_1(g_2)D_1(g_1), \quad D_2(g_2g_1) = D_2(g_2)D_2(g_1). \tag{1.65}$$

可见，集合 $\{D_1(g)\}$ 和 $\{D_2(g)\}$ 中的矩阵也满足同态关系，它们构成群 G 的两个线性表示。实际上，可约表示总能够通过不可约表示构造出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的**不等价不可约表示**。

在上一节中，我们已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$，可见 $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 4 维线性表示，即基础表示。它是一个*不可约忠实表示*，称为**矢量表示**。因此，时空坐标 x^ν 作为 Lorentz 矢量，是**矢量表示空间**中 Lorentz 变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 所作用的列矢量。

一般地，一个 **Lorentz 矢量** A^μ 与时空坐标 x^μ 具有相同的固有保时向 Lorentz 变换规则。具体来说，假设它在惯性系 O 和 O' 中的分量分别是 A^μ 和 A'^μ，那么变换规则为

$$\boxed{A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu,} \tag{1.66}$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是联系惯性系 O 和 O' 的固有保时向 Lorentz 变换。类似于 (1.39) 式，逆变矢量 A^μ 对应的协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\boxed{A'_\mu = A_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu.} \tag{1.67}$$

任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$\boxed{A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A^0B^0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B},} \tag{1.68}$$

由 (1.38) 式可知，它是*固有保时向 Lorentz 变换的不变量*：

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B. \tag{1.69}$$

像这样不具有未缩并指标的 Lorentz 不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)。由于度规 $g_{\mu\nu}$ 的对角元有正有负，Lorentz 矢量 A^μ 的自我内积 $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$ 的符号不是确定的，可以分为三类。

(1) 若 $A^2 > 0$，即 $|A^0| > |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类时** (timelike) 矢量。

(2) 若 $A^2 < 0$，即 $|A^0| < |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类空** (spacelike) 矢量。

(3) 若 $A^2 = 0$，即 $|A^0| = |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类光** (lightlike) 矢量。

由于 A^2 是 Lorentz 不变量，不能通过 Lorentz 变换改变 A^μ 的类型。

以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可通过它们的宇称变换性质进一步分类。如果 Lorentz 矢量 A^μ 的宇称变换是

$$A'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu, \tag{1.70}$$

则称它为**极矢量** (polar vector)，但经常直接简称为**矢量**，即*狭义的矢量*，其空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$。时空坐标 x^μ 就是一个极矢量。如果 Lorentz 矢量 A^μ 的宇称变换是

$$A'^\mu = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu, \tag{1.71}$$

则称它为赝矢量，或者**轴矢量** (axial vector)，其空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$。在经典力学中，空间坐标 $\mathbf{x}$ 和动量 $\mathbf{p}$ 都是极矢量，而角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 是轴矢量。在空间反射变换下，$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$，$\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$，$\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{p}' = (-\mathbf{x}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$，与以上定义一致。

时空坐标 x^μ 的微分 $\mathrm{d}x^\mu$ 是一个 Lorentz 矢量，它的自我内积

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^0)^2 - \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}} \tag{1.72}$$

是一个 Lorentz 标量，而 $\mathrm{d}s = \sqrt{|\mathrm{d}s^2|}$ 称为 Minkowski 时空的**线元** (line element)。在 Minkowski 时空中的一条曲线上，如果 $\mathrm{d}s \neq 0$，那么曲线的弧长 s 可通过对 $\mathrm{d}s$ 沿曲线积分来得到。

一个**质点**在 Minkowski 时空中的运动轨迹可以参数化为 $x^\mu(s)$，其中运动轨迹的弧长 s 是一个 Lorentz 标量，称为质点的**固有时** (proper time)。在质点的静止参考系中，它的轨迹是一条沿着 x^0 方向运动的直线，则 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^0$，因而固有时 s 就是质点在静止系中经历的时间。在任意惯性系中，质点的**运动速度**定义为

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0}, \tag{1.73}$$

将 (1.72) 式改写成

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{(\mathrm{d}x^0)^2} = 1 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} = 1 - |\mathbf{v}|^2, \tag{1.74}$$

由此引入依赖于速度 $\mathbf{v}$ 的 *Lorentz* 因子

$$\gamma_{\mathbf{v}} \equiv \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}}. \tag{1.75}$$

质点的**四维动量**定义为

$$p^\mu \equiv m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{1.76}$$

其中 $m > 0$ 是质点的静止质量，通常简称为**质量**，它是一个 Lorentz 标量。从定义上看，p^μ 是一个逆变的 Lorentz 极矢量，它与相应协变矢量 $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu, \quad p'_\mu = p_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu. \tag{1.77}$$

p^μ 的自我内积是

$$p^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2\frac{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s^2}, \tag{1.78}$$

由 (1.72) 式得到

$$\boxed{p^2 = m^2,} \tag{1.79}$$

这个式子称为**质壳** (mass shell) **条件**。$m > 0$ 意味着质点的四维动量 p^μ 是一个类时矢量。

将四维动量分解为

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \tag{1.80}$$

图 1.5: 相对论性色散关系。

并把

$$E = p^0 = m\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \gamma_{\mathbf{v}} m \tag{1.81}$$

定义为质点的**能量**，而

$$\mathbf{p} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = m\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} = \gamma_{\mathbf{v}} m\mathbf{v} \tag{1.82}$$

定义为质点的**动量**。将 $m_{\mathbf{v}} \equiv \gamma_{\mathbf{v}} m$ 看作质点的“运动质量”，则 $\mathbf{p} = m_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ 与 Newton 力学中动量与速度的关系类似。(1.81) 式表明 $E = m_{\mathbf{v}}$，这就是自然单位制下的**质能关系**。由质壳条件 $p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ 和 $E = \gamma_{\mathbf{v}} m > 0$ 推出相对论性**色散关系** (dispersion relation)

$$\boxed{E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}.} \tag{1.83}$$

这个关系对应于四维动量空间中由质量 m 决定的一个三维双曲面，即质壳。图 1.5 画出 E 随 $|\mathbf{p}|$ 变化的曲线（以 m 为单位），它是一条双曲线。根据 (1.81) 和 (1.82) 式，质点的运动速度可以用动量和能量表达为

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}.} \tag{1.84}$$

在质点的静止系中，$\mathbf{p} = \mathbf{0}$，而能量 E 等于静止质量 m。

上述关于质点的讨论同样适用于有质量的粒子。另一方面，对于**无质量粒子**，比如光子，可将其运动轨迹参数化为 $x^\mu(\lambda)$，其中 λ 是一个在运动轨迹上单调递增的参数。无质量粒子的自由运动轨迹是类光测地线，满足 $\mathrm{d}s^2 = 0$，由 (1.72) 式得 $(\mathrm{d}x^0)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$，运动速度 $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}x^0$ 满足

$$|\mathbf{v}|^2 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{(\mathrm{d}x^0)^2} = 1, \tag{1.85}$$

即无质量粒子以光速运动。$\mathrm{d}s^2 = 0$ 意味着运动轨迹的弧长 s 恒为零，因而不能将 λ 取为 s。不过，我们可以要求无质量粒子的四维动量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 满足

$$p^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{1.86}$$

从而间接地定义 λ。于是，无质量粒子的质壳条件为

$$p^2 = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0, \tag{1.87}$$

它与 (1.79) 式在 $m = 0$ 时的结果一致，故色散关系化为 $E = |\mathbf{p}|$，且

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathbf{p}}{E}, \tag{1.88}$$

即运动速度、动量与能量之间的关系仍然是 (1.84) 式。

在量子场论中，有时会用到更一般的四维动量 p^μ，它的 Lorentz 变换规则仍然是 (1.77) 式，但不需要满足质壳条件 (1.79)。

将对时空坐标的偏导数算符记为

$$\boxed{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu.} \tag{1.89}$$

这意味着 $\partial_0 = \partial^0$，$\partial_i = -\partial^i$ $(i = 1, 2, 3)$。下面简称 ∂_μ 和 ∂^μ 为**时空导数算符**，有

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}. \tag{1.90}$$

上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于时空导数算符指标位置的写法是合理的。也就是说，应该将分母中的上（下）标当作整个物理量或算符的下（上）标。对时空坐标作 Lorentz 变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$，两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并，得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho\delta^\rho{}_\nu$，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$，故

$$\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu. \tag{1.91}$$

这是时空导数算符 ∂^μ 的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同，因而可以将 ∂^μ 看作一个 Lorentz 矢量。相应地，∂_μ 的 Lorentz 变换是

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu. \tag{1.92}$$

定义 **d'Alembert 微分算符**[3]

$$\boxed{\partial^2 \equiv \partial^\mu\partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial_0^2 - \nabla^2,} \tag{1.93}$$

由保度规条件 (1.34) 得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu}\partial'^\mu\partial'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\partial^\rho\partial^\sigma = g_{\rho\sigma}\partial^\rho\partial^\sigma = \partial^2. \tag{1.94}$$

可见，∂^2 算符是 Lorentz 不变的。用它把 Klein-Gordon 方程 (1.6) 改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2)\Psi(x) = 0, \tag{1.95}$$

其中 x 是四维时空坐标 x^μ 的简写。**Klein-Gordon 微分算符** $\partial^2 + m^2$ 是 Lorentz 不变的，因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有相同的形式，即具有 **Lorentz 协变性** (covariance)。

[3]有些书将 d'Alembert 算符记作 $\Box$。

1.5　Lorentz 张量

Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广。一个 $p+q$ 阶的 (p,q) 型 **Lorentz 张量** $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$\boxed{T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q},} \tag{1.96}$$

其中 $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 和 $T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 分别是该 Lorentz 张量在惯性系 O 和 O' 中的分量，而 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是联系 O 与 O' 的固有保时向 Lorentz 变换。这里的逆变指标和协变指标统称为 **Lorentz 指标**。完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 *Lorentz 协变性*，在不同惯性系中具有相同的形式，从而满足狭义相对性原理。

Lorentz 标量是 0 阶 Lorentz 张量，具有 0 个 Lorentz 指标(不计入已缩并指标数量，下同)。Lorentz 矢量是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标。Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 是一个 2 阶的 $(0,2)$ 型 Lorentz 张量，不过，它是常数，在任何惯性系中不变，其 Lorentz 变换规则就是保度规条件 (1.40)。由 $\delta^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho\delta^\rho{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu$ 可以看出，Kronecker 符号 $\delta^\mu{}_\nu$ 是一个 $(1,1)$ 型常数 Lorentz 张量。注意，虽然 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 具有两个指标，它却不是 Lorentz 张量。

利用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型，但不改变张量的阶。升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的。比如，$T^{\mu\nu}{}_\rho = g_{\rho\sigma}T^{\mu\nu\sigma}$，就是用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3,0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2,1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\rho$。相应地，$T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma}T^{\mu\nu}{}_\sigma$，就是用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2,1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$ 升为 $(3,0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\rho}$。

对 (p,q) 型 Lorentz 张量的一个逆变指标和一个协变指标进行缩并，会得到一个 $(p-1,q-1)$ 型 Lorentz 张量。例如，由 (1.38) 式得

$$T'^{\mu\nu}{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\gamma(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\mu = \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\gamma\delta^\gamma{}_\alpha = \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\alpha, \tag{1.97}$$

可见 $T^{\mu\nu}{}_\mu$ 是一个 Lorentz 矢量。可以通过缩并若干个 Lorentz 张量的所有指标来构造 Lorentz 不变量，这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的 Λ 因子和 Λ^{-1} 因子总是相互抵消。比如，以下表达式都是 Lorentz 标量：

$$T^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu}A_\mu B_\nu, \quad T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}{}_\rho T^{\sigma\rho}{}_\nu. \tag{1.98}$$

类似于 Lorentz 矢量，可以按照宇称变换性质对 Lorentz 张量进一步分类。狭义的**张量**的宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}. \tag{1.99}$$

赝张量 (pseudotensor) 的宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}. \tag{1.100}$$

因此，在宇称变换下，狭义的**标量** ϕ 满足 $\phi' = \phi$，而**赝标量** (pseudoscalar) φ 满足 $\varphi' = -\varphi$。

引入四维 **Levi-Civita 符号**

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换（如 } \varepsilon^{1032}\text{）}, \\ -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换（如 } \varepsilon^{1023}\text{）}, \\ 0, & \text{其它情况。} \end{cases}} \tag{1.101}$$

这里的**置换** (permutation) 指的是将指标重新排列。调换两个指标的位置称为**对换**，**奇置换**通过奇数次对换得到，**偶置换**通过偶数次对换得到。这样定义出来的 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是**全反对称**的，即关于任意两个指标反对称，如 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$。全反对称性意味着具有 2 个或以上相同指标的 Levi-Civita 符号为零，如 $\varepsilon^{0120} = -\varepsilon^{0120} = 0$，这属于定义式 (1.101) 中的“其它情况”。$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的协变形式为

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.102}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 也是全反对称的，如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}(-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{1.103}$$

根据定义，$\varepsilon_{0123} = g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123} = -\varepsilon^{0123}$，有

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1, \tag{1.104}$$

而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换}, \\ +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换}, \\ 0, & \text{其它情况。} \end{cases} \tag{1.105}$$

从而

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4!\,.} \tag{1.106}$$

第二步是这样得到的：对上式中的缩并有贡献的置换有 4! 种，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 和 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性表明每一种置换的贡献都与 $\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123}$ 相等。

利用 Levi-Civita 符号可以把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照行列式定义写成

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.107}$$

根据 (1.45) 式，有

$$\varepsilon^{0123} = 1 = [\det(\Lambda)]^2 = \det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.108}$$

利用 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性得到

$$\varepsilon^{1023} = -\varepsilon^{0123} = -\det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= -\det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}. \tag{1.109}$$

依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.110}$$

对于固有保时向 Lorentz 变换，$\det(\Lambda) = +1$，则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.111}$$

对于宇称变换，$\det(\mathcal{P}) = -1$，则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\mathcal{P}^\rho{}_\gamma\mathcal{P}^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.112}$$

将以上两式看作 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的 Lorentz 变换规则，则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个 $(4,0)$ 型 Lorentz 赝张量。不过，它是常数，在任何惯性系中不变。

于是，$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个 $(0,4)$ 型 Lorentz 赝张量，相应的固有保时向 Lorentz 变换是恒等式

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu(\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\rho(\Lambda^{-1})^\delta{}_\sigma, \tag{1.113}$$

从而

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu\Lambda^\gamma{}_\rho\Lambda^\delta{}_\sigma = \varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}(\Lambda^{-1})^\kappa{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\beta(\Lambda^{-1})^\tau{}_\gamma(\Lambda^{-1})^\varepsilon{}_\delta\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu\Lambda^\gamma{}_\rho\Lambda^\delta{}_\sigma = \varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}\delta^\kappa{}_\mu\delta^\lambda{}_\nu\delta^\tau{}_\rho\delta^\varepsilon{}_\sigma, \tag{1.114}$$

即

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu\Lambda^\gamma{}_\rho\Lambda^\delta{}_\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{1.115}$$

三维 Levi-Civita 符号定义为

$$\boxed{\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) \text{ 是 } (1,2,3) \text{ 的偶置换}, \\ -1, & (i,j,k) \text{ 是 } (1,2,3) \text{ 的奇置换}, \\ 0, & \text{其它情况}, \end{cases}} \tag{1.116}$$

满足

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{0ijk}, \quad \varepsilon^{123} = +1. \tag{1.117}$$

注意，我们通常用 i,j,k 等拉丁字母代表三维空间指标，取值范围是 $1,2,3$；而用 μ,ν,ρ 等希腊字母代表四维时空指标，取值范围是 $0,1,2,3$。ε^{ijk} 关于三个空间指标是全反对称的，有 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i23} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} = 1$ 和 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i32} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{132} = -1$，依此类推，归纳出求和式

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}.} \tag{1.118}$$

由 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij3} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{213} = 2$ 和 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij1} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{121} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{211} = 0$ 归纳出另一条求和式

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}.} \tag{1.119}$$

利用 ε^{ijk}，可以将三维矢量外积

$$
\begin{aligned}
a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\
&= (b^2c^3 - b^3c^2)\mathbf{e}_1 + (b^3c^1 - b^1c^3)\mathbf{e}_2 + (b^1c^2 - b^2c^1)\mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{1.120}
$$

表达为 $a^i\mathbf{e}_i = \varepsilon^{ijk}\mathbf{e}_i b^j c^k$，故

$$
a^i = \varepsilon^{ijk} b^j c^k. \tag{1.121}
$$

接下来讨论真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式。在 Maxwell 方程组 (1.13) 中，ρ 是电荷密度，$\mathbf{J}$ 是电流密度，它们组成一个 Lorentz 矢量 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$，称为**四维电流密度**。从而，可将电流连续性方程

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{1.122}
$$

写成 Lorentz 协变的形式

$$
\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0.} \tag{1.123}
$$

此外，电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以用电标势 Φ 和矢势 $\mathbf{A}$ 表达为

$$
\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{1.124}
$$

Φ 和 $\mathbf{A}$ 组成一个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$，称为**四维矢势**。量子场论中所谓的**电磁场** (electromagnetic field) 通常就是指四维矢势 $A^\mu(x)$。现在，将 (1.124) 式的分量形式表达为

$$
E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k, \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{1.125}
$$

引入电磁场的**场强张量** (field strength tensor)

$$
\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu},} \tag{1.126}
$$

它是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量。由于两个时空导数算符的次序可以交换，有 $\partial^\mu\partial^\nu = \partial^\nu\partial^\mu$，从上述定义推出

$$
\begin{aligned}
\partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu\partial^\rho A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu A^\rho + \partial^\nu\partial^\mu A^\rho - \partial^\nu\partial^\rho A^\mu \\
&= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu},
\end{aligned} \tag{1.127}
$$

即 **Bianchi 恒等式**

$$
\boxed{\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0.} \tag{1.128}
$$

$F^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为

$$
F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i, \tag{1.129}
$$

可见，F^{0i} 对应于电场强度。求和式 (1.118) 等价于 $\varepsilon^{jki}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$，由此得到

$$\varepsilon^{ijk}B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m A^n = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i, \tag{1.130}$$

从而

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk}B^k, \tag{1.131}$$

故 $F^{\mu\nu}$ 的 ij 分量对应于磁感应强度。把 $F^{\mu\nu}$ 写成矩阵形式，得

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.132}$$

Gauss 定律对应的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \tag{1.133}$$

等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}, \tag{1.134}$$

而 Ampère 环路定律对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.135}$$

相当于

$$J^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i}. \tag{1.136}$$

归纳起来，得到 **Maxwell 方程**

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu.} \tag{1.137}$$

这个方程完全是用 Lorentz 张量写出来的，具有 Lorentz 协变性。在固有保时向 Lorentz 变换下，有

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \partial_\alpha[(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma F^{\beta\gamma}] = \partial_\alpha(\delta^\alpha{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma F^{\beta\gamma}) = \Lambda^\nu{}_\gamma \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} = \Lambda^\nu{}_\gamma J^\gamma = J'^\nu. \tag{1.138}$$

可见，Maxwell 方程在不同惯性系中具有相同的形式，满足狭义相对性原理。

求和式 (1.119) 等价于 $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$，故 $\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$，即

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}. \tag{1.139}$$

Gauss 磁定律对应的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.140}$$

等价于

$$0 = \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki}\partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij}\partial_k F^{ij})$$

$$= -\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}(\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij}). \tag{1.141}$$

第三步通过更换指标字母写出三个相等的项，毕竟，对于参与缩并或求和的指标，更换指标字母不会影响结果。上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0. \tag{1.142}$$

这是 Bianchi 恒等式 (1.128) 取纯空间分量的形式。将 Faraday 电磁感应定律对应的 Maxwell-Faraday 方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{1.143}$$

写成分量形式，得 $-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn}\partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0}$，从 (1.131) 式推出

$$\partial_0 F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}\partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0} = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m F^{n0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0}, \tag{1.144}$$

即

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0. \tag{1.145}$$

这也是 Bianchi 恒等式 (1.128) 取特定分量的形式。

利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (dual field strength tensor)

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu},} \tag{1.146}$$

它也是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量。$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0i\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}g_{j\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}g_{jm}g_{kn}F^{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -\frac{1}{2}2\delta^{il}B^l = -B^i,\end{aligned} \tag{1.147}$$

第五步利用了 $g_{jm}F^{mn} = -\delta^{jm}F^{mn} = -F^{jn}$，倒数第二步用到求和关系 (1.119)。可见，$\tilde{F}^{0i}$ 对应于磁感应强度。另一方面，

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk}F_{0k} = \varepsilon^{ijk}g_{0\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \varepsilon^{ijk}g_{00}g_{kl}F^{0l} = -\varepsilon^{ijk}F^{0k} = \varepsilon^{ijk}E^k,\end{aligned} \tag{1.148}$$

说明 $\tilde{F}^{ij}$ 对应于电场强度。$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的矩阵形式是

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.149}$$

由 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义有

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu}\partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho}\partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{6}\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}(\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}),\end{aligned} \tag{1.150}$$

因此 Bianchi 恒等式 (1.128) 等价于

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{1.151}$$

从这些讨论可以看到，用 Lorentz 张量语言表达 Maxwell 方程组是十分简洁的，而且方程的 Lorentz 协变性非常明确。

1.6　作用量原理

本节将介绍作用量原理，以给出场的经典运动方程。为此，先回顾经典力学中的作用量原理。

1.6.1　经典力学中的作用量原理

在经典力学中，质点力学系统可以用**拉格朗日量** (Lagrangian) 描述，它是系统的动能与势能之差。对于具有 n 个自由度的系统，可以定义 n 个相互独立的**广义坐标** (generalized coordinate) q_i $(i = 1, \cdots, n)$，它们的时间导数是**广义速度** (generalized velocity) $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$，其中物理量上方的点号代表对时间 t 求导。从而，将系统的拉格朗日量表达为广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$。拉格朗日量从 t_1 时刻到 t_2 时刻的时间积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \tag{1.152}$$

称为**作用量**。

假设系统在 t_1 和 t_2 时刻的广义坐标分别是 $q_i(t_1)$ 和 $q_i(t_2)$，在 t_1 与 t_2 之间存在着无穷多条可能的运动轨迹 $q_i(t)$，如图 1.6 所示，那么哪条轨迹才对应于经典力学中的真实运动呢？**作用量原理**指出，

> 系统的经典运动轨迹应使作用量变分为零 $(\delta S = 0)$。

对一条运动轨迹 $q_i(t)$ 作微小的改变，得到 $\tilde{q}_i(t)$，则相应的**变分** (variation) 是 $\delta q_i(t) = \tilde{q}_i(t) - q_i(t)$。类似地，可对这条轨迹的广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 作变分 $\delta\dot{q}_i(t)$。由于拉格朗日量 L 是 $q_i(t)$ 和 $\dot{q}_i(t)$ 的函数，$q_i(t)$ 和 $\dot{q}_i(t)$ 的变分会引起 L 的变分 δL，进而导致作用量 S 的变分 δS。对变分的严格处理需要用到泛函理论，在这里我们只需要知道变分的运算法则类似于微分的运算法则，给出

$$\delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i. \tag{1.153}$$

图 1.6: $\delta S = 0$ 对应的经典运动轨迹。

在讨论作用量原理时，我们不作时间坐标的变换，故时间的变分 $\delta t = 0$，于是

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i, \tag{1.154}$$

即时间导数的变分等于变分的时间导数。从而，广义坐标和广义速度的变分 δq_i 和 $\delta \dot{q}_i$ 导致的作用量变分为

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2},
\end{aligned} \tag{1.155}$$

其中第四、五步用了分部积分。根据前面的假设，t_1 和 t_2 时刻系统的广义坐标是固定的，其变分为零，即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，则上式最后一步第二项为零。由于变分 $\delta q_i(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ 是任意的，$\delta S = 0$ 等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.156}$$

这是 **Euler-Lagrange 方程**，它给出质点系统的经典运动方程。满足 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ 的运动轨迹有无穷多条，而经典力学中的真实运动轨迹是 Euler-Lagrange 方程的解，对应着 $\delta S = 0$，如图 1.6 所示。

引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.157}$$

求解由上式表示的 n 个方程，将广义速度表达成 q_i 和 p_i 的函数 $\dot{q}_i(q_i, p_i)$，然后通过 *Legendre* 变换定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L, \tag{1.158}$$

并将它表达为 q_i 和 p_i 的函数。这样定义的哈密顿量基本上是系统的总能量，即动能与势能之和。用 H 取替 L 来表达作用量 S，则 δq_i 和 δp_i 导致的作用量变分为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta(p_i \dot{q}_i - H) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right). \tag{1.159}$$

利用

$$p_i\delta\dot{q}_i = p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i, \tag{1.160}$$

有

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\dot{q}_i\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] + p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned} \tag{1.161}$$

由于 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，上式第二步最后一项为零，于是 $\delta S = 0$ 给出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.162}$$

这是 **Hamilton 正则运动方程**，相当于用 $2n$ 个一阶微分方程代替原来 n 个二阶的 Euler-Lagrange 方程 (1.156)。广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 统称为**正则变量**。

1.6.2　经典场论中的作用量原理

场是时空坐标 x^μ 的函数。在经典场论中，场 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 都是一个自由度，因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学。在**局域** (local) 场论中，拉格朗日量表达为 $L(t) = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(x)$，其中 $\mathcal{L}(x)$ 是**拉格朗日量密度**，在下文中将 $\mathcal{L}(x)$ 简称为**拉氏量**。这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ，没有再依赖于其它时空点。

设 $\mathcal{L}$ 是系统中 n 个场 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$ $(a = 1, \cdots, n)$ 及其时空导数 $\partial_\mu\Phi_a$ 的函数，则**作用量**表达为

$$\boxed{S = \int \mathrm{d}t\,L = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu\Phi_a).} \tag{1.163}$$

(1.47) 式告诉我们，时空体积元 d^4x 是 Lorentz 不变的。如果拉氏量 $\mathcal{L}$ 也是 Lorentz 不变的，则作用量 S 就是 Lorentz 不变量，从而由作用量原理得到的运动方程满足狭义相对性原理。因此，构建相对论性场论的关键在于使用 Lorentz 不变的拉氏量 $\mathcal{L}$，即要求 $\mathcal{L}$ 是一个 *Lorentz* 标量。

图 1.7 描绘了时空区域 R 上的场 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$，其中三维空间坐标 $\mathbf{x}$ 仅用一条坐标轴表示，R 的边界面为 $\mathcal{S} = \partial R$。类似于前面质点力学的处理方式，假设时空坐标的变分 $\delta x^\mu = 0$，即不作时空坐标的变换，那么对场的时空导数的变分等于场变分的时空导数，即

$$\delta(\partial_\mu\Phi_a) = \partial_\mu(\delta\Phi_a). \tag{1.164}$$

于是，$\delta\Phi_a$ 和 $\delta(\partial_\mu\Phi_a)$ 导致的作用量变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^4x\,\delta\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\delta(\partial_\mu\Phi_a)\right] = \int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\mu(\delta\Phi_a)\right] \\ &= \int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\delta\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\delta\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a\right\}\end{aligned}$$

图 1.7: 时空区域 R 上的场 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$。

$$= \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\right] \delta\Phi_a + \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a\right]. \tag{1.165}$$

上式最后一步第二项的被积函数是关于时空坐标的全散度 (total divergence)，利用广义 *Stokes* 定理将它转化为积分区域边界面 $\mathcal{S}$ 上的积分:

$$\int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a\right] = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a, \tag{1.166}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_\mu$ 是 $\mathcal{S}$ 上的定向面积元。进一步假设在边界面 $\mathcal{S}$ 上 $\delta\Phi_a = 0$，则上式为零。我们通常讨论整个时空区域上的场，这里相当于假设 Φ_a 在无穷远时空边界上的变分为零。这样一来，由 $\delta S = 0$ 推出

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0, \quad a = 1, \cdots, n.} \tag{1.167}$$

这就是**场的 Euler-Lagrange 方程**，它给出场的**经典运动方程**。

引入场的**共轭动量密度** (conjugate momentum density)

$$\boxed{\pi_a(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}.} \tag{1.168}$$

它也称为*正则共轭场*，其物理意义类似于广义动量。求解由上式表示的方程，将 $\dot{\Phi}_a$ 表达成函数 $\dot{\Phi}_a(\Phi_a, \pi_a, \nabla\Phi_a)$。接着用 Legendre 变换将哈密顿量定义为

$$H \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \pi_a \dot{\Phi}_a - L \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}, \tag{1.169}$$

其中**哈密顿量密度**是

$$\boxed{\mathcal{H}(\Phi_a, \pi_a, \nabla\Phi_a) = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}.} \tag{1.170}$$

$\delta\Phi_a$、$\delta\pi_a$ 和 $\delta(\nabla_\mu\Phi_a)$ 导致的作用量变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^4x\,\delta\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\,\delta(\pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{H}) \\ &= \int \mathrm{d}^4x\left[\dot{\Phi}_a\delta\pi_a + \pi_a\delta\dot{\Phi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_a}\delta\Phi_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}\delta\pi_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\cdot\delta(\nabla\Phi_a)\right].\end{aligned} \tag{1.171}$$

方括号中的第二项和最后一项分别化为

$$\pi_a\delta\dot{\Phi}_a = \pi_a\frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi_a = \frac{\partial}{\partial t}(\pi_a\delta\Phi_a) - \dot{\pi}_a\delta\Phi_a, \tag{1.172}$$

$$-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\cdot\delta(\nabla\Phi_a) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\cdot\nabla(\delta\Phi_a) = -\nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\delta\Phi_a\right] + \left[\nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a, \tag{1.173}$$

代入原表达式，得

$$\begin{aligned}\delta S = &\int \mathrm{d}^4x\left\{\left(\dot{\Phi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}\right)\delta\pi_a - \left[\dot{\pi}_a + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_a} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a\right\} \\ &+ \int \mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial t}(\pi_a\delta\Phi_a) - \int \mathrm{d}^4x\,\nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\delta\Phi_a\right].\end{aligned} \tag{1.174}$$

上式最后两项的被积函数分别是全导数和全散度，与前面一样假设在时空区域边界面上 $\delta\Phi_a = 0$，那么这两个积分项都等于零。于是，$\delta S = 0$ 给出场的正则运动方程

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_a} + \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}. \tag{1.175}$$

场 Φ_a 和它的共轭动量密度 π_a 是系统的正则变量。

1.7　Noether 定理、对称性与守恒定律

连续变换对应的对称性称为**连续对称性**。Lorentz 对称性就是一种连续对称性。**Noether 定理** [9] 指出，

> 如果系统具有一种**连续对称性**，就必然存在一条对应的**守恒定律**。

Noether 定理首先是在经典物理中给出的，但它基本上适用于任何物理行为由作用量原理决定的系统。因此，可以将它推广到量子物理中。

1.7.1　经典场论中的 Noether 定理

下面在经典场论中证明 Noether 定理。时空区域 R 中的作用量为

$$S = \int_R \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu\Phi_a). \tag{1.176}$$

考虑一个连续变换，使得

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x'), \tag{1.177}$$

其中已包含了坐标的变换

$$x^\mu \to x'^\mu. \tag{1.178}$$

它引起的拉氏量变换为

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x'). \tag{1.179}$$

我们可以对连续变换取极限，即考虑无穷小变换。设上述连续变换的无穷小变换形式为

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a, \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}, \tag{1.180}$$

如果在此变换下，对任意时空区域 R 都有

$$\delta S = \int_{R'} \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) = 0, \tag{1.181}$$

则系统具有相应的连续对称性。

在上述假设下，体积元的变换为

$$\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\,\mathrm{d}^4x, \quad \mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \det\left[\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]. \tag{1.182}$$

任意方阵 A 满足恒等式

$$\boxed{\det[\exp(A)] = \exp[\mathrm{tr}(A)],} \tag{1.183}$$

其中方阵的指数函数定义为

$$\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{1.184}$$

对于无穷小的 A，把 (1.183) 式两边展开至一阶小量，得

$$\det(\mathbf{1} + A) \simeq 1 + \mathrm{tr}(A). \tag{1.185}$$

上式中约等于号表示只保留到一阶小量，下同。利用上式将 Jacobi 行列式 $\mathcal{J}$ 化为

$$\mathcal{J} \simeq 1 + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu), \tag{1.186}$$

从而，体积元的无穷小变换形式为

$$\mathrm{d}^4x' \simeq [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]\,\mathrm{d}^4x. \tag{1.187}$$

作用量在无穷小变换下的变分是

$$\delta S = \int_{R'} \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) \simeq \int_R \mathrm{d}^4x\, [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)][\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x)$$

$$\simeq \int_R \mathrm{d}^4x\,[\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(x)\partial_\mu(\delta x^\mu)] = \int_R \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\delta(\partial_\mu\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right]. \tag{1.188}$$

记 x^μ 固定时的变分算符为 $\bar{\delta}$，它满足

$$\bar{\delta}\Phi_a(x) = \Phi'_a(x) - \Phi_a(x). \tag{1.189}$$

从而，$\bar{\delta}$ 算符可以与时空导数算符交换，即

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a), \tag{1.190}$$

δ 算符则不一定可以。$\delta\Phi_a$ 与 $\bar{\delta}\Phi_a$ 之间的关系为

$$\begin{aligned}\delta\Phi_a &= \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \Phi'_a(x) - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \bar{\delta}\Phi_a \\ &\simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu.\end{aligned} \tag{1.191}$$

第四步用到 Taylor 展开式 $\Phi'_a(x') \simeq \Phi'_a(x) + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu$；第五步用到 $(\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu$，这相当于扔掉一个二阶小量，因为 $\partial_\mu\Phi'_a$ 与 $\partial_\mu\Phi_a$ 之间相差一个一阶小量。从而，

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu. \tag{1.192}$$

将 (1.191) 式中的 Φ_a 替换为 $\partial_\mu\Phi_a$，即得

$$\delta(\partial_\mu\Phi_a) = \bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu. \tag{1.193}$$

将 (1.191) 和 (1.193) 式代入 (1.188) 式，得到

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_R \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}[\bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}[\partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu] + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right\} \\ &= \int_R \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\bar{\delta}\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\partial_\mu(\partial_\nu\Phi_a)\delta x^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right\} \\ &= \int_R \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a\right]\right. \\ &\qquad \left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\frac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\frac{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right]\right\} \\ &= \int_R \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right]\right\}.\end{aligned} \tag{1.194}$$

第二步用到分部积分，最后一步用到多元复合函数 $\mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu\Phi_a)$ 的求导关系

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}\delta x^\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\frac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\frac{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}. \tag{1.195}$$

根据 Euler-Lagrange 方程 (1.167)，(1.194) 式最后一步花括号中第一项为零。于是，$\delta S = 0$ 对任意积分区域 R 成立意味着第二项也为零，即

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = 0. \tag{1.196}$$

定义 **Noether 守恒流** (conserved current)

$$\boxed{j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu,} \tag{1.197}$$

则有**守恒流方程**

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0.} \tag{1.198}$$

方程 (1.198) 两边对空间区域 $\tilde{R}$ 积分，运用 *Gauss* 定理，得到

$$0 = \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, \partial_\mu j^\mu = \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, \partial_0 j^0 + \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j}, \tag{1.199}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是边界面 $\tilde{\mathcal{S}}$ 上的定向面积元，以外法线方向为正向。引入**守恒荷** (conserved charge)

$$Q \equiv \int_{\tilde{R}} \mathrm{d}^3x\, j^0, \tag{1.200}$$

将 (1.199) 式化为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j}, \tag{1.201}$$

即空间区域 $\tilde{R}$ 中的守恒荷减少率（增加率）等于从边界面 $\tilde{\mathcal{S}}$ 出来（进入）的流。这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度。

对于整个三维空间而言，边界面 $\tilde{\mathcal{S}}$ 位于无穷远处。通常假设场 Φ_a 在无穷远处衰减为零，从而在无穷远处 $\mathbf{j} \to \mathbf{0}$，则**全空间的守恒荷**

$$\boxed{Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0,} \tag{1.202}$$

满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$。可见，$Q$ 不随时间变化，是一个守恒量。

综上，在经典场论中，如果一个系统具有某种连续对称性，则存在相应的守恒流 (1.197)，它满足守恒流方程 (1.198)，而全空间的守恒荷 (1.202) 不随时间变化，对应着一条守恒定律。下面举一些应用 Noether 定理的例子。

1.7.2 时空平移对称性

时空坐标的**平移** (translation) 变换定义为

$$\boxed{x'^\mu = x^\mu + a^\mu,} \tag{1.203}$$

图 1.8: 时空平移变换示意图。

其中 a^μ 是不依赖于 x^μ 的平移变换参数，故 $\mathrm{d}x'^\mu = \mathrm{d}x^\mu$。可见，时空平移变换保持 Minkowski 时空的线元平方 (1.72) 不变。所有时空平移变换构成**时空平移群**。

保持线元平方 $\mathrm{d}s^2$ 不变的变换称为 **Poincaré 变换** [10]，也称为非齐次 Lorentz 变换。所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**。线元不变意味着距离不变，因而 Poincaré 群是 Minkowski 时空的**等距群** (isometry group)，记作 $\mathrm{ISO}(1,3)$。Lorentz 群是 Poincaré 群的子群，任意 Poincaré 变换可表示成 Lorentz 变换和时空平移变换的组合，也就是说，时空坐标的 Poincaré 变换表达为

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.} \tag{1.204}$$

利用保度规条件 (1.34)，容易验证这样的变换保持 $\mathrm{d}s^2$ 不变：

$$\mathrm{d}s'^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\sigma = g_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\sigma = \mathrm{d}s^2. \tag{1.205}$$

数学上称 Poincaré 群是 Lorentz 群与时空平移群的半直积群。

Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 是不依赖于时空点的常数，因而 Minkowski 时空是**均匀** (homogeneous) 的，处于其中的场具有时空平移对称性。在时空平移变换 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的物理分布不会改变，如图 1.8 所示，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x), \tag{1.206}$$

即平移变换后的场 Φ'_a 在 x'^μ 处的值等于变换前的场 Φ_a 在 x^μ 处的值。相应地，由场 $\Phi_a(x)$ 构造的拉氏量在变换下也满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$，而时空体积元保持不变，$\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x$。于是，狭义相对论性局域场论的作用量 $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)$ 在时空平移变换下不变，即

$$S' = \int \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}'(x') = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x) = S, \tag{1.207}$$

这是时空平移对称性的体现。

对于无穷小时空平移变换，将变换参数 a^μ 改记为 ε^μ，则 $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$，$\delta\Phi_a = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = 0$，由 (1.192) 式得

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = -\varepsilon^\rho\partial_\rho\Phi_a, \tag{1.208}$$

代入到 Noether 守恒流表达式 (1.197)，有

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\varepsilon^\rho \partial_\rho \Phi_a + \mathcal{L}\varepsilon^\mu = -\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu{}_\rho \mathcal{L}\right]\varepsilon^\rho. \tag{1.209}$$

由于小量 ε^ρ 是任意的，$\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu{}_\rho \mathcal{L}\right] = 0, \tag{1.210}$$

各项乘以 $g^{\rho\nu}$，缩并，得

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = 0. \tag{1.211}$$

上式方括号部分是场的**能动张量** (energy-momentum tensor)

$$\boxed{T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L},} \tag{1.212}$$

它满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{1.213}$$

因此，对 $T^{0\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ 作全空间积分，就得到 4 个守恒荷。一般来说，只要保证 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 标量，那么 $T^{\mu\nu}$ 就是 2 阶 Lorentz 张量。

$T^{\mu\nu}$ 的 00 分量为

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \tag{1.214}$$

可见，T^{00} 就是哈密顿量密度 $\mathcal{H}$，对应于时间平移变换 $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$。$T^{00}$ 的全空间积分

$$\boxed{H = \int \mathrm{d}^3x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}} \tag{1.215}$$

是场的哈密顿量，或者说**总能量**。它是时间平移变换的守恒荷，满足 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$，因此，

时间平移对称性对应于能量守恒定律。

$T^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}\partial^i \Phi_a = \pi_a \partial^i \Phi_a \tag{1.216}$$

是场的动量密度，对应于空间平移变换 $x'^i = x^i + \varepsilon^i$。$T^{0i}$ 的全空间积分

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x\, T^{0i} = \int \mathrm{d}^3x\, \pi_a \partial^i \Phi_a \tag{1.217}$$

是场的**总动量**。根据 (1.89) 式，上式的三维矢量形式为

$$\boxed{\mathbf{P} = -\int \mathrm{d}^3x\, \pi_a \nabla \Phi_a.} \tag{1.218}$$

总动量是空间平移变换的守恒荷，满足 $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t = 0$，因此，

空间平移对称性对应于动量守恒定律。

1.7.3　Lorentz 对称性

如前所述，在相对论性场论中，我们要求拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是 Lorentz 标量。具体来说，在固有保时向 Lorentz 变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ 的作用下，拉氏量满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$，而 (1.47) 式表明 $\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x$，于是作用量 S 在变换下满足 (1.207) 的形式，即系统具有 Lorentz 对称性。

考虑**无穷小固有保时向 Lorentz 变换**

$$\boxed{\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu},} \tag{1.219}$$

其中 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 是变换的无穷小参数。由保度规条件 (1.34)，有

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \omega^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \omega^{\nu}{}_{\beta}) \simeq g_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + g_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\omega^{\nu}{}_{\beta} + g_{\mu\nu}\omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} \\ &= g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\nu}\omega^{\nu}{}_{\beta} + g_{\mu\beta}\omega^{\mu}{}_{\alpha} = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}, \end{aligned} \tag{1.220}$$

其中

$$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu}. \tag{1.221}$$

(1.220) 式表明 $\omega_{\mu\nu}$ 关于两个指标反对称：

$$\boxed{\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}.} \tag{1.222}$$

因此，$\omega_{\mu\nu}$ 只有 6 个独立分量，可取为 ω_{01}、ω_{02}、ω_{03}、ω_{12}、ω_{23} 和 ω_{31}，它们分别对应于沿 3 个空间轴方向的增速变换和绕 3 个空间轴的旋转变换。

下面举两个例子说明 $\omega_{\mu\nu}$ 的具体形式。对于绕 z 轴旋转 θ 角的变换 (1.36)，利用三角函数展开式 $\cos\theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ 和 $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$，有

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.223}$$

对于沿 x 轴的增速变换 (1.32)，定义**快度** (rapidity)

$$\boxed{\xi \equiv \tanh^{-1}\beta,} \tag{1.224}$$

则 $\beta = \tanh\xi$。利用双曲函数公式 $\tanh\xi = \sinh\xi/\cosh\xi$ 和 $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1$ 推出

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = (1-\tanh^2\xi)^{-1/2} = \left(\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right)^{-1/2} = \cosh\xi, \tag{1.225}$$

$$\beta\gamma = \tanh\xi\cosh\xi = \sinh\xi, \tag{1.226}$$

以此将 (1.32) 式改写成

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & & \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.227}$$

根据双曲函数展开式 $\cosh\xi = 1 + \mathcal{O}(\xi^2)$ 和 $\sinh\xi = \xi + \mathcal{O}(\xi^3)$，有

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.228}$$

在无穷小 Lorentz 变换 (1.219) 的作用下，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{1.229}$$

而变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 可以展开为[4]

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) = \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x). \tag{1.230}$$

这里 $(I^{\mu\nu})_{ab}$ 是 Φ_a 所属 Lorentz 群表示的**生成元** (generator)。当 $(I^{\mu\nu})_{ab}$ 非零时，它们是以 a 和 b 为行列指标的一组常数矩阵，而且关于 μ 和 ν 反对称，

$$(I^{\mu\nu})_{ab} = -(I^{\nu\mu})_{ab}, \tag{1.231}$$

因而这组矩阵里只有 6 个独立矩阵，每个独立矩阵与 $\omega_{\mu\nu}$ 的一个独立分量相匹配。

现在 $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$，由 (1.192) 和 (1.180) 式得

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) - (\partial_\nu\Phi_a)\delta x^\nu = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - (\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho, \tag{1.232}$$

故 Noether 流为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right]\omega^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho x^\rho, \end{aligned} \tag{1.233}$$

[4]这里给出场在无穷小 Lorentz 变换下的一般形式。在第 4 章讨论矢量场时，相应的表达式是 (4.30) 式；在第 5 章讨论 Dirac 旋量场时，相应的表达式是 (5.59) 式。

其中

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv T^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\nu \Phi_a - \delta^{\mu}{}_{\nu} \mathcal{L} \tag{1.234}$$

是能动张量 (1.212) 的等价写法。利用度规可以进行以下指标升降操作，

$$T^{\mu}{}_{\nu} \omega^{\nu}{}_{\rho} = T^{\mu}{}_{\nu} \delta^{\nu}{}_{\sigma} \omega^{\sigma}{}_{\rho} = T^{\mu}{}_{\nu} g^{\nu\alpha} g_{\alpha\sigma} \omega^{\sigma}{}_{\rho} = T^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho}, \tag{1.235}$$

即参与缩并的 **Lorentz** 指标一升一降不会改变表达式的结果。再利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性推出

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu} \omega^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} &= T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^{\rho} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^{\rho} - T^{\mu\nu} \omega_{\rho\nu} x^{\rho}) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^{\rho} - T^{\mu\rho} \omega_{\nu\rho} x^{\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu} x^{\rho} - T^{\mu\rho} x^{\nu}). \end{aligned} \tag{1.236}$$

于是，Noether 流 (1.233) 化为

$$j^{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{\nu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b - \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu} x^{\rho} - T^{\mu\rho} x^{\nu}) = \frac{1}{2} \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho}, \tag{1.237}$$

其中

$$\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho} x^{\nu} - T^{\mu\nu} x^{\rho} - \mathrm{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b. \tag{1.238}$$

由于小量 $\omega_{\nu\rho}$ 是任意的，$\partial_\mu j^{\mu} = 0$ 给出

$$\partial_\mu \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0, \tag{1.239}$$

守恒荷为

$$J^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3 x\, \mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int \mathrm{d}^3 x\, [T^{0\rho} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\rho} - \mathrm{i} \pi_a (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b]. \tag{1.240}$$

易见 $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$，因而一共有 6 个独立的守恒荷，满足 $\mathrm{d}J^{\nu\rho}/\mathrm{d}t = 0$。

为明确物理含义，将守恒荷 $J^{\nu\rho}$ 分解成两项：

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}. \tag{1.241}$$

上式第一项为

$$L^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3 x\, (T^{0\rho} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\rho}), \tag{1.242}$$

关于指标的反对称性意味着它的纯空间分量 L^{jk} 中只有 3 个是独立的，利用三维 Levi-Civita 符号将 L^{jk} 对偶成三维矢量 L^i，

$$L^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L^{jk} = (L^{23}, L^{31}, L^{12}). \tag{1.243}$$

由此推出

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int \mathrm{d}^3 x\, (T^{0k} x^j - T^{0j} x^k) = \int \mathrm{d}^3 x\, \varepsilon^{ijk} x^j T^{0k} = \int \mathrm{d}^3 x\, \varepsilon^{ijk} x^j \pi_a \partial^k \Phi_a, \tag{1.244}$$

其中 $T^{0k}=\pi_a\partial^k\Phi_a$ 是动量密度 (1.216)。写成矢量形式，得

$$\mathbf{L}=-\int \mathrm{d}^3x\ \mathbf{x}\times(\pi_a\nabla\Phi_a), \tag{1.245}$$

这是场的**轨道角动量** (orbital angular momentum)。(1.241) 式第二项为

$$S^{\nu\rho}\equiv -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\pi_a(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b, \tag{1.246}$$

类似地，$S^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$S^i\equiv\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk}=(S^{23},S^{31},S^{12})=-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}\int \mathrm{d}^3x\,\pi_a(I^{jk})_{ab}\Phi_b, \tag{1.247}$$

这是场的**自旋角动量** (spin angular momentum)。$J^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$J^i\equiv\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}=L^i+S^i, \tag{1.248}$$

这是场的**总角动量** (total angular momentum)。固有保时向 Lorentz 群的纯空间部分就是空间旋转群 SO(3)，因此，

空间旋转对称性对应于角动量守恒定律。

另一方面，$L^{\nu\rho}$ 的 $i0$ 分量为

$$L^{i0}=\int \mathrm{d}^3x\,(T^{00}x^i-T^{0i}x^0)=\int \mathrm{d}^3x\,(x^i\mathcal{H}-x^0\pi_a\partial^i\Phi_a)=\int \mathrm{d}^3x\,x^i\mathcal{H}-tP^i. \tag{1.249}$$

若 $\mathrm{d}S^{i0}/\mathrm{d}t=0$，则 $\mathrm{d}J^{i0}/\mathrm{d}t=0$ 意味着 $\mathrm{d}L^{i0}/\mathrm{d}t=0$，再结合动量守恒式 $\mathrm{d}P^i/\mathrm{d}t=0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}L^{i0}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,x^i\mathcal{H}-P^i=0, \tag{1.250}$$

即

$$P^i=Hv_{\mathrm{C}}^i,\quad v_{\mathrm{C}}^i\equiv\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,x^i\mathcal{H}. \tag{1.251}$$

在低速近似下，总能量约等于总质量，$H\simeq M$，故总动量 $\mathbf{P}\simeq M\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$，而 $\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$ 是**质心** (即质量中心，center of mass) 的运动速度。应用 Newton 第二定律，外力

$$\mathbf{F}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.252}$$

这就是*质心运动定理*。因此，L^{i0} 的守恒在经典力学中对应于**质心运动守恒定律**：当没有外力存在时，质心的加速度为零，质心保持静止或作匀速直线运动。

1.7.4　U(1) 整体对称性

考虑包含复场 $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \tag{1.253}$$

其中 m 是常数。对 ϕ 作 **U(1) 整体变换**

$$\boxed{\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x),} \tag{1.254}$$

其中有理数 q 是常数，连续变换参数 θ 是实数。**整体** (global) 指 θ 不依赖于时空坐标 x^μ，这意味着所有时空点处的场值经历相同的变换。

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$ 是一个模为 1 的**相位因子** (phase factor)，可看作一个 1 维幺正矩阵 $U(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$，满足 (1.56) 式，故集合 $\{U(\theta)\,|\,\theta \in [0, 2\pi/q]\}$ 构成 **U(1) 群**。$U(\theta)$ 满足周期性边界条件 $U(0) = U(2\pi/q) = 1$，变换参数 θ 的周期是 $2\pi/|q|$。U(1) 群的元素满足乘法交换律，即

$$U(\theta_1)U(\theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta_1} = U(\theta_2)U(\theta_1), \tag{1.255}$$

因而它是一个 Abel 群，且与 SO(2) 群同构。SO(2) 群描述平面上的旋转变换，转动角 φ 以 2π 为周期，相应的群空间是一个圆周，如图 1.9 所示。φ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的取值遍历圆周上所有的点，且 $\varphi = 0$ 与 $\varphi = 2\pi$ 对应于同一点。令 $\varphi = q\theta$，则 θ 在 $[0, 2\pi/q]$ 上的取值一一对应于圆周上的点。

相应地，ϕ^* 的 U(1) 整体变换为

$$[\phi^*(x)]' = [\phi'(x)]^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^*(x). \tag{1.256}$$

由 (1.253) 式定义的拉氏量在这种变换下不变：

$$\mathcal{L}' = (\partial^\mu \phi^{*\prime})\partial_\mu \phi' - m^2 \phi^{*\prime}\phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}(\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi^*\phi = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^*\phi = \mathcal{L}. \tag{1.257}$$

因此，系统具有 **U(1) 整体对称性**，q 称为场 $\phi(x)$ 的 **U(1) 荷**。与前面两个小节叙述的两种对称性不同，这里的对称性出现在由场构成的抽象空间中，与时间和空间相对独立 ($\delta x^\mu = 0$)，因而是一种**内部对称性**。

U(1) 整体变换的无穷小形式为

$$\phi'(x) = \phi(x) + \mathrm{i}q\theta\phi(x), \quad [\phi^*(x)]' = \phi^*(x) - \mathrm{i}q\theta\phi^*(x), \tag{1.258}$$

结合 $\delta x^\mu = 0$，有

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi = \mathrm{i}q\theta\phi, \quad \bar{\delta}\phi^* = \delta\phi^* = -\mathrm{i}q\theta\phi^*. \tag{1.259}$$

$\phi(x)$ 与 $\phi^*(x)$ 是线性独立的，代表两个相互独立的自由度。取 $\Phi_1 = \phi$，$\Phi_2 = \phi^*$，Noether 流 (1.197) 表达为

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \bar{\delta}\phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi^*(\mathrm{i}q\theta\phi) + (-\mathrm{i}q\theta\phi^*)\partial^\mu \phi$$

图 1.9: SO(2) 群空间示意图。

$$= \mathrm{i}q\theta[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*\partial^\mu\phi] = -\mathrm{i}q\theta\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi, \tag{1.260}$$

其中 $\overleftrightarrow{\partial^\mu}$ 符号通过下式定义，

$$\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi \equiv \phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi, \tag{1.261}$$

即先对右边的场求导，再减去对左边的场求导。扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 **U(1) 守恒流**

$$\boxed{J^\mu \equiv \mathrm{i}q\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi,} \tag{1.262}$$

则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$，相应的守恒荷是

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\, \phi^*\overleftrightarrow{\partial^0}\phi, \tag{1.263}$$

它满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$。

在实际应用中，q 是由场 $\phi(x)$ 描述的粒子所携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等。因此，一种 U(1) 整体对称性对应于一条荷数守恒定律，比如，

电磁 U(1) 整体对称性对应于电荷守恒定律。

习　题

1.1 在自然单位制中，1 GeV^{-2} 等于多少 cm^2，也等于多少 cm^3/s？

1.2 推出绕 z 轴转动 θ 角的变换公式 (1.35)。验证相应的变换矩阵 (1.36) 满足保度规条件 (1.44)。

1.3 设四维动量 p^μ 满足质壳条件 $p^2 = m^2 \geq 0$，沿 x 轴方向对它作增速变换，得

$$p'^0 = \gamma(p^0 - \beta p^1), \quad p'^1 = \gamma(p^1 - \beta p^0), \quad p'^2 = p^2, \quad p'^3 = p^3. \tag{1.264}$$

证明无论 $p^0>0$ 还是 $p^0<0$，必有

$$\frac{p'^0}{p^0}>0, \tag{1.265}$$

即增速变换不能改变 p^0 的符号。

1.4 设四维动量 p^μ 和 k^μ 满足质壳条件 $p^2=m_1^2$ 和 $k^2=m_2^2$，其中 $m_1,m_2,p^0,k^0>0$，证明

$$(p+k)^2\geq(m_1+m_2)^2,\quad (p-k)^2\leq(m_1-m_2)^2. \tag{1.266}$$

1.5 已知绕 x 轴旋转变换 $R_x(\theta)$、绕 y 轴旋转变换 $R_y(\theta)$、沿 y 轴增速变换 $B_y(\xi)$ 和沿 z 轴增速变换 $B_z(\xi)$ 的具体形式为

$$R_x(\theta)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\cos\theta&\sin\theta\\&&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\qquad R_y(\theta)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\cos\theta&&-\sin\theta\\&&1&\\&\sin\theta&&\cos\theta\end{pmatrix}, \tag{1.267}$$

$$B_y(\xi)=\begin{pmatrix}\cosh\xi&&-\sinh\xi&\\&1&&\\-\sinh\xi&&\cosh\xi&\\&&&1\end{pmatrix},\quad B_z(\xi)=\begin{pmatrix}\cosh\xi&&&-\sinh\xi\\&1&&\\&&1&\\-\sinh\xi&&&\cosh\xi\end{pmatrix}. \tag{1.268}$$

(a) 分别推出这四个变换的无穷小变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 的矩阵形式。

(b) 证明 $R_y(\theta_1)R_y(\theta_2)=R_y(\theta_1+\theta_2)$ 和 $B_y(\xi_1)B_y(\xi_2)=B_y(\xi_1+\xi_2)$。

1.6 证明

$$g^{\mu\rho}g_{\nu\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\rho=\Lambda^\mu{}_\nu. \tag{1.269}$$

1.7 设 $S^{\mu\nu}$ 是对称的 Lorentz 张量，$A_{\mu\nu}$ 是反对称的 Lorentz 张量，证明

$$S^{\mu\nu}A_{\mu\nu}=0. \tag{1.270}$$

1.8 用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 将 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ 表示出来。

1.9 根据 Euler-Lagrange 方程 (1.167)，从下列拉氏量导出场 $\phi(x)$ 或 $A^\mu(x)$ 的经典运动方程。

(a) $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{\lambda}{3!}\phi^3$，其中 m 和 λ 是常数。

(b) $\mathcal{L}=-\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu)\partial_\nu A_\mu+\frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu$，其中 m 是常数。

(c) $\mathcal{L}=-\frac{a}{2}(\partial^\nu A^\mu)\partial_\nu A_\mu-\frac{b}{2}(\partial^\mu A^\nu)\partial_\nu A_\mu$，其中 a 和 b 是常数。

(d) 对于上一小题，取 $a=1$ 且 $b=-1$，然后用 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ 表达经典运动方程。

1.10 将 (1.238) 式改写为 $\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\rho}x^{\nu} - T^{\mu\nu}x^{\rho} + \mathbb{S}^{\mu\nu\rho}$，其中

$$\mathbb{S}^{\mu\nu\rho} \equiv -\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b \tag{1.271}$$

满足 $\mathbb{S}^{\mu\nu\rho} = -\mathbb{S}^{\mu\rho\nu}$。引入 **Belinfante–Rosenfeld 能动张量**

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_\rho(\mathbb{S}^{\mu\nu\rho} + \mathbb{S}^{\nu\mu\rho} - \mathbb{S}^{\rho\nu\mu}). \tag{1.272}$$

(a) 由 (1.213) 和 (1.239) 式推出

$$\partial_\mu\mathbb{S}^{\mu\nu\rho} = T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}. \tag{1.273}$$

(b) 证明

$$\Theta^{\nu\mu} = \Theta^{\mu\nu}. \tag{1.274}$$

(c) 证明

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{1.275}$$

(d) 证明

$$\int \mathrm{d}^3x\,\Theta^{00} = H, \quad \int \mathrm{d}^3x\,\Theta^{0i} = P^i. \tag{1.276}$$

可见，Belinfante–Rosenfeld 能动张量是满足守恒流方程的对称张量，且其 00 分量和 $0i$ 分量的空间积分分别是场的总能量和总动量，符合作为对称能动张量的要求，可将它放入广义相对论的 Einstein 方程以充当引力场的源项。

第 2 章　量子标量场

本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法。标量场的量子化可以看作简谐振子量子化的推广，因此先回顾一下量子力学中简谐振子的正则量子化程序。

2.1　简谐振子的正则量子化

一维**简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的哈密顿量表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{2.1}$$

其中 $m > 0$ 是质量，$\omega > 0$ 是角频率。上式第一项是动能，第二项是势能。在量子力学中，把位置坐标 x 和动量 p 这两个正则变量看作 Hilbert 空间上的厄米算符，要求它们满足**正则对易关系**

$$\boxed{[x, p] \equiv xp - px = \mathrm{i}.} \tag{2.2}$$

构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + \mathrm{i}p), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - \mathrm{i}p). \tag{2.3}$$

a 称为**湮灭算符** (annihilation operator)，$a^\dagger$ 称为**产生算符** (creation operator)，两者互为厄米共轭 (Hermitian conjugate)。它们的对易关系是

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x + \mathrm{i}p, m\omega x - \mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x, -\mathrm{i}p] + [\mathrm{i}p, m\omega x]) \\ &= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x, p] + \mathrm{i}[p, x]) = -\mathrm{i}[x, p],\end{aligned} \tag{2.4}$$

则由正则对易关系 (2.2) 得

$$\boxed{[a, a^\dagger] = 1.} \tag{2.5}$$

同理推出

$$\boxed{[a, a] = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0.} \tag{2.6}$$

根据 (2.3) 式反过来用 a 和 $a^\dagger$ 表示 x 和 p，有

$$x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a - a^\dagger), \tag{2.7}$$

将哈密顿量 (2.1) 改写为

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2m}\frac{m\omega}{2}(a-a^\dagger)^2+\frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{2m\omega}(a+a^\dagger)^2 \\ &= -\frac{\omega}{4}(aa-aa^\dagger-a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)+\frac{\omega}{4}(aa+aa^\dagger+a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)=\frac{\omega}{2}(aa^\dagger+a^\dagger a). \end{aligned} \tag{2.8}$$

由对易关系 (2.5) 得 $aa^\dagger = a^\dagger a+1$，于是

$$H=\frac{\omega}{2}(2a^\dagger a+1)=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)=\omega\left(N+\frac{1}{2}\right), \tag{2.9}$$

其中 $N\equiv a^\dagger a$ 是个厄米算符，称为**粒子数算符**。N 还是个**半正定**算符，对于 Hilbert 空间中的任意态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) 非负：

$$\boxed{\langle\Psi|\,N\,|\Psi\rangle=\langle\Psi|\,a^\dagger a\,|\Psi\rangle=\langle a\Psi|a\Psi\rangle\geq 0,} \tag{2.10}$$

其中态矢 $|a\Psi\rangle\equiv a\,|\Psi\rangle$ 的自我内积（即模方）一定是非负的。因此，哈密顿量是**正定**算符，满足 $\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle>0$。

设 $|n\rangle$ 是 N 的本征态，满足归一化条件 $\langle n|n\rangle=1$ 和本征方程

$$N\,|n\rangle=n\,|n\rangle\,. \tag{2.11}$$

由 $n=\langle n|\,n\,|n\rangle=\langle n|\,N\,|n\rangle\geq 0$ 可知，本征值 n 是一个非负实数。利用对易子公式

$$[AB,C]=ABC-ACB+ACB-CAB=A[B,C]+[A,C]B, \tag{2.12}$$

$$[A,BC]=ABC-BAC+BAC-BCA=[A,B]C+B[A,C], \tag{2.13}$$

推出

$$[N,a^\dagger]=[a^\dagger a,a^\dagger]=a^\dagger[a,a^\dagger]=a^\dagger,\quad [N,a]=[a^\dagger a,a]=[a^\dagger,a]a=-a, \tag{2.14}$$

故 $Na^\dagger=a^\dagger N+a^\dagger$，$Na=aN-a$。从而

$$Na^\dagger\,|n\rangle=(a^\dagger N+a^\dagger)\,|n\rangle=(n+1)a^\dagger\,|n\rangle\,, \tag{2.15}$$

$$Na\,|n\rangle=(aN-a)\,|n\rangle=(n-1)a\,|n\rangle\,. \tag{2.16}$$

可见，$a^\dagger\,|n\rangle$ 和 $a\,|n\rangle$ 都是 N 的本征态，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，也就是说，

$$a^\dagger\,|n\rangle=c_1\,|n+1\rangle\,,\quad a\,|n\rangle=c_2\,|n-1\rangle\,, \tag{2.17}$$

其中 c_1 和 c_2 是两个归一化常数。产生算符 $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符** (raising operator)；湮灭算符 a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符** (lowering operator)。为确定归一化常数的值，进行以下计算，

$$n+1=\langle n|\,(N+1)\,|n\rangle=\langle n|\,(a^\dagger a+1)\,|n\rangle=\langle n|\,aa^\dagger\,|n\rangle=|c_1|^2\,\langle n+1|n+1\rangle=|c_1|^2, \tag{2.18}$$

$$n = \langle n| N |n\rangle = \langle n| a^\dagger a |n\rangle = |c_2|^2 \langle n-1|n-1\rangle = |c_2|^2. \tag{2.19}$$

将 c_1 和 c_2 都取为正实数，得 $c_1 = \sqrt{n+1}$ 和 $c_2 = \sqrt{n}$，故

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,. \tag{2.20}$$

从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用降算符 a 逐步操作，得到本征值逐次减小的一系列本征态

$$a|n\rangle\,,\ a^2|n\rangle\,,\ a^3|n\rangle\,,\ \cdots\,, \tag{2.21}$$

本征值分别为

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ \cdots \tag{2.22}$$

由于 $n \geq 0$，必定存在一个最小本征值 n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足

$$a|n_0\rangle = 0. \tag{2.23}$$

上式是使本征值停止减小的条件。于是 $N|n_0\rangle = a^\dagger a|n_0\rangle = 0 = 0|n_0\rangle$，可见 $n_0 = 0$，即

$$|n_0\rangle = |0\rangle\,. \tag{2.24}$$

反过来，从 $|0\rangle$ 出发，用升算符 $a^\dagger$ 逐步操作，得到本征值逐次增加的一系列本征态

$$a^\dagger|0\rangle\,,\ (a^\dagger)^2|0\rangle\,,\ (a^\dagger)^3|0\rangle\,,\ \cdots\,, \tag{2.25}$$

本征值分别为

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{2.26}$$

综上，本征值 n 的取值是自然数 $0, 1, 2, \cdots$，这是量子化的。用 $a^\dagger$ 和 $|0\rangle$ 将本征态 $|n\rangle$ 表示为

$$|n\rangle = c_3 (a^\dagger)^n |0\rangle\,. \tag{2.27}$$

为确定归一化常数 c_3，进行以下运算，

$$\begin{aligned}\langle n|n\rangle &= |c_3|^2 \langle 0| a^n (a^\dagger)^n |0\rangle = |c_3|^2 \langle 1| a^{n-1} (a^\dagger)^{n-1} |1\rangle = 1\cdot 2\,|c_3|^2 \langle 2| a^{n-2} (a^\dagger)^{n-2} |2\rangle = \cdots \\ &= (n-1)!\,|c_3|^2 \langle n-1| a a^\dagger |n-1\rangle = n!\,|c_3|^2 \langle n|n\rangle\,,\end{aligned} \tag{2.28}$$

故 $|c_3|^2 = 1/n!$。取 c_3 为正实数，得 $c_3 = 1/\sqrt{n!}$，于是

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle\,. \tag{2.29}$$

由 (2.9) 式可知，$|n\rangle$ 也是 H 的本征态，有

$$H|n\rangle = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle\,, \tag{2.30}$$

相应的能量本征值为

$$\boxed{E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right).} \tag{2.31}$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**。非零的真空能是量子力学的特有结果。我们可以将 $|0\rangle$ 看作**真空态**，将 $n > 0$ 的 $|n\rangle$ 看作包含 n 个**声子** (phonon) 的激发态，每个声子具有一份能量 ω。这样一来，n 表示声子的数目，故粒子数算符 N 描述声子数。$a^\dagger$ 的作用是产生一个声子，从而增加一份能量；a 的作用是湮灭一个声子，从而减少一份能量。这是将 $a^\dagger$ 和 a 称为产生算符和湮灭算符的原因。

2.2　量子场论中的正则对易关系

在上一节中，对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统的广义坐标 x 和广义动量 p 提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系 (2.2)。在本节中，我们将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化，这需要涉及到绘景变换。在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系。

在 **Schrödinger 绘景**中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 代表随时间演化的物理态，满足 **Schrödinger 方程** [11]

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = H|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}},} \tag{2.32}$$

而 Hilbert 空间上的力学量算符 O^{S} 不依赖于时间。系统的哈密顿量 H 是不含时的算符，Schrödinger 方程的解可以表达为

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}, \tag{2.33}$$

这里用到算符的指数函数。对于任意算符 A，**指数函数**通过级数定义为

$$\boxed{\mathrm{e}^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.} \tag{2.34}$$

容易验证 (2.33) 式满足 Schrödinger 方程 (2.32)：

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = H|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}. \tag{2.35}$$

可见，$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 与 $t = 0$ 时刻的态矢 $|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 通过含时幺正变换 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 联系起来。

在 **Heisenberg 绘景**中，态矢 $|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}$ 定义为

$$\boxed{|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}},} \tag{2.36}$$

它不随时间演化，

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0. \tag{2.37}$$

而力学量算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，

$$\boxed{O^{\mathrm{H}}(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}.} \tag{2.38}$$

由于 $[H, H] = 0$，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H. \tag{2.39}$$

故哈密顿量 H 在这两种绘景中是相同的，

$$\boxed{H^{\mathrm{H}} = H^{\mathrm{S}} = H.} \tag{2.40}$$

由

$${}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,O^{\mathrm{H}}(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} \tag{2.41}$$

可知，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理。此外，可以推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_0 O^{\mathrm{H}}(t) &= (\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht})O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}(\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}) = -H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}H \\ &= -HO^{\mathrm{H}}(t) + O^{\mathrm{H}}(t)H,\end{aligned} \tag{2.42}$$

即 Heisenberg 绘景中的含时力学量算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 满足 **Heisenberg 运动方程**

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O^{\mathrm{H}}(t) = [O^{\mathrm{H}}(t), H].} \tag{2.43}$$

这是 Heisenberg 绘景中的基本运动方程。

上一节对简谐振子的量子化是在 Schrödinger 绘景中进行的，因为我们没有考虑位置算符 x 和动量算符 p 的时间依赖性。将正则对易关系 (2.2) 改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 Heisenberg 绘景中的形式是

$$\begin{aligned}[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] &= [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

可见，正则对易关系的形式不依赖于绘景。(2.44) 式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) 对易关系。接下来的讨论在 Heisenberg 绘景中进行，**省略**绘景的标志性上标 H。

将讨论推广到具有 n 个自由度的系统，记 $q_i(t)$ 为系统在 Heisenberg 绘景中的广义坐标算符，$p_i(t)$ 为相应的广义动量算符，它们是系统的正则变量。由于不同自由度不应该相互影响，这些算符需要满足的等时对易关系为

$$[q_i(t), p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0. \tag{2.45}$$

仅当 $i=j$ 时，$q_i(t)$ 和 $p_j(t)$ 是同一个自由度的正则变量，而第一个对易子才是非零的。

1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，空间坐标 $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的参数。场论讨论的是具有无穷多个连续自由度的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个广义坐标。为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间离散化，划分成无穷多个体积元 V_i，再取 $V_i\to 0$ 的极限来得到连续空间的结果。在体积元 V_i 中，定义相应的广义坐标

$$\Phi_i(t)\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\Phi(\mathbf{x},t), \tag{2.46}$$

这是场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 在 V_i 中的平均值。将 $\partial_\mu\Phi$ 和拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi)$ 在 V_i 中的平均值记为

$$\partial_\mu\Phi_i\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\partial_\mu\Phi,\quad \mathcal{L}_i\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi), \tag{2.47}$$

当 $V_i\to 0$ 时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu\Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i,\partial_\mu\Phi_i)$。拉格朗日量表达为

$$L(t)=\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}=\sum_i\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}=\sum_i V_i\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}=\sum_i V_i\,\mathcal{L}_i(\Phi_i,\partial_\mu\Phi_i). \tag{2.48}$$

根据定义式 (1.157)，体积元 V_i 中的广义动量是[1]

$$\Pi_i(t)=\frac{\partial L}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=\sum_j V_j\frac{\partial\mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=\sum_j V_j\delta_{ji}\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=V_i\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}. \tag{2.49}$$

根据 (2.45) 式，等时对易关系为

$$[\Phi_i(t),\Pi_j(t)]=\mathrm{i}\delta_{ij},\quad [\Phi_i(t),\Phi_j(t)]=0,\quad [\Pi_i(t),\Pi_j(t)]=0. \tag{2.50}$$

引入

$$\pi_i(t)\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=\frac{\Pi_i(t)}{V_i}, \tag{2.51}$$

则第一条和第三条等时对易关系可用 $\pi_i(t)$ 表达为

$$[\Phi_i(t),\pi_j(t)]=\mathrm{i}\,\frac{\delta_{ij}}{V_j},\quad [\pi_i(t),\pi_j(t)]=0. \tag{2.52}$$

从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数。**Dirac $\boldsymbol{\delta}$ 函数**定义为

$$\boxed{\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}} \tag{2.53}$$

而且满足

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\delta(x)=1.} \tag{2.54}$$

[1]此处未使用 Einstein 求和约定。

从而，对于任意连续函数 $f(x)$，有

$$\boxed{f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-y).} \tag{2.55}$$

这是 δ 函数的**挑选性**：$f(x)$ 与 $\delta(x-y)$ 相乘之后，通过积分挑选出 $f(x)$ 在 $x=y$ 处的值 $f(y)$。$\delta(x)$ 是偶函数，即

$$\delta(x)=\delta(-x), \tag{2.56}$$

而且满足

$$\begin{aligned} f(x)\delta(x-y) &= f(y)\delta(x-y), && (2.57)\\ x\,\delta(x) &= 0, && (2.58)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}px} &= 2\pi\,\delta(p). && (2.59)\end{aligned}$$

第二式 $x\delta(x)=\delta(x)/x^{-1}=0$ 意味着在 $x=0$ 处 $\delta(x)$ 的奇性弱于 x^{-1} 的奇性。这里约定，一元函数 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**为

$$\tilde{f}(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}f(x), \tag{2.60}$$

而 **Fourier 逆变换**为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\tilde{f}(p). \tag{2.61}$$

(2.59) 式表明，$2\pi\,\delta(p)$ 是 $f(x)=1$ 的 Fourier 变换。对于连续的实值函数 $f(x)$，若方程 $f(x)=0$ 具有若干个分立的单根 x_i，则复合 δ 函数 $\delta[f(x)]$ 表达为

$$\boxed{\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}.} \tag{2.62}$$

用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 $\boldsymbol{\delta}$ 函数**

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x})=\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3), \tag{2.63}$$

其中 $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$。那么，函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0})=+\infty$，并满足 $\int\mathrm{d}^3x\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})=1$。对于任意连续函数 $f(\mathbf{x})$，有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) &= \int\mathrm{d}^3x\, f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), && (2.64)\\ f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), && (2.65)\\ \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}. && (2.66)\end{aligned}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是关于 $\mathbf{x}$ 的偶函数，$\delta^{(3)}(\mathbf{x})=\delta^{(3)}(-\mathbf{x})$。由 (2.59) 式推出

$$\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=\int\mathrm{d}x^1\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^1x^1}\int\mathrm{d}x^2\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^2x^2}\int\mathrm{d}x^3\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^3x^3}=2\pi\,\delta(p^1)\cdot2\pi\,\delta(p^2)\cdot2\pi\,\delta(p^3), \tag{2.67}$$

可见三维 δ 函数满足

$$\boxed{\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}).} \tag{2.68}$$

在三维空间中，函数 $f(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换是

$$\boxed{\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}),} \tag{2.69}$$

逆变换是

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{p}).} \tag{2.70}$$

因此，$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 是 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的 Fourier 变换。

设 f_i 是 $f(\mathbf{x})$ 在 V_i 上的平均值，有

$$f_i = \sum_j f_j\, \delta_{ij} = \sum_j V_j\, f_j\, \frac{\delta_{ij}}{V_j}. \tag{2.71}$$

将 (2.64) 式改写为

$$f(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.72}$$

它是 (2.71) 式在 $V_i \to 0$ 时的极限形式。也就是说，在连续极限下，

$$\frac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.73}$$

另一方面，在此极限下，$\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$，从而 $\pi_i(t)$ 变成由 (1.168) 式定义的共轭动量密度，

$$\pi_i(t) = \frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t). \tag{2.74}$$

因此，等时对易关系 (2.50) 和 (2.52) 化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{2.75}$$

推广到包含若干个场 Φ_a 的系统，假设不同的场相互独立，则

$$\boxed{[\Phi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\Phi_a(\mathbf{x},t),\Phi_b(\mathbf{y},t)] = 0, \quad [\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = 0.} \tag{2.76}$$

这就是**量子场论中的正则对易关系**，它是场的正则量子化的出发点。此时，系统的正则变量 $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_a(\mathbf{x},t)$ 都是 Hilbert 空间上的算符。

2.3 实标量场的正则量子化

如果场 $\phi(x)$ 是 Lorentz 标量，就称它为**标量场**。在固有保时向 Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$，则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\boxed{\phi'(x') = \phi(x).} \tag{2.77}$$

在本节中，我们讨论**实标量场** $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) **条件**

$$\boxed{\phi^\dagger(x) = \phi(x).} \tag{2.78}$$

量子化之后，$\phi(x)$ 是一个厄米算符。

假设 $\phi(x)$ 是不参与相互作用的自由实标量场，相应的 **Lorentz 不变拉氏量**是

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2,} \tag{2.79}$$

其中 $m > 0$ 是实标量场的**质量**。第一项是动能项，第二项是质量项。注意到

$$\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2], \tag{2.80}$$

有

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi, \tag{2.81}$$

归纳起来得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi. \tag{2.82}$$

因此，Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi, \tag{2.83}$$

也就是说，$\phi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程** [1, 2]

$$\boxed{(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0.} \tag{2.84}$$

这是自由实标量场的经典运动方程。

根据 (1.168) 式，实标量场 $\phi(x)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi(x), \tag{2.85}$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的时间导数。由自共轭条件 (2.78) 得

$$\pi^\dagger(x) = \pi(x). \tag{2.86}$$

如果在拉氏量 (2.79) 的动能项中不引入 1/2 因子，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0\phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)。在动能项中引入 1/2 因子之后，质量项也必须引入 1/2 因子，否则 Klein-Gordon 方程中的质量不是 m，而是 $\sqrt{2}\,m$。

现在，把正则变量 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 看作 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足**等时对易关系**

$$\boxed{[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] = 0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0.} \tag{2.87}$$

这种做法称为**正则量子化**。

2.3.1　平面波展开

在量子力学中，无界空间里单粒子波函数 Ψ 的**平面波解** (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \exp(-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}). \tag{2.88}$$

由

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = E\exp(-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) = E\Psi,\quad -\mathrm{i}\nabla\Psi = \mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{p}\Psi \tag{2.89}$$

可知，$\hat{E} = \mathrm{i}\partial/\partial t$ 是能量微分算符，

$$\hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\nabla \tag{2.90}$$

是动量微分算符。组合起来，**四维动量微分算符**是

$$\boxed{\hat{p}^\mu = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \mathrm{i}\partial^\mu.} \tag{2.91}$$

将平面波解改写成 $\Psi(x) = \exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$，其中 $p^\mu = (E,\mathbf{p})$，$x^\mu = (t,\mathbf{x})$，则

$$\mathrm{i}\partial^\mu\Psi = \mathrm{i}\partial^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} = p^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} = p^\mu\Psi. \tag{2.92}$$

因此，p^μ 是 $\hat{p}^\mu = \mathrm{i}\partial^\mu$ 的本征值，平面波解 $\Psi(x) = \exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 描述四维动量为 p^μ 的粒子。

现在讨论量子场论的情况。在无界空间中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 Klein-Gordon 方程具有平面波解

$$\varphi(x) = \exp(-\mathrm{i}k\cdot x), \tag{2.93}$$

其中四维动量 $k^\mu = (k^0,\mathbf{k})$，而 k^0 与 $\mathbf{k}$ 之间的关系由 Klein-Gordon 方程决定。那么，

$$\partial^2\varphi = \partial^\mu\partial_\mu\varphi = \partial^\mu(-\mathrm{i}k_\mu\varphi) = (-\mathrm{i})^2k_\mu k^\mu\varphi = -k^2\varphi, \tag{2.94}$$

从而将 Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(k^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi. \tag{2.95}$$

这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$，其中

$$E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0. \tag{2.96}$$

因此，对于固定的 $\mathbf{k}$，有两个线性独立的平面波解。

(1) $k^0 = E_{\mathbf{k}}$ 对应于**正能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = \exp[-\mathrm{i}(k^0 x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = \exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \tag{2.97}$$

(2) $k^0 = -E_{\mathbf{k}}$ 对应于**负能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) = \exp[-\mathrm{i}(k^0 x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = \exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \tag{2.98}$$

于是，满足 Klein-Gordon 方程的场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的一般解可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) + \tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right],\end{aligned} \tag{2.99}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的算符，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是归一化因子。这是一个形式为 *Fourier* 积分的平面波展开式，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维动量空间中无穷多个动量**模式** (mode) 的叠加。取上式的厄米共轭，得

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{-\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned} \tag{2.100}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的 $\mathbf{k}$ 替换成 $-\mathbf{k}$ 不会改变积分的结果，而 $E_{-\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}$。于是，自共轭条件 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t)$ 意味着

$$\tilde{a}_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}^\dagger. \tag{2.101}$$

注意，由上式可以推出 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = a_{-\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger = a_{\mathbf{k}}$。因而

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned} \tag{2.102}$$

第二步对方括号中第二项作变量替换 $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$。

把动量记号 $\mathbf{k}$ 替换成 $\mathbf{p}$，将 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**平面波展开式**整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right),} \tag{2.103}$$

其中 $p\cdot x = p^0 t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$，且 $p^0 > 0$，满足**质壳条件**

$$\boxed{p^0 = E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}\,.} \tag{2.104}$$

$a_{\mathbf{p}}$ 是**湮灭算符**，对应于正能解 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$；$a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 是**产生算符**，对应于负能解 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$。根据 (2.85) 式，共轭动量密度算符的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x},t) = \partial_0\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.105}$$

2.3.2　产生湮灭算符的对易关系

在三维空间中对 $\phi(\mathbf{x},t)$ 作 *Fourier* 变换，有

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]. \tag{2.106}$$

相比于 Fourier 变换公式 (2.69)，这里用 $\mathbf{q}$ 作为 Fourier 变换的变量，并多乘了一个 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q^0t}$ 因子，其中 $q^0=E_{\mathbf{q}}$，使指数因子变成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q^0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$。由 (2.68) 式得

$$\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p-q)\cdot x}=\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}=(2\pi)^3\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{2.107}$$

$$\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p+q)\cdot x}=(2\pi)^3\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}). \tag{2.108}$$

故

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(a_{\mathbf{q}}+a_{-\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right),\end{aligned} \tag{2.109}$$

在第一步中，$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，$q^0=\sqrt{|\mathbf{q}|^2+m^2}$，两个三维 δ 函数分别要求 $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$，都导致 $p^0=q^0$，利用 (2.64) 式对 d^3p 积分即得第二步结果。类似地，$\pi(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\&=\int\mathrm{d}^3p\,\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})-a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\&=\frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(a_{\mathbf{q}}-a_{-\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right).\end{aligned} \tag{2.110}$$

从而

$$\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}[\pi(x)-\mathrm{i}q_0\phi(x)]=\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi(x)-\mathrm{i}q_0\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x)=\frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}a_{\mathbf{q}}=-\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{q}}, \tag{2.111}$$

即

$$a_{\mathbf{p}}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\pi(x)-\mathrm{i}p_0\phi(x)\right]. \tag{2.112}$$

对上式两边取厄米共轭，并使用自共轭条件 $\phi^{\dagger}=\phi$ 和 $\pi^{\dagger}=\pi$，得

$$a_{\mathbf{p}}^{\dagger}=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[\pi(x)+\mathrm{i}p_0\phi(x)\right]. \tag{2.113}$$

利用上面两个表达式和等时对易关系 (2.87)，令

$$x^0=y^0=t, \tag{2.114}$$

推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)\}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \left[\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{\mathrm{i}q_0[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left[-\mathrm{i}(p_0+q_0)\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{2.115}
$$

倒数第二步用到 (2.64) 式，最后一步用到 (2.68) 式。根据 δ 函数的性质 (2.65)，有

$$
\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{q}})t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.116}
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.117}
$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)}[\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{-\mathrm{i}q_0[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]\right\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}(p_0-q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{2.118}
$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 只在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处非零，取值为 $+\infty$，而 $E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处取值为零。由于 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处奇性比较弱，有

$$
(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0, \tag{2.119}
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0. \tag{2.120}
$$

此外，

$$
[a_{\mathbf{p}}^{\dagger}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}}^{\dagger} - a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = (a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})^{\dagger} = [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}]^{\dagger} = 0. \tag{2.121}
$$

因此，我们可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的乘积次序，即 $a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}$，$a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}}^{\dagger} = a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$。

综上，**产生湮灭算符满足对易关系**

$$
\boxed{[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^{\dagger}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = 0,} \tag{2.122}
$$

其中非零的对易子仅出现在 $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ 时的第一式中。这是对易关系 (2.5) 和 (2.6) 在量子场论中的推广。

2.3.3　哈密顿量和总动量

注意到 $\pi = \partial_0\phi$，根据定义式 (1.170) 将自由实标量场的哈密顿量密度表达为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]. \tag{2.123}$$

从而哈密顿量算符是

$$H = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]. \tag{2.124}$$

另一方面，根据 (1.217) 式，实标量场的总动量算符是

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x\,\pi\partial^i\phi. \tag{2.125}$$

利用等时对易关系 (2.87)，推出对易关系

$$\begin{aligned}
[\phi(x), H] &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi^2(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3y\,\{\pi(\mathbf{y},t)[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] + [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\pi(\mathbf{y},t)\} \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\,\pi(\mathbf{y},t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathrm{i}\pi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^0\phi(x),
\end{aligned} \tag{2.126}$$

$$\begin{aligned}
[\phi(x), P^i] &= \int \mathrm{d}^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(\mathbf{y},t)] = \int \mathrm{d}^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(\mathbf{y},t) \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(\mathbf{y},t) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^i\phi(x).
\end{aligned} \tag{2.127}$$

引入四维动量算符

$$\boxed{P^\mu = (H, \mathbf{P}),} \tag{2.128}$$

将上面两个对易关系合起来写成

$$\boxed{[\phi(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu\phi(x).} \tag{2.129}$$

可见，场算符 $\phi(x)$ 与四维动量算符 P^μ 的对易子相当于用四维动量微分算符 $\mathrm{i}\partial^\mu$ 对实标量场 $\phi(x)$ 进行求导。

将平面波展开式 (2.103) 和 (2.105) 代入 (2.124) 式，哈密顿量算符化为

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\Big\{[(-\mathrm{i}p_0)(-\mathrm{i}q_0) + (\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})]\left(a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_\mathbf{q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - a_\mathbf{q}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad + m^2\left(a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_\mathbf{q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} + a_\mathbf{q}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\Big\{(p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (-p_0q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})(-p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[(E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right) \\
&\qquad +(-E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{2.130}
$$

倒数第二步用到 (2.107) 和 (2.108) 式。由质壳条件 (2.104) 得 $-E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2=0$，故最后表达式方括号中第二项没有贡献。从而由对易关系 (2.122) 推出

$$
H=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left[2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p})\right], \tag{2.131}
$$

即

$$
\boxed{H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}.} \tag{2.132}
$$

这个结果可以看作一维简谐振子哈密顿量 (2.9) 向无穷多个连续自由度的推广。半正定算符

$$
N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \tag{2.133}
$$

是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的**粒子数密度算符**，每个粒子贡献的能量是 $E_{\mathbf{p}}$。在 (2.132) 式中，第一项代表所有动量模式所有粒子贡献的能量之和。对 (2.68) 式取 $\mathbf{p}=\mathbf{0}$，得到

$$
\boxed{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})=\int\mathrm{d}^3x=\tilde{V},} \tag{2.134}
$$

其中 $\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积。对于全空间积分而言，$\tilde{V}$ 是无穷大的。因此，(2.132) 式的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，它是实标量场的**零点能**（即**真空能**），是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和。(2.31) 式之后的讨论表明，一维简谐振子的零点能为 $E_0=\omega/2$。这是自由度为 1 时的结果，推广到无穷多自由度自然会得到正无穷大的零点能。如果不讨论引力现象，这个零点能通常并不重要，因为实验上只能测量两个能量之差。经过正则量子化之后，实标量场的哈密顿量 H 是正定算符，不存在负能量困难。

尽管 (2.124) 式被积函数中的 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 依赖于时间 t，但哈密顿量算符 H 的计算结果 (2.132) 式却不依赖于 t，这是**能量守恒定律**的体现。

依照对易子公式 (2.12)，哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$
\begin{aligned}
[H,a_{\mathbf{p}}^\dagger] &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}^\dagger]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}\left(a_{\mathbf{q}}^\dagger[a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}^\dagger]+[a_{\mathbf{q}}^\dagger,a_{\mathbf{p}}^\dagger]a_{\mathbf{q}}\right) \\
&= \int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})=E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger, \\
[H,a_{\mathbf{p}}] &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}\left(a_{\mathbf{q}}^\dagger[a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}]+[a_{\mathbf{q}}^\dagger,a_{\mathbf{p}}]a_{\mathbf{q}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.135}
$$

$$= -\int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}, \tag{2.136}$$

故

$$H a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad H a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \tag{2.137}$$

设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E，本征方程表达为

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \tag{2.138}$$

从而，

$$H a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle = (a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger)|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle, \tag{2.139}$$

$$H a_{\mathbf{p}} |E\rangle = (a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}})|E\rangle = (E-E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}} |E\rangle. \tag{2.140}$$

可见，当 $a_{\mathbf{p}}^\dagger|E\rangle \neq 0$ 时，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 的作用是使能量本征值增加 $E_{\mathbf{p}}$；当 $a_{\mathbf{p}}|E\rangle \neq 0$ 时，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是使能量本征值减少 $E_{\mathbf{p}}$。

将平面波展开式 (2.103) 和 (2.105) 代入 (2.125) 式，总动量算符化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\, \pi \nabla\phi = -\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (-\mathrm{i}p_0)\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\, p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\, p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad\qquad - \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\, E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right).
\end{aligned} \tag{2.141}$$

先作变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，再利用对易关系 (2.122)，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right) &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(-\mathbf{p})\left(a_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right),
\end{aligned} \tag{2.142}$$

这个积分等于自身的相反数，因而积分结果必为零。可见，(2.141) 式最后一步圆括号中最后两项没有贡献。从而，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left[2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{2.143}$$

由于 $\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} = \int \mathrm{d}^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}$，上式最后一步第二项没有贡献。于是，

$$\boxed{\mathbf{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}},} \tag{2.144}$$

即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和。上式不依赖于时间 t，这是动量守恒定律的体现。

$\mathbf{P}$ 与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \mathrm{d}^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger, \tag{2.145}$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}]a_{\mathbf{q}} = -\int \mathrm{d}^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}, \tag{2.146}$$

即

$$\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad \mathbf{P}a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}\mathbf{P} - \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}. \tag{2.147}$$

2.3.4 粒子态

引入真空态 $|0\rangle$，要求它满足

$$\boxed{a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = 0,} \tag{2.148}$$

其中湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的动量 $\mathbf{p}$ 是任意的。归一化条件为

$$\boxed{\langle 0|0\rangle = 1.} \tag{2.149}$$

根据哈密顿量 H 的表达式 (2.132)，将 H 作用到真空态上，得

$$H\,|0\rangle = E_{\mathrm{vac}}\,|0\rangle\,, \quad E_{\mathrm{vac}} = \delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}, \tag{2.150}$$

可见 $|0\rangle$ 的能量本征值是零点能 E_{vac}。这意味着真空态是能量最低的态。此外，根据 (2.144) 式，$|0\rangle$ 的动量本征值是零矢量：

$$\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle\,, \tag{2.151}$$

即真空态不具有动量。

接着，定义单粒子态

$$\boxed{|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger\,|0\rangle\,,} \tag{2.152}$$

其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是归一化因子。根据 (2.139) 式，有

$$H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}\rangle\,, \tag{2.153}$$

另一方面，由 (2.147) 式得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger})\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\,. \tag{2.154}$$

可以看出，相比于真空态 $|0\rangle$，单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$，也多了一份动量 $\mathbf{p}$。因此，$|\mathbf{p}\rangle$ 描述的是一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子，这个粒子的能量为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$，满足狭义相对论中的色散关系 (1.83)，而拉氏量 (2.79) 中实标量场的质量 m 就是粒子的**质量**。可以看到，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子。

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$a_{\mathbf{p}}\,|\mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle\,. \tag{2.155}$$

如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零；如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态。可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子。

单粒子态的内积为

$$\langle\mathbf{q}\,|\,\mathbf{p}\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle\,, \tag{2.156}$$

利用 (2.65) 式推出

$$\boxed{\langle\mathbf{q}\,|\,\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).} \tag{2.157}$$

上式是 *Lorentz* 不变的，这是 (2.152) 式中归一化因子取成 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的原因，相关证明如下。

证明　引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\boxed{\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}} \tag{2.158}$$

对于满足质壳条件 (1.79) 的四维动量 p^μ，p^0 的符号在任意惯性系中不会改变（参考习题 1.3），即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变。一个物理粒子的四维动量 p^μ 满足 Lorentz 不变的质壳条件 $p^2 - m^2 = 0$ 且能量为正 $(p^0 > 0)$。类似于 d^4x，四维动量空间中的体积元 d^4p 也是 Lorentz 不变量。因此，任意 Lorentz 标量函数 $F(p)$ 在物理动量区域上的 Lorentz 不变积分表达为

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p) &= \int \mathrm{d}^3p \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p^0\,\delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p}) \\ = \int \mathrm{d}^3p \int_0^{+\infty} \mathrm{d}p^0\,\frac{\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}\,F(p^0,\mathbf{p}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p}).\end{aligned} \tag{2.159}$$

第二步用到 (2.62) 式，$\theta(p^0)$ 将 p^0 积分约束在区间 $(0,+\infty)$ 上，因而一元二次方程 $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$ 的两个根中只有正根 $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}$ 对积分有贡献，而

$$\left.\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = 2p^0\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = 2E_{\mathbf{p}}\,. \tag{2.160}$$

由于 (2.159) 式最左边的积分是 Lorentz 不变量，最右边的积分也必定是 Lorentz 不变量，从而 $F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})$ 是 Lorentz 标量意味着

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}} \tag{2.161}$$

是 Lorentz 不变量。上式是 **Lorentz 不变的动量空间体积元**。对任意 Lorentz 标量函数 $g(\mathbf{q})$，根据 δ 函数的挑选性，有

$$g(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}^3p\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p}). \tag{2.162}$$

由于上式最左边和最右边都是 Lorentz 不变的，

$$\boxed{2E_{\mathbf{p}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})} \tag{2.163}$$

必定是 Lorentz 不变的。**证毕**。

单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的自我内积 $\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 是**发散** (divergent) 的，原因在于产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ 是我们在无界空间中讨论量子场平面波解时定义的。内积有限的粒子态可通过构造**波包** (wave packet) 得到，见习题 2.3。

将标量场算符 (2.103) 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到态矢

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x})\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}}{2E_{\mathbf{q}}}|\mathbf{q}\rangle\,. \tag{2.164}$$

可见，$\phi(x)\,|0\rangle$ 是所有动量模式对应的单粒子态的叠加态。它与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}}{2E_{\mathbf{q}}}\langle\mathbf{p}\,|\,\mathbf{q}\rangle = \int \mathrm{d}^3q\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{2.165}$$

回顾量子力学，单粒子位置本征态 $|\mathbf{x}\rangle$ 与动量本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ 之间的内积为

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{2.166}$$

其中 $(2\pi)^{-3/2}$ 是归一化因子。两个内积的形式相似。因此，$\phi(x)\,|0\rangle$ 类似于 $t = x^0$ 时刻的单粒子位置本征态，$\phi(x)$ 作用在 $|0\rangle$ 上相当于在时空点 $x^\mu = (t,\mathbf{x})$ 处产生一个粒子。可以看出，在平面波展开式 (2.103) 中将归一化因子取为 $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 有助于使内积 (2.165) 具有 *Lorentz* 不变的形式。

进一步，定义动量分别是 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 的 n 个粒子对应的**多粒子态**为

$$|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle\,,\quad C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}\cdots\sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\,. \tag{2.167}$$

根据 (2.137) 式，H 对它的作用给出

$$H\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\rangle = C_1 H a^\dagger_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle = C_1(a^\dagger_{\mathbf{p}_1}H + E_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_1})a^\dagger_{\mathbf{p}_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger H a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle + E_{\mathbf{p}_1} |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger H \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= \cdots = C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger H |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle .
\end{aligned} \tag{2.168}
$$

同理，$\mathbf{P}$ 对它的作用给出

$$
\mathbf{P} |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle . \tag{2.169}
$$

也就是说，多粒子态 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$ 的能量本征值和动量本征值直接由各个粒子的能量和动量叠加贡献。

由对易关系 (2.122) 得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle .
\end{aligned} \tag{2.170}
$$

可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的。这说明实标量场描述的粒子是一种玻色子，称之为**标量玻色子** (scalar boson)，服从 **Bose-Einstein 统计** [12]。得到这个结论的关键在于两个产生算符相互对易。

双粒子态的内积为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \langle 0| a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle \\
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0| a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle + \langle 0| a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle\right] \\
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0| a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0| a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger |0\rangle\right] \\
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^6\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + (2\pi)^6\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2)\right] \\
&= 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)\right] .
\end{aligned} \tag{2.171}
$$

此内积仅在两种条件下非零，一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2$，另一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$。

定义动量均为 $\mathbf{q}$ 的 $n_\mathbf{q}$ 个粒子对应的多粒子态

$$
|n_\mathbf{q}\rangle \equiv C_2 (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}} |0\rangle , \quad C_2 = (2E_\mathbf{q})^{n_\mathbf{q}/2}, \tag{2.172}
$$

则粒子数密度算符 $N_\mathbf{p} = a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}$ 对它的作用为

$$
\begin{aligned}
N_\mathbf{p} |n_\mathbf{q}\rangle &= C_2 a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}} |0\rangle = C_2 a_\mathbf{p}^\dagger \left[a_\mathbf{q}^\dagger a_\mathbf{p} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})\right] (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}^\dagger a_\mathbf{p} (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}-1} |0\rangle + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_\mathbf{p}^\dagger (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a_\mathbf{p}^\dagger (a_\mathbf{q}^\dagger)^2 a_\mathbf{p} (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}-2} |0\rangle + 2(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_\mathbf{p}^\dagger (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}-1} |0\rangle \\
&= \cdots = C_2 a_\mathbf{p}^\dagger (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}} a_\mathbf{p} |0\rangle + n_\mathbf{q}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_\mathbf{p}^\dagger (a_\mathbf{q}^\dagger)^{n_\mathbf{q}-1} |0\rangle
\end{aligned}
$$

$$= n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}\left|0\right\rangle. \tag{2.173}$$

在动量空间对粒子数密度算符进行积分，得到粒子数算符

$$N \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \tag{2.174}$$

由 (2.173) 式得

$$\begin{aligned} N\left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}}\left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1}\left|0\right\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}\left|0\right\rangle = n_{\mathbf{q}}\left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.175}$$

因此，$\left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle$ 是 N 的本征态，本征值为粒子数 $n_{\mathbf{q}}$。

更一般地，定义多粒子态

$$\left|n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \equiv C_3 (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}}\left|0\right\rangle, \quad C_3 = \prod_{i=1}^m (2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}. \tag{2.176}$$

它描述动量为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m$ 的粒子分别有 $n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}$ 个的状态。此时，有

$$\begin{aligned} & N\left|n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} C_3 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}}\left|0\right\rangle \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} C_3 \Big[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}}\left|0\right\rangle \\ & \qquad + n_{\mathbf{p}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}-1} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}}\left|0\right\rangle \Big] \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}}\left|0\right\rangle \right] + n_{\mathbf{p}_1}\left|n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \\ =& \cdots = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} a_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle \right] \\ & \qquad + (n_{\mathbf{p}_1} + n_{\mathbf{p}_2} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m})\left|n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \\ =& (n_{\mathbf{p}_1} + n_{\mathbf{p}_2} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m})\left|n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.177}$$

可见，N 确实是描述总粒子数的算符。

2.4 复标量场的正则量子化

在本节中，我们讨论复标量场 $\phi(x)$，它不满足自共轭条件 (2.78)，即

$$\phi^\dagger(x) \neq \phi(x). \tag{2.178}$$

自由复标量场的拉氏量具有 1.7.4 小节中 (1.253) 式的形式。不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把那里的复共轭符号 $*$ 改成厄米共轭符号 $\dagger$，故 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi,} \tag{2.179}$$

其中 $m>0$ 是复标量场的质量。$\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(x)$ 线性独立，它们是两个独立的正则变量，注意到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}=\partial^\mu\phi,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=-m^2\phi,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\partial^\mu\phi^\dagger,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-m^2\phi^\dagger, \tag{2.180}$$

由 Euler-Lagrange 方程 (1.167) 推出经典运动方程

$$(\partial^2+m^2)\phi(x)=0,\quad (\partial^2+m^2)\phi^\dagger(x)=0. \tag{2.181}$$

也就是说，$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 均满足 Klein-Gordon 方程。

可以将复标量场 $\phi(x)$ 分解为两个实标量场 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 的线性组合：

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2),\quad \phi^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2). \tag{2.182}$$

从而，拉氏量 (2.179) 化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}[\partial^\mu(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2)]\partial_\mu(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)-\frac{1}{2}m^2(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2)(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)\\&=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1)\partial_\mu\phi_1-\frac{1}{2}m^2\phi_1^2+\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2)\partial_\mu\phi_2-\frac{1}{2}m^2\phi_2^2.\end{aligned} \tag{2.183}$$

与 (2.79) 式比较可知，复标量场的拉氏量相当于两个质量相同的实标量场的拉氏量。

2.4.1　平面波展开

对于复标量场，我们可以遵循 2.3.1 小节中的方法讨论它的平面波展开式，区别在于不能够应用自共轭条件。从而，场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的一般解也具有 (2.99) 式的形式，即

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t)&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned} \tag{2.184}$$

第二步对方括号中第二项作变量替换 $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$。由于复标量场不满足自共轭条件 (2.78)，算符 $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$ 与 $a_\mathbf{k}$ 之间没有什么关系，改记为

$$b_\mathbf{k}^\dagger\equiv\tilde{a}_{-\mathbf{k}}, \tag{2.185}$$

则展开式变成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]. \tag{2.186}$$

把动量记号 $\mathbf{k}$ 替换成 $\mathbf{p}$，将 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right),} \tag{2.187}$$

其中 p^0 满足质壳条件

$$p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0. \tag{2.188}$$

取厄米共轭，就得到 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.189}$$

现在，$a_\mathbf{p}$ 和 $b_\mathbf{p}$ 是两个相互独立的湮灭算符，而 $a_\mathbf{p}^\dagger$ 和 $b_\mathbf{p}^\dagger$ 是两个相互独立的产生算符。

根据 (1.168) 式，$\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{2.190}$$

$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.191}$$

$\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为厄米共轭。依照 (2.76) 式，等时对易关系为

$$\boxed{\begin{aligned}&[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0,\\&[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0,\\&[\phi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=[\phi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0.\end{aligned}} \tag{2.192}$$

利用这些关系可推出以下产生湮灭算符的对易关系：

$$\boxed{\begin{aligned}&[a_\mathbf{p},a_\mathbf{q}^\dagger]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad[a_\mathbf{p},a_\mathbf{q}]=[a_\mathbf{p}^\dagger,a_\mathbf{q}^\dagger]=0,\\&[b_\mathbf{p},b_\mathbf{q}^\dagger]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad[b_\mathbf{p},b_\mathbf{q}]=[b_\mathbf{p}^\dagger,b_\mathbf{q}^\dagger]=0,\\&[a_\mathbf{p},b_\mathbf{q}^\dagger]=[b_\mathbf{p},a_\mathbf{q}^\dagger]=[a_\mathbf{p},b_\mathbf{q}]=[a_\mathbf{p}^\dagger,b_\mathbf{q}^\dagger]=0.\end{aligned}} \tag{2.193}$$

具体推导过程见 2.4.2 小节选读内容。这些对易关系说明 $(a_\mathbf{p},a_\mathbf{p}^\dagger)$ 和 $(b_\mathbf{p},b_\mathbf{p}^\dagger)$ 是两套相互独立的产生湮灭算符，描述两种不同的标量玻色子。

2.4.2 选读：推导产生湮灭算符的对易关系

本小节推导产生湮灭算符的对易关系 (2.193)。

利用

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int\mathrm{d}^3x\left[a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})+b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q}+b_{-\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right)\end{aligned} \tag{2.194}$$

和

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi^\dagger(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-b_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\ &= \int \mathrm{d}^3p\,\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})-b_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\ &= \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(a_{\mathbf{q}}-b_{-\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right),\end{aligned}\tag{2.195}$$

推出

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}(\pi^\dagger-\mathrm{i}q_0\phi)=\frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,a_{\mathbf{q}}=-\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{q}}.\tag{2.196}$$

于是

$$a_{\mathbf{p}}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}(\pi^\dagger-\mathrm{i}p_0\phi),\quad a_{\mathbf{p}}^\dagger=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}(\pi+\mathrm{i}p_0\phi^\dagger).\tag{2.197}$$

令 $x^0=y^0=t$，有

$$\begin{aligned}[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t)-\mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t)+\mathrm{i}q_0\phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\left\{\mathrm{i}q_0[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]-\mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}(p_0+q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\ &= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}=\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\\ &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\end{aligned}\tag{2.198}$$

以及

$$[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}]=\frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t)-\mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi^\dagger(\mathbf{y},t)-\mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)\right]=0.\tag{2.199}$$

对上式取厄米共轭，可推出 $[a_{\mathbf{p}}^\dagger,a_{\mathbf{q}}^\dagger]=0$。

另一方面，由

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi^\dagger(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})+a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(b_{\mathbf{q}}+a_{-\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right)\end{aligned}\tag{2.200}$$

和

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^3 p \, \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[b_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \right] \\
&= \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \left(b_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0 t} \right),
\end{aligned} \tag{2.201}
$$

得

$$
\int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} (\pi - \mathrm{i}q_0 \phi^\dagger) = \frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} b_{\mathbf{q}} = -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \, b_{\mathbf{q}}. \tag{2.202}
$$

于是

$$
b_{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} (\pi - \mathrm{i}p_0 \phi^\dagger), \quad b_{\mathbf{p}}^\dagger = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} (\pi^\dagger + \mathrm{i}p_0 \phi). \tag{2.203}
$$

从而，有

$$
\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \left[\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 \phi^\dagger(\mathbf{x},t), \ \pi^\dagger(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0 \phi(\mathbf{y},t) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{ \mathrm{i}q_0 [\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0 [\phi^\dagger(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)] \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 + q_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),
\end{aligned} \tag{2.204}
$$

以及

$$
[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)} \left[\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 \phi^\dagger(\mathbf{x},t), \ \pi(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0 \phi^\dagger(\mathbf{y},t) \right] = 0. \tag{2.205}
$$

对上式取厄米共轭，可推出 $[b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$。

此外，还有

$$
[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 \phi(\mathbf{x},t), \ \pi^\dagger(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0 \phi(\mathbf{y},t) \right] = 0, \tag{2.206}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)} \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 \phi(\mathbf{x},t), \ \pi(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0 \phi^\dagger(\mathbf{y},t) \right] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{ -\mathrm{i}q_0 [\pi^\dagger(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0 [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] \right\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.207}
$$

上式最后一步用到 (2.119) 式。对以上两式取厄米共轭，可推出 $[b_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$。

2.4.3　U(1) 整体对称性

类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x), \tag{2.208}$$

其中实常数 q 是 $\phi(x)$ 的 U(1) 荷，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的变换参数，则拉氏量 (2.179) 不变，系统具有 U(1) 整体对称性。相应的 **U(1) 守恒流算符**为

$$\boxed{J^\mu = \mathrm{i}q\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi,} \tag{2.209}$$

它满足守恒流方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$。J^μ 是一个厄米算符，满足

$$(J^\mu)^\dagger = \{\mathrm{i}q[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi]\}^\dagger = -\mathrm{i}q[(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi] = \mathrm{i}q\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi = J^\mu. \tag{2.210}$$

相应的 **U(1) 守恒荷算符**是

$$\begin{aligned}
Q &= \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^0}\phi = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi] = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi) \\
&= \mathrm{i}q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big[\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-\mathrm{i}E_{\mathbf{k}})\left(a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} - b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right) \\
&\qquad - (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}})\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right)\Big] \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}})\left[a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}})\left[b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\right]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\left[a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t}\right] \\
&\qquad + (E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})\left[b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t}\right]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger\right).
\end{aligned} \tag{2.211}$$

再利用对易关系 (2.193)，得到

$$\boxed{Q = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,q.} \tag{2.212}$$

上式第二项是零点荷。在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而粒子数密度算符 $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$。可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 U(1) 荷为 q，称为**正粒子**；$(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有相反的 U(1) 荷 $-q$，称为**反粒子**。因此，复标量场描述一对正反标量玻色子。除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和。这里单个粒子的 U(1) 荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是相加性的，并且来自于一种内部对称性，因而是一种**内部相加性量子数** (internal additive quantum number)。实际上，

任何反粒子的**所有内部相加性量子数**都与相应的正粒子**相反**。

(2.212) 式不依赖于时间 t，这是 **U(1) 荷守恒定律**的体现。

如果将复标量场 $\phi(x)$ 替换成量子力学的单粒子波函数 $\Psi(x)$，则

$$\frac{Q}{q} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi] \tag{2.213}$$

与单粒子概率密度 (1.3) 的全空间积分类似。但是，这里 Q/q 的本征值被解释为正粒子数与反粒子数之差，显然是可正可负的。也就是说，在量子场论中 Q/q 与单粒子在空间中的概率没有关系，不像量子力学那样存在负概率困难。

如果对实标量场作类似的 U(1) 整体变换，则自共轭条件 (2.78) 使得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x) = \phi'(x) = [\phi'(x)]^\dagger = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)]^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi(x). \tag{2.214}$$

上式要求 $q = 0$。因此，对实标量场不能进行非平庸的 U(1) 整体变换。实际上，自共轭条件使实标量场描述的粒子不能具有任何非零的内部相加性量子数，也就是说，正粒子与反粒子是相同的。这样的粒子称为**纯中性粒子** (truly neutral particle)。

经过进一步计算，得到自由复标量场的**哈密顿量算符**

$$\boxed{H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\left(a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}\right) + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}.} \tag{2.215}$$

除了零点能，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子贡献的能量之和。动量为 $\mathbf{p}$ 的正粒子和反粒子的能量都是 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$，可见，正反粒子具有相同的质量 m。另一方面，复标量场的**总动量算符**为

$$\boxed{\mathbf{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}).} \tag{2.216}$$

总动量是所有动量模式所有正反粒子贡献的动量之和。具体推导过程见 2.4.4 小节选读内容。

2.4.4 选读：推导哈密顿量和总动量

根据 (1.170) 和 (2.179) 式，复标量场的哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\partial_0\phi + \pi^\dagger\partial_0\phi^\dagger - \mathcal{L} = (\partial^0\phi^\dagger)\partial_0\phi + (\partial^0\phi)\partial_0\phi^\dagger - (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi + m^2\phi^\dagger\phi \\ &= (\partial^0\phi)\partial_0\phi^\dagger + (\nabla\phi^\dagger)\cdot\nabla\phi + m^2\phi^\dagger\phi.\end{aligned} \tag{2.217}$$

于是，哈密顿量算符表达为

$$H = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi + (\nabla\phi^\dagger)\cdot\nabla\phi + m^2\phi^\dagger\phi]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi + \nabla\cdot(\phi^\dagger\nabla\phi) - \phi^\dagger\nabla^2\phi + m^2\phi^\dagger\phi] \\
&= \int \mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi - \phi^\dagger\partial^0\partial_0\phi + \phi^\dagger(\partial^0\partial_0 - \nabla^2 + m^2)\phi] \\
&= \int \mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi - \phi^\dagger\partial^0\partial_0\phi + \phi^\dagger(\partial^2 + m^2)\phi]. \qquad (2.218)
\end{aligned}
$$

上式第三步用了分部积分，第四步扔掉了一个全散度，最后一步方括号里第三项可以通过 ϕ 的运动方程 (2.181) 消去。从而得到

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\,(\pi^\dagger\pi - \phi^\dagger\partial^0\partial_0\phi) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{(-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}})\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-\mathrm{i}E_{\mathbf{q}})\left(b_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad - \left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-E_{\mathbf{q}}^2)\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} + b_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[(E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + (E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad + (-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + (-E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\big[(E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\big] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\big[(-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (-E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\big]\Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,E_{\mathbf{p}}^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \\
&\qquad + (-a_{\mathbf{p}}b_{-\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + (-b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\Big[2b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} + 2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + 2(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \\
&\qquad + (-a_{\mathbf{p}}b_{-\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + (-b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + b_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}. \qquad (2.219)
\end{aligned}
$$

在倒数第二步中，对方括号中最后两项的积分作变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，将得到它们的相反数，因而这两项的贡献为零。这样就得到 (2.215) 式。

根据 (1.218) 式，复标量场的总动量算符为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\,(\pi\nabla\phi + \pi^\dagger\nabla\phi^\dagger) \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[-\mathrm{i}p_0\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\mathrm{i}\mathbf{q}\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad -\mathrm{i}q_0\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\mathrm{i}\mathbf{p}\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[(E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad - (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\qquad - (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[(E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\Big] \\
&\qquad - \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[(E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\Big]\Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger \\
&\qquad + (b_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + (a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger - b_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}(b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}) + \delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}). \qquad (2.220)
\end{aligned}
$$

这就是 (2.216) 式。

习　题

2.1 设算符 a 与其厄米共轭 $a^\dagger$ 满足反对易关系

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0, \qquad (2.221)$$

其中**反对易子**定义为 $\{A, B\} \equiv AB + BA$。记算符 $N \equiv a^\dagger a$ 的本征值为 n，本征态为 $|n\rangle$，即 $N|n\rangle = n|n\rangle$，归一化为 $\langle n|n\rangle = 1$。

(a) 证明 $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ 和 $[N, a] = -a$。

(b) 证明本征值 n 只能取 0 和 1，而且

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{1-n}\,|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle. \qquad (2.222)$$

2.2 已知产生湮灭算符的对易关系 (2.122) 以及 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 和 $\pi(\mathbf{x}, t)$ 的平面波展开式 (2.103) 和 (2.105)，推出等时对易关系 (2.87)。

2.3 用实标量场的单粒子态 (2.152) 构造波包，设

$$|\Psi_{\mathbf{p}}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}|\mathbf{q}\rangle, \qquad (2.223)$$

其中函数 $F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$ 满足

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} |F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})|^2 = 1, \quad \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} |F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})|^2 \mathbf{q} = \mathbf{p}. \tag{2.224}$$

求内积 $\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \Psi_{\mathbf{p}} \rangle$ 和总动量算符期待值 $\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \mathbf{P} | \Psi_{\mathbf{p}} \rangle$。

2.4 将实标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式 (2.103) 代入对易关系 (2.129)，推出

$$[P^\mu, a_{\mathbf{p}}] = -p^\mu a_{\mathbf{p}}, \quad [P^\mu, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = p^\mu a_{\mathbf{p}}^\dagger. \tag{2.225}$$

2.5 对于自由实标量场 $\phi(x)$，根据 1.7.3 小节关于 Noether 定理的讨论，Lorentz 对称性给出的守恒荷算符为

$$J^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^3 x (T^{0\nu} x^\mu - T^{0\mu} x^\nu), \tag{2.226}$$

其中

$$T^{00} = \mathcal{H} = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2], \quad T^{0i} = \pi \partial^i \phi. \tag{2.227}$$

利用等时对易关系 (2.87) 推出

$$[\phi(x), J^{\mu\nu}] = \mathrm{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)\phi(x). \tag{2.228}$$

2.6 复标量场 $\phi(x)$ 可以按 (2.182) 式分解为两个实标量场 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 的线性组合。设 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 的平面波展开式为

$$\phi_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(c_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + c_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \right), \tag{2.229}$$

$$\phi_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(d_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \right). \tag{2.230}$$

(a) 推导复标量场平面波展开式 (2.187) 和 (2.189) 中使用的产生湮灭算符 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 与实标量场产生湮灭算符 $(c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 之间的关系。

(b) 根据上述关系及对易关系

$$\begin{aligned} [c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [d_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \\ [c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}] &= [c_{\mathbf{p}}^\dagger, c_{\mathbf{q}}^\dagger] = [d_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}] = [d_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0, \\ [c_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}] &= [c_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = [c_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = [c_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{q}}] = 0, \end{aligned} \tag{2.231}$$

验证 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 满足对易关系 (2.193)。

2.7 复标量场 $\phi(x)$ 的守恒荷算符 Q 可以用产生湮灭算符表达成 (2.212) 式。

(a) 证明

$$[Q, \phi] = -q\phi, \quad [Q, \phi^\dagger] = q\phi^\dagger. \tag{2.232}$$

(b) 设 $|Q'\rangle$ 是 Q 的本征态，本征值为 Q'，即 $Q|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle$。论证 $\phi|Q'\rangle$ 和 $\phi^\dagger|Q'\rangle$ 的 Q 本征值分别为 $Q'-q$ 和 $Q'+q$。

2.8 对于复标量场 $\phi(x)$，真空态 $|0\rangle$ 满足 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = b_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|0\rangle = 1$，引入动量为 $\mathbf{p}$ 的正标量玻色子态 $|\mathbf{p}^+\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ 和反标量玻色子态 $|\mathbf{p}^-\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$。

(a) 求内积 $\langle \mathbf{q}^+|\mathbf{p}^+\rangle$、$\langle \mathbf{q}^-|\mathbf{p}^-\rangle$ 和 $\langle \mathbf{q}^-|\mathbf{p}^+\rangle$。

(b) 求 $\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}^+\rangle$、$\langle 0|\phi^\dagger(x)|\mathbf{p}^-\rangle$、$\langle \mathbf{p}^+|\phi^\dagger(x)|0\rangle$ 和 $\langle \mathbf{p}^-|\phi(x)|0\rangle$。

(c) 根据守恒荷算符 Q 的表达式 (2.212)，推出

$$Q\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = (Q_{\text{vac}}+q)\left|\mathbf{p}^+\right\rangle, \quad Q\left|\mathbf{p}^-\right\rangle = (Q_{\text{vac}}-q)\left|\mathbf{p}^-\right\rangle, \tag{2.233}$$

其中

$$Q_{\text{vac}} \equiv -(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,q\,. \tag{2.234}$$

2.9 根据复标量场守恒荷算符 Q 和哈密顿量算符 H 的表达式 (2.212) 和 (2.215)，证明

$$[H,Q]=0. \tag{2.235}$$

2.10 依照 (2.182) 式将复标量场 $\phi(x)$ 分解为实标量场 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 的线性组合。

(a) 论证复标量场的 U(1) 整体变换 (2.208) 等价于实标量场的整体变换

$$\begin{pmatrix}\phi_1'(x)\\ \phi_2'(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos q\theta & -\sin q\theta\\ \sin q\theta & \cos q\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\end{pmatrix}. \tag{2.236}$$

将 $\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 看作一个二维线性空间中的矢量，则上式是此空间中的一个 SO(2) 整体变换，即转动角为 $q\theta$ 的二维旋转变换。

(b) 证明以 (2.183) 式表达的拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1)\partial_\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2)\partial_\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 \tag{2.237}$$

在上述 SO(2) 整体变换下不变。

可见，自由复标量场的 U(1) 整体对称性等价于两个自由实标量场的 SO(2) 整体对称性。

第 3 章　Poincaré 对称性与粒子态

本章讨论相对论性量子理论必须满足的 Poincaré 对称性。我们将研究量子 Poincaré 变换，相关讨论会涉及到量子 Lorentz 变换、Lorentz 代数和 Poincaré 代数。Lorentz 代数与 Lorentz 群的表示理论密切相关，而后者对于深入理解各种量子场是必要的知识。在量子理论中，粒子由 Hilbert 空间中的态矢描述，相对论性的粒子运动与量子 Poincaré 变换对态矢的作用有关，由此可以为单粒子态分类。

3.1　量子 Poincaré 变换

1.7.2 小节提到，时空坐标的 Poincaré 变换 (Λ, a) 为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{3.1}$$

它是 Lorentz 变换 Λ 和时空平移变换 a 的组合。如果量子系统具有 **Poincaré 对称性**，即同时具有 Lorentz 对称性和时空平移对称性，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$\boxed{|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle\,,} \tag{3.2}$$

其中 Λ 为固有保时向 Lorentz 变换，而 $U(\Lambda, a)$ 是一个线性幺正算符，**描述量子 Poincaré 变换**，满足

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^{\dagger}(\Lambda, a) = \mathbb{I}, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^{\dagger}(\Lambda, a), \tag{3.3}$$

且 $U(\mathbf{1}, 0) = \mathbb{I}$ 是**恒等算符**。$U(\Lambda, a)$ 的**幺正性** (unitarity) 保证态矢的内积在量子 Poincaré 变换下不变，

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\,U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle\,, \tag{3.4}$$

这是 Poincaré 对称性的体现。$a^{\mu} = 0$ 对应于 Lorentz 变换，因此

$$U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0) \tag{3.5}$$

描述量子 Lorentz 变换，满足 $U^{-1}(\Lambda) = U^{\dagger}(\Lambda)$。$U(\mathbf{1}, a)$ 则**描述量子时空平移变换**。

对时空坐标先作 Poincaré 变换 (Λ_1, a_1)，得到 $x'^{\mu} = (\Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a_1^{\mu}$，再作 Poincaré 变换 (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^{\mu} = (\Lambda_2)^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} + a_2^{\mu} = (\Lambda_2)^{\mu}{}_{\nu}[(\Lambda_1)^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} + a_1^{\nu}] + a_2^{\mu} = (\Lambda_2\Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + (\Lambda_2)^{\mu}{}_{\nu} a_1^{\nu} + a_2^{\mu}. \tag{3.6}$$

这相当于作 Poincaré 变换 $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，而 Poincaré 对称性的存在意味着同态关系

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.7}$$

将 $U(\Lambda, a)$ 视作无限维矩阵，则集合 $\{U(\Lambda, a)\}$ 和 $\{U(\Lambda)\}$ 分别构成 Poincaré 群和 Lorentz 群的无限维幺正线性表示[1]。从而，由

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = \mathbb{I} = U(\mathbf{1}, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a) \tag{3.8}$$

得到逆变换算符

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a), \quad U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}). \tag{3.9}$$

无穷小 Lorentz 变换 (1.219) 的矩阵形式是 $\Lambda = \mathbf{1} + \omega$，无穷小时空平移变换记为 $a^\mu = \varepsilon^\mu$，其中 ω 和 ε^μ 是无穷小量。从而，无穷小 Poincaré 变换 $(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)$ 诱导的无穷小幺正算符为

$$\boxed{\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) &= \mathbb{I} + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0} + \varepsilon_\mu \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0} \\ &= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu, \end{aligned}} \tag{3.10}$$

这是在 $(\omega_{\mu\nu}, \varepsilon_\rho) = (0, 0)$ 附近对 $U(\Lambda, a)$ 作 Taylor 级数，只展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的一阶项，而

$$J^{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0} \quad 和 \quad P^\mu \equiv -\mathrm{i}\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0} \tag{3.11}$$

分别是量子 Lorentz 变换和量子时空平移变换的**生成元算符**。根据 1.7.3 小节的讨论，实参数 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的，因而 $J^{\mu\nu}$ 也是反对称的，

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}. \tag{3.12}$$

于是，$J^{\mu\nu}$ 有 6 个独立分量，而 P^μ 有 4 个独立分量。由 $U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)$ 的幺正性推出

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= U^\dagger(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) = \left[\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\dagger - \mathrm{i}\varepsilon_\mu(P^\mu)^\dagger\right]\left[\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right] \\ &= \mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[(J^{\mu\nu})^\dagger - J^{\mu\nu}] - \mathrm{i}\varepsilon_\mu[(P^\mu)^\dagger - P^\mu], \end{aligned} \tag{3.13}$$

最后一步忽略了 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的二阶项。可见，$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的所有分量都是厄米算符，有

$$(J^{\mu\nu})^\dagger = J^{\mu\nu}, \quad (P^\mu)^\dagger = P^\mu, \tag{3.14}$$

故

$$U^{-1}(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) = U^\dagger(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) = \mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu. \tag{3.15}$$

[1]由于 Poincaré 群和 Lorentz 群的群空间都不是紧致的，它们不具备有限维的非平庸幺正表示，即它们的非平庸幺正表示必须是无限维的。

根据逆变换表达式 (3.9) 和同态关系 (3.7)，有

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a) &= U(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda,(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon]\\ &= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda,\Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon]-\Lambda^{-1}a\}\\ &= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.16}$$

对上式左边和最后一步分别展开，得

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a) &= U^{-1}(\Lambda,a)\left(\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right)U(\Lambda,a)\\ &= \mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)+\mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a),\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)=\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu. \tag{3.18}$$

利用 $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta=g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma$，有

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)^\alpha{}_\nu J^{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}\\ &= g_{\mu\alpha}g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}=\Lambda^\rho{}_\mu\omega_{\rho\gamma}\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma},\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)=g_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\ &= \delta^\beta{}_\mu\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega_{\alpha\sigma}a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha P^\mu)=\omega_{\alpha\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\\ &= \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\omega_{\nu\mu}\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu\\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu,\end{aligned} \tag{3.20}$$

将以上两式代入 (3.18) 式，得

$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)=\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\mathrm{i}\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{3.21}$$

与 (3.17) 式比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的任意性推出

$$U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho, \tag{3.22}$$

$$U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{3.23}$$

注意，(3.22) 式右边是对 μ 和 ν 指标反对称的：

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho &= \Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho J^{\sigma\rho}-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho\\ &= -(\Lambda^\nu{}_\rho\Lambda^\mu{}_\sigma J^{\rho\sigma}-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho+\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho).\end{aligned} \tag{3.24}$$

这样的反对称性与 (3.22) 式左边相同，否则等式不能成立。这是我们在 (3.20) 式最后两步中利用指标更换和 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性进行改写的原因。

取 $a^\mu=0$，得到

$$U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}, \tag{3.25}$$
$$U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}. \tag{3.26}$$

因此，生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 在态矢 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ 上的期待值与它们在态矢 $|\Psi\rangle$ 上的期待值之间的关系为

$$\langle\Psi'|J^{\mu\nu}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\langle\Psi|J^{\rho\sigma}|\Psi\rangle, \tag{3.27}$$
$$\langle\Psi'|P^{\mu}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\langle\Psi|P^{\nu}|\Psi\rangle. \tag{3.28}$$

以上两式符合 Lorentz 张量的变换规则 (1.96)，可见 $\langle\Psi|J^{\mu\nu}|\Psi\rangle$ 和 $\langle\Psi|P^{\mu}|\Psi\rangle$ 分别是 2 阶 Lorentz 张量和 Lorentz 矢量。可将 $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)$ 和 $U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda)$ 分别看作由态矢的量子 Lorentz 变换诱导出来的 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 算符的 Lorentz 变换，即

$$J'^{\mu\nu} \equiv U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}, \quad P'^{\mu} \equiv U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}. \tag{3.29}$$

这表明 $J^{\mu\nu}$ 是一个 **2 阶 Lorentz 张量**，而 P^{μ} 是一个 **Lorentz 矢量**。

3.2　Lorentz 代数和 Poincaré 代数

下面研究 (3.22) 式。考虑无穷小 Poincaré 变换 (3.10)，忽略二阶小量，(3.22) 式左边化为

$$\begin{aligned}
U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)J^{\mu\nu}U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) &= \left(\mathbb{I}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}-\mathrm{i}\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}\right)J^{\mu\nu}\left(\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}+\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha}P^{\alpha}\right)\\
&= J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}J^{\mu\nu}+\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha}J^{\mu\nu}P^{\alpha}-\mathrm{i}\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}J^{\mu\nu}\\
&= J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]+\mathrm{i}\varepsilon_{\rho}[J^{\mu\nu},P^{\rho}].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(3.22) 式右边第一项变成

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma} &= (\delta^{\mu}{}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma}+\omega^{\nu}{}_{\sigma})J^{\rho\sigma} = \delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\delta^{\mu}{}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\omega^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}\\
&= J^{\mu\nu}+\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\mu\sigma}+\omega^{\mu}{}_{\rho}J^{\rho\nu} = J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\omega_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}\\
&= J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})\\
&= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})+\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})\\
&= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中第五、七步用到 $J^{\mu\nu}$ 和 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性。(3.22) 式右边第二、三项化为

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}\varepsilon^{\nu}P^{\rho}+(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\rho}\varepsilon^{\mu}P^{\rho} &= -(\delta^{\mu}{}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho})\varepsilon^{\nu}P^{\rho}+(\delta^{\nu}{}_{\rho}+\omega^{\nu}{}_{\rho})\varepsilon^{\mu}P^{\rho} = -\varepsilon^{\nu}P^{\mu}+\varepsilon^{\mu}P^{\nu}\\
&= -\varepsilon_{\rho}(g^{\nu\rho}P^{\mu}-g^{\mu\rho}P^{\nu}).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

比较上面三式，由 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ε_ρ 的任意性推出生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 与 $J^{\rho\sigma}$ 的对易关系

$$\begin{aligned}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ &= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma),\end{aligned} \tag{3.33}$$

以及 $J^{\mu\nu}$ 与 P^ρ 的对易关系

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu). \tag{3.34}$$

在 (3.33) 式第二行中，$(\mu \leftrightarrow \nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}$；同理，$(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $\mathrm{i}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$。注意，(3.33) 式右边既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ,ν) 和 (ρ,σ) 反对称，这样的反对称性与等式左边一致。以生成元 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量作为基底张成线性空间，空间中的任意矢量是 $J^{\mu\nu}$ 的线性组合，用对易关系 (3.33) 定义矢量乘法，则任意矢量乘积仍是此空间中的矢量，即乘法运算是封闭的，称此线性空间为 **Lorentz 代数**[2] (algebra)。

Lie 群是一类特殊的连续群，n 维 Lie 群的群空间由 n 个独立的连续实参数 θ^a $(a = 1, 2\cdots, n)$ 描述，具有 n 维微分流形的结构。$\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(N)$ 是 $N(N-1)/2$ 维 Lie 群，$\mathrm{U}(N)$ 是 N^2 维 Lie 群，$\mathrm{SU}(N)$ 是 N^2-1 维 Lie 群。对于 n 维 Lie 群的一个 m 维线性表示，在单位矩阵 $\mathbf{1}$ 附近，无穷小变换对应的表示矩阵可展开为

$$\mathbf{1} + \mathrm{i}\theta^a t^a + \mathcal{O}(\theta^a\theta^b), \tag{3.35}$$

其中 t^a 是 n 个独立的 m 阶**生成元矩阵**。这些生成元满足对易关系

$$[t^a, t^b] = \mathrm{i}f^{abc}t^c, \quad a, b, c = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.36}$$

其中 f^{abc} 是一组实数，称为**结构常数** (structure constant)，满足 $f^{abc} = -f^{bac}$。不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵。不过，同一个 Lie 群所有非平庸线性表示的结构常数都是一样的，它们描述 Lie 群的局域性质。如果一个 Lie 群是 Abel 群，则结构常数都是零。生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种乘法运算。以生成元为基底张成的线性空间对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**，它的结构由结构常数所决定。Lie 代数刻画 Lie 群在恒元附近的局域结构，对应着微分流形在恒元处的切空间，如图 3.1 所示。

Lorentz 群是一个 6 维 Lie 群，它对应的 Lie 代数就是 Lorentz 代数。Lorentz 群任何线性表示的生成元都要满足相同形式的 **Lorentz 代数关系** (3.33)。反过来，通过构造满足 (3.33) 式的生成元矩阵，就可以生成 Lorentz 群的线性表示。

我们可以把算符 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量组合成 2 个三维矢量算符

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}, \quad K^i \equiv J^{0i}, \tag{3.37}$$

[2]在数学上，定义了矢量乘法的线性空间称为代数。

图 3.1: Lie 群和 Lie 代数的几何意义。

即

$$\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12}), \quad \mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}). \tag{3.38}$$

纯空间部分的生成元 J^i 与 J^j 的对易关系为

$$\begin{aligned}
[J^i, J^j] &= \frac{1}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}[J^{kl}, J^{mn}] = \frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}\{[g^{lm}J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] - (m \leftrightarrow n)\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}[g^{lm}J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}g^{lm}J^{kn} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jln}J^{kn} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jnl}J^{kn} = \mathrm{i}(\delta^{ij}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{kj})J^{kn} = -\mathrm{i}J^{ji} = \mathrm{i}J^{ij},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

第三、四步用到三维 Levi-Civita 符号的反对称性，第五步用到 $g^{lm} = -\delta^{lm}$，第七步用到 (1.118) 式。由 $J^{23} = J^1 = \varepsilon^{231}J^1$、$J^{31} = J^2 = \varepsilon^{312}J^2$ 和 $J^{12} = J^3 = \varepsilon^{123}J^3$ 归纳出

$$J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k, \tag{3.40}$$

从而得到

$$\boxed{[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k.} \tag{3.41}$$

引入 2 个三维矢量

$$\theta^i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}, \tag{3.42}$$

即

$$\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03}), \tag{3.43}$$

这里 $\theta^3 = -\omega_{12}$ 是 (1.223) 式中绕 z 轴转动的角度 θ，而 $\xi^1 = -\omega_{01}$ 是 (1.228) 式中沿 x 轴增速的快度 ξ。此外，$\theta^1 = -\omega_{23}$ 和 $\theta^2 = -\omega_{31}$ 分别是绕 x 轴和 y 轴转动的角度，$\xi^2 = -\omega_{02}$ 和 $\xi^3 = -\omega_{03}$ 分别是沿 y 轴和 z 轴增速的快度。从而，无穷小量子 Lorentz 变换化为

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{1} + \omega) &= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = \mathbb{I} - \mathrm{i}\omega_{23}J^{23} - \mathrm{i}\omega_{31}J^{31} - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} - \mathrm{i}\omega_{01}J^{01} - \mathrm{i}\omega_{02}J^{02} - \mathrm{i}\omega_{03}J^{03} \\
&= \mathbb{I} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

对于绕 z 轴的旋转变换 $R_z(\theta^3)$，$\theta^1=\theta^2=\xi^i=0$，而 θ^3 取有限值，上式意味着 $U[R_z(\theta^3)]=\mathbb{I}+\mathrm{i}\theta^3J^3+\mathcal{O}[(\theta^3)^2]$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}U[R_z(\theta^3)]}{\mathrm{d}\theta^3}\right|_{\theta^3=0}=\mathrm{i}J^3, \tag{3.45}$$

满足上式和 $U[R_z(0)]=\mathbb{I}$ 的量子旋转变换是

$$U[R_z(\theta^3)]=\exp(\mathrm{i}\theta^3J^3). \tag{3.46}$$

下面推导一个有用的公式。若两个算符 A 和 B 相互对易，即 $[A,B]=0$，则二项式定理给出

$$(A+B)^n=\sum_{j=0}^{n}C_n^jA^jB^{n-j},\quad C_n^j\equiv\frac{n!}{j!(n-j)!}. \tag{3.47}$$

阶乘的定义可以推广到负整数：对于整数 $m<0$，定义

$$m!\to\infty,\quad \frac{1}{m!}\to 0. \tag{3.48}$$

从而，对于 $j>n$，有 $[(n-j)!]^{-1}\to 0$。这样一来，我们可以将 (3.47) 式中的有限级数化成无穷级数，

$$(A+B)^n=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}. \tag{3.49}$$

由此推出

$$\mathrm{e}^{A+B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{n-j}}{(n-j)!}\right], \tag{3.50}$$

即

$$\boxed{\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\ \text{ 对 } [A,B]=0 \text{ 成立。}} \tag{3.51}$$

值得注意的是，上式不仅对相互对易的**算符**成立，也对相互对易的**同阶方阵**成立。

现在考虑对态矢相继作两次绕 z 轴的量子旋转变换，由 $[J^3,J^3]=0$ 推出

$$U[R_z(\tilde\theta^3)]U[R_z(\theta^3)]=\exp(\mathrm{i}\tilde\theta^3J^3)\exp(\mathrm{i}\theta^3J^3)=\exp[\mathrm{i}(\theta^3+\tilde\theta^3)J^3]=U[R_z(\theta^3+\tilde\theta^3)]. \tag{3.52}$$

上式表明，绕着 z 轴先转动 θ^3 角，再转动 $\tilde\theta^3$ 角，就相当于绕着 z 轴直接转动角度 $\theta^3+\tilde\theta^3$。这样的结果是正确的，因而将量子旋转变换表达成指数形式 (3.46) 是合理的。

1.7.3 小节提到，空间旋转对称性对应着角动量守恒定律，因而 J^3 就是总角动量算符在 z 轴上的分量。同理，J^1 和 J^2 分别是总角动量算符在 x 轴和 y 轴上的分量。也就是说，生成元算符 $\mathbf{J}$ 就是**总角动量算符**。空间旋转群 SO(3) 是固有保时向 Lorentz 群在纯空间部分的子群，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 是**量子空间旋转变换**的生成元算符，而 (3.41) 式是 3 维 Lie 群 SO(3) 的 Lie 代数关系，相应的结构常数是 Levi-Civita 符号 ε^{ijk}。

图 3.2: 曲线连续形变示意图。

SO(3) 群与 3 维 Lie 群 SU(2) 有着紧密的联系。在 SU(2) 群的基础表示中，3 个生成元矩阵表达为

$$\tau^i \equiv \frac{\sigma^i}{2}, \tag{3.53}$$

其中 σ^i 是 3 个 2×2 的 **Pauli 矩阵**，

$$\boxed{\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.} \tag{3.54}$$

它们都是既厄米又幺正的，

$$(\sigma^i)^{-1} = (\sigma^i)^\dagger = \sigma^i. \tag{3.55}$$

Pauli 矩阵的两两乘积为

$$\begin{aligned} (\sigma^1)^2 &= (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = \mathbf{1}, \\ \sigma^1\sigma^2 &= \mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^2\sigma^3 = \mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^3\sigma^1 = \mathrm{i}\sigma^2, \\ \sigma^2\sigma^1 &= -\mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^3\sigma^2 = -\mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^1\sigma^3 = -\mathrm{i}\sigma^2. \end{aligned} \tag{3.56}$$

归纳起来，有

$$\boxed{\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k,} \tag{3.57}$$

右边第一项省略了 2×2 单位矩阵 $\mathbf{1}$。从而推出

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k - \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{3.58}$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} \equiv \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k + \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\delta^{ij}. \tag{3.59}$$

于是，SU(2) 生成元 τ^i 的对易关系为

$$[\tau^i, \tau^j] = \frac{1}{4}[\sigma^i, \sigma^j] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\tau^k. \tag{3.60}$$

与 (3.41) 式比较发现，SU(2) 群的 Lie 代数关系与 SO(3) 群完全一致，即 SU(2) 群和 SO(3) 群具有相同的李代数。这意味着 SU(2) 群在恒元附近的局域性质与 SO(3) 群一样。

但是，SU(2) 群的整体拓扑性质与 SO(3) 群不一样。SU(2) 和 SO(3) 的群空间都是*连通的*，根据 1.3 节的说法，它们都是*简单 Lie 群*。更仔细地讲，SU(2) 的群空间是**单连通**的，连接群空

图 3.3: SO(3) 群空间示意图。

图 3.4: 一组对径点对应的等价旋转变换。

图 3.5: SO(3) 群空间中的两类闭合曲线，小空心圆代表两个对径点。左图中的闭合曲线可以通过连续形变收缩成一点。右图中的闭合曲线在对径点处发生跳跃，不能连续收缩成一点。

间中两点的任意两条曲线可以连续地形变成彼此，等价地，群空间内任意一条闭合曲线可以连续地收缩为一点，如图 3.2 所示。SO(3) 的群空间是**双连通**的，即**连通度**为 2，连接群空间中两点的曲线分成 2 类，同一类曲线能够连续地变化成彼此，不同类曲线则不能；相应地，闭合曲线也分为 2 类，有一类能连续收缩成一点，另一类不能。

图 3.3 表示 SO(3) 的群空间，它是半径为 π 的球体。在球坐标系中，球体里每一点的两个角度坐标代表转动轴的方向，径向坐标代表绕轴转动的角度。绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这两个旋转变换是一样的，这体现在图 3.4 中。因此，球面上直径两端的点对应于同一个群元，这样的点称为对径点。如图 3.5 中左图所示，如果一条闭合曲线上的点都不在球面上，那么曲线可以连续收缩成一点。如图 3.5 中右图所示，如果一条闭合曲线通过球面上的某个点跳跃到它的对径点以形成闭合路径，那么对曲线进行连续形变时，参与跳跃的两个对径点只能成对地在球面上移动，不能通过连续形变消除这种跳跃，于是曲线不能连续收缩成一点[3]。

另一方面，SU(2) 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 $-\mathbf{1}$，见习题 3.3 和 3.5。即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃，因此任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1。

数学上可以证明，如果简单 Lie 群 G 的群空间是 n 度连通的 $(n > 1)$，那么必然存在一个单连通的简单 Lie 群 G' 与之同态，即 $G' \sim G$，同态对应关系为 $n:1$，即 G' 中的 n 个元素对

[3]相关演示动画见 https://www.bilibili.com/video/BV1Gv4y1t7yx?p=2。

图 3.6: 覆盖群示意图

图 3.7: n 值表示

应于 G 中的 1 个元素。此时称 G' 为 G 的**覆盖群** (covering group)，如图 3.6 所示。G' 的忠实表示是 G 的 $\boldsymbol{n}$ **值表示**，且 G' 与 G 具有相同的 Lie 代数。1.4 小节提到，在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的对应关系。但是，在图 3.7 展示的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系，因此 n 值表示不是线性表示。

SU(2) 群与 SO(3) 群具有一种 $2:1$ 的同态关系（见习题 3.4），即 $\mathrm{SU}(2)\sim\mathrm{SO}(3)$，且 SU(2) 的两个群元同态地对应于 SO(3) 的一个群元。因此，SU(2) 是 SO(3) 的覆盖群，SU(2) 的忠实表示是 SO(3) 的双值表示。

现在，回到生成元算符的讨论。**K** 是增速算符，**J** 与 **K** 的对易关系为

$$\begin{aligned}[J^i,K^j] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}[J^{kl},J^{0j}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ikl}\{[g^{l0}J^{kj}-(k\leftrightarrow l)]-(0\leftrightarrow j)\}\\ &= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}[g^{l0}J^{kj}-(0\leftrightarrow j)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj}-g^{lj}J^{k0}) = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}g^{lj}J^{k0}\\ &= \mathrm{i}\varepsilon^{ikj}J^{k0} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^{0k} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k,\end{aligned} \tag{3.61}$$

而 **K** 自身的对易关系为

$$[K^i,K^j] = [J^{0i},J^{0j}] = \mathrm{i}(g^{i0}J^{0j}-g^{00}J^{ij}-g^{ij}J^{00}+g^{0j}J^{i0}) = -\mathrm{i}J^{ij} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k. \tag{3.62}$$

归纳起来，有

$$\boxed{[J^i,J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k,\quad [J^i,K^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k,\quad [K^i,K^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k.} \tag{3.63}$$

这是 Lorentz 代数关系 (3.33) 的另一种表达方式，它符合 Lie 代数关系的标准形式 (3.36)。可见，三个生成元 J^i 自己就能构成封闭的代数，而三个生成元 K^i 则不能。

下面研究 (3.23) 式。考虑无穷小 Poincaré 变换 (3.10)，忽略二阶小量，(3.23) 式左边化为

$$\begin{aligned}U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)P^\mu U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) &= \left(\mathbb{I}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}-\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)P^\mu\left(\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}+\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right)\\ &= P^\mu-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu+\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha-\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu\\ &= P^\mu-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu,J^{\rho\sigma}]+\mathrm{i}\varepsilon_\nu[P^\mu,P^\nu],\end{aligned} \tag{3.64}$$

(3.23) 式右边变成

$$(\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu+\omega^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu+\omega_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}P^\sigma = P^\mu+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho). \tag{3.65}$$

两相比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的任意性推出生成元算符的对易关系

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho) \tag{3.66}$$

和

$$\boxed{[P^\mu, P^\nu] = 0.} \tag{3.67}$$

这里第一个对易关系等价于 (3.34) 式。以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 10 个独立分量作为基底张成线性空间，用对易关系 (3.33)、(3.66) 和 (3.67) 定义矢量乘法，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数。Lorentz 代数是 Poincaré 代数的子代数。

令 $H \equiv P^0$，则 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$，进一步推出 $[H, P^i] = [P^i, P^j] = 0$ 以及

$$\begin{aligned}
[P^i, J^j] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}[P^i, J^{kl}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{jkl}(g^{ik}P^l - g^{il}P^k) = \frac{\mathrm{i}}{2}(-\varepsilon^{jil}P^l + \varepsilon^{jki}P^k) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}P^k, && (3.68)\\
[P^i, K^j] &= [P^i, J^{0j}] = \mathrm{i}(g^{i0}P^j - g^{ij}P^0) = \mathrm{i}\delta^{ij}H, && (3.69)\\
[H, K^i] &= [P^0, J^{0i}] = \mathrm{i}(g^{00}P^i - g^{0i}P^0) = \mathrm{i}P^i, && (3.70)\\
[H, J^i] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}[P^0, J^{jk}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}(g^{0j}P^k - g^{0k}P^j) = 0. && (3.71)
\end{aligned}$$

整理一下，有

$$\boxed{\begin{aligned}
[P^i, J^j] &= \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}P^k, \quad [P^i, K^j] = \mathrm{i}\delta^{ij}H, \quad [H, K^i] = \mathrm{i}P^i, && (3.72)\\
[H, J^i] &= [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0. && (3.73)
\end{aligned}}$$

(3.63)、(3.72) 和 (3.73) 式是 Poincaré 代数关系的另一种表达方式。

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (t_*, \mathbf{0})$ 时，(3.11) 式意味着

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{1}, a)}{\mathrm{d}t_*}\right|_{t_*=0} = \mathrm{i}H. \tag{3.74}$$

满足上式和 $U(\mathbf{1}, 0) = \mathbb{I}$ 的**量子时间平移变换**是

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(\mathrm{i}Ht_*), \tag{3.75}$$

它的作用是将态矢从 t 时刻平移到 $t' = t + t_*$ 时刻。1.7.2 小节提到，时间平移对称性对应着能量守恒定律，因而生成元算符 H 就是**哈密顿量算符**。

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时，(3.11) 式表明

$$\left.\frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial x_*^i}\right|_{\mathbf{x}_*=\mathbf{0}} = -\mathrm{i}P^i, \tag{3.76}$$

注意到 $[P^i, P^j] = 0$，满足上式和 $U(\mathbf{1}, 0) = \mathbb{I}$ 的**量子空间平移变换**表达为

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}P^1x_*^1)\exp(-\mathrm{i}P^2x_*^2)\exp(-\mathrm{i}P^3x_*^3) = \exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_*). \tag{3.77}$$

第二步用到 (3.51) 式。它的作用是将态矢从 $\mathbf{x}$ 位置平移到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置，空间平移对称性对应着动量守恒定律，因此生成元算符 $\mathbf{P}$ 就是**动量算符**。从而，$P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是**四维动量算符**。在量子力学中，与哈密顿量对易的不含时力学量是守恒量。于是，$[H, \mathbf{P}] = [H, \mathbf{J}] = 0$ 意味着动量和总角动量都是守恒量，这是 Poincaré 对称性导致的结果。

由于 $[H, \mathbf{P}] = 0$，一般的量子时空平移变换可表达为

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(\mathrm{i}Ht_*)\exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_*) = \exp(\mathrm{i}P^\mu a_\mu), \tag{3.78}$$

满足

$$\left.\frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial a_\mu}\right|_{a=0} = \mathrm{i}P^\mu. \tag{3.79}$$

考虑时空平移变换 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 对一般场算符 $\Phi_a(x)$ 的作用，与 (1.206) 式对应的算符表达式为

$$\Phi'_a(x') = U^{-1}(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x')U(\mathbf{1}, a) = \Phi_a(x). \tag{3.80}$$

注意这里的相似变换类似于 (3.29) 式。上式等价于

$$\Phi_a(x + a) = U(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x)U^{-1}(\mathbf{1}, a) \tag{3.81}$$

对于无穷小时空平移变换 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$，(3.10) 式给出

$$U(\mathbf{1}, \varepsilon) = \mathbb{I} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu, \tag{3.82}$$

从而将 (3.81) 式右边化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x)U^{-1}(\mathbf{1}, a) &= (\mathbb{I} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu)\Phi_a(x)(\mathbb{I} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu) = \Phi_a(x) - \mathrm{i}\varepsilon_\mu\Phi_a(x)P^\mu + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\Phi_a(x) \\ &= \Phi_a(x) - \mathrm{i}\varepsilon_\mu[\Phi_a(x), P^\mu], \end{aligned} \tag{3.83}$$

在 x^μ 处将 (3.81) 式左边展开到 ε^μ 的一阶项，得

$$\Phi_a(x + a) = \Phi_a(x) + \varepsilon_\mu\partial^\mu\Phi_a(x). \tag{3.84}$$

两相比较，给出

$$\boxed{[\Phi_a(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu\Phi_a(x).} \tag{3.85}$$

也就是说，一般场算符 $\Phi_a(x)$ 与四维动量算符 P^μ 的对易子相当于用四维动量微分算符 $\mathrm{i}\partial^\mu$ 对 $\Phi_a(x)$ 求导。取 $\mu = 0$，得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_a(x) = [\Phi_a(x), H], \tag{3.86}$$

这就是 *Heisenberg 运动方程* (2.43)，可见它是时间平移对称性的推论。

对于实标量场 $\phi(x)$，(3.85) 式化为 $[\phi(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu\phi(x)$，这与 2.3.3 小节中的 (2.129) 式相同，而那里哈密顿量和总动量的定义遵循 1.7.2 小节中由 Noether 定理给出的表达式。也就是说，通过 Noether 定理得出的哈密顿量和总动量与本章用量子 Poincaré 变换定义的哈密顿量算符 H 和动量算符 $\mathbf{P}$ 是一致的。可以验证，通过 Noether 定理得出的 Lorentz 对称性的守恒荷 (1.240) 与本章定义的生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 也是一致的，见 (4.24) 式及其讨论。

3.3 粒子态

Poincaré 群描述 Minkowski 时空的对称性。粒子在 Minkowski 时空中运动，不同种类的粒子由质量、自旋和一些与内部对称性相关的量子数（如电荷、轻子数、重子数等）加以区分。本节讨论如何通过 Poincaré 对称性为粒子分类，我们将会得到以下结论。每个粒子具有一定的四维动量和自旋分量的本征值，后者是表征*自旋极化态*的量子数。对粒子作空间旋转或 Lorentz 增速变换时，四维动量会发生变化，自旋极化量子数也有可能改变，但质量、自旋量子数和内部量子数不会改变。当 $\Lambda = \mathbf{1}$ 时，(3.23) 式化为 $U^{-1}(\mathbf{1}, a)P^\mu U(\mathbf{1}, a) = P^\mu$，因此四维动量算符 P^μ 在量子时空平移变换下不变，从而内积 $P^2 = P^\mu P_\mu$ 也不变。另一方面，P^2 还是 Lorentz 标量，于是它的本征值 p^2 是 Poincaré 变换的不变量。对单个粒子而言，根据质壳条件 (1.79)，$p^2 = m^2$，则这个不变量是粒子质量 m 的平方。

实际上，粒子态由 Poincaré 群的*不可约幺正表示*描述，1939 年 Eugene Wigner 完成了这些表示的分类工作 [13]。一个**粒子**可以用一组在量子 Poincaré 变换下相互转化的态矢 $\{|\Psi_\sigma(p)\rangle\}$ 来定义，其中 p 是四维动量 p^μ 的简写，而 p^μ 是四维动量算符 P^μ 在态矢 $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 上的本征值，满足

$$P^\mu |\Psi_\sigma(p)\rangle = p^\mu |\Psi_\sigma(p)\rangle . \tag{3.87}$$

指标 σ 表征其它相关自由度，通常取分立值。2.3.4 小节定义的标量场单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 就是这样的态矢。

在量子时空平移变换 (3.78) 的作用下，单粒子态 $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 变换为

$$U(\mathbf{1}, a) |\Psi_\sigma(p)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p)\rangle , \tag{3.88}$$

它只出现相位上的改变。另一方面，用量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用得到单粒子态 $U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle$，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p)\rangle &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda)P^\nu |\Psi_\sigma(p)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p)\rangle , \end{aligned} \tag{3.89}$$

第二步用到 (3.26) 式。因此，$U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 的四维动量本征值为 $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$，这意味着它必定是态矢 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle$ 的线性组合，即

$$U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle . \tag{3.90}$$

通过下面的方法可以得到系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 的形式。

在固有保时向 Lorentz 变换下，p^μ 的内积 p^2 不变，p^0 的符号也不会改变。它们是所有惯性参考系的不变量。p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$，这些四维动量彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着，可以选取一个**标准四维动量** $k^\mu \in \{p^\mu\}$，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p)k^\nu , \tag{3.91}$$

其中 $V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换。从而，标准四维动量 k^μ 代表了这组可用于描述粒子的四维动量 $\{p^\mu\}$。可以将 $\{p^\mu\}$ 中任意元素 p^μ 对应的单粒子态 $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 定义为

$$|\Psi_\sigma(p)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k)\rangle\,, \tag{3.92}$$

其中 $N(p)$ 是依赖于 p^μ 的归一化因子。在此前讨论中，还没有对指标 σ 提出要求，而以上定义式左右两边出现同一个指标 σ，实际上是以此规定指标 σ 与四维动量 p^μ 之间的关系。

对这个单粒子态作量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$，利用同态关系 (3.7) 和 (3.9) 式，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U^{-1}[V(\Lambda p)]U(\Lambda)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]\,|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.93}$$

其中，固有保时向 Lorentz 变换

$$W^\mu{}_\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu \tag{3.94}$$

先将 k^μ 变换到 p^μ，再变换到 $(\Lambda p)^\mu$，最后变换回 k^μ：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda]^\mu{}_\nu p^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)]^\mu{}_\nu (\Lambda p)^\nu = k^\mu, \tag{3.95}$$

即 $W^\mu{}_\nu$ 保持 k^μ 不变。所有保持 k^μ 不变的固有保时向 Lorentz 变换 $\{W^\mu{}_\nu\}$ 构成 Lorentz 群的一个子群，称为标准动量 k^μ 对应的**小群** (little group)，类似于 (3.90) 式，有

$$U(W)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle\,, \tag{3.96}$$

其中 $D_{\sigma'\sigma}(W)$ 是线性组合系数。对于小群中任意两个元素 $(W_1)^\mu{}_\nu$ 和 $(W_2)^\mu{}_\nu$，由上式推出

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle = U(W_2W_1)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle = U(W_2)U(W_1)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= U(W_2)\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma''}(k)\rangle = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.97}$$

从而得到同态关系

$$D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1). \tag{3.98}$$

可见，矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成这个小群的一个线性表示。

将 (3.96) 式代入 (3.93) 式，利用 (3.94) 式，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \\ &= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]U[V(\Lambda p)]\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.99}$$

根据定义式 (3.92)，有 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle = N(\Lambda p)U[V(\Lambda p)]\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$，即

$$U[V(\Lambda p)]\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle = \frac{1}{N(\Lambda p)}\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle\,, \tag{3.100}$$

代入 (3.99) 式，得

$$U(\Lambda)\,|\Psi_{\sigma}(p)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle\,. \tag{3.101}$$

与 (3.90) 式比较，推出系数公式

$$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\,D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]. \tag{3.102}$$

标准四维动量 k^μ 和相应的小群体现了单粒子态的特征，可以通过它们为单粒子态分类，物理上遇到三种情况[4]。第一种情况是**真空态**，此时 $p^\mu = (0,0,0,0)$，而标准四维动量也只能是 $k^\mu = (0,0,0,0)$，它在任意 Lorentz 变换下不变，相应的小群是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$。第二、三种情况分别是有质量和无质量的粒子态，在下面两个小节中详细讨论。

3.3.1 有质量的粒子

对于**有质量的粒子**，$p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$，其中质量 $m > 0$。此时 p^μ 是类时矢量，取标准四维动量为 $k^\mu = (m,0,0,0)$，沿任意方向的 Lorentz 增速变换会改变 k^μ，任意空间旋转变换则保持 k^μ 不变，因此相应的小群是 $\mathrm{SO}(3)$。

在量子力学中，归一化后的态矢仍然具有一定的任意性，态矢 $|\Psi\rangle$ 与相差一个相位因子的态矢 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,|\Psi\rangle$（$\phi$ 为实数）描述相同的量子态。因此，一般地，量子 Lorentz 变换的同态关系 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$ 应修正为

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\Lambda_2,\Lambda_1)}U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.103}$$

若实相位 $\varphi(\Lambda_2,\Lambda_1)$ 不恒为零，则集合 $\{U(\Lambda)\}$ 不是 Lorentz 群的线性表示，而是**投影表示** (projective representation)。

对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \mathrm{SO}(3)$，则有

$$U(W_2)U(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}U(W_2W_1). \tag{3.104}$$

左右两边分别作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k)\rangle$ 上，参考 (3.96) 和 (3.97) 式，得

$$\sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle\,, \tag{3.105}$$

故

$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1). \tag{3.106}$$

[4]更详细的论证见参考书【5】第 2 章。

若 $\varphi(W_2, W_1)$ 不恒为零，则矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成小群 SO(3) 的投影表示。

这里遇到的投影表示就是 3.2 节提到的 n 值表示，它的存在意味着群空间的连通度 $n > 1$，将这个群替换成它的单连通覆盖群，则相关的投影表示对应于覆盖群的忠实线性表示。因此，应该用**覆盖群的不等价不可约线性表示**为粒子态分类。

在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元，由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点。从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线。考虑 SO(3) 群空间内一条闭合曲线，它从恒元出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，根据 (3.104) 式，相应的量子变换是

$$U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}\,\mathbb{I}. \tag{3.107}$$

如图 3.5 中左图所示，若这条曲线能连续地收缩成恒元这一点，则连续性意味着

$$U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \mathbb{I}, \tag{3.108}$$

即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)} = 1$。如图 3.5 中右图所示，若这条曲线包含奇数次对径点跳跃，则不能连续收缩成恒元一点，而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}$ 不一定等于 1。不过，依照图 3.8 中的步骤，重复走这条闭合曲线的路径两次，则包含偶数次对径点跳跃，可通过连续形变消除这些跳跃，从而收缩成恒元一点[5]，故

$$[U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)]^2 = \mathbb{I}. \tag{3.109}$$

由此得到 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \pm\mathbb{I}$，即

$$U(W_2)U(W_1) = \pm U(W_2W_1). \tag{3.110}$$

可见，SO(3) 群的相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}$ 可取 ± 1。相位因子既能取 $+1$ 又能取 -1 的情况对应于*双值表示*。

SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任何经过恒元的闭合曲线都能连续收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示。接下来讨论 SU(2) 群的线性表示，从而为质量非零的单粒子态分类。

由于 SU(2) 群与 SO(3) 群具有相同的 Lie 代数，可将总角动量算符 $\mathbf{J}$ 看作 SU(2) 群的生成元算符。用 $\mathbf{J}$ 构造一个 **2 阶 Casimir 算符**

$$\boxed{\mathbf{J}^2 \equiv J^iJ^i = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2.} \tag{3.111}$$

由 SU(2) 代数关系 (3.41) 和 ε^{ijk} 的全反对称性推出

$$[\mathbf{J}^2, J^i] = [J^jJ^j, J^i] = J^j[J^j, J^i] + [J^j, J^i]J^j = \mathrm{i}\varepsilon^{jik}J^jJ^k + \mathrm{i}\varepsilon^{jik}J^kJ^j = \mathrm{i}(\varepsilon^{kji} + \varepsilon^{kij})J^jJ^k = 0, \tag{3.112}$$

[5]相关演示动画见 https://www.bilibili.com/video/BV1Gv4y1t7yx?p=3。

图 3.8: 对闭合曲线连续形变以消除偶数次对径点跳跃并收缩成恒元一点示意图。第一幅图沿同一闭合路径走了两遍，第一遍用实线表示，第二遍用点线表示。

即 $\mathbf{J}^2$ 与所有生成元对易，这是 Casimir 算符的一般特征。因此，厄米算符 $\mathbf{J}^2$ 与 J^3 可以具有共同本征态 $|\eta,\sigma\rangle$，满足归一化条件 $\langle\eta,\sigma|\eta,\sigma\rangle = 1$ 和本征方程

$$\mathbf{J}^2\,|\eta,\sigma\rangle = \eta\,|\eta,\sigma\rangle\,, \quad J^3\,|\eta,\sigma\rangle = \sigma\,|\eta,\sigma\rangle\,, \tag{3.113}$$

其中本征值 η 和 σ 是实数。

引入两个算符

$$J^\pm \equiv J^1 \pm \mathrm{i}J^2, \tag{3.114}$$

它们满足 $(J^\pm)^\dagger = J^\mp$ 和

$$[\mathbf{J}^2, J^\pm] = 0, \quad [J^3, J^\pm] = [J^3, J^1] \pm \mathrm{i}[J^3, J^2] = \mathrm{i}J^2 \pm \mathrm{i}(-\mathrm{i}J^1) = \mathrm{i}J^2 \pm J^1 = \pm J^\pm. \tag{3.115}$$

从而推出

$$\mathbf{J}^2 J^\pm\,|\eta,\sigma\rangle \;=\; J^\pm\mathbf{J}^2\,|\eta,\sigma\rangle = \eta J^\pm\,|\eta,\sigma\rangle\,, \tag{3.116}$$

$$J^3 J^\pm\,|\eta,\sigma\rangle \;=\; (J^\pm J^3 \pm J^\pm)\,|\eta,\sigma\rangle = (\sigma\pm 1)J^\pm\,|\eta,\sigma\rangle\,, \tag{3.117}$$

即 $J^\pm\,|\eta,\sigma\rangle$ 的 $\mathbf{J}^2$ 和 J^3 本征值分别是 η 和 $\sigma\pm 1$，因而可将它表达为

$$J^\pm\,|\eta,\sigma\rangle = c^\pm_{\eta,\sigma}\,|\eta,\sigma\pm 1\rangle\,, \tag{3.118}$$

其中 $c^\pm_{\eta,\sigma}$ 是归一化常数。这个结果表明，J^+ 使 J^3 本征值增加 1，是一个**升算符**；J^- 使 J^3 本征值减少 1，是一个**降算符**。

由于 Hilbert 空间中态矢的自我内积非负，利用本征方程 (3.113) 和 (3.111) 式推出

$$\begin{aligned}\eta-\sigma^2 &= \langle\eta,\sigma|\,(\eta-\sigma^2)\,|\eta,\sigma\rangle=\langle\eta,\sigma|\,[\mathbf{J}^2-(J^3)^2]\,|\eta,\sigma\rangle=\langle\eta,\sigma|\,[(J^1)^2+(J^2)^2]\,|\eta,\sigma\rangle\\ &=\langle\eta,\sigma|\,(J^1)^\dagger J^1\,|\eta,\sigma\rangle+\langle\eta,\sigma|\,(J^2)^\dagger J^2\,|\eta,\sigma\rangle\geq 0,\end{aligned}\tag{3.119}$$

即 $\eta\geq\sigma^2$，故 $\eta\geq 0$ 且 $-\sqrt{\eta}\leq\sigma\leq\sqrt{\eta}$。这意味着 J^3 的本征值 σ 具有最大值 $\sigma_{\max}$ 和最小值 $\sigma_{\min}$，使得

$$J^+\,|\eta,\sigma_{\max}\rangle=0,\quad J^-\,|\eta,\sigma_{\min}\rangle=0.\tag{3.120}$$

由于升降算符 $J^\pm$ 对 $|\eta,\sigma\rangle$ 的每次作用使 σ 的值增加或减小 1，σ 的所有取值为

$$\sigma_{\max},\sigma_{\max}-1,\cdots,\sigma_{\min}+1,\sigma_{\min},\tag{3.121}$$

因而 $\sigma_{\max}-\sigma_{\min}$ 是一个自然数。

由 (3.111) 式和对易关系 (3.41) 推出

$$J^\mp J^\pm=(J^1\mp\mathrm{i}J^2)(J^1\pm\mathrm{i}J^2)=(J^1)^2+(J^2)^2\pm\mathrm{i}[J^1,J^2]=\mathbf{J}^2-(J^3)^2\mp J^3,\tag{3.122}$$

从而

$$0=J^-J^+\,|\eta,\sigma_{\max}\rangle=[\mathbf{J}^2-(J^3)^2-J^3]\,|\eta,\sigma_{\max}\rangle=(\eta-\sigma_{\max}^2-\sigma_{\max})\,|\eta,\sigma_{\max}\rangle\,,\tag{3.123}$$

$$0=J^+J^-\,|\eta,\sigma_{\min}\rangle=[\mathbf{J}^2-(J^3)^2+J^3]\,|\eta,\sigma_{\min}\rangle=(\eta-\sigma_{\min}^2+\sigma_{\min})\,|\eta,\sigma_{\min}\rangle\,,\tag{3.124}$$

故

$$\eta=\sigma_{\max}(\sigma_{\max}+1)=\sigma_{\min}(\sigma_{\min}-1).\tag{3.125}$$

将上式看作关于 $\sigma_{\min}$ 的方程，第一个根 $\sigma_{\min}=\sigma_{\max}+1$ 不满足 $\sigma_{\min}\leq\sigma_{\max}$，只能取第二个根

$$\sigma_{\min}=-\sigma_{\max}.\tag{3.126}$$

令 $j\equiv\sigma_{\max}$，则 $\sigma_{\min}=-j$，而 $2j=\sigma_{\max}-\sigma_{\min}\geq 0$ 是一个整数。于是，j 的所有可能取值为

$$j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdots\tag{3.127}$$

$\mathbf{J}^2$ 的本征值是 $\eta=j(j+1)$，j 称为**角动量量子数**。J^3 的本征值 σ 称为**磁量子数**。对于固定的 j，σ 一共有 $2j+1$ 个取值，即

$$\sigma=j,j-1,\cdots,-j+1,-j.\tag{3.128}$$

将 $\mathbf{J}^2$ 与 J^3 的共同本征态改记为 $|j,\sigma\rangle$，相应的正交归一关系为

$$\langle j,\sigma'|j,\sigma\rangle=\delta_{\sigma'\sigma},\quad \sigma,\sigma'=j,j-1,\cdots,-j+1,-j,\tag{3.129}$$

完备性关系是

$$\sum_{\sigma=-j}^{j}|j,\sigma\rangle\,\langle j,\sigma|=\mathbb{I},\tag{3.130}$$

本征方程为

$$\mathbf{J}^2 \left|j,\sigma\right\rangle = j(j+1)\left|j,\sigma\right\rangle, \quad J^3\left|j,\sigma\right\rangle = \sigma\left|j,\sigma\right\rangle. \tag{3.131}$$

类似于 (3.118) 式，有

$$J^{\pm}\left|j,\sigma\right\rangle = c^{\pm}_{j,\sigma}\left|j,\sigma\pm 1\right\rangle. \tag{3.132}$$

利用 $(J^{\pm})^{\dagger} = J^{\mp}$ 和 (3.122) 式推出

$$\begin{aligned}|c^{\pm}_{j,\sigma}|^2 &= \left\langle j,\sigma\pm 1\right|(c^{\pm}_{j,\sigma})^* c^{\pm}_{j,\sigma}\left|j,\sigma\pm 1\right\rangle = \left\langle j,\sigma\right| J^{\mp}J^{\pm}\left|j,\sigma\right\rangle \\ &= \left\langle j,\sigma\right|(\mathbf{J}^2-(J^3)^2\mp J^3)\left|j,\sigma\right\rangle = j(j+1)-\sigma^2\mp\sigma = (j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1),\end{aligned} \tag{3.133}$$

从而

$$J^{\pm}\left|j,\sigma\right\rangle = \zeta^{\pm}_{j,\sigma}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\left|j,\sigma\pm 1\right\rangle, \tag{3.134}$$

其中 $\zeta^{\pm}_{j,\sigma}$ 是模为 1 的相位因子，其取值是任意的。上式给出 $J^{+}\left|j,j\right\rangle = J^{-}\left|j,-j\right\rangle = 0$，符合 $\sigma_{\max} = j$ 和 $\sigma_{\min} = -j$ 的要求。特别地，这里将相位因子 $\zeta^{+}_{j,\sigma}$ 取为

$$\zeta^{+}_{j,\sigma} = \begin{cases} -1, & \sigma \geq 0, \\ +1, & \sigma < 0, \end{cases} \tag{3.135}$$

则

$$J^{+}\left|j,\sigma\right\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\left|j,\sigma+1\right\rangle, & \sigma \geq 0, \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\left|j,\sigma+1\right\rangle, & \sigma < 0, \end{cases} \tag{3.136}$$

下面构造 SU(2) 群的 $2j+1$ 维线性表示，相应的生成元矩阵 $\tau^i_{(j)}$ 定义为

$$(\tau^i_{(j)})_{\sigma'\sigma} \equiv \left\langle j,\sigma'\right| J^i\left|j,\sigma\right\rangle, \tag{3.137}$$

其中 σ' 和 σ 是矩阵的行列指标。由于 J^i 是厄米算符，有

$$(\tau^i_{(j)})^*_{\sigma\sigma'} = \left\langle j,\sigma\right| J^i\left|j,\sigma'\right\rangle^* = \left\langle j,\sigma'\right|(J^i)^{\dagger}\left|j,\sigma\right\rangle = \left\langle j,\sigma'\right| J^i\left|j,\sigma\right\rangle = (\tau^i_{(j)})_{\sigma'\sigma}, \tag{3.138}$$

即 $\tau^i_{(j)}$ 是厄米矩阵，

$$(\tau^i_{(j)})^{\dagger} = \tau^i_{(j)}. \tag{3.139}$$

由完备性关系 (3.130) 和 SU(2) 代数关系 (3.41) 推出

$$\begin{aligned}[\tau^i_{(j)},\tau^k_{(j)}]_{\sigma'\sigma} &= \sum_{\sigma''}\left[\left\langle j,\sigma'\right| J^i\left|j,\sigma''\right\rangle\left\langle j,\sigma''\right| J^k\left|j,\sigma\right\rangle - \left\langle j,\sigma'\right| J^k\left|j,\sigma''\right\rangle\left\langle j,\sigma''\right| J^i\left|j,\sigma\right\rangle\right] \\ &= \left\langle j,\sigma'\right|[J^i,J^k]\left|j,\sigma\right\rangle = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\left\langle j,\sigma'\right| J^l\left|j,\sigma\right\rangle = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(\tau^l_{(j)})_{\sigma'\sigma},\end{aligned} \tag{3.140}$$

可见，这样定义的生成元矩阵确实满足 SU(2) 代数关系

$$[\tau^i_{(j)},\tau^k_{(j)}] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\tau^l_{(j)}. \tag{3.141}$$

引入 $2j+1$ 阶方阵 $\tau^{\pm}_{(j)}$，定义为

$$(\tau^{\pm}_{(j)})_{\sigma'\sigma} \equiv \langle j,\sigma'|\, J^{\pm}\, |j,\sigma\rangle\,. \tag{3.142}$$

由 (3.136) 式和正交归一关系 (3.129) 得

$$(\tau^{+}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma'|\, J^{+}\, |j,\sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\delta_{\sigma',\sigma+1}, & \sigma \geq 0, \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\delta_{\sigma',\sigma+1}, & \sigma < 0, \end{cases} \tag{3.143}$$

再由 $(J^-)^\dagger = J^+$ 推出

$$(\tau^{-}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma'|\, J^{-}\, |j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma|\, J^{+}\, |j,\sigma'\rangle^* = (\tau^{+}_{(j)})^*_{\sigma\sigma'}, \tag{3.144}$$

即

$$\tau^{-}_{(j)} = (\tau^{+}_{(j)})^\dagger. \tag{3.145}$$

根据 $J^{\pm}$ 的定义 (3.114)，有

$$J^1 = \frac{1}{2}(J^+ + J^-), \quad J^2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(J^+ - J^-), \tag{3.146}$$

以此推出

$$\tau^1_{(j)} = \frac{1}{2}(\tau^+_{(j)} + \tau^-_{(j)}), \quad \tau^2_{(j)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\tau^+_{(j)} - \tau^-_{(j)}). \tag{3.147}$$

另一方面，本征方程 (3.131) 表明

$$(\tau^3_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma'|\, J^3\, |j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma'|\, \sigma\, |j,\sigma\rangle = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}. \tag{3.148}$$

SU(2) 群的二阶 Casimir 算符在 $2j+1$ 维线性表示中定义为

$$\boldsymbol{\tau}^2_{(j)} \equiv \sum_i \tau^i_{(j)}\tau^i_{(j)}, \tag{3.149}$$

由完备性关系 (3.130) 和本征方程 (3.131) 推出

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\tau}^2_{(j)})_{\sigma'\sigma} &= \sum_i (\tau^i_{(j)}\tau^i_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sum_i\sum_{\sigma''} \langle j,\sigma'|\, J^i\, |j,\sigma''\rangle\, \langle j,\sigma''|\, J^i\, |j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma'|\, \mathbf{J}^2\, |j,\sigma\rangle \\ &= \langle j,\sigma'|\, j(j+1)\, |j,\sigma\rangle = j(j+1)\delta_{\sigma'\sigma}.\end{aligned} \tag{3.150}$$

利用上述表达式可以得到生成元矩阵 $\tau^i_{(j)}$ 的具体形式。当 $j=1/2$ 时，σ 和 σ' 都只能取 $1/2$ 和 $-1/2$，而非零的 $\tau^+_{(1/2)}$ 矩阵元只有

$$(\tau^+_{(1/2)})_{1/2,-1/2} = \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle| J^+ \middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} = 1, \tag{3.151}$$

故

$$\tau^+_{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^-_{(1/2)} = (\tau^+_{(1/2)})^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.152}$$

进而得到 SU(2) 群 2 维线性表示的生成元矩阵

$$\tau^1_{(1/2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \frac{\sigma^1}{2}, \quad \tau^2_{(1/2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \tau^3_{(1/2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^3}{2}, \tag{3.153}$$

这显然是基础表示的生成元矩阵 (3.53)。

当 $j=1$ 时，σ 和 σ' 的取值为 1、0 和 -1，非零的 $\tau^+_{(1)}$ 矩阵元是

$$(\tau^+_{(1)})_{1,0} = \langle 1,1|\, J^+ \,|1,0\rangle = -\sqrt{(1-0)(1+0+1)} = -\sqrt{2}, \tag{3.154}$$

$$(\tau^+_{(1)})_{0,-1} = \langle 1,0|\, J^+ \,|1,-1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)} = \sqrt{2}, \tag{3.155}$$

故

$$\tau^+_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^-_{(1)} = (\tau^+_{(1)})^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.156}$$

进而得到 SU(2) 群 3 维线性表示的生成元矩阵

$$\tau^1_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad \tau^2_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & \mathrm{i} & \\ -\mathrm{i} & & -\mathrm{i} \\ & \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \tau^3_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.157}$$

任意小群变换 $W \in \mathrm{SO}(3)$ 可以用三个空间旋转角 θ^i 描写，它在 SU(2) 群的 $2j+1$ 维线性表示中诱导出表示矩阵

$$D^{(j)}[W(\theta^i)] = \exp(\mathrm{i}\theta^i \tau^i_{(j)}), \tag{3.158}$$

其无穷小展开式符合 (3.35) 式。这样的表示矩阵的集合构成了 SU(2) 群的 $2j+1$ 维线性表示 $D^{(j)}$。实际上，SU(2) 群所有的不等价不可约线性表示就是

$$D^{(j)}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots \tag{3.159}$$

它们都是幺正表示，因为生成元矩阵 $\tau^i_{(j)}$ 是厄米的。

对于自由的单粒子态，不存在轨道角动量，因此 $\mathbf{J}$ 相当于**自旋角动量算符 $\mathbf{S}$**，而**自旋量子数**是 $s=j$，它的所有可能取值为

$$\boxed{s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots} \tag{3.160}$$

SU(2) 群 $2s+1$ 维线性表示的矩阵元表达为 $D^{(s)}_{\sigma'\sigma}(W)$，其中**自旋磁量子数**

$$\boxed{\sigma', \sigma = s, s-1, \cdots, -s+1, -s} \tag{3.161}$$

表征**自旋极化**。可以用自旋量子数 s 为有质量粒子分类。根据 (3.101) 式，自旋为 s 的有质量单粒子态 $|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda)\,|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D^{(s)}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]\,|\Psi_{s,\sigma'}(\Lambda p)\rangle\,. \tag{3.162}$$

因此，

自旋为 s 的有质量粒子具有 $2s+1$ 种自旋极化态。

可见，量子 Lorentz 变换将 σ 对应的极化态变换成 σ' 对应的极化态的线性组合。

当 s 为整数 $(0,1,2,\cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的非忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的线性表示，描述**整数自旋**的粒子。$D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示，描述零自旋粒子。$D^{(1)}$ 是 SO(3) 群的基础表示，描述自旋为 1 的粒子。

当 s 为半奇数 $(1/2,3/2,5/2,\cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的双值表示，描述**半奇数自旋**的粒子。$D^{(1/2)}$ 是 SU(2) 群的基础表示，描述自旋为 1/2 的粒子。半奇数自旋对应着双值表示，因而是量子理论特有的。

对于绕 z 轴的旋转变换 $R_z(\theta^3)$，$D^{(1)}$ 中相应的表示矩阵为

$$D^{(1)}[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3\tau^3_{(1)}) = \exp\begin{pmatrix}\mathrm{i}\theta^3 & & \\ & 0 & \\ & & -\mathrm{i}\theta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\theta^3) & & \\ & 1 & \\ & & \exp(-\mathrm{i}\theta^3)\end{pmatrix}, \tag{3.163}$$

从而

$$D^{(1)}[R_z(2\pi)] = D^{(1)}[R_z(0)] = \mathbf{1}, \tag{3.164}$$

即转动 2π 角能够回复到原来的状态。这表明自旋为 1 的粒子态转动的情况与三维空间中的矢量相同。另一方面，$D^{(1/2)}$ 中相应的表示矩阵为

$$D^{(1/2)}[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3\tau^3_{(1/2)}) = \exp\begin{pmatrix}\mathrm{i}\theta^3/2 & \\ & -\mathrm{i}\theta^3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\theta^3/2) & \\ & \exp(-\mathrm{i}\theta^3/2)\end{pmatrix}, \tag{3.165}$$

从而

$$D^{(1/2)}[R_z(2\pi)] = -\mathbf{1}, \tag{3.166}$$

即转动 2π 角给出相位因子 -1，这是 SO(3) 群双值表示的特点。然后，

$$D^{(1/2)}[R_z(4\pi)] = D^{(1/2)}[R_z(0)] = \mathbf{1}, \tag{3.167}$$

即转动 4π 角才能回复到原来的状态。可见，自旋为 1/2 的粒子态转动的角度只有三维空间中矢量转动角度的一半，这是自旋 1/2 的特征。

类似于总角动量算符 $\mathbf{J}$，自旋角动量算符 $\mathbf{S}$ 也满足 SU(2) 代数关系 $[S^i, S^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}S^k$，从而 2 阶 Casimir 算符 $\mathbf{S}^2 \equiv S^iS^i$ 满足 $[\mathbf{S}^2, S^i] = 0$。对于非零的动量 $\mathbf{p}$，记它的归一化方向矢量为 $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$，引入**螺旋度** (helicity) **算符**

$$S_{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}, \tag{3.168}$$

它是自旋角动量算符在动量方向上的投影。由于 $[\mathbf{S}^2, S_{\mathbf{p}}] = \hat{p}^i[\mathbf{S}^2, S^i] = 0$，厄米算符 $\mathbf{S}^2$ 与 $S_{\mathbf{p}}$ 可具有共同本征态 $|s, \lambda\rangle$，满足本征方程

$$\mathbf{S}^2 |s, \lambda\rangle = s(s+1) |s, \lambda\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} |s, \lambda\rangle = \lambda |s, \lambda\rangle, \tag{3.169}$$

其中 λ 是螺旋度本征值。可以论证（参考习题 3.6），螺旋度 λ 类似于磁量子数 σ，具有 $2s+1$ 个取值

$$\lambda = s, s-1, \cdots, -s+1, -s. \tag{3.170}$$

因此，对于自旋为 s 的有质量粒子，也可以用螺旋度 λ 来描述它的 $2s+1$ 种自旋极化态。

由于包含双连通的子群 SO(3)，固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 也是双连通的，它的覆盖群是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 **2 阶特殊线性群** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，见习题 3.7。在 Poincaré 群空间中，与恒元连通的部分对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 与时空平移群的半直积群，它是双连通的，相应的覆盖群是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 与时空平移群的半直积群。在 3.1 和 3.2 节的讨论中，我们没有在量子 Poincaré 变换的同态关系 (3.7) 中引入相位因子，这相当于在覆盖群的线性表示中进行讨论，因而导出的结果是合理的。

3.3.2 无质量的粒子

对于**无质量的粒子**，$p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$。此时，p^μ 是类光矢量，取标准四维动量为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$，其中 $\kappa > 0$，相应三维动量 $\mathbf{k}$ 沿 z 轴方向。相应小群中的任意变换 $W^\mu{}_\nu$ 满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$。

我们需要知道保持 k^μ 不变的小群是什么。为此，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu/\kappa = (1,0,0,1)$。由 $W^\mu{}_\nu \tilde{k}^\nu = W^\mu{}_\nu k^\nu/\kappa = k^\mu/\kappa = \tilde{k}^\mu$ 可知，$\tilde{k}^\mu$ 也在小群变换下不变，相应的协变矢量满足 $\tilde{k}_\mu = \tilde{k}_\nu (W^{-1})^\nu{}_\mu$。再引入类时 Lorentz 矢量 $\tilde{t}^\mu = (1,0,0,0)$，用小群变换 $W^\mu{}_\nu$ 对它作 Lorentz 变换，得到 $t^\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu$。从而推出

$$t^\mu \tilde{k}_\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho (W^{-1})^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho = \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\nu = 1. \tag{3.171}$$

考虑到 $\tilde{k}^\mu = (1,0,0,1)$，满足这样一个 $1 = t^\mu \tilde{k}_\mu = t^0 - t^3$ 条件的 t^μ 一般形式为

$$t^\mu = (1+\zeta, \alpha, \beta, \zeta). \tag{3.172}$$

由于 Lorentz 变换不改变 Lorentz 矢量的内积，$t^\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu$ 的自我内积满足

$$t^\mu t_\mu = \tilde{t}^\mu \tilde{t}_\mu = 1, \tag{3.173}$$

故 $t^\mu t_\mu = (1+\zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = 1$，因而 ζ 与 α、β 的关系为

$$\zeta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad \alpha, \beta \in (-\infty, +\infty), \tag{3.174}$$

实数 α 和 β 的取值不受约束。

考虑固有保时向 Lorentz 变换

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}. \tag{3.175}$$

可以验证，它满足固有保时向 Lorentz 变换的要求 $S^{\mathrm{T}}gS=g$、$\det(S)=1$ 和 $S^{0}{}_{0}\geq+1$。由于上式右边矩阵中的第一列正好是上述 $t^{\mu}=(1+\zeta,\alpha,\beta,\zeta)$，$S(\alpha,\beta)$ 将 $\tilde{t}^{\mu}=(1,0,0,0)$ 变换为 t^{μ}，即

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)\tilde{t}^{\nu}=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\zeta\\ \alpha\\ \beta\\ \zeta\end{pmatrix}=t^{\mu}=W^{\mu}{}_{\nu}\tilde{t}^{\nu}. \tag{3.176}$$

这意味着

$$\tilde{t}^{\rho}=[S^{-1}(\alpha,\beta)]^{\rho}{}_{\mu}S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)\tilde{t}^{\nu}=[S^{-1}(\alpha,\beta)]^{\rho}{}_{\mu}W^{\mu}{}_{\nu}\tilde{t}^{\nu}, \tag{3.177}$$

也就是说，变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 保持类时矢量 $\tilde{t}^{\mu}=(1,0,0,0)$ 不变，所以它必定是一个空间旋转变换。另一方面，由

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)k^{\nu}=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\kappa\\0\\0\\\kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\kappa\\0\\0\\\kappa\end{pmatrix}=k^{\mu} \tag{3.178}$$

可知，$S(\alpha,\beta)$ 是一个小群变换。从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 是保持 $k^{\mu}=(\kappa,0,0,\kappa)$ 不变的空间旋转变换，它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$，满足

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W=R_z(\theta). \tag{3.179}$$

$R_z(\theta)$ 的具体形式见 (1.36) 式。于是，小群变换的最一般形式是

$$W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta). \tag{3.180}$$

通过计算可知，$S(\alpha,\beta)$ 和 $R_z(\theta)$ 分别满足

$$S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2)=S(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2), \tag{3.181}$$

$$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2)=R_z(\theta_1+\theta_2). \tag{3.182}$$

从而 $S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2)=S(\alpha_2,\beta_2)S(\alpha_1,\beta_1)$，$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2)=R_z(\theta_2)R_z(\theta_1)$，因此集合 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 和 $\{R_z(\theta)\}$ 分别构成小群的两个 Abel 子群。进一步推出

$$R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta)=S(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta,\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta), \tag{3.183}$$

这意味着 $S(\alpha,\beta)$ 在任意小群元素相似变换下的结果仍然是子群 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 中的元素。对于这种情况，数学上称 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 是小群的**不变子群** (invariant subgroup)。

小群变换的以上乘法关系与二维 Euclid 空间的等距群 ISO(2) 中的乘法关系相同。ISO(2) 群变换由二维平面上的平移变换和旋转变换组成。(α,β) 可作为二维平移变换的参数，而 θ 是旋转变换的参数。因此，这里的小群就是 ISO(2) 群。

现在讨论小群 ISO(2) 的生成元算符。ISO(2) 变换 (3.180) 的无穷小形式是 $W^\mu{}_\nu(\alpha,\beta,\theta)=\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu$，其中无穷小参数为

$$\omega^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&0\\ \alpha&0&\theta&-\alpha\\ \beta&-\theta&0&-\beta\\ 0&\alpha&\beta&0\end{pmatrix}. \tag{3.184}$$

容易验证 $\omega^\mu{}_\nu k^\nu=0$，因而这样的无穷小变换保持 k^μ 不变。从而，反对称无穷小参数是

$$\omega_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&0\\ -\alpha&0&-\theta&\alpha\\ -\beta&\theta&0&\beta\\ 0&-\alpha&-\beta&0\end{pmatrix}, \tag{3.185}$$

即

$$\alpha=-\omega_{31}=\omega_{13}=\omega_{01}=-\omega_{10},\quad \beta=\omega_{23}=-\omega_{32}=\omega_{02}=-\omega_{20},\quad \theta=\omega_{21}=-\omega_{12}. \tag{3.186}$$

根据 (3.10) 式，相应的无穷小量子变换为

$$\begin{aligned}U(\mathbf{1}+\omega)&=\mathbb{I}-\mathrm{i}(\omega_{31}J^{31}+\omega_{01}J^{01})-\mathrm{i}(\omega_{23}J^{23}+\omega_{02}J^{02})-\mathrm{i}\omega_{12}J^{12}\\&=\mathbb{I}+\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B+\mathrm{i}\theta J^3,\end{aligned} \tag{3.187}$$

其中 $J^3=J^{12}$，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$A\equiv J^{31}-J^{01}=J^2-K^1,\quad B\equiv -J^{23}-J^{02}=-J^1-K^2. \tag{3.188}$$

由 Lorentz 代数关系 (3.63) 推出小群 ISO(2) 的生成元算符 J^3、A 和 B 的对易关系

$$[J^3,A]=[J^3,J^2]-[J^3,K^1]=-\mathrm{i}J^1-\mathrm{i}K^2=\mathrm{i}B, \tag{3.189}$$

$$[J^3,B]=-[J^3,J^1]-[J^3,K^2]=-\mathrm{i}J^2+\mathrm{i}K^1=-\mathrm{i}A, \tag{3.190}$$

$$[A,B]=-[J^2,J^1]-[J^2,K^2]+[K^1,J^1]+[K^1,K^2]=\mathrm{i}J^3-\mathrm{i}J^3=0. \tag{3.191}$$

这与 Poincaré 代数关系 (3.72) 和 (3.73) 中的对易关系

$$[J^3,P^1]=\mathrm{i}P^2,\quad [J^3,P^2]=-\mathrm{i}P^1,\quad [P^1,P^2]=0 \tag{3.192}$$

相同，毕竟 J^3、P^1 和 P^2 生成了 xy 平面的 ISO(2) 群变换。

A 与 B 是相互对易的厄米算符，它们能够具有共同的本征单粒子态 $|\Psi_{a,b}(k)\rangle$，本征值分别为 a 和 b，满足本征方程

$$A\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = a\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle\,,\quad B\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = b\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle\,. \tag{3.193}$$

根据 (3.183) 式，小群 ISO(2) 的量子变换满足同态关系

$$U^{-1}[R_z(\theta)]U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = U[S(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta,\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)]. \tag{3.194}$$

将上式展开到无穷小参数 α 和 β 的第一阶，得

$$U^{-1}[R_z(\theta)](\mathbb{I}+\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B)U[R_z(\theta)] = \mathbb{I}+\mathrm{i}(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)A+\mathrm{i}(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)B, \tag{3.195}$$

由 α 和 β 的任意性推出

$$U^{-1}[R_z(\theta)]AU[R_z(\theta)] = A\cos\theta+B\sin\theta,\quad U^{-1}[R_z(\theta)]BU[R_z(\theta)] = -A\sin\theta+B\cos\theta, \tag{3.196}$$

即 $AU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](A\cos\theta+B\sin\theta)$，$BU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta+B\cos\theta)$。那么，态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle \equiv U[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle$ 是 A 和 B 的共同本征态：

$$\begin{aligned} A\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle &= AU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = U[R_z(\theta)](A\cos\theta+B\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle \\ &= U[R_z(\theta)](a\cos\theta+b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = (a\cos\theta+b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.197}$$

$$\begin{aligned} B\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle &= BU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta+B\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle \\ &= U[R_z(\theta)](-a\sin\theta+b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = (-a\sin\theta+b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.198}$$

由于转动角 θ 取连续值，这里的本征值 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 和 $-a\sin\theta+b\cos\theta$ 也是连续的。因此，只要 a 和 b 不全为零，就有一系列连续的本征态 $|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle$。但是，实验上没有观测到无质量粒子具有以转动角 θ 作为连续自由度的物理态。因此，自然界中的物理态是 $a=b=0$ 的本征态，只由剩下的小群生成元算符 J^3 的本征值 λ 标记，记作 $|\Psi_\lambda(k)\rangle$，满足

$$A\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = 0,\quad B\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = 0,\quad J^3\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = \lambda\,|\Psi_\lambda(k)\rangle\,. \tag{3.199}$$

J^3 是总角动量算符 $\mathbf{J}$ 沿 z 轴方向的分量，由于自由的单粒子态不具有轨道角动量，$\mathbf{J}$ 在此处只描述自旋角动量。标准四维动量 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 对应的三维动量 $\mathbf{k}$ 也沿着 z 轴方向，因此这里的 J^3 相当于自旋角动量算符在动量方向上的投影，即螺旋度算符。从而，λ 就是螺旋度本征值，表征自旋极化。

无穷小量子变换 (3.187) 表明

$$\left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \mathrm{i}A,\quad \left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \mathrm{i}B,\quad \left.\frac{\mathrm{d}U[R_z(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = \mathrm{i}J^3, \tag{3.200}$$

满足以上各式的有限量子变换是

$$U[S(\alpha,\beta)] = \exp(\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B),\quad U[R_z(\theta)] = \exp(\mathrm{i}\theta J^3). \tag{3.201}$$

一般小群变换 (3.180) 对应的量子变换为

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)] = U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)\exp(\mathrm{i}\theta J^3), \tag{3.202}$$

作用到单粒子物理态 $|\Psi_\lambda(k)\rangle$ 上，得

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)]\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = \exp(\mathrm{i}\lambda\theta)\,|\Psi_\lambda(k)\rangle\,. \tag{3.203}$$

在 (3.96) 式中取 $\sigma=\lambda$ 和 $\sigma'=\lambda'$，得

$$U(W)\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}(W)\,|\Psi_{\lambda'}(k)\rangle\,, \tag{3.204}$$

与 (3.203) 式比较，有

$$D_{\lambda'\lambda}(W) = \exp(\mathrm{i}\lambda\theta)\delta_{\lambda'\lambda}. \tag{3.205}$$

另一方面，(3.94) 式化为

$$V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p) = W = S[\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p)]R_z[\theta(\Lambda,p)], \tag{3.206}$$

这个关系决定了 θ 对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系 $\theta(\Lambda,p)$。根据 (3.101) 式，依照 (3.92) 式定义的一般单粒子态 $|\Psi_\lambda(p)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda)\,|\Psi_\lambda(p)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp[\mathrm{i}\lambda\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\lambda(\Lambda p)\rangle\,. \tag{3.207}$$

这个式子表明 $|\Psi_\lambda(p)\rangle$ 与变换后的态 $U(\Lambda)\,|\Psi_\lambda(p)\rangle$ 具有相同的 λ，也就是说，量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 不会混合具有不同螺旋度的无质量粒子态。这意味着，

> 对无质量粒子来说，**螺旋度 λ 是固有保时向 Lorentz 变换的不变量**，在所有惯性系中取值相同。

因此，无质量粒子可根据螺旋度 λ 的值分类。

前面提到，由于固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 包含了子群 $\mathrm{SO}(3)$，$\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的群空间是双连通的。与 $\mathrm{SO}(3)$ 的情况一样，$\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 群空间内从恒元出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到恒元的闭合曲线分为两类，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能。可以推出类似 (3.110) 式的关系

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.208}$$

如果一条闭合曲线包含的旋转变换累计绕 z 轴转动角度 $\theta=2\pi$，那么它会在 $\mathrm{SO}(3)$ 群空间中经历奇数次对径点跳跃，这是因为累计转动 π 角时必定到达一个对径点。对于无质量粒子态，(3.207) 式表明，这条闭合曲线产生一个因子 $\exp(\mathrm{i}\lambda\theta)=\exp(2\pi\lambda\mathrm{i})$，它应该就是 (3.208) 式右边的相位因子 ±1。如果一条闭合曲线包含的旋转变换累计绕 z 轴转动 4π 角，则它会包含偶数次对径点跳跃，从而可以连续地收缩成恒元一点，相应的相位因子是 1，故

$$\exp(4\pi\lambda\mathrm{i}) = 1. \tag{3.209}$$

这个条件限制了**无质量粒子螺旋度** λ 的取值，要求

$$\boxed{\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \cdots} \tag{3.210}$$

λ 为整数意味着 $\exp(2\pi\lambda\mathrm{i}) = +1$，对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的线性表示；λ 为半奇数意味着 $\exp(2\pi\lambda\mathrm{i}) = -1$，对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的双值表示。由于螺旋度是自旋角动量在动量方向上的投影，**无质量粒子自旋量子数**可取

$$\boxed{s = |\lambda| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \cdots} \tag{3.211}$$

这与有质量粒子自旋量子数的所有可能取值一样。

根据螺旋度 λ 的取值为无质量粒子分类，则应将 $\lambda = \pm s$ 的两种无质量粒子当作不同粒子。然而，宇称变换[6]使粒子动量方向反转，但不改变角动量方向，因此会改变 λ 的符号，从而联系螺旋度相反的两种无质量粒子。如果无质量粒子*不参与破坏宇称的相互作用*，则螺旋度相反的两种粒子具有相同的相互作用行为，可以把它们当作同一种粒子的两种自由度，从而

自旋为 s 的无质量粒子具有 2 种自旋极化态，对应于 2 种螺旋度 $\lambda = \pm s$。

实际上，*电磁相互作用*、*强相互作用*和*引力相互作用*都保持宇称守恒，即具有空间反射对称性。作为电磁场的量子，**光子**是自旋为 1 的无质量粒子，具有 -1 和 $+1$ 两种螺旋度，分别对应于真空电磁波的左旋圆极化和右旋圆极化。假想的**引力子** (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度。

在*标准模型*中，自旋为 1/2 的各种中微子都没有质量，它们参与*破坏宇称的弱相互作用*。三代**左旋正中微子** ν_e、ν_μ 和 ν_τ 的螺旋度是 $-1/2$，相应的反粒子是螺旋度为 $+1/2$ 的**右旋反中微子** $\bar{\nu}_e$、$\bar{\nu}_\mu$ 和 $\bar{\nu}_\tau$。对左旋正中微子态作宇称变换将得到右旋正中微子态，但是，在实验中没有发现参与弱相互作用的右旋正中微子，因而标准模型没有引入它们。

习　题

3.1 将 Lorentz 群的空间旋转生成元 J^i 和增速生成元 K^i 线性组合成

$$J_+^i \equiv \frac{1}{2}(J^i + \mathrm{i}K^i), \quad J_-^i \equiv \frac{1}{2}(J^i - \mathrm{i}K^i). \tag{3.212}$$

通过对易关系 (3.63) 证明

$$[J_+^i, J_+^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J_+^k, \quad [J_-^i, J_-^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J_-^k, \quad [J_+^i, J_-^j] = 0. \tag{3.213}$$

因此，J_+^i 和 J_-^i 是两套彼此独立的 SU(2) 群生成元，而 Lorentz 代数是两个 SU(2) 代数的直和。

[6]详细讨论见第 9 章。

3.2 根据对易关系 (3.72) 和 (3.73)，证明算符 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}\equiv J^iP^i$ 满足

$$[H,\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}]=0,\quad [P^i,\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}]=0. \tag{3.214}$$

3.3 将 SU(2) 群的任意元素 U 表达为

$$U=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}. \tag{3.215}$$

(a) 由 $U^\dagger U=\mathbf{1}$ 和 $\det(U)=1$ 推出

$$|a|^2+|c|^2=|b|^2+|d|^2=1,\quad a^*b+c^*d=0,\quad ad-bc=1, \tag{3.216}$$

并证明满足这些方程的解为

$$a=d^*,\quad b=-c^*,\quad |c|^2+|d|^2=1. \tag{3.217}$$

令 $d=u_0+\mathrm{i}u_3$，$c=u_2-\mathrm{i}u_1$，则 U 表达为

$$U=\begin{pmatrix} u_0-\mathrm{i}u_3 & -u_2-\mathrm{i}u_1\\ u_2-\mathrm{i}u_1 & u_0+\mathrm{i}u_3\end{pmatrix}. \tag{3.218}$$

实参数 u_0、u_1、u_2 和 u_3 必须满足

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2=|c|^2+|d|^2=1, \tag{3.219}$$

因此，它们之中只有三个是独立的。将 u_0、u_1、u_2 和 u_3 当作四维 Euclid 空间的直角坐标，则约束条件 (3.219) 表明 SU(2) 的群空间是四维 Euclid 空间中的三维球面 S^3。

记三维矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的球坐标为 (ω,θ,ϕ)，则 $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{n}$，其中单位矢量 $\mathbf{n}(\theta,\phi)$ 是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向矢量，相应的直角坐标为 $\mathbf{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$。设

$$u_0=\cos\frac{\omega}{2},\quad u_1=\sin\frac{\omega}{2}\sin\theta\cos\phi,\quad u_2=\sin\frac{\omega}{2}\sin\theta\sin\phi,\quad u_3=\sin\frac{\omega}{2}\cos\theta, \tag{3.220}$$

则条件 (3.219) 得到满足，从而可以用 (ω,θ,ϕ) 作为描述任意 $U(\mathbf{n},\omega)\in\mathrm{SU}(2)$ 的三个独立实参数。

(b) 证明

$$U(\mathbf{n},\omega)=\cos\frac{\omega}{2}\mathbf{1}-\mathrm{i}\sin\frac{\omega}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.221}$$

和

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=\mathbf{1}. \tag{3.222}$$

(c) 证明

$$U(\mathbf{n},\omega_1)U(\mathbf{n},\omega_2) = U(\mathbf{n},\omega_1+\omega_2), \tag{3.223}$$
$$U(\mathbf{n},2\pi) = -\mathbf{1}, \tag{3.224}$$
$$U(\mathbf{n},4\pi) = \mathbf{1}, \tag{3.225}$$
$$U(\mathbf{n},\omega) = -U(-\mathbf{n},2\pi-\omega) \tag{3.226}$$
$$U(\mathbf{n},\omega) = U(-\mathbf{n},4\pi-\omega). \tag{3.227}$$

从 (3.221) 式看出，对于固定的 $\mathbf{n}$，$U(\mathbf{n},\omega)$ 是 ω 的周期函数，周期为 4π。(3.227) 式表明，$\mathbf{n}$ 方向上半径为 $\omega\in[2\pi,4\pi]$ 的群元等价于 $-\mathbf{n}$ 方向上半径为 $4\pi-\omega\in[0,2\pi]$ 的群元。因此，SU(2) 的群空间也可以看成半径为 2π 的球体，球体中任意一点的方向由 $\mathbf{n}$ 描述，与球心的距离为 ω。(3.224) 式意味着球面上所有的点都对应于群元 $-\mathbf{1}$。

3.4 Pauli 矩阵 (3.54) 是无迹厄米矩阵，而任意 2×2 无迹厄米矩阵 X 只包含三个独立实参数，因此必定可以将 X 展开为三个 Pauli 矩阵的实线性组合。将组合系数取为三维 Euclid 空间中任意一点 P 的三个直角坐标 x^i，得

$$X = x^i\sigma^i = \begin{pmatrix} x^3 & x^1-\mathrm{i}x^2 \\ x^1+\mathrm{i}x^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \tag{3.228}$$

可见，无迹厄米矩阵 X 与 P 点的位置矢量 $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$ 是一一对应的。

(a) 证明

$$x^i = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(X\sigma^i), \quad \det(X) = -|\mathbf{x}|^2. \tag{3.229}$$

(b) 设 2×2 矩阵 $U\in\mathrm{SU}(2)$，即满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ 和 $\det(U)=1$。对 X 作相似变换 $X' = UXU^\dagger$，利用 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ 和 $\det(AB)=\det(BA)$ 证明

$$X'^\dagger = X', \quad \operatorname{tr}(X')=0, \quad \det(X')=\det(X). \tag{3.230}$$

可见，X' 也是无迹厄米矩阵，因而可表达为 $X'=x'^i\sigma^i$，即对应于三维空间另一点 P' 的位置矢量 $\mathbf{x}'=(x'^1,x'^2,x'^3)$。$\det(X')=\det(X)$ 表明 $|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}|^2$，因而 $\mathbf{x}'$ 与 $\mathbf{x}$ 可以用 3 阶实正交矩阵 R 联系起来：

$$x'^i = R^i{}_j x^j. \tag{3.231}$$

当 $U=\mathbf{1}$ 时 $X'=X$，故 $R=\mathbf{1}$。因为任意 U 可以在连通的 SU(2) 群空间中由恒元连续变化得到，所以 R 也可以在 O(3) 群空间中由恒元连续变化得到。这意味着 R 属于 O(3) 群的连通子群 SO(3)，满足 $\det(R)=1$。

任意两个行列式相等的 2×2 无迹厄米矩阵 X 和 X' 可以用 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 作相似变换联系起来，但这样的 U 不是唯一的。

图 3.9: 把 $\mathbf{x}$ 绕 $\mathbf{n}$ 方向转动 ω 角得到 $\mathbf{x}'$ 的示意图。

(c) 设 $U_1, U_2 \in \mathrm{SU}(2)$ 满足 $U_1 X U_1^\dagger = U_2 X U_2^\dagger = X'$，证明

$$[U_2^\dagger U_1, X] = 0, \tag{3.232}$$

即 $U_2^\dagger U_1$ 与任意 X 对易。因此 $U_2^\dagger U_1$ 与单位矩阵只相差一个常数因子 λ，即 $U_2^\dagger U_1 = \lambda \mathbf{1}$，故 $U_1 = \lambda U_2$。利用 $\det(U_1) = \det(U_2) = 1$ 证明

$$\lambda = \pm 1. \tag{3.233}$$

于是，用 U 和 $-U$ 对 X 作相似变换将得到的相同 X'。由 $R^i{}_j x^j \sigma^i = x'^i \sigma^i = X' = U X U^\dagger = x^j U \sigma^j U^\dagger$ 和 $\mathbf{x}$ 的任意性得到

$$U \sigma^j U^\dagger = \sigma^i R^i{}_j, \qquad (-U)\sigma^j(-U)^\dagger = \sigma^i R^i{}_j. \tag{3.234}$$

这给出 SU(2) 群元 U 和 $-U$ 与 SO(3) 群元 R 之间 2 对 1 的对应关系。

(d) 设 $U_1 \sigma^j U_1^\dagger = \sigma^i (R_1)^i{}_j$ 和 $U_2 \sigma^j U_2^\dagger = \sigma^i (R_2)^i{}_j$，证明以上对应关系对群乘积保持不变，即

$$(U_2 U_1)\sigma^j (U_2 U_1)^\dagger = \sigma^i (R_2 R_1)^i{}_j. \tag{3.235}$$

因此，这种对应关系是 SU(2) 群与 SO(3) 群之间的 $2:1$ 同态关系。

3.5 本题将验证 (3.221) 表达的 SU(2) 群元 $U(\mathbf{n}, \omega)$ 满足对应关系 (3.234)。如图 3.9 所示，将任意位置矢量 $\mathbf{x}$ 分解为平行于 $\mathbf{n}$ 的分量 $a\,\mathbf{n}$ 和垂直于 $\mathbf{n}$ 的分量 $b\,\mathbf{m}$，即

$$\mathbf{x} = a\,\mathbf{n} + b\,\mathbf{m}, \tag{3.236}$$

其中单位矢量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{m}$ 满足 $|\mathbf{n}|^2 = |\mathbf{m}|^2 = 1$ 和 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$。

(a) 利用 (3.222) 式证明

$$U(\mathbf{n}, \omega)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^\dagger(\mathbf{n}, \omega) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \tag{3.237}$$

(b) 对于任意三维矢量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$，利用 (3.57) 式证明

$$(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\mathbf{1} + \mathrm{i}(\mathbf{p}\times\mathbf{q})\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.238}$$

以此推出

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{i}(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.239}$$

利用 (1.118) 式证明

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\times\mathbf{n} = \mathbf{m}, \tag{3.240}$$

进而推出

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.241}$$

(c) 证明

$$U(\mathbf{n},\omega)(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma})U^\dagger(\mathbf{n},\omega) = \mathbf{m}'\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{3.242}$$

其中

$$\mathbf{m}' = \cos\omega\,\mathbf{m} + \sin\omega(\mathbf{n}\times\mathbf{m}) \tag{3.243}$$

是把 $\mathbf{m}$ 绕 $\mathbf{n}$ 方向转动 ω 角得到的单位矢量。

(d) 令

$$\mathbf{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma} = U(\mathbf{n},\omega)(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})U^\dagger(\mathbf{n},\omega), \tag{3.244}$$

证明

$$\mathbf{x}' = a\,\mathbf{n} + b\,\mathbf{m}', \tag{3.245}$$

即 $\mathbf{x}' = a\,\mathbf{n} + b\cos\omega\,\mathbf{m} + b\sin\omega(\mathbf{n}\times\mathbf{m})$。

从图 3.9 可以看出，$\mathbf{x}'$ 正是对 $\mathbf{x}$ 绕 $\mathbf{n}$ 方向转动 ω 角得到的位置矢量，可以用 SO(3) 群元 $R(\mathbf{n},\omega)$ 表达为

$$x'^i = R^i{}_j(\mathbf{n},\omega)x^j. \tag{3.246}$$

将上式代入 (3.244) 式，得 $U(\mathbf{n},\omega)x^j\sigma^jU^\dagger(\mathbf{n},\omega) = \sigma^iR^i{}_j(\mathbf{n},\omega)x^j$，由 $\mathbf{x}$ 的任意性立即得到

$$U(\mathbf{n},\omega)\sigma^jU^\dagger(\mathbf{n},\omega) = \sigma^iR^i{}_j(\mathbf{n},\omega), \tag{3.247}$$

这就是对应关系 (3.234)。SO(3) 的群空间是一个半径为 π 的球体，球体中任意一点的方向由 $\mathbf{n}$ 描述，与球心的距离为 ω。对应关系 (3.247) 表明，$\omega\in[0,\pi]$ 的 SU(2) 群元一一对应于 SO(3) 群元。也就是说，在半径为 π 的球体中，SU(2) 与 SO(3) 的群元一一对应。另一方面，根据 (3.226) 式，$\mathbf{n}$ 方向上半径为 $\omega\in[\pi,2\pi]$ 的 SU(2) 群元 $U(\mathbf{n},\omega)$ 等于 $-\mathbf{n}$ 方向上半径为 $2\pi-\omega\in[0,\pi]$ 处的群元 $U(-\mathbf{n},2\pi-\omega)$ 的负值。可见，对应于任意 SO(3) 群元 R 的一对 SU(2) 群元 $\pm U$ 分别位于半径为 π 的球体中和半径从 π 到 2π 的球壳中。

图 3.10: 单位矢量 $\hat{\mathbf{p}}$、$\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 示意图。

3.6 设 $\mathbf{n}_1$ 是一个与 $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 垂直的单位矢量，而单位矢量 $\mathbf{n}_2 \equiv \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}_1$，则 $\hat{\mathbf{p}}$、$\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 两两之间相互垂直，如图 3.10 所示。引入自旋角动量算符 $\mathbf{S}$ 在 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 上的投影

$$S_{\mathrm{T},1} \equiv \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{S}, \quad S_{\mathrm{T},2} \equiv \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{S}, \tag{3.248}$$

以及它们的线性组合

$$S_{\pm} \equiv S_{\mathrm{T},1} \pm \mathrm{i} S_{\mathrm{T},2}, \tag{3.249}$$

证明

$$\mathbf{S}^2 = S_{\mathrm{T},1}^2 + S_{\mathrm{T},2}^2 + S_{\mathbf{p}}^2, \tag{3.250}$$

和对易关系

$$[S_{\mathrm{T},1}, S_{\mathrm{T},2}] = \mathrm{i} S_{\mathbf{p}}, \quad [\mathbf{S}^2, S_{\pm}] = 0, \quad [S_{\mathbf{p}}, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}, \tag{3.251}$$

其中 $S_{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}$ 是螺旋度算符。由此可见，$\mathbf{S}^2$、$S_{\mathrm{T},1}$、$S_{\mathrm{T},2}$、$S_{\mathbf{p}}$ 和 $S_{\pm}$ 之间的关系与 $\mathbf{J}^2$、J^1、J^2、J^3 和 $J^{\pm}$ 之间的关系形式相同，从而螺旋度 λ 与磁量子数 σ 的取值情况也相同。

3.7 引入 $\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$ 和 $\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$，则任意时空坐标 x^μ 一一对应于 2×2 厄米矩阵

$$\tilde{X} = x^\mu \sigma_\mu = x^0 \mathbf{1} - x^i \sigma^i = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + \mathrm{i} x^2 \\ -x^1 - \mathrm{i} x^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \tag{3.252}$$

(a) 证明

$$x^\mu = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\tilde{X} \bar{\sigma}^\mu), \quad \det(\tilde{X}) = x^\mu x_\mu. \tag{3.253}$$

(b) 设 λ 是满足 $|\det(\lambda)| = 1$ 的任意 2×2 可逆复矩阵，对 $\tilde{X}$ 作变换得到厄米矩阵

$$\tilde{X}' = \lambda \tilde{X} \lambda^\dagger, \tag{3.254}$$

证明

$$\det(\tilde{X}') = \det(\tilde{X}). \tag{3.255}$$

(c) 将 $\tilde{X}'$ 表达为 $\tilde{X}' = x'^\mu \sigma_\mu$，则 (3.255) 式表明 $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$。因此，$\lambda$ 对应于一个 Lorentz 变换 $\Lambda(\lambda)$，满足

$$\lambda x^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = x'^\mu \sigma_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\lambda) x^\nu \sigma_\mu. \tag{3.256}$$

对于满足 $|\det(\lambda)| = 1$ 的任意 2×2 可逆复矩阵 λ_1 和 λ_2，证明同态关系

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\lambda_2\lambda_1) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\lambda_2)\Lambda^{\rho}{}_{\nu}(\lambda_1). \tag{3.257}$$

如果 λ_1 和 λ_2 只相差一个整体相位因子，即 $\lambda_2 = \eta\lambda_1$，其中 $|\eta| = 1$，则 $\lambda_2\tilde{X}\lambda_2^{\dagger} = |\eta|^2\lambda_1\tilde{X}\lambda_1^{\dagger} = \lambda_1\tilde{X}\lambda_1^{\dagger}$，因而 λ_1 和 λ_2 对应于同一个 Lorentz 变换。为消除这样的重复性，可以适当选取相位因子，使得 $\det(\lambda) = 1$。因此只需要讨论 $\det(\lambda) = 1$ 的任意 2×2 可逆复矩阵 λ，所有这样的矩阵 $\{\lambda\}$ 构成复数域 $\mathbb{C}$ 上的 **2 阶特殊线性群** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$。

(d) 根据线性代数的极分解定理，任意 $\lambda \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 可以分解为

$$\lambda = U\exp(h) \tag{3.258}$$

其中 $U \in \mathrm{SU}(2)$，而 h 是一个 2×2 无迹厄米矩阵。对于 $\tilde{X}' = U\tilde{X}U^{\dagger}$，证明

$$x'^0 = x^0. \tag{3.259}$$

因此 $U \in \mathrm{SU}(2)$ 对应的 $\Lambda(U)$ 是空间旋转变换。

根据习题 3.4 的讨论，任意 2×2 无迹厄米矩阵 h 对应于三维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一个位置矢量，从而所有 h 的集合对应的空间是 $\mathbb{R}^3$。习题 3.3 的讨论表明，$\mathrm{SU}(2)$ 的群空间可以看作三维球面 S^3。综合起来，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的群空间是 $\mathbb{R}^3$ 和 S^3 的直积 $\mathbb{R}^3\times S^3$，这样的群空间是单连通的。因此，$\lambda \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 必定与恒元连通，从而 $\Lambda(\lambda)$ 也与恒元连通，即 $\Lambda(\lambda)$ 是固有保时向 Lorentz 变换。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 群元依赖于 $4-1=3$ 个复参数，即 6 个实参数，与固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的实参数具有相同数量。然而，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 并不同构于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$，这是因为 $\tilde{X}' = \lambda\tilde{X}\lambda^{\dagger} = (-\lambda)\tilde{X}(-\lambda)^{\dagger}$ 表明 λ 和 $-\lambda$ 对应于相同的固有保时向 Lorentz 变换。于是，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 之间存在 $2:1$ 的同态关系，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的覆盖群。

(e) 设 θ 为实数，令

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & \\ & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} \end{pmatrix}, \tag{3.260}$$

证明 $\tilde{X}' = \lambda(\theta)\tilde{X}\lambda^{\dagger}(\theta)$ 和 $\tilde{X}$ 对应的时空坐标满足

$$x'^0 = x^0, \quad x'^1 = x^1\cos\theta + x^2\sin\theta, \quad x'^2 = -x^1\sin\theta + x^2\cos\theta, \quad x'^3 = x^3. \tag{3.261}$$

可见，$\lambda(\theta)$ 对应的 Lorentz 变换 $\Lambda[\lambda(\theta)]$ 是绕 z 轴转动 θ 角的空间旋转变换，而 $\lambda(0) = \mathbf{1}$ 和 $\lambda(2\pi) = -\mathbf{1}$ 对应于同一个 Lorentz 变换 $\Lambda[\lambda(0)] = \Lambda[\lambda(2\pi)] = \mathbf{1}$。

3.8 考虑 (3.175) 式表达的 Lorentz 变换 $S(\alpha,\beta)$ 和 (1.36) 式表达的旋转变换 $R_z(\theta)$。

(a) 验证 $S^{\mathrm{T}}gS = g$ 和 $\det(S) = 1$。

(b) 推出 (3.181) 式。

(c) 推出 (3.183) 式。

3.9 用 Poincaré 群的生成元算符 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 定义 **Pauli-Lubanski 赝矢量算符**

$$W^\mu \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma \tag{3.262}$$

和两个标量算符

$$I \equiv \frac{\mathrm{i}}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}, \tag{3.263}$$

$$W^2 \equiv W^\mu W_\mu. \tag{3.264}$$

(a) 证明

$$W^\mu P_\mu = 0, \quad [P^\mu, W^\nu] = 0. \tag{3.265}$$

(b) 证明

$$[I, P^\mu] = -W^\mu, \quad U^{-1}(\Lambda)IU(\Lambda) = I, \quad [J^{\mu\nu}, I] = 0. \tag{3.266}$$

(c) 对于任意算符 A、B 和 C，推出 **Jacobi 恒等式**

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0. \tag{3.267}$$

进而证明

$$[J^{\mu\nu}, W^\rho] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}W^\mu - g^{\mu\rho}W^\nu). \tag{3.268}$$

(d) 证明

$$[P^\mu, W^2] = 0, \quad [J^{\mu\nu}, W^2] = 0. \tag{3.269}$$

可见，W^2 与 Poincaré 群的所有生成元算符对易，即它是 Poincaré 群的 **Casimir 算符**，因而 W^2 的本征值在任意 Poincaré 变换下不变。Poincaré 群的不可约幺正表示可以用 W^2 和另一个 Casimir 算符 P^2 的本征值来刻画。

(e) 推出

$$W^0 = \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{J}H + \mathbf{K}\times\mathbf{P}. \tag{3.270}$$

(f) 对于质量为 $m > 0$、自旋为 s 的单粒子态 $|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle$，取 $p^\mu = (m, \mathbf{0})$，由本征方程

$$P^\mu|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = p^\mu|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle, \quad \mathbf{J}^2|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = s(s+1)|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle, \tag{3.271}$$

$$J^3|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = \sigma|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle, \tag{3.272}$$

推出

$$W^0|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = 0|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle, \quad \mathbf{W}|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = m\mathbf{J}|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle, \tag{3.273}$$

和

$$W^2|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = -m^2 s(s+1)|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle. \tag{3.274}$$

(g) 已知螺旋度为 λ 的无质量单粒子态 $|\Psi_\lambda(p)\rangle$ 满足本征方程

$$P^\mu |\Psi_\lambda(p)\rangle = p^\mu |\Psi_\lambda(p)\rangle\,, \quad \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{J}}{|\mathbf{p}|}|\Psi_\lambda(p)\rangle = \lambda |\Psi_\lambda(p)\rangle\,, \quad W^2 |\Psi_\lambda(p)\rangle = 0\,|\Psi_\lambda(p)\rangle\,, \tag{3.275}$$

其中四维动量 p^μ 满足 $p^2 = 0$。设 $W^\mu |\Psi_\lambda(p)\rangle = w^\mu |\Psi_\lambda(p)\rangle$，论证

$$w^\mu = \lambda p^\mu. \tag{3.276}$$

3.10 取 $j = 3/2$，根据 (3.143) 和 (3.148) 式推出 SU(2) 群 4 维表示的生成元矩阵 $\tau^1_{(3/2)}$、$\tau^2_{(3/2)}$ 和 $\tau^3_{(3/2)}$。

第 4 章　量子矢量场

本章介绍**矢量场** (vector field) 的正则量子化。从 Lorentz 群的表示来看，标量场对应于恒等表示，矢量场对应于矢量表示，而 Lorentz 群的其它表示对应于其它类型的场。实际上，为了让量子场论符合狭义相对性原理，由场构造的拉氏量必须是 Lorentz 不变的，这就要求每个量子场处于 Lorentz 群某个线性表示或投影表示的表示空间中。接下来先分析 Lorentz 群的矢量表示，再研究矢量场对应的自旋，然后分别讨论有质量矢量场和无质量矢量场。

4.1　Lorentz 群的矢量表示

(1.221) 式等价于 $\omega^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta}$，再利用 (1.222) 式，将 Lorentz 变换的无穷小参数 $\omega^\alpha{}_\beta$ 转化为

$$\begin{aligned}\omega^\alpha{}_\beta &= g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\beta\mu}) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\mu}\omega_{\nu\mu}\delta^\nu{}_\beta)\\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\nu}\omega_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\beta) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ 定义为

$$\boxed{(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta).} \tag{4.2}$$

把 α 和 β 看作矩阵的行列指标，则 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 是 4×4 矩阵。易见 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 是反对称的，有

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}, \tag{4.3}$$

因而一共有 6 个独立矩阵，这与反对称的无穷小参数 $\omega_{\mu\nu}$ 的独立分量数目一致。这样的话，可以把无穷小 Lorentz 变换 (1.219) 写成

$$(\Lambda_\omega)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta. \tag{4.4}$$

矩阵 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 与 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ 的对易关系为

$$\begin{aligned}&[\mathcal{J}^{\mu\nu},\mathcal{J}^{\rho\sigma}]^\alpha{}_\beta = (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\gamma{}_\beta - (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\alpha{}_\gamma(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta\\ &= \mathrm{i}^2(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma)(g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta) - (\mu\leftrightarrow\rho,\nu\leftrightarrow\sigma)\\ &= -g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta + g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta + g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta - (\mu\leftrightarrow\rho,\nu\leftrightarrow\sigma)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g^{\nu\rho}g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} \\
&\quad -[-g^{\sigma\mu}g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + g^{\rho\mu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + g^{\sigma\nu}g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}] \\
&= g^{\nu\rho}(g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta}) + g^{\mu\rho}(g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}) + g^{\nu\sigma}(g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}) + g^{\mu\sigma}(g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta}) \\
&= -\mathrm{i}g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\sigma\mu})^{\alpha}{}_{\beta} - \mathrm{i}g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - \mathrm{i}g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^{\alpha}{}_{\beta} - \mathrm{i}g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\nu})^{\alpha}{}_{\beta} \\
&= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\mu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^{\alpha}{}_{\beta} + g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\nu\rho})^{\alpha}{}_{\beta}],
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

即

$$
[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho}). \tag{4.6}
$$

可见，4×4 矩阵 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系 (3.33)。回顾 1.4 节，$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ 属于 Lorentz 群的 4 维矢量表示，因而 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 就是**矢量表示的生成元矩阵**，它们作用的对象是 Lorentz 矢量。

无穷小 Lorentz 变换 (4.4) 的矩阵记法为

$$
\Lambda_{\omega} = \mathbf{1} + \omega = \mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}, \tag{4.7}
$$

它可以看作矩阵级数

$$
\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!} \tag{4.8}
$$

只展开到 ω 一阶项的结果。矩阵 ω 与度规矩阵 g 满足

$$
(g^{-1}\omega^{\mathrm{T}}g)^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\alpha\gamma}(\omega^{\mathrm{T}})_{\gamma}{}^{\delta}g_{\delta\beta} = g^{\alpha\gamma}\omega^{\delta}{}_{\gamma}g_{\delta\beta} = g^{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma} = -g^{\alpha\gamma}\omega_{\gamma\beta} = -\omega^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{4.9}
$$

即

$$
g^{-1}\omega^{\mathrm{T}}g = -\omega. \tag{4.10}
$$

从而

$$
g^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}g = g^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega^{\mathrm{T}})^n}{n!}\right]g = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g^{-1}\omega^{\mathrm{T}}g)^n}{n!} = \exp(g^{-1}\omega^{\mathrm{T}}g) = \mathrm{e}^{-\omega}. \tag{4.11}
$$

由于 $[-\omega, \omega] = 0$，根据 (3.51) 式，有

$$
g^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}g\,\Lambda = \mathrm{e}^{-\omega}\mathrm{e}^{\omega} = \mathrm{e}^{-\omega+\omega} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}. \tag{4.12}
$$

故 $\Lambda^{\mathrm{T}}g\,\Lambda = g$，即 Λ 满足保度规条件 (1.44)。因此，由 (4.8) 式定义的 Λ 是 Lorentz 变换。注意，(4.8) 式中的变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 不是无穷小量，而具有有限的数值，所以

$$
\boxed{\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)} \tag{4.13}
$$

是用 Lorentz 群矢量表示生成元 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 生成的**有限变换** (finite transformation)。由于变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 可以连续地变化到 $\omega_{\mu\nu} = 0$，用 (4.13) 式表达的 Lorentz 变换在群空间中与恒等变换相连通，因而它属于固有保时向 *Lorentz* 群，如图 4.1 所示。当 $\omega_{\mu\nu}$ 遍历群空间中所有参数取值时，Lorentz 变换 (4.13) 遍历所有的固有保时向 Lorentz 群元素。

图 4.1: 固有保时向 Lorentz 群中的有限 Lorentz 变换 $\Lambda(\omega_{\mu\nu})$。

4.2 量子场的 Lorentz 变换

4.2.1 量子标量场的 Lorentz 变换

经过正则量子化之后，标量场 $\phi(x)$ 是 Hilbert 空间上的算符，类似于 (3.29) 式，$\phi(x)$ 的固有保时向 Lorentz 变换关系 (2.77) 表示为

$$\phi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda) = \phi(x). \tag{4.14}$$

上式表明，变换后的标量场在变换后的时空点上的值等于变换前的标量场在变换前的时空点上的值。图 4.2 以空间旋转变换为例说明这种情况[1]。由于 $x' = \Lambda x$ 等价于 $x = \Lambda^{-1}x'$，对 (4.14) 式作替换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，得

$$U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x). \tag{4.15}$$

另一方面，由 (1.91) 式得 $\partial^\mu\phi(x)$ 的相应 Lorentz 变换为

$$U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda) = \partial'^\mu\phi'(x') = \partial'^\mu\phi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu\phi(x). \tag{4.16}$$

于是，将实标量场量子化之后，拉氏量 (2.79) 作为算符的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(x') &= U^{-1}(\Lambda)\mathcal{L}(x')U(\Lambda) = \frac{1}{2}U^{-1}(\Lambda)[\partial'^\mu\phi(x')\partial'_\mu\phi(x') - m^2\phi^2(x')]U(\Lambda) \\
&= \frac{1}{2}\{g_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)\partial'^\nu\phi(x')U(\Lambda) - m^2[U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda)]^2\} \\
&= \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\partial^\rho\phi(x)\Lambda^\nu{}_\sigma\partial^\sigma\phi(x) - m^2\phi^2(x)] = \frac{1}{2}[g_{\rho\sigma}\partial^\rho\phi(x)\partial^\sigma\phi(x) - m^2\phi^2(x)] \\
&= \mathcal{L}(x),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

倒数第二步用到保度规条件 (1.34)。从而

$$U^{-1}(\Lambda)\mathcal{L}(x)U(\Lambda) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x), \tag{4.18}$$

[1] 与 1.3 节一样，这里采用**被动观点**来描述对称性变换，即在坐标系发生变化的情况下考虑场被动发生变换的结果。这种做法与有些书（如参考书【1】的 3.1 节）采用的**主动观点**有所不同。

图 4.2: 在绕 z 轴空间旋转变换下，标量场 $\phi(x)$ 的变换示意图。

可见，拉氏量算符 $\mathcal{L}(x)$ 的 Lorentz 变换规则与标量场算符 $\phi(x)$ 一样，它确实是一个 Lorentz 标量。

对于无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$，(1.37) 式化为

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu &= g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}(\delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta) = g_{\nu\beta}g^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}\omega_{\nu\beta} = \delta^\mu{}_\nu - g^{\mu\beta}\omega_{\beta\nu} \\ &= \delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu,\end{aligned} \tag{4.19}$$

从而

$$(\Lambda^{-1}x)^\mu = (\delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{4.20}$$

在 x 处将 (4.15) 式右边展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned}\phi(\Lambda^{-1}x) &= \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu\phi(x) = \phi(x) - \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu\phi(x) = \phi(x) - \frac{1}{2}(\omega_{\nu\mu}x^\mu\partial^\nu + \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu)\phi(x) \\ &= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\phi(x),\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中微分算符 $\hat{L}^{\mu\nu}$ 定义为

$$\boxed{\hat{L}^{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu).} \tag{4.22}$$

根据 (3.10) 式，将 (4.15) 式左边展开到 ω 的一阶项，忽略二阶小量，得

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right)\phi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right) \\ &= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\phi(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\phi(x), J^{\mu\nu}].\end{aligned} \tag{4.23}$$

两相比较，给出

$$\boxed{[\phi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\phi(x).} \tag{4.24}$$

这个对易关系与习题 2.5 推出的 (2.228) 式相同。可见，通过 Noether 定理得出的 Lorentz 对称性守恒荷 (1.240) 与这里用量子 Lorentz 变换定义的生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 是一致的。

$\hat{L}^{\mu\nu}$ 的纯空间分量 $\hat{L}^{ij}$ 的对偶三维矢量算符为

$$\hat{L}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{L}^{jk} = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}(x^j\partial^k - x^k\partial^j) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k - \varepsilon^{ikj}x^j\partial^k) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k, \tag{4.25}$$

图 4.3: 在绕 z 轴空间旋转变换下，矢量场 $A^{\mu}(x)$ 的变换示意图。场的分布区域中的箭头示意性地代表矢量场的方向。

写成三维矢量外积的形式是

$$\hat{\mathbf{L}} = -\mathrm{i}\,\mathbf{x} \times \nabla. \tag{4.26}$$

由于 $-\mathrm{i}\nabla = \hat{\mathbf{p}}$ 是动量微分算符 (2.90)，可以看出 $\hat{\mathbf{L}}$ 是**轨道角动量微分算符**。根据 (3.37) 式，将 (4.24) 式的纯空间分量改写为

$$[\phi(x), \mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\,\phi(x). \tag{4.27}$$

上式表明，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 与标量场算符 $\phi(x)$ 的对易子给出了轨道角动量，但没有给出自旋角动量。这说明标量场没有自旋，因此**标量玻色子的自旋为 0**。

4.2.2 量子矢量场的 Lorentz 变换

$\partial^{\mu}\phi(x)$ 是通过对标量场 $\phi(x)$ 取时空导数得到的 Lorentz 矢量。自身就是 Lorentz 矢量的量子场 $A^{\mu}(x)$ 也应该具有像 (4.16) 式那样的固有保时向 Lorentz 变换形式，即

$$A'^{\mu}(x') = U^{-1}(\Lambda)A^{\mu}(x')U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x), \tag{4.28}$$

或者写成

$$U^{-1}(\Lambda)A^{\mu}(x)U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\Lambda^{-1}x). \tag{4.29}$$

这就是**量子矢量场 $A^{\mu}(x)$ 的 Lorentz 变换形式**。图 4.3 以空间旋转变换为例说明矢量场的变换情况。在 Lorentz 变换下，除了矢量场的分布区域变换到新参考系的相应区域之外，矢量场的分量也要以 Lorentz 矢量分量的身份发生变换。根据 (4.7) 式，(4.28) 式的无穷小形式为

$$A'^{\mu}(x') = \left[\delta^{\mu}{}_{\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}\right]A^{\nu}(x) = A^{\mu}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x). \tag{4.30}$$

将上式与 (1.230) 式比较，可以发现 1.7.3 小节中的生成元矩阵 $I^{\mu\nu}$ 在矢量表示中对应于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$。

利用 (4.20) 式，在 x 处将 $A^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$ 展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned} A^{\nu}(\Lambda^{-1}x) &= A^{\nu}(x) - \omega^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}\partial_{\alpha}A^{\nu}(x) = A^{\nu}(x) - \omega_{\alpha\beta}x^{\beta}\partial^{\alpha}A^{\nu}(x) \\ &= A^{\nu}(x) + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(x^{\alpha}\partial^{\beta} - x^{\beta}\partial^{\alpha})A^{\nu}(x) = A^{\nu}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{L}^{\alpha\beta}A^{\nu}(x). \end{aligned} \tag{4.31}$$

从而，(4.29) 式右边展开为

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) &= \left[\delta^\mu{}_\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right]\left[A^\nu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{L}^{\alpha\beta}A^\nu(x)\right] \\ &= A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)].\end{aligned} \tag{4.32}$$

另一方面，(4.29) 式左边的无穷小展开式是

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right)A^\mu(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right) \\ = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}A^\mu(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}A^\mu(x) &= A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}].\end{aligned} \tag{4.33}$$

由此得到

$$\boxed{[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}] = \hat{L}^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x).} \tag{4.34}$$

注意，量子矢量场 $A^\mu(x)$ 具有三重身份，Hilbert 空间上的算符 $J^{\rho\sigma}$ 通过对易子作用在它的算符身份上，微分算符 $\hat{L}^{\rho\sigma}$ 作用在它的场身份上，矢量表示生成元 $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ 作用在它的 Lorentz 矢量身份上。

生成元矩阵 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$\mathcal{J}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{J}^{jk}, \quad \boldsymbol{\mathcal{J}} = (\mathcal{J}^{23}, \mathcal{J}^{31}, \mathcal{J}^{12}). \tag{4.35}$$

由于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系 (4.6)，$\mathcal{J}^i$ 满足 (3.41) 形式的 SU(2) 代数关系

$$[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\mathcal{J}^k. \tag{4.36}$$

因此，$\mathcal{J}^i$ 是 SU(2) 群某个线性表示的生成元。再根据 (3.37) 和 (4.25) 式，将 (4.34) 式的纯空间分量改写为

$$[A^\mu(x), \mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\,A^\mu(x) + \boldsymbol{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu A^\nu(x). \tag{4.37}$$

上式表明，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 对矢量场算符 $A^\mu(x)$ 的对易子不仅给出了轨道角动量，还给出了由 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 描述的**自旋角动量**。

矢量表示中的自旋角动量矩阵 $\mathcal{J}^i$ 的具体形式为

$$(\mathcal{J}^1)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{23})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{2\mu}\delta^3{}_\nu - g^{3\mu}\delta^2{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -\mathrm{i} \\ & & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

$$(\mathcal{J}^2)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{31})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{3\mu}\delta^1{}_\nu - g^{1\mu}\delta^3{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \mathrm{i} \\ & & 0 & \\ & -\mathrm{i} & & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

$$(\mathcal{J}^3)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{12})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{1\mu}\delta^2{}_\nu - g^{2\mu}\delta^1{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\mathrm{i} & \\ & \mathrm{i} & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

只关注纯空间部分，有

$$(\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1)^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^2\mathcal{J}^2)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

因此

$$(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = (\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1 + \mathcal{J}^2\mathcal{J}^2 + \mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 2\delta^i{}_j. \tag{4.42}$$

根据 3.3.1 小节中的 SU(2) 群表示理论，二阶 Casimir 算符 $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$ 的本征值为 $s(s+1)$，即由 (3.150) 式得 $(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = s(s+1)\delta^i{}_j$，其中 s 为自旋量子数。可见，矢量场 $A^\mu(x)$ 空间分量的自旋量子数为

$$\boxed{s = 1.} \tag{4.43}$$

量子化之后，矢量场 $A^\mu(x)$ 描述**自旋为 1** 的粒子。$s = 1$ 表明 $\mathcal{J}^1$、$\mathcal{J}^2$ 和 $\mathcal{J}^3$ 的纯空间部分是 SU(2) 群伴随表示 $D^{(1)}$ 的生成元矩阵，而 $D^{(1)}$ 也是 SO(3) 群的基础表示。

4.3 有质量矢量场的正则量子化

类似于电磁场，可以对任意矢量场 A^μ 定义反对称的场强张量

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{4.44}$$

考虑一个自由的有质量的实矢量场 A^μ，它满足自共轭条件

$$[A^\mu(x)]^\dagger = A^\mu(x), \tag{4.45}$$

相应的 **Lorentz 不变拉氏量**写作

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.} \tag{4.46}$$

$\mathcal{L}$ 中第一项是动能项，第二项是质量项，而 $m > 0$ 是矢量场的质量。动能项可用 A^μ 表达成

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}[(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu - (\partial_\mu A_\nu)\partial^\nu A^\mu - (\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu + (\partial_\nu A_\mu)\partial^\nu A^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu = -F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu. \qquad (4.48)
$$

Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$
0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu, \qquad (4.49)
$$

因此，A^μ 的经典运动方程是 **Proca 方程** [14]

$$
\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0.} \qquad (4.50)
$$

由 $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}$ 可知，

$$
\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \qquad (4.51)
$$

从 Proca 方程 (4.50) 得到

$$
0 = \partial_\nu(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu A^\nu = m^2\partial_\nu A^\nu. \qquad (4.52)
$$

质量 $m \neq 0$ 意味着矢量场 A^μ 应当满足 **Lorenz 条件**[2]

$$
\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0.} \qquad (4.53)
$$

从而

$$
\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^2 A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = \partial^2 A^\nu. \qquad (4.54)
$$

因此，Proca 方程 (4.50) 等价于受 Lorenz 条件约束的 *Klein-Gordon 方程*

$$
(\partial^2 + m^2)A^\mu(x) = 0. \qquad (4.55)
$$

根据 (1.168) 式，A^μ 对应的共轭动量密度为

$$
\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 = -F_{0\mu}, \qquad (4.56)
$$

时间分量和空间分量分别是

$$
\pi_0 = -F_{00} = 0, \quad \pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = -F_{0i}. \qquad (4.57)
$$

[2]得名于丹麦物理学家 Ludvig Lorenz (1829–1891)，而非荷兰物理学家 Hendrik Lorentz (1853–1928)。

由于 $\pi_0 = 0$，它不能作为与 A^0 对应的正则共轭场，因而不能为 A^0 构造正则对易关系。实际上，由于 Lorenz 条件 (4.53) 的存在，A^μ 只有 3 个独立分量，我们可以将 A^0 视作依赖于 3 个空间分量 A^i 的量。于是，根据 (2.76) 式，正则量子化程序要求独立的正则变量满足**等时对易关系**

$$\boxed{[A^i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [A^i(\mathbf{x},t),A^j(\mathbf{y},t)] = [\pi_i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)] = 0.} \tag{4.58}$$

由 (4.57) 式有

$$\pi^i = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = -F^{0i} = F^{i0}, \tag{4.59}$$

写成三维空间矢量的形式为

$$\boldsymbol{\pi} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla A_0, \tag{4.60}$$

故

$$\dot{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\pi} - \nabla A_0. \tag{4.61}$$

对 Proca 方程 (4.50) 取 $\nu = 0$，得 $\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0$，因此

$$A^0 = -\frac{1}{m^2}\partial_\mu F^{\mu 0} = -\frac{1}{m^2}\partial_i F^{i0} = -\frac{1}{m^2}\partial_i \pi^i = -\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}. \tag{4.62}$$

通过上式可将 A^0 表达为 $\boldsymbol{\pi}$ 的函数。

4.3.1 极化矢量与平面波展开

矢量场 $A^\mu(x)$ 既然满足 Klein-Gordon 方程，应该具有两个平面波解，即正能解 $\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 和负能解 $\exp(\mathrm{i}p\cdot x)$，其中四维动量 $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$。由于 $A^\mu(x)$ 带有一个 Lorentz 指标，平面波展开式的系数也必须具有一个这样的指标。一般地，对于确定的动量 $\mathbf{p}$，矢量场的正能解模式具有如下形式：

$$\varphi^\mu(x,\mathbf{p},\sigma) = e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\exp(-\mathrm{i}p\cdot x), \quad p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}\,. \tag{4.63}$$

这里的系数 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是 Lorentz 矢量，称为**极化矢量** (polarization vector)，它依赖于动量 $\mathbf{p}$，而且具有另外一个指标 σ 以描述矢量粒子的极化状态。注意，极化矢量并不是算符，而是 c 数。我们希望一组极化矢量能够构成 Lorentz 矢量空间的一组基底，从而用它们可以展开一个任意的 Lorentz 矢量。为了做到这一点，一组极化矢量应当是**线性独立且正交完备**的。

Lorentz 矢量空间是一个 4 维线性空间，可将它的一组基底简单地取为

$$\tilde{e}^\mu(0) = (1,0,0,0), \quad \tilde{e}^\mu(1) = (0,1,0,0), \quad \tilde{e}^\mu(2) = (0,0,1,0), \quad \tilde{e}^\mu(3) = (0,0,0,1), \tag{4.64}$$

其中 $\tilde{e}^\mu(0)$ 是类时矢量，而 $\tilde{e}^\mu(1)$、$\tilde{e}^\mu(2)$ 和 $\tilde{e}^\mu(3)$ 是类空矢量。可以验证，这组基底满足正交归一关系 $\tilde{e}_\mu(\sigma)\tilde{e}^\mu(\sigma') = g_{\sigma\sigma'}$ $(\sigma,\sigma' = 0,1,2,3)$ 和完备性关系 $\sum\limits_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma}\tilde{e}_\mu(\sigma)\tilde{e}_\nu(\sigma) = g_{\mu\nu}$，其中 $g_{\sigma\sigma'}$ 的取值为 Minkowski 度规的 $\sigma\sigma'$ 分量。

类似地，作为基底的一组极化矢量也应当有 4 个，包括 1 个类时的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 与 3 个类空的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$、$e^\mu(\mathbf{p},2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$。我们要求这 4 个极化矢量是实的，而且满足 Lorentz 矢量空间中的**正交归一关系**

$$\boxed{e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma') = g_{\sigma\sigma'}.} \tag{4.65}$$

和**完备性关系**

$$\boxed{\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = g_{\mu\nu}.} \tag{4.66}$$

从而，以极化矢量为基底可将任意 Lorentz 矢量 V_μ 展开成

$$V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu = \sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)V^\nu = \sum_{\sigma=0}^{3} v_\sigma(\mathbf{p})e_\mu(\mathbf{p},\sigma), \tag{4.67}$$

其中展开系数 $v_\sigma(\mathbf{p}) \equiv g_{\sigma\sigma}e_\nu(\mathbf{p},\sigma)V^\nu$。也就是说，这组极化矢量是完备的。

正交归一关系 (4.65) 和完备性关系 (4.66) 都是 *Lorentz* 协变的。只要在某个惯性系中取定符合这两个关系的一组极化矢量，通过 Lorentz 变换就可以在其它惯性系中得到依然满足这两个关系的一组极化矢量。

现在，我们根据与在壳动量 p^μ 的关系选择一组极化矢量，其中 p^μ 满足 $p^2 = m^2 > 0$。首先，选取 2 个只有空间分量的类空**横向**极化矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},1) = (0,\mathbf{e}(\mathbf{p},1)), \quad e^\mu(\mathbf{p},2) = (0,\mathbf{e}(\mathbf{p},2)). \tag{4.68}$$

此处

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(p^1p^3, p^2p^3, -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2), \quad \mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(-p^2, p^1, 0), \tag{4.69}$$

其中

$$|\mathbf{p}_\mathrm{T}| \equiv \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}\,. \tag{4.70}$$

“横向”指的是它们在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 相互垂直，即

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}[(p^1)^2p^3 + (p^2)^2p^3 - p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2] = 0, \tag{4.71}$$

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(-p^1p^2 + p^2p^1) = 0. \tag{4.72}$$

此外，存在如下关系：

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{p},1)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},1) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}[(p^1)^2(p^3)^2 + (p^2)^2(p^3)^2 + |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^4] \\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2[(p^3)^2 + |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2] = 1, \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},2)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}[(p^2)^2 + (p^1)^2] = 1, \tag{4.74}$$

图 4.4: 极化矢量方向与动量方向示意图，$\mathbf{p}$ 垂直于 $\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 和 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$ 决定的平面。

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},1)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}(-p^1p^3p^2+p^2p^3p^1)=0. \tag{4.75}$$

也就是说，它们在三维空间中是正交归一的：

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},i)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2. \tag{4.76}$$

从而，这两个横向极化矢量满足**四维横向条件**

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},1)=p_\mu e^\mu(\mathbf{p},2)=0, \tag{4.77}$$

和正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},i)e^\mu(\mathbf{p},j)=-\mathbf{e}(\mathbf{p},i)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},j)=-\delta_{ij}=g_{ij},\quad i,j=1,2. \tag{4.78}$$

图 4.4 示意性地画出 $\mathbf{p}$、$\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 和 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$，它们在三维空间中两两相互垂直。

接着，要求第 3 个类空极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 是**纵向**的，即在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 平行，如图 4.4 所示。这样还不能确定它的时间分量，为此进一步要求它满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=0$，而正交归一关系 (4.65) 将决定它的归一化。于是，纵向极化矢量的形式为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m},\frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}\right). \tag{4.79}$$

容易验证，它确实满足四维横向条件

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=p^0\frac{|\mathbf{p}|}{m}-\mathbf{p}\cdot\frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}=\frac{p^0|\mathbf{p}|}{m}-\frac{p^0|\mathbf{p}|}{m}=0, \tag{4.80}$$

以及正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{|\mathbf{p}|}{m}\frac{|\mathbf{p}|}{m}-\frac{(p^0)^2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{m^2|\mathbf{p}|^2}=\frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}-\frac{(p^0)^2}{m^2}=-\frac{(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2}{m^2}=-1=g_{33}, \tag{4.81}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},i)=-\frac{p^0}{m|\mathbf{p}|}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2. \tag{4.82}$$

最后，我们将**类时**极化矢量取为正比于 p^μ 的矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{p^\mu}{m}=\frac{1}{m}(p^0,\mathbf{p}). \tag{4.83}$$

它符合归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{p^2}{m^2}=1=g_{00}, \tag{4.84}$$

而且与满足四维横向条件的 3 个类空极化矢量正交，

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},i)=\frac{1}{m}p_\mu e^\mu(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2,3. \tag{4.85}$$

不过，$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 不满足四维横向条件，

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{p^2}{m}=m\neq 0. \tag{4.86}$$

实际上，我们找不到满足四维横向条件的类时极化矢量。原因在于，总可以取一个特殊惯性系使 $p^\mu=(m,\mathbf{0})$，而类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 的时间分量必定非零，故 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=me^0(\mathbf{p},0)\neq 0$。由于 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)$ 是 Lorentz 不变的，在任意惯性系中均有 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)\neq 0$。

可以验证，由 (4.68)、(4.69)、(4.79) 和 (4.83) 式定义的这组极化矢量确实满足完备性关系 (4.66)：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)\\
=\;& e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0)-e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1)-e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2)-e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3)\\
=\;& \frac{1}{m^2}\begin{pmatrix} p^0p^0 & -p^0p^1 & -p^0p^2 & -p^0p^3\\ -p^1p^0 & p^1p^1 & p^1p^2 & p^1p^3\\ -p^2p^0 & p^2p^1 & p^2p^2 & p^2p^3\\ -p^3p^0 & p^3p^1 & p^3p^2 & p^3p^3\end{pmatrix}-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p^1p^3p^1p^3 & p^1p^3p^2p^3 & -p^1p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\ 0 & p^2p^3p^1p^3 & p^2p^3p^2p^3 & -p^2p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\ 0 & -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^1p^3 & -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^2p^3 & |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^4\end{pmatrix}\\
&-\frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p^2p^2 & -p^2p^1 & 0\\ 0 & -p^1p^2 & p^1p^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{m^2}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 & -p^0p^1 & -p^0p^2 & -p^0p^3\\ -p^0p^1 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^1p^1 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^1p^2 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^1p^3\\ -p^0p^2 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^2p^1 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^2p^2 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^2p^3\\ -p^0p^3 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^3p^1 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^3p^2 & \frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^3p^3\end{pmatrix}\\
=\;& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{(p^1)^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{(p^1p^3)^2+(p^2)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^1p^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^1p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}\\ 0 & \frac{p^1p^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{(p^2)^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{(p^2p^3)^2+(p^1)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^2p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}\\ 0 & \frac{p^1p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} & \frac{p^2p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} & \frac{(p^3)^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2}\end{pmatrix}\\
=\;& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{(p^1)^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2+(p^1)^2(|\mathbf{p}|^2-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)+(p^2)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & -\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}\\ 0 & -\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{(p^2)^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2+(p^2)^2(|\mathbf{p}|^2-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)+(p^1)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & -\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}\\ 0 & -\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{(p^3)^2+|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}. \tag{4.87}$$

由于自由的有质量矢量场 $A^\mu(x)$ 必须满足 Lorenz 条件 (4.53)，正能解模式 (4.63) 应满足

$$0 = \partial_\mu \varphi^\mu(x, \mathbf{p}, \sigma) = -\mathrm{i}p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \exp(-\mathrm{i}p \cdot x), \tag{4.88}$$

即

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0. \tag{4.89}$$

也就是说，**描述有质量矢量场的极化矢量必须满足四维横向条件**。因此，类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p}, 0)$ 不能用于描述有质量矢量场 A^μ。这说明 A^μ 只有 3 个物理的极化状态，由类空的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p}, 1)$、$e^\mu(\mathbf{p}, 2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p}, 3)$ 描述。根据完备性关系 (4.66)，这三个物理极化矢量满足

$$-\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\sigma=1}^{3} g_{\sigma\sigma} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma) = g_{\mu\nu} - g_{00} e_\mu(\mathbf{p}, 0) e_\nu(\mathbf{p}, 0) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}, \tag{4.90}$$

即具有极化求和关系

$$\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. \tag{4.91}$$

通过线性组合定义另一套物理的极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$，其中 $\lambda = +1, 0, -1$：

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \pm) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^\mu(\mathbf{p}, 1) \pm \mathrm{i} e^\mu(\mathbf{p}, 2) \right], \tag{4.92}$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 0) \equiv e^\mu(\mathbf{p}, 3). \tag{4.93}$$

这样定义的 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \pm)$ 是复的，而 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 0)$ 是实的。它们都满足**四维横向条件**

$$\boxed{p_\mu \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = 0, \quad \lambda = \pm, 0.} \tag{4.94}$$

此外，还满足

$$\begin{aligned} \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \pm) \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \pm) &= \frac{1}{2} [e_\mu(\mathbf{p}, 1) \mp \mathrm{i} e_\mu(\mathbf{p}, 2)][e^\mu(\mathbf{p}, 1) \pm \mathrm{i} e^\mu(\mathbf{p}, 2)] \\ &= \frac{1}{2} e_\mu(\mathbf{p}, 1) e^\mu(\mathbf{p}, 1) + \frac{1}{2} e_\mu(\mathbf{p}, 2) e^\mu(\mathbf{p}, 2) = \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22}) = -1, \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \pm) \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \mp) &= \frac{1}{2} [e_\mu(\mathbf{p}, 1) \mp \mathrm{i} e_\mu(\mathbf{p}, 2)][e^\mu(\mathbf{p}, 1) \mp \mathrm{i} e^\mu(\mathbf{p}, 2)] \\ &= \frac{1}{2} e_\mu(\mathbf{p}, 1) e^\mu(\mathbf{p}, 1) - \frac{1}{2} e_\mu(\mathbf{p}, 2) e^\mu(\mathbf{p}, 2) \mp \mathrm{i} e_\mu(\mathbf{p}, 1) e^\mu(\mathbf{p}, 2) \\ &= \frac{1}{2}(g_{11} - g_{22} \mp 2\mathrm{i} g_{12}) = 0, \end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},0)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) = e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3) = g_{33} = -1, \tag{4.97}$$

$$\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\pm)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[e_\mu(\mathbf{p},1) \mp \mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)]e^\mu(\mathbf{p},3) = 0, \tag{4.98}$$

即具有**正交归一关系**

$$\boxed{\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}.} \tag{4.99}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) &= \frac{1}{2}[e_\mu(\mathbf{p},1) - \mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)][e_\nu(\mathbf{p},1) + \mathrm{i}e_\nu(\mathbf{p},2)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[e_\mu(\mathbf{p},1) + \mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)][e_\nu(\mathbf{p},1) - \mathrm{i}e_\nu(\mathbf{p},2)] + e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\ &= e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1) + e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2) + e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\ &= \sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma),\end{aligned} \tag{4.100}$$

这与 (4.91) 式左边相等，因而存在**极化求和关系**

$$\boxed{\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}.} \tag{4.101}$$

这个关系是 Lorentz 协变的，四维横向条件 (4.94) 体现为

$$p^\nu \sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = -p_\mu + \frac{p_\mu p^2}{m^2} = -p_\mu + p_\mu = 0. \tag{4.102}$$

实际上，横向实极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 描述矢量场的**线极化**振动，相应的振动方向被限制在由 $\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 或 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$ 与 $\mathbf{p}$ 决定的平面上。另一方面，横向复极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$ 描述矢量场的**圆极化**振动，定义式 (4.92) 中线性组合系数之比 $\pm\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2}$ 意味着圆极化由两个相位差为 $\pm\pi/2$ 的线极化所合成。

根据 3.3.1 小节讨论，**螺旋度**是粒子的自旋角动量在动量方向上的投影。对于自旋为 1 的有质量粒子，螺旋度本征值的取值包括 -1、0 和 $+1$，对应于 3 种自旋极化态。动量 $\mathbf{p}$ 的方向由归一化方向矢量 $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 表征，在 Lorentz 群矢量表示中，自旋角动量矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 的表达式为 (4.38)、(4.39) 和 (4.40)，从而**螺旋度矩阵**的形式是

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\mathrm{i}p^3 & \mathrm{i}p^2 \\ & \mathrm{i}p^3 & 0 & -\mathrm{i}p^1 \\ & -\mathrm{i}p^2 & \mathrm{i}p^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.103}$$

将 (4.69) 和 (4.79) 式代入 (4.92) 和 (4.93) 式，得到 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 的列矢量形式为

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\p^0p^1\\p^0p^2\\p^0p^3\end{pmatrix},\quad \varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\p^1p^3-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\p^2p^3+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\end{pmatrix},\\&\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\end{pmatrix}.\end{aligned}} \tag{4.104}$$

从而推出

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},0)=\frac{1}{m|\mathbf{p}|^2}\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}p^3p^0p^2+\mathrm{i}p^2p^0p^3\\\mathrm{i}p^3p^0p^1-\mathrm{i}p^1p^0p^3\\-\mathrm{i}p^2p^0p^1+\mathrm{i}p^1p^0p^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0), \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},+)&=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}p^2(p^3)^2+p^1p^3|\mathbf{p}|-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\\mathrm{i}p^1(p^3)^2+p^2p^3|\mathbf{p}|+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\-\mathrm{i}p^1p^2p^3-(p^2)^2|\mathbf{p}|+\mathrm{i}p^1p^2p^3-(p^1)^2|\mathbf{p}|\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\p^1p^3|\mathbf{p}|-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|^2\\p^2p^3|\mathbf{p}|+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|^2\\-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2|\mathbf{p}|\end{pmatrix}=+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+),\end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},-)&=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}p^2(p^3)^2-p^1p^3|\mathbf{p}|-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\\mathrm{i}p^1(p^3)^2-p^2p^3|\mathbf{p}|+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\-\mathrm{i}p^1p^2p^3+(p^2)^2|\mathbf{p}|+\mathrm{i}p^1p^2p^3+(p^1)^2|\mathbf{p}|\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\-p^1p^3|\mathbf{p}|-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|^2\\-p^2p^3|\mathbf{p}|+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|^2\\|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2|\mathbf{p}|\end{pmatrix}=-\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-).\end{aligned} \tag{4.107}$$

归纳起来，有

$$\boxed{(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)=\lambda\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda),\quad \lambda=\pm,0.} \tag{4.108}$$

上式说明极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度矩阵的本征矢量，本征值为 λ。因此，$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 描述动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的矢量粒子的极化态。螺旋度 $\lambda=\pm1$ 对应于两种**横向极化** (transverse polarization)，包括**右旋极化** ($\lambda=+$) 和**左旋极化** ($\lambda=-$)；$\lambda=0$ 对应于**纵向极化** (longitudinal polarization)。

有质量的实矢量场算符 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 的**平面波展开式**应当包含正能解和负能解的所有动量模式的所有物理极化态，并满足自共轭条件 (4.45)，符合要求的形式为

$$\boxed{A^\mu(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],} \tag{4.109}$$

其中 $p^0=E_\mathbf{p}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 带着极化指标 λ。

将平面波展开式 (4.109) 代入 (4.37) 式左边和右边，分别得到

$$[A^\mu(x),\mathbf{J}]=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left\{\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\} \tag{4.110}$$

和

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}\,A^\mu(x)+\mathcal{J}^\mu{}_\nu A^\nu(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda(-\mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\nabla+\mathcal{J}^\mu{}_\nu)\\&\qquad\times\left[\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\Big[(\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathcal{J}^\mu{}_\nu)\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\\&\qquad+(-\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathcal{J}^\mu{}_\nu)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big].\end{aligned} \tag{4.111}$$

由于 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ 是两个线性独立的平面波解，它们各自的系数分别相等才能保证以上两式相等。两相比较，有

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]=(\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathcal{J}^\mu{}_\nu)\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{4.112}$$

两边与 $\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 作内积，再利用 (4.108) 式，得

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathcal{J})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}=\lambda\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{4.113}$$

从而推出

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=\lambda\,a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{4.114}$$

对上式取厄米共轭，得

$$\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=[a_{\mathbf{p},\lambda},\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]^\dagger=[\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J},\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}], \tag{4.115}$$

即

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})+\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{4.116}$$

真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 湮灭的态，即满足

$$a_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle=0. \tag{4.117}$$

另一方面，真空态不具有角动量，满足

$$\mathbf{J}\,|0\rangle = \mathbf{0}. \tag{4.118}$$

引入单粒子态

$$|\mathbf{p},\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \quad \lambda=\pm,0, \tag{4.119}$$

则 (4.116) 式意味着

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})+\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle = \lambda\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{4.120}$$

即

$$\boxed{(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \lambda\,|\mathbf{p},\lambda\rangle\,, \quad \lambda=\pm,0.} \tag{4.121}$$

自由的单粒子态没有轨道角动量，因而 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}$ 相当于螺旋度算符。可见，用产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 定义的单粒子态 $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 是**螺旋度本征态**，本征值为 λ。

根据 (4.57) 和 (4.109) 式，共轭动量密度为

$$\begin{aligned}\pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\Big\{&[\mathrm{i}p_0\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)-\mathrm{i}p_i\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)]a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\\ &+[-\mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)+\mathrm{i}p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big\},\end{aligned} \tag{4.122}$$

引入

$$\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda) \equiv \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - \frac{p_i}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda), \tag{4.123}$$

则

$$p_0\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - p_i\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda) = p_0\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda), \tag{4.124}$$

从而将共轭动量密度的平面波展开式写得更加紧凑：

$$\pi_i(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{4.125}$$

显然它也满足自共轭条件

$$[\pi_i(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_i(\mathbf{x},t). \tag{4.126}$$

根据平面波展开式 (4.109) 和 (4.125)，以及等时对易关系 (4.58)，推出**产生湮灭算符的对易关系**

$$\boxed{[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0.} \tag{4.127}$$

具体推导过程见 4.3.2 小节选读内容。上式表明，两个产生算符相互对易，因此，与标量场类似，有质量矢量场描述的粒子是一种玻色子，称为**矢量玻色子** (vector boson)，自旋为 1。与实标量场类似，有质量实矢量场对应的矢量玻色子是纯中性的。

根据 (1.170) 和 (4.46) 式，自由有质量矢量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi_i \partial_0 A^i - \mathcal{L} = -\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \tag{4.128}$$

利用 (4.61) 和 (4.62) 式，有

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} &= \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} + \nabla A_0) = \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla \cdot (A_0 \boldsymbol{\pi}) - A_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \\ &= \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla \cdot (A_0 \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2, \end{aligned} \tag{4.129}$$

$$-\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu = -\frac{1}{2} m^2 [(A_0)^2 - \mathbf{A}^2] = -\frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2. \tag{4.130}$$

另一方面，由 (4.57) 和 (4.59) 式得

$$\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} = \frac{1}{2} \pi_i \pi^i = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2. \tag{4.131}$$

应用 (1.118) 式，推出

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial^m A^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial^m A^n = -\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m A^n, \tag{4.132}$$

从而，由 (1.119) 和 (1.121) 式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} &= \frac{1}{4} F^{ij} F^{ij} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} (\partial_m A^n) \varepsilon^{ijl} \varepsilon^{lpq} \partial_p A^q = \frac{1}{2} \delta^{kl} \varepsilon^{kmn} (\partial_m A^n) \varepsilon^{lpq} \partial_p A^q \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{kmn} (\partial_m A^n) \varepsilon^{kpq} \partial_p A^q = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2. \end{aligned} \tag{4.133}$$

故

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2. \tag{4.134}$$

于是，哈密顿量密度化为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla \cdot (A_0 \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla \cdot (A_0 \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2. \end{aligned} \tag{4.135}$$

上式第二步中第二项是一个全散度，它对全空间积分它没有贡献。

于是，哈密顿量算符为

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \, \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \left[\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 + m^2 \mathbf{A}^2 \right]. \tag{4.136}$$

经过进一步计算，推出

$$\boxed{H = \sum_{\lambda = \pm, 0} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{3}{2} E_{\mathbf{p}},} \tag{4.137}$$

其中第一项是所有动量模式所有物理极化态所有矢量玻色子贡献的能量之和，第二项是零点能。另一方面，总动量算符为

$$\boxed{\mathbf{P} = -\int \mathrm{d}^3x\, \pi_i \nabla A^i = \sum_{\lambda=\pm,0} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda}.} \tag{4.138}$$

这表明总动量是所有动量模式所有物理极化态所有矢量玻色子贡献的动量之和。具体推导过程见 4.3.3 小节选读内容。

4.3.2 选读：推导产生湮灭算符的对易关系

本小节推导产生湮灭算符的对易关系 (4.127)。

利用

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} A^\mu(x) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda) a_{\mathbf{q},\lambda} + \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{q},\lambda) a^\dagger_{-\mathbf{q},\lambda} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0 t}\right]
\end{aligned} \tag{4.139}$$

和

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \partial_0 A^\mu(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3p\, \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \Big[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&\qquad\qquad - \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big] \\
&= \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda) a_{\mathbf{q},\lambda} - \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{q},\lambda) a^\dagger_{-\mathbf{q},\lambda} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0 t}\right],
\end{aligned} \tag{4.140}$$

以及正交归一关系 (4.99)，推出

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*_\mu(\mathbf{q},\lambda') \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \left(\partial_0 A^\mu - \mathrm{i}q_0 A^\mu\right) &= \varepsilon^*_\mu(\mathbf{q},\lambda') \frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda) a_{\mathbf{q},\lambda} \\
&= -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \sum_{\lambda=\pm,0} (-\delta_{\lambda'\lambda}) a_{\mathbf{q},\lambda} = \mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, a_{\mathbf{q},\lambda'}.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

由 Lorenz 条件 (4.53) 得

$$\partial_0 A^0 = -\partial_i A^i, \tag{4.142}$$

根据 (4.57) 式，有

$$\partial_0 A^i = -\partial_0 A_i = \pi_i - \partial_i A_0 = \pi_i - \partial_i A^0. \tag{4.143}$$

于是，将湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 表达为

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{p},\lambda} &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left(\partial_0 A^\mu - \mathrm{i}p_0 A^\mu\right)\\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_0 A^0 + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_0 A^i - \mathrm{i}p_0\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)A^\mu\right]\\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big[-\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^i + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\pi_i - \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^0\\
&\qquad - \mathrm{i}p_0\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 - \mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i\Big].
\end{aligned} \tag{4.144}$$

上式第三步方括号中的第一项和第三项可以通过分部积分化为

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[-\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^i - \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^0] &= \int \mathrm{d}^3x\,(\partial_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})[\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^i + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^0]\\
&= \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[\mathrm{i}p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^i + \mathrm{i}p_i\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^0],
\end{aligned} \tag{4.145}$$

从而

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{p},\lambda} &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big[\mathrm{i}p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^i + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\pi_i + \mathrm{i}p_i\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^0\\
&\qquad - \mathrm{i}p_0\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 - \mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i\Big]\\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\pi_i - \mathrm{i}p^\mu\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 - \mathrm{i}[p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda) - p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)]A^i\right\}.
\end{aligned} \tag{4.146}$$

再利用四维横向条件 (4.94) 和 (4.124) 式，得到

$$a_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(x) + \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(x)\right]. \tag{4.147}$$

取厄米共轭，得

$$a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[\varepsilon^{i}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(x) - \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)A^i(x)\right]. \tag{4.148}$$

令 $x^0 = y^0 = t$，利用等时对易关系 (4.58)，推得湮灭算符与产生算符的对易关系为

$$\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\Big[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(\mathbf{x},t) + \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(\mathbf{x},t),\\
&\qquad\qquad \varepsilon^j(\mathbf{q},\lambda')\pi_j(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0\tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{q},\lambda')A^j(\mathbf{y},t)\Big]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\Big\{-\mathrm{i}q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{q},\lambda')[\pi_i(\mathbf{x},t), A^j(\mathbf{y},t)]\\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^j(\mathbf{q},\lambda')[A^i(\mathbf{x},t), \pi_j(\mathbf{y},t)]\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left[-q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{q},\lambda')\delta^j{}_i - p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^j(\mathbf{q},\lambda')\delta^i{}_j\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\left[-E_{\mathbf{q}}\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{q},\lambda') - E_{\mathbf{p}}\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')\right]\\
&= -\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda') + \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda')\right].
\end{aligned}
\tag{4.149}
$$

最后一步用到 (2.65) 式。根据定义式 (4.123)、四维横向条件 (4.94) 和正交归一关系 (4.99)，有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda') &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda') - \frac{1}{p_0}p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda') + \frac{1}{p_0}p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'},
\end{aligned}
\tag{4.150}
$$

取复共轭，得

$$
\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{4.151}
$$

于是

$$
[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = -\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left(-\delta_{\lambda\lambda'}-\delta_{\lambda\lambda'}\right) = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{4.152}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\big[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(\mathbf{x},t) + \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(\mathbf{x},t),\\
&\qquad\qquad \varepsilon^{j*}(\mathbf{q},\lambda')\pi_j(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{q},\lambda')A^j(\mathbf{y},t)\big]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\big\{\mathrm{i}q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{q},\lambda')[\pi_i(\mathbf{x},t), A^j(\mathbf{y},t)]\\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{j*}(\mathbf{q},\lambda')[A^i(\mathbf{x},t), \pi_j(\mathbf{y},t)]\big\}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left[q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{q},\lambda')\delta^j{}_i - p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{j*}(\mathbf{q},\lambda')\delta^i{}_j\right]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\left[E_{\mathbf{q}}\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{q},\lambda') - E_{\mathbf{p}}\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')\right]\\
&= -\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})e^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\left[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda') - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')\right].
\end{aligned}
\tag{4.153}
$$

对四维横向条件 (4.94) 取复共轭，得

$$
p_\mu\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) = p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda) + p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda) = 0. \tag{4.154}
$$

将上式中的 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$，得

$$
p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda) - p_i\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda) = 0. \tag{4.155}
$$

因此，

$$
p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda) = -p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda), \quad -p_i\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda) = -p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda), \tag{4.156}
$$

或者写成

$$\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)=p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda),\quad -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{p},\lambda)=p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda). \tag{4.157}$$

从而，

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda') &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\left[\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')+\frac{p_i}{p_0}\,\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\right]\\ &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')+\frac{1}{p_0}\,p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{1}{p_0}\,p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda'),\end{aligned} \tag{4.158}$$

作变量替换 $\mathbf{p}\leftrightarrow-\mathbf{p}$ 和 $\lambda\leftrightarrow\lambda'$，得

$$\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')=\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)-\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)=\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda'), \tag{4.159}$$

即 $\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')=0$，故

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]=0. \tag{4.160}$$

对上式取厄米共轭，可推出 $[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=0$。

4.3.3　选读：推导哈密顿量和总动量

下面逐项计算哈密顿量 (4.136)。

哈密顿量的第一项是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\pi}^2\\ =&\ \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}(\mathrm{i}p_0)(\mathrm{i}q_0)\left[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\ &\qquad\cdot\left[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right]\\ =&-\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\ p_0q_0}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\ &\quad-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\\ &\quad+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big]\\ =&-\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\ p_0q_0}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{-\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\\ &\qquad+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big]\\ &\quad+\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\\ &\qquad+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big]\Big\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}} E_{\mathbf{p}}^2 \Big[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'}$$
$$- \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(-\mathbf{p},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} \Big]. \tag{4.161}$$

第二项是

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \, \frac{1}{m^2} (\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \frac{(\mathrm{i}p_0)(\mathrm{i}q_0)}{m^2} \Big[\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \Big]$$
$$\times \Big[\mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} + \mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \Big]$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\; p_0 q_0}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}\, m^2} \Big\{ -[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}$$
$$- [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}$$
$$- [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\; p_0 q_0}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}\, m^2} \Big\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \Big([\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}$$
$$+ [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t} \Big)$$
$$+ \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \Big([\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}$$
$$+ [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t} \Big) \Big\}$$
$$= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}} \frac{E_{\mathbf{p}}^2}{m^2} \Big\{ [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}$$
$$+ [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'} - [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}$$
$$- [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(-\mathbf{p},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} \Big\}. \tag{4.162}$$

第三项是

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \, (\nabla\times\mathbf{A})^2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big[\mathrm{i}\,\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \mathrm{i}\,\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \Big]$$
$$\cdot \Big[\mathrm{i}\,\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - \mathrm{i}\,\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \Big]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{ [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}$$
$$+ [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}$$
$$- [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')] a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \Big([\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')] a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big)\\
&\qquad - \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big([\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\\
&\qquad\qquad + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big)\Big\}\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}\Big\{[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}\\
&\quad + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\\
&\quad + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.163}
$$

第四项是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\,m^2\mathbf{A}^2\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;m^2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big]\\
&\qquad\qquad\cdot\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;m^2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\
&\quad + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\\
&\quad + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;m^2}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big]\\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big]\Big\}\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}m^2\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}\\
&\quad + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big].
\end{aligned}
\tag{4.164}
$$

综合起来，哈密顿量化为

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}\Big[&f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} + f_1^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}\\
&+ f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + f_2^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big],
\end{aligned}
\tag{4.165}
$$

其中，

$$
f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') \equiv E_{\mathbf{p}}^2\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda') + \frac{E_{\mathbf{p}}^2}{m^2}[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')]
$$

$$+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')]+m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda'), \tag{4.166}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') \equiv & -E_{\mathbf{p}}^2\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{E_{\mathbf{p}}^2}{m^2}[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')] \\ & +[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')]+m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{4.167}$$

现在计算 $f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda')$。由 (4.123)、(4.157) 和 (4.99) 式，得

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')=\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)-\frac{\mathbf{p}}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-\frac{\mathbf{p}}{p_0}\,\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')\right] \\ =&\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-\frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-\frac{\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')}{p_0}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)+\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =&\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-\frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}\,p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda')-\frac{\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')}{p_0}\,p_0\varepsilon^{0}(\mathbf{p},\lambda)+\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =&\ -\varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda')+\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}-1\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{m^2}{E_{\mathbf{p}}^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{4.168}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} &[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')] \\ =&\left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')\right] \\ =&\ [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')]-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ &-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')]+\frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =&\ p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda')-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ &-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda')+\frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =&\left(p_0^2-2|\mathbf{p}|^2+\frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')=\left[p_0^2-|\mathbf{p}|^2+\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}(|\mathbf{p}|^2-p_0^2)\right]\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =&\left(m^2-m^2\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')=\frac{m^4}{E_{\mathbf{p}}^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{4.169}$$

对于任意三维矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，利用 (1.118) 式，有

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{b}) &= \varepsilon^{ijk}p^ja^k\varepsilon^{imn}p^mb^n=(\delta^{jm}\delta^{kn}-\delta^{jn}\delta^{km})p^ja^kp^mb^n \\ &= p^ja^kp^jb^k-p^ja^kp^kb^j=|\mathbf{p}|^2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}), \end{aligned} \tag{4.170}$$

从而得到

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')] &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')] \\ &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') \\ &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')-E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{4.171}$$

于是，(4.166) 式化为

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') &= E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'} - m^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') + m^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\
&\quad + |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') + m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') \\
&= E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'} + E_{\mathbf{p}}^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') \\
&= E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'} - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda') = 2E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'}.
\end{aligned}
\tag{4.172}
$$

因此，

$$
f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = f_1^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = 2E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{4.173}
$$

接着计算 $f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda')$。由 (4.123) 和 (4.157) 式得

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda') = \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{\mathbf{p}}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\mathbf{p}}{p_0}\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\right] \\
&= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')}{p_0}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')}{p_0}p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^2}(2E_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda').
\end{aligned}
\tag{4.174}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')] \\
&= \left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\right] \\
&= [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&\quad - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] - \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&= -p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&\quad + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&= \left(-p_0^2 + 2|\mathbf{p}|^2 - \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') = -\frac{1}{E_{\mathbf{p}}^2}(E_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2)^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\
&= -\frac{m^4}{E_{\mathbf{p}}^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda'),
\end{aligned}
\tag{4.175}
$$

而

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') - [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] \\
&= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda')
\end{aligned}
$$

$$= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda'). \tag{4.176}$$

于是，(4.167) 式化为

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') &= -E_{\mathbf{p}}^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') - (2E_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') + m^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\ &\quad +|\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') + m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') \\ &= (-E_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + (-2E_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2 + E_{\mathbf{p}}^2)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.177}$$

因此，

$$f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = f_2^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = 0. \tag{4.178}$$

将 (4.173) 和 (4.178) 式代入 (4.165) 式，再利用产生湮灭算符的对易关系 (4.127)，推出有质量矢量场的哈密顿量算符为

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}2E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'}(a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}^\dagger + a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda'}) = \sum_{\lambda}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}(a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{3}{2}E_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \tag{4.179}$$

这就是 (4.137) 式。

根据 (1.218) 式，有质量矢量场的总动量算符为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -\int\mathrm{d}^3x\,\pi_i\nabla A^i \\ &= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}(\mathrm{i}p_0)\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\ &\qquad\times(\mathrm{i}\mathbf{q})\left[\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - \varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right] \\ &= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[-\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\ &\qquad -\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + \tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\ &\qquad +\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\ &= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} \\ &\qquad\qquad +\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big] \\ &\qquad -\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} \\ &\qquad\qquad +\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big]\Big\} \\ &= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}^\dagger + \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda'} \end{aligned}$$

$$+\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big]. \tag{4.180}$$

由 (4.123) 和 (4.156) 式推出

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda') &= \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}p_i\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')-\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda'),\end{aligned} \tag{4.181}$$

从而，

$$\begin{aligned}&-\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big]\\ =&-\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big\{[\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')-\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\\ &\qquad+[\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')-\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big\}\\ =&-\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathbf{p}}{2}\Big\{[\varepsilon_i(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda)-\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)]a_{-\mathbf{p},\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\\ &\qquad+[\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)-\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big\}\\ =&\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big\{[\varepsilon_i(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda)-\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\\ &\qquad+[\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)-\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.182}$$

上式第二步进行了 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 的替换和 $\lambda\leftrightarrow\lambda'$ 的互换，由于要对整个三维动量空间积分且对 λ 和 λ' 进行求和，这两种操作都不会改变结果。第三步用到产生湮灭算符的对易关系 (4.127)。留意到第一步与第三步的结果互为相反数，可知上式为零。因此，(4.180) 式最后一步方括号中最后两项没有贡献。再利用 (4.151) 式，推出

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}(-\delta_{\lambda\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}-\delta_{\lambda\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'})=\sum_{\lambda}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}(a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}+a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda})\\ &= \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}+\frac{3}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}=\sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}.\end{aligned} \tag{4.183}$$

这就是 (4.138) 式。

4.4　无质量矢量场的正则量子化

4.4.1　无质量情况下的极化矢量

当质量 $m=0$ 时，由 (4.68) 和 (4.69) 式表达的两个横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 是定义良好的，但 (4.79) 式显然不是纵向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的良好定义。此时，如果要求 $e^\mu(\mathbf{p},3)$

的空间分量正比于 $\mathbf{p}$，则 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 一定不能符合四维横向条件；另一方面，类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 也不可能是四维横向的；相关论证过程作为习题 4.7 练习。因此，四维横向的独立极化矢量只有 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 这两个。此外，由于无质量情况下 $p^2=0$，也不能像 (4.83) 式那样将 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 取为正比于 p^μ 的矢量，否则将出现 $e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=0$ 而不能得到正确的归一化。于是，我们需要重新定义 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},0)$。

在用 (4.68) 和 (4.69) 式定义 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 时，我们已经选取了一个特定的惯性参考系。在这个参考系中定义一个类时单位矢量

$$n^\mu=(1,0,0,0), \tag{4.184}$$

它的自我内积是 $n^2=1$。然后，将类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在此参考系中的形式就取为 n^μ，即

$$e^\mu(\mathbf{p},0)=n^\mu=(1,0,0,0). \tag{4.185}$$

$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在其它惯性参考系中的形式可通过 Lorentz 变换得到。另一方面，用 p^μ 和 n^μ 将纵向极化矢量定义为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{p^\mu-(p\cdot n)n^\mu}{p\cdot n}. \tag{4.186}$$

在狭义相对论中，自由的无质量粒子以光速运动，其动量 $\mathbf{p}$ 必定不为零，质壳条件 $p^2=(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2=0$ 意味着

$$p^0=|\mathbf{p}|>0. \tag{4.187}$$

从而 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 在我们选取的参考系中表达为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{p^\mu-p^0n^\mu}{p^0}=\left(0,\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{p}|}(0,p^1,p^2,p^3), \tag{4.188}$$

其空间分量与 $\mathbf{p}$ 平行，即在三维空间中是纵向的。

这样定义的 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 满足正交归一关系 (4.65)：

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=n^2=1,\quad e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}=-1, \tag{4.189}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},1)=e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},2)=e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},3)=0, \tag{4.190}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},i)=-\frac{1}{|\mathbf{p}|}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2. \tag{4.191}$$

此外，可以验证，由 (4.68)、(4.69)、(4.185) 和 (4.186) 式定义的这组极化矢量确实满足完备性关系 (4.66)：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)\\
=\;&e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0)-e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1)-e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2)-e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3)\\
=\;&\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&p^1p^3p^1p^3&p^1p^3p^2p^3&-p^1p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\0&p^2p^3p^1p^3&p^2p^3p^2p^3&-p^2p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\0&-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^1p^3&-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^2p^3&|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
-\frac{1}{|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&p^2p^2&-p^2p^1&0\\0&-p^1p^2&p^1p^1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&p^1p^1&p^1p^2&p^1p^3\\0&p^2p^1&p^2p^2&p^2p^3\\0&p^3p^1&p^3p^2&p^3p^3\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{(p^1)^2(p^3)^2+(p^2)^2|\mathbf{p}|^2+(p^1)^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}&-\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]+p^1p^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}&\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}-\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}\\0&-\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]+p^1p^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}&-\frac{(p^2)^2(p^3)^2+(p^1)^2|\mathbf{p}|^2+(p^2)^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}&\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}-\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}\\0&\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}-\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}&\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}-\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}&-\frac{|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2+(p^3)^2}{|\mathbf{p}|^2}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=g_{\mu\nu}. \tag{4.192}
$$

不过，$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 都不满足四维横向条件：

$$
p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=p\cdot n=p^0=|\mathbf{p}|>0,\quad p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}=-|\mathbf{p}|=-p\cdot n<0. \tag{4.193}
$$

横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 具有求和关系

$$
\begin{aligned}
-\sum_{\sigma=1}^{2}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)&=\sum_{\sigma=1}^{2}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)=g_{\mu\nu}-g_{00}e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0)-g_{33}e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3)\\
&=g_{\mu\nu}-n_\mu n_\nu+\frac{p_\mu-(p\cdot n)n_\mu}{p\cdot n}\frac{p_\nu-(p\cdot n)n_\nu}{p\cdot n}\\
&=g_{\mu\nu}-n_\mu n_\nu+\frac{p_\mu p_\nu-(p\cdot n)p_\mu n_\nu-(p\cdot n)p_\nu n_\mu+(p\cdot n)^2n_\mu n_\nu}{(p\cdot n)^2}\\
&=g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2}-\frac{p_\mu n_\nu+p_\nu n_\mu}{p\cdot n},
\end{aligned} \tag{4.194}
$$

即

$$
\sum_{\sigma=1}^{2}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)=-g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2}+\frac{p_\mu n_\nu+p_\nu n_\mu}{p\cdot n}. \tag{4.195}
$$

仍然按照 (4.92) 式定义横向圆极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm)$，则 (4.100) 式中的部分求和关系表明

$$
\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=\sum_{\sigma=1}^{2}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma), \tag{4.196}
$$

因而极化求和关系为

$$
\boxed{\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=-g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2}+\frac{p_\mu n_\nu+p_\nu n_\mu}{p\cdot n}.} \tag{4.197}
$$

四维横向条件 $p_\mu \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \pm) = 0$ 在上式中体现为

$$p^\nu \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda) = -p_\mu - \frac{p_\mu p^2}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu(p\cdot n) + p^2 n_\mu}{p\cdot n} = -p_\mu + p_\mu = 0. \tag{4.198}$$

4.4.2 无质量矢量场与规范对称性

在自由有质量实矢量场的拉氏量 (4.46) 中，令质量参数 $m = 0$，就得到自由无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的拉氏量

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},} \tag{4.199}$$

其中 $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$。同样，令 Proca 方程 (4.50) 中 $m = 0$，即得自由无质量矢量场的经典运动方程

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.} \tag{4.200}$$

根据 1.5 节的讨论，这个方程就是*无源*的 **Maxwell 方程**。*电磁场*是一种无质量矢量场。作为电磁场的量子，**光子**是一种自旋为 1 的无质量矢量玻色子。

考虑对 $A^\mu(x)$ 作**规范变换** (gauge transformation)

$$\boxed{A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x),} \tag{4.201}$$

其中，作为变换参数的 $\chi(x)$ 是一个任意的 Lorentz 标量函数，它依赖于时空坐标。这样的变换是一种**局域** (local) 变换，即不同时空点处的变换参数可取不同数值。在此规范变换下，**场强张量不变**，即

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x) = \partial^\mu[A^\nu(x) + \partial^\nu\chi(x)] - \partial^\nu[A^\mu(x) + \partial^\mu\chi(x)] \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + \partial^\mu\partial^\nu\chi(x) - \partial^\nu\partial^\mu\chi(x) \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = F^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \tag{4.202}$$

于是，拉氏量 (4.199) 和无源 Maxwell 方程 (4.200) 都不会改变，这称为**规范对称性** (gauge symmetry)。回顾 (1.132) 式，电磁场的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是场强张量的分量，因而它们是**规范不变量** (gauge invariant)。

拉氏量 (4.46) 中的质量项 $m^2 A_\mu A^\mu/2$ 在规范变换下发生改变，因此自由的有质量矢量场不具有规范对称性。

规范对称性在经典电动力学中就已经存在，它表明四维矢势 $A^\mu(x)$ 不能被唯一地确定，因而不是直接观测量。电动力学中的直接观测量都不依赖于 $\chi(x)$，也就是说，不依赖于**规范**的选取。规范对称性的存在对研究无质量矢量场带来了不便。为了便于计算，常常将规范固定下来，使得计算过程依赖于选取的规范，不过，最后得出的可观测量（如电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$）必须是*规范不变量*。

这里列出一些常见的规范条件。

$$\text{Lorenz 规范:} \qquad \partial_\mu A^\mu = 0\,; \tag{4.203}$$

$$\text{Coulomb 规范:} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0\,; \tag{4.204}$$

$$\text{时性 (temporal) 规范:} \qquad A^0 = 0\,; \tag{4.205}$$

$$\text{轴向 (axial) 规范:} \qquad A^3 = 0\,. \tag{4.206}$$

在这些条件中，只有 **Lorenz 规范** [15] 是 Lorentz 协变的。注意，虽然 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 看起来与有质量矢量场的 Lorenz 条件 (4.53) 相同，但是，在研究有质量矢量场时它是从运动方程推导出来的必须满足的约束条件，而在研究无质量矢量场时它只是一种人为选择。

对于任意的 $A^\mu(x)$，令规范变换函数 $\chi(x)$ 满足方程

$$\partial^2 \chi(x) = -\partial_\mu A^\mu(x), \tag{4.207}$$

那么，作规范变换之后的场 $A'^\mu(x)$ 就会满足 Lorenz 规范条件：

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \partial^2 \chi(x) = \partial_\mu A^\mu(x) - \partial_\mu A^\mu(x) = 0. \tag{4.208}$$

但是，经过这种变换之后，矢量场仍然没有被唯一地确定：对于满足 Lorenz 规范条件的矢量场 $A'^\mu(x)$，取满足齐次波动方程

$$\partial^2 \tilde{\chi}(x) = 0 \tag{4.209}$$

的任意规范变换函数 $\tilde{\chi}(x)$ 再作一次规范变换，都能得到满足 Lorenz 规范条件的另一个矢量场 $\tilde{A}'^\mu(x) = A'^\mu(x) + \partial^\mu \tilde{\chi}(x)$。可见，存在无穷多个规范等价的矢量场，它们描述相同的物理，全都满足 Lorenz 规范条件 (4.203)。

矢量场 $A^\mu(x)$ 有 4 个分量，因而在没有任何约束的情况下可以具有 4 个独立的自由度，它们的运动行为由 Maxwell 方程 (4.200) 描述。要求 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 成立将减少 1 个独立自由度。但是，上述规范等价性表明，$A^\mu(x)$ 并没有 3 个独立的自由度，否则它在强加 Lorenz 规范条件之后就必须唯一地确定下来。实际上，无质量矢量场 $A^\mu(x)$ 只具有 **2 个独立的自由度**。在经典电动力学中，真空里的电磁波是横波，振动方向垂直于传播方向，可以用规范不变的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 描述，横波所具有的 2 种横向极化态就对应于无质量矢量场的 2 个独立自由度。

3.3.2 小节讨论表明，自旋为 1 的无质量粒子具有 2 种独立的自旋极化态，以螺旋度 λ 来表征，就是 $\lambda = +1$（右旋极化）和 $\lambda = -1$（左旋极化）的态，分别对应于横向圆极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -)$。等价地，也可以用横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p}, 1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p}, 2)$ 代表两种独立极化态。这样的独立极化态数目与无质量矢量场的独立自由度一致。从这个角度来看，为了用矢量场描述自旋为 1 的无质量粒子，我们必须构造具有规范对称性的拉氏量 (4.199)，从而利用规范对称性将 $A^\mu(x)$ 的独立自由度减少成 2 个，这样才能恰好符合独立极化态的数目。

在上一节讨论有质量矢量场 $A^\mu(x)$ 的正则量子化时，由于场的时间分量 $A^0(x)$ 不拥有非零的共轭动量密度，因而没有将它作为独立的正则运动变量。但这种情况并没有使正则量子化出

现困难，因为可以从 Proca 方程导出关系式 (4.62)，即

$$A^0 = -\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}, \tag{4.210}$$

然后在实际计算将 A^0 替换掉。于是，以场的空间分量 $A^i(x)$ 作为 3 个独立正则变量进行量子化是合适的，自由度恰好与有质量矢量玻色子的 3 种物理极化态（螺旋度 $\lambda = +1, 0, -1$）相符。实际上，我们将有质量矢量场的拉氏量取为 (4.46) 的形式是为了导出 Lorenz 条件 (4.53) 作为 1 个约束，使得 $A^\mu(x)$ 只有 3 个独立自由度，从而符合自旋为 1 的有质量粒子的独立极化态数目。

当 $m = 0$ 时，(4.210) 式显然不能成立。对于无质量矢量场，可以想办法让 $A^0(x)$ 也作为独立的正则变量，这需要给它安排非零的共轭动量密度。为此，在拉氏量中增加一个不会影响最终物理结果的项，得到

$$\boxed{\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,} \tag{4.211}$$

其中 ξ 是一个可以自由选取的实参数。可以看出，在 $A^\mu(x)$ 满足 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 的情况下，由 (4.211) 式定义的 $\mathcal{L}_1$ 等价于由 (4.199) 式定义的 $\mathcal{L}$。新增的项 $-(2\xi)^{-1}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 破坏了规范对称性，相当于在一定程度上固定了规范，因而称它为**规范固定项** (gauge-fixing term)。

如果将 ξ 看成一个不会传播的常数场，则由

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\xi)} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\xi} = \frac{1}{2\xi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{4.212}$$

和 Euler-Lagrange 方程 (1.167) 可知，关于 ξ 的经典运动方程为

$$-\frac{1}{2\xi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = 0. \tag{4.213}$$

这等价于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$。可见，引入 ξ 这样一个**辅助场** (auxiliary field) 可以强制 Lorenz 规范作为约束条件在经典层面上成立。这种方法相当于高等数学中的 *Lagrange 乘数法*，它把具有 n 个变量与 k 个约束条件的最优化问题转换为具有 $n+k$ 个变量的极值方程组问题。

参考 (4.47) 式，将 $\mathcal{L}_1$ 展开为

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{4.214}$$

根据 (1.168) 式，A^μ 对应的共轭动量密度是

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 - \frac{1}{\xi}(\partial_\nu A^\nu)\frac{\partial(\partial_\rho A^\rho)}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = -F_{0\mu} - \frac{1}{\xi}g_{0\mu}\partial_\nu A^\nu, \tag{4.215}$$

即

$$\pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0, \quad \pi_0 = -\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu. \tag{4.216}$$

现在，A^0 具有相应的共轭动量密度 π_0。

根据 (2.76) 式，正则量子化程序要求算符 A^μ 和 π_μ 满足**等时对易关系**

$$\boxed{[A^\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [A^\mu(\mathbf{x},t),A^\nu(\mathbf{y},t)]=[\pi_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)]=0.} \tag{4.217}$$

但是，这样的等时对易关系与 Lorenz 规范条件相互矛盾。计算 A^0 与 $\partial_\mu A^\mu$ 的对易子，利用 (4.216) 式，得到

$$[A^0(\mathbf{y},t),\partial_\mu A^\mu(\mathbf{x},t)]=-\xi[A^0(\mathbf{y},t),\pi_0(\mathbf{x},t)]=-\mathrm{i}\xi\delta^{(3)}(\mathbf{y}-\mathbf{x}). \tag{4.218}$$

上式在 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 处非零，因而 $\partial_\mu A^\mu$ 必定不恒为零。所以，A^μ 作为场算符在满足等时对易关系的同时不能满足 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu=0$。这说明 Lorenz 规范条件虽然适用于经典场 $A^\mu(x)$，但对于量子场 $A^\mu(x)$ 来说限制太强了，下面会考虑弱化的 Lorenz 规范条件。

由于 $\partial_\mu A^\mu=g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$，有

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\partial^\mu A^\nu+\partial^\nu A^\mu-\frac{1}{\xi}g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho,\quad \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial A_\nu}=0. \tag{4.219}$$

于是，从 $\mathcal{L}_1$ 导出关于 A^μ 的 Euler-Lagrange 方程

$$0=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}-\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial A_\nu}=-\partial^2A^\nu+\partial^\nu\partial_\mu A^\mu-\frac{1}{\xi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\rho A^\rho=-\partial^2A^\nu+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\nu\partial_\rho A^\rho, \tag{4.220}$$

即 A^μ 的经典运动方程是

$$\partial^2A^\mu-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial_\nu A^\nu=0. \tag{4.221}$$

若取 $\xi=1$，则上式化为 **d'Alembert 方程**

$$\partial^2A^\mu(x)=0, \tag{4.222}$$

这可以看作无质量情况下的 Klein-Gordon 方程。因此，把规范固定参数取为

$$\boxed{\xi=1} \tag{4.223}$$

会简化计算，这种取法称为 **Feynman 规范**，本节后续计算采用这个规范。在 Feynman 规范下，拉氏量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1&=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu-\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)\partial_\nu A^\nu\\&=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\nu(A_\mu\partial^\mu A^\nu)-\frac{1}{2}A_\mu\partial_\nu\partial^\mu A^\nu-\frac{1}{2}\partial^\mu(A_\mu\partial_\nu A^\nu)+\frac{1}{2}A_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu\\&=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu-A^\mu\partial_\nu A^\nu).\end{aligned} \tag{4.224}$$

上式第三步第二项是一个全散度，它不会影响作用量和运动方程，可以舍弃。因此，还能采用更加简化的拉氏量

$$\mathcal{L}_2=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu. \tag{4.225}$$

由它推出的经典运动方程也是 d'Alembert 方程 (4.222)。此时共轭动量密度为

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu. \tag{4.226}$$

对于 d'Alembert 方程 (4.222)，平面波正能解和负能解分别正比于 $\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 和 $\exp(\mathrm{i}p\cdot x)$，其中

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|. \tag{4.227}$$

使用上一小节讨论的实极化矢量组 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$，对无质量实矢量场算符 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 作平面波展开，得

$$\boxed{A^\mu(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right),} \tag{4.228}$$

其中 $b_{\mathbf{p},\sigma}$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}$ 分别是湮灭算符和产生算符。容易验证，这个展开式满足自共轭条件

$$[A^\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = A^\mu(\mathbf{x},t). \tag{4.229}$$

相应的共轭动量密度展开式为

$$\pi_\mu(\mathbf{x},t) = -\partial_0 A_\mu = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{4.230}$$

它也满足自共轭条件

$$[\pi_\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_\mu(\mathbf{x},t). \tag{4.231}$$

根据平面波展开式 (4.228) 和 (4.230)，以及等时对易关系 (4.217)，推出产生湮灭算符的对易关系

$$\boxed{[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] = [b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = 0.} \tag{4.232}$$

具体推导过程见 4.4.3 小节选读内容。

4.4.3 选读：推导产生湮灭算符的对易关系

本小节推导产生湮灭算符的对易关系 (4.232)。

利用

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}A^\mu(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}\left[e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma} + e^\mu(-\mathbf{q},\sigma)b^\dagger_{-\mathbf{q},\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right]
\end{aligned} \tag{4.233}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\partial_0 A^\mu(x) \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
=& \int \mathrm{d}^3p\, \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\
=& \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}\left[e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma} - e^\mu(-\mathbf{q},\sigma)b^\dagger_{-\mathbf{q},\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right],
\end{aligned}
\tag{4.234}
$$

以及正交归一关系 (4.65)，可得

$$
\begin{aligned}
e_\mu(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left(\partial_0 A^\mu - \mathrm{i}q_0 A^\mu\right) &= e_\mu(\mathbf{q},\sigma')\,\frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma} \\
&= -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma'\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma} = -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, g_{\sigma'\sigma'}b_{\mathbf{q},\sigma'}.
\end{aligned}
\tag{4.235}
$$

注意，虽然上式出现了重复的指标 σ'，但此处不需要对 σ' 求和。于是，

$$
b_{\mathbf{p},\sigma} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left(\partial_0 A^\mu - \mathrm{i}p_0 A^\mu\right). \tag{4.236}
$$

对上式取厄米共轭，得

$$
b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(\partial_0 A^\mu + \mathrm{i}p_0 A^\mu\right). \tag{4.237}
$$

令 $x^0 = y^0 = t$，根据等时对易关系 (4.217)，湮灭算符与产生算符的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] =& \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\times\left[\partial_0 A^\mu(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^\mu(\mathbf{x},t),\ \partial_0 A^\nu(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0 A^\nu(\mathbf{y},t)\right] \\
=& \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\times\left[-\pi^\mu(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^\mu(\mathbf{x},t),\ -\pi^\nu(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0 A^\nu(\mathbf{y},t)\right] \\
=& \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\times\left\{-\mathrm{i}q_0\left[\pi^\mu(\mathbf{x},t), A^\nu(\mathbf{y},t)\right] + \mathrm{i}p_0\left[A^\mu(\mathbf{x},t), \pi^\nu(\mathbf{y},t)\right]\right\} \\
=& \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\left[-(p_0+q_0)g^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right] \\
=& -\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
=& -\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e^\mu(\mathbf{p},\sigma') \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'} g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{4.238}
$$

倒数第三步 (2.65) 式，倒数第二步用到正交归一关系 (4.65)。另一方面，两个湮灭算符之间的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] &= \frac{-g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e_\nu(\mathbf{q},\sigma') \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} \\
&\qquad \times [\partial_0 A^\mu(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^\mu(\mathbf{x},t),\ \partial_0 A^\nu(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0 A^\nu(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e_\nu(\mathbf{q},\sigma') \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} \\
&\qquad \times [-\pi^\mu(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^\mu(\mathbf{x},t),\ -\pi^\nu(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0 A^\nu(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e_\nu(\mathbf{q},\sigma') \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} \\
&\qquad \times \{\mathrm{i}q_0 [\pi^\mu(\mathbf{x},t), A^\nu(\mathbf{y},t)] + \mathrm{i}p_0 [A^\mu(\mathbf{x},t), \pi^\nu(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e_\nu(\mathbf{q},\sigma') \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} \left[(q_0-p_0) g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right] \\
&= \frac{E_\mathbf{p}-E_\mathbf{q}}{\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{q})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{E_\mathbf{p}-E_\mathbf{q}}{\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} g_{\sigma\sigma} g_{\sigma'\sigma'} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{q})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.239}
$$

最后一步用到 (2.119) 式。对上式取厄米共轭，可推出 $[b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = 0$。

4.4.4 物理极化态

根据 (1.170)、(4.226) 和 (4.225) 式，自由无质量矢量场的哈密顿量密度是

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_\mu \partial^0 A^\mu - \mathcal{L}_2 = -(\partial_0 A_\mu)\partial^0 A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_0 A_\mu)\partial^0 A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_i A_\mu)\partial^i A^\mu = -\frac{1}{2}\left[\pi_\mu \pi^\mu + (\nabla A_\mu)\cdot(\nabla A^\mu)\right].
\end{aligned} \tag{4.240}
$$

于是，哈密顿量算符表达为

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, [\pi_\mu \pi^\mu + (\nabla A_\mu)\cdot(\nabla A^\mu)] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3p\, \mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\
&\qquad \times \Big[(\mathrm{i}p_0)(\mathrm{i}q_0)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad\quad + (\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3p\, \mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} e_\mu(\mathbf{p},\sigma) e^\mu(\mathbf{q},\sigma')(p_0 q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}-b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\
=&-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma')(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\\
&\times\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right]\\
&\quad-\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\}\\
=&-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2)(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'})\\
&\qquad-e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(-\mathbf{p},\sigma')(E_{\mathbf{p}}^2-|\mathbf{p}|^2)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\Big]\\
=&-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'})\\
=&-\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\,g_{\sigma\sigma'}(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})\,(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma})\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma})\;+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})^2\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\left(-b^{\dagger}_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}+\sum_{\sigma=1}^{3}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,2E_{\mathbf{p}}.
\end{aligned}
\tag{4.241}
$$

倒数第四步用到正交归一关系 (4.65)，倒数第二步用到产生湮灭算符的对易关系 (4.232)。最后一步第二项是零点能；第一项中类时极化态的贡献为负，与类空极化态的贡献不一样。造成这种情况的原因是 Minkowski 度规是一个**不定度规**，时间对角元 g_{00} 与空间对角元 g_{ii} 具有相反的符号。

将真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $b_{\mathbf{p},\sigma}$ 湮灭的态，满足

$$
b_{\mathbf{p},\sigma}\,|0\rangle=0,\quad \langle 0|0\rangle=1,\quad H\,|0\rangle=E_{\mathrm{vac}}\,|0\rangle\,,\quad E_{\mathrm{vac}}=2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,E_{\mathbf{p}}>0. \tag{4.242}
$$

动量为 $\mathbf{p}$、极化指标为 σ 的单粒子态定义为

$$
|\mathbf{p},\sigma\rangle\equiv\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\,|0\rangle\,, \tag{4.243}
$$

它描述一个无质量矢量玻色子。从而，由

$$
\begin{aligned}
[H,b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}]&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}\sum_{\sigma'=0}^{3}(-g_{\sigma'\sigma'})[b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}b_{\mathbf{q},\sigma'},b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}\sum_{\sigma'=0}^{3}(-g_{\sigma'\sigma'})b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}[b_{\mathbf{q},\sigma'},b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}]\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}\sum_{\sigma'=0}^{3}(-g_{\sigma'\sigma'})b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}(2\pi)^3(-g_{\sigma'\sigma})\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\\
&=E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma'=0}^{3}g_{\sigma'\sigma'}g_{\sigma'\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}=E_{\mathbf{p}}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}
\end{aligned}
\tag{4.244}
$$

得

$$
\begin{aligned}
H\left|\mathbf{p},\sigma\right\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,Hb^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\left|0\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\left(b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}H + E_{\mathbf{p}}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\right)\left|0\right\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\left(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}}\right)b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\left|0\right\rangle = \left(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}}\right)\left|\mathbf{p},\sigma\right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.245}
$$

这看起来是一个正常的结果，说明单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$ 比真空多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$。

利用产生湮灭算符的对易关系 (4.232) 计算单粒子态的内积，得

$$
\begin{aligned}
\left\langle\mathbf{q},\sigma'\,\middle|\,\mathbf{p},\sigma\right\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\left\langle 0\right|b_{\mathbf{q},\sigma'}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\left|0\right\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\left\langle 0\right|\left[b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'} - (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\right]\left|0\right\rangle \\
&= -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{4.246}
$$

于是，

$$
\left\langle\mathbf{p},0\,\middle|\,\mathbf{p},0\right\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad \left\langle\mathbf{p},i\,\middle|\,\mathbf{p},i\right\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad i = 1,2,3. \tag{4.247}
$$

上式表明，单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 的自我内积是负的，这不符合 Hilbert 空间中态矢的要求。而且，相应的能量期待值也是负的：

$$
\left\langle\mathbf{p},0\right|H\left|\mathbf{p},0\right\rangle = \left(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}}\right)\left\langle\mathbf{p},0\,\middle|\,\mathbf{p},0\right\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0. \tag{4.248}
$$

这个负能量结果在物理上看起来是不可接受的，它的根源在于不定度规。

不过，如前所述，无质量矢量场只有 2 种独立的物理极化态，对应于 2 个横向极化矢量 $e^{\mu}(\mathbf{p},1)$ 和 $e^{\mu}(\mathbf{p},2)$，它们满足四维横向条件 (4.77)；而纵向极化和类时极化都是非物理的，也不满足四维横向条件。平面波展开式 (4.228) 中只有满足四维横向条件的部分能够符合 Lorenz 规范条件 $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$，因此，要求 Lorenz 规范条件成立可以除去非物理的极化态。但是，Lorenz 规范条件与正则量子化程序不相容，我们不能直接使用它，而需要将它转换到 Hilbert 空间中态矢的期待值上，要求任何**物理上允许的态矢** $|\Psi\rangle$ 必须满足

$$
\boxed{\left\langle\Psi\right|\partial_{\mu}A^{\mu}(x)\left|\Psi\right\rangle = 0.} \tag{4.249}
$$

上式称为**弱 Lorenz 规范条件**。

将 $A^{\mu}(x)$ 的平面波展开式 (4.228) 分解成正能解和负能解两个部分，即

$$
A^{\mu}(x) = A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x). \tag{4.250}
$$

正能解部分为

$$
A^{\mu(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\,b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{4.251}
$$

其厄米共轭是负能解部分

$$
A^{\mu(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\,b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} = [A^{\mu(+)}(x)]^{\dagger}. \tag{4.252}
$$

如果要求任何物理上允许的态矢 $|\Psi\rangle$ 必须满足 **Gupta-Bleuler 条件** [16, 17]

$$\boxed{\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle = 0,} \tag{4.253}$$

则伴随有

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(-)}(x) = \langle\Psi|\,[\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)]^\dagger = 0, \tag{4.254}$$

从而弱 Lorenz 规范条件 (4.249) 得到满足：

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu}(x)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle + \langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(-)}(x)\,|\Psi\rangle = 0. \tag{4.255}$$

可见，Gupta-Bleuler 条件比弱 Lorenz 规范条件稍强一些。下面以 Gupta-Bleuler 条件作为判断一个态矢是否物理态的标准。

利用 (4.77) 和 (4.193) 式推出

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[p_\mu\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\,b_{\mathbf{p},\sigma}\right] = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,E_{\mathbf{p}}(b_{\mathbf{p},0}-b_{\mathbf{p},3}). \tag{4.256}$$

Gupta-Bleuler 条件 (4.253) 意味着 $(b_{\mathbf{p},0}-b_{\mathbf{p},3})\,|\Psi\rangle = 0$，即

$$b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle = b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle\,,\quad \langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},0} = \langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}. \tag{4.257}$$

于是

$$\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle\,. \tag{4.258}$$

这样一来，根据 (4.241) 式计算，物理态 $|\Psi\rangle$ 的能量期待值为

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,\langle\Psi|\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}+\sum_{\sigma=1}^{3}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)|\Psi\rangle + E_{\mathrm{vac}}\,\langle\Psi|\Psi\rangle\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma=1}^{2}\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\,|\Psi\rangle + E_{\mathrm{vac}}\,\langle\Psi|\Psi\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.259}$$

也就是说，非物理的类时极化与纵向极化对能量的贡献总是相互抵消的，除了零点能，只有两种物理的横向极化才对能量有净贡献 (net contribution)。可见，要求 Gupta-Bleuler 条件成立会除去非物理极化态的贡献。

对于 $\sigma = 0, 3$ 的单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$，由 (4.256) 式和对易关系 (4.232) 得

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},0\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,E_{\mathbf{q}}(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}\,|0\rangle\\ &= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_{\mathbf{q}}[b_{\mathbf{q},0},b^\dagger_{\mathbf{p},0}]\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}g_{00}\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_{\mathbf{q}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.260}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},3\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\,E_\mathbf{q}(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}\,|0\rangle \\
&= \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_\mathbf{q}[b_{\mathbf{q},3},b^\dagger_{\mathbf{p},3}]\,|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}g_{33}\int \mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}E_\mathbf{q}\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_\mathbf{p}\,|0\rangle\,. \qquad (4.261)
\end{aligned}
$$

由于 $E_\mathbf{p}\neq 0$，单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 和 $|\mathbf{p},3\rangle$ 不符合 Gupta-Bleuler 条件 (4.253)，确实是非物理的态矢。对于 $\sigma=1,2$ 的单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$，由 $[b_{\mathbf{q},0},b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}]=[b_{\mathbf{q},3},b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}]=0$ 得

$$
\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\sigma\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\,E_\mathbf{q}(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\,|0\rangle = 0. \qquad (4.262)
$$

可见，横向极化对应的单粒子态 $|\mathbf{p},1\rangle$ 和 $|\mathbf{p},2\rangle$ 确实是物理的，满足 Gupta-Bleuler 条件 (4.253)。

另一方面，根据 (1.218) 式，无质量矢量场的总动量算符为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\,\pi_\mu\nabla A^\mu \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\
&\qquad \times(\mathrm{i}p_0)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\
&\qquad \times\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}-b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\
&\qquad \times\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad\qquad -\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\} \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\Big[e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) \\
&\qquad\qquad +e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(-\mathbf{p},\sigma')\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\right)\Big]. \qquad (4.263)
\end{aligned}
$$

对上式最后一步方括号内第二项的积分及求和作 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 的替换和 $\sigma\leftrightarrow\sigma'$ 的互换，得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(-\mathbf{p},\sigma')\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\right) \\
&= \sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{-\mathbf{p}}{2}\,e_\mu(-\mathbf{p},\sigma')e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{-\mathbf{p},\sigma'}b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}+b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\right) \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\,e_\mu(-\mathbf{p},\sigma')e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\right). \qquad (4.264)
\end{aligned}
$$

可以看出，上式为零。再利用正交归一关系 (4.65)，将总动量算符化为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'})\\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}g_{\sigma\sigma'}(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma})+\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,\frac{\mathbf{p}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})^2\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}+\sum_{\sigma=1}^{3}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right).
\end{aligned}
\tag{4.265}
$$

根据 (4.258) 式，物理态 $|\Psi\rangle$ 的动量期待值为

$$
\langle\Psi|\,\mathbf{P}\,|\Psi\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\,\langle\Psi|\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}+\sum_{\sigma=1}^{3}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)|\Psi\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\sum_{\sigma=1}^{2}\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\,|\Psi\rangle\,. \tag{4.266}
$$

同样，只有两种物理的横向极化才对动量有净贡献。

通过线性组合，可以用湮灭算符 $b_{\mathbf{p},1}$ 和 $b_{\mathbf{p},2}$ 定义另一组等价的湮灭算符

$$
a_{\mathbf{p},\pm}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2}), \tag{4.267}
$$

相应的产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\pm}$ 可通过取厄米共轭得到。反过来，有

$$
b_{\mathbf{p},1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p},+}+a_{\mathbf{p},-}),\quad b_{\mathbf{p},2}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p},+}-a_{\mathbf{p},-}). \tag{4.268}
$$

利用对易关系 (4.232)，推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\pm},a^\dagger_{\mathbf{q},\pm}] &= \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},1}\pm\mathrm{i}b^\dagger_{\mathbf{q},2}] = \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1},\,b^\dagger_{\mathbf{q},1}]+\frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},2}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\\
[a_{\mathbf{p},\pm},a^\dagger_{\mathbf{q},\mp}] &= \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},1}\mp\mathrm{i}b^\dagger_{\mathbf{q},2}] = \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1},\,b^\dagger_{\mathbf{q},1}]-\frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},2}] = 0,\\
[a_{\mathbf{p},\pm},a_{\mathbf{q},\pm}] &= \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b_{\mathbf{q},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{q},2}] = 0,\\
[a_{\mathbf{p},\pm},a_{\mathbf{q},\mp}] &= \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b_{\mathbf{q},1}\pm\mathrm{i}b_{\mathbf{q},2}] = 0,
\end{aligned}
\tag{4.269}
$$

而且，对 $\sigma=0,3$ 有

$$
[a_{\mathbf{p},\pm},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] = \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] = 0,\quad [a_{\mathbf{p},\pm},b_{\mathbf{q},\sigma}] = \frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1}\mp\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b_{\mathbf{q},\sigma}] = 0. \tag{4.270}
$$

于是，可以将产生湮灭算符的对易关系 (4.232) 重新整理为

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0,\quad \lambda,\lambda'=\pm;\\
&[b_{\mathbf{p},\sigma},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [b_{\mathbf{p},\sigma},b_{\mathbf{q},\sigma'}] = [b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = 0,\quad \sigma=0,3;\\
&[a_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] = [b_{\mathbf{p},\sigma},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda}] = [a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\sigma}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] = 0,\quad \lambda=\pm,\ \sigma=0,3.
\end{aligned}
}
\tag{4.271}
$$

根据 (4.92) 式，用横向圆极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm)$ 表达横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$，有

$$e^\mu(\mathbf{p},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)],\quad e^\mu(\mathbf{p},2)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)-\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)]. \tag{4.272}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{2}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma} &= \frac{1}{2}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)](a_{\mathbf{p},+}+a_{\mathbf{p},-})+\frac{1}{2}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)-\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)](a_{\mathbf{p},+}-a_{\mathbf{p},-})\\ &= \varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)a_{\mathbf{p},+}+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)a_{\mathbf{p},-}=\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda},\end{aligned} \tag{4.273}$$

取厄米共轭，得

$$\sum_{\sigma=1}^{2}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}=\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{4.274}$$

于是，可将 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式 (4.228) 改写成

$$\begin{aligned}A^\mu(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0,3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\ &\quad+\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],\end{aligned} \tag{4.275}$$

其中第一行对应于两种非物理极化态，第二行对应于两种物理的圆极化态。

引入物理的单粒子态

$$|\mathbf{p},\lambda\rangle\equiv\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle,\quad \lambda=\pm, \tag{4.276}$$

它描述一个纯中性的无质量矢量玻色子。类似于 (4.121) 式，可以推出

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})|\mathbf{p},\lambda\rangle=\lambda|\mathbf{p},\lambda\rangle,\quad \lambda=\pm, \tag{4.277}$$

即 $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态。因此 (4.267) 式定义的湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\pm}$ 正是螺旋度 $\lambda=\pm$ 所对应的湮灭算符。

此外，由 (4.268) 式得

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{2}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma} &= b^\dagger_{\mathbf{p},1}b_{\mathbf{p},1}+b^\dagger_{\mathbf{p},2}b_{\mathbf{p},2}=\frac{1}{2}(a^\dagger_{\mathbf{p},+}+a^\dagger_{\mathbf{p},-})(a_{\mathbf{p},+}+a_{\mathbf{p},-})+\frac{1}{2}(a^\dagger_{\mathbf{p},+}-a^\dagger_{\mathbf{p},-})(a_{\mathbf{p},+}-a_{\mathbf{p},-})\\ &= a^\dagger_{\mathbf{p},+}a_{\mathbf{p},+}+a^\dagger_{\mathbf{p},-}a_{\mathbf{p},-}=\sum_{\lambda=\pm}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda},\end{aligned} \tag{4.278}$$

因而物理态 $|\Psi\rangle$ 的能量期待值 (4.259) 和动量期待值 (4.266) 也能表示为

$$\boxed{\langle\Psi|H|\Psi\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\sum_{\lambda=\pm}\langle\Psi|a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}|\Psi\rangle+E_{\mathrm{vac}}\langle\Psi|\Psi\rangle,} \tag{4.279}$$

$$\boxed{\langle\Psi|\mathbf{P}|\Psi\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\sum_{\lambda=\pm}\langle\Psi|a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}|\Psi\rangle.} \tag{4.280}$$

习　题

4.1 定义 Lorentz 矢量表示的增速生成元

$$\mathcal{K}^i \equiv \mathcal{J}^{0i}. \tag{4.281}$$

(a) 根据 (4.2) 式，写出 $(\mathcal{K}^1)^\mu{}_\nu$、$(\mathcal{K}^2)^\mu{}_\nu$ 和 $(\mathcal{K}^3)^\mu{}_\nu$ 的矩阵表达式。

(b) 根据 $\mathcal{J}^i$ 的定义 (4.35) 以及 θ^i 和 ξ^i 的定义 (3.42)，证明有限 Lorentz 变换 (4.13) 可以表示为

$$\Lambda = \exp(\mathrm{i}\theta^i\mathcal{J}^i + \mathrm{i}\xi^i\mathcal{K}^i). \tag{4.282}$$

4.2 根据 (4.38)、(4.39) 和 (4.40) 式，将 $\mathcal{J}^i$ 的纯空间部分记为

$$\tilde{\tau}^1_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & -\mathrm{i} \\ & \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}^2_{(1)} = \begin{pmatrix} & & \mathrm{i} \\ & 0 & \\ -\mathrm{i} & & \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}^3_{(1)} = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} & \\ \mathrm{i} & & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.283}$$

(a) 验证 $\tilde{\tau}^i_{(1)}$ 满足 SU(2) 代数关系

$$[\tilde{\tau}^i_{(1)}, \tilde{\tau}^j_{(1)}] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\tilde{\tau}^k_{(1)}. \tag{4.284}$$

(b) 验证 $\tilde{\tau}^i_{(1)}$ 与 (3.157) 式表达的 $\tau^i_{(1)}$ 之间的关系为

$$U^\dagger\tilde{\tau}^i_{(1)}U = \tau^i_{(1)}, \tag{4.285}$$

其中幺正矩阵

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.286}$$

可见，$\tilde{\tau}^i_{(1)}$ 与 $\tau^i_{(1)}$ 等价，也可以把 $\tilde{\tau}^i_{(1)}$ 当作 SU(2) 群 3 维线性表示 $D^{(1)}$ 的生成元矩阵。

4.3 证明 (4.22) 式定义的微分算符 $\hat{L}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系

$$[\hat{L}^{\mu\nu}, \hat{L}^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}\hat{L}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\hat{L}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\hat{L}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\hat{L}^{\nu\rho}). \tag{4.287}$$

实际上，$\hat{L}^{\mu\nu}$ 是 Lorentz 群在场空间上的生成元，它们生成一个无限维幺正表示。

4.4 比较 (4.110) 和 (4.111) 式中负能解的系数，得到

$$\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \mathbf{J}] = (-\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{4.288}$$

以此推出 $[\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$。

4.5 验证有质量矢量场 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_i(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式 (4.109) 和 (4.125) 满足 (4.62) 式 $A^0=-\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}/m^2$。

4.6 设自由有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的拉氏量为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+m^2A^\dagger_\mu A^\mu, \tag{4.289}$$

其中 $F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$，$m>0$，且 $[A^\mu(x)]^\dagger\neq A^\mu(x)$。

(a) 由 Euler-Lagrange 方程 (1.167) 推出 $A^\mu(x)$ 的经典运动方程。

(b) 将 $A^\mu(x)$ 分解成两个实矢量场 $B^\mu(x)$ 和 $C^\mu(x)$ 的线性组合，

$$A^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(B^\mu+\mathrm{i}C^\mu), \tag{4.290}$$

证明拉氏量可化为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2B_\mu B^\mu-\frac{1}{4}C_{\mu\nu}C^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2C_\mu C^\mu, \tag{4.291}$$

其中 $B^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu$，而 $C^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu C^\nu-\partial^\nu C^\mu$。因此，复矢量场的拉氏量相当于两个质量相同的实矢量场的拉氏量。

(c) 证明 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式为

$$A^\mu(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{4.292}$$

且产生湮灭算符满足对易关系

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]=[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=0,\\
[b_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}]=[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=0,\\
[a_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] &= [b_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=[a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}]=[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=0.
\end{aligned} \tag{4.293}$$

(d) 作 U(1) 整体变换 $A'^\mu(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}A^\mu(x)$，证明拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 在此变换下不变，并推出相应的 U(1) 守恒流算符

$$J^\mu=\mathrm{i}q(F^{\mu\nu\dagger}A_\nu-A^\dagger_\nu F^{\mu\nu}). \tag{4.294}$$

(e) 证明 U(1) 守恒荷算符 $Q=\int\mathrm{d}^3x\,J^0$ 表达为

$$Q=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=\pm,0}(q\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}-q\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda})-3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,q. \tag{4.295}$$

可见，$(a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 描述正矢量玻色子，$(b_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 描述反矢量玻色子。

4.7 考虑无质量情况下的极化矢量。

(a) 设纵向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 满足归一关系 $e^\mu(\mathbf{p},3)e_\mu(\mathbf{p},3)=-1$，且其空间分量正比于 $\mathbf{p}$，论证 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 不能满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=0$。

(b) 论证满足归一关系 $e^\mu(\mathbf{p},0)e_\mu(\mathbf{p},0)=1$ 的类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 不能满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=0$。

4.8 由极化求和关系 (4.101) 和 (4.123) 式推出

$$\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{p},\lambda)=-g_{ij}, \tag{4.296}$$

$$\sum_{\lambda=\pm,0}\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{p},\lambda)=-g_{ij}-\frac{p_ip_j}{p_0^2}. \tag{4.297}$$

再利用以上两式、产生湮灭算符的对易关系 (4.127) 以及 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_i(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式 (4.109) 和 (4.125)，推出有质量矢量场的等时对易关系 (4.58)。

4.9 利用完备性关系 (4.66)、产生湮灭算符的对易关系 (4.232) 以及 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_\mu(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式 (4.228) 和 (4.230)，推出无质量矢量场的等时对易关系 (4.217)。

4.10 设 $h_{\mu\nu}(x)$ 是对称的二阶 Lorentz 张量场，满足 $h_{\mu\nu}(x)=h_{\nu\mu}(x)$，考虑 **Pauli-Fierz 作用量**

$$S_{\mathrm{PF}}=\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{PF}}(x), \tag{4.298}$$

其中

$$\mathcal{L}_{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}(\partial^\rho h^{\mu\nu})\partial_\rho h_{\mu\nu}-(\partial^\mu h^{\nu\rho})\partial_\rho h_{\mu\nu}+(\partial^\nu h_{\mu\nu})\partial^\mu h-\frac{1}{2}(\partial^\mu h)\partial_\mu h, \tag{4.299}$$

而 $h\equiv g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$。

(a) 对 $h_{\mu\nu}$ 作规范变换

$$h'_{\mu\nu}(x)=h_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\chi_\nu(x)+\partial_\nu\chi_\mu(x), \tag{4.300}$$

其中 $\chi_\mu(x)$ 是任意 Lorentz 矢量函数，证明 S_{PF} 在规范变换下不变。

(b) 根据 Euler-Lagrange 方程 (1.167)，证明 $h_{\mu\nu}$ 的经典运动方程是

$$\partial^2h_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial^\rho h_{\nu\rho}-\partial_\nu\partial^\rho h_{\mu\rho}+g_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma h_{\rho\sigma}+\partial_\mu\partial_\nu h-g_{\mu\nu}\partial^2h=0. \tag{4.301}$$

注意上式是关于 μ 和 ν 对称的。

(c) 令

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h, \tag{4.302}$$

取 Lorenz 规范

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}=0, \tag{4.303}$$

证明 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的运动方程为

$$\partial^2\bar{h}_{\mu\nu}=0. \tag{4.304}$$

第 5 章　量子旋量场

本章讨论**旋量场** (spinor field) 的正则量子化，旋量场对应于**旋量表示** (spinor representation)。旋量表示是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的一个投影表示，也是相应覆盖群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个线性表示。Paul Dirac 在 1928 年首次将旋量表示引入到描述电子的理论中，建立了 Dirac 方程 [3]。$\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数都是 Lorentz 代数，它们的表示可以通过构造满足 Lorentz 代数关系 (3.33) 的生成元矩阵来得到，下面我们就以这样的方式建立旋量表示。

5.1　Lorentz 群的旋量表示

首先，假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的 $N\times N$ 矩阵 γ^μ $(\mu=0,1,2,3)$：

$$\boxed{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\equiv\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}=2g^{\mu\nu}.} \tag{5.1}$$

最后一步是一种简写，省略了 $N\times N$ 单位矩阵 $\mathbf{1}$。这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 **$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵**。这个反对易关系意味着

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu=2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu.} \tag{5.2}$$

当 $\mu\neq\nu$ 时，$g^{\mu\nu}=0$，而 γ^μ 与 γ^ν 是反对易的，即

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu=-\gamma^\nu\gamma^\mu,\quad \mu\neq\nu.} \tag{5.3}$$

当 $\mu=\nu$ 时，有

$$(\gamma^0)^2=\frac{1}{2}\{\gamma^0,\gamma^0\}=g^{00}=\mathbf{1},\quad (\gamma^i)^2=\frac{1}{2}\{\gamma^i,\gamma^i\}=g^{ii}=-\mathbf{1}. \tag{5.4}$$

进一步假设 γ^μ 是*正规矩阵*，即满足 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^\mu=\gamma^\mu(\gamma^\mu)^\dagger$（这里不采用 Einstein 求和约定），从而用幺正矩阵 U 作相似变换可以将它对角化为 $\tilde{\gamma}^\mu=U^\dagger\gamma^\mu U$。注意，同一个幺正矩阵 U 一般不能同时把 4 个 Dirac 矩阵都对角化，因而不同取值的 μ 对应的 U 可以是不同的，但这里为了方便没有在记号上作区分。相似变换不会改变 (5.4) 式的形式，即

$$(\tilde{\gamma}^0)^2=U^\dagger\gamma^0UU^\dagger\gamma^0U=U^\dagger(\gamma^0)^2U=U^\dagger U=\mathbf{1},\quad (\tilde{\gamma}^i)^2=U^\dagger(\gamma^i)^2U=-\mathbf{1}, \tag{5.5}$$

因此，对角矩阵 $\tilde{\gamma}^0$ 的对角元只能取实数 ± 1，满足 $(\tilde{\gamma}^0)^\dagger = \tilde{\gamma}^0$；对角矩阵 $\tilde{\gamma}^i$ 的对角元只能取虚数 $\pm \mathrm{i}$，满足 $(\tilde{\gamma}^i)^\dagger = -\tilde{\gamma}^i$。这意味着

$$(\gamma^0)^\dagger = (U\tilde{\gamma}^0 U^\dagger)^\dagger = U(\tilde{\gamma}^0)^\dagger U^\dagger = U\tilde{\gamma}^0 U^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = U(\tilde{\gamma}^i)^\dagger U^\dagger = -\gamma^i, \tag{5.6}$$

即 γ^0 是厄米矩阵，而 γ^i 是反厄米矩阵。于是，

$$(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \quad (\gamma^i)^\dagger \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = \mathbf{1}. \tag{5.7}$$

可见 γ^0 和 γ^i 都是幺正矩阵。

然后，以 Dirac 矩阵的对易子定义另一组 $N \times N$ 矩阵

$$\boxed{\mathcal{S}^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].} \tag{5.8}$$

显然，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 反对称，

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = -\mathcal{S}^{\nu\mu}, \tag{5.9}$$

因而一共有 6 个独立矩阵。

利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B, \tag{5.10}$$

推出

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - (2g^{\nu\mu}\mathbf{1} - \gamma^\mu\gamma^\nu), \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\nu) = \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

从而，根据对易子公式 (2.13) 有

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]\gamma^\sigma + \gamma^\rho[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma]\gamma^\rho - \gamma^\sigma[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})\gamma^\sigma + \mathrm{i}\gamma^\rho(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\qquad - \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma})\gamma^\rho - \mathrm{i}\gamma^\sigma(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})] \\
&= \frac{\mathrm{i}^2}{4}(\gamma^\mu\gamma^\sigma g^{\nu\rho} - \gamma^\nu\gamma^\sigma g^{\mu\rho} + \gamma^\rho\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\rho\gamma^\nu g^{\mu\sigma} \\
&\qquad - \gamma^\mu\gamma^\rho g^{\nu\sigma} + \gamma^\nu\gamma^\rho g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\mu g^{\nu\rho} + \gamma^\sigma\gamma^\nu g^{\mu\rho}) \\
&= \frac{\mathrm{i}^2}{4}[g^{\nu\rho}(\gamma^\mu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\mu) - g^{\mu\rho}(\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\nu) - g^{\nu\sigma}(\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu) + g^{\mu\sigma}(\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu)] \\
&= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}\mathcal{S}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\mathcal{S}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathcal{S}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\mathcal{S}^{\nu\rho}).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

可见，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系 (3.33)，因而是 Lorentz 群某个表示的**生成元矩阵**。以 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 生成的表示就是**旋量表示**。

根据 4.1 节的讨论，一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 在 Lorentz 群的矢量表示中生成固有保时向的有限变换 (4.13)：

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{X}, \quad X \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}. \tag{5.13}$$

类似地，这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\boxed{D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{Y}, \quad Y \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}.} \tag{5.14}$$

这样定义的 $D(\Lambda)$ 是**旋量表示中的 Lorentz 变换矩阵**。由 (3.51) 式有

$$\mathrm{e}^{-Y}\mathrm{e}^{Y} = \mathrm{e}^{-Y+Y} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}, \tag{5.15}$$

故 $D(\Lambda)$ 的逆矩阵为

$$D^{-1}(\Lambda) = \mathrm{e}^{-Y} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right). \tag{5.16}$$

这里介绍一些有用的对易子公式。对于算符或同阶方阵 B 与 A，以如下方式定义**多重对易子** $[B, A^{(n)}]$：

$$\begin{aligned}
&[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A] \\
&[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \cdots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A].
\end{aligned} \tag{5.17}$$

从而

$$BA^{k} = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{(k-n)!n!}\, A^{k-n}[B, A^{(n)}], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.18}$$

其中 $\mathbb{N}$ 代表自然数的集合。下面用数学归纳法证明这个等式。

证明 当 $k = 0$ 时，(5.18) 式明显成立：

$$BA^{0} = B = [B, A^{(0)}] = \frac{0!}{(0-0)!0!}\, A^{0-0}[B, A^{(0)}]. \tag{5.19}$$

假设 $k = m$ 时 (5.18) 式成立，则

$$\begin{aligned}
BA^{m+1} &= \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!n!}\, A^{m-n}[B, A^{(n)}]A = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!n!}\, A^{m-n}(A[B, A^{(n)}] + [[B, A^{(n)}], A]) \\
&= \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!n!}\, A^{m+1-n}[B, A^{(n)}] + \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!n!}\, A^{m-n}[B, A^{(n+1)}] \\
&= \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!n!}\, A^{m+1-n}[B, A^{(n)}] + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m!}{(m-j+1)!(j-1)!}\, A^{m-j+1}[B, A^{(j)}] \\
&= \frac{m!}{(m-0)!0!}\, A^{m+1}[B, A^{(0)}] + \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{m!}{(m-n)!n!} + \frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!}\right] A^{m+1-n}[B, A^{(n)}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{m!}{[m-(m+1)+1]![(m+1)-1]!}A^{m-(m+1)+1}[B,A^{(m+1)}]\\
=\ & A^{m+1}[B,A^{(0)}]+\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{m!}{(m-n)!n!}+\frac{n}{m-n+1}\frac{m!}{(m-n)!n!}\right]A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]\\
&+A^{m-(m+1)+1}[B,A^{(m+1)}]\\
=\ & \frac{(m+1)!}{[(m+1)-0]!0!}A^{m+1}[B,A^{(0)}]+\sum_{n=1}^{m}\frac{(m+1)!}{(m-n+1)!n!}A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]\\
&+\frac{(m+1)!}{[(m+1)-(m+1)]!(m+1)!}A^{m-(m+1)+1}[B,A^{(m+1)}]\\
=\ & \sum_{n=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{[(m+1)-n]!n!}A^{(m+1)-n}[B,A^{(n)}],
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

即 $k=m+1$ 时 (5.18) 式也成立。归纳可知，(5.18) 式对任意自然数 k 成立。证毕。

根据推广的阶乘定义 (3.48) 将 (5.18) 式右边的级数化成无穷级数，

$$
BA^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!n!}A^{k-n}[B,A^{(n)}],\quad k\in\mathbb{N}.
\tag{5.21}
$$

利用上式推出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-A}B\mathrm{e}^{A}&=\mathrm{e}^{-A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}BA^k=\mathrm{e}^{-A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!n!}A^{k-n}[B,A^{(n)}]\\
&=\mathrm{e}^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k-n)!}A^{k-n}[B,A^{(n)}]=\mathrm{e}^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{A}[B,A^{(n)}],
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

即

$$
\boxed{\mathrm{e}^{-A}B\mathrm{e}^{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B,A^{(n)}].}
\tag{5.23}
$$

现在，我们继续讨论 Lorentz 群的旋量表示。由 (5.11) 和 (4.2) 式得

$$
[\gamma^\mu,\mathcal{S}^{\rho\sigma}]=-[\mathcal{S}^{\rho\sigma},\gamma^\mu]=[\mathcal{S}^{\sigma\rho},\gamma^\mu]=\mathrm{i}(\gamma^\sigma g^{\rho\mu}-\gamma^\rho g^{\sigma\mu})=\mathrm{i}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu-g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\gamma^\nu=(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu.
\tag{5.24}
$$

从而，

$$
\begin{aligned}
[\gamma^\mu,Y^{(1)}]&=[\gamma^\mu,Y]=-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu,S^{\rho\sigma}]=-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu=X^\mu{}_\nu\gamma^\nu,\\
[\gamma^\mu,Y^{(2)}]&=[[\gamma^\mu,Y^{(1)}],Y]=X^\mu{}_\nu[\gamma^\nu,Y]=X^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho\gamma^\rho=(X^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu,\\
&\cdots\\
[\gamma^\mu,Y^{(n)}]&=(X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

再利用 (5.23) 式推出

$$
D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)=\mathrm{e}^{-Y}\gamma^\mu\mathrm{e}^{Y}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\gamma^\mu,Y^{(n)}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu=(\mathrm{e}^X)^\mu{}_\nu\gamma^\nu,
\tag{5.26}
$$

即

$$\boxed{D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu.} \tag{5.27}$$

类比 (3.26) 式，把上式看作旋量表示中 **Dirac 矩阵** γ^μ 的 **Lorentz 变换规则**，那么 γ^μ 是一个 Lorentz 矢量。相应的协变矢量为

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{5.28}$$

从而

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.29}$$

$N \times N$ 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 满足

$$D^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{1}\,D(\Lambda) = \mathbf{1}, \tag{5.30}$$

因而 $\mathbf{1}$ 是一个 Lorentz 标量。生成元矩阵 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda)\mathcal{S}^{\mu\nu}D(\Lambda) = \frac{\mathrm{i}}{4}[D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda), D^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu D(\Lambda)] = \frac{\mathrm{i}}{4}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\mathcal{S}^{\rho\sigma}, \tag{5.31}$$

可见 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量。

引入一个新的 $N \times N$ 矩阵

$$\boxed{\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.} \tag{5.32}$$

根据 (5.3) 式，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换}, \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换}。\end{cases} \tag{5.33}$$

这种置换性质与四维 Levi-Civita 符号 (1.105) 类似，因而置换操作带来的正负号在 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 与 $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ 的缩并中相互抵消，如

$$\varepsilon_{1023}\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon_{0123}(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{5.34}$$

由此得到

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\mathrm{i}\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \tag{5.35}$$

注意最后一步中的缩并对 4! 个相等的项进行求和。

对于固有保时向 Lorentz 变换 (5.13)，γ^5 的变换形式是

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = \gamma^5, \tag{5.36}$$

第二步用到 (1.115) 式。可见，γ^5 是一个 Lorentz 标量。γ^5 的平方为

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -(-\mathbf{1})^3 = \mathbf{1}. \tag{5.37}$$

第二步利用偶置换将后面的 $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 转化为 $\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0$。根据 (5.6) 式，$\gamma^5$ 是厄米矩阵：

$$(\gamma^5)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = \mathrm{i}\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5. \tag{5.38}$$

此外，γ^5 与 γ^μ 反对易：

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \mathrm{i}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \mathrm{i}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu - \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) = 0, \tag{5.39}$$

即

$$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu. \tag{5.40}$$

$\gamma^\mu\gamma^5$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{5.41}$$

因而它是一个 Lorentz 矢量。再引入

$$\boxed{\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathcal{S}^{\mu\nu},} \tag{5.42}$$

它正比于 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$，所以也是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量：

$$D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}. \tag{5.43}$$

根据 (5.3) 式，当 $\mu \neq \nu$ 时，$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^\mu\gamma^\nu$，故 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量为

$$\sigma^{01} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1, \quad \sigma^{02} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2, \quad \sigma^{03} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^3, \quad \sigma^{12} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^2, \quad \sigma^{13} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^3, \quad \sigma^{23} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^3. \tag{5.44}$$

现在，我们拥有一组矩阵

$$\boxed{\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\},} \tag{5.45}$$

它们的独立分量个数之和为 $1+1+4+4+6 = 16$。上面已经讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换性质，下面研究它们的宇称变换性质。

用 γ^0 定义幺正变换矩阵

$$\boxed{D(\mathcal{P}) = \gamma^0,} \tag{5.46}$$

它的幺正性意味着

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0. \tag{5.47}$$

用 $D(\mathcal{P})$ 对 γ^0 和 γ^i 作相似变换，得

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = +\gamma^0, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i. \tag{5.48}$$

利用宇称变换 $\mathcal{P}$ 的定义 (1.58)，将这两个式子归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \tag{5.49}$$

可见，$D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的**宇称变换矩阵**，它是非固有保时向的。上式是 γ^μ 的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义，γ^μ 是**极矢量**。(5.48) 式说明 γ^0 是宇称本征态，本征值为 $+$，即具有**偶宇称**；γ^i 也是宇称本征态，本征值为 $-$，即具有**奇宇称**。

虽然单位矩阵 $\mathbf{1}$ 与 γ^5 都是 Lorentz 标量，但它们的宇称变换性质不同，

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}\,D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^5. \tag{5.50}$$

根据 1.5 节的定义，$\mathbf{1}$ 是狭义的**标量**，具有偶宇称；γ^5 是**赝标量**，具有奇宇称。此外，$\gamma^\mu\gamma^5$ 的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{5.51}$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5. \tag{5.52}$$

根据 1.4 节的定义，$\gamma^\mu\gamma^5$ 是**轴矢量**，其分量的宇称本征值与 γ^μ 相反。最后，$\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu}D(\mathcal{P}) = \frac{\mathrm{i}}{2}[D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}), D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\nu D(\mathcal{P})] = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta[\gamma^\alpha,\gamma^\beta] = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta}, \tag{5.53}$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{0i}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0{}_\alpha\mathcal{P}^i{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{0i}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{ij}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^i{}_\alpha\mathcal{P}^j{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = +\sigma^{ij}. \tag{5.54}$$

可见，集合 (5.45) 是由标量 $\mathbf{1}$、赝标量 γ^5、极矢量 γ^μ、轴矢量 $\gamma^\mu\gamma^5$ 和 2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的。综合考虑固有保时向 Lorentz 变换和宇称变换，则这些矩阵的变换性质各不相同，因而彼此之间是线性独立的，总共有 16 个线性独立的矩阵。由于线性独立的 $N\times N$ 矩阵至多有 N^2 个，需要 $N\geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵。取 $N=4$，就可以用这 16 个矩阵展开一个任意的 4×4 矩阵（展开系数为复数），也就是说，它们构成一组完备的基底。另一方面，可以证明，满足反对易关系 (5.1) 的 4 个 Dirac 矩阵至少是 4 阶方阵[1]。因此，将 Dirac 矩阵 γ^μ 取为 4×4 矩阵，而旋量表示是 Lorentz 群的一个 4 维表示。

5.2 Dirac 旋量场

在 Lorentz 群的**旋量表示空间**中，被变换矩阵 $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 **Dirac 旋量** (spinor)。由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 矩阵，一个 Dirac 旋量 ψ_a 应当具有 4 个分量 $(a=1,2,3,4)$，相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\boxed{\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b.} \tag{5.55}$$

[1]对于 2 阶方阵的情况，可以尝试用 Pauli 矩阵来构造 Dirac 矩阵。由于 (3.59) 式给出 $\{\mathrm{i}\sigma^i,\mathrm{i}\sigma^j\} = -2\delta^{ij} = 2g^{ij}$，可取 $\gamma^i = \mathrm{i}\sigma^i$。但我们找不到另一个 2 阶方阵能够同时与 $\mathrm{i}\sigma^1$、$\mathrm{i}\sigma^2$ 和 $\mathrm{i}\sigma^3$ 反对易以满足 (5.1) 式。

隐去旋量指标 a 和 b，上式化为

$$\psi' = D(\Lambda)\psi. \tag{5.56}$$

注意上式右边的乘积是矩阵与列矢量的乘积。

进一步，如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ，它就成为 **Dirac 旋量场** $\psi_a(x)$。类似于 (4.28) 式，量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x). \tag{5.57}$$

对于固有保时向 Lorentz 变换，由 (5.14) 式得到 $D_{ab}(\Lambda)$ 的无穷小形式

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}, \tag{5.58}$$

于是，(5.57) 式的无穷小形式是

$$\psi'_a(x') = \psi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x). \tag{5.59}$$

将上式与 (1.230) 式比较，可以发现 1.7.3 小节中的生成元 $I^{\mu\nu}$ 在旋量表示中对应于 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$。隐去旋量指标，则 (5.57) 式化为

$$\psi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi(x')U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(x), \tag{5.60}$$

也可以写成

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{5.61}$$

对于无穷小 Lorentz 变换，根据 (4.20) 式，在 x 处将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ 展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu\psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu\psi(x)\\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x),\end{aligned} \tag{5.62}$$

其中 $\hat{L}^{\mu\nu}$ 是 (4.22) 式定义的微分算符。从而，(5.61) 式右边展开到 ω 一阶项的形式为

$$D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \left(\mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\left[\psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x)\right] = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x)]. \tag{5.63}$$

另一方面，根据 (3.10) 式将 (5.61) 式左边展开为

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}].\end{aligned} \tag{5.64}$$

两相比较，得到

$$\boxed{[\psi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x).} \tag{5.65}$$

表 5.1: 与 Lorentz 变换相关的线性空间。

线性空间名称	矢量表示空间	旋量表示空间
维度	4 维	4 维
空间中的元素	Lorentz 矢量 A^μ	Dirac 旋量 ψ_a
Lorentz 群生成元	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$	$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
固有保时向 Lorentz 变换	$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$	$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$
线性空间名称	Hilbert 空间	场空间
维度	无限维	无限维
空间中的元素	态矢 $\lvert\Psi\rangle$	场 $\phi(x)$、$A^\mu(x)$、$\psi_a(x)$
Lorentz 群生成元	算符 $J^{\mu\nu}$	$\hat{L}^{\mu\nu} = \mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$
固有保时向 Lorentz 变换	$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$	$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\right)$

$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$\mathcal{S}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}^{23}, \mathcal{S}^{31}, \mathcal{S}^{12}). \tag{5.66}$$

可以从 Lorentz 代数关系 (5.12) 推出类似于 (3.41) 式的 SU(2) 代数关系 $[\mathcal{S}^i, \mathcal{S}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^k$，因而 $\mathcal{S}^i$ 是 SU(2) 群某个线性表示的生成元。根据 (3.37) 和 (4.25) 式，将 (5.65) 式的纯空间分量改写为

$$[\psi(x), \mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\psi(x) + \boldsymbol{\mathcal{S}}\psi(x). \tag{5.67}$$

上式表明，除了轨道角动量 $\hat{\mathbf{L}}$，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 与旋量场算符 $\psi(x)$ 的对易子还给出由 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 描述的自旋角动量。为便于区分各种记号，表 5.1 列出与 Lorentz 变换相关的四个线性空间的信息，它们都是 Lorentz 群的表示空间。

利用 Pauli 矩阵 (3.54)，可以将 Dirac 矩阵表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}, \tag{5.68}$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 单位矩阵。容易验证，这样表示的 Dirac 矩阵符合 (5.6) 式，而且满足反对易关系 (5.1)：

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = 2g^{00}, \tag{5.69}$$

$$\{\gamma^0,\gamma^i\} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & -\sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} = 2g^{0i}, \tag{5.70}$$

$$\{\gamma^i,\gamma^j\} = \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} = -2\delta^{ij}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = 2g^{ij}. \tag{5.71}$$

实际上，Dirac 矩阵有多种表示方式，(5.68) 式这种表示方式称为 **Weyl 表象**，也称为**手征表象** (chiral representation)。

Dirac 矩阵的所有表示方式都是等价的，彼此通过相似变换联系起来。如果 γ^μ 满足反对易关系 (5.1)，那么利用幺正矩阵 U 作相似变换后，$\gamma'^\mu \equiv U^\dagger\gamma^\mu U$ 也满足同样的反对易关系：

$$\{\gamma'^\mu,\gamma'^\nu\} = U^\dagger\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}U = 2g^{\mu\nu}U^\dagger U = 2g^{\mu\nu}. \tag{5.72}$$

在 Weyl 表象中，根据 Pauli 矩阵的乘积关系 (3.56)，γ^5 的具体形式为

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\gamma^3 \\ &= \mathrm{i}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i}\sigma^3 \\ -\mathrm{i}\sigma^3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.73}$$

用 2×2 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 和 Pauli 矩阵 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ 定义两个“四维 Pauli 矩阵”

$$\boxed{\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1},\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1},-\boldsymbol{\sigma}),} \tag{5.74}$$

那么，Weyl 表象中 Dirac 矩阵的表达式 (5.68) 可以简洁地归纳成

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}.} \tag{5.75}$$

生成元矩阵表达为

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}. \tag{5.76}$$

利用 (3.58) 式将 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{ij} &= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5.77}$$

从 Pauli 矩阵的厄米性可知，$\mathcal{S}^{ij}$ 是厄米矩阵，

$$(\mathcal{S}^{ij})^\dagger = \mathcal{S}^{ij}. \tag{5.78}$$

利用 (1.119) 式，将旋量表示中的自旋角动量矩阵表达为

$$\mathcal{S}^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} = \frac{1}{4}2\delta^{il}\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}, \tag{5.79}$$

即 $\mathcal{S}^i$ 是两个 SU(2) 群基础表示生成元 (3.53) 的直和，因此 $\mathcal{S}^i$ 所属 SU(2) 群线性表示是两个 SU(2) 基础表示的直和。用自旋角动量矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 构造的二阶 Casimir 算符为

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^2 = \mathcal{S}^i\mathcal{S}^i = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sigma^i\sigma^i & \\ & \sigma^i\sigma^i\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = s(s+1). \tag{5.80}$$

上式最后两步省略了 4×4 单位矩阵。可见，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的自旋量子数是

$$\boxed{s = \frac{1}{2}.} \tag{5.81}$$

量子化之后，$\psi(x)$ 描述**自旋为 1/2** 的粒子。

5.3 Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量，我们需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量。在 Weyl 表象中，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为

$$\mathcal{S}^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^0,\gamma^i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}. \tag{5.82}$$

由 Pauli 矩阵的厄米性得

$$(\mathcal{S}^{0i})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}-(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger\end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix} = -\mathcal{S}^{0i}. \tag{5.83}$$

可见，$\mathcal{S}^{0i}$ 不是厄米矩阵，而是反厄米矩阵。于是，当 $\omega_{0i}\neq 0$ 时，

$$D^\dagger(\Lambda) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\right]^\dagger = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\right] \neq \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = D^{-1}(\Lambda), \tag{5.84}$$

即 $D(\Lambda)$ 不是幺正矩阵。因此，$\psi^\dagger(x)\psi(x)$ 不是 Lorentz 标量：

$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) \neq \psi^\dagger(x)\psi(x). \tag{5.85}$$

根据 (5.6) 式，有

$$(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i. \tag{5.86}$$

将这两条式子合起来写成一条常用的公式

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu.} \tag{5.87}$$

从而

$$(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^\dagger\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu}, \tag{5.88}$$

于是

$$\begin{aligned} D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\right]\gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\right]^n\gamma^0 = \gamma^0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)^n \\ &= \gamma^0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda). \end{aligned} \tag{5.89}$$

根据上式，定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭**

$$\boxed{\bar\psi(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0,} \tag{5.90}$$

则相应的 Lorentz 变换为

$$\bar\psi'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda). \tag{5.91}$$

这样一来，$\bar\psi(x)\psi(x)$ 就是一个 Lorentz 标量：

$$\bar\psi'(x')\psi'(x') = \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar\psi(x)\psi(x). \tag{5.92}$$

像 $\bar\psi(x)\psi(x)$ 这样同时包含 ψ 和 $\bar\psi$ 的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)，利用 $\bar\psi(x)$ 还能构造 Lorentz 协变的其它旋量双线性型。$\bar\psi(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$ 是一个 Lorentz 标量，

$$\bar\psi'(x')\mathrm{i}\gamma^5\psi'(x') = \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda)\mathrm{i}\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \bar\psi(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x). \tag{5.93}$$

$\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 Lorentz 矢量，

$$\bar\psi'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi(x)\gamma^\nu\psi(x), \tag{5.94}$$

$$\bar\psi'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x). \tag{5.95}$$

$\bar\psi(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量，

$$\bar\psi'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar\psi(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x). \tag{5.96}$$

如果将 $\psi(x)$ 看作旋量(表示)空间中的列矢量，则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar\psi(x)$ 都是行矢量，因而这些旋量双线性型都只是旋量空间上的 1×1 矩阵，也就是数。由 γ^0 和 γ^5 的厄米性及 (5.40)、(5.87) 式可知，这些旋量双线性型都是厄米的，也就是说，都是实数：

$$(\bar\psi\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma^0\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar\psi\psi, \tag{5.97}$$

$$(\bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi)^\dagger = -\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = \bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi, \tag{5.98}$$

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^\dagger = \psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{5.99}$$

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^5(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\gamma^\mu\psi = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \tag{5.100}$$

$$(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0\psi = -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)\psi = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \tag{5.101}$$

量子化之后，这五个旋量双线性型成为厄米算符。

此外，包含时空导数的旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 Lorentz 标量，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x).\end{aligned} \tag{5.102}$$

利用 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\psi$ 写下自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi,} \tag{5.103}$$

其中 $m > 0$ 是 Dirac 旋量场的质量。于是，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}. \tag{5.104}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}. \tag{5.105}$$

对上式取厄米共轭，得到

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\partial_\mu(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\partial_\mu\psi + m\gamma^0\psi = -\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \tag{5.106}$$

故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$\boxed{(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0.} \tag{5.107}$$

上式就是 **Dirac 方程** [3]，标明旋量指标的形式为

$$[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0. \tag{5.108}$$

容易验证，Dirac 方程具有 Lorentz 协变性：

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= [\mathrm{i}\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]D(\Lambda)\psi(x) = D(\Lambda)[\mathrm{i}D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(x)\\ &= D(\Lambda)[\mathrm{i}\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(x) = D(\Lambda)(\mathrm{i}\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu - m)\psi(x)\\ &= D(\Lambda)(\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(x) = 0.\end{aligned} \tag{5.109}$$

对 Dirac 方程 (5.107) 的两边同时在左方乘以 $(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)$，利用反对易关系 (5.1)，得

$$0 = (-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = \left[\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\mu\partial_\nu + \partial_\nu\partial_\mu) + m^2\right]\psi$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\psi = (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi. \tag{5.110}$$

也就是说，自由的 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 满足 *Klein-Gordon 方程*

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0. \tag{5.111}$$

(5.76) 式表明，旋量表示的生成元矩阵 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 在 Weyl 表象中是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和。相应地，可以把具有 4 个分量的 Dirac 旋量场 ψ 分解为两个二分量旋量场 η_{L} 和 η_{R}：

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}. \tag{5.112}$$

这样的二分量旋量称为 **Weyl 旋量**，其中，η_{L} 称为**左手** (left-handed) Weyl 旋量，η_{R} 称为**右手** (right-handed) Weyl 旋量。

利用 (5.75) 式将 Dirac 方程 (5.107) 化为

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}, \tag{5.113}$$

即

$$\begin{cases} \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}}(x) - m\eta_{\mathrm{R}}(x) = 0, \\ \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}}(x) - m\eta_{\mathrm{L}}(x) = 0. \end{cases} \tag{5.114}$$

这是两个相互耦合的方程。如果 $m = 0$，两个方程就各自独立了：

$$\boxed{\mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}}(x) = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}}(x) = 0.} \tag{5.115}$$

这两个独立方程称为 **Weyl 方程** [18]。可见，非零质量 m 的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来。自旋角动量矩阵 $\mathcal{S}^i$ 的直和分解 (5.79) 表明，左手和右手 Weyl 旋量各自对应于一个 SU(2) 群基础表示。当 $m = 0$ 时，量子化之后的 $\eta_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\eta_{\mathrm{R}}(x)$ 各自描述自旋为 1/2 的无质量粒子。

5.4　Dirac 旋量场的平面波展开

5.4.1　平面波解的一般形式

本小节讨论与表象选取无关的平面波解一般形式。

自由 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ 满足 Klein-Gordon 方程 (5.111)，因而在无界空间中具有平面波解。对于确定的动量 $\mathbf{k}$，我们假设 Dirac 方程具有如下形式的平面波解：

$$\varphi_a(x, \mathbf{k}) = w_a(k^0, \mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{5.116}$$

其中四维动量 $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$，系数 $w_a(k^0, \mathbf{k})$ 是 Dirac 旋量，带着一个旋量指标 a。注意，$w_a(k^0, \mathbf{k})$ 并不是算符，而是 c 数。隐去旋量指标，将这个平面波解代入到 Dirac 方程 (5.107) 中，得到

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\varphi(x, \mathbf{k}) = (\gamma^\mu k_\mu - m) w(k^0, \mathbf{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} = (k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) w(k^0, \mathbf{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{5.117}$$

因此

$$(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) w(k^0, \mathbf{k}) = 0. \tag{5.118}$$

对上式左乘 γ^0，得

$$[k^0 - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0] w(k^0, \mathbf{k}) = 0. \tag{5.119}$$

移项，将上式化为

$$[\gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + m\gamma^0] w(k^0, \mathbf{k}) = k^0 w(k^0, \mathbf{k}). \tag{5.120}$$

这实际上是矩阵 $\gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + m\gamma^0$ 的本征方程，它具有非平庸解的条件是特征多项式 $\det[k^0 - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0]$ 为零，即

$$\det[k^0 - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0] = 0. \tag{5.121}$$

这个方程的根给出 k^0 的本征值，相应的非平庸解是本征矢量。

利用 $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$，将方程 (5.121) 化为

$$0 = \det[k^0\mathbf{1} - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0] = \det[\gamma^0(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)] = \det(\gamma^0)\det(k_\mu\gamma^\mu - m). \tag{5.122}$$

因而方程 (5.121) 等价于

$$\det(k_\mu\gamma^\mu - m) = 0. \tag{5.123}$$

利用 $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$，将上式左边化为

$$\begin{aligned}\det(k_\mu\gamma^\mu - m) &= \det[(\gamma^5)^2(k_\mu\gamma^\mu - m)] = \det[\gamma^5(k_\mu\gamma^\mu - m)\gamma^5] \\ &= \det[(\gamma^5)^2(-k_\mu\gamma^\mu - m)] = \det(-k_\mu\gamma^\mu - m).\end{aligned} \tag{5.124}$$

这里第二步用到行列式性质

$$\det(AB) = \det(BA), \tag{5.125}$$

第三步用到 γ^5 与 γ^μ 反对易的性质 (5.40)。由反对易关系 (5.1) 有

$$(k_\mu\gamma^\mu)^2 = k_\mu k_\nu \gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2} k_\mu k_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = k_\mu k_\nu g^{\mu\nu}\,\mathbf{1} = k^2\,\mathbf{1} = [(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2]\,\mathbf{1}. \tag{5.126}$$

从而，

$$\begin{aligned}[\det(k_\mu\gamma^\mu - m)]^2 &= \det(k_\mu\gamma^\mu - m)\det(-k_\nu\gamma^\nu - m) = \det[(k_\mu\gamma^\mu - m)(-k_\nu\gamma^\nu - m)] \\ &= \det[-(k_\mu\gamma^\mu)^2 + m^2] = \det\{[-(k^0)^2 + |\mathbf{k}|^2 + m^2]\,\mathbf{1}\} \\ &= [-(k^0)^2 + |\mathbf{k}|^2 + m^2]^4 = [E_{\mathbf{k}}^2 - (k^0)^2]^4,\end{aligned} \tag{5.127}$$

其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$。于是，方程 (5.123) 化为

$$0 = \det(k_\mu \gamma^\mu - m) = [E_{\mathbf{k}}^2 - (k^0)^2]^2 = (E_{\mathbf{k}} + k^0)^2 (E_{\mathbf{k}} - k^0)^2. \tag{5.128}$$

这个方程有 2 个根 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$；这 2 个根都是 2 重根，各自对应于 2 个线性独立的本征矢量；一共有 4 个线性独立的本征矢量。

(1) $k^0 = E_{\mathbf{k}}$ 对应于 2 个本征矢量

$$w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \tag{5.129}$$

因而平面波解中有 2 个正能解，形式为

$$w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma) \exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad \sigma = 1, 2. \tag{5.130}$$

(2) $k^0 = -E_{\mathbf{k}}$ 对应于 2 个本征矢量

$$w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \tag{5.131}$$

因而平面波解中有 2 个负能解，形式为

$$w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma) \exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad \sigma = 1, 2. \tag{5.132}$$

要求这 4 个本征矢量满足正交归一关系

$$\begin{aligned} w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') &= 2E_{\mathbf{k}} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad w^{(-)\dagger}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') = 2E_{\mathbf{k}} \delta_{\sigma\sigma'}, \\ w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') &= w^{(-)\dagger}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') = 0. \end{aligned} \tag{5.133}$$

引入 Dirac 旋量 $u(\mathbf{k}, \sigma)$ 和 $v(\mathbf{k}, \sigma)$，定义为

$$u(\mathbf{k}, \sigma) \equiv w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma), \quad v(\mathbf{k}, \sigma) \equiv w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \tag{5.134}$$

于是，Dirac 方程的正能解和负能解可以分别写作

$$\varphi^{(+)}(x, \mathbf{k}, \sigma) \equiv w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma) \exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = u(\mathbf{k}, \sigma) \exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \tag{5.135}$$

$$\varphi^{(-)}(x, \mathbf{k}, \sigma) \equiv w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}, \sigma) \exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = v(\mathbf{k}, \sigma) \exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]. \tag{5.136}$$

替换动量记号，得到

$$\varphi^{(+)}(x, \mathbf{p}, \sigma) = u(\mathbf{p}, \sigma) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x}, \quad \varphi^{(-)}(x, \mathbf{p}, \sigma) = v(\mathbf{p}, \sigma) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot x}, \tag{5.137}$$

其中四维动量 p^μ 满足

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0, \quad p^2 = m^2. \tag{5.138}$$

从而，Dirac 旋量场算符 $\psi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式写作

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=1}^{2}\left[\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\sigma)\,c_{\mathbf{p},\sigma}+\varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\sigma)\,d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=1}^{2}\left[u(\mathbf{p},\sigma)c_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\sigma)d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{5.139}$$

其中，$c_{\mathbf{p},\sigma}$ 是湮灭算符，$d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}$ 是产生算符，而且 $c_{\mathbf{p},\sigma}\neq d_{\mathbf{p},\sigma}$。**平面波旋量系数** $u(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v(\mathbf{p},\sigma)$ **的正交归一关系为**

$$u^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)u(\mathbf{p},\sigma') = w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma)\,w^{(+)}(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{5.140}$$

$$v^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v(\mathbf{p},\sigma') = w^{(-)\dagger}(-E_{\mathbf{p}},-\mathbf{p},\sigma)\,w^{(-)}(-E_{\mathbf{p}},-\mathbf{p},\sigma') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{5.141}$$

$$u^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v(-\mathbf{p},\sigma') = w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma)\,w^{(-)}(-E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma') = 0. \tag{5.142}$$

5.4.2 Weyl 表象中的平面波解

本小节在 **Weyl 表象**中讨论 Dirac 方程的平面波解。

Dirac 旋量场描述自旋为 1/2 的有质量粒子，根据 3.3.1 小节讨论，这样的粒子具有 2 种独立的自旋极化态，对应于螺旋度的 2 种本征值 $+1/2$ 和 $-1/2$。为便于表述，这里我们采用归一化的螺旋度本征值 $\lambda=\pm1$。类似于矢量场情况，$\lambda=-$ 是左旋极化，$\lambda=+$ 是右旋极化。因此，无论是平面波正能解还是负能解，都能够以 2 种螺旋度本征态作为 2 个线性独立的本征矢量。

按照这个思路，把 2 个正能解表达为

$$\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\lambda)=u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \lambda=\pm,\quad p^0=E_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}. \tag{5.143}$$

根据 Dirac 方程 (5.107)，有

$$0=(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\lambda)=(p_{\mu}\gamma^{\mu}-m)u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.144}$$

即 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 满足运动方程

$$\boxed{(\not{p}-m)u(\mathbf{p},\lambda)=0,} \tag{5.145}$$

其中 $\not{p}$ 的定义为

$$\boxed{\not{p}\equiv p_{\mu}\gamma^{\mu}.} \tag{5.146}$$

这种斜线记号称为 **Dirac 斜线** (slash)，是 Richard Feynman 引进的。

将 Dirac 旋量 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 分解为两个二分量旋量 $f_{\lambda}(\mathbf{p})$ 和 $g_{\lambda}(\mathbf{p})$，

$$u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}f_{\lambda}(\mathbf{p})\\ g_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{5.147}$$

那么，根据 Weyl 表象中的 Dirac 矩阵表达式 (5.75)，方程 (5.145) 化为

$$0=(\not{p}-m)u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}-m & \sigma^\mu p_\mu\\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_\lambda(\mathbf{p})\\ g_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_\mu\sigma^\mu g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})\\ p_\mu\bar{\sigma}^\mu f_\lambda(\mathbf{p})-mg_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{5.148}$$

即

$$(p\cdot\sigma)g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})\ =\ 0, \tag{5.149}$$

$$(p\cdot\bar{\sigma})f_\lambda(\mathbf{p})-mg_\lambda(\mathbf{p})\ =\ 0. \tag{5.150}$$

由方程 (5.150) 得

$$g_\lambda(\mathbf{p})=\frac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}f_\lambda(\mathbf{p}), \tag{5.151}$$

将上式代入到方程 (5.149) 左边，推出

$$(p\cdot\sigma)g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=\frac{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})}{m}f_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p}). \tag{5.152}$$

为化简 $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})$，将 (5.75) 式代入反对易关系 (5.1)，得

$$2g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix}=\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\begin{pmatrix}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu+\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\end{pmatrix}, \tag{5.153}$$

故

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu=2g^{\mu\nu},\quad \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu+\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu=2g^{\mu\nu}. \tag{5.154}$$

因此，

$$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})=\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)=\frac{1}{2}p_\mu p_\nu 2g^{\mu\nu}=p^2=m^2, \tag{5.155}$$

从而 (5.152) 式变成

$$(p\cdot\sigma)g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=\frac{m^2}{m}f_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=0. \tag{5.156}$$

可见，关系式 (5.151) 也符合方程 (5.149)。于是，任取非零 $f_\lambda(\mathbf{p})$ 都能使

$$u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}f_\lambda(\mathbf{p})\\ \dfrac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}f_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix} \tag{5.157}$$

满足运动方程 (5.145)。

在旋量表示中，螺旋度矩阵是自旋角动量矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 在动量 $\mathbf{p}$ 方向上的投影，即 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}$。对于 Weyl 表象，根据 (5.79) 式，有

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & \hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{5.158}$$

因而**归一化螺旋度矩阵**为

$$2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & \hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.159}$$

上式的两个对角分块相同，因而左手和右手 Weyl 旋量对应的归一化螺旋度矩阵都是 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$，由 Pauli 矩阵的定义 (3.54) 得

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} p^3 & p^1 - \mathrm{i}p^2 \\ p^1 + \mathrm{i}p^2 & -p^3 \end{pmatrix}. \tag{5.160}$$

引入归一化螺旋度矩阵 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 的本征矢量 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，称为**螺旋态**，满足本征方程

$$\boxed{(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda\,\xi_\lambda(\mathbf{p}), \quad \lambda = \pm.} \tag{5.161}$$

求解这个方程，得到归一化本征矢量

$$\xi_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|+p^3 \\ p^1+\mathrm{i}p^2 \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} -p^1+\mathrm{i}p^2 \\ |\mathbf{p}|+p^3 \end{pmatrix}, \tag{5.162}$$

这是螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的具体形式。它们满足**正交归一关系**

$$\boxed{\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) = \delta_{\lambda\lambda'}} \tag{5.163}$$

和**完备性关系**

$$\boxed{\sum_{\lambda=\pm}\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) = \mathbf{1}.} \tag{5.164}$$

此外，由 $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 得

$$(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda|\mathbf{p}|\xi_\lambda(\mathbf{p}). \tag{5.165}$$

根据 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 的定义 (5.74)，有

$$(p\cdot\bar{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = (E_\mathbf{p}\mathbf{1} + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = (E_\mathbf{p} + \lambda|\mathbf{p}|)\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \omega_\lambda^2(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}), \tag{5.166}$$

$$(p\cdot\sigma)\xi_\lambda(\mathbf{p}) = (E_\mathbf{p}\mathbf{1} - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = (E_\mathbf{p} - \lambda|\mathbf{p}|)\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}), \tag{5.167}$$

其中函数 $\omega_\lambda(\mathbf{p})$ 定义为

$$\boxed{\omega_\lambda(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{E_\mathbf{p} + \lambda|\mathbf{p}|}\,.} \tag{5.168}$$

它是关于 $\mathbf{p}$ 的偶函数，$\omega_\lambda(-\mathbf{p}) = \omega_\lambda(\mathbf{p})$，而且满足

$$\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \sqrt{(E_\mathbf{p} + \lambda|\mathbf{p}|)(E_\mathbf{p} - \lambda|\mathbf{p}|)} = \sqrt{E_\mathbf{p}^2 - \lambda^2|\mathbf{p}|^2} = \sqrt{E_\mathbf{p}^2 - |\mathbf{p}|^2} = m. \tag{5.169}$$

容易验证，(5.162) 式表达的螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 确实是 $\lambda=\pm$ 的本征态，

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2 \\ p^1+\mathrm{i}p^2 & -p^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|+p^3 \\ p^1+\mathrm{i}p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} p^3(|\mathbf{p}|+p^3)+(p^1-\mathrm{i}p^2)(p^1+\mathrm{i}p^2) \\ (p^1+\mathrm{i}p^2)(|\mathbf{p}|+p^3)-p^3(p^1+\mathrm{i}p^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} p^3|\mathbf{p}|+|\mathbf{p}|^2 \\ (p^1+\mathrm{i}p^2)|\mathbf{p}| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} p^3+|\mathbf{p}| \\ p^1+\mathrm{i}p^2 \end{pmatrix} \\
&= +\xi_+(\mathbf{p}),
\end{aligned}
\tag{5.170}
$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2 \\ p^1+\mathrm{i}p^2 & -p^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p^1+\mathrm{i}p^2 \\ |\mathbf{p}|+p^3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} -p^3(p^1-\mathrm{i}p^2)+(p^1-\mathrm{i}p^2)(|\mathbf{p}|+p^3) \\ (p^1+\mathrm{i}p^2)(-p^1+\mathrm{i}p^2)-p^3(|\mathbf{p}|+p^3) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} (p^1-\mathrm{i}p^2)|\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}|^2-p^3|\mathbf{p}| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix} p^1-\mathrm{i}p^2 \\ -|\mathbf{p}|-p^3 \end{pmatrix} \\
&= -\xi_-(\mathbf{p}).
\end{aligned}
\tag{5.171}
$$

而且符合正交归一关系 (5.163)，

$$
\begin{aligned}
\xi_+^\dagger(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|+p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|+p^3 \\ p^1+\mathrm{i}p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(|\mathbf{p}|+p^3)^2+|p^1+\mathrm{i}p^2|^2}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = \frac{2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = 1,
\end{aligned}
\tag{5.172}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_-^\dagger(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix} -p^1-\mathrm{i}p^2 & |\mathbf{p}|+p^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p^1+\mathrm{i}p^2 \\ |\mathbf{p}|+p^3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{|-p^1+\mathrm{i}p^2|^2+(|\mathbf{p}|+p^3)^2}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = \frac{2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = 1,
\end{aligned}
\tag{5.173}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_+^\dagger(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|+p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p^1+\mathrm{i}p^2 \\ |\mathbf{p}|+p^3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1-\mathrm{i}p^2)+(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1-\mathrm{i}p^2)}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.174}
$$

也满足完备性关系 (5.164)，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=\pm}\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) = \xi_+(\mathbf{p})\xi_+^\dagger(\mathbf{p})+\xi_-(\mathbf{p})\xi_-^\dagger(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix} (|\mathbf{p}|+p^3)^2+|-p^1+\mathrm{i}p^2|^2 & (|\mathbf{p}|+p^3)(p^1-\mathrm{i}p^2)+(|\mathbf{p}|+p^3)(-p^1+\mathrm{i}p^2) \\ (|\mathbf{p}|+p^3)(p^1+\mathrm{i}p^2)+(|\mathbf{p}|+p^3)(-p^1-\mathrm{i}p^2) & |p^1+\mathrm{i}p^2|^2+(|\mathbf{p}|+p^3)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix} 2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}| & \\ & 2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.
\end{aligned}
\tag{5.175}
$$

为了让 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 成为螺旋度本征态，我们令二分量旋量 $f_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，

$$f_\lambda(\mathbf{p}) = C_{\mathbf{p},\lambda}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}). \tag{5.176}$$

利用 (5.166) 式，将 (5.157) 式化为

$$u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} f_\lambda(\mathbf{p}) \\ \dfrac{p\cdot\bar{\sigma}}{m} f_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = C_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix} \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \dfrac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = C_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix} \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \dfrac{\omega_\lambda^2(\mathbf{p})}{m}\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{5.177}$$

为了使 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 满足归一关系 (5.140)，我们取

$$C_{\mathbf{p},\lambda} = \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}), \tag{5.178}$$

则由 (5.169) 式得

$$C_{\mathbf{p},\lambda}\,\frac{\omega_\lambda^2(\mathbf{p})}{m} = \frac{\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda^2(\mathbf{p})}{m} = \omega_\lambda(\mathbf{p}). \tag{5.179}$$

于是得到 $\boldsymbol{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋态表达式

$$\boxed{u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.} \tag{5.180}$$

这样的话，根据 (5.159) 式，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度本征态，本征值为 λ：

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}})u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\,u(\mathbf{p},\lambda). \tag{5.181}$$

另一方面，将 2 个负能解表达为

$$\varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\lambda) = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \quad \lambda=\pm, \quad p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,. \tag{5.182}$$

根据 Dirac 方程 (5.107)，有

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\lambda) = (-p_\mu\gamma^\mu - m)v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.183}$$

即 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足运动方程

$$\boxed{(\not{p}+m)v(\mathbf{p},\lambda) = 0.} \tag{5.184}$$

同样，将 Dirac 旋量 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 分解为两个二分量旋量 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p})$，

$$v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{5.185}$$

则有

$$0=(\not{p}+m)v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix} m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar\sigma^\mu p_\mu & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde f_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde g_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_\mu\sigma^\mu\tilde g_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde f_\lambda(\mathbf{p}) \\ p_\mu\bar\sigma^\mu\tilde f_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde g_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{5.186}$$

即

$$(p\cdot\sigma)\tilde g_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde f_\lambda(\mathbf{p}) = 0, \tag{5.187}$$

$$(p\cdot\bar\sigma)\tilde f_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde g_\lambda(\mathbf{p}) = 0. \tag{5.188}$$

由方程 (5.188) 得

$$\tilde g_\lambda(\mathbf{p})=-\frac{p\cdot\bar\sigma}{m}\,\tilde f_\lambda(\mathbf{p}), \tag{5.189}$$

将上式代入到方程 (5.187) 左边，由 (5.155) 式推出

$$(p\cdot\sigma)\tilde g_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde f_\lambda(\mathbf{p})=-\frac{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma)}{m}\,\tilde f_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde f_\lambda(\mathbf{p})=-\frac{m^2}{m}\,\tilde f_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde f_\lambda(\mathbf{p})=0. \tag{5.190}$$

可见，关系式 (5.189) 符合方程 (5.187)。于是，任取非零 $\tilde f_\lambda(\mathbf{p})$ 都能使

$$v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix} \tilde f_\lambda(\mathbf{p}) \\ -\dfrac{p\cdot\bar\sigma}{m}\,\tilde f_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \tag{5.191}$$

满足运动方程 (5.184)。

为了让 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 成为螺旋度本征态，我们令二分量旋量 $\tilde f_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于螺旋态 $\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$，

$$\tilde f_\lambda(\mathbf{p})=\tilde C_{\mathbf{p},\lambda}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}). \tag{5.192}$$

在这里我们没有选择让 $\tilde f_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，原因将在 5.5.4 小节中说明，现在姑且接受这种选择。将 (5.166) 式中的 λ 替换成 $-\lambda$，得 $(p\cdot\bar\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})=\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$，从而

$$v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix} \tilde f_\lambda(\mathbf{p}) \\ -\dfrac{p\cdot\bar\sigma}{m}\,\tilde f_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}=\tilde C_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix} \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\dfrac{p\cdot\bar\sigma}{m}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}=\tilde C_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix} \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\dfrac{\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})}{m}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{5.193}$$

为了使 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足归一关系 (5.141)，我们取

$$\tilde C_{\mathbf{p},\lambda}=\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p}), \tag{5.194}$$

由 (5.169) 式推出

$$-\tilde C_{\mathbf{p},\lambda}\,\frac{\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})}{m}=-\lambda\,\frac{\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})}{m}=-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p}), \tag{5.195}$$

于是得到 $\boldsymbol{v}(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋态表达式

$$\boxed{v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.} \tag{5.196}$$

这样一来，$v(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度本征态，本征值为 $-\lambda$：

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}})v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=-\lambda\,v(\mathbf{p},\lambda).\tag{5.197}$$

根据 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的正交归一关系 (5.163)，可以验证，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足 (5.140) 和 (5.141) 形式的正交归一关系：

$$\begin{aligned}
&u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')=\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})\\\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&=[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})+\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})=[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})+\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}\\
&=[\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})+\omega_\lambda^2(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}=(E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|+E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|)\delta_{\lambda\lambda'}=2E_\mathbf{p}\delta_{\lambda\lambda'},
\end{aligned}\tag{5.198}$$

$$\begin{aligned}
&v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda')=\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p})\\-\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&=\lambda\lambda'[\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})+\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p})=\lambda\lambda'[\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})+\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}\\
&=\lambda^2[\omega_\lambda^2(\mathbf{p})+\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}=2E_\mathbf{p}\delta_{\lambda\lambda'}.
\end{aligned}\tag{5.199}$$

将本征方程 (5.161) 中的 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$、λ 替换成 $-\lambda$，得

$$(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})=-\lambda\,\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}),\tag{5.200}$$

从而

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})=\lambda\,\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}).\tag{5.201}$$

可见，$\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ 与 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 是本征值相同的螺旋度本征态，这意味着 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})\propto\xi_\lambda(\mathbf{p})$，故

$$\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p})\propto\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})=\delta_{\lambda\lambda'}.\tag{5.202}$$

于是，(5.142) 形式的正交关系也成立：

$$\begin{aligned}
u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')&=\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'\,\omega_{\lambda'}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p})\\-\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&=\lambda'[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(-\mathbf{p})-\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(-\mathbf{p})]\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p})\\
&\propto\lambda'[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})-\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}\\
&=\lambda[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda(\mathbf{p})-\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}=0,
\end{aligned}\tag{5.203}$$

其中第三步用到 $\omega_\lambda(-\mathbf{p})=\omega_\lambda(\mathbf{p})$。整理一下，平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足正交归一关系

$$\boxed{u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')=v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda')=2E_\mathbf{p}\delta_{\lambda\lambda'},\quad u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')=v^\dagger(-\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')=0.}\tag{5.204}$$

利用

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p},\lambda) &= u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\gamma^0 = \begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \qquad (5.205)\\
\bar{v}(\mathbf{p},\lambda) &= v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\gamma^0 = \begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \qquad (5.206)
\end{aligned}
$$

以及 (5.169) 式，推出

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix} \\
&= [\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = 2\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\delta_{\lambda\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (5.207)\\
\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix}-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\ -\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix} \\
&= -\lambda\lambda'[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = -2\lambda^2\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\delta_{\lambda\lambda'} \\
&= -2m\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (5.208)\\
\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\ -\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix} \\
&= \lambda'[\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) - \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\
&= \lambda'[\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) - \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda,-\lambda'} \\
&= -\lambda[\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) - \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda(\mathbf{p})]\delta_{\lambda,-\lambda'} = 0, \qquad (5.209)\\
\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix}-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix} \\
&= \lambda[-\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \\
&= \lambda[-\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{-\lambda,\lambda'} \\
&= \lambda[-\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda(\mathbf{p}) + \omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{-\lambda,\lambda'} = 0. \qquad (5.210)
\end{aligned}
$$

整理一下，有

$$
\boxed{\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') = 2m\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') = -2m\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') = 0.} \qquad (5.211)
$$

这些等式是 Lorentz 不变的。

另一方面，利用 (5.166)、(5.167)、(5.169) 式和 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的完备性关系 (5.164)，有

$$
\sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda) = \sum_{\lambda=\pm}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda=\pm}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\\ \omega_\lambda^2(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&= \sum_{\lambda=\pm}\begin{pmatrix}m\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & (p\cdot\sigma)\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\\ (p\cdot\bar\sigma)\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & m\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}m & p\cdot\sigma\\ p\cdot\bar\sigma & m\end{pmatrix} = p_\mu\gamma^\mu + m.
\end{aligned}
\tag{5.212}
$$

由 (5.166) 和 (5.167) 式得 $(p\cdot\bar\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$ 和 $(p\cdot\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \omega_\lambda^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$，故

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{p},\lambda)\bar v(\mathbf{p},\lambda) &= \sum_{\lambda=\pm}\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&= \sum_{\lambda=\pm}\begin{pmatrix}-\lambda^2\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda^2\omega_\lambda^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\\ \lambda^2\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & -\lambda^2\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&= \sum_{\lambda=\pm}\begin{pmatrix}-m\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & (p\cdot\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\\ (p\cdot\bar\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & -m\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-m & p\cdot\sigma\\ p\cdot\bar\sigma & -m\end{pmatrix} = p_\mu\gamma^\mu - m.
\end{aligned}
\tag{5.213}
$$

整理一下，有如下螺旋度求和关系，或者说，**自旋求和关系**：

$$
\boxed{\sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{p},\lambda)\bar u(\mathbf{p},\lambda) = \not p + m, \qquad \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{p},\lambda)\bar v(\mathbf{p},\lambda) = \not p - m.}
\tag{5.214}
$$

用 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 把 Dirac 旋量场算符 $\psi(\mathbf{x},t)$ 的**平面波展开式**

$$
\psi(\mathbf{x},t) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda} + \varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\right]
\tag{5.215}
$$

写作

$$
\boxed{\psi(\mathbf{x},t) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],}
\tag{5.216}
$$

其中 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 是湮灭算符，$b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 是产生算符，而且 $a_{\mathbf{p},\lambda}\neq b_{\mathbf{p},\lambda}$。于是

$$
\psi^\dagger(\mathbf{x},t) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right],
\tag{5.217}
$$

$$
\bar\psi(\mathbf{x},t) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\bar u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar v(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right].
\tag{5.218}
$$

5.4.3　哈密顿量和产生湮灭算符

根据 (1.168) 和 (5.104) 式，$\psi(x)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 = \mathrm{i}\psi^\dagger, \tag{5.219}$$

它的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \right]. \tag{5.220}$$

自由运动的旋量场 $\psi(x)$ 满足 Dirac 方程 (5.107)，将它代入拉氏量 (5.103)，得

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{5.221}$$

这表明相应的作用量为零时正好对应于作用量的变分为零。根据 (1.170) 式，自由 Dirac 旋量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L} = \pi \partial_0 \psi = \mathrm{i}\psi^\dagger \partial_0 \psi. \tag{5.222}$$

从而，哈密顿量算符为

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3 x\, \psi^\dagger \mathrm{i}\partial_0 \psi \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} \left[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \right] \\
&\qquad\qquad \times q_0 \left[u(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - v(\mathbf{q}, \lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \right] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, E_\mathbf{q}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} \Big[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad - v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\qquad + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \Big] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, E_\mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} \Big\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Big[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p} - E_\mathbf{q})t} \\
&\qquad\qquad - v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p} - E_\mathbf{q})t} \Big] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \Big[- u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p} + E_\mathbf{q})t} \\
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p} + E_\mathbf{q})t} \Big] \Big\} \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \Big[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{p}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'} - v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{p}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \\
&\qquad - u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(-\mathbf{p}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p} t} + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(-\mathbf{p}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p} t} \Big] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (2E_\mathbf{p} \delta_{\lambda\lambda'} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'} - 2E_\mathbf{p} \delta_{\lambda\lambda'} b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}). \tag{5.223}$$

倒数第二步用到正交归一关系 (5.204)。

另一方面，利用正交归一关系 (5.204)，得到

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&\qquad\qquad + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{p},\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda'} + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(-\mathbf{p},\lambda') b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} (2E_{\mathbf{p}} \delta_{\lambda\lambda'} a_{\mathbf{p},\lambda'}) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}.
\end{aligned} \tag{5.224}$$

从而将湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 表达为

$$a_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t), \quad a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \psi^\dagger(\mathbf{x},t) u(\mathbf{p},\lambda). \tag{5.225}$$

同理推出

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \left[v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \\
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \left[v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(-\mathbf{p},\lambda') a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{p},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} (2E_{\mathbf{p}} \delta_{\lambda\lambda'} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.
\end{aligned} \tag{5.226}$$

于是将产生算符 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和湮灭算符 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 表示成

$$b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t), \quad b_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \psi^\dagger(\mathbf{x},t) v(\mathbf{p},\lambda). \tag{5.227}$$

5.5　Dirac 旋量场的正则量子化

5.5.1　用等时对易关系量子化 Dirac 旋量场的困难

在标量场和矢量场的正则量子化程序中，我们先假设场算符与其共轭动量密度算符满足等时对易关系 (2.76)，然后推导出产生湮灭算符的对易关系，再通过计算给出正定的哈密顿量算符（对于无质量矢量场，需要用 Gupta-Bleuler 条件来得到正的哈密顿量期待值），从而说明在量子场论中使用正则量子化方法是合理的。在本小节中，我们将尝试用类似的等时对易关系对 Dirac 旋量场进行量子化，不过，我们会发现这种方法并不能给出正定的哈密顿量算符，因而是不可行的。

假设 Dirac 旋量场算符 $\psi(x)$ 与其共轭动量密度算符 $\pi(x)$ 满足等时对易关系

$$[\psi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]=[\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=0. \tag{5.228}$$

这里将旋量指标明显地写出来。根据 (5.219) 式，这些关系等价于 $\psi(x)$ 与 $\psi^\dagger(x)$ 的等时对易关系

$$[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]=\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]=[\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]=0. \tag{5.229}$$

下面计算产生湮灭算符的对易关系。令 $x^0=y^0=t$，由 (5.225) 式和正交归一关系 (5.204)，推出

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]u_b(\mathbf{q},\lambda')\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')\\
&= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{5.230}$$

另外，有

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]=0. \tag{5.231}$$

由 (5.227) 式和正交归一关系 (5.204)，得到

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')[\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]v_a(\mathbf{p},\lambda)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v_a(\mathbf{p},\lambda)(-\delta_{ba})\delta^{(3)}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\\
&= -\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,v^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} v^\dagger(\mathbf{p},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = -(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{5.232}$$

这个结果非同寻常地多了一个负号。此外，还有

$$[b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}[\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]v_a(\mathbf{p},\lambda)v_b(\mathbf{q},\lambda') = 0, \tag{5.233}$$

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)] = 0, \tag{5.234}$$

以及

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]v_b(\mathbf{q},\lambda') \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda') \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}}{2E_{\mathbf{p}}}\,u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.235}$$

上式最后一步用到正交归一关系 (5.204)。

整理起来，通过等时对易关系 (5.228) 得到的产生湮灭算符对易关系为

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0, \\
[b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= -(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = [b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0, \\
[a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= [b_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = [a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0.
\end{aligned} \tag{5.236}$$

利用这样的对易关系，把哈密顿量算符 (5.223) 化为

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger) \\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda}) + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,2E_{\mathbf{p}}.
\end{aligned} \tag{5.237}$$

在上式第二步中，第二项是零点能；第一项中由 $(a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 描述的粒子对总能量的贡献为正，但由 $(b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 描述的粒子对总能量的贡献为负。从而，由 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda}$ 描述的粒子数密度越大，场的总能量越少，这显然是非物理的，会引起负能量困难。讨论单粒子态时也会出现非物理的结果，参见习题 5.10。因此，用等时对易关系 (5.228) 对 Dirac 旋量场进行量子化是行不通的。

5.5.2 用等时反对易关系量子化 Dirac 旋量场

从 (5.237) 式的计算过程看出，如果在交换 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 位置的同时能够改变圆括号中第二项的符号，就可以得到正定的哈密顿量算符。这意味着我们需要的不是 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 与 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 的对易关系，

而是反对易关系。为了得到合适的 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 与 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的反对易关系，则需要舍弃等时对易关系 (5.228)，代之以**等时反对易关系**

$$\boxed{\{\psi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)\}=\mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=\{\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)\}=0.} \tag{5.238}$$

采用反对易关系进行正则量子化的方法称为 **Jordan-Wigner 量子化**。根据 (5.219) 式，这些关系等价于 $\psi(x)$ 与 $\psi^\dagger(x)$ 的等时反对易关系

$$\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_b(\mathbf{y},t)\}=\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=\{\psi^\dagger_a(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_b(\mathbf{y},t)\}=0. \tag{5.239}$$

接下来，我们计算产生湮灭算符的反对易关系。计算过程与上一小节类似，只是我们要将 (5.230) 至 (5.235) 式中表示对易的方括号改成表示反对易的花括号。由此得到

$$\begin{aligned}\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\} &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u^\dagger_a(\mathbf{p},\lambda)\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_b(\mathbf{y},t)\}u_b(\mathbf{q},\lambda')\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u^\dagger_a(\mathbf{p},\lambda)u_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\ &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\end{aligned} \tag{5.240}$$

以及

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u^\dagger_a(\mathbf{p},\lambda)u^\dagger_b(\mathbf{q},\lambda')\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=0. \tag{5.241}$$

另外，有

$$\begin{aligned}\{b_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\} &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v^\dagger_b(\mathbf{q},\lambda')\{\psi^\dagger_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}v_a(\mathbf{p},\lambda)\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v^\dagger_b(\mathbf{q},\lambda')v_a(\mathbf{p},\lambda)\delta_{ba}\delta^{(3)}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,v^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)\\ &= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,v^\dagger(\mathbf{p},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{5.242}$$

与 (5.232) 式不同，上式结果具有正常的符号。此外，还有

$$\{b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\{\psi^\dagger_a(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_b(\mathbf{y},t)\}v_a(\mathbf{p},\lambda)v_b(\mathbf{q},\lambda')=0, \tag{5.243}$$

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u^\dagger_a(\mathbf{p},\lambda)v^\dagger_b(\mathbf{q},\lambda')\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=0, \tag{5.244}$$

以及

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u^\dagger_a(\mathbf{p},\lambda)\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_b(\mathbf{y},t)\}v_b(\mathbf{q},\lambda')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v_b(\mathbf{q},\lambda') \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0. \tag{5.245}$$

整理起来，通过等时反对易关系 (5.238) 得到的**产生湮灭算符反对易关系**为

$$\boxed{\begin{aligned} &\{a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = 0, \\ &\{b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}\} = \{b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = 0, \\ &\{a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = \{a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = 0. \end{aligned}} \tag{5.246}$$

可见，$(a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 和 $(b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 互不干扰，各自描述一种粒子。利用这样的反对易关系，把**哈密顿量算符** (5.223) 化为

$$\boxed{H = \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} + b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda}) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} 2E_{\mathbf{p}}.} \tag{5.247}$$

上式第二项是零点能；第一项是所有动量模式所有螺旋度所有粒子贡献的能量之和，它是**正定**的。可见，用等时反对易关系对 Dirac 旋量场进行正则量子化是合适的。

利用 (5.10) 式和反对易关系 (5.246)，计算哈密顿量 H 与产生湮灭算符的对易子，得

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger] &= \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left[a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'} + b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger b_{\mathbf{q},\lambda'},\, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\right] \\ &= \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \Big(a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \{a_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\} - \{a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\} a_{\mathbf{q},\lambda'} \\ &\qquad + b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \{b_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\} - \{b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\} b_{\mathbf{q},\lambda'}\Big) \\ &= \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \{a_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\} = \sum_{\lambda'} \int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \end{aligned} \tag{5.248}$$

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{p},\lambda}] &= \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left[a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'} + b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger b_{\mathbf{q},\lambda'},\, a_{\mathbf{p},\lambda}\right] = \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left(-\{a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger, a_{\mathbf{p},\lambda}\} a_{\mathbf{q},\lambda'}\right) \\ &= -\sum_{\lambda'} \int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q},\lambda'} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\lambda}, \end{aligned} \tag{5.249}$$

$$\begin{aligned} [H, b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger] &= \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left[a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'} + b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger b_{\mathbf{q},\lambda'},\, b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\right] = \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \{b_{\mathbf{q},\lambda'}, b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\} \\ &= \sum_{\lambda'} \int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \end{aligned} \tag{5.250}$$

$$\begin{aligned} [H, b_{\mathbf{p},\lambda}] &= \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left[a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'} + b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger b_{\mathbf{q},\lambda'},\, b_{\mathbf{p},\lambda}\right] = \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left(-\{b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger, b_{\mathbf{p},\lambda}\} b_{\mathbf{q},\lambda'}\right) \\ &= -\sum_{\lambda'} \int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q},\lambda'} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p},\lambda}. \end{aligned} \tag{5.251}$$

设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E，则

$$H|E\rangle = E|E\rangle\,. \tag{5.252}$$

从而推出

$$\begin{aligned}
Ha^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle &= (a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}H + E_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle\,, && (5.253)\\
Ha_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle &= (a_{\mathbf{p},\lambda}H - E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p},\lambda})|E\rangle = (E-E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle\,, && (5.254)\\
Hb^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle &= (b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}H + E_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle\,, && (5.255)\\
Hb_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle &= (b_{\mathbf{p},\lambda}H - E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p},\lambda})|E\rangle = (E-E_{\mathbf{p}})b_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle\,. && (5.256)
\end{aligned}$$

可见，当 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle$ 不为零时，产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用都是使能量本征值增加 $E_{\mathbf{p}}$；当 $a_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}|E\rangle$ 不为零时，湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用都是使能量本征值减少 $E_{\mathbf{p}}$。

根据 (1.218) 式，自由 Dirac 旋量场的总动量算符为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\,\pi\nabla\psi = \int \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger(-\mathrm{i}\nabla)\psi\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\
&\qquad\qquad\times\left[\mathbf{q}\,u(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-\mathbf{q}\,v(\mathbf{q},\lambda')b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right]\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\
&\qquad -v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\\
&\qquad +v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big]\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\\
&\qquad\qquad -v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\Big]\\
&\qquad +\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[-u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\\
&\qquad\qquad +v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\Big]\Big\}\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\;\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}-v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}\\
&\qquad +u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}-v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(-\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big]\\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\;\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}(2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}-2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'})\\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}-b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})\\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}+b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda})-2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{5.257}$$

倒数第三步用到正交归一关系 (5.204)，最后一步用到反对易关系 (5.246)。于是，总动量是所有动量模式所有螺旋度所有粒子贡献的动量之和：

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, (a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda} + b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b_{\mathbf{p},\lambda}).} \tag{5.258}$$

5.5.3 U(1) 整体对称性

类似于复标量场，自由的 Dirac 旋量场也具有 U(1) 整体对称性。对 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x), \tag{5.259}$$

其中实常数 q 是 $\psi(x)$ 的 U(1) 荷，则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的相应变换为

$$[\psi^\dagger(x)]' = [\psi'(x)]^\dagger = \psi^\dagger(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}, \quad [\bar{\psi}(x)]' = [\psi'(x)]^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}. \tag{5.260}$$

在此变换下，拉氏量 (5.103) 保持不变：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x) &= \bar{\psi}'(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}(x).\end{aligned} \tag{5.261}$$

容易验证，5.3 节中列举的旋量双线性型都在这种 U(1) 整体变换下不变。因此，利用这些旋量双线性型很容易构造具有 U(1) 整体对称性的拉氏量。

U(1) 整体变换的无穷小形式为

$$\psi'(x) = \psi(x) + \mathrm{i}q\theta\psi(x). \tag{5.262}$$

由于 $\delta x^\mu = 0$，根据 (1.192) 式得

$$\bar{\delta}\psi = \delta\psi = \mathrm{i}q\theta\psi. \tag{5.263}$$

按照 (1.197) 式，相应的 Noether 守恒流为

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\bar{\delta}\psi = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu(\mathrm{i}q\theta\psi) = -q\theta\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{5.264}$$

扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 **U(1) 守恒流算符**

$$\boxed{J^\mu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,} \tag{5.265}$$

则 Noether 定理给出守恒流方程

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{5.266}$$

相应的 **U(1) 守恒荷算符**为

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = q\int \mathrm{d}^3x\, \bar{\psi}\gamma^0\psi = q\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger\psi$$

$$
\begin{aligned}
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\
&\qquad\times\left[u(\mathbf{k},\lambda')a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+v(\mathbf{k},\lambda')b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right]\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\right.\\
&\qquad+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x}+u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\\
&\qquad\left.+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\right]\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\left\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t}\right.\right.\\
&\qquad\left.+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t}\right]\\
&\qquad+\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t}\right.\\
&\qquad\left.\left.+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t}\right]\right\}\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}\right.\\
&\qquad\left.+u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(-\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right]\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}(2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}+2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'})=q\sum_{\lambda=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}+b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})\\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(q\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}-q\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda})+2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\;q.
\end{aligned}
\tag{5.267}
$$

上式最后一步中第二项是零点荷。从第一项的形式可以看出，由 $(a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 描述的粒子是**正粒子**，携带的 U(1) 荷为 q；由 $(b_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 描述的粒子是**反粒子**，携带的 U(1) 荷为 $-q$。除去零点荷，总荷是所有动量模式所有螺旋度所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和。

5.5.4　粒子态

对于自由的 Dirac 旋量场，真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和任意 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 湮灭的态，即

$$
a_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle=b_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle=0,
\tag{5.268}
$$

且满足

$$
\langle 0|0\rangle=1,\quad H|0\rangle=E_{\mathrm{vac}}|0\rangle,\quad E_{\mathrm{vac}}=-2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,E_{\mathbf{p}}.
\tag{5.269}
$$

动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的**单个正粒子态**和**单个反粒子态**分别定义为

$$
\boxed{\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle\equiv\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle,\quad\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle\equiv\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle.}
\tag{5.270}
$$

这里分别用动量右上角的正号和负号来代表正粒子和反粒子。根据产生湮灭算符的反对易关系 (5.246)，单粒子态的内积是

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}^+, \lambda' \,|\, \mathbf{p}^+, \lambda\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\, a_{\mathbf{q},\lambda'} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,[(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}]\,|0\rangle \\ &= 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \qquad (5.271)\\ \langle \mathbf{q}^-, \lambda' \,|\, \mathbf{p}^-, \lambda\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\, b_{\mathbf{q},\lambda'} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \qquad (5.272)\\ \langle \mathbf{q}^-, \lambda' \,|\, \mathbf{p}^+, \lambda\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\, b_{\mathbf{q},\lambda'} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = -\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b_{\mathbf{q},\lambda'}\,|0\rangle = 0. \qquad (5.273)\end{aligned}$$

根据 (5.253) 和 (5.255) 式，有

$$H\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle = (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle\,, \quad H\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\,. \qquad (5.274)$$

可见，$|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 都比真空态多了一份能量 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$。类似地，利用 (5.258) 式可以论证

$$\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle\,, \quad \mathbf{P}\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle\,, \quad \mathbf{P}\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\,, \qquad (5.275)$$

即 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 都比真空态多了一份动量 $\mathbf{p}$。

将 $\psi(x)$ 的平面波解 (5.216) 代入 (5.67) 式左边，得

$$[\psi(x), \mathbf{J}] = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left\{u(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\}, \qquad (5.276)$$

代入右边，得

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\mathcal{S}})\psi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}(-\mathrm{i}\,\mathbf{x}\times\nabla + \boldsymbol{\mathcal{S}})\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[(\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{S}})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + (-\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{S}})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \qquad (5.277)\end{aligned}$$

两相比较，对于动量 $\mathbf{p}$ 和螺旋度 λ，有

$$u(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}] = (\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{S}})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}, \quad v(\mathbf{p},\lambda)[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}] = (-\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{S}})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \qquad (5.278)$$

根据 (5.181) 和 (5.197) 式，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 分别是本征值为 λ 和 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，因而

$$u(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = 2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{S}})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda} = (2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda} = \lambda\,u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}, \qquad (5.279)$$

$$v(\mathbf{p},\lambda)[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = 2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot(-\mathbf{x}\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\mathcal{S}})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = (2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = -\lambda\,v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \qquad (5.280)$$

故

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = \lambda\,a_{\mathbf{p},\lambda}, \quad [b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = -\lambda\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \qquad (5.281)$$

由于 $\mathbf{J}$ 是厄米算符，对第一式取厄米共轭得

$$\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = [a_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]^\dagger = (2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} - a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}) = [2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]. \qquad (5.282)$$

于是

$$[2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \quad [2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = \lambda\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{5.283}$$

$\mathbf{J}$ 是总角动量算符，真空态 $|0\rangle$ 满足 $\mathbf{J}\,|0\rangle = \mathbf{0}$，由此得到

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}) + \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle = \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{5.284}$$

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = [b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}) + \lambda\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle = \lambda\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,. \tag{5.285}$$

自由的单粒子态没有轨道角动量，而 $2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}$ 相当于归一化的螺旋度算符。因此，上面两式说明 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 都是**螺旋度本征态**，本征值为 λ：

$$\boxed{(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,\big|\mathbf{p}^\pm,\lambda\big\rangle = \lambda\,\big|\mathbf{p}^\pm,\lambda\big\rangle\,.} \tag{5.286}$$

这正是我们所期望的。

以上讨论表明，产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的正粒子，另一种产生算符 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的反粒子。正粒子和反粒子具有相同的质量 m，能量都表达为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$。

在 (5.192) 式中，我们选择让 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$，使得 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋度本征值为 $-\lambda$，从而得到 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle$ 的螺旋度本征值为 λ 的结果。如果我们选择让 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，依照上述推导，$b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle$ 的螺旋度本征值就会变成 $-\lambda$；也就是说，$(b_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 将描述螺旋度为 $-\lambda$ 的反粒子。这不符合我们的记号，因此，我们将 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 取为 (5.192) 式的形式。

由反对易关系 (5.246)，有

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p},\lambda}\,\big|\mathbf{q}^+,\lambda'\big\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.287}$$

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{p},\lambda}\,\big|\mathbf{q}^-,\lambda'\big\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}b_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.288}$$

可以看出，湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的正粒子，湮灭算符 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的反粒子。

将包含 2 个正粒子和 2 个反粒子的态记为

$$\big|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2;\,\mathbf{p}_3^-,\lambda_3;\,\mathbf{p}_4^-,\lambda_4\big\rangle \equiv \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{p}_3}E_{\mathbf{p}_4}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}b^\dagger_{\mathbf{p}_3,\lambda_3}b^\dagger_{\mathbf{p}_4,\lambda_4}\,|0\rangle\,. \tag{5.289}$$

多次利用反对易关系 (5.246)，调换产生算符的位置，可得

$$a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}b^\dagger_{\mathbf{p}_3,\lambda_3}b^\dagger_{\mathbf{p}_4,\lambda_4}\,|0\rangle = -b^\dagger_{\mathbf{p}_4,\lambda_4}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}b^\dagger_{\mathbf{p}_3,\lambda_3}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}\,|0\rangle\,, \tag{5.290}$$

负号源自奇数次反对易。从而

$$\big|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2;\,\mathbf{p}_3^-,\lambda_3;\,\mathbf{p}_4^-,\lambda_4\big\rangle = -\,\big|\mathbf{p}_4^-,\lambda_4;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2;\,\mathbf{p}_3^-,\lambda_3;\,\mathbf{p}_1^+,\lambda_1\big\rangle\,, \tag{5.291}$$

即交换第 1 和第 4 个粒子得到的态与原来的态相差一个负号。同理，交换其中任意两个粒子，也会出现一个负号。

一般地，对于包含多个全同粒子的态，交换任意两个全同粒子，需要对产生算符进行奇数次反对易，得到的态与原来的态相差一个负号，也就是说，态对全同粒子交换是反对称的。这说明 Dirac 旋量场描述的粒子是一种费米子，称为 **Dirac 费米子**，服从 **Fermi-Dirac 统计** [19, 20]。得到这个结论的关键在于两个产生算符反对易。对于两个相同的产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 或 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$，反对易关系导致

$$a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle = -a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle, \quad b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle = -b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle, \tag{5.292}$$

故

$$a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle = 0, \quad b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle = 0. \tag{5.293}$$

这说明在没有其它自由度的情况下，不存在动量和螺旋度都相同的两个正费米子或两个反费米子所组成的态，这符合 **Pauli 不相容原理** [21]。

在第 2 章和第 4 章中，我们分别讨论了自旋为 0 的标量场和自旋为 1 的矢量场，合适的处理方式是通过对易关系对它们进行正则量子化，因而它们都描述玻色子。另一方面，在本章中，我们需要采用反对易关系才能对自旋为 1/2 的旋量场进行合适的正则量子化，因而旋量场描述的粒子是费米子。实际上，这样的状况是普遍的，存在**自旋－统计定理** [22, 23]：

> **整数自旋**的物理场必须用**对易**关系进行量子化，对应的粒子是**玻色子**；**半奇数自旋**的物理场必须用**反对易**关系进行量子化，对应的粒子是**费米子**。

可以从多个角度证明这个定理必须成立。5.5.1 和 5.5.2 小节的讨论说明哈密顿量算符的正定性要求它成立。此外，也可以从交换全同粒子的路径依赖性、散射矩阵的 Lorentz 不变性、因果性 (causality) 的角度加以证明[2]。

将两个正费米子组成的双粒子态记为

$$\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \equiv \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle, \tag{5.294}$$

则双粒子态的内积关系是

$$\begin{aligned}
&\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\,\middle|\,\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
=\;& \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\,\left\langle 0\right|a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle \\
=\;& \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\,\Big[(2\pi)^3\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\left\langle 0\right|a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle \\
&\qquad -\left\langle 0\right|a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle\Big] \\
=\;& \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\,\Big[(2\pi)^3\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\left\langle 0\right|a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle \\
&\qquad -(2\pi)^3\delta_{\lambda_2\lambda_1'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_1)\left\langle 0\right|a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}\left|0\right\rangle\Big]
\end{aligned}$$

[2]详细讨论见参考书【3】第 12 章。

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\left[(2\pi)^6\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2)\right.\\
&\qquad\left.-(2\pi)^6\delta_{\lambda_2\lambda_1'}\delta_{\lambda_1\lambda_2'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\right]\\
&= 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6\left[\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2)\right.\\
&\qquad\left.-\delta_{\lambda_1\lambda_2'}\delta_{\lambda_2\lambda_1'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_1)\right].
\end{aligned}
\tag{5.295}
$$

上式最后一步方括号中第二项前面有一个负号，由产生湮灭算符的反对易关系引起。这是双费米子态内积关系与双玻色子态内积关系 (2.171) 在形式上的不同之处。

习　题

5.1 证明下列等式。

(a) $\gamma^\mu \not{p} = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu$.

(b) $\not{p}\not{p} = p^2$.

(c) $\{\not{p}\not{k}\not{q}, \gamma^\mu\} = 2p^\mu \not{k}\not{q} - 2k^\mu \not{p}\not{q} + 2q^\mu \not{p}\not{k}$.

(d) $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$.

(e) $\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12$.

(f) $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma} = -24\mathrm{i}\gamma^5$.

(g) $\gamma_\mu\gamma^5 = -\dfrac{\mathrm{i}}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$.

(h) $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma^5 = \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\rho\gamma^\sigma$.

(i) $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} = -2\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}\gamma^5$.

5.2 设自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的拉氏量为

$$
\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{5.296}
$$

证明由 Euler-Lagrange 方程 (1.167) 推出的经典运动方程也是 Dirac 方程 (5.107)。

5.3 对于平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{k},\lambda')$，证明下列等式。

(a) $(\bar{u}\gamma^\mu v)^* = \bar{v}\gamma^\mu u$.

(b) $(\bar{u}\gamma^5 v)^* = -\bar{v}\gamma^5 u$.

(c) $(\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 v)^* = \bar{v}\gamma^\mu\gamma^5 u$.

(d) $(\bar{u}\sigma^{\mu\nu} v)^* = \bar{v}\sigma^{\mu\nu} u$.

(e) $(\bar{u}\gamma^5\sigma^{\mu\nu} v)^* = -\bar{v}\gamma^5\sigma^{\mu\nu} u$.

5.4 证明 **Gordon 恒等式**

$$\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{k},\lambda') = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\left(\frac{p^\mu + k^\mu}{2m} + \frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u(\mathbf{k},\lambda'), \tag{5.297}$$

其中 $q_\nu \equiv p_\nu - k_\nu$。

5.5 在球坐标系中，动量表达为 $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\,\hat{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|(s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta)$，其中 $s_\theta \equiv \sin\theta$，$c_\theta \equiv \cos\theta$。

(a) 推出

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} c_\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}s_\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}s_\theta & -c_\theta \end{pmatrix}. \tag{5.298}$$

(b) 推出螺旋态表达式

$$\xi_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \end{pmatrix}. \tag{5.299}$$

(c) 根据以上两步结果验证 $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_+(\mathbf{p}) = +\xi_+(\mathbf{p})$ 和 $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_-(\mathbf{p}) = -\xi_-(\mathbf{p})$。

(d) 对于实数 α，证明

$$\exp(\mathrm{i}\alpha\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos\alpha + \mathrm{i}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\alpha. \tag{5.300}$$

5.6 在 **Dirac 表象**（也称为**标准表象**）中，γ 矩阵表达为

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}. \tag{5.301}$$

将平面波旋量系数表达为

$$u(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{E_\mathbf{p}+m}\begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_\mathbf{p}+m}\zeta_\sigma \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{E_\mathbf{p}+m}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_\mathbf{p}+m}\eta_{-\sigma} \\ \eta_{-\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.302}$$

其中 ζ_σ 是某个固定方向上的二分量自旋本征态，不依赖于动量 $\mathbf{p}$，$\sigma = \pm 1/2$ 是磁量子数。记这个固定方向的单位矢量为 $\mathbf{n}$，则 ζ_σ 满足的本征方程、正交归一关系和完备性关系为

$$\frac{1}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\zeta_\sigma = \sigma\zeta_\sigma, \quad \zeta_\sigma^\dagger\zeta_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sum_{\sigma=\pm 1/2}\zeta_\sigma\zeta_\sigma^\dagger = \mathbf{1}. \tag{5.303}$$

另一方面，η_σ 定义为

$$\eta_\sigma \equiv \mathrm{i}\sigma^2\zeta_{-\sigma}^*. \tag{5.304}$$

(a) 验证 (5.301) 式表达的 γ^μ 满足反对易关系 (5.1)，并推出

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \tag{5.305}$$

和

$$\mathcal{S}^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} & \sigma^i \\ \sigma^i & \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}. \tag{5.306}$$

(b) 证明 Pauli 矩阵 (3.54) 满足

$$\sigma^i\sigma^2 = -\sigma^2(\sigma^i)^{\mathrm{T}}, \tag{5.307}$$

进而证明

$$\frac{1}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\eta_\sigma = \sigma\eta_\sigma, \quad \eta_\sigma^\dagger\eta_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sum_{\sigma=\pm1/2}\eta_\sigma\eta_\sigma^\dagger = \mathbf{1}. \tag{5.308}$$

这说明 η_σ 也是本征值为 σ 的自旋本征态，跟 ζ_σ 至多相差一个相位因子 τ_σ，即

$$\eta_\sigma = \tau_\sigma\zeta_\sigma. \tag{5.309}$$

(c) 设 $\mathbf{n} = (s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta)$，其中 $s_\theta \equiv \sin\theta$，$c_\theta \equiv \cos\theta$。类似于 (5.299) 式，可将 ξ_σ 取为

$$\zeta_{+1/2} = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \zeta_{-1/2} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \end{pmatrix}. \tag{5.310}$$

由此推出 η_σ 的具体形式，并证明

$$\tau_\sigma = 2\sigma. \tag{5.311}$$

(d) 证明 $u(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 满足运动方程

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p},\sigma) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\mathbf{p},\sigma) = 0, \tag{5.312}$$

正交归一关系

$$u^\dagger(\mathbf{p},\sigma)u(\mathbf{p},\sigma') = 2E_\mathbf{p}\delta_{\sigma\sigma'}, \quad v^\dagger(\mathbf{p},\sigma)v(\mathbf{p},\sigma') = 2E_\mathbf{p}\delta_{\sigma\sigma'}, \quad u^\dagger(\mathbf{p},\sigma)v(-\mathbf{p},\sigma') = 0, \tag{5.313}$$

和自旋求和关系

$$\sum_{\sigma=\pm1/2} u(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}(\mathbf{p},\sigma) = \not{p} + m, \quad \sum_{\sigma=\pm1/2} v(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}(\mathbf{p},\sigma) = \not{p} - m. \tag{5.314}$$

于是，将 Dirac 旋量场的平面波展开式写成

$$\psi(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\sigma=\pm1/2}[u(\mathbf{p},\sigma)c_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\sigma)d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}], \tag{5.315}$$

就可以从等时反对易关系 (5.239) 推出产生湮灭算符的反对易关系

$$\begin{aligned}
&\{c_{\mathbf{p},\sigma}, c_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{c_{\mathbf{p},\sigma}, c_{\mathbf{q},\sigma'}\} = \{c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger, c_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = 0, \\
&\{d_{\mathbf{p},\sigma}, d_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{d_{\mathbf{p},\sigma}, d_{\mathbf{q},\sigma'}\} = \{d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger, d_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = 0, \\
&\{c_{\mathbf{p},\sigma}, d_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = \{d_{\mathbf{p},\sigma}, c_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = \{c_{\mathbf{p},\sigma}, d_{\mathbf{q},\sigma'}\} = \{c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger, d_{\mathbf{q},\sigma'}^\dagger\} = 0,
\end{aligned} \tag{5.316}$$

其中 $(c_{\mathbf{p},\sigma}, c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger)$ 和 $(d_{\mathbf{p},\sigma}, d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger)$ 分别描述自旋磁量子数为 σ 的正费米子和反费米子。

5.7 将 Weyl 表象中的 γ 矩阵 (5.68) 记为 γ^μ_{W}，Dirac 表象中的 γ 矩阵 (5.301) 记为 γ^μ_{D}，寻找幺正矩阵 U，使得 $\gamma^\mu_{\mathrm{D}} = U^\dagger \gamma^\mu_{\mathrm{W}} U$。

5.8 对于自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$，根据 1.7 节关于 Noether 定理的讨论，Lorentz 对称性给出的守恒荷算符 (1.240) 表达为

$$J^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^3x\, [T^{0\nu}x^\mu - T^{0\mu}x^\nu - \mathrm{i}\pi_a(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}\psi_b], \tag{5.317}$$

其中 $T^{0\mu} = \pi_a \partial^\mu \psi_a$，利用等时反对易关系 (5.238) 推出 (5.65) 式。

5.9 自旋求和关系 (5.214) 等价于

$$\sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{p},\lambda)u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) = (\not{p}+m)\gamma^0, \quad \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{p},\lambda)v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) = (\not{p}-m)\gamma^0. \tag{5.318}$$

利用上式、产生湮灭算符的反对易关系 (5.246) 以及 $\psi(\mathbf{x},t)$ 和 $\psi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式 (5.216) 和 (5.217)，推出等时反对易关系 (5.239)。

5.10 假如采用等时对易关系量子化 Dirac 旋量场，利用得到的产生湮灭算符对易关系 (5.236) 和哈密顿量表达式 (5.237) 推出

$$[H, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = E_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{5.319}$$

真空态 $|0\rangle$ 满足

$$a_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = b_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad H|0\rangle = E_{\mathrm{vac}}|0\rangle, \quad E_{\mathrm{vac}} = 2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\, E_{\mathbf{p}}, \tag{5.320}$$

引入单粒子态 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$，推出非物理的结果

$$\langle \mathbf{p}^-,\lambda | \mathbf{p}^-,\lambda\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0, \tag{5.321}$$

$$\langle \mathbf{p}^-,\lambda | H | \mathbf{p}^-,\lambda\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0. \tag{5.322}$$

第 6 章　量子场的相互作用

第 2、4、5 章分别讨论了标量场、矢量场、旋量场的正则量子化。不过，这些讨论只涉及自由量子场的拉氏量，没有考虑到量子场的相互作用。像 (2.79)、(4.46) 和 (5.103) 式这样的自由场拉氏量包含着动能项和质量项，它们都是二次型，即每一项均包含 2 个场算符。如果我们更进一步，考虑拉氏量包含多于 2 个场算符的项，则这些项将描述场的**相互作用** (interaction)。在**局域场论**中，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 中的相互作用项只能包含同一个时空点 x^μ 处的几个场算符，例如 $[\phi(x)]^3$；不能包含处于不同时空点上的场算符，例如 $[\phi(x)]^2\phi(y)$。这样可以避免超距作用，保持理论的**因果性**。

在进一步讨论相互作用之前，我们先分析各种场在四维时空中的量纲。在自然单位制下，时空坐标 x^μ 的量纲是能量量纲的倒数，即 $[x^\mu]=[E]^{-1}$，故时空导数算符的量纲是 $[\partial_\mu]=[E]$，时空体积元的量纲则是 $[\mathrm{d}^4x]=[E]^{-4}$。由于拉格朗日量 L 具有能量量纲，作用量 $S=\int \mathrm{d}t\, L=\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}$ 在自然单位制中没有量纲，而拉氏量 $\mathcal{L}$ 的量纲是

$$\boxed{[\mathcal{L}]=[E]^4.} \tag{6.1}$$

于是，从拉氏量 (2.79) 的第一项可以看出，标量场的量纲是

$$\boxed{[\phi]=[E].} \tag{6.2}$$

类似地，分析拉氏量 (4.46)，容易发现矢量场 A^μ 的量纲是

$$\boxed{[A^\mu]=[E].} \tag{6.3}$$

由拉氏量 (5.103) 的第一项可以看出，旋量场的量纲是

$$\boxed{[\psi]=[\bar{\psi}]=[E]^{3/2}.} \tag{6.4}$$

拉氏量中的相互作用项可以只包含同一个场，从而描述场的**自相互作用** (self-interaction)。例如，用实标量场 $\phi(x)$ 构造拉氏量

$$\boxed{\mathcal{L}_{\phi^4}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4.} \tag{6.5}$$

前两项与 (2.79) 式相同，第三项描述实标量场的自相互作用，其中 λ 是一个实**耦合常数** (coupling constant)，它的大小决定耦合的强度。由 $[\phi^4]=[E]^4$ 得 $[\lambda]=1$，即耦合常数 λ 是无量纲的。$\mathcal{L}_{\phi^4}$ 描述实标量场的 **ϕ^4 理论**。

相互作用项也可以涉及不同的场。例如，用实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}=\mathcal{L}_{\text{S}}+\mathcal{L}_{\text{D}}+\mathcal{L}_{\text{Y}}, \tag{6.6}$$

其中，

$$\mathcal{L}_{\text{S}}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 \tag{6.7}$$

包含 ϕ 的动能项和质量项，

$$\mathcal{L}_{\text{D}}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m_\psi\bar{\psi}\psi \tag{6.8}$$

包含 ψ 的动能项和质量项，而相互作用项

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{Y}}=-\kappa\,\phi\bar{\psi}\psi} \tag{6.9}$$

描述标量场 ϕ 与旋量场 ψ 之间的 **Yukawa 相互作用**，这里 κ 是实耦合常数。由于 $[\phi\bar{\psi}\psi]=[E]^4$，Yukawa 耦合常数 κ 没有量纲。这类包含标量场 ϕ 与旋量场 ψ、$\bar{\psi}$ 的相互作用最先由汤川秀树 (Hideki Yukawa) 于 1935 年提出 [24]，当时引入 π 介子（对应于 ϕ）来传递核子（对应于 ψ）之间的强相互作用。$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ 描述 **Yukawa 理论**。

在 Yukawa 理论中，可以指定 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带一种非零的 U(1) 荷 q_ψ，但实标量场 $\phi(x)$ 携带的 U(1) 荷只能是 $q_\phi=0$。从而，拉氏量 (6.6) 在 U(1) 整体变换 $\psi'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\psi\theta}\psi(x)$ 和 $\phi'(x)=\phi(x)$ 的作用下保持不变。可见，Yukawa 理论具有 U(1) 整体对称性。

存在相互作用时，场的经典运动方程是非线性的。例如，由 Euler-Lagrange 方程 (1.167) 推出 ϕ^4 理论的运动方程

$$(\partial^2+m^2)\phi=-\frac{\lambda}{3!}\phi^3. \tag{6.10}$$

如果像 Yukawa 理论那样，相互作用项包含不同类型的场，则会得到多个相互耦合的运动方程。这样的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中就更加困难了。所幸的是，当耦合常数（如 λ、κ）比较小时，在**微扰论** (perturbation theory) 中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路。

如果拉氏量中的相互作用项 $\mathcal{L}_1$ 不包含场 $\Phi_a(x)$ 的时空导数 $\partial_\mu\Phi_a$，则 $\partial\mathcal{L}_1/\partial\dot{\Phi}_a=0$。上面两个例子都属于这种情况。按照定义式 (1.168)，此时场的共轭动量密度 $\pi_a(x)=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ 不会受到 $\mathcal{L}_1(\Phi_a)$ 的影响，因而与没有相互作用时的量相同。将哈密顿量密度 $\mathcal{H}$ 分解成自由运动部分 $\mathcal{H}_0$（与没有相互作用时的哈密顿量密度相同）和相互作用部分 $\mathcal{H}_1$，即

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_1, \tag{6.11}$$

则根据定义式 (1.170) 通常会得到

$$\mathcal{H}_1(\Phi_a)=-\mathcal{L}_1(\Phi_a). \tag{6.12}$$

从而，哈密顿量中描述相互作用的项是

$$H_1 = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}_1(\Phi_a). \tag{6.13}$$

如果 $\mathcal{L}_1$ 包含场的时空导数 $\partial_\mu \Phi_a$，则共轭动量密度 $\pi_a(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ 与没有相互作用的情况不同，$\mathcal{H}_1$ 的形式会复杂一些。

6.1 相互作用绘景

对于不含时的哈密顿量 H，我们已经在 2.2 节中介绍过 Schrödinger 绘景与 Heisenberg 绘景之间的关系。由于 Heisenberg 绘景能够明确地处理场算符的时间依赖性，前面章节中自由场的正则量子化程序都是在这个绘景中进行的。实际上，在 Schrödinger 绘景中也可以等价地讨论正则量子化。

接下来以实标量场为例进行表述。自由实标量场 $\phi(x)$ 的哈密顿量可以用产生湮灭算符表达成 (2.132) 式的形式：

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \tag{6.14}$$

它是不含时的。这里我们省略了零点能，因为零点能是一个 c 数，只决定总能量的零点，不会影响下面的讨论。湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 和产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 不依赖于时间 t，它们实际上是 *Schrödinger* 绘景中的算符。根据 (2.136) 式，有 $[a_{\mathbf{p}}, -\mathrm{i}Ht] = -\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t a_{\mathbf{p}}$，从而得到以下多重对易子：

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(1)}] &= [a_{\mathbf{p}}, -\mathrm{i}Ht] = -\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t a_{\mathbf{p}}, \\
[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(2)}] &= [[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(1)}], -\mathrm{i}Ht] = -\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t [a_{\mathbf{p}}, -\mathrm{i}Ht] = (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t)^2 a_{\mathbf{p}}, \\
&\cdots \\
[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(n)}] &= (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t)^n a_{\mathbf{p}}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

于是，由 (2.38) 和 (5.23) 式推出 Heisenberg 绘景中的湮灭算符

$$a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t)^n a_{\mathbf{p}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p}}. \tag{6.16}$$

对上式取厄米共轭，得到相应的产生算符

$$a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p}}^\dagger. \tag{6.17}$$

利用这两条关系，将自由实标量场的平面波展开式 (2.103) 表示成

$$\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right]. \tag{6.18}$$

在上式第二步中，场算符的时间依赖性只包含在 Heisenberg 绘景的产生湮灭算符里面。反过来，在 Schrödinger 绘景中，自由实标量场的平面波展开式为

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right).\end{aligned} \tag{6.19}$$

可见，场算符在 Schrödinger 绘景中确实不依赖于时间。同样，将共轭动量密度的展开式 (2.105) 变换到 Schrödinger 绘景中，则共轭动量密度也不依赖于时间：

$$\begin{aligned}\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\left[a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right).\end{aligned} \tag{6.20}$$

2.2 节提到，正则对易关系的形式与绘景无关。这一点很容易验证，比如，实标量场的等时对易关系 (2.87) 在 Schrödinger 绘景中化为

$$[\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}),\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{y})] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}),\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{y})] = [\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}),\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{y})] = 0. \tag{6.21}$$

如果从这些正则对易关系和展开式 (6.19)、(6.20) 出发，可以推出产生湮灭算符的对易关系，结果必定与在 Heisenberg 绘景中导出的 (2.122) 式相同。于是，可以进一步导出哈密顿量的表达式 (6.14)。这说明在 Schrödinger 绘景中进行计算也会得到自洽结果。

存在相互作用时，在 Schrödinger 绘景中将不含时的哈密顿量 $H = H^{\mathrm{S}} = H^{\mathrm{H}}$ 分解为两个部分，

$$H = H_0^{\mathrm{S}} + H_1^{\mathrm{S}}. \tag{6.22}$$

其中，主要部分 H_0^{S} 是自由（没有相互作用）的哈密顿量；微扰部分 H_1^{S} 描述相互作用，只给出较小的影响。这里假设 H_0^{S} 和 H_1^{S} 都是不含时的。此时可以建立**相互作用绘景** (interaction picture)，它也称为 *Dirac 绘景*。建立方式是把主要部分 H_0^{S} 的影响塞进态矢里面，将态矢定义为

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}},} \tag{6.23}$$

力学量算符定义为

$$\boxed{O^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}.} \tag{6.24}$$

这样一来，相互作用绘景中哈密顿量的自由部分与 Schrödinger 绘景相同，

$$H_0^{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H_0^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = H_0^{\mathrm{S}}; \tag{6.25}$$

但总哈密顿量不同，

$$H^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}; \tag{6.26}$$

微扰部分则满足

$$H_1^{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H_1^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}(H-H_0^{\mathrm{S}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=H^{\mathrm{I}}(t)-H_0^{\mathrm{S}}=H^{\mathrm{I}}(t)-H_0^{\mathrm{I}}. \tag{6.27}$$

注意 $H^{\mathrm{I}}(t)$ 和 $H_1^{\mathrm{I}}(t)$ 都是含时的。

Schrödinger 绘景与 Heisenberg 绘景的变换关系 (2.36) 和 (2.38) 等价于

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}},\quad O^{\mathrm{S}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{H}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}. \tag{6.28}$$

以 Schrödinger 绘景为中介，得到相互作用绘景与 Heisenberg 绘景之间的变换关系

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}},\quad O^{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{H}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}. \tag{6.29}$$

引入幺正变换算符

$$\boxed{V(t)\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},} \tag{6.30}$$

显然有 $V(0)=\mathbb{I}$，将以上变换关系简化为

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=V(t)|\Psi\rangle^{\mathrm{H}},\quad O^{\mathrm{I}}(t)=V(t)O^{\mathrm{H}}(t)V^{\dagger}(t).} \tag{6.31}$$

于是，相互作用绘景中等时对易关系的形式不变，如

$$\begin{aligned}[\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]&=[V(t)\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)V^{\dagger}(t),\,V(t)\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{y},t)V^{\dagger}(t)]=V(t)[\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t),\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{y},t)]V^{\dagger}(t)\\&=V(t)\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})V^{\dagger}(t)=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{6.32}$$

当 $t=0$ 时，三种绘景是一致的，

$$|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{I}}=|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}=|\Psi\rangle^{\mathrm{H}},\quad O^{\mathrm{I}}(0)=O^{\mathrm{S}}=O^{\mathrm{H}}(0). \tag{6.33}$$

在任意 t 时刻，均有

$${}^{\mathrm{I}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{I}}(t)\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}={}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}={}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,O^{\mathrm{H}}(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}, \tag{6.34}$$

因而三种绘景描述相同的物理。如果没有相互作用，$H=H_0^{\mathrm{S}}$，则相互作用绘景与 Heisenberg 绘景相同。

以上讨论以 $t=0$ 作为绘景变换的参考时刻。如果想将参考时刻改为 $t=t_0$，只需要作变量替换 $t\to t-t_0$。

利用 Schrödinger 绘景中的 Schrödinger 方程 (2.32)，推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_0|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}&=\left(\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\right)|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{i}\partial_0|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=\left(-H_0^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H\right)|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}\\&=\left(-H_0^{\mathrm{S}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=[-H_0^{\mathrm{I}}+H^{\mathrm{I}}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}},\end{aligned} \tag{6.35}$$

即

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle^{\mathrm{I}} = H_1^{\mathrm{I}}(t)\left|\Psi(t)\right\rangle^{\mathrm{I}}.} \tag{6.36}$$

这是态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}$ 的演化方程。可见，在相互作用绘景中，态矢的演化只由相互作用哈密顿量 $H_1^{\mathrm{I}}(t)$ 决定。另一方面，有

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_0 O^{\mathrm{I}}(t) &= (\mathrm{i}\partial_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t})O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}O^{\mathrm{S}}(\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t})\\ &= -H_0^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H_0^{\mathrm{S}} = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}, H_0^{\mathrm{S}}],\end{aligned} \tag{6.37}$$

即

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O^{\mathrm{I}}(t) = [O^{\mathrm{I}}(t), H_0^{\mathrm{S}}].} \tag{6.38}$$

这个方程表明相互作用绘景中力学量算符的演化只由自由哈密顿量 $H_0^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{I}}$ 决定。

综上，在相互作用绘景中，态矢的演化规律与 Schrödinger 绘景中的运动方程 (2.32) 类似，但必须将那里的总哈密顿量 H 换成相互作用哈密顿量 $H_1^{\mathrm{I}}(t)$，这部分演化属于**动力学** (dynamics) **演化**；力学量算符的演化规律与 Heisenberg 绘景中的运动方程 (2.43) 类似，但必须将那里的总哈密顿量 H 换成自由哈密顿量 H_0^{S}，这部分演化属于**运动学** (kinematics) **演化**。

在 Heisenberg 绘景中，对未加微扰的系统求出各个算符间的关系之后，加入微扰有可能改变这些关系。不过，加入微扰之后各个算符在相互作用绘景中的许多关系仍然与加入微扰之前它们在 Heisenberg 绘景中的关系相同，可以直接套用原来的公式，这就是相互作用绘景的好处。特别地，在相互作用绘景中，具有相互作用的场算符的平面波展开式与没有相互作用的场算符在 Heisenberg 绘景中的展开式相同。因此，在存在相互作用的情况下，我们仍然可以沿用第 2、4、5 章中导出的自由量子场平面波展开式，其中的产生湮灭算符满足原来的对易或反对易关系，这一点对接下来的讨论至关重要。

6.1.1　例 1：实标量场

下面以实标量场的 ϕ^4 理论为例讨论相互作用绘景。根据拉氏量 (6.5) 和 (1.168) 式，共轭动量密度为

$$\pi^{\mathrm{H}} = \frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^4}^{\mathrm{H}}}{\partial(\partial_0\phi^{\mathrm{H}})} = \partial_0\phi^{\mathrm{H}}, \tag{6.39}$$

与自由场形式相同。这里我们将 Heisenberg 绘景的标记 H 明确写出来。依照 (1.170) 式，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}^{\mathrm{H}} = \pi^{\mathrm{H}}\partial_0\phi^{\mathrm{H}} - \mathcal{L}_{\phi^4}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}[(\pi^{\mathrm{H}})^2 + (\nabla\phi^{\mathrm{H}})^2 + m^2(\phi^{\mathrm{H}})^2] + \frac{\lambda}{4!}(\phi^{\mathrm{H}})^4, \tag{6.40}$$

最后一项是相互作用项。将哈密顿量分解为

$$H^{\mathrm{H}} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}^{\mathrm{H}} = H_0^{\mathrm{H}} + H_1^{\mathrm{H}}, \tag{6.41}$$

其中，

$$H_0^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[(\pi^{\mathrm{H}})^2 + (\nabla\phi^{\mathrm{H}})^2 + m^2(\phi^{\mathrm{H}})^2] \tag{6.42}$$

与自由哈密顿量 (2.124) 的形式相同，而

$$H_1^{\mathrm{H}} = \frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^{\mathrm{H}})^4 \tag{6.43}$$

描述相互作用。

假设 $t=0$ 时，实标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式与自由场展开式 (6.19) 和 (6.20) 一样，

$$\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},0) = \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0) = \phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right), \tag{6.44}$$

$$\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},0) = \pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0) = \pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right), \tag{6.45}$$

其中产生湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 和 $a_{\mathbf{p}}$ 满足对易关系 (2.122)。这是一个初始条件。在 $t=0$ 时刻，由绘景变换关系 (2.38) 得到 $H_0^{\mathrm{H}}(0) = H_0^{\mathrm{S}}$。将以上 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0)$ 和 $\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0)$ 的平面波展开式代入 (6.42) 式，仿照 2.3.3 小节的推导过程，略去零点能，得到

$$H_0^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{H}}(0) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \tag{6.46}$$

即哈密顿量的自由部分 H_0^{S} 与 (6.14) 式的形式相同。类似于 (6.15) 式，有

$$[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t)^{(n)}] = (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t)^n a_{\mathbf{p}}. \tag{6.47}$$

从而由 (5.23) 式得到

$$a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a_{\mathbf{p}}, \quad a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}\dagger}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a_{\mathbf{p}}^\dagger. \tag{6.48}$$

于是，相互作用绘景中任意 t 时刻的场算符展开式为

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right),\end{aligned} \tag{6.49}$$

共轭动量密度的展开式为

$$\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{6.50}$$

正如所期望的，这两个式子与自由实标量场在 Heisenberg 绘景中的展开式 (2.103) 和 (2.105) 一致。

因此，根据产生湮灭算符的对易关系 (2.122)，可以证明 $\phi^{\mathrm{I}}(x)$ 和 $\pi^{\mathrm{I}}(x)$ 满足与 (2.87) 形式相同的等时对易关系[1]

$$[\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]=[\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]=0. \tag{6.51}$$

此外，能够验证场算符展开式符合运动学演化方程 (6.38)：类似于 (2.135) 和 (2.136) 式，推出

$$[a_{\mathbf{p}},H_0^{\mathrm{S}}]=E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}},\quad [a_{\mathbf{p}}^\dagger,H_0^{\mathrm{S}}]=-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger, \tag{6.52}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left([a_{\mathbf{p}},H_0^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+[a_{\mathbf{p}}^\dagger,H_0^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)=[\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),H_0^{\mathrm{S}}].\end{aligned} \tag{6.53}$$

6.1.2　例 2：有质量矢量场

不难将上述讨论推广到复标量场、无质量矢量场和 Dirac 旋量场。但是，推广到有质量矢量场 $A^\mu(x)$ 却会得到不同寻常的结果，原因在于 $A^0(x)$ 不是一个独立的场变量，不具备相应的共轭动量密度和正则对易关系，因而在绘景变换中具有特殊的性质。

假设参与相互作用的有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 对应的拉氏量为

$$\mathcal{L}^{\mathrm{H}}=\mathcal{L}_0^{\mathrm{H}}+\mathcal{L}_1^{\mathrm{H}}, \tag{6.54}$$

其中自由项为

$$\mathcal{L}_0^{\mathrm{H}}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\mathrm{H}}F^{\mathrm{H},\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H},\mu}, \tag{6.55}$$

相互作用项为

$$\mathcal{L}_1^{\mathrm{H}}=-gJ_\mu^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H},\mu}. \tag{6.56}$$

此处，g 是一个无量纲耦合常数，$J_\mu^{\mathrm{H}}(x)$ 是由其它场组成的流，如 $\bar{\psi}^{\mathrm{H}}(x)\gamma_\mu\psi^{\mathrm{H}}(x)$。根据 (1.167) 式及

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\mathrm{H}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^{\mathrm{H}})}=-F^{\mathrm{H},\mu\nu},\quad \frac{\partial\mathcal{L}^{\mathrm{H}}}{\partial A_\nu^{\mathrm{H}}}=m^2A^{\mathrm{H},\nu}-gJ^{\mathrm{H},\nu}, \tag{6.57}$$

Euler-Lagrange 方程给出

$$\partial_\mu F^{\mathrm{H},\mu\nu}+m^2A^{\mathrm{H},\nu}=gJ^{\mathrm{H},\nu}. \tag{6.58}$$

由于 $J_\mu^{\mathrm{H}}(x)$ 不包含 $A^{\mathrm{H},\mu}$ 的时间导数，共轭动量密度与自由场形式相同：

$$\pi_i^{\mathrm{H}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0A^{\mathrm{H},i})}=-F_{0i}^{\mathrm{H}},\quad \pi^{\mathrm{H},i}=F^{\mathrm{H},i0}=-\partial^0A^{\mathrm{H},i}+\partial^iA^{\mathrm{H},0}. \tag{6.59}$$

[1]参考习题 2.2。

写成三维矢量的形式，得

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} = -\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} - \nabla A^{\mathrm{H},0}, \quad \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - \nabla A^{\mathrm{H},0}. \tag{6.60}$$

当 $\nu = 0$ 时，运动方程变成

$$\partial_i F^{\mathrm{H},i0} + m^2 A^{\mathrm{H},0} = g J^{\mathrm{H},0}, \tag{6.61}$$

故

$$A^{\mathrm{H},0} = -\frac{1}{m^2}(\partial_i F^{\mathrm{H},i0} - g J^{\mathrm{H},0}) = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - g J^{\mathrm{H},0}). \tag{6.62}$$

与自由情况下的 (4.62) 式不同，此处 $A^{\mathrm{H},0}$ 还依赖于 $J^{\mathrm{H},0}$。

根据 (4.134) 式和 (4.130) 式第一步结果，哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\mathrm{H}} &= \pi_i^{\mathrm{H}} \partial_0 A^{\mathrm{H},i} - \mathcal{L}^{\mathrm{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} - \mathcal{L}^{\mathrm{H}} \\
&= -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2 - \frac{1}{2} m^2 [(A^{\mathrm{H},0})^2 - (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2] + g J^{\mathrm{H},0} A^{\mathrm{H},0} - g\, \mathbf{J}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{H}}.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

我们需要知道它比自由哈密顿量密度 (4.135) 多了什么。利用 (6.60) 和 (6.62) 式，将 (6.63) 式第一项化为

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} &= \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \nabla A^{\mathrm{H},0}) = (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \nabla \cdot (A^{\mathrm{H},0} \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}) - A^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \\
&= (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \nabla \cdot (A^{\mathrm{H},0} \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}) + \frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 - \frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}.
\end{aligned} \tag{6.64}$$

上式第三步第二项是全散度，对哈密顿量没有贡献。(6.63) 式第四项中包括

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} m^2 (A^{\mathrm{H},0})^2 &= -\frac{m^2}{2} \frac{1}{m^4} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - g J^{\mathrm{H},0})^2 \\
&= -\frac{1}{2m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 - \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{H},0})^2 + \frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}},
\end{aligned} \tag{6.65}$$

而第五项为

$$g J^{\mathrm{H},0} A^{\mathrm{H},0} = -\frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - g J^{\mathrm{H},0}) = -\frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \frac{g^2}{m^2}(J^{\mathrm{H},0})^2. \tag{6.66}$$

这里包含 J^μ 的项都是自由场不具备的，应该归为相互作用项。于是，我们将哈密顿量分解为

$$H^{\mathrm{H}} = \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H}^{\mathrm{H}} = H_0^{\mathrm{H}} + H_1^{\mathrm{H}}, \tag{6.67}$$

其中，

$$H_0^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \left[(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + (\nabla \times \mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2 + m^2 (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2 \right] \tag{6.68}$$

与自由哈密顿量 (4.136) 形式相同，而

$$H_1^{\mathrm{H}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[-g\, \mathbf{J}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{H},0})^2 \right] \tag{6.69}$$

描述相互作用。

令 $x^0 = y^0 = t$，根据等时对易关系 (4.58)，有

$$\begin{aligned}[A^{\mathrm{H},i}(x), (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2] &= [A^{\mathrm{H},i}(x), \pi_j^{\mathrm{H}}(y)]\pi_j^{\mathrm{H}}(y) + \pi_j^{\mathrm{H}}(y)[A^{\mathrm{H},i}(x), \pi_j^{\mathrm{H}}(y)] \\ &= 2\mathrm{i}\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi_j^{\mathrm{H}}(y) = -2\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi^{\mathrm{H},i}(y),\end{aligned} \tag{6.70}$$

写成三维矢量的形式，得

$$[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x), (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2] = -2\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y). \tag{6.71}$$

另一方面，用 ∇_y 表示对三维坐标 $\mathbf{y}$ 的梯度算符，推出

$$[A^{\mathrm{H},i}(x), \nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)] = -\frac{\partial}{\partial y^j}[A^{\mathrm{H},i}(x), \pi_j^{\mathrm{H}}(y)] = -\mathrm{i}\delta^i{}_j\frac{\partial}{\partial y^j}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{6.72}$$

即

$$[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x), \nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)] = -\mathrm{i}\nabla_y\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{6.73}$$

从而导出

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x), H_0^{\mathrm{H}}] &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3y\left\{[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x), (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2] + \frac{1}{m^2}[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x), (\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2]\right\} \\ &= \int \mathrm{d}^3y\left\{-\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y) - \frac{\mathrm{i}}{m^2}[\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)]\nabla_y\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\} \\ &= -\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(x) + \frac{\mathrm{i}}{m^2}\int d^3y\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\nabla_y[\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)] \\ &= -\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(x) + \frac{\mathrm{i}}{m^2}\nabla_x[\nabla_x\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(x)].\end{aligned} \tag{6.74}$$

第三步用了分部积分。

接下来转换到相互作用绘景，由 (6.31) 式得

$$\mathbf{A}^{\mathrm{I}} = V(t)\,\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\,V^\dagger(t), \quad \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} = V(t)\,\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}\,V^\dagger(t), \tag{6.75}$$

则

$$H_0^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{I}} = V(t)H_0^{\mathrm{H}}V^\dagger(t) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}})^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}})^2 + (\nabla\times\mathbf{A}^{\mathrm{I}})^2 + m^2(\mathbf{A}^{\mathrm{I}})^2\right]. \tag{6.76}$$

将算符演化方程 (6.38) 应用到 $\mathbf{A}^{\mathrm{I}}$ 上，利用 (6.74) 式，推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{I}} &= [\mathbf{A}^{\mathrm{I}}, H_0^{\mathrm{I}}] = V(t)\,[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}, H_0^{\mathrm{H}}]\,V^\dagger(t) \\ &= V(t)\left[-\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \frac{\mathrm{i}}{m^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})\right]V^\dagger(t) = -\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{i}}{m^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}),\end{aligned} \tag{6.77}$$

即

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} = -\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{m^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}). \tag{6.78}$$

与 (4.60) 式和 (4.62) 式比较，可以看出，这个等式与自由场情况具有相同形式。

现在，假设 $t=0$ 时 $A^\mu(x)$ 和 $\pi_i(x)$ 的平面波展开式与 $t=0$ 时的自由场展开式 (4.109) 和 (4.125) 相同，即

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{I},\mu}(\mathbf{x},0) &= A^{\mathrm{H},\mu}(\mathbf{x},0) = A^{\mathrm{S},\mu}(\mathbf{x}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right], \end{aligned} \tag{6.79}$$

$$\begin{aligned} \pi^{\mathrm{I}}_i(\mathbf{x},0) &= \pi^{\mathrm{H}}_i(\mathbf{x},0) = \pi^{\mathrm{S}}_i(\mathbf{x}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \tilde{\varepsilon}^*_i(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right], \end{aligned} \tag{6.80}$$

其中，产生湮灭算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 满足对易关系 (4.127)。在 $t=0$ 时刻，将以上 $A^{\mathrm{H},\mu}(\mathbf{x},0)$ 和 $\pi^{\mathrm{H}}_i(\mathbf{x},0)$ 的平面波展开式代入 (6.68) 式，仿照 4.3.3 小节的推导过程，略去零点能，得到

$$H^{\mathrm{S}}_0 = H^{\mathrm{H}}_0(0) = \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{6.81}$$

即哈密顿量的自由部分 H^{S}_0 具有 (4.137) 式的形式。从而由对易关系 (4.127) 推出

$$[H^{\mathrm{S}}_0, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = \sum_{\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}[a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = \sum_{\lambda'}\int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{6.82}$$

$$[H^{\mathrm{S}}_0, a_{\mathbf{p},\lambda}] = \sum_{\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}[a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}] = -\sum_{\lambda'}\int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{6.83}$$

于是，我们能够得到与 (6.15) 形式相同的式子

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, (-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t)^{(n)}] = (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t)^n a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{6.84}$$

再根据 (5.23) 式导出

$$a^{\mathrm{I}}_{\mathbf{p},\lambda}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t}a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a_{\mathbf{p},\lambda}, \quad a^{\mathrm{I}\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{6.85}$$

更进一步，推出

$$A^{\mathrm{I},\mu}(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t}A^{\mathrm{S},\mu}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t} = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{6.86}$$

$$\pi^{\mathrm{I}}_i(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t}\pi^{\mathrm{S}}_i(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0 t} = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \tilde{\varepsilon}^*_i(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{6.87}$$

也就是说，对于任意 t 时刻，$A^{\mathrm{I},\mu}(x)$ 和 $\pi^{\mathrm{I}}_i(x)$ 的展开式与 Heisenberg 绘景中的自由场展开式 (4.109) 和 (4.125) 一致。这是我们期望的结果。

因此，$\pi^{\mathrm{I}}_i(x)$ 和 $A^{\mathrm{I},\mu}(x)$ 的关系也与自由场的 (4.57) 式一样，

$$\pi^{\mathrm{I}}_i = -\partial_0 A^{\mathrm{I}}_i + \partial_i A^{\mathrm{I}}_0, \tag{6.88}$$

即

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} = -\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{I}} - \nabla A^{\mathrm{I},0}. \tag{6.89}$$

与 (6.78) 式比较，得到

$$A^{\mathrm{I},0} = -\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}. \tag{6.90}$$

这个式子与自由场的关系式 (4.62) 一致，但不同于 Heisenberg 绘景中的关系式 (6.62)。实际上，由于 $A^{\mathrm{H},0}$ 不是独立的场分量，我们在 Heisenberg 绘景中可以利用 Euler-Lagrange 方程导出关系式 (6.62) 来确定它，但我们无法保证这个关系式在相互作用绘景中成立，因而不能直接通过相似变换定义 $A^{\mathrm{H},0}$ 在相互作用绘景中对应的量。

根据 (6.90) 式，相互作用哈密顿量 (6.69) 在相互作用绘景中将变成

$$\begin{aligned}
H_1^{\mathrm{I}} &= V(t)H_1^{\mathrm{H}}V^\dagger(t) = \int \mathrm{d}^3x\left[-g\,\mathbf{J}^{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{I}} - \frac{g}{m^2}J^{\mathrm{I},0}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x\left[-g\,\mathbf{J}^{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{I}} + gJ^{\mathrm{I},0}A^{\mathrm{I},0} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right] = \int \mathrm{d}^3x\left[gJ_\mu^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I},\mu} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x\left[-\mathcal{L}_1^{\mathrm{I}} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right].
\end{aligned} \tag{6.91}$$

最后一步方括号中第一项 $-\mathcal{L}_1^{\mathrm{I}} = gJ_\mu^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I},\mu}$ 是我们期望得到的，它具有 Lorentz 不变性。但第二项异乎寻常，不具有 Lorentz 不变性，我们将这个**非协变项**记为

$$\mathcal{H}_{J^0}^{\mathrm{I}} = \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2. \tag{6.92}$$

在这里，$\mathcal{H}_{J^0}^{\mathrm{I}}$ 看起来会破坏理论的 Lorentz 协变性，不过，在后续微扰论分析中，我们将看到它的贡献恰好抵消了有质量矢量场传播子中的非协变项（见 6.4.3 小节和 7.4 节）。最终，理论仍然是 Lorentz 协变的。

6.2　时间演化算符和 S 矩阵

如前所述，在相互作用绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}$ 承载着动力学演化，它的演化方程 (6.36) 是微扰论处理量子场相互作用的一个出发点。引入**时间演化算符** (time-evolution operator) $U(t,t_0)$，用于联系 t_0 和 t 两个时刻的态矢，使得

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}.} \tag{6.93}$$

由 (6.31) 式有

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = V(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = V(t)V^\dagger(t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}. \tag{6.94}$$

因而可以将时间演化算符表示为

$$U(t,t_0) = V(t)V^\dagger(t_0). \tag{6.95}$$

容易看出，时间演化算符满足

$$U(t_0,t_0)=\mathbb{I}. \tag{6.96}$$

两个相继的时间演化算符的乘法规则为

$$U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)=V(t_2)V^\dagger(t_1)V(t_1)V^\dagger(t_0)=V(t_2)V^\dagger(t_0)=U(t_2,t_0). \tag{6.97}$$

对上式取 $t_2=t_0$ 和 $t_1=t$，即得

$$U(t_0,t)U(t,t_0)=U(t_0,t_0)=\mathbb{I}, \tag{6.98}$$

故时间演化算符 $U(t,t_0)$ 的逆算符为

$$U^{-1}(t,t_0)=U(t_0,t). \tag{6.99}$$

再由 $V(t)$ 的幺正性推出

$$U^\dagger(t,t_0)=V(t_0)V^\dagger(t)=U(t_0,t)=U^{-1}(t,t_0), \tag{6.100}$$

这表明时间演化算符是幺正算符。由于 $V(0)=\mathbb{I}$，取 $t_0=0$，有

$$U(t,0)=V(t),\quad U^{-1}(t,0)=V^\dagger(t), \tag{6.101}$$

因而 $U(t,0)$ 就是联系 Heisenberg 绘景和相互作用绘景的幺正变换算符，(6.31) 式化为

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=U(t,0)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}},\quad O^{\mathrm{I}}(t)=U(t,0)O^{\mathrm{H}}(t)U^{-1}(t,0). \tag{6.102}$$

从态矢的演化方程 (6.36) 推出

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=H_1^{\mathrm{I}}(t)\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=H_1^{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}, \tag{6.103}$$

即

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_1^{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0).} \tag{6.104}$$

这是时间演化算符需要满足的微分方程。设 $t\geq t_0$，结合初始条件 (6.96)，将方程的解表达为

$$U(t,t_0)=\mathbb{I}-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)U(t_1,t_0). \tag{6.105}$$

上式左右两边均包含时间演化算符，重复迭代无穷多次，得到无穷级数

$$\begin{aligned}U(t,t_0)\;=\;&\mathbb{I}-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)+(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)H_1^{\mathrm{I}}(t_2)\\&+\cdots+\left[(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)H_1^{\mathrm{I}}(t_2)\cdots H_1^{\mathrm{I}}(t_n)\right]+\cdots\end{aligned} \tag{6.106}$$

这个级数满足微分方程 (6.104)，但用起来不够方便，需要进一步化简。

从现在开始，我们将省略表示相互作用绘景的上标 I，因为本章余下内容和下一章均在相互作用绘景中讨论。

在级数 (6.106) 中，作为积分上限的时刻是降序排列的，即 $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n \geq \cdots \geq t_0$。由于积分上限与积分变量相互依赖，这样的多重积分很难处理。为了将级数中每个积分的上限都扩展到 t 时刻，引入**时序乘积** (time-ordered product) 的概念。时序乘积使若干个含时算符的乘积强行按照它们相应的时刻从左到右降序排列。以 n 个 $H_1(t)$ 算符为例，用 T 表示这种时间排序，有

$$\boxed{\mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)\cdots H_1(t_n)] = H_1(t_{i_1})H_1(t_{i_2})\cdots H_1(t_{i_n}), \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n}.} \tag{6.107}$$

这里 $t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}$ 是由 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 按照数值降序排列得到的。又如，两个标量场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的时序乘积可以用阶跃函数 (2.158) 表示为

$$\boxed{\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0-y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0-x^0) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0, \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0. \end{cases}} \tag{6.108}$$

如果一个算符可分解为奇数个费米子产生湮灭算符之积的线性组合，则称它为**费米子算符**。比如，旋量场算符 $\psi(x)$ 和它的 Dirac 共轭 $\bar{\psi}(x)$ 都是费米子算符。如果时间排序交换了两个相邻的费米子算符，则应该额外添加一个负号，否则会破坏 Lorentz 对称性。比如，两个旋量场算符 $\psi_a(x)$ 和 $\bar{\psi}_b(y)$ 的时序乘积是

$$\boxed{\mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] = \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\theta(x^0-y^0) - \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\theta(y^0-x^0) = \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y), & x^0 \geq y^0, \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x), & x^0 < y^0. \end{cases}} \tag{6.109}$$

相关论证如下。

在狭义相对论中，Lorentz 不变量

$$(x-y)^2 = (x^0-y^0)^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 \tag{6.110}$$

描述两个时空点 x^μ 与 y^μ 之间的**时空间隔** (spacetime interval)。若 $(x-y)^2 = 0$，则称 $(x-y)^2$ 是**类光间隔**，对应于图 6.1 中用粗实线表示的**光锥** (light cone)，光锥是四维时空中的三维超曲面，其中 $x^0 - y^0 > 0$ 部分称为**未来光锥**，$x^0 - y^0 < 0$ 部分称为**过去光锥**。$(x-y)^2 > 0$ 称为**类时间隔**，对应于光锥内部的浅色区域。$(x-y)^2 < 0$ 称为**类空间隔**，对应于光锥外面的空白区域。光锥由经过原点的光子在过去和未来能够到达的所有时空点所组成，光锥内部的时空点可以通过质点运动来到达，而光锥外部则是不可能到达的。

图 6.1 中的长虚线和短虚线分别是处于未来光锥内部和过去光锥内部的两条 $(x-y)^2$ 的类时等值线，而点线是一条 $(x-y)^2$ 的类空等值线，它们各自对应着四维时空中的一个三维超曲

图 6.1: 时空间隔 $(x-y)^2$ 的分类。长虚线、短虚线和点线是 $(x-y)^2$ 的三条等值线。

面。每个超曲面上所有的点都具有相同的 $(x-y)^2$，其中任意两点可以通过连续的固有保时向 Lorentz 变换联系起来。类似地，连续的固有保时向 Lorentz 变换也联系着未来光锥上的任意两点，但不能将未来光锥上的一个点变换到原点，也不能变换到过去光锥上。反过来，过去光锥上的点也不能通过参考系变换转换成未来光锥上的点。值得注意的是，从图 6.1 可以看出，x^0 与 y^0 之间的大小关系在上述类时超曲面、未来光锥或过去光锥上是确定的，但在上述类空超曲面上是不确定的。

于是，如果 x^μ 与 y^μ 之间具有类时或类光间隔，那么在任意惯性参考系中，x^0 和 y^0 的大小关系是确定的，即不能通过固有保时向 Lorentz 变换改变时序。假如两个事件具有因果联系，则它们发生的两个时空点必定具有类时间隔（光锥内）或类光间隔（光锥上），从而两个事件发生的先后次序是确定的。反过来，如果 x^μ 与 y^μ 之间具有类空间隔，则 x^0 和 y^0 的大小关系是不确定的，选取适当的惯性参考系，就可以得到 $x^0 > y^0$、$x^0 = y^0$ 和 $x^0 < y^0$ 三种情况。因此，如果两个事件发生的时空点具有类空间隔（光锥外），则它们发生的先后次序是不确定的，必定没有因果联系，否则将破坏因果性。

Lorentz 对称性对时序乘积的定义提出一定的要求。两个实标量场算符的对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 称为 **Pauli-Jordan 传播函数** $D_{\mathrm{PJ}}(x-y)$ [25]，根据平面波展开式 (6.49)，它满足

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{PJ}}(x-y) \equiv [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},\, a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y} + a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left\{[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} + [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right] = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3E_{\mathbf{p}}} \sin[p\cdot(x-y)]. \qquad (6.111)
\end{aligned}
$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.122)。最后一步用到正弦函数与指数函数的关系

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}). \tag{6.112}$$

当 $x^0 - y^0 = 0$ 时，$\sin[p\cdot(x-y)] = \sin[-\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]$，则 (6.111) 式最后一步中的被积函数是 $\mathbf{p}$ 的奇函数，故对 $\mathbf{p}$ 积分的结果为零，即 $D_{\mathrm{PJ}}(x-y) = 0$。另一方面，由于体积元 (2.161) 是 Lorentz 不变的，从 (6.111) 式最后一步的形式可以看出，$D_{\mathrm{PJ}}(x-y)$ 是 Lorentz 不变量。

如前所述, 如果 x^μ 与 y^μ 之间具有类空间隔, 就一定可以通过 Lorentz 变换使得 $x^0 - y^0 = 0$；于是，$D_{\mathrm{PJ}}(x-y) = 0$ 对所有类空间隔成立，即

$$\boxed{[\phi(x), \phi(y)] = D_{\mathrm{PJ}}(x-y) = 0, \quad (x-y)^2 < 0.} \tag{6.113}$$

也就是说，当 $(x-y)^2 < 0$ 时，虽然两个实标量场算符 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 可能在不同惯性参考系中具有不同的时序，但一定满足 $\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x)$。另一方面，当 $(x-y)^2 > 0$ 或 $(x-y)^2 = 0$ 时，x^0 与 y^0 的大小关系在所有惯性系中都相同，时序乘积 $\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$ 要么等于 $\phi(x)\phi(y)$，要么等于 $\phi(y)\phi(x)$。因此，无论对于类空、类时还是类光间隔，用 (6.108) 式定义的时序乘积在所有惯性系中相同，不会违背 Lorentz 对称性。此外，(6.113) 式表明，当 x^μ 与 y^μ 之间具有类空间隔时，这两个时空点上的场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 不会相互影响，即 $\phi(x)\phi(y)\,|\Psi\rangle = \phi(y)\phi(x)\,|\Psi\rangle$ 对任意态矢 $|\Psi\rangle$ 成立，这保证了**微观因果性** (microcausality)。

对于 Dirac 旋量场，平面波展开式具有 (5.216) 和 (5.218) 的形式，故

$$\begin{aligned}
\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \{u_a(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v_a(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \\
&\qquad\qquad \bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y} + \bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \big[u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda')\{a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\qquad\qquad + v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')\{b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&\qquad\qquad \times[u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} + v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} \big[u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \big[(\not{p}+m)_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - (-\not{p}+m)_{ab}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\big] \\
&= (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu_x + m)_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\big] \\
&= (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu_x + m)_{ab}\, D_{\mathrm{PJ}}(x-y),
\end{aligned} \tag{6.114}$$

其中 $\partial^\mu_x \equiv \partial/\partial x_\mu$。第二、三步用到产生湮灭算符的反对易关系 (5.246)，第五步用到自旋求和

(a) (b) (c)

图 6.2: t_1-t_2 平面上的积分区域，三角形中的线段指示内层积分的方向和范围。

关系 (5.214)，最后一步用到 (6.111) 式。于是，由 (6.113) 式得

$$\boxed{\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (x-y)^2 < 0.} \tag{6.115}$$

也就是说，当 $(x-y)^2 < 0$ 时，旋量场算符 $\psi_a(x)$ 和 $\bar{\psi}_b(y)$ 满足 $\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) = -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)$，从而用 (6.109) 式定义的时序乘积在所有惯性系中相同。此外，产生湮灭算符的反对易关系 (5.246) 导致 $\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = 0$ 和 $\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0$ 对任意 $(x-y)^2$ 成立。因此，当时间排序交换了两个相邻的费米子算符时，我们必须额外加上一个负号才不会违背 Lorentz 对称性。同样，(6.115) 式也保证了微观因果性，使得 $\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\,|\Psi\rangle = -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\,|\Psi\rangle$ 对任意态矢 $|\Psi\rangle$ 成立。

注意，哈密顿量算符不携带旋量指标，如果它的某一项包含若干个旋量场算符，则其个数必定是偶数，这样才能让旋量指标全部缩并掉。在时序乘积中交换两个相邻哈密顿量算符的位置时，将涉及到偶数次费米子算符的交换，因而不会产生额外的负号，(6.107) 式就是一个例子。

现在考虑级数 (6.106) 的第 3 项，它包含一个关于 t_1 和 t_2 的二重积分，积分区域如图 6.2(a) 所示，先对 t_2 积分，再对 t_1 积分。这个二重积分可以重新表达为

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t_1\, H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2\, H_1(t_2)H_1(t_1). \tag{6.116}$$

在第一步中，我们等价地改成先对 t_1 积分，再对 t_2 积分，积分区域不变，如图 6.2(b) 所示。第二步交换了积分变量 t_1 和 t_2，对应的积分区域如图 6.2(c) 所示。由此推出

$$\begin{aligned} 2! \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, H_1(t_1)H_1(t_2) &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, H_1(t_1)H_1(t_2) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2\, H_1(t_2)H_1(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2\, \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]. \end{aligned} \tag{6.117}$$

这里利用时序乘积将 t_1 和 t_2 的积分范围都扩展到整个 $[t_0, t]$ 区间，因为图 6.2(a) 中的积分区域与图 6.2(c) 中的积分区域恰好拼成一个正方形。在上式第一步第一项中，t_1 是 t_2 的积分上限，

显然有 $t_1 \geq t_2$，因而 $H_1(t_1)H_1(t_2) = \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$；在第二项中，$t_1$ 是 t_2 的积分下限，故 $t_2 \geq t_1$，此时 $H_1(t_2)H_1(t_1) = \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$；两项相加，就得到第二步的结果。

将上述讨论推广到级数 (6.106) 中的第 $n+1$ 项，得

$$\begin{aligned} & n! \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \, H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n) \\ = & \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \, \mathsf{T}[H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n)], \end{aligned} \tag{6.118}$$

从而每个积分变量的积分范围都是 $[t_0, t]$。上式出现 $n!$ 是因为对 n 个时间积分变量有 $n!$ 种排列方式。于是，级数 (6.106) 可以用时序乘积表达为

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \, \mathsf{T}[H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n)] \\ &\equiv \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, H_1(t')\right]. \end{aligned} \tag{6.119}$$

这个级数称为 **Dyson 级数** [26, 27]。它具有指数函数的级数展开形式，因而这里进一步用指数记号来表示。

像 (6.13) 式一样，在局域场论中 $H_1(t)$ 是相应哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1(x)$ 的空间积分

$$H_1(t) = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H}_1(x). \tag{6.120}$$

因此，时间演化算符满足

$$U(t, t_0) = \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3x' \, \mathcal{H}_1(x')\right]. \tag{6.121}$$

***S* 矩阵**，也称为**散射矩阵** (scattering matrix)，是量子散射理论的核心概念，它描述系统从初态跃迁到末态的概率振幅。在相互作用绘景中，S 矩阵可以用时间演化算符来构造。

在典型的粒子散射实验中，会制备在宏观上距离较远的多个粒子，使它们入射到一个较小的微观区域内以发生相互作用，随后产物粒子出射到彼此之间宏观距离较远的地方，被探测器所测量。因此，无论是初态 $|i\rangle$ 还是末态 $|f\rangle$，里面的粒子彼此之间具有足够远的距离，可以被有效地当作自由粒子。从而，初末态跟自由理论里的多粒子态具有相同的形式。相互作用真正有影响的时间间隔较短，可以认为初始时刻处于遥远过去，终末时刻处于遥远未来。这样的初末态称为**渐近态** (asymptotic state)。

在相互作用绘景中，将 t 时刻处描述系统的态矢记为 $|\Psi(t)\rangle$，它从遥远过去 $(t_0 \to -\infty)$ 的初态 $|i\rangle$ 演化而来，用时间演化算符 $U(t, t_0)$ 表达为

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{t_0 \to -\infty} U(t, t_0) \, |i\rangle. \tag{6.122}$$

此过程相应的 **S 矩阵元** S_{fi} 定义为态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 演化到遥远未来 $(t\to+\infty)$ 处与末态 $|f\rangle$ 的内积，即

$$S_{fi}=\lim_{t\to+\infty}\langle f|\Psi(t)\rangle=\lim_{t\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty}\langle f|\,U(t,t_0)\,|i\rangle\,. \tag{6.123}$$

以 f 为行指标、i 为列指标，将所有 S_{fi} 排列成矩阵，就得到 S 矩阵。

引入 **S 算符**，它与 S 矩阵元 S_{fi} 之间的关系为

$$\boxed{S_{fi}=\langle f|\,S\,|i\rangle\,.} \tag{6.124}$$

与 (6.123) 式比较，得到 S 算符与时间演化算符之间的关系

$$\boxed{S=U(+\infty,-\infty).} \tag{6.125}$$

利用 Dyson 级数 (6.119)，将 S 算符表达为相互作用哈密顿量 $H_1(t)$ 的积分级数，

$$\boxed{\begin{aligned}S&=\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t'\,H_1(t')\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)].\end{aligned}} \tag{6.126}$$

第二步将空间积分和时间积分合成时空积分，表达为相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1(t)$ 的积分级数，它也称为 *Dyson 级数*。由时间演化算符的幺正性可知，S 算符也是幺正的，

$$S^\dagger S=\mathbb{I}, \tag{6.127}$$

这对应于 S 矩阵的幺正性，意味着**概率守恒**。

由 (6.30) 和 (6.100) 式可以看出，时间演化算符 $U(t,t_0)$ 和 S 算符的幺正性来源于自由哈密顿量 H_0^{S} 和总哈密顿量 H 的厄米性。一般来说，只要让**拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是厄米的**，就能得到厄米的哈密顿量[2]。比如，如果 $\mathcal{L}(x)$ 由复场 $\Phi_a(x)$ 构成，那么通过 (1.170) 式定义的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi_a}\dot\Phi_a+\dot\Phi_a^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi_a^\dagger}-\mathcal{L}, \tag{6.128}$$

由 $\mathcal{L}^\dagger=\mathcal{L}$ 推出

$$\mathcal{H}^\dagger=\dot\Phi_a^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}^\dagger}{\partial\dot\Phi_a^\dagger}+\frac{\partial\mathcal{L}^\dagger}{\partial\dot\Phi_a}\dot\Phi_a-\mathcal{L}^\dagger=\dot\Phi_a^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi_a^\dagger}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi_a}\dot\Phi_a-\mathcal{L}=\mathcal{H}, \tag{6.129}$$

因而哈密顿量 $H=\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}$ 也是厄米的。

[2]不过，拉氏量的厄米性只是 S 矩阵幺正性的必要条件，并不是充分条件。拉氏量中能量量纲足够高的相互作用算符通常会在高能区破坏微扰论的幺正性。

容易检验，自由标量场的拉氏量 (2.79)、(2.179) 以及自由矢量场的拉氏量 (4.46)、(4.199) 都是厄米的。自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (5.103) 满足

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\dagger &= -\mathrm{i}(\partial_\mu\psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi - m(\bar\psi\psi)^\dagger = -\mathrm{i}(\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi - m\bar\psi\psi \\ &= -\mathrm{i}\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi) + \mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi = -\mathrm{i}\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi) + \mathcal{L}.\end{aligned} \tag{6.130}$$

扔掉对作用量没有贡献的全散度项 $-\mathrm{i}\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)$，则这个拉氏量也是厄米的。于是，在相互作用理论中，只要引入厄米的相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_1$，就可以保持总拉氏量的厄米性。

6.3　Wick 定理

6.3.1　正规乘积和 Wick 定理

在 6.2 节中，借助时序乘积，我们把 S 算符写成紧凑的 Dyson 级数形式 (6.126)。不过，如何适当地处理级数每一项中的时序乘积 $\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]$ 呢？在量子场论中，相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1(x)$ 是由若干个场算符构成的，因而需要处理的是多个场算符的时序乘积。这看来不是一个简单的问题，幸好接下来将要介绍的 Wick 定理提供了一种简便的处理方法。

在相互作用绘景中，实标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式 (6.49) 可以分解成两个部分：

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x). \tag{6.131}$$

其中，正能解部分为

$$\phi^{(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.132}$$

它包含正能解因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$；负能解部分为

$$\phi^{(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.133}$$

它包含负能解因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$。根据 (6.86) 式，同样可以把有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 分为正能解和负能解两部分：

$$A^\mu(x) = A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x), \tag{6.134}$$

其中，

$$A^{\mu(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.135}$$

$$A^{\mu(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.136}$$

前面提到，Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ 在相互作用绘景中的平面波展开式也具有 Heisenberg 绘景中自由场展开式 (5.216) 的形式，即

$$\psi_a(x) = \psi_a^{(+)}(x) + \psi_a^{(-)}(x), \tag{6.137}$$

其中正能解部分 $\psi_a^{(+)}(x)$ 和负能解部分 $\psi_a^{(-)}(x)$ 分别是

$$\psi_a^{(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm} u_a(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.138}$$

$$\psi_a^{(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm} v_a(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.139}$$

可以看到，各类量子场的正能解部分只包含湮灭算符，而负能解部分只包含产生算符。

引入**正规乘积** (normal product) 的概念，以 N 为记号，它的作用是将算符乘积中的所有湮灭算符移动到所有产生算符的右边，形成**正规排序** (normal order)。正规排序对于多个产生（或湮灭）算符之间谁先谁后没有规定，每一种排列都是等价的。不过，考虑到费米子算符的反对易性，移动算符的过程中如果涉及奇数次费米子算符之间的交换，就应该额外添加一个负号，这个规定与费米子产生湮灭算符的反对易性相匹配。例如，对于标量场的产生湮灭算符，有

$$\mathsf{N}(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{l}}^\dagger) = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{l}}^\dagger a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{l}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{l}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{p}}, \tag{6.140}$$

第二步按照正规乘积定义写出两个产生算符的另一种次序，第三步写出两个湮灭算符的另一种次序，而对易关系 $[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{l}}^\dagger] = [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}] = 0$ 保证这些表达式是等价的。对于旋量场的产生湮灭算符，有

$$\mathsf{N}(b_{\mathbf{p},\lambda_1}a_{\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda_3}b_{\mathbf{l},\lambda_4}^\dagger) = -a_{\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger b_{\mathbf{l},\lambda_4}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda_1}a_{\mathbf{k},\lambda_3} = b_{\mathbf{l},\lambda_4}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda_1}a_{\mathbf{k},\lambda_3} = -b_{\mathbf{l},\lambda_4}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda_3}b_{\mathbf{p},\lambda_1}. \tag{6.141}$$

第二步按照正规乘积定义写出两个产生算符的另一种次序，与第一步相差一个负号；第三步写出两个湮灭算符的另一种次序，与第二步相差一个负号；反对易关系 $\{a_{\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger, b_{\mathbf{l},\lambda_4}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p},\lambda_1}, a_{\mathbf{k},\lambda_3}\} = 0$ 保证这些表达式是等价的。

场算符的正能解部分包含湮灭算符，负能解部分包含产生算符，因而正能解在正规排序中处于负能解右边。于是，两个标量场算符的正规乘积为

$$\mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)] = \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x), \tag{6.142}$$

最后一项中 $\phi^{(+)}(x)$ 被正规排序移动到 $\phi^{(-)}(y)$ 的右边。两个旋量场算符的正规乘积为

$$\mathsf{N}[\psi_a(x)\psi_b(y)] = \psi_a^{(-)}(x)\psi_b^{(-)}(y) + \psi_a^{(-)}(x)\psi_b^{(+)}(y) + \psi_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y) - \psi_b^{(-)}(y)\psi_a^{(+)}(x), \tag{6.143}$$

最后一项中 $\psi_a^{(+)}(x)$ 被正规排序移动到 $\psi_b^{(-)}(y)$ 的右边，并出现一个负号。任意一个湮灭算符作用在真空态 $|0\rangle$ 上，得到零态矢，如 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$，相应地，$\langle 0|a_{\mathbf{p}}^\dagger = 0$。因此，对一组产生湮灭算符的任意乘积取正规排序之后，真空期待值为零：

$$\boxed{\langle 0|\,\mathsf{N}\left(\text{产生湮灭算符的乘积}\right)|0\rangle = 0.} \tag{6.144}$$

用统一的记号 $\Phi_a(x)$ 代表一般的场算符，它可以是标量场 $\phi(x)$ 或 $\phi^\dagger(x)$，也可以是矢量场 $A^\mu(x)$ 的一个分量，还可以是旋量场 $\psi_a(x)$ 或 $\bar{\psi}_a(x)$ 的一个分量。比如，$\Phi_a(x)\Phi_b(x)\Phi_c(x)$ 可以表

示 $\phi(x)\phi(x)\phi(x)$，也可以表示 $A_\mu(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(x)$。后者不是 Lorentz 不变的，但可以利用 Dirac 矩阵线性地组合出 Lorentz 不变量 $A_\mu(x)\bar{\psi}_a(x)(\gamma^\mu)_{ab}\psi_b(x) = A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$。将 $\Phi_a(x)$ 分解为正能解部分 $\Phi_a^{(+)}(x)$ 和负能解部分 $\Phi_a^{(-)}(x)$，

$$\Phi_a(x) = \Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_a^{(-)}(x), \tag{6.145}$$

则

$$\Phi_a(x)\Phi_b(y) = \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y). \tag{6.146}$$

由于正能解包含湮灭算符，负能解包含产生算符，有

$$\Phi_a^{(+)}(x)\,|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\,\Phi_a^{(-)}(x) = 0, \tag{6.147}$$

从而推出

$$\boxed{\langle 0|\,\Phi_a(x)\Phi_b(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y)\,|0\rangle\,.} \tag{6.148}$$

也就是说，只有不满足正规排序的项 $\Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y)$ 才可能对真空期待值具有非零贡献。

现在，将 $\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的正规乘积分解为

$$\mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x), \tag{6.149}$$

其中，因子 $\epsilon_{ab} = \pm 1$ 考虑了交换费米子算符所导致的符号差异。若 $\Phi_a(x)$ 和 $\Phi_b(y)$ 都是费米子算符，则 $\epsilon_{ab} = -1$；其余情况 $\epsilon_{ab} = +1$。利用 ϵ_{ab} 记号，依照两个产生（湮灭）算符的对易性或反对易性交换 (6.149) 式右边第一项（第三项）的两个场算符，得到

$$\begin{aligned}\mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \epsilon_{ab}\Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) \\ &= \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \epsilon_{ab}\Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x)],\end{aligned} \tag{6.150}$$

即

$$\boxed{\mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \epsilon_{ab}\,\mathsf{N}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)].} \tag{6.151}$$

也就是说，交换两个场算符之后，正规乘积只相差一个由交换费米子算符所导致的符号。另一方面，将 $\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积化为

$$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \Phi_a(x)\Phi_b(y)\theta(x^0 - y^0) + \epsilon_{ab}\Phi_b(y)\Phi_a(x)\theta(y^0 - x^0) \\ &= \epsilon_{ab}[\epsilon_{ab}\Phi_a(x)\Phi_b(y)\theta(x^0 - y^0) + \Phi_b(y)\Phi_a(x)\theta(y^0 - x^0)],\end{aligned} \tag{6.152}$$

因此，交换两个场算符之后，时序乘积也只相差一个由交换费米子算符所导致的符号：

$$\boxed{\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \epsilon_{ab}\,\mathsf{T}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)].} \tag{6.153}$$

下面讨论时序乘积与正规乘积之间的关系。当 $x^0 \geq y^0$ 时，$\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积为

$$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \Phi_a(x)\Phi_b(y)\\ &= \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y). \end{aligned} \tag{6.154}$$

把最后一项改写成

$$\begin{aligned}\Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) &= \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) - \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x)\\ &= \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + [\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}. \end{aligned} \tag{6.155}$$

这里 $[\cdot,\cdot]_- = [\cdot,\cdot]$ 代表对易子，$[\cdot,\cdot]_+ = \{\cdot,\cdot\}$ 代表反对易子。$\mp$ 号仅当 $\Phi_a(x)$ 和 $\Phi_b(y)$ 都是费米子算符时取正号，其余情况取负号。于是，由 (6.149) 式推出

$$\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] + [\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}. \tag{6.156}$$

注意，$[\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}$ 必定是一个 c 数，因为 $\Phi_a^{(+)}(x)$ 中湮灭算符与 $\Phi_b^{(-)}(y)$ 中产生算符的对易子或反对易子并不是算符，而是 c 数。从而，根据 (6.147) 和 (6.148) 式得到

$$\begin{aligned}[\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp} &= \langle 0|\, [\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}\, |0\rangle = \langle 0|\, \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y)\, |0\rangle = \langle 0|\, \Phi_a(x)\Phi_b(y)\, |0\rangle\\ &= \langle 0|\, \mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\, |0\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.157}$$

当 $x^0 < y^0$ 时，$\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积变成

$$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \epsilon_{ab}\Phi_b(y)\Phi_a(x)\\ &= \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(-)}(x)]\\ &= \epsilon_{ab}\{\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x)\\ &\qquad + \epsilon_{ab}\Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + [\Phi_b^{(+)}(y), \Phi_a^{(-)}(x)]_{\mp}\}\\ &= \epsilon_{ab}\,\mathsf{N}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)] + \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y), \Phi_a^{(-)}(x)]_{\mp}\\ &= \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] + \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y), \Phi_a^{(-)}(x)]_{\mp}. \end{aligned} \tag{6.158}$$

最后一步用 (6.151) 式处理第一项，而第二项可改写为

$$\begin{aligned}\epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y), \Phi_a^{(-)}(x)]_{\mp} &= \epsilon_{ab}\,\langle 0|\, [\Phi_b^{(+)}(y), \Phi_a^{(-)}(x)]_{\mp}\, |0\rangle = \epsilon_{ab}\,\langle 0|\, \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(-)}(x)\, |0\rangle\\ &= \epsilon_{ab}\,\langle 0|\, \Phi_b(y)\Phi_a(x)\, |0\rangle = \langle 0|\, \mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\, |0\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.159}$$

综合这两种情况，无论 x^0 和 y^0 孰大孰小，$\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积都可以统一地表达为

$$\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] + \langle 0|\, \mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\, |0\rangle\,. \tag{6.160}$$

引入场算符的**缩并** (contraction) 概念，将两个场算符 $\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的缩并定义为

$$\boxed{\overbracket{\Phi_a(x)\Phi_b(y)} \equiv \langle 0|\, \mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\, |0\rangle = \begin{cases} [\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}, & x^0 \geq y^0,\\ \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y), \Phi_a^{(-)}(x)]_{\mp}, & x^0 < y^0. \end{cases}} \tag{6.161}$$

上式仅当 $\Phi_a^{(+)}(x)$ 或 $\Phi_b^{(+)}(y)$ 中的湮灭算符与 $\Phi_b^{(-)}(y)$ 或 $\Phi_a^{(-)}(x)$ 中的产生算符属于同一套产生湮灭算符时才能得到非零结果，故不同类型的场算符的缩并为零，如

$$\overbracket{\phi(x)A^\mu}(y) = \overbracket{\phi(x)\psi_a}(y) = \overbracket{A^\mu(x)\psi_a}(y) = 0. \tag{6.162}$$

此外，根据 (6.153) 式，有

$$\overbracket{\Phi_a(x)\Phi_b}(y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\,|0\rangle = \epsilon_{ab}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)]\,|0\rangle = \epsilon_{ab}\overbracket{\Phi_b(y)\Phi_a}(x). \tag{6.163}$$

通过 (6.161) 式定义的缩并将两个场算符转化为 c 数，这样的 c 数不会受到正规排序 N 的影响。在正规乘积中出现缩并记号时，参与缩并的一对场算符可以不相邻，而多条缩并线可能会纠缠起来。为了使它们相邻，需要适当地交换场算符，并考虑交换费米子算符时引起的符号差异，此时纠缠的缩并线将被解开，我们约定这样得到的式子与原先的式子相等。例如，

$$\mathsf{N}(\Phi_a\overbracket{\Phi_b\overbracket{\Phi_c\Phi_d}\Phi_e}\Phi_f) = \epsilon_{cd}\epsilon_{ef}\mathsf{N}(\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_d}\overbracket{\Phi_c\Phi_f}\Phi_e) = \epsilon_{cd}\epsilon_{ef}\overbracket{\Phi_b\Phi_d}\overbracket{\Phi_c\Phi_f}\mathsf{N}(\Phi_a\Phi_e). \tag{6.164}$$

于是，(6.160) 式可改记为

$$\boxed{\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y) + \overbracket{\Phi_a(x)\Phi_b}(y)].} \tag{6.165}$$

上式表明，两个场算符的时序乘积等于它们的正规乘积加上它们的缩并。这个结论可以推广成 **Wick 定理** [28]：

> 一组场算符的**时序乘积**可以分解为它们的**正规乘积**及**所有可能缩并的正规乘积**之和，也就是说，
>
> $$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)] \;=\; &\mathsf{N}\big[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\\ &+\big(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\text{的所有可能缩并}\big)\big].\end{aligned} \tag{6.166}$$

这里的缩并指的是在保持 $\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}$ 中各个场算符位置的情况下直接添加缩并线。例如，对于四个场算符的情况，有

$$\begin{aligned}\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d) \;=\; \mathsf{N}\big(&\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d + \overbracket{\Phi_a\Phi_b}\Phi_c\Phi_d + \overbracket{\Phi_a\Phi_b\Phi_c}\Phi_d + \overbracket{\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d}\\ &+ \Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d + \Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c\Phi_d} + \Phi_a\Phi_b\overbracket{\Phi_c\Phi_d}\\ &+ \overbracket{\Phi_a\Phi_b}\overbracket{\Phi_c\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d}\big).\end{aligned} \tag{6.167}$$

根据正规乘积的性质 (6.144)，上式的真空期待值为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d)\,|0\rangle \;&=\; \langle 0|\,\mathsf{N}(\overbracket{\Phi_a\Phi_b}\overbracket{\Phi_c\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d})\,|0\rangle\\ &= \mathsf{N}(\overbracket{\Phi_a\Phi_b}\overbracket{\Phi_c\Phi_d} + \epsilon_{bc}\overbracket{\Phi_a\Phi_c}\overbracket{\Phi_b\Phi_d} + \epsilon_{cd}\epsilon_{bd}\overbracket{\Phi_a\Phi_d}\overbracket{\Phi_b\Phi_c})\\ &= \langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_b)\,|0\rangle\,\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_c\Phi_d)\,|0\rangle + \epsilon_{bc}\,\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_c)\,|0\rangle\,\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_b\Phi_d)\,|0\rangle\\ &\quad + \epsilon_{cd}\epsilon_{bd}\,\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_d)\,|0\rangle\,\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_b\Phi_c)\,|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{6.168}$$

6.3.2 选读：Wick 定理的证明

为了证明 Wick 定理，我们先证明以下引理。

引理 如果场算符 $\Phi_b(x_b)$ 的时间坐标比 n 个场算符 $\Phi_{a_1}(x_1), \Phi_{a_2}(x_2), \cdots, \Phi_{a_n}(x_n)$ 的时间坐标都小，即 $x_b^0 \leq x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$，那么，以下等式成立：

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{N}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)]\Phi_b(x_b) \\
=\ &\mathsf{N}\big[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b(x_b) + \overbracket{\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b(x_b)} \\
&+ \Phi_{a_1}(x_1)\overbracket{\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b(x_b)} + \cdots\cdots + \Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\overbracket{\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b(x_b)}\big].
\end{aligned}
\tag{6.169}
$$

如果 $\Phi_{a_1}, \Phi_{a_2}, \cdots, \Phi_{a_n}$ 中有些算符已经先彼此缩并了，也存在与 (6.169) 形式类似的等式，如

$$
\begin{aligned}
\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n})\Phi_b = \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b \\
&+ \overbracket{\Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b} + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\overbracket{\Phi_{a_3}\Phi_{a_4}}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b} \\
&+ \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\overbracket{\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b} + \cdots\cdots + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\overbracket{\Phi_{a_n}\Phi_b}\big).
\end{aligned}
\tag{6.170}
$$

证明 我们分四步来证明。

(1) 将 Φ_b 分解为正能解部分和负能解部分，$\Phi_b = \Phi_b^{(+)} + \Phi_b^{(-)}$，则可以证明正能解部分 $\Phi_b^{(+)}$ 满足

$$
\begin{aligned}
\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n})\Phi_b^{(+)} = \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)} + \overbracket{\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)}} + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)}} \\
&+ \cdots\cdots + \Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\overbracket{\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)}}\big).
\end{aligned}
\tag{6.171}
$$

由于 $x_b^0 \leq x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$，$\Phi_{a_i}(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 与 $\Phi_b^{(+)}$ 的缩并为零：

$$
\overbracket{\Phi_{a_i}(x_i)\Phi_b^{(+)}}(x_b) = \langle 0|\,\mathsf{T}\big[\Phi_{a_i}(x_i)\Phi_b^{(+)}(x_b)\big]\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi_{a_i}(x_i)\Phi_b^{(+)}(x_b)\,|0\rangle = 0.
\tag{6.172}
$$

因此，(6.171) 式右边除第一项外的其它项均为零。另一方面，(6.171) 式左边已经是正规排序，与右边第一项相等，故 (6.171) 式成立。现在，欲证明 (6.169) 式，只需证明负能解部分 $\Phi_b^{(-)}$ 满足

$$
\begin{aligned}
\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n})\Phi_b^{(-)} = \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(-)} + \overbracket{\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(-)}} + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(-)}} \\
&+ \cdots\cdots + \Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\overbracket{\Phi_{a_n}\Phi_b^{(-)}}\big).
\end{aligned}
\tag{6.173}
$$

将 $\Phi_{a_1}, \Phi_{a_2}, \cdots, \Phi_{a_n}$ 都分解为正能解部分和负能解部分，则 $\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n})$ 将包含 2^n 项，每一项是 j 个负能解部分 $(j = 0, 1, \cdots, n)$ 与 $n - j$ 个正能解部分之积

$$
\Phi_{a_1}^{(-)}\Phi_{a_2}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\Phi_{a_{j+2}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)},
\tag{6.174}
$$

其中负能解部分都处于正能解部分的左边，形成正规排序。注意，$j = 0$ 对应的项只包含正能解部分，而 $j = n$ 对应的项只包含负能解部分。

(2) 对于 $0 \le j \le n-1$，则可以证明，通项 (6.174) 中右方正能解部分之积 $\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}$ 满足

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b &= \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b + \overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\ &\quad + \Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b} + \cdots\cdots + \Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big).\end{aligned} \tag{6.175}$$

下面用数学归纳法证明 (6.175) 式。

注意到 $x^0_b \le x^0_n$，由 (6.165) 式得

$$\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b = \Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b = \mathsf{T}\big(\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b\big) = \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b + \overbracket{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big), \tag{6.176}$$

即 (6.175) 式对 $j = n-1$ 成立。

假设 (6.175) 式对 $j = k-1$ 成立，即

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b &= \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b + \overbracket{\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\ &\quad + \Phi^{(+)}_{a_k}\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b} + \cdots\cdots + \Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big),\end{aligned} \tag{6.177}$$

那么，

$$\begin{aligned}&\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b = \Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b\\ &= \Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b\big) + \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\ &\quad + \Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b} + \cdots\cdots + \Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big).\end{aligned} \tag{6.178}$$

将上式第二步的第一项化为

$$\begin{aligned}&\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b\big)\\ &= \Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\epsilon_1\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_b\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big) = \epsilon_1\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\\ &= \epsilon_1\mathsf{T}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b\big)\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n} = \epsilon_1\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b + \overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b}\big)\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\\ &= \epsilon_1\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b\big)\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n} + \epsilon_1\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\\ &= \epsilon_1\epsilon_{a_{k-1}b}\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_b\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\big)\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n} + \epsilon_1\mathsf{N}\big(\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(-)}_b}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\\ &= \epsilon_1\epsilon_{a_{k-1}b}\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_b\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big) + \mathsf{N}\big(\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big)\\ &= \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b\big) + \mathsf{N}\big(\overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big),\end{aligned} \tag{6.179}$$

其中第一步多次利用 (6.151) 式，将 $\Phi^{(-)}_b$ 从正规乘积中的最右边移动到最左边，因而出现因子

$$\epsilon_1 = \epsilon_{a_n b}\epsilon_{a_{n-1}b}\cdots\epsilon_{a_{k+1}b}\epsilon_{a_k b}. \tag{6.180}$$

第三步利用到 $x^0_b \le x^0_{k-1}$ 的条件。第四步使用了 (6.165) 式。第六至八步再多次利用 (6.151) 式。将 (6.179) 式代入 (6.178) 式，立即得到

$$\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b = \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b + \overbracket{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}$$

$$+\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}+\cdots\cdots+\Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\Phi^{(+)}_{a_k}\Phi^{(+)}_{a_{k+1}}\cdots\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\Big). \tag{6.181}$$

因此，(6.175) 式对 $j=k-2$ 也成立。归纳可知，(6.175) 式对任意 $j=0,1,\cdots,n-1$ 成立。

(3) 根据 (6.175) 式，通项 (6.174) 满足

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b\\
=\;&\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b\\
=\;&\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b+\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&\qquad+\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}+\cdots\cdots+\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big)\\
=\;&\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&\quad+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&\quad+\cdots\cdots+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big).
\end{aligned} \tag{6.182}$$

根据场算符缩并的定义 (6.161)，有

$$\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_i}(x_i)\Phi^{(-)}_b}(x_b)=\langle 0|\,\mathsf{T}\big[\Phi^{(-)}_{a_i}(x_i)\Phi^{(-)}_b(x_b)\big]\,|0\rangle=0, \tag{6.183}$$

故

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N}\big(\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}+\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&\quad+\cdots\cdots+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big)=0.
\end{aligned} \tag{6.184}$$

因此，将上式左边添加到 (6.182) 式右边，等式仍然成立，即

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\big)\Phi^{(-)}_b\\
=\;&\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b+\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&+\Phi^{(-)}_{a_1}\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}+\cdots\cdots+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\\
&+\cdots\cdots+\Phi^{(-)}_{a_1}\Phi^{(-)}_{a_2}\cdots\Phi^{(-)}_{a_j}\Phi^{(+)}_{a_{j+1}}\Phi^{(+)}_{a_{j+2}}\cdots\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n}\Phi^{(-)}_b}\big).
\end{aligned} \tag{6.185}$$

也就是说，$\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n})$ 分解后每一项都满足与 (6.173) 形式相同的等式，故 (6.173) 式成立。结合 (6.171) 式，则 (6.169) 式成立。

(4) 如果 $\Phi_{a_1},\Phi_{a_2},\cdots,\Phi_{a_n}$ 中有些算符已经先彼此缩并了，仍可按照第 (1)、(2)、(3) 步的方法进行类似的证明。因此，像 (6.170) 这样的等式也成立。引理证毕。

现在，我们利用这个引理来证明 Wick 定理。

证明 用数学归纳法证明。

当 $n=2$ 时，(6.166) 式变成

$$\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)]=\mathsf{N}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)+\overbrace{\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)}]. \tag{6.186}$$

这是成立的，因为它的形式与 (6.165) 式相同。

假设当 $n=k$ 时，(6.166) 式成立，即

$$\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_k}(x_k)] = \mathsf{N}\big[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_k}(x_k) + \big(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}\text{的所有可能缩并}\big)\big]. \tag{6.187}$$

如果 $x_{k+1}^0 \le x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0$，就可以得到

$$\begin{aligned}&\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_k}(x_k)\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1})] = \mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_k}(x_k)]\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1})\\ &= \mathsf{N}(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k})\Phi_{a_{k+1}} + \mathsf{N}\left(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}\text{的所有可能缩并}\right)\Phi_{a_{k+1}}.\end{aligned} \tag{6.188}$$

根据上述引理中的 (6.169) 式，(6.188) 式第二步第一项为

$$\begin{aligned}\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k})\Phi_{a_{k+1}} = \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}} + \Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}} + \Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}}\\ &+\cdots+\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}}\big),\end{aligned} \tag{6.189}$$

上式右边的缩并项穷尽了只有一次缩并时与 $\Phi_{a_{k+1}}$ 有关的缩并。另一方面，上述引理中有些算符已经先彼此缩并的情况可以应用到 (6.188) 式第二步的其它项上，得到的项都包含缩并，在这些项里面，只包含一次缩并的项中出现的缩并必定与 $\Phi_{a_{k+1}}$ 无关，余下的项则穷尽了 $\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_{k+1}}$ 的包含一次以上缩并的所有情况。因此，(6.188) 式已经包含了 $\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_{k+1}}$ 的所有可能缩并，故

$$\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1})] = \mathsf{N}\big[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1}) + \big(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_{k+1}}\text{的所有可能缩并}\big)\big]. \tag{6.190}$$

因此，对于 $x_{k+1}^0 \le x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0$ 的情形，当 $n=k+1$ 时 (6.166) 式也成立。结合 (6.186) 式，归纳可知，(6.166) 式对 $x_1^0 \ge x_2^0 \ge \cdots \ge x_n^0$ 成立。

当 $x_1^0 \ge x_2^0 \ge \cdots \ge x_n^0$ 这个条件不成立时，可以交换 $\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)$ 中各个算符的位置，得到符合时序的乘积

$$\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n),$$

其中时间坐标已经按降序排列，即 $x_1'^0 \ge x_2'^0 \ge \cdots \ge x_n'^0$。从而，等式

$$\mathsf{T}[\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)] = \mathsf{N}\big[\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n) + \big(\Phi'_{a_1}\Phi'_{a_2}\cdots\Phi'_{a_n}\text{的所有可能缩并}\big)\big] \tag{6.191}$$

成立。(6.153) 和 (6.151) 式表明，时序乘积与正规乘积关于算符交换的性质是相同的。因此，如果分别在时序乘积和正规乘积中通过算符交换将 $\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)$ 调回原来的形式 $\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)$，将出现一个共同的因子 $\epsilon_2=\pm1$，它由交换费米子算符所致。也就是说，可以得到

$$\mathsf{T}\left[\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)\right] = \epsilon_2\,\mathsf{T}\left[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\right] \tag{6.192}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathsf{N}\left[\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)+\left(\Phi'_{a_1}\Phi'_{a_2}\cdots\Phi'_{a_n}\text{的所有可能缩并}\right)\right]\\&\quad=\epsilon_2\,\mathsf{N}\left[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)+\left(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\text{的所有可能缩并}\right)\right].\end{aligned}\tag{6.193}$$

将以上两式分别代入 (6.191) 式的左右两边，消去 ϵ_2，我们就证明了 (6.166) 式对 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ 的任意次序成立。证毕。

6.4 Feynman 传播子

在应用 Wick 定理时，两个场算符的缩并是一种基本要素。在上一节中我们已经指出，仅当参与缩并的场算符中含有同一套产生湮灭算符时，缩并的结果才不为零。**Feynman 传播子** (propagator) [29] 就是这样的非零缩并，在本节中，我们将导出它们的显式结果。

6.4.1 实标量场的 Feynman 传播子

实标量场 $\phi(x)$ 的 **Feynman 传播子** $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 定义为

$$\boxed{D_{\mathrm{F}}(x-y)\equiv\overbracket{\phi(x)\phi(y)}=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle\,.}\tag{6.194}$$

后面的计算结果表明，$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle$ 只是 $x^\mu-y^\mu$ 的函数，因而这里将它记成 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$。

根据 (6.148) 式和展开式 (6.132)、(6.133)，当 $x^0>y^0$ 时，有

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle&=\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle=\langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)\,|0\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}^\dagger]\,|0\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned}\tag{6.195}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.122)。注意，上式中 $p^0=E_{\mathbf{p}}$，$q^0=E_{\mathbf{q}}$。当 $x^0<y^0$ 时，时间排序将改变 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的次序，有

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle&=\langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{2E_{\mathbf{p}}}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned}\tag{6.196}$$

最后一步把积分变量 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$。结合以上两式，得到

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\left[\theta(x^0-y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}+\theta(y^0-x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}\right].\tag{6.197}$$

(a) $\tau>0$ 时的积分路径　　(b) $\tau<0$ 时的积分路径

图 6.3: $f(p^0)$ 的极点和积分路径。

借助复变函数的知识，可以将上式改写成四维动量积分，为此需要用到公式

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{E_{\mathbf{p}}}\left[\theta(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}\tau}+\theta(-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}\tau}\right],} \tag{6.198}$$

它的证明如下。

证明　(6.198) 式左边的被积函数是

$$f(p^0)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]}, \tag{6.199}$$

其中 $\epsilon>0$ 是一个无穷小量，积分后要取 $\epsilon\to 0^+$ 的极限。现在将 p^0 视作复变量，在 p^0 的复平面上考虑 $f(p^0)$ 的围线积分。$f(p^0)$ 具有两个一阶极点 $p^0=\pm(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)$，它们在 p^0 复平面上的位置和一些积分路径如图 6.3 所示。路径 Γ_R 是实轴上的区间 $(-R,R)$，它在 $R\to\infty$ 的极限下变成整条实轴。

当 $\tau>0$ 时，在下半平面引入图 6.3(a) 中半径为 R 的半圆弧 $C_R^{(-)}$。它与 Γ_R 组成一条围线 $\Gamma_R+C_R^{(-)}$，方向为顺时针方向，即反方向。由于 $\tau>0$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}$ 中的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(p^0)\tau}$ 在下半平面 $(\mathrm{Im}\,p^0<0)$ 随着 R 增大而指数衰减，根据复分析的 Jordan 引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^{(-)}}\mathrm{d}p^0 f(p^0)=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^{(-)}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]}=0. \tag{6.200}$$

当 $R\to\infty$ 时，通过留数定理计算积分主值，得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{d}p^0\,f(p^0)=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R+C_R^{(-)}}\mathrm{d}p^0\,f(p^0)=-2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{p^0=E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon}f(p^0)$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{p^0=E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]} \\
&= -2\pi\mathrm{i} \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon} = -2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)\tau}}{2(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{6.201}
$$

取 $\epsilon\to 0^+$ 的极限，推出

$$
\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]} = -\frac{\pi\mathrm{i}}{E_{\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}\tau}. \tag{6.202}
$$

当 $\tau<0$ 时，在上半平面引入图 6.3(b) 中半径为 R 的半圆弧 $C_R^{(+)}$。它与 Γ_R 组成一条围线 $\Gamma_R+C_R^{(+)}$，方向为逆时针方向，即正方向。由于 $\tau<0$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}$ 中的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(p^0)\tau}$ 在上半平面 $(\mathrm{Im}\,p^0>0)$ 随着 R 增大而指数衰减，由 Jordan 引理得

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^{(+)}}\mathrm{d}p^0\,f(p^0) = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R^{(+)}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]} = 0, \tag{6.203}
$$

从而在 $R\to\infty$ 时推出

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{d}p^0\,f(p^0) &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R+C_R^{(+)}}\mathrm{d}p^0\,f(p^0) = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{p^0=-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)} f(p^0) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{p^0=-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)}\right|_{p^0=-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)} = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)\tau}}{-2(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{6.204}
$$

取 $\epsilon\to 0^+$ 的极限，得到

$$
\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)]} = -\frac{\pi\mathrm{i}}{E_{\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}\tau}. \tag{6.205}
$$

归纳 $\tau>0$ 时的 (6.202) 式和 $\tau<0$ 时的 (6.205) 式，即得 (6.198) 式，证毕。

现在改写 (6.198) 式，将里面被积函数的分母化为

$$
\begin{aligned}
[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)] &= (p^0)^2-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)^2 = (p^0)^2-E_{\mathbf{p}}^2+2\mathrm{i}\epsilon E_{\mathbf{p}}+\epsilon^2 \\
&= (p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2+2\mathrm{i}\epsilon E_{\mathbf{p}}+\epsilon^2 \simeq p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon.
\end{aligned} \tag{6.206}
$$

注意 $2\epsilon E_{\mathbf{p}}>0$ 作为无穷小量等价于 ϵ，而 ϵ 的二阶小量在最后一步中忽略掉了。再对 (6.198) 式两边同时乘以 $\mathrm{i}/(2\pi)$，推出

$$
\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\tau}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\theta(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}\tau}+\theta(-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}\tau}\right]. \tag{6.207}
$$

将 τ 替换成 x^0-y^0，得到

$$
\boxed{\theta(x^0-y^0)\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}+\theta(y^0-x^0)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}.} \tag{6.208}
$$

在这个式子和以后的讨论中，不再显明写出 $\epsilon \to 0^+$ 的极限，但需要谨记 ϵ 是大于零的无穷小量。以上做法称为 **iϵ 处理方案** (prescription)。将 (6.208) 式代入 (6.197) 式，即得

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{6.209}$$

于是，实标量场的 Feynman 传播子表达为

$$\boxed{D_{\mathrm{F}}(x-y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.} \tag{6.210}$$

注意，上式对 p^μ 的所有取值进行积分，因而 p^0 不一定等于 $E_{\mathbf{p}}$。可见，这里的四维动量 p^μ 不一定满足质壳条件 $p^2=m^2$，而满足质壳条件的 p^μ 正好对应于被积函数的极点。$D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 是 Lorentz 不变的，而且是偶函数，即

$$D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = D_{\mathrm{F}}(x-y), \tag{6.211}$$

第二步作了变量替换 $p^\mu \to -p^\mu$。因此，

$$\overbracket{\phi(y)\phi(x)} = \overbracket{\phi(x)\phi(y)}. \tag{6.212}$$

6.4.2　复标量场的 Feynman 传播子

在相互作用绘景中，复标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式仍然具有 (2.187) 的形式。将 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 分解为正能解和负能解部分，得

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad \phi^\dagger(x) = \phi^{\dagger(+)}(x) + \phi^{\dagger(-)}(x), \tag{6.213}$$

其中，

$$\phi^{(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \quad \phi^{(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.214}$$

$$\phi^{\dagger(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \quad \phi^{\dagger(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.215}$$

$(a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{p}})$ 和 $(b_{\mathbf{p}}, b^\dagger_{\mathbf{p}})$ 是两套相互独立的产生湮灭算符，根据场算符缩并的定义 (6.161)，有

$$\overbracket{\phi(x)\phi(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = 0, \quad \overbracket{\phi^\dagger(x)\phi^\dagger(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\phi^\dagger(y)]\,|0\rangle = 0. \tag{6.216}$$

复标量场的 Feynman 传播子是非平庸的缩并，定义为

$$\boxed{D_{\mathrm{F}}(x-y) \equiv \overbracket{\phi(x)\phi^\dagger(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)]\,|0\rangle\,.} \tag{6.217}$$

类似于上一小节的计算，利用产生湮灭算符的对易关系 (2.193)，得到

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle &= \langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y)\,|0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},\end{aligned} \tag{6.218}$$

以及

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi^\dagger(y)\phi(x)\,|0\rangle &= \langle 0|\,\phi^{\dagger(+)}(y)\phi^{(-)}(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y}b_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y-q\cdot x)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,[b_{\mathbf{p}},b_{\mathbf{q}}^\dagger]\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y-q\cdot x)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{6.219}$$

在以上两式中，$p^0 = E_{\mathbf{p}}$，$q^0 = E_{\mathbf{q}}$。

利用 (6.208) 式推出

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\left[\theta(x^0-y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}+\theta(y^0-x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon},\end{aligned} \tag{6.220}$$

第一步将方括号中第二项的积分变量 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$，从而把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$ 中的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ 因子变成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ 因子。将三维动量积分和 p^0 积分合成四维动量积分，得

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}.} \tag{6.221}$$

注意，上式左边的 p^0 满足 $p^0 = E_{\mathbf{p}}$，但右边的 p^0 却是积分变量。于是，复标量场的 Feynman 传播子表达为

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{F}}(x-y) &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)]\,|0\rangle \\ &= \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,\phi^\dagger(y)\phi(x)\,|0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.\end{aligned} \tag{6.222}$$

可见，复标量场与实标量场具有相同形式的 Feynman 传播子。此外，由 (6.153) 式和 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 的偶函数性质得

$$\overbracket{\phi^\dagger(x)\phi(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(y)\phi^\dagger(x)]\,|0\rangle = D_{\mathrm{F}}(y-x) = D_{\mathrm{F}}(x-y). \tag{6.223}$$

也就是说，$\overbracket{\phi^\dagger(x)\phi(y)}$ 与 $\overbracket{\phi(x)\phi^\dagger(y)}$ 相等。

6.4.3　有质量矢量场的 Feynman 传播子

有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的 **Feynman 传播子** $\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 定义为

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv \overbracket{A^\mu(x)A^\nu}(y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[A^\mu(x)A^\nu(y)]\,|0\rangle\,.} \tag{6.224}$$

根据展开式 (6.135) 和 (6.136)、产生湮灭算符的对易关系 (4.127)、极化求和关系 (4.101)，有

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(y)\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \langle 0|\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{q},\lambda')\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{q},\lambda')\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},
\end{aligned} \tag{6.225}$$

以及

$$\langle 0|\,A^\nu(y)A^\mu(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\nu\mu}+\frac{p^\nu p^\mu}{m^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{6.226}$$

从而，

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[A^\mu(x)A^\nu(y)]\,|0\rangle \\
&= \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,A^\nu(y)A^\mu(x)\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}.
\end{aligned} \tag{6.227}$$

由于最后一行大圆括号中的 $p^\mu p^\nu/m^2$ 项包含 $p^0=E_{\mathbf{p}}$，不能应用 (6.208) 式直接将结果写成

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{6.228}$$

为了得到紧凑的表达式，我们需要将 $p^\mu p^\nu/m^2$ 转换为求导运算。记 $\partial_x^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$，利用阶跃函数与 δ 函数的关系

$$\theta'(x) = \delta(x), \tag{6.229}$$

推出

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\mu\partial_x^\nu[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&= \partial_x^\mu[-\mathrm{i}p^\nu\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+g^{\nu 0}\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\mathrm{i}p^\nu\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - g^{\nu 0}\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&= -p^\mu p^\nu\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}g^{\mu 0}p^\nu\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}p^\mu g^{\nu 0}\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&\quad + g^{\mu 0}g^{\nu 0}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - p^\mu p^\nu\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}g^{\mu 0}p^\nu\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&\quad - \mathrm{i}p^\mu g^{\nu 0}\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + g^{\mu 0}g^{\nu 0}\partial_x^0\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&= -p^\mu p^\nu[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&\quad - \mathrm{i}(g^{\mu 0}p^\nu + g^{\nu 0}p^\mu)\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&\quad + g^{\mu 0}g^{\nu 0}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}],
\end{aligned}
\tag{6.230}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&= -\frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{m^2}(g^{\mu 0}p^\nu + g^{\nu 0}p^\mu)\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&\quad + \frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{m^2}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}].
\end{aligned}
\tag{6.231}
$$

由此将 $\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 分解成三个部分，

$$
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = f_1^{\mu\nu}(x,y) + f_2^{\mu\nu}(x,y) + f_3^{\mu\nu}(x,y),
\tag{6.232}
$$

它们分别是

$$
f_1^{\mu\nu}(x,y) \equiv -\left(g^{\mu\nu} + \frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}},
\tag{6.233}
$$

$$
f_2^{\mu\nu}(x,y) \equiv -\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(g^{\mu 0}p^\nu + g^{\nu 0}p^\mu)\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}},
\tag{6.234}
$$

$$
f_3^{\mu\nu}(x,y) \equiv \frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}.
\tag{6.235}
$$

根据 (6.221) 式，$f_1^{\mu\nu}(x,y)$ 化为

$$
f_1^{\mu\nu}(x,y) = -\left(g^{\mu\nu} + \frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.
\tag{6.236}
$$

$\delta(x^0-y^0)$ 只在 $x^0-y^0=0$ 处非零，该处有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)} = 1$，故

$$
f_2^{i0}(x,y) = f_2^{0i}(x,y) = -\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^i}{2E_{\mathbf{p}}}\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}] = 0.
\tag{6.237}
$$

上式中被积函数是关于 $\mathbf{p}$ 的奇函数，因而对整个三维动量空间积分为零。此外，利用 Fourier 变换公式

$$
\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}),
\tag{6.238}
$$

导出

$$
\begin{aligned}
f_2^{00}(x,y) &= -\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}]\\
&= -\frac{2\mathrm{i}}{m^2}\,\delta(x^0-y^0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\frac{2\mathrm{i}}{m^2}\,\delta^{(4)}(x-y).
\end{aligned}
\tag{6.239}
$$

结合显然的 $f_2^{ij}(x,y)=0$，得到

$$
f_2^{\mu\nu}(x,y) = -\frac{2\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y).
\tag{6.240}
$$

另一方面，根据 δ 函数的导数的定义，对任意具有连续导数的函数 $f(x)$，有

$$
\int\mathrm{d}x\,f(x)\delta'(x-a) = -f'(a) = -\int\mathrm{d}x\,f'(x)\delta(x-a),
\tag{6.241}
$$

因而对 (6.235) 式中的被积函数可作替换

$$
\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \to -\delta(x^0-y^0)\partial_x^0[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}],
\tag{6.242}
$$

故

$$
\begin{aligned}
f_3^{\mu\nu}(x,y) &= -\frac{g^{\mu0}g^{\nu0}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta(x^0-y^0)\partial_x^0[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}\\
&= -\frac{g^{\mu0}g^{\nu0}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta(x^0-y^0)[-\mathrm{i}p^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{i}p^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2m^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}] = \frac{\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y).
\end{aligned}
\tag{6.243}
$$

综合起来，有质量矢量场 Feynman 传播子的表达式为

$$
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \frac{\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y).
\tag{6.244}
$$

上式第一项是二阶 Lorentz 张量，因而是 Lorentz 协变的，但第二项是非协变的。幸好，这个非协变项在微扰论中的贡献被相互作用哈密顿量密度中非协变项 (6.92) 的贡献精确抵消（见 7.4 节），从而理论是 Lorentz 协变的。因此，在实际计算中可以只保留协变项，使用替换规则

$$
\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \to \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.}
\tag{6.245}
$$

6.4.4　无质量矢量场的 Feynman 传播子

无质量实矢量场的 Feynman 传播子依赖于规范的选择，这里我们取 Feynman 规范 ($\xi=1$)。在相互作用绘景中，无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式仍然具有 (4.228) 的形式，正能解和负能解部分由 (4.251) 和 (4.252) 式给出：

$$
A^{\mu(+)}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},
\tag{6.246}
$$

$$A^{\mu(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.247}$$

相应的 Feynman 传播子定义为

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv \overbracket{A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)]\,|0\rangle\,. \tag{6.248}$$

根据产生湮灭算符的对易关系 (4.232) 和极化矢量的完备性关系 (4.66)，得到

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(y)\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\sigma\sigma'}\langle 0|\,e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}e^{\nu}(\mathbf{q},\sigma')b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\sigma\sigma'}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\,\langle 0|\,[b_{\mathbf{p},\sigma},b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}]\,|0\rangle \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\sigma\sigma'}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu}(\mathbf{q},\sigma')g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\sum_{\sigma}g_{\sigma\sigma}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu}(\mathbf{p},\sigma) = -g^{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},
\end{aligned} \tag{6.249}$$

以及

$$\langle 0|\,A^{\nu}(y)A^{\mu}(x)\,|0\rangle = -g^{\nu\mu}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{2E_{\mathbf{p}}} = -g^{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{6.250}$$

Feynman 传播子表达为

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)]\,|0\rangle \\
&= \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,A^{\nu}(y)A^{\mu}(x)\,|0\rangle \\
&= -g^{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}.
\end{aligned} \tag{6.251}$$

当质量 $m=0$ 时，(6.221) 式化为

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{6.252}$$

于是，*Feynman* 规范下**无质量矢量场的 Feynman 传播子**为

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.} \tag{6.253}$$

6.4.5 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

现在讨论 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ 的缩并。在相互作用绘景中，$\psi_a^{(\pm)}(x)$ 的平面波展开式是 (6.138) 和 (6.139)，而 $\bar{\psi}_a(x)$ 的平面波展开式仍然具有 (5.218) 的形式，分解为正能解和负能解两个部分，有

$$\bar{\psi}_a(x) = \bar{\psi}_a^{(+)}(x) + \bar{\psi}_a^{(-)}(x), \tag{6.254}$$

其中,

$$\bar{\psi}_a^{(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm} \bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.255}$$

$$\bar{\psi}_a^{(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm} \bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.256}$$

容易看出,

$$\overbracket{\psi_a(x)\psi_b}(y) = \overbracket{\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b}(y) = 0. \tag{6.257}$$

Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ **的 Feynman 传播子** $S_{\mathrm{F},ab}(x-y)$ **定义为**

$$\boxed{S_{\mathrm{F},ab}(x-y) \equiv \overbracket{\psi_a(x)\bar{\psi}_b}(y) = \langle 0|\, \mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle\,.} \tag{6.258}$$

利用产生湮灭算符的反对易关系 (5.246) 和自旋求和关系 (5.214)，得到

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\, |0\rangle = \langle 0|\, \psi_a^{(+)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \langle 0|\, u_a(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda')\, \langle 0|\, \{a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{p},\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} (\not{p}+m)_{ab} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},
\end{aligned} \tag{6.259}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\, |0\rangle = \langle 0|\, \bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_a^{(-)}(x)\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \langle 0|\, \bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y} v_a(\mathbf{q},\lambda') b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y - q\cdot x)}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda)\, \langle 0|\, \{b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y - q\cdot x)}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda)\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} (\not{p}-m)_{ab} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}.
\end{aligned} \tag{6.260}$$

从而将 Feynman 传播子化为

$$S_{\mathrm{F},ab}(x-y) = \langle 0|\, \mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle - \theta(y^0-x^0)\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[\theta(x^0-y^0)(\gamma_\mu p^\mu+m)_{ab}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}} - \theta(y^0-x^0)(\gamma_\mu p^\mu-m)_{ab}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}\right]\Bigg|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&= (\gamma_0)_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[E_{\mathbf{p}}\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - E_{\mathbf{p}}\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&\quad + (\gamma_i)_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[p^i\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - p^i\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&\quad + m\delta_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}.
\end{aligned}
\tag{6.261}
$$

对于任意解析函数 $g(p^0)$，可将 (6.208) 式推广为

$$
\theta(x^0-y^0)\frac{g(E_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} + \theta(y^0-x^0)\frac{g(-E_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}g(p^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}, \tag{6.262}
$$

这是因为左边第一项对应于 $p^0=E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon$ 处的留数，第二项对应于 $p^0=-E_{\mathbf{p}}+\mathrm{i}\epsilon$ 处的留数。类似于 (6.221) 式，推出

$$
\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[g(E_{\mathbf{p}})\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + g(-E_{\mathbf{p}})\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}g(p^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{6.263}
$$

取 $g(p^0)=p^0$，把 (6.261) 式第一项变成

$$
(\gamma_0)_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[E_{\mathbf{p}}\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - E_{\mathbf{p}}\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\gamma_0p^0)_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{6.264}
$$

利用 (6.221) 式将 (6.261) 式后两项化成

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_i)_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[p^i\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - p^i\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&\quad + m\delta_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&= [\mathrm{i}(\gamma_i)_{ab}\partial_x^i + m\delta_{ab}]\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&= [\mathrm{i}(\gamma_i)_{ab}\partial_x^i + m\delta_{ab}]\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\gamma_ip^i+m)_{ab}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.
\end{aligned}
\tag{6.265}
$$

把这三项加起来，得到 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

$$
S_{\mathrm{F},ab}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\gamma_0p^0+\gamma_ip^i+m)_{ab}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)_{ab}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{6.266}
$$

写成旋量空间上矩阵的形式是

$$
\boxed{S_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.} \tag{6.267}
$$

根据 (5.126) 式，有

$$\not{p}\not{p} = p^2, \tag{6.268}$$

从而得到

$$(\not{p}+m)(\not{p}-m) = \not{p}\not{p} - m^2 = p^2 - m^2, \tag{6.269}$$

故

$$(\not{p}+m)(\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon) = p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon(\not{p}+m). \tag{6.270}$$

$\mathrm{i}\epsilon(\not{p}+m)$ 是一个无穷小量，因此上式右边与 $p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon$ 等价，于是 (6.267) 式也可以表示成

$$S_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{(\not{p}+m)(\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{6.271}$$

在最后的表达式中，可将 $1/(\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon)$ 理解为 $\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon$ 的逆矩阵。

6.5　散射截面和衰变宽度

在没有相互作用的理论中，S 算符就是恒等算符 $\mathbb{I}$，因而 S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|i\rangle$。对于存在相互作用的理论，6.2 节的讨论表明，$S$ 算符可以展开为 Dyson 级数 (6.126)。这个级数的 $n=0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为

$$\boxed{S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T,} \tag{6.272}$$

其中 $\mathrm{i}T$ 包含所有 $n \geq 1$ 的项。上式中的 T 称为 ***T* 算符**，用它定义 ***T* 矩阵元**

$$T_{fi} \equiv \langle f|\, T\, |i\rangle\,, \tag{6.273}$$

从而将 S 矩阵元分解为

$$S_{fi} = \langle f|i\rangle + \mathrm{i}T_{fi}. \tag{6.274}$$

上式右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用。由此可见，S 矩阵中真正描述相互作用的项是 $\mathrm{i}T_{fi}$。由于能动量守恒定律，仅当初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ 时，相互作用才有可能发生，这意味着 T 矩阵元的形式为

$$\boxed{\mathrm{i}T_{fi} = \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\, \mathrm{i}\mathcal{M}.} \tag{6.275}$$

这里四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p_i - p_f) = \delta(p_i^0 - p_f^0)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)$ 体现了能动量守恒定律。$\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元** (invariant matrix element)，或者**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数。

6.5.1 跃迁概率

在发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成

$$P_{fi} = \frac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}, \tag{6.276}$$

其中 $\langle i|i\rangle$ 和 $\langle f|f\rangle$ 分别是初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 的自我内积，除以它们使得跃迁概率具有合适的归一化。根据 δ 函数的性质 (2.57)，上式右边的分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2. \tag{6.277}$$

由 (2.59) 和 (2.68) 式，有

$$\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}), \tag{6.278}$$

可见，四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式

$$\boxed{\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p).} \tag{6.279}$$

在四维时空中，对于时空坐标的函数 $f(x)$，我们将 Fourier 变换约定为

$$\boxed{\tilde{f}(p) = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}f(x),} \tag{6.280}$$

而逆变换为

$$\boxed{f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\tilde{f}(p).} \tag{6.281}$$

由 (6.279) 得

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \int \mathrm{d}^4x = \tilde{V}\tilde{T}. \tag{6.282}$$

其中，$\tilde{V}$ 是空间积分区域的体积，$\tilde{T}$ 是时间积分范围的长度，对于全空间全时间积分，它们均趋于无穷大。于是，(6.277) 式化为

$$|T_{fi}|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2. \tag{6.283}$$

现在，讨论 2 体初态到 n 体末态的跃迁过程，即初态包含 2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 n 个粒子的末态。设初态中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$，质量分别为 $m_\mathcal{A}$ 和 $m_\mathcal{B}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{A}}a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{B}}\,|0\rangle\,, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}\,. \tag{6.284}$$

此处我们省略了产生算符的螺旋度指标(或者说，自旋指标)。$|0\rangle$ 是真空态，理论中任意湮灭算符作用到它身上都将得到零态矢。类似地，末态 $|f\rangle$ 可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n}\sqrt{2E_j}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_j}\right)|0\rangle\,,\quad E_j = p_j^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2+m_j^2}\,. \tag{6.285}$$

其中，$\mathbf{p}_j$ 和 m_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个末态粒子的动量和质量。此时，初态和末态的四维总动量分别是

$$p_i^\mu = p_{\mathcal{A}}^\mu + p_{\mathcal{B}}^\mu,\quad p_f^\mu = \sum_{j=1}^{n} p_j^\mu. \tag{6.286}$$

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个不同的量子场描述时，可以把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的张量积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}|0\rangle_{\mathcal{A}}\otimes\sqrt{2E_{\mathcal{B}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}|0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}\otimes|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}\,. \tag{6.287}$$

这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的真空态。如同 (2.157) 式，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\,|\,\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V},\quad \langle\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\,|\,\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}. \tag{6.288}$$

此处用到 (2.134) 式。于是得到[3]

$$\langle i|i\rangle = \langle\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\,|\,\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}\langle\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\,|\,\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2. \tag{6.289}$$

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子是由同一个量子场描述的全同粒子时，若 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\neq\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，则根据 (2.171) 或 (5.295) 式也能推出这个结果。如果末态不包含全同粒子，同理可得

$$\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V}). \tag{6.290}$$

从而将跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod\limits_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod\limits_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}. \tag{6.291}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于一组特定的末态四维动量 $\{p_j\}$，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{6.292}$$

此处四维 δ 函数可以分解为

$$\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big) = \delta^{(3)}\Big(\mathbf{p}_{\mathcal{A}}+\mathbf{p}_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_j\Big)\delta\Big(E_{\mathcal{A}}+E_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}E_j\Big). \tag{6.293}$$

[3]得到这个结果的另一种做法见习题 6.6。

在这样的 $2 \to n$ 散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取任意满足运动学要求的值，而能动量守恒定律对应的**运动学条件**

$$p_{\mathcal{A}}^{\mu} + p_{\mathcal{B}}^{\mu} - \sum_{j=1}^{n} p_j^{\mu} = 0 \tag{6.294}$$

已经体现在 (6.292) 式的四维 δ 函数中。为了计算总的跃迁率，我们需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分。

接下来，我们讨论如何包含末态粒子所有可能的动量取值。考察一维情况，先假定粒子局限在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，最后让 $L \to \infty$。为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件[4]

$$\varphi\left(-\frac{L}{2}\right) = \varphi\left(\frac{L}{2}\right). \tag{6.295}$$

作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(\mathrm{i}px)$，结合周期性边界条件，有

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}pL\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}pL\right), \tag{6.296}$$

故 $\exp(\mathrm{i}pL) = 1$，这意味着 $pL = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。因此，动量本征值是

$$p_k = \frac{2\pi}{L}k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{6.297}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 代表整数的集合。当 $L \to \infty$ 时，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \to \mathrm{d}p. \tag{6.298}$$

从而得到

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p, \tag{6.299}$$

即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p. \tag{6.300}$$

推广到三维情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，周期性边界条件相当于将立方体表面上任意一点视作与位于相对的面上的对应点等同。满足此条件的动量本征值为

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3), \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}, \tag{6.301}$$

这是 (6.297) 式的推广。当 $L \to \infty$ 时，我们得到

$$\sum_{k_1 k_2 k_3} \to \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p\,. \tag{6.302}$$

[4]参考曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3。

上式最左边代表对所有动量取值求和，当动量可取连续数值时，这种求和就化作最右边的动量相空间积分。将 n 个末态粒子的所有动量取值都考虑进来，要对 (6.292) 式积分，从而得到单位时间内 $2 \to n$ 散射过程的总跃迁概率

$$\begin{aligned} R &= \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 p_j\right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \tag{6.303}$$

根据 2.3.4 小节的讨论，我们知道体积元 (2.161) 是 Lorentz 不变的，因而上式中相空间体积元

$$\frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \tag{6.304}$$

也是 Lorentz 不变的，而且 (2.159) 式表明相应的动量积分正好囊括了满足质壳条件且能量为正的所有物理动量。

以上讨论只对末态不包含全同粒子的情况成立。假如末态包含全同粒子，在做完上述末态相空间积分之后，还要除以相应的**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，从而避免对全同量子态的重复计数。如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个全同粒子，则直接作相空间积分得到的结果是实际情况的 $n_k!$ 倍。考虑所有种类的粒子，末态对称性因子表达为

$$\boxed{\mathcal{S} = \prod_k n_k!\,,} \tag{6.305}$$

而跃迁概率变成

$$\boxed{R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2.} \tag{6.306}$$

6.5.2　散射截面

现在讨论**束流打靶**实验。如图 6.4 所示，固定靶 (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ 粒子组成，束流 (beam) 由 $\mathcal{B}$ 粒子组成。设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的运动速度相同，记为 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$，根据 (1.84) 式，有 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$。记束流的横截面积为 A，则 t 时间内束流的一个横截面经过的体积为 $V = A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$。再设束流中 $\mathcal{B}$ 粒子的数密度为 $n_{\mathcal{B}}$，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}V = n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$。在单位时间内穿过单位面积的 $\mathcal{B}$ 粒子数称为**流密度**，记作 $j_{\mathcal{B}}$，表达为

$$j_{\mathcal{B}} = \frac{N_{\mathcal{B}}}{At} = \frac{n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t}{At} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|. \tag{6.307}$$

考虑流密度为 $j_{\mathcal{B}}$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为

$$N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t. \tag{6.308}$$

图 6.4: 束流打靶示意图。

这里引入了物理量 σ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)。散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的相互作用性质决定。截面的常用单位是**靶** (barn)，记作 b，且

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \mathrm{GeV}^{-2}, \tag{6.309}$$

其中第二步用到 (1.10) 式。在实际应用中经常遇到带着词头的小单位，换算关系为

$$1\ \mathrm{b} = 10^9\ \mathrm{nb} = 10^{12}\ \mathrm{pb} = 10^{15}\ \mathrm{fb} = 10^{18}\ \mathrm{ab}, \tag{6.310}$$

从而

$$1\ \mathrm{GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^{-4}\ \mathrm{b} = 3.894 \times 10^8\ \mathrm{pb} = 3.894 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm}^2. \tag{6.311}$$

于是，单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_{\mathcal{A}} j_{\mathcal{B}} \sigma}{V} = \frac{N_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \sigma}{V} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|, \tag{6.312}$$

其中 $n_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{A}}/V$ 相当于 $\mathcal{A}$ 粒子在体积 V 中的数密度。

如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} = 1/\tilde{V}$，此时 $\mathcal{R}$ 可以用单位时间内的跃迁概率 R 表示为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$。根据 (6.306) 式，$2 \to n$ 散射过程的截面为

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \Big(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \Big) |\mathcal{M}|^2.
\end{aligned} \tag{6.313}$$

上式对 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系成立。我们需要把它推广到任意惯性系，从而可以处理 $\mathcal{A}$ 粒子和 $\mathcal{B}$ 粒子处于任意运动状态的情况。为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量。在 (6.313) 式最后一步中，除了第二个因子 $(4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的。在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中，$|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 粒子与 $\mathcal{A}$ 粒子之间的相对速度。一般地，**相对速度**定义为

$$\boxed{v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|,} \tag{6.314}$$

其中 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} = \mathbf{p}_{\mathcal{A}}/E_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 粒子的运动速度。然而，$E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\rm rel}$ 并不是 Lorentz 不变量。

引入 **Møller 速度**

$$\boxed{v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{(p_{\mathcal{A}}\cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}\,,} \tag{6.315}$$

则**入射流因子** $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量。现在，我们用 $v_{\text{Møl}}$ 取代 $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$，将**散射截面**定义为

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2.} \tag{6.316}$$

它是 Lorentz 不变的，而且可以论证 $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}}\sigma v_{\text{Møl}}$ 也是 Lorentz 不变的。当 $\mathcal{A}$ 粒子静止时，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$，故

$$v_{\text{Møl}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{m_{\mathcal{A}}^2E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2m_{\mathcal{B}}^2} = \frac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|, \tag{6.317}$$

此时截面定义式 (6.316) 可以恢复到 (6.313) 式。

在 (6.316) 式右边，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是动力学因素，而其它部分都属于运动学因素。在运动学因素中，对末态动量的积分具有如下形式：

$$\boxed{\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big).} \tag{6.318}$$

这个积分称为 **n 体不变相空间**。用此记号将 (6.316) 式写得简洁一些，得

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}}\int \mathrm{d}\Pi_n\,|\mathcal{M}|^2. \tag{6.319}$$

如果 (6.316) 式右边不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{6.320}$$

注意，计算微分截面 $\mathrm{d}\sigma$ 时不会对全同量子态重复计数，因而不需要考虑末态对称性因子 $\mathcal{S}$，于是截面与微分截面之间的关系为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\int \mathrm{d}\sigma. \tag{6.321}$$

如果末态不包含全同粒子，则 $\mathcal{S} = 1$。

下面进一步考察 Møller 速度 $v_{\text{Møl}}$ 的性质。设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 粒子运动方向之间的夹角为 α，则

$$\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}||\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|\cos\alpha, \quad |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}||\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|\sin\alpha, \tag{6.322}$$

故

$$(\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2=|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2\cos^2\alpha=|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2(1-\sin^2\alpha)=|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2. \tag{6.323}$$

从而推出

$$\begin{aligned}(1-\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2 &= 1-2\,\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}}+(\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2=1-2\,\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}}+|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2\\ &= 1+|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2+|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2\\ &= |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2+(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2)(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2).\end{aligned} \tag{6.324}$$

将 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的四维动量分解为时间分量和空间分量，得

$$p^\mu_{\mathcal{A}}=(E_{\mathcal{A}},\mathbf{p}_{\mathcal{A}})=E_{\mathcal{A}}(1,\mathbf{v}_{\mathcal{A}}),\quad p^\mu_{\mathcal{B}}=(E_{\mathcal{B}},\mathbf{p}_{\mathcal{B}})=E_{\mathcal{B}}(1,\mathbf{v}_{\mathcal{B}}). \tag{6.325}$$

这两个四维动量的内积为

$$p_{\mathcal{A}}\cdot p_{\mathcal{B}}=E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}-\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{p}_{\mathcal{B}}=E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}(1-\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}}). \tag{6.326}$$

由此导出

$$\begin{aligned}&(p_{\mathcal{A}}\cdot p_{\mathcal{B}})^2-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}=E^2_{\mathcal{A}}E^2_{\mathcal{B}}(1-\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}\\ =\ &E^2_{\mathcal{A}}E^2_{\mathcal{B}}(|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2)+E^2_{\mathcal{A}}E^2_{\mathcal{B}}(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2)(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2)-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}.\end{aligned} \tag{6.327}$$

上式第二项与第三项相互抵消：

$$\begin{aligned}E^2_{\mathcal{A}}E^2_{\mathcal{B}}(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2)(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2)-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}} &= (E^2_{\mathcal{A}}-|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|^2)(E^2_{\mathcal{B}}-|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|^2)-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}\\ &= m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}=0.\end{aligned} \tag{6.328}$$

因此 $(p_{\mathcal{A}}\cdot p_{\mathcal{B}})^2-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}=E^2_{\mathcal{A}}E^2_{\mathcal{B}}(|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2)$，由 Møller 速度的定义 (6.315) 得

$$v_{\text{Møl}}=\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{(p_{\mathcal{A}}\cdot p_{\mathcal{B}})^2-m^2_{\mathcal{A}}m^2_{\mathcal{B}}}=\sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}. \tag{6.329}$$

在非相对论近似下，$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|,|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|\ll 1$，那么 $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2$ 相比于 $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2$ 是高阶小量，则 $v_{\text{Møl}}\simeq|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|=v_{\text{rel}}$ 是 Newton 力学中粒子 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的相对速度。因此，可以认为 $v_{\text{Møl}}$ 是相对速度在狭义相对论中的推广。

一般地，如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{v}_{\mathcal{B}}=\mathbf{0}$，则 $v_{\text{Møl}}=v_{\text{rel}}$ 严格成立，入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{rel}}$。满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子静止。另一种情况是 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的运动方向相同或相反，后者在**对撞机** (collider) 实验中经常遇到。在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向。当 $v_{\text{Møl}}=v_{\text{rel}}$ 时，散射截面 (6.316) 化为

$$\sigma=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{6.330}$$

即

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int \mathrm{d}\Pi_n \, |\mathcal{M}|^2. \tag{6.331}$$

注意，对于极端相对论性的束流迎头对撞，$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 1$ 且 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$，故 $v_{\mathrm{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 2$，它是真空光速的 2 倍，不再是传统意义上的相对速度。

对粒子能动量的实验测量是在实验室参考系中进行的。不过，对于多个粒子组成的系统，在质量中心参考系（center-of-mass system，简称**质心系**）中描述粒子运动状态通常要比实验室系容易得多。质心系定义为使系统总动量为零的参考系。对于 $2 \to n$ 散射过程的质心系，有

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \mathbf{0}. \tag{6.332}$$

质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy) E_{CM}，满足

$$E_{\mathrm{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} E_j. \tag{6.333}$$

由 $(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 - (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 = E_{\mathrm{CM}}^2$ 可知，E_{CM} 是 Lorentz 不变量。在任意参考系中，可采用

$$E_{\mathrm{CM}} = \sqrt{(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2} = \sqrt{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} \tag{6.334}$$

来计算质心能。

根据狭义相对性原理，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式。如果某个过程能够在质心系中发生，则在其它惯性系中也能发生。因此，利用质心系可以简便地分析发生某个过程需要满足的运动学条件。在质心系中，当所有末态粒子的动量 $\mathbf{p}_j$ 都为零时，质心能最低，为 $\sum_j m_j$。所以，发生 $2 \to n$ 散射过程的**运动学条件**是

$$\boxed{E_{\mathrm{CM}} > \sum_{j=1}^{n} m_j,} \tag{6.335}$$

即质心能应当大于末态粒子质量之和。若 $E_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j$，则末态相空间体积为零，散射过程不能发生。可以认为，质心能 E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的有效能量。

6.5.3　两体散射运动学

接下来讨论 $2 \to 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子。在质心系中，有

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \tag{6.336}$$

因而

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|, \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|. \tag{6.337}$$

(a) 动量关系　　(b) 球坐标系定义

图 6.5: 质心系中 $2 \to 2$ 散射过程的运动学示意图。

可见，初态中 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$ 大小相等，方向相反，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$；末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是大小相等，方向相反。这些动量在质心系中的关系如图 6.5(a) 所示，其中 θ 是 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 之间的夹角，称为**散射角** (scattering angle)。质心能满足

$$E_{\text{CM}} = E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B} = E_1 + E_2. \tag{6.338}$$

发生这个过程的运动学条件是

$$E_{\text{CM}} > m_1 + m_2. \tag{6.339}$$

根据 (6.331) 和 (6.318) 式，$2 \to 2$ 散射截面可以写成

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\,|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \int \mathrm{d}\Pi_2\, |\mathcal{M}|^2. \tag{6.340}$$

计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - p_1 - p_2) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^2 4E_1E_2} \delta(E_{\text{CM}} - E_1 - E_2) \\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1E_2} \delta\Big(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\Big).
\end{aligned} \tag{6.341}$$

上式第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ 的三维积分，这样积分看起来没有效果，但实际上是要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因此后续计算中出现的 $\mathbf{p}_2$ 应该满足这个条件，在质心系中则体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$。应当注意，这里 E_{CM} 是由 $E_{\text{CM}} = E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B}$ 定义的。第三步建立球坐标系，如图 6.5(b) 所示，以 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 方向为极轴方向，以散射角 θ 为**极角** (polar angle)，将 $\mathbf{p}_1$ 投影在垂直于 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 的平面上以定义**方位角** (azimuthal angle) ϕ，从而将 $\mathbf{p}_1$ 动量空间的体积元分解为 $\mathrm{d}^3p_1 = |\mathbf{p}_1|^2\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \mathrm{d}\Omega$，其中立体角的微分

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi. \tag{6.342}$$

θ 的取值范围为 $[0,\pi]$，ϕ 的取值范围为 $[0,2\pi]$。现在，δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用复合 δ 函数公式 (2.62)，作出 $|\mathbf{p}_1|$ 的积分，从而要求 $|\mathbf{p}_1|$ 在后续计算中满足能量守恒条件，导致 $E_{\mathrm{CM}}=E_1+E_2$，并得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2E_1E_2}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|}\left(E_{\mathrm{CM}}-\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2}-\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_2^2}\right)\right|^{-1}\\ &= \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2E_1E_2}\left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2}}+\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_2^2}}\right)^{-1}\\ &= \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2E_1E_2}\left[|\mathbf{p}_1|\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\right]^{-1}=\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2E_1E_2}\frac{E_1E_2}{|\mathbf{p}_1|(E_1+E_2)}\\ &= \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2E_{\mathrm{CM}}}\int \mathrm{d}\Omega. \end{aligned}\tag{6.343}$$

将上式代入散射截面表达式 (6.340)，得

$$\sigma=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2E_{\mathrm{CM}}}\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2.\tag{6.344}$$

注意，$|\mathcal{M}|^2$ 是初末态四维动量的函数，这里已经将表征能动量守恒的四维 δ 函数积掉了，意味着在后续计算 $|\mathcal{M}|^2$ 时必须要求初末态动量满足能动量守恒关系 $p_{\mathcal{A}}^\mu+p_{\mathcal{B}}^\mu=p_1^\mu+p_2^\mu$。另一方面，质心系中关于立体角的微分散射截面表达为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}=\frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}}\,|\mathcal{M}|^2.\tag{6.345}$$

接下来把初末态粒子的能量和动量表达为质心能 E_{CM} 的函数。利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|$ 和质壳条件，得

$$E_{\mathrm{CM}}=E_1+E_2=E_1+\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2+m_2^2}=E_1+\sqrt{E_1^2-m_1^2+m_2^2},\tag{6.346}$$

故

$$E_1^2-m_1^2+m_2^2=(E_{\mathrm{CM}}-E_1)^2=E_{\mathrm{CM}}^2-2E_{\mathrm{CM}}E_1+E_1^2,\tag{6.347}$$

即 $2E_{\mathrm{CM}}E_1=E_{\mathrm{CM}}^2+m_1^2-m_2^2$，从而 E_1 表达为

$$E_1=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2+m_1^2-m_2^2).\tag{6.348}$$

同理，E_2 表达为

$$E_2=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2+m_2^2-m_1^2).\tag{6.349}$$

可见，质量较大的末态粒子在质心系中分得的能量较多。根据质壳条件，有

$$\begin{aligned}|\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2-m_1^2=\frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}(E_{\mathrm{CM}}^2+m_1^2-m_2^2)^2-m_1^2\\ &= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}\left[E_{\mathrm{CM}}^4+m_1^4+m_2^4+2E_{\mathrm{CM}}^2m_1^2-2E_{\mathrm{CM}}^2m_2^2-2m_1^2m_2^2-4E_{\mathrm{CM}}^2m_1^2\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}\left(E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2\right) \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2),
\end{aligned} \tag{6.350}
$$

其中

$$
\boxed{\lambda(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x-y-z)^2 - 4yz} \tag{6.351}
$$

称为 **Källén 函数**。$\lambda(x,y,z)$ 关于 x, y, z 对称，是 Gunnar Källén 在其教科书《Elementary Particle Physics》(1964) 中引入的。可见，末态粒子的动量满足

$$
|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\lambda^{1/2}(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right). \tag{6.352}
$$

于是，**质心系微分散射截面** (6.345) 式可以改写成

$$
\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2.} \tag{6.353}
$$

将类似分析应用到初态上，同理得到质心系中初态粒子能量为

$$
E_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2), \quad E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2), \tag{6.354}
$$

动量大小为

$$
|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right). \tag{6.355}
$$

下面讨论一些特殊情况。

(1) 如果散射过程关于对撞轴 ($\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 对应的直线) 具有旋转对称性，则不变振幅 $\mathcal{M}$ 与 ϕ 无关，只是 θ 的函数，从而

$$
\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2. \tag{6.356}
$$

此时散射截面为

$$
\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\int \mathrm{d}\Omega\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2. \tag{6.357}
$$

(2) 如果初态 2 个粒子的质量相同，$m_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{B}} = m_i$，末态 2 个粒子的质量也相同，$m_1 = m_2 = m_f$，则 (6.348)、(6.349) 和 (6.354) 式意味着

$$
E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{B}} = E_1 = E_2 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}, \tag{6.358}
$$

即初态两个粒子平分质心能，末态两个粒子也平分质心能。此时，如果末态 2 个粒子是全同的，那么末态对称性因子 $\mathcal{S}=2$，否则 $\mathcal{S}=1$。另一方面，由

$$\lambda(x,y,y)=x^2+2y^2-4xy-2y^2=x(x-4y) \tag{6.359}$$

得

$$\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m^2}{E_{\rm CM}^2},\frac{m^2}{E_{\rm CM}^2}\right)=\sqrt{1-\frac{4m^2}{E_{\rm CM}^2}}, \tag{6.360}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|=|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|=\frac{E_{\rm CM}\beta_i}{2},\quad |\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{E_{\rm CM}\beta_f}{2}, \tag{6.361}$$

其中

$$\beta_i\equiv\sqrt{1-\frac{4m_i^2}{E_{\rm CM}^2}}=\frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}}=\frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}},\quad \beta_f\equiv\sqrt{1-\frac{4m_f^2}{E_{\rm CM}^2}}=\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1}=\frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}. \tag{6.362}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义，β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率。从而，由 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}=-\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 得

$$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|=\left|\frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}-\frac{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}{E_{\mathcal{B}}}\right|=\frac{2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}}=2\beta_i, \tag{6.363}$$

入射流因子变成

$$E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|=\frac{E_{\rm CM}^2\beta_i}{2}. \tag{6.364}$$

于是，(6.353) 式化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{\beta_f|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{\rm CM}^2\beta_i}. \tag{6.365}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同，$m_{\mathcal{A}}=m_{\mathcal{B}}=m_1=m_2$，则 $\beta_i=\beta_f$，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{\rm CM}^2}. \tag{6.366}$$

6.5.4　衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的。**不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 自身可以通过相互作用**衰变** (decay) 成其它粒子。假设 t 时刻有 $N(t)$ 个静止的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在单位时间内发生衰变的概率是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N=-\Gamma N\mathrm{d}t$。以此求得

$$N(t)=N(0)\exp(-\Gamma t), \tag{6.367}$$

即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按指数规律下降。

于是，一个静止的 $\mathcal{A}$ 粒子在衰变之前存活的时间 t 服从指数分布，相应的归一化概率密度为

$$P(t)=\Gamma\exp(-\Gamma t)=\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tag{6.368}$$

其中

$$\boxed{\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}} \tag{6.369}$$

称为粒子的**寿命** (lifetime)。由 t 的期待值

$$\langle t\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = -\int_0^\infty t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t/\tau} = -t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = -\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\Big|_0^\infty = \tau \tag{6.370}$$

可知，寿命是粒子在静止系中存活的平均时间。在自然单位制中，Γ 具有质量的量纲，称为**衰变宽度** (decay width)，简称**宽度**。

$\mathcal{A}$ 粒子可能具有多种衰变过程。在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f。衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\boxed{\Gamma_f = \Gamma B_f,} \tag{6.371}$$

它是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中衰变过程 $i \to f$ 在单位时间内发生的概率。$\mathcal{A}$ 粒子所有衰变过程的分支比之和应该是 1，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma}\sum_f \Gamma_f = 1, \quad \Gamma = \sum_f \Gamma_f. \tag{6.372}$$

可见，总宽度 Γ 是所有分宽度之和。

我们可以通过跃迁概率计算衰变过程 $i \to f$ 的分宽度。现在，初态 $|i\rangle$ 只包含 1 个粒子 $\mathcal{A}$，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子。根据 (6.288) 式，$|i\rangle$ 的自我内积为

$$\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \tag{6.373}$$

类似于 (6.291) 式，跃迁概率是

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}\prod_{j=1}^n(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^n(2E_j\tilde{V})}. \tag{6.374}$$

对于一组特定的末态四维动量 $\{p_j\}$，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^n(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{6.375}$$

考虑末态动量的所有物理取值，类似于 (6.303) 式，单位时间内衰变过程 $i \to f$ 的发生概率为

$$R_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p_j\right)R_{\{p_j\}} = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2E_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^n \int \frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j\Big)|\mathcal{M}|^2, \tag{6.376}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是末态对称性因子。在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，而 R_f 的值就是分宽度 Γ_f，故

$$\boxed{\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2.} \tag{6.377}$$

由上式可以看出，衰变分宽度和总宽度是 Lorentz 不变的，因而寿命也是 Lorentz 不变量。

若 $\mathcal{A}$ 粒子是标量玻色子，自旋为 0，则在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中没有特殊的方向，于是，任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布。若 $\mathcal{A}$ 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向，于是，末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴；在实际情况中，初态 $\mathcal{A}$ 粒子自旋的取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率往往相同，那么，我们可以对 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布。

由于 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{\mathrm{CM}} = m_{\mathcal{A}}$。因此，类似于 (6.335) 式，发生衰变的运动学条件是

$$\boxed{m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^{n} m_j,} \tag{6.378}$$

即 $\mathcal{A}$ 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变。

6.5.5　衰变运动学

下面分别讨论两体和三体衰变的运动学。

(1) 对于两体衰变，$n = 2$。在 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系中，由于 $E_{\mathrm{CM}} = m_{\mathcal{A}}$，(6.348) 和 (6.349) 式化为

$$E_1 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2 + m_2^2 - m_1^2), \tag{6.379}$$

而 (6.352) 式化为

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right). \tag{6.380}$$

可见，末态粒子的能量和动量大小都是常数。2 体不变相空间 (6.343) 变成

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\int \mathrm{d}\Omega. \tag{6.381}$$

此处 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$，而 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角。于是，衰变过程 $i \to f$ 的分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int \mathrm{d}\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2}\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2.\end{aligned} \tag{6.382}$$

如果 $m_1 \neq m_2$，则两个末态粒子必定不是全同粒子，而 $\mathcal{S} = 1$。

(a) $\mathcal{A}$ 粒子静止系　　(b) 粒子 1 和 2 的质心系

图 6.6: 三体衰变过程的动量示意图，箭头指示三维动量的方向。

如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前面的讨论，末态粒子在动量方向上呈球对称分布。此时，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 与 θ、ϕ 无关，对立体角积分只给出一个 4π 因子，故**两体衰变分宽度**为

$$\boxed{\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right).} \tag{6.383}$$

进一步，如果末态 2 个粒子质量相同，$m_1 = m_2 = m$，则由 (6.360) 式得

$$\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}. \tag{6.384}$$

从而，分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}. \tag{6.385}$$

如果两个末态粒子是全同粒子，则 $\mathcal{S} = 2$。

(2) 对于三体衰变，$n = 3$，衰变过程 $i \to f$ 的分宽度表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int \mathrm{d}\Pi_3 \, |\mathcal{M}|^2, \tag{6.386}$$

其中 3 体不变相空间为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_1 - p_2 - p_3). \tag{6.387}$$

这里，我们只在 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系中讨论它没有自旋或者对它的自旋方向取平均的情况，如前所述，此时末态粒子在动量方向上呈球对称分布，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向无关。根据动量守恒定律，$\mathbf{0} = \mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$，即末态 3 个粒子的三维动量之和为零，因而这 3 个三维动量矢量处在同一个平面内，如图 6.6(a) 所示。对于确定的 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$，第 2 个

粒子的三维动量 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 由动量守恒定律决定。对 $\mathbf{p}_2$ 积分，可消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{\mathrm{d}^3p_1\,\mathrm{d}^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}\Omega_1\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3|\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3),\end{aligned} \tag{6.388}$$

其中 Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的立体角。

对粒子 1 的质壳条件 $|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 = E_1^2$ 两边求微分，得 $2|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1| = 2E_1\,\mathrm{d}E_1$，对粒子 3 也可以得到类似的式子，故

$$|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1| = E_1\,\mathrm{d}E_1, \quad |\mathbf{p}_3|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3| = E_3\,\mathrm{d}E_3. \tag{6.389}$$

从而

$$\int \mathrm{d}\Pi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}E_1\int \mathrm{d}E_3\int \mathrm{d}\Omega_1\int \mathrm{d}\Omega_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3). \tag{6.390}$$

这里将对 E_1 和 E_3 的积分放在外层，对 Ω_1 和 Ω_3 的积分放在内层。

将 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3$ 方向之间的夹角记为 θ_{13}，则粒子 3 的立体角微分表达为

$$\mathrm{d}\Omega_3 = \sin\theta_{13}\,\mathrm{d}\theta_{13}\,\mathrm{d}\phi_3 = -\mathrm{d}\cos\theta_{13}\,\mathrm{d}\phi_3, \tag{6.391}$$

其中 ϕ_3 是粒子 3 动量方向的方位角。对于确定的 E_1 和 E_3，$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ 和 $|\mathbf{p}_3| = \sqrt{E_3^2 - m_3^2}$ 也是确定的，而 E_2 依赖于 E_1、E_3 和 $\cos\theta_{13}$，表达为

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}\,. \tag{6.392}$$

从而，$\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)$ 的宗量依赖于 $\cos\theta_{13}$，导致对 $\cos\theta_{13}$ 的积分不是平庸的。由

$$\frac{\partial E_2}{\partial\cos\theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \tag{6.393}$$

有

$$\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}, \tag{6.394}$$

再利用 (2.62) 式，作出对 $\cos\theta_{13}$、ϕ_3、Ω_1 的积分，得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}E_1\int \mathrm{d}E_3\int \mathrm{d}\Omega_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_{13}\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}E_1\int \mathrm{d}E_3\int \mathrm{d}\Omega_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int \mathrm{d}E_1\int \mathrm{d}E_3.\end{aligned} \tag{6.395}$$

于是，分宽度 (6.386) 化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} \mathrm{d}E_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} \mathrm{d}E_3\, |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2. \tag{6.396}$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 E_1 和 E_3 的函数，而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的积分上下限。

在实践中，把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，我们可以将它们替换成更加便利的变量。引入两个 Lorentz 不变量

$$s_{12} \equiv (p_1+p_2)^2 = (p_{\mathcal{A}}-p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3, \tag{6.397}$$

$$s_{23} \equiv (p_2+p_3)^2 = (p_{\mathcal{A}}-p_1)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_1, \tag{6.398}$$

它们在不同参考系中具有相同的值。我们可以把粒子 1 和 2 组成的系统看成一个等效粒子，其四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$。由于 $p_{12}^2 = (p_1+p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 组成的系统的质心能。类似地，$\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的不变质量。s_{12} 和 s_{23} 的微分分别正比于 E_3 和 E_1 的微分，有

$$\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3, \quad \mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1. \tag{6.399}$$

于是将**三体衰变分宽度**的积分式 (6.396) 改写为

$$\boxed{\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} \mathrm{d}s_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} \mathrm{d}s_{23}\, |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2.} \tag{6.400}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数。接下来，我们讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限。这里把对 s_{23} 的积分放在内层，则 s_{23} 的积分上下限会依赖于 s_{12}。

如图 6.6(b) 所示，在粒子 1 和 2 的质心系中，$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$，质心能 $\tilde{E}_{\mathrm{CM}} = \sqrt{s_{12}}$。这里我们用波浪线标记此参考系中的物理量。根据 (6.349) 式，粒子 2 的能量为

$$\tilde{E}_2 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(s_{12} + m_2^2 - m_1^2). \tag{6.401}$$

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性和质壳条件得

$$\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1+p_2)^2 = (\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_{\mathcal{A}}-\tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_{\mathcal{A}}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\,\tilde{p}_{\mathcal{A}}\cdot\tilde{p}_3 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3 + 2\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2.
\end{aligned} \tag{6.402}$$

整理得到 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2$，两边平方，推出

$$4(\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2)\tilde{E}_3^2 = (m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2)^2$$

$$= (m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)^2 + 4\tilde{E}_3^4 + 4(m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)\tilde{E}_3^2. \tag{6.403}$$

再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2 = (m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)^2$，故粒子 3 的能量为

$$\tilde{E}_3 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2). \tag{6.404}$$

(6.401) 和 (6.404) 式右边是 Lorentz 不变的，而且，对于确定的 s_{12}，$\tilde{E}_2$ 和 $\tilde{E}_3$ 是确定的。

另一方面，由 s_{23} 的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2, \tag{6.405}$$

这里，

$$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}, \tag{6.406}$$

其中 $\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 方向之间的夹角。当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2. \tag{6.407}$$

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 - 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得最大值

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2. \tag{6.408}$$

对于确定的 s_{12}，(6.407) 和 (6.408) 式分别给出 s_{23} 的积分下限和上限。注意，$s_{23}^{\min}$ 和 $s_{23}^{\max}$ 都是 Lorentz 不变的。

在粒子 1 和 2 的质心系中，

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2. \tag{6.409}$$

可见，当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得最小值

$$s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2. \tag{6.410}$$

在 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系中，根据 (6.397) 式，当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2. \tag{6.411}$$

注意 s_{12} 的积分下限 (6.410) 和积分上限 (6.411) 也是 Lorentz 不变的。

设 $m_{\mathcal{A}} = 4m_1 = 5m_2 = 8m_3$，三体衰变运动学的积分区域如图 6.7 所示。

图 6.7: 当 $m_{\mathcal{A}} = 4m_1 = 5m_2 = 8m_3$ 时，三体衰变运动学的积分区域。

习　题

6.1 考虑 d 维时空中的作用量

$$S = \int \mathrm{d}^d x\, \mathcal{L}(x), \tag{6.412}$$

其中拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \tag{6.413}$$

是由实标量场 $\phi(x)$、实矢量场 $A^\mu(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构成的。在自然单位制下，依然有 $[S] = [E]^0$ 和 $[x^\mu] = [E]^{-1}$，据此分析 $\mathcal{L}$、ϕ、A^μ 和 ψ 的量纲。

6.2 根据有质量实矢量场的平面波展开式 (4.109)，证明

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = 0, \quad (x-y)^2 < 0. \tag{6.414}$$

6.3 证明级数 (6.106) 中 $n = 3$ 的项

$$I \equiv \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_3\, H_1(t_1) H_1(t_2) H_1(t_3) \tag{6.415}$$

满足

$$3!\, I = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_3\, \mathsf{T}[H_1(t_1) H_1(t_2) H_1(t_3)]. \tag{6.416}$$

6.4 对于 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和实矢量场 $A^\mu(x)$，根据 Wick 定理写出

$$\mathsf{T}[A^\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x) A^\nu(y)\bar{\psi}(y)\gamma_\nu \psi(y)] \tag{6.417}$$

的正规乘积表达式，只需包含非零缩并。

6.5 对于拉氏量 (4.289) 描述的有质量复矢量场 $A^\mu(x)$，推出 Feynman 传播子

$$\overbrace{A^\mu(x)A^{\nu\dagger}}(y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[A^\mu(x)A^{\nu\dagger}(y)]\,|0\rangle \tag{6.418}$$

的表达式

$$\overbrace{A^\mu(x)A^{\nu\dagger}}(y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \frac{\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y). \tag{6.419}$$

6.6 设 $(a_\mathbf{p}, a_\mathbf{p}^\dagger)$ 和 $(b_\mathbf{p}, b_\mathbf{p}^\dagger)$ 是两套相互独立的玻色子产生湮灭算符，$(c_{\mathbf{p},\lambda}, c_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 和 $(d_{\mathbf{p},\lambda}, d_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 是两套相互独立的费米子产生湮灭算符，其中 $\lambda = \pm$ 是螺旋度。它们满足下列对易或反对易关系：

$$\begin{aligned}
&[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{q}^\dagger] = [b_\mathbf{p}, b_\mathbf{q}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\\
&\{c_{\mathbf{p},\lambda}, c_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = \{d_{\mathbf{p},\lambda}, d_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\\
&[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{q}] = [b_\mathbf{p}, b_\mathbf{q}] = \{c_{\mathbf{p},\lambda}, c_{\mathbf{q},\lambda'}\} = \{d_{\mathbf{p},\lambda}, d_{\mathbf{q},\lambda'}\} = 0,\\
&[a_\mathbf{p}, b_\mathbf{q}] = [a_\mathbf{p}, c_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_\mathbf{p}, d_{\mathbf{q},\lambda'}] = [b_\mathbf{p}, c_{\mathbf{q},\lambda'}] = [b_\mathbf{p}, d_{\mathbf{q},\lambda'}] = \{c_{\mathbf{p},\lambda}, d_{\mathbf{q},\lambda'}\} = 0,\\
&[a_\mathbf{p}, b_\mathbf{q}^\dagger] = [a_\mathbf{p}, c_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = [a_\mathbf{p}, d_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = [b_\mathbf{p}, c_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = [b_\mathbf{p}, d_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = \{c_{\mathbf{p},\lambda}, d_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} = 0.
\end{aligned} \tag{6.420}$$

真空态 $|0\rangle$ 满足

$$a_\mathbf{p}\,|0\rangle = b_\mathbf{p}\,|0\rangle = c_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = d_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \tag{6.421}$$

引入三个初态

$$|i_1\rangle = \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}\,a_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{q}^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |i_2\rangle = \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}\,c_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger d_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |i_3\rangle = \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}\,a_\mathbf{p}^\dagger c_{\mathbf{q},\lambda}^\dagger\,|0\rangle\,, \tag{6.422}$$

证明

$$\langle i_1|i_1\rangle = \langle i_2|i_2\rangle = \langle i_3|i_3\rangle = 4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}\tilde{V}^2, \tag{6.423}$$

其中 $\tilde{V} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})$。

6.7 在质心系中考虑 $2 \to n$ 散射过程，将入射流因子表达为

$$E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \frac{E_\mathrm{CM}^2}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_\mathcal{A}^2}{E_\mathrm{CM}^2}, \frac{m_\mathcal{B}^2}{E_\mathrm{CM}^2}\right). \tag{6.424}$$

6.8 一个粒子的质量为 m，四维动量为 $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$。将 z 轴方向视作纵向，则快度

$$\xi = \tanh^{-1}\frac{p_z}{E} \tag{6.425}$$

对应于沿纵向的 Lorentz 增速变换。定义**赝快度** (pseudorapidity)

$$\eta \equiv -\ln\tan\frac{\theta}{2}, \tag{6.426}$$

其中 θ 是动量 $\mathbf{p}$ 与 z 轴之间的夹角，如图 6.8 所示。横向动量表达为 $\mathbf{p}_\mathrm{T} = (p_x, p_y, 0)$，定义**横向能量**

$$E_\mathrm{T} \equiv \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} = \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2}\,. \tag{6.427}$$

图 6.8: 纵向和横向动量示意图。

(a) 证明 $\eta = \xi$ 对 $m = 0$ 成立。

(b) 证明

$$E = E_{\mathrm{T}} \cosh \xi, \quad p_z = E_{\mathrm{T}} \sinh \xi. \tag{6.428}$$

(c) 证明

$$\xi = \ln \frac{E + p_z}{E_{\mathrm{T}}}, \tag{6.429}$$

且

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z}. \tag{6.430}$$

(d) 假设这个粒子衰变为粒子 1 和粒子 2，证明

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2[E_{1\mathrm{T}} E_{2\mathrm{T}} \cosh(\xi_1 - \xi_2) - \mathbf{p}_{1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p}_{2\mathrm{T}}]}, \tag{6.431}$$

其中 m_i、$E_{i\mathrm{T}}$、$\mathbf{p}_{i\mathrm{T}}$ 和 ξ_i 分别是粒子 i 的质量、横向能量、横向动量和快度。

第 7 章　Feynman 图

上一章告诉我们，为了预言像散射截面和衰变宽度这样的实验观测量，需要从理论上计算不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$。因此，根据 (6.275) 式，我们需要计算 T 矩阵元 $\mathrm{i}T_{fi} = \langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$。对于 T 矩阵元所涉及的场算符的时序乘积，Wick 定理提供了处理方法。在本章中我们将看到，对微扰论某一阶应用 Wick 定理，能够得到散射振幅的表达式，而且相应的相互作用过程可以用 Feynman 图 (diagram) 表示出来。Feynman 图上的元素具有对应的表达式，这种对应就是 Feynman 规则 (rule)。

将一个相互作用理论的 Feynman 图元素和 Feynman 规则归纳出来之后，我们就可以绕开应用 Wick 定理时出现的繁琐计算，直接画出特定相互作用过程的 Feynman 图，并依照 Feynman 规则写出散射振幅表达式，大大地简化计算过程。

7.1　Yukawa 理论

接下来以实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Yukawa 理论为例进行讨论，相应的拉氏量是 (6.6) 式。在这个理论中，根据 (6.12) 式，相互作用拉氏量 (6.9) 的相反数就是相互作用哈密顿量密度

$$\mathcal{H}_1(x) = -\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}(x) = \kappa\,\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{7.1}$$

由 (6.126) 和 (6.272) 式，有

$$S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]. \tag{7.2}$$

作为 S 算符的相互作用部分，T 算符表达为

$$\mathrm{i}T = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}T^{(n)}, \tag{7.3}$$

其中

$$\boxed{\mathrm{i}T^{(n)} \equiv \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)].} \tag{7.4}$$

这是 $\mathrm{i}T$ 在微扰论中的级数展开式，n 是展开式的阶 (order)。将 (7.1) 式代入 (7.4) 式，即得 Yukawa 理论中通项 $\mathrm{i}T^{(n)}$ 的表达式

$$\mathrm{i}T^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\phi(x_1)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\cdots\phi(x_n)\bar{\psi}(x_n)\psi(x_n)]. \tag{7.5}$$

在第 n 阶，$\mathrm{i}T^{(n)}$ 包含一个 $(-\mathrm{i}\kappa)^n$ 因子。当耦合常数 κ 比较小时，计算相互作用过程最低阶的贡献就能得到比较精确的结果。

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 1 阶，即 κ^1 阶，根据 Wick 定理 (6.166)，有

$$\mathrm{i}T^{(1)} = -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{T}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] = -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) + \phi(x)\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi}(x)]. \tag{7.6}$$

此处，非平庸的场缩并只有一项，这是因为实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 具有不相关的产生湮灭算符，故

$$\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}}(x) = \overbracket{\phi(x)\psi}(x) = 0. \tag{7.7}$$

(6.144) 式表明，对产生湮灭算符的乘积取正规排序之后，真空期待值为零。因此，为了得到非零的 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$，初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 应当包含适当类型和数量的产生湮灭算符，使它们刚好能够与场算符一一发生缩并 (定义见下)。

引入三种具有确定动量和螺旋度的单粒子态，

$$\text{旋量场 } \psi(x) \text{ 的正费米子态 } \left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{7.8}$$

$$\text{旋量场 } \psi(x) \text{ 的反费米子态 } \left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{7.9}$$

$$\text{标量场 } \phi(x) \text{ 的玻色子态 } |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,c^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle. \tag{7.10}$$

为避免混淆，此处将 $\phi(x)$ 的产生算符改记为 $c^\dagger_{\mathbf{p}}$。对于正反粒子不同的情况，我们在动量的右上角用正号代表正粒子态，负号代表反粒子态。这些右矢可以单独作为 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 中的初态 $|i\rangle$，相应的左矢可以单独作为末态 $\langle f|$。对真空态 $|0\rangle$ 作用多个产生算符，就得到包含多个粒子的初态。比如，

$$\left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle = \sqrt{8E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{k}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}c^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle \tag{7.11}$$

描述的初态包含 1 个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 Dirac 正费米子 ψ，1 个动量为 $\mathbf{q}$、螺旋度为 λ' 的 Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$，以及 1 个动量为 $\mathbf{k}$ 的实标量玻色子 ϕ。这里，我们用 ψ、$\bar{\psi}$ 和 ϕ 分别作为正费米子、反费米子和实标量玻色子的名称，其符号与场的符号相同，但意义不同。另一方面，

$$\left\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right| = \sqrt{8E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{k}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{q},\lambda'}c_{\mathbf{k}} \tag{7.12}$$

描述相应的末态。注意，在上面两个式子中，特意让态矢符号中的动量排列次序与相应产生湮灭算符的排列次序相同，使得下文在表示场算符与初末态缩并方面比较方便。这是我们在本章中采取的特殊约定，它导致左矢的记法与通常定义有所不同，后者给出 $\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}| = \sqrt{8E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{k}}}\,\langle 0|\,c_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}$。由于两个费米子湮灭算符的反对易性，这两种记法之间实际上相差一个负号，但在振幅模方上不会造成差别。

现在，利用 Dirac 旋量场和实标量场的正负能解展开式 (6.138)、(6.139)、(6.255)、(6.256)、(6.132) 和 (6.133)，讨论场算符与初末态的**非零缩并**，并要求这种缩并将算符转化为 c 数。场算符的正能解部分包含湮灭算符，将它作用在具有相应产生算符的初态上可以给出非零的 c 数，我们将这种作用定义为场算符与初态粒子的缩并。从而，$\psi(x)$ 与正费米子初态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\psi_a(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle} \equiv \psi_a^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle \\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}u_a(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle \\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}u_a(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\{a_{\mathbf{q},\lambda'},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\}\,|0\rangle \\
=&\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}u_a(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = u_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

第四步用到产生湮灭算符的反对易关系 (5.246)。类似地，$\bar\psi(x)$ 与反费米子初态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\bar\psi_a(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle} \equiv \bar\psi_a^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}\bar v_a(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle \\
&= \bar v_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

此外，$\phi(x)$ 与实标量玻色子初态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\phi(x)\,|\mathbf{p}\rangle} \equiv \phi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,c_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,c^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle \\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}[c_{\mathbf{q}},c^\dagger_{\mathbf{p}}]\,|0\rangle = \int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.122)。这三种缩并均包含正能解因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$。

另一方面，场算符的负能解部分包含产生算符，将它作用在具有相应湮灭算符的末态上可以得到非零的 c 数，我们将这种作用定义为场算符与末态粒子的缩并。$\bar\psi(x)$ 与正费米子末态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\langle\mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar\psi_a(x)} \equiv \langle\mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar\psi_a^{(-)}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\langle 0|\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}\bar u_a(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}\bar u_a(\mathbf{q},\lambda')\,\langle 0|\,\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0|\,\bar u_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

$\psi(x)$ 与反费米子末态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\langle\mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi_a(x)} \equiv \langle\mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi_a^{(-)}(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\langle 0|\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b_{\mathbf{p},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}v_a(\mathbf{q},\lambda')b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&= \langle 0|\,v_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

$\phi(x)$ 与实标量玻色子末态的缩并定义为

$$\langle\mathbf{p}|\,\phi(x) \equiv \langle\mathbf{p}|\,\phi^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\langle 0|\,\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,c_{\mathbf{p}}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,c_{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\langle 0|\,[c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \int \mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\langle 0|\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \langle 0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{7.18}$$

这三种缩并均包含负能解因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$。

进一步，可以用多个正能解场算符与初态中的多个粒子缩并，如

$$\phi^{(+)}(x)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x)\,\left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle = \phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\,\left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\bar{v}_a(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}u_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,. \tag{7.19}$$

第一步中三个正能解场算符的排列次序保证第二步中场算符与初态粒子由内至外依次进行缩并。从最内层开始，缩并掉一个场算符和相应的产生算符之后，得到的 c 数可以跟剩下的场算符交换位置，使得进一步的缩并能够由内至外依次给出结果。类似地，可以用多个负能解场算符与末态中的多个粒子缩并，如

$$\left\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\,\phi^{(-)}(x)\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x) = \left\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\,\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)$$
$$= \langle 0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}v_a(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{7.20}$$

由于前文已约定态矢符号中的多个动量与相应产生湮灭算符的排列次序相同，这里第一步中三个负能解场算符的排列次序也保证了第二步中场算符与末态粒子由内至外依次进行缩并，从而依次给出缩并结果。

7.1.1　κ^1 阶 Feynman 图

根据 (7.6) 式，将 $\mathrm{i}T^{(1)}$ 分为两项，$\mathrm{i}T^{(1)} = \mathrm{i}T_1^{(1)} + \mathrm{i}T_2^{(1)}$，其中

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} \equiv -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)], \tag{7.21}$$
$$\mathrm{i}T_2^{(1)} \equiv -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]. \tag{7.22}$$

我们先来讨论 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$。要得到非平庸的 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|i\rangle$，初态和末态中需要包含 3 个粒子，可列出 8 种情况。

在第 1 种情况中，考虑初态包含 1 对正反费米子和 1 个实标量玻色子，$|i\rangle = \left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle$，末态是真空态，$\langle f| = \langle 0|$，相应的 T 矩阵元为

$$\langle 0|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,\left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle = -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,\left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle$$
$$= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x)\,\left|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right\rangle$$

图 7.1: $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 8 种三外线 Feynman 图。时间方向自左向右。

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)]\, |\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda';\, \mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\bar{v}_a(\mathbf{q}, \lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}u_a(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\, |0\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q+k)\cdot x}\, \langle 0|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q+k). \qquad (7.23)
\end{aligned}
$$

第二步将场算符分解为正能解和负能解部分，本来应该有 8 项，但只有包含三个正能解场算符的那一项具有非零贡献。第三步用到场算符与初态缩并的定义，并平庸地改写为正规乘积。最后一步用到 $\langle 0|0\rangle = 1$ 以及 Fourier 变换公式 (6.279)，对 x 积分，得出一个体现初末态能动量守恒的四维 δ 函数。此处，对时空坐标积分意味着将所有时空点的贡献叠加起来。这个结果符合 (6.275) 式的形式，可见，相应的不变振幅为

$$
\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda). \qquad (7.24)
$$

图 7.1(a) 用图形表示这个过程，时间方向自左向右。这种图形化表示称为 **Feynman 图**。在 Feynman 图中，我们用**虚线**表示实标量玻色子的运动，**带箭头的实线**表示 Dirac 费米子的运动。图上用箭头标明三个粒子的四维动量 p^μ、q^μ 和 k^μ 的方向；这只是示意性的，不用精确对应于三维空间中三维动量的实际方向；此外，可以认为这些四维动量的相反数 $-p^\mu$、$-q^\mu$ 和 $-k^\mu$ 的方向与图上方向相反。

费米子线上的**箭头**代表费米子线的方向，可以认为它是 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 所携带的某种 U(1) 荷 q_ψ 流动的方向，或者说**费米子数** (fermion number) 流动的方向。正费米子 ψ 和反费米子 $\bar{\psi}$ 携带的 U(1) 荷分别是 q_ψ 和 $-q_\psi$，因此，正费米子的动量方向与费米子线方向相同，反费

米子则相反。图 7.1(a) 中的正费米子线与反费米子线连接在一起，形成一条连续的具有确定方向的费米子线，这种情况称为**费米子数守恒**。在费米子数守恒的理论中，一条连续费米子线只能有一个方向，它与正费米子的运动方向相同，而与反费米子的运动方向相反。

实标量场 $\phi(x)$ 描述的玻色子是自身的反粒子，不具有任何 U(1) 荷，因而不需要在线上标注箭头。可见，纯中性粒子的线上没有箭头。反过来，凡是正反粒子不同的情况（对应于复场），都应当在粒子线上标注箭头。三条粒子线在一点处相交就代表相互作用的发生，该点称为**顶点** (vertex)。在顶点附近注明相应的时空坐标，该坐标对应于 $\mathrm{i}T$ 展开式中被积分的时空点。从顶点到初末态粒子的连线称为**外线** (external line)，也称为外腿 (external leg)。图 7.1(a) 包含 1 个顶点和 3 条外线，并在每条外线附近标注粒子名、四维动量和螺旋度，在顶点附近标注相应的时空坐标 x^μ。

可以看到，Feynman 图清晰地体现了运动情况和相互作用过程。进一步，还可以让 Feynman 图的每个部分对应于一个代数表达式，将这些表达式拼接起来，就得到 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 的表达式。这样的对应关系形成一套 **Feynman 规则**。以图 7.1(a) 为例，根据 (7.23) 式，三条外线分别对应于场算符 $\phi(x)$、$\bar{\psi}(x)$、$\psi(x)$ 与初态的缩并，从而可以归纳出如下**位置空间**中的**入射外线 Feynman 规则**：

ψ, λ

$$= \langle 0|\,\overbrace{\psi(x)\,|\mathbf{p}^+}, \lambda\rangle = \langle 0|\,\psi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.25}$$

$\bar{\psi}, \lambda$

$$= \langle 0|\,\overbrace{\bar{\psi}(x)\,|\mathbf{p}^-}, \lambda\rangle = \langle 0|\,\bar{\psi}^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.26}$$

ϕ

$$= \langle 0|\,\overbrace{\phi(x)\,|\mathbf{p}}\rangle = \langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{7.27}$$

由于正费米子动量方向与线上方向相同，我们在 (7.25) 式的图形中省略了标明动量方向的箭头。在 (7.26) 式的图形中，反费米子动量方向与线上方向相反，因而需要将两个箭头都标示出来。也就是说，**如果没有标明动量的方向，则它与粒子线上的方向相同**。这里的 Feynman 规则依赖于位置坐标 x^μ，因而称为**位置空间 Feynman 规则**。

从 Feynman 图 7.1(a) 和 (7.23) 式还可以看出，**位置空间**中 Yukawa 相互作用的**顶点 Feynman 规则**为

$$= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\,. \tag{7.28}$$

注意，上图中从顶点引出来的三条线不是外线，而是三个“线头”，用于连接相应类型的外线或下文引入的内线。Yukawa 相互作用项 $\mathcal{L}_\mathrm{Y} = -\kappa\,\phi\bar{\psi}\psi$ 中的三个场算符分别对应于顶点上的三个线头，$\phi(x)$ 对应于虚线头，$\psi(x)$ 对应于指向顶点的实线头，$\bar{\psi}(x)$ 对应于背向顶点的实线头。两个实线头通过顶点连接成一条具有确定方向的连续费米子线，这表明此处讨论的 Yukawa 理论

是一个费米子数守恒的理论。一般地，如果拉氏量中的一个相互作用项包括 n 个场算符，就会从相应顶点处引出 n 个线头。

现在，我们可以绕过关于场算符的缩并运算，直接从图 7.1(a) 出发，根据 Feynman 规则写出 T 矩阵元

$$\langle 0|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\rangle = -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q+k)\cdot x}. \tag{7.29}$$

在写下费米子的贡献时，应当注意次序，要逆着费米子线上的方向逐项写出来，这样得到的是数 $\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda)$，而非矩阵 $u(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')$。

在第 2 种情况中，考虑初态是真空态，$|i\rangle = |0\rangle$，末态包含 1 对正反费米子和 1 个实标量玻色子，$\langle f| = \langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|$，相应的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|0\rangle &= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|\,\phi^{(-)}(x)\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)]\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}v_a(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q+k)\cdot x} \\
&= +\mathrm{i}\kappa\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q+k) \\
&= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,|0\rangle\,,
\end{aligned} \tag{7.30}$$

其 Feynman 图如图 7.1(e) 所示。由此可以归纳出如下位置空间中的出射外线 **Feynman 规则**：

$$\psi,\lambda = \langle\mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar{\psi}(x)\,|0\rangle = \langle\mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar{\psi}^{(-)}(x)\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.31}$$

$$\bar{\psi},\lambda = \langle\mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi(x)\,|0\rangle = \langle\mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi^{(-)}(x)\,|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.32}$$

$$\phi = \langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle = \langle\mathbf{p}|\,\phi^{(-)}(x)\,|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{7.33}$$

初末态粒子满足质壳条件 (1.79)，而且能量为正，属于在壳 (on-shell) 粒子。入射外线联系着初态粒子，出射外线联系着末态粒子，因而外线上的动量总是在壳的。

在 (7.30) 式的第二步中，为了让各个场算符由内至外依次对末态中相应的粒子进行缩并，我们在正规乘积中交换了两个费米子算符的位置，因而带来一个额外的负号，使最前面的符号从负号变为正号，这样的符号一直保留到倒数第二步的表达式中。不过，不应该认为这改变了顶点 Feynman 规则。应当认为顶点规则 (7.28) 仍然适用，只是在应用时需要考虑交换两个费米子

算符带来的额外负号。T 矩阵元是概率振幅，计算观测量时使用的是它的模方，因而额外的负号对观测量没有影响。然而，在下文中我们会看到，如果一个过程存在多个概率振幅，则振幅之间的**相对符号**会影响观测量。

在 (7.30) 式最后一步里面，我们调换第三步正规乘积中两个费米子算符的次序，使其回到相互作用拉氏量中的次序，从而将最前面的符号改回来，但代表场算符缩并的线会纠缠起来。经过这样的处理，我们可以看出第一步与最后一步之间的联系：

> 非平庸的 T 矩阵元等于将**场算符与初末态粒子一一缩并**之后的结果，而且，当场算符次序**保持**相互作用拉氏量中的**次序**时，**不会出现额外的负号**。

这就是 **T 矩阵元的缩并规律**。熟悉这个规律之后，我们可以在第一步结果上添加缩并线，直接写出最后一步，再调换场算符将纠缠的缩并线解开，使各个场算符由内至外依次与初末态中相应粒子缩并，得到第三步，从而跳过用正负能解表达的第二步。这个规律是普遍的，后面的计算会不断地验证它，并且，我们将利用它确定多个振幅之间的相对符号。

剩下的 6 种情况对应于 Feynman 图 7.1(b)、7.1(c)、7.1(d)、7.1(f)、7.1(g)、7.1(h)，相应的 T 矩阵元如下。

图 7.1(b)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, | \mathbf{k} \rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, | \mathbf{k} \rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x) \, | \mathbf{k} \rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)] \, | \mathbf{k} \rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, v_a(\mathbf{q}, \lambda')\bar{u}_a(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-p-q)\cdot x} = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-p-q)\cdot x} \\
&= +\mathrm{i}\kappa \, \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda') \, (2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, | \mathbf{k} \rangle \, .
\end{aligned}
\tag{7.34}
$$

图 7.1(c)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}^+, \lambda';\, \mathbf{k} | \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda';\, \mathbf{k} | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda';\, \mathbf{k} | \, \phi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x) \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda';\, \mathbf{k} | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa \, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda) \, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).
\end{aligned}
\tag{7.35}
$$

图 7.1(d)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}^-, \lambda'; \mathbf{k}| \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^-, \lambda'; \mathbf{k}| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)] \, |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^-, \lambda'; \mathbf{k}| \, \phi^{(-)}(x)\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(+)}(x) \, |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^-, \lambda'; \mathbf{k}| \, \mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)] \, |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, v_a(\mathbf{q}, \lambda')\bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&= +\mathrm{i}\kappa \, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda') \, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^-, \lambda'; \mathbf{k}| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle \, .
\end{aligned}
\tag{7.36}
$$

图 7.1(f)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}| \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda'\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{k}| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda'\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{k}| \, \phi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(+)}(x) \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda'\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{k}| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda'\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q-k)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa \, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda) \, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-k).
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

图 7.1(g)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}^+, \lambda'| \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda'| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda'| \, \bar{\psi}_a^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x) \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda'| \, \mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\psi_a(x)] \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k-q)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa \, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda) \, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-q) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+, \lambda'| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, |\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{k}\rangle \, .
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

图 7.1(h)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}^-, \lambda'| \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, |\mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^-, \lambda'| \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, |\mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{k}\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^-, \lambda'| \, \psi_a^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x)\bar{\psi}_a^{(+)}(x) \, |\mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{k}\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathsf{N}[\psi_a(x)\phi(x)\bar{\psi}_a(x)] \, | \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{k} \rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, v_a(\mathbf{q}, \lambda')\bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k-q)\cdot x} = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k-q)\cdot x} \\
&= +\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda')\, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-q) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \, | \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{k} \rangle \,. \qquad (7.39)
\end{aligned}
$$

可以验证，对于这 6 种情况，我们也能够从 Feynman 图出发，根据 Feynman 规则把 T 矩阵元写出来。注意，顶点规则只有一种形式，即 (7.28) 式；不需要为顶点规则指定时间方向，它适用于各种不同的时间方向和动量方向。容易看出，图 7.1(a)、7.1(b)、7.1(c) 和 7.1(d) 分别与图 7.1(e)、7.1(f)、7.1(g) 和 7.1(h) 互为**正逆过程**。一对正逆过程中的初态粒子和末态粒子恰好相互交换。

接下来，我们讨论 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$，即 (7.22) 式。它包含两个场算符之间的缩并，也就是 6.4 节讨论的 Feynman 传播子。为了使用 Feynman 图，我们需要为 Feynman 传播子设置 Feynman 规则。在**位置空间**中，Dirac 旋量场和实标量场 **Feynman 传播子的 Feynman 规则**分别为

$$
= \overbracket{\psi(y)\bar{\psi}}(x) = S_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}, \qquad (7.40)
$$

$$
= \overbracket{\phi(y)\phi}(x) = D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \qquad (7.41)
$$

这里用到 Feynman 传播子表达式 (6.267) 和 (6.210)，而 m_ψ 和 m_ϕ 分别是 ψ 粒子和 ϕ 粒子的质量。在位置空间中，Feynman 传播子是粒子从 x 处顶点传播到 y 处顶点的振幅，我们用一条连接两个顶点的粒子线表示，这样的线称为**内线** (internal line)。如前，Dirac 费米子的 Feynman 传播子用带箭头的实线表示，动量方向与线上箭头方向一致；标量玻色子的 Feynman 传播子用虚线表示，动量方向另外标明。在内线规则的表达式中，需要对四维动量 p^μ 的所有取值积分，因此，内线动量可以是在壳的，但更一般的情况是**离壳** (off-shell) 的，即不满足质壳条件 (1.79)，而且 p^0 也不一定是正数。用内线表示的粒子称为**虚粒子** (virtual particle)，它描述场在两个时空点之间的传播行为。虚粒子可以是在壳粒子，也可以是离壳粒子。反过来，用外线表示的粒子称为**实粒子** (real particle)，它一定是在壳粒子。

$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 中剩下一个标量场 $\phi(x)$ 未参与缩并，我们可以让它与初态或末态缩并。考虑初态包含 1 个实标量玻色子，$|i\rangle = |\mathbf{k}\rangle$，末态是真空态，$\langle f| = \langle 0|$，相应的 T 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\, \mathrm{i}T_2^{(1)}\, |\mathbf{k}\rangle &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\, \mathsf{N}[\phi(x)\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi}(x)]\, |\mathbf{k}\rangle = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\, \overbracket{\bar{\psi}_a(x)\psi}_a(x)\phi^{(+)}(x)\, |\mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\, \mathsf{N}[\overbracket{\bar{\psi}_a(x)\psi}_a(x)\overbracket{\phi(x)}]\, |\mathbf{k}\rangle = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\, \mathsf{N}[\overbracket{\psi_a(x)\bar{\psi}}_a(x)\overbracket{\phi(x)}]\, |\mathbf{k}\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, S_{\mathrm{F},aa}(x-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\, \mathrm{tr}[S_{\mathrm{F}}(0)]
\end{aligned}
$$

图 7.2: $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 2 种蝌蚪图。

$$
\begin{aligned}
&= +\mathrm{i}\kappa\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\\
&= -\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{7.42}
$$

上式第四步交换正规乘积中两个费米子算符的次序以符合 Feynman 传播子的形式，从而带来一个额外的负号。第六步用到矩阵的迹的定义 $\mathrm{tr}[S_\mathrm{F}(0)]=S_{\mathrm{F},aa}(0)$。

相应 Feynman 图如图 7.2(a) 所示。$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 中参与缩并的费米子算符 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 具有相同的时空坐标 x，因而 Feynman 传播子从 x 处的顶点出发，传播回到 x 处的顶点，形成一个封闭的圈。这种包含圈结构的 Feynman 图称为**圈图** (loop diagram)。相反地，不包含圈结构的 Feynman 图称为**树图** (tree diagram)，例如，图 7.1 中的 8 种 Feynman 图都是树图。

从上述计算过程可以看到，圈图中出现一个对四维动量 p^μ 的积分 $\int\mathrm{d}^4p/(2\pi)^4$；这个 p^μ 的值不能通过初末态的四维动量确定，因而是一个未定的四维动量，称为**圈动量** (loop momentum)，在积分时考虑了它的所有取值。此外，一个封闭的费米子圈贡献一个额外的负号，而且需要对费米子传播子（或其乘积）求迹。这是圈图的两个普遍特征，下文还有更多实例。

在另一种情况中，考虑初态是真空态，$|i\rangle=|0\rangle$，末态包含 1 个标量玻色子，$\langle f|=\langle\mathbf{k}|$，相应的 T 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|0\rangle &= -\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,|0\rangle = -\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\phi^{(-)}(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\,|0\rangle\\
&= -\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)]\,|0\rangle = +\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)]\,|0\rangle\\
&= +\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}S_{\mathrm{F},aa}(x-x) = +\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\,\mathrm{tr}[S_\mathrm{F}(0)]\\
&= +\mathrm{i}\kappa\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\\
&= -\mathrm{i}\kappa\int\mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,|0\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

图 7.2(b) 是相应的 Feynman 图。像图 7.2(a) 和 7.2(b) 这样只包含一条外线的 Feynman 图称为**蝌蚪图** (tadpole diagram)。

图 7.1 和 7.2 中列举的 10 个 Feynman 图对应于 10 个动力学允许的过程。但是，其中大多数过程在运动学上并不允许，因为其初态和末态不能同时满足能量和动量守恒定律，也就是说，

不能满足运动学条件。当 $m_\phi > 2m_\psi$ 时，有 2 个过程是例外的，运动学允许它们发生：Feynman 图 7.1(b) 对应于一个 ϕ 粒子**衰变**成一对正反 ψ 粒子的过程 $\phi \to \psi\bar{\psi}$，Feynman 图 7.1(f) 对应于一对正反 ψ 粒子**融合** (fusion) 成一个 ϕ 粒子的过程 $\psi\bar{\psi} \to \phi$。

接着，我们计算 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 过程对应的衰变宽度。根据 (6.275) 式，将 (7.34) 式中的 δ 函数因子 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)$ 扔掉，就得到 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 衰变过程的不变振幅

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\kappa\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda'). \tag{7.44}$$

这是 κ^1 阶的结果，它是贡献到这个过程的最低阶，即**领头阶** (leading order)。当 Yukawa 耦合常数 κ 比较小时，领头阶的贡献远大于更高阶的贡献。对上式取复共轭（等同于厄米共轭），得

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = [\mathrm{i}\kappa u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\gamma^0 v(\mathbf{q},\lambda')]^\dagger = -\mathrm{i}\kappa v^\dagger(\mathbf{q},\lambda')\gamma^0 u(\mathbf{p},\lambda) = -\mathrm{i}\kappa\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda). \tag{7.45}$$

进而，不变振幅的模方是

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= \kappa^2\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda) = \kappa^2\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')u_b(\mathbf{p},\lambda)\\ &= \kappa^2 u_b(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda') = \kappa^2\,\mathrm{tr}[u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')].\end{aligned} \tag{7.46}$$

在上式第一步的结果中，旋量空间中的行矢量 $\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 与列矢量 $v(\mathbf{q},\lambda')$ 相乘得到一个数，再乘以行矢量 $\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')$ 与列矢量 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 相乘得到的数。第二步将行矢量和列矢量的旋量指标明显地写出来，根据 Einstein 求和约定对它们的分量进行求和，求和指标是 a 和 b。第三步将最右边的 $u_b(\mathbf{p},\lambda)$ 移动到左边，从而，$u_b(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')$ 可以分别看作矩阵 $u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')$ 的 ba 分量和 ab 分量，因此，对 a 求和表示两个矩阵相乘，对 b 求和表示矩阵乘积的迹。

在计算 ϕ 的衰变宽度时，应当包含所有可能的末态，除了包含所有可能的动量取值之外，还要计及所有可能的螺旋态。因此，需要使用对末态粒子螺旋度求和的**非极化不变振幅模方**

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &\equiv \sum_{\lambda\lambda'}|\mathcal{M}|^2 = \kappa^2\sum_{\lambda\lambda'}\mathrm{tr}[u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')]\\ &= \kappa^2\sum_{\lambda'}\mathrm{tr}[(\not{p}+m_\psi)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')] = \kappa^2\,\mathrm{tr}[(\not{p}+m_\psi)(\not{q}-m_\psi)].\end{aligned} \tag{7.47}$$

第三、四步用到自旋求和关系 (5.214)。这种把非极化振幅模方中的旋量计算转化为求迹运算的方法称为 **Casimir 技巧** (Casimir's trick)。

现在，我们需要对 Dirac 矩阵及其乘积求迹。对于 Dirac 矩阵的迹，有

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^5\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu). \tag{7.48}$$

第一步用到 (5.37) 式，第二步用到 (5.40) 式，第三步用到矩阵乘积的性质

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \tag{7.49}$$

第四步再用一次 (5.37) 式。可见,

$$\boxed{\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0,} \tag{7.50}$$

故

$$\mathrm{tr}(\not{p}) = \mathrm{tr}(p_\mu \gamma^\mu) = p_\mu \,\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0. \tag{7.51}$$

根据 (5.2) 式，两个 Dirac 矩阵乘积的迹满足

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(\mathbf{1}) - \mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu), \tag{7.52}$$

从而

$$\boxed{\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu},} \tag{7.53}$$

于是得到

$$\mathrm{tr}(\not{p}\not{q}) = p_\mu q_\nu \,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4p_\mu q_\nu g^{\mu\nu} = 4\,p\cdot q. \tag{7.54}$$

利用这些公式，将 (7.47) 式化为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \kappa^2\,\mathrm{tr}(\not{p}\not{q} - m_\psi\not{p} + m_\psi\not{q} - m_\psi^2) = \kappa^2[\,\mathrm{tr}(\not{p}\not{q}) - m_\psi^2\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})] = 4\kappa^2(p\cdot q - m_\psi^2). \tag{7.55}$$

根据质壳条件 $k^2 = m_\phi^2$、$p^2 = q^2 = m_\psi^2$ 和能动量守恒关系 $k^\mu = p^\mu + q^\mu$，有

$$m_\phi^2 = k^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2\,p\cdot q = 2(m_\psi^2 + p\cdot q), \tag{7.56}$$

故

$$p\cdot q = \frac{m_\phi^2}{2} - m_\psi^2, \quad p\cdot q - m_\psi^2 = \frac{1}{2}(m_\phi^2 - 4m_\psi^2) = \frac{m_\phi^2}{2}\left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}\right). \tag{7.57}$$

ψ 与 $\bar{\psi}$ 是不相同的正反粒子，末态对称性因子 $\mathcal{S} = 1$，由 (6.385) 式得到 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 过程的领头阶衰变宽度

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi\to\psi\bar{\psi}) &= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi m_\phi}\sqrt{1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}} = \frac{\kappa^2}{4\pi m_\phi}\sqrt{1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}}\,(p\cdot q - m_\psi^2) \\ &= \frac{\kappa^2 m_\phi}{8\pi}\left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}.\end{aligned} \tag{7.58}$$

如果 $m_\phi = 2m_\psi$，则 $\Gamma(\phi\to\psi\bar{\psi}) = 0$，$\phi\to\psi\bar{\psi}$ 衰变过程不能发生。

7.1.2 κ^2 阶 Feynman 图

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 2 阶，即 κ^2 阶，由 (7.5) 式得

$$\mathrm{i}T^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{T}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] = \sum_{j=1}^{14}\mathrm{i}T_j^{(2)}. \tag{7.59}$$

根据 Wick 定理，上式共有 14 个非平庸的项 $\mathrm{i}T_j^{(2)}$。首先，有 1 项不包含缩并，

$$\mathrm{i}T_1^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{7.60}$$

其次，有 5 项包含 1 次缩并，

$$\mathrm{i}T_2^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{7.61}$$

$$\mathrm{i}T_3^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\overbracket{\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)}\psi(y)], \tag{7.62}$$

$$\mathrm{i}T_4^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)}], \tag{7.63}$$

$$\mathrm{i}T_5^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{7.64}$$

$$\mathrm{i}T_6^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\overbracket{\bar{\psi}(y)\psi(y)}]. \tag{7.65}$$

再次，有 6 项包含 2 次缩并，

$$\mathrm{i}T_7^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{7.66}$$

$$\mathrm{i}T_8^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)}\psi(y)], \tag{7.67}$$

$$\mathrm{i}T_9^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{7.68}$$

$$\mathrm{i}T_{10}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\overbracket{\bar{\psi}(y)\psi(y)}], \tag{7.69}$$

$$\mathrm{i}T_{11}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)}\psi(y)]. \tag{7.70}$$

$$\mathrm{i}T_{12}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\overbracket{\bar{\psi}(y)\psi(y)}], \tag{7.71}$$

最后，有 2 项包含 3 次缩并，

$$\mathrm{i}T_{13}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)}], \tag{7.72}$$

$$\mathrm{i}T_{14}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\overbracket{\bar{\psi}(y)\psi(y)}]. \tag{7.73}$$

下面讨论几个相关过程。

(1) 首先，考虑 $\psi\bar{\psi}\to\psi\bar{\psi}$ 散射过程，初态记为 $|i\rangle = \left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle$，末态记为 $\langle f| = \left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|$。根据 (7.61) 式，$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 对这个过程贡献的 T 矩阵元是

$$\begin{aligned}
&\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathrm{i}T_2^{(2)}\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\\
=&\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\bar{\psi}(y)\psi(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,[-\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_b^{(+)}(y)\\
&\qquad -\psi_b^{(-)}(y)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x)+\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\\
&\qquad\qquad +\psi_b^{(-)}(y)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_a^{(+)}(x)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\rangle\\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,[\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_b^{(+)}(y)\\
&\qquad\qquad -\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\rangle\\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\\
&\qquad\times\Big\{\langle \overbracket{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\overbracket{\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_a}(x)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\overbracket{\bar{\psi}_b(y)\overbracket{\psi_b(y)}}]}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\rangle\\
&\qquad\qquad -\langle \overbracket{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\overbracket{\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b}(y)\overbracket{\phi(x)\phi}(y)\overbracket{\bar{\psi}_a(x)\overbracket{\psi_b(y)}}]}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\rangle\Big\}\\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\Big\{\langle \overbracket{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\overbracket{\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\rangle\\
&\qquad\qquad +\langle \overbracket{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\overbracket{\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\rangle\Big\}.
\end{aligned}
\tag{7.74}
$$

上式第二步将场算符分解为正负能解，得到 4 个非零项。根据 (6.212) 式，$\overbracket{\phi(y)\phi}(x)=\overbracket{\phi(x)\phi}(y)$，可以看出，对第 2 项交换时空坐标 x 和 y 得到的结果与第 1 项相同，从而两项对 x 和 y 积分的结果相等，因此可以只保留一项，再乘上一个 2! 因子，它刚好与最前面的 1/2! 因子抵消。类似地，第 3 项与第 4 项也具有这种交换 x 和 y 的对称性。在第三步中，我们只保留第 1 项和第 3 项，消去前面的 1/2! 因子，并提取一个整体负号出来。这个规律是普遍的[1]：

> (7.4) 式里面 $\mathrm{i}T^{(n)}$ 中的 $1/n!$ 因子恰好与**时空坐标的交换对称性**引起的 $n!$ 因子**抵消**。

第四步写成场算符与初末态缩并的形式，并平庸地改写为正规乘积，花括号中两项相差一个负号，即相对符号为负。第五步将正规乘积中的场算符调回 (7.61) 式中的次序，不再出现额外的负号，验证了前述 T 矩阵元的缩并规律。

应用前文归纳的 Feynman 规则，得到的 Feynman 图如图 7.3 所示，它包含 2 个子图，每个子图具有 2 个顶点、4 条外线和 1 条内线。相应地，这个过程的总不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}=\mathrm{i}\mathcal{M}_1-\mathrm{i}\mathcal{M}_2$ 是 2 个子振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}_1$ 和 $\mathrm{i}\mathcal{M}_2$ 的叠加，两者之间的相对符号为负。根据 (6.316) 式计算散射截面时，用到的是总不变振幅的模方

$$
|\mathcal{M}|^2=|\mathcal{M}_1|^2+|\mathcal{M}_2|^2-(\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2+\mathcal{M}_2^*\mathcal{M}_1),
\tag{7.75}
$$

其中两个子振幅的干涉项 $-(\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2+\mathcal{M}_2^*\mathcal{M}_1)$ 的符号由它们的相对符号决定。因此，确定相对符号对于正确地计算散射截面至关重要。

[1]不过，此规律不适用于下文中的气泡图。

图 7.3: $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的 $\psi\bar{\psi} \to \psi\bar{\psi}$ 散射过程 Feynman 图，包含两个子图，相对符号为负。时间方向自左向右。

由 (7.74) 式倒数第二步的结果得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' | \, \mathrm{i}T_2^{(2)} \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2 \rangle \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{d}^4y \\
&\quad \times \Big[v_a(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2\cdot x} \bar{u}_a(\mathbf{q}_1, \lambda_1') \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot x} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{v}_b(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y} u_b(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot y} \\
&\qquad - v_a(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2\cdot x} \bar{u}_b(\mathbf{q}_1, \lambda_1') \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{v}_a(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x} u_b(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot y} \Big] \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \Big[\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') v(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \\
&\qquad\qquad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k) \\
&\qquad\qquad - \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) v(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \\
&\qquad\qquad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p_2 - q_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - q_1 - k) \Big] \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \Big[\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') v(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \frac{\mathrm{i}}{(p_1 + p_2)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \\
&\qquad - \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) v(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \frac{\mathrm{i}}{(p_1 - q_1)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \Big] \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2).
\end{aligned}
\tag{7.76}
$$

第二步对 x 和 y 分别积分，使方括号中每一项都具有 2 个四维 δ 函数因子，它们分别代表 2 个顶点处的能动量守恒关系；第一项的关系为 $k^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu$ 和 $k^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$，第二项的关系为 $k^\mu = q_2^\mu - p_2^\mu$ 和 $k^\mu = p_1^\mu - q_1^\mu$。可见，

与同一顶点相连的内外线的四维动量应满足能动量守恒定律。

第三步对 k 积分，消去 1 个四维 δ 函数，剩下的 1 个四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 代表初

末态 4 个粒子满足的能动量守恒定律。这符合 (6.275) 式的形式，相应的不变振幅为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M} = -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \Big[& \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{(p_1+p_2)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
& -\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\Big].
\end{aligned} \tag{7.77}
$$

这个表达式不包含积分，内线动量由外线动量完全确定，这是树图的特征。

(2) $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 也可以贡献到 $\psi\psi\to\psi\psi$ 散射过程，记初态为 $|i\rangle = \left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle$，末态为 $\langle f| = \left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|$，由 (7.61) 式得到 T 矩阵元

$$
\begin{aligned}
& \left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\mathrm{i}T_2^{(2)}\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
= & \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
= & -\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y) \\
& \qquad\times\phi(x)\phi(y)\psi_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle.
\end{aligned} \tag{7.78}
$$

上式最后一步出现了两个正能解旋量场算符对全同费米子初态的作用，类似于计算双费米子态内积 (5.295) 的过程，多次运用产生湮灭算符的反对易关系，得到

$$
\begin{aligned}
& \psi_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
= & \int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\sum_{\sigma_1\sigma_2}u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot x}u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot y}\sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\,a_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}a_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle \\
= & \int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
& \qquad\times a_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}[(2\pi)^3\delta_{\sigma_2\lambda_1}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_1)-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}]a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}\left|0\right\rangle \\
= & \int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
& \qquad\times(2\pi)^6[\delta_{\sigma_2\lambda_1}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma_1\lambda_2}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_2)-\delta_{\sigma_1\lambda_1}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma_2\lambda_2}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_2)]\left|0\right\rangle \\
= & [u_a(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u_b(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_2\cdot x+p_1\cdot y)}-u_a(\mathbf{p}_1,\lambda_1)u_b(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x+p_2\cdot y)}]\left|0\right\rangle \\
= & \,\mathsf{N}[\psi_a(x)\psi_b(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle-\mathsf{N}[\psi_b(y)\psi_a(x)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
= & \,\mathsf{N}[\psi_a(x)\psi_b(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle+\mathsf{N}[\psi_a(x)\psi_b(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle.
\end{aligned} \tag{7.79}
$$

可见，这种作用对应于场算符与初态粒子的两种可能缩并。倒数第二、三步中第二项前面的负号体现了交换全同费米子的反对称性，即计算结果在 $\mathbf{p}_1\leftrightarrow\mathbf{p}_2$、$\lambda_1\leftrightarrow\lambda_2$ 变换下给出一个整体负号。在最后一步第二项的正规乘积中交换两个场算符以恢复原来的次序，则这个负号被抵消掉，但两条缩并线纠缠起来。

(7.78) 式最后一步还出现了两个负能解旋量场算符对全同费米子末态的作用，作用结果为

$$
\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}} \sum_{\sigma_1\sigma_2} \bar{u}_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\cdot x}\bar{u}_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\cdot y}\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\ \langle 0|\, a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'}a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\bar{u}_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\bar{u}_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
&\qquad \times \langle 0|\, a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'}[(2\pi)^3\delta_{\lambda_2'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_1) - a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}]a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\bar{u}_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\bar{u}_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
&\qquad \times \langle 0|\,(2\pi)^6[\delta_{\lambda_2'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_1)\delta_{\lambda_1'\sigma_2}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_2) - \delta_{\lambda_1'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1)\delta_{\lambda_2'\sigma_2}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_2)] \\
&= \langle 0|\,[\bar{u}_a(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\bar{u}_b(\mathbf{q}_1,\lambda_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_2\cdot x+q_1\cdot y)} - \bar{u}_a(\mathbf{q}_1,\lambda_1')\bar{u}_b(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)}] \\
&= \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)] - \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)] \\
&= \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)] + \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)].
\end{aligned}
\tag{7.80}
$$

可见，这种作用对应于场算符与末态粒子的两种可能缩并。

将 (7.79) 和 (7.80) 式代入 (7.78) 式，得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathrm{i}T_2^{(2)}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&= -\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y \\
&\qquad \times\Big\{ \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad\quad - \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad\quad - \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\psi_b(y)\psi_a(x)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad\quad + \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\psi_b(y)\psi_a(x)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \Big\} \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y \\
&\qquad \times\Big\{ \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad\quad - \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \Big\} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y \\
&\qquad \times\Big\{ \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad\quad + \langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \Big\}.
\end{aligned}
\tag{7.81}
$$

第一步花括号中有 4 项，对应于初态和末态各自 2 种缩并的组合；第 1 项与第 4 项、第 2 项与第 3 项分别具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，贡献相等，因此，在第二步中只保留第 1 项和

图 7.4: $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的 $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程 Feynman 图，包含两个子图，相对符号为负。

图 7.5: 与图 7.4 拓扑等价的 Feynman 图。

第 2 项，并消去最前面的 1/2! 因子。第三步将场算符调回 (7.61) 式中的次序，不再出现额外的负号，这符合 T 矩阵元的缩并规律。根据这个规律，也可以直接写出第三步的结果，接着把纠缠的缩并线解开成第二步的形式，使得花括号中的两项相差一个负号，再往下计算。

这个 $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程的 Feynman 图如图 7.4 所示，它包含 2 个子图，第 2 个子图可以通过交换第 1 个子图中两条费米子出射外线（即改变两个顶点与两条出射外线的连接方式）来得到。相应地，这个过程的总不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 是 2 个子振幅的叠加，两者之间相差一个负号，这体现了交换末态全同费米子的反对称性。

如果交换图 7.4 第 1 个子图中初态的两条费米子外线，会得到图 7.5 的第 2 个子图，它与图 7.4 第 2 个子图在**拓扑结构**上是**等价**的，即可以通过连续变形相互转换；两者的差别是两个顶点上的 x 和 y 标签位置相反，因而它们具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性。同理，交换图 7.4 第 2 个子图中初态两条费米子外线，将得到图 7.5 的第 1 个子图，它与图 7.4 第 1 个子图是拓扑等价的。实际上，图 7.5 里面的第 1 和第 2 个子图分别对应于 (7.81) 式第一步花括号中的第 4 项和第 3 项，它们已经在前文讨论交换时空坐标的对称性时合并掉了。可见，图 7.4 中的两个子图就是我们需要考虑的所有 Feynman 图，它们已经包含了 $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献到 $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程的**全部可能拓扑结构**。

由 (7.81) 式第二步的结果得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' \right| \mathrm{i}T_2^{(2)} \left| \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \right\rangle \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y \left[\bar{u}_a(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \bar{u}_b(\mathbf{q}_1, \lambda_1') \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_2\cdot x + q_1\cdot y)} - \bar{u}_b(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \bar{u}_a(\mathbf{q}_1, \lambda_1') \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_2\cdot y + q_1\cdot x)} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon} u_a(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u_b(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot y+p_2\cdot x)} \\
=& -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \Big[\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2) \frac{\mathrm{i}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
&\qquad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p_2-q_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-q_1-k) \\
&\qquad - \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2) \frac{\mathrm{i}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
&\qquad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p_2-q_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-q_2-k)\Big] \\
=& -(-\mathrm{i}\kappa)^2\Big[\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2) \frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
&\qquad - \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2) \frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_2)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\Big] \\
&\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2).
\end{aligned} \tag{7.82}
$$

可见，Feynman 图 7.4 第 1 个子图两个顶点处的能动量守恒关系是 $q_2-p_2=k=p_1-q_1$，而第 2 个子图的相应关系是 $q_1-p_2=k=p_1-q_2$。消去 k，均得到初末态的能动量守恒关系 $p_1+p_2=q_1+q_2$。

(3) 接着，讨论一对正反 ψ 费米子湮灭 (annihilation) 成一对 ϕ 玻色子的过程 $\psi\bar{\psi}\to\phi\phi$，初末态分别为 $|i\rangle=\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle$ 和 $\langle f|=\langle\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2|$。此处“湮灭”指的是初态中的一对正反粒子（或两个全同的纯中性粒子）通过相互作用湮灭掉了，不再出现于末态之中。$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_4^{(2)}$ 都会贡献到这个过程，根据 (7.62) 和 (7.63) 式，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_4^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_b(x)\psi_b(x)\phi(y)\bar{\psi}_a(y)\psi_a(y)] = \mathrm{i}T_3^{(2)}.
\end{aligned} \tag{7.83}
$$

第二步在正规乘积内移动了场算符的位置，第三步交换了时空坐标 x 和 y。从而

$$
\mathrm{i}T_3^{(2)}+\mathrm{i}T_4^{(2)} = 2\mathrm{i}T_3^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{7.84}
$$

可见，$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_4^{(2)}$ 具有交换时空坐标的对称性，两者相加刚好抵消 1/2! 因子。于是，T 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2|\left(\mathrm{i}T_3^{(2)}+\mathrm{i}T_4^{(2)}\right)\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle \\
=& (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle \\
=& (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2|\,\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle.
\end{aligned} \tag{7.85}
$$

这里出现两个负能解标量场算符对全同玻色子末态的作用，类似于计算双玻色子态内积 (2.171) 的过程，多次运用产生湮灭算符的对易关系，得到

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)} \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}\, \langle 0|\, c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} c^\dagger_{\mathbf{q}_1} c^\dagger_{\mathbf{q}_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)}\, \langle 0|\, c_{\mathbf{k}_1}[(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1) + c^\dagger_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{k}_2}] c^\dagger_{\mathbf{q}_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)} \\
&\qquad \times \langle 0|\, (2\pi)^6[\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_2)] \\
&= \langle 0|\, [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2\cdot x+k_1\cdot y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}] = \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)] + \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(y)\phi(x)] \\
&= \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)] + \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)].
\end{aligned} \tag{7.86}
$$

上式对应于场算符与末态粒子的两种可能缩并，倒数第二、三步中第二项前面的正号体现了交换全同玻色子的对称性，即计算结果在 $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_2$ 变换下不变。另一方面，两个正能解标量场算符对全同玻色子初态的作用结果为

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)} \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}\, c_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{q}_2} c^\dagger_{\mathbf{k}_1} c^\dagger_{\mathbf{k}_2}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)} c_{\mathbf{q}_1}[(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_1) + c^\dagger_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{q}_2}] c^\dagger_{\mathbf{k}_2}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)} \\
&\qquad \times (2\pi)^6[\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_2)]\, |0\rangle \\
&= [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2\cdot x+k_1\cdot y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}]\, |0\rangle = \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle + \mathsf{N}[\phi(y)\phi(x)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle + \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle\,,
\end{aligned} \tag{7.87}
$$

这对应于场算符与初态粒子的两种可能缩并。类似地可以证明，

> n 个全同正（负）能解场算符对 n 个相应全同粒子初（末）态的作用等于这些场算符与初（末）态粒子的 $n!$ 种缩并之和。

现在，T 矩阵元 (7.85) 化为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, (\mathrm{i}T_3^{(2)} + \mathrm{i}T_4^{(2)})\, |\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \{\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)]\, |\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\rangle
\end{aligned}
$$

图 7.6: $\mathrm{i}T_3^{(2)} + \mathrm{i}T_4^{(2)}$ 贡献的 $\psi\bar{\psi} \to \phi\phi$ 湮灭过程 Feynman 图，包含两个子图，相对符号为正。

$$
\begin{aligned}
&\quad + \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(y)\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)]\, |\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\rangle \,\} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \{\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\, |\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\, |\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\rangle \,\}.
\end{aligned} \tag{7.88}
$$

第二步结果符合 T 矩阵元的缩并规律。相应的 Feynman 图如图 7.6 所示，它包含 2 个拓扑不等价的子图，相对符号为正，体现了交换末态两个全同玻色子的对称性。**拓扑不等价**指的是不能通过连续变形相互转换。

由 (7.88) 式第一步的结果得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 |\, (\mathrm{i}T_3^{(2)} + \mathrm{i}T_4^{(2)})\, |\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2\cdot x + k_1\cdot y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x + k_2\cdot y)}] \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)_{ab}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)} \\
&\quad \times \bar{v}_a(\mathbf{p}_2, \lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x} u_b(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot y} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \Big[\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(q + p_2 - k_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - k_1 - q) \\
&\qquad + \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(q + p_2 - k_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - k_2 - q)\Big] \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \Big[\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_\psi)}{(p_1 - k_1)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) + \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_\psi)}{(p_1 - k_2)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\Big] \\
&\quad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2).
\end{aligned} \tag{7.89}
$$

可见，Feynman 图 7.6 第 1 个子图两个顶点处的能动量守恒关系是 $k_2 - p_2 = q = p_1 - k_1$，而第 2 个子图的相应关系是 $k_1 - p_2 = q = p_1 - k_2$。消去 q，均得到初末态的能动量守恒关系 $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$。

(4) 根据 (7.64) 和 (7.65) 式，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_5^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]
\end{aligned}
$$

图 7.7: $\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)}$ 贡献的 Feynman 图。

$$= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] = \mathrm{i}T_6^{(2)}, \tag{7.90}$$

故

$$\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)} = 2\mathrm{i}T_5^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{7.91}$$

考虑初态是一对正反费米子，$|i\rangle = \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle$，末态是一对全同玻色子，$\langle f| = \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|$，则 $\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)}$ 对 T 矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2| \left(\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)}\right) \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \{\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \\
&\qquad + \langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle\}.
\end{aligned} \tag{7.92}$$

在第二步中，我们跳过用正负能解表达的步骤，直接按照前述规律写下场算符与初末态的 2 种可能缩并。图 7.7 是相应的 Feynman 图，它包含 2 个子图。每个子图都具有 2 个不相连的部分，这些部分是上一小节讨论过的，它们之间不会相互影响。由于末态中有一个 ϕ 粒子没有跟其它粒子连接起来，这种图既不满足能动量守恒定律，也不会贡献到 $\psi\bar{\psi} \to \phi\phi$ 散射过程。

(5) 根据 (7.66) 和 (7.67) 式，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}T_7^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] = \mathrm{i}T_8^{(2)},
\end{aligned} \tag{7.93}$$

故

$$\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)} = 2\mathrm{i}T_7^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{7.94}$$

考虑初态和末态均是一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 ψ 粒子，即 $|i\rangle = |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$，$\langle f| = \langle \mathbf{p}^+, \lambda|$，$T$ 矩阵元是

$$\left\langle \mathbf{p}^+, \lambda\right| \left(\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)}\right) \left|\mathbf{p}^+, \lambda\right\rangle$$

(a) $\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)}$ 贡献的自能图　　(b) $\mathrm{i}T_9^{(2)} + \mathrm{i}T_{10}^{(2)}$ 贡献的自能图

图 7.8: ψ 粒子的单圈自能图。

$$
\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{p}^+, \lambda | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] | \mathbf{p}^+, \lambda\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{p}^+, \lambda | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] | \mathbf{p}^+, \lambda\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{p}^+, \lambda | \mathsf{N}[\bar{\psi}(x)\phi(x)\phi(y)\psi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y)] | \mathbf{p}^+, \lambda\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8} \bar{u}(\mathbf{p},\lambda) \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p},\lambda) \\
&\qquad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(q + k - p)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p - q - k) \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p},\lambda) \frac{\mathrm{i}}{(p-q)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p},\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(0).
\end{aligned} \tag{7.95}
$$

相应的 Feynman 图如图 7.8(a) 所示，它是一个圈图。这种初末态都是同一个粒子的圈图称为该粒子的**自能图** (self-energy diagram)。上式倒数第二步对时空坐标 x 和 y 积分，得到 2 个相等的四维 δ 函数因子，这说明 2 个顶点处的能动量守恒关系相同，都是 $k = p - q$。最后一步对 k 积分，剩下 1 个四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(0) = \delta^{(4)}(p - p)$ 以体现初末态满足的能动量守恒定律；此时，还剩下一个未定的圈动量 q^μ，需要对它的所有取值积分。相应的不变振幅是

$$
\mathrm{i}\mathcal{M} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p},\lambda) \frac{\mathrm{i}}{(p-q)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p},\lambda). \tag{7.96}
$$

一般地，具有 n 个未定圈动量的圈图称为 $\boldsymbol{n}$ **圈图**。1 圈图也称为**单圈图**。Feynman 图 7.8(a) 以及 7.2(a)、7.2(b) 都是单圈图。在这些图上再连接一条合适的内线，就可以得到 2 圈图。

(6) 根据 (7.68) 和 (7.69) 式，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_9^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] = \mathrm{i}T_{10}^{(2)},
\end{aligned} \tag{7.97}
$$

故

$$\mathrm{i}T_9^{(2)}+\mathrm{i}T_{10}^{(2)}=2\mathrm{i}T_9^{(2)}=(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{7.98}$$

$\mathrm{i}T_9^{(2)}+\mathrm{i}T_{10}^{(2)}$ 也会贡献到 ψ 粒子的单圈自能图，对应的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}^+,\lambda|\,(\mathrm{i}T_9^{(2)}+\mathrm{i}T_{10}^{(2)})\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{p}^+,\lambda|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{p}^+,\lambda|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle\,,
\end{aligned} \tag{7.99}$$

Feynman 图如图 7.8(b) 所示。

(7) 考虑初态和末态均是一个动量为 $\mathbf{k}$ 的 ϕ 粒子，即 $|i\rangle=|\mathbf{k}\rangle$，$\langle f|=\langle\mathbf{k}|$，根据 (7.70) 式，$\mathrm{i}T_{11}^{(2)}$ 对 T 矩阵元的贡献是

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_{11}^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle=\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\\
&=\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\\
&\qquad+\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}\\
&=-\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\\
&\qquad+\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(y)\psi_b(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}\\
&=-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\psi_b(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\\
&=-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}S_{\mathrm{F},ba}(y-x)S_{\mathrm{F},ab}(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y}\\
&=-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\int\frac{\mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not{q}+m_\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}}{q^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y}\\
&=-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int\frac{\mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not{q}+m_\psi)}{q^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p-k)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p-q)\\
&=-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not{k}+\not{p}+m_\psi)}{(k+p)^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(0).
\end{aligned} \tag{7.100}$$

第三步通过调换场算符位置将纠缠的缩并线解开，并将费米子算符排列成 Feynman 传播子的形式，则花括号中两项均需要交换奇数次费米子算符，因而产生一个额外的负号；这两项具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，因而在第四步中合为一项，消去 1/2! 因子。相应的 Feynman 图如图 7.9 所示，这是 ϕ 粒子的单圈自能图，它包含由 2 个 Feynman 传播子构成的封闭费米子圈。

类似于 Feynman 图 7.2(a) 和 7.2(b)，这里验证了一个普遍的结论：

> 一个封闭的费米子圈贡献一个额外的负号，并且需要对费米子传播子的乘积求迹。

图 7.9: $\mathrm{i}T_{11}^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子单圈自能图。

图 7.10: 由 3 个传播子构成的封闭费米子圈。

(a) $\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 对应的气泡图

(b) $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 对应的气泡图

图 7.11: $\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 对应的气泡图。

这种负号是重要的，有可能影响观测量。如果一个封闭的费米子圈上有 n 个顶点，则具有 n 条费米子内线，求迹是对 n 个 Feynman 传播子的乘积进行的。我们已经验证了 $n=1$ 和 $n=2$ 的情形。当 $n=3$ 时，如图 7.10 所示，场算符的缩并结构为

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\bar{\psi}_c(z)\psi_c(z)] = -\mathsf{N}[\psi_c(z)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\bar{\psi}_c(z)] \\
&= -S_{\mathrm{F},ca}(z-x)S_{\mathrm{F},ab}(x-y)S_{\mathrm{F},bc}(y-z) \\
&= -\operatorname{tr}[S_{\mathrm{F}}(z-x)S_{\mathrm{F}}(x-y)S_{\mathrm{F}}(y-z)],
\end{aligned}
\tag{7.101}
$$

确实出现了负号和求迹。这个结论显然可以推广到任意 n 的情形。

(8) 在这里，我们再次写下 $\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 的表达式 (7.72) 和 (7.73)：

$$
\mathrm{i}T_{13}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{7.102}
$$

$$
\mathrm{i}T_{14}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{7.103}
$$

在这两个式子中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了，可以直接画出相应的 Feynman 图，分别如图 7.11(a) 和 7.11(b) 所示。这种不包含任何外线的圈图称为**气泡图** (bubble diagram)，也称为真空图 (vacuum diagram)。由于没有余下需要与初末态缩并的场算符，$\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 可以贡献到任意初末态的 T 矩阵元中。不过，微扰论中所有的气泡图只会贡献一个相位因子，没有可观测的物理效应[2]。

[2]相关讨论见 10.5 节。

7.2 动量空间 Feynman 规则

在上一节中，我们利用 Wick 定理计算 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$，将计算过程中的各个部分用图形表示，画出 Feynman 图，并从中归纳出一套位置空间中的 Feynman 规则和一些普遍规律。理解这些规律之后，反过来，我们可以对各个过程画出所有拓扑不等价的 Feynman 图，然后通过 Feynman 规则写出相应 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 的代数表达式。不过，当同一过程存在多个子图且涉及费米子算符时，需要回到带着缩并的表达式，通过调换场算符将纠缠的缩并线解开，以确定各个子图之间的相对符号。

在位置空间 Feynman 规则中，每个顶点对应于一个时空积分，积分的结果是使得出入顶点的内外线上的四维动量满足能动量守恒关系。最后，我们得到依赖于外线动量、但不依赖于时空坐标的结果，而 T 矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 分解为不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 与表示能动量守恒定律的因子 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)$ 之积。利用这个规律，我们将 Feynman 规则改成不依赖于时空坐标的形式，称为**动量空间**中的 Feynman 规则，然后从 Feynman 图直接给出**不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的代数表达式**，进一步简化计算。

根据上一节体现的规律，Yukawa 理论在**动量空间**中的 **Feynman 规则**如下。

1. Dirac 正费米子入射外线： ψ,λ $= u(\mathbf{p},\lambda)\,.$

2. Dirac 反费米子入射外线： $\bar{\psi},\lambda$ $= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\,.$

3. Dirac 正费米子出射外线： $\psi,\lambda\ = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\,.$

4. Dirac 反费米子出射外线： $\bar{\psi},\lambda\ = v(\mathbf{p},\lambda)\,.$

5. Dirac 费米子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_\psi+\mathrm{i}\epsilon}\,.$

6. 实标量玻色子入射外线： ϕ $= 1\,.$

7. 实标量玻色子出射外线： $\phi\ = 1\,.$

8. 实标量玻色子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,.$

9. Yukawa 相互作用顶点： $= -\mathrm{i}\kappa\,.$

10. 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系。
11. 每个未定的圈动量 p^μ 贡献一个积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$。
12. 每个封闭的费米子圈贡献一个额外的负号，并需要对费米子传播子的乘积求迹。

除了关于顶点的第 9 条规则具有 Yukawa 相互作用特有的形式之外，其它规则具有**一般性**。注意，顶点规则与拉氏量中的相互作用项直接对应：将 Yukawa 相互作用项 $\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -\kappa\,\phi\bar{\psi}\psi$ 中的场算符 ϕ、ψ 和 $\bar{\psi}$ 剥离，再乘以 i，就得到顶点规则的表达式 $-\mathrm{i}\kappa$。场算符 ϕ 对应于顶点上的虚线头，场算符 ψ 和 $\bar{\psi}$ 分别对应于指向顶点和背向顶点的实线头。

对于某个具有确定初末态的物理过程，我们可以根据这些 Feynman 规则上的图形元素画出微扰论某一阶上所有拓扑不等价的 Feynman 图，再应用动量空间中的 Feynman 规则，逆着费米子线上的箭头方向将图形翻译成代数表达式，组合得到不变振幅。当一个 Feynman 图包含多条连续费米子线时，应将一条连续费米子线完整地翻译成代数表达式之后，再处理下一条，而各条连续费米子线的翻译次序则是无所谓的。下面举一些上一节中已经出现过的例子予以比较。

(1) $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 衰变过程的领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$= -\mathrm{i}\kappa\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda').$ (7.104)

对于上式中的 Feynman 图，我们在不引起混淆的情况下省略了顶点上的圆点。这个结果与 (7.44) 式整体相差一个负号，这是因为此处没有像 (7.34) 式的计算过程那样调换费米子算符的位置以配合末态中湮灭算符的次序。不过，这个过程只有一个 Feynman 图，没有干涉效应，额外的负号不会影响衰变宽度。像这样的**整体符号差异对散射和衰变过程来说无关紧要**，它不会改变振幅模方，因而不会影响观测量的计算结果。

(2) 在领头阶，$\psi\bar{\psi} \to \psi\bar{\psi}$ 散射过程具有 2 个拓扑不等价的 Feynman 图，它们之间的**相对**

符号至关重要，不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \Big[\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') v(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \frac{\mathrm{i}}{(p_1+p_2)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)$$
$$- \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) v(\mathbf{q}_2, \lambda_2') \frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \Big]. \tag{7.105}$$

这里利用顶点处的能动量守恒关系，由外线动量决定内线动量。从 Feynman 图本身看不出它们之间的相对符号，我们应当写出缩并表达式进行考察，先保持场算符位置写出 2 种拓扑不等价的缩并方式，再调换场算符位置将纠缠的缩并线解开：

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2 \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2 \rangle \\
&= -\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2 \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2 \rangle .
\end{aligned} \tag{7.106}$$

由此可知，两个子振幅的符号相反，从而确定 (7.105) 式第一步两个子图之间的相对符号为负。第二步的表达式与 (7.77) 式在整体上相差一个负号，但不会影响散射截面的计算结果。

(3) $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程在领头阶具有 2 个拓扑不等价的 Feynman 图，不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \Big[\bar{u}(\mathbf{q}_2, \lambda_2') u(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)$$
$$- \bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1') u(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_2)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_2, \lambda_2') u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \Big]. \tag{7.107}$$

在这里，画出拓扑不等价 Feynman 图的关键在于注意外线与顶点连接情况的不同：在第一个子图中，p_1 外线与 q_1 外线交于同一顶点；在第二个子图中，p_1 外线则与 q_2 外线交于同一顶点。

相关的缩并表达式为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)] | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)] | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle \\
&= -\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)] | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)] | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle .
\end{aligned}
\tag{7.108}
$$

可见，两个子图的相对符号为负，体现了交换末态全同费米子的反对称性。

(4) 在领头阶，$\psi\bar{\psi} \to \phi\phi$ 湮灭过程具有 2 个拓扑不等价的 Feynman 图，不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$
\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \Big[\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_\psi)}{(p_1 - k_1)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \\
&\qquad + \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_\psi)}{(p_1 - k_2)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \Big] .
\end{aligned}
\tag{7.109}
$$

这两个子图中的费米子线结构相同，因而相对符号为正，体现了交换末态全同玻色子的对称性。这里的 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 表达式与 (7.89) 式最后一步的结果完全一致。

(5) 对于 $\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)}$ 贡献的 ψ 粒子单圈自能图，不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$
= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(\mathbf{p}, \lambda) \frac{\mathrm{i}}{(p - q)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} .
\tag{7.110}
$$

这个结果与 (7.96) 式相同。

(6) 对于 ϕ 粒子的单圈自能图，不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not{k}+\not{p}+m_\psi)}{(k+p)^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{7.111}$$

由于这个 Feynman 图包含一个封闭的费米子圈，上式出现了负号和求迹。这个结果与 (7.100) 式最后一步的结果一致。

7.3 ϕ^4 理论与对称性因子

如果拉氏量的相互作用项中含有多个全同的量子场，那么，在应用 Wick 定理时需要考虑一些等价的缩并方式，涉及到一些组合因子和对称性因子。在本节中，我们以实标量场 $\phi(x)$ 的 ϕ^4 理论为例讨论这种情况。

由 (6.5) 式，ϕ^4 理论的相互作用拉氏量为

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{7.112}$$

根据 (6.12) 式，相互作用哈密顿量密度是

$$\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{7.113}$$

(7.4) 式表明，$\mathrm{i}T$ 展开式的第 n 阶通项为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T^{(n)} &= \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]\\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^n\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\phi^4(x_1)\phi^4(x_2)\cdots\phi^4(x_n)].\end{aligned} \tag{7.114}$$

$\mathrm{i}T$ 展开式的第 1 阶（即 λ^1 阶）涉及 4 个实标量场算符的时序乘积，由 Wick 定理将得到 (6.167) 的形式。这里的 4 个场算符是全同的，因此，$C_4^2 = 6$ 种包含 1 次缩并的项彼此相等，$C_3^1 = 3$ 种包含 2 次缩并的项也彼此相等，有

$$\mathrm{i}T^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \sum_{j=1}^{3}\mathrm{i}T_j^{(1)}, \tag{7.115}$$

其中，

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)], \tag{7.116}$$

$$\mathrm{i}T_2^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}6\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\phi}(x)\phi(x)\phi(x)], \tag{7.117}$$

$$\mathrm{i}T_3^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}3\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\phi}(x)\overbracket{\phi(x)\phi}(x)]. \tag{7.118}$$

现在，考虑 $\phi\phi\to\phi\phi$ 散射过程，设初态为 $|i\rangle = |\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle$，末态为 $\langle f| = \langle\mathbf{p}_1;\,\mathbf{p}_2|$，则 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 对这个过程贡献的 T 矩阵元是

$$\langle\mathbf{p}_1;\,\mathbf{p}_2|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\ \langle\mathbf{p}_1;\,\mathbf{p}_2|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle$$

图 7.12: $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程 Feynman 图。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\, 4! \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)\cdot x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2)\cdot x} = -\mathrm{i}\lambda\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2).
\end{aligned} \tag{7.119}
$$

第二步根据 (7.86) 和 (7.87) 式让 2 个场算符与全同玻色子初态缩并、另外 2 个场算符与全同玻色子末态缩并，一共有 $A_4^4 = 4!$ 种等价缩并方式，因而出现一个**组合因子** 4!，这个因子恰好与前面的 1/4! 因子抵消。第三步用到 (7.15) 和 (7.18) 式。

图 7.12 是相应的 Feynman 图。由 (7.119) 式可以看出，在**位置空间**中，实标量玻色子入射和出射外线的 Feynman 规则就是 (7.27) 和 (7.33) 式。实际上，外线和内线的 Feynman 规则是由拉氏量中的自由部分决定的，因而不依赖于相互作用理论，具有一般性。(7.41) 式也是 ϕ^4 理论中实标量玻色子的内线规则，此时 (7.41) 式中的 m_ϕ 就是拉氏量 (6.5) 中的 m。ϕ^4 理论的**顶点 Feynman 规则**由拉氏量中的相互作用项 (7.112) 决定，从 (7.119) 式归纳出它的形式

$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\,, \tag{7.120}$$

其中 4 个虚线头对应于 $\mathcal{L}_1 = -\lambda\phi^4/4!$ 中的 4 个场算符 $\phi(x)$。反过来，应用这些规则，就可以根据 Feynman 图 7.12 直接写出 (7.119) 式的第三步。

相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_1$ 包含 4 个全同的实标量场 $\phi(x)$ 之积，当它们与初末态缩并时，会出现 4! 种等价的缩并方式，从而产生一个组合因子 4!，它恰好与 $\mathcal{L}_1$ 中的 1/4! 因子抵消。也就是说，我们在 $\mathcal{L}_1$ 中引入一个 1/4! 因子是为了使顶点规则 (7.120) 中不会出现额外的组合因子，方便 Feynman 图的计算。

从 Feynman 图的角度也可以讨论组合因子 4! 的来源。由于实标量玻色子是纯中性粒子，它的粒子线上没有箭头（注意，并非指表示动量方向的箭头），从顶点引出来的四个虚线头是不可区分、相互等价的，它们对应于 $\mathcal{L}_1$ 中四个全同的 $\phi(x)$。在 Feynman 图 7.12 中，第一条外线有 4 种连接顶点的选择，之后第二条外线有 3 种连接选择，而第三条外线只剩 2 种连接选择，第四条外线则只有 1 种连接选择，一共有 $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!$ 种连接方式，从而给出组合因子 4!。

由 (7.119) 式最后一步可以看出，$\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}\lambda. \tag{7.121}$$

图 7.13: $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图。

图 7.14: $\mathrm{i}T_3^{(1)}$ 贡献的气泡图。

由于初末态四个粒子质量相同，根据 (6.366) 式，质心系中关于立体角的微分散射截面是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2}, \tag{7.122}$$

它不依赖于 $\mathbf{p}_1$ 的极角 θ 和方位角 ϕ。对 $\mathbf{p}_1$ 的立体角 Ω 积分，就可以得到散射截面。

由于末态两个 ϕ 玻色子是全同的，末态对称性因子 $\mathcal{S}=2$，计算散射截面时需要除以 $\mathcal{S}$ 来避免量子态的重复计算。具体来说，在质心系中，末态中两个 ϕ 玻色子的动量大小相等，方向相反；当 $\mathbf{p}_1$ 的方向是 (θ,ϕ) 时，$\mathbf{p}_2$ 的方向是 $(\pi-\theta,\phi+\pi)$；反过来，当 $\mathbf{p}_1$ 的方向是 $(\pi-\theta,\phi+\pi)$ 时，$\mathbf{p}_2$ 的方向则是 (θ,ϕ)；然而，因为这两个 ϕ 玻色子是全同的，这两个情况实际上对应于同一个量子态。因此，如果我们对 Ω 作 4π 立体角的积分，就会双重计算每个量子态，这是需要除以 $\mathcal{S}=2$ 的原因。于是，$\phi\phi\to\phi\phi$ 的领头阶散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\int \mathrm{d}\Omega \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\,4\pi\,\frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\mathrm{CM}}^2}. \tag{7.123}$$

接下来，我们讨论 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图。记初态为 $|i\rangle=|\mathbf{k}\rangle$，末态为 $\langle f|=\langle\mathbf{k}|$，根据 (7.117) 式，$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 对 T 矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,6\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,6\cdot 2\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle\,.
\end{aligned} \tag{7.124}$$

第一步中的组合因子 $C_4^2=6$ 是在 $\phi^4(x)$ 中取 2 个场算符相互缩并的组合数，第二步中的组合因子 $A_2^2=2$ 是余下 2 个场算符与初末态缩并的排列数。这两个组合因子将分母 $4!=24$ 约化为 2，得到第三步的结果，这样剩下的 2 称为 **Feynman 图的对称性因子** (symmetry factor)。

Feynman 图如图 7.13 所示，它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的。可以认为用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种，在计算时需要除以 2，否则就会双重计算。这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性。实际上，

分析 **Feynman 图对称性**得到的**因子**总是与 T 矩阵元计算中剩下的因子一致。

下面将继续验证这个规律。如果先画出 Feynman 图，再利用位置空间的 Feynamn 规则写出 T 矩阵元，则最后必须除以 **Feynman 图的对称性因子**才能得出正确的结果。

根据 (7.118) 式，

$$\mathrm{i}T_3^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,3\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)], \tag{7.125}$$

其中正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了，因此它对应的 Feynman 图是气泡图，如图 7.14 所示。由上式第二步可见，对称性因子为 8。从 Feynman 图的角度看，图中 2 个始末端连接同一顶点的圈各自贡献一个因子 2，而这 2 个圈彼此也是全同的，再贡献一个因子 2，故 Feynman 图的对称性因子为 $2\cdot 2\cdot 2 = 8$，验证了上述规律。

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 2 阶，即 λ^2 阶，由 (7.114) 式有

$$\mathrm{i}T^{(2)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]. \tag{7.126}$$

通过 Wick 定理可以将上式化为许多个包含正规乘积的项，这里我们只讨论对 ϕ 粒子的自能图有贡献的项，一共有 3 种情况。

第 1 种情况具有如下缩并结构，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_1^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\\ &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)].\end{aligned} \tag{7.127}$$

在第一步中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 1 个 $\phi(x)$ 和 1 个 $\phi(y)$ 出来缩并的方法有 $4\cdot 4$ 种，再从余下的 3 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 中取 2 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 出来缩并的方法有 $C_3^2 = 3$ 种，因而组合因子为 $4\cdot 4\cdot 3\cdot 3$。$\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 对自能图 T 矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_1^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\\ &\qquad + \langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}\\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,.\end{aligned} \tag{7.128}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式关于时空坐标 x 和 y 的交换是对称的，因而可以合成一项，贡献一个 2! 因子，恰好与最前面的 1/2! 因子抵消，从而得到第二步的结果，它表明这个过程的对称性因子为 4。图 7.15(a) 是相应的 Feynman 图，具有 2 个始末端连接同一个顶点的圈，它们各自贡献一个因子 2，故 Feynman 图的对称性因子为 $2\cdot 2 = 4$。

第 2 种情况具有如下缩并结构，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_2^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 4\cdot 4\cdot 6\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\\ &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)].\end{aligned} \tag{7.129}$$

(a) $\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 贡献的自能图　(b) $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的自能图　(c) $\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 贡献的自能图

图 7.15: $\mathrm{i}T^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图。

在第一步中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 出来的方法有 $C_4^3C_4^3 = 4\cdot 4$ 种，将这 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的排列方法有 $3! = 6$ 种，因而组合因子是 $4\cdot 4\cdot 6$。$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 对自能图 T 矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\ &\qquad + \langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\} \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,. \end{aligned} \tag{7.130}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们关于 x 和 y 的交换是对称的，合为一项之后，抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子，结果表明这个过程的对称性因子为 6。图 7.15(b) 是相应的 Feynman 图，有 3 条全同内线连接两个不同的顶点，这 3 条内线有 $3!$ 种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为 $3! = 6$。

第 3 种情况包含如下两种缩并结构，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_3^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 6\cdot 6\cdot 2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\ &\qquad + \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\} \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]. \end{aligned} \tag{7.131}$$

在第一步中，花括号内的两项关于 x 和 y 的交换是对称的，合为一项则抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子。两项具有相同的组合因子；在每一项中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 出来的方法有 $C_4^2C_4^2 = 6\cdot 6$ 种，将这 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的排列方法有 $2!$ 种，因而组合因子为 $6\cdot 6\cdot 2$。$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 对自能图 T 矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_3^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\,2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,. \end{aligned} \tag{7.132}$$

在第一步中，与初末态缩并的等价方式有 2 种，因而组合因子为 2。第二步结果表明对称性因子为 4。相应的 Feynman 图如图 7.15(c) 所示，图中始末端连接同一顶点的 1 个圈贡献一个因子 2，连接两个不同顶点的 2 条全同内线有 2! 种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为 $2 \cdot 2 = 4$。

在**动量空间**中，除了顶点规则之外，7.2 节里面关于实标量场的 Feynman 规则也适用于 ϕ^4 理论；具体来说，仍然适用的规则包括实标量玻色子的外线规则 6 和 7、内线规则 8 以及规则 10 和 11。此外，还应该加上以下两条规则。

- ϕ^4 相互作用顶点： $= -\mathrm{i}\lambda\,.$
- 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子。

注意，将 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{L}_1 = -\lambda\phi^4/4!$ 中的 4 个场算符 ϕ 剥离，乘以 i，还要再乘上 4 个 ϕ 的全排列数 4!，才得到顶点规则的表达式 $-\mathrm{i}\lambda$。

7.4　一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明，外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论，它们是由拉氏量中的自由部分决定的，具有一般性。在本节中，我们讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论。

(1) 复标量场 $\phi(x)$ 描述的玻色子有正反之分，引入两种动量为 $\mathbf{p}$ 的单粒子态：

$$\text{正标量玻色子 } \phi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger \left|0\right\rangle, \tag{7.133}$$

$$\text{反标量玻色子 } \bar{\phi} \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}^\dagger \left|0\right\rangle. \tag{7.134}$$

现在由复标量场的正负能解展开式 (6.214) 和 (6.215) 计算场算符与初末态缩并的结果。$\phi(x)$ 与正标量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}\overbracket{\phi(x)\left|\mathbf{p}^+\right\rangle} &\equiv \phi^{(+)}(x)\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger\left|0\right\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]\left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left|0\right\rangle.\end{aligned} \tag{7.135}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.193)。类似地，$\phi^\dagger(x)$ 与反标量玻色子初态的缩并为

$$\overbracket{\phi^\dagger(x)\left|\mathbf{p}^-\right\rangle} \equiv \phi^{\dagger(+)}(x)\left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, b_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}^\dagger\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left|0\right\rangle. \tag{7.136}$$

另一方面，$\phi^\dagger(x)$ 与正标量玻色子末态的缩并为

$$\overbracket{\left\langle\mathbf{p}^+\right|\phi^\dagger}(x) \equiv \left\langle\mathbf{p}^+\right|\phi^{\dagger(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\left\langle 0\right|\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \langle 0| [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \langle 0| \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \langle 0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.137}$$

而 $\phi(x)$ 与反标量玻色子末态的缩并为

$$\langle \overbrace{\mathbf{p}^-|\phi}(x) \equiv \langle \mathbf{p}^-| \phi^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0| \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} b_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{7.138}$$

我们用**带箭头的虚线**表示复标量玻色子的运动，线上的箭头可认为是复标量场所携带的某种 U(1) 荷流动的方向，或者说是**玻色子数**流动的方向。根据上述结果及 Feynman 传播子表达式 (6.222)，**位置空间中复标量场的一般内外线规则为**

$$= \langle 0| \overbrace{\phi(x)|\mathbf{p}^+} \rangle = \langle 0| \phi^{(+)}(x) |\mathbf{p}^+\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.139}$$

$$= \langle 0| \overbrace{\phi^\dagger(x)|\mathbf{p}^-} \rangle = \langle 0| \phi^{\dagger(+)}(x) |\mathbf{p}^-\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.140}$$

$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}^+|\phi^\dagger}(x) |0\rangle = \langle \mathbf{p}^+| \phi^{\dagger(-)}(x) |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.141}$$

$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}^-|\phi}(x) |0\rangle = \langle \mathbf{p}^-| \phi^{(-)}(x) |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{7.142}$$

$$= \overbrace{\phi(y)\phi^\dagger}(x) = D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{7.143}$$

其中，m_ϕ 是标量玻色子 ϕ 的质量。

(2) 有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述一种纯中性的矢量玻色子 A，它具有 3 种螺旋度 $\lambda = \pm, 0$。记动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 A 粒子态为 $|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger |0\rangle$。根据有质量矢量场的正负能解展开式 (6.135) 和 (6.136)，$A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}
&\overbrace{A^\mu(x)|\mathbf{p}}, \lambda\rangle \equiv A^{\mu(+)}(x) |\mathbf{p}, \lambda\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} [a_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger] |0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} |0\rangle,
\end{aligned} \tag{7.144}$$

而 $A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned}
&\langle \overbrace{\mathbf{p}, \lambda| A^\mu}(x) \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda| A^{\mu(-)}(x) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0| \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0| \left[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&= \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0| \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0| \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \qquad (7.145)
\end{aligned}
$$

上面两式的第四步均用到产生湮灭算符的对易关系 (4.127)。我们用**波浪线**表示有质量实矢量玻色子的运动，根据上述结果写下**位置空间中有质量实矢量场的一般外线规则**：

$A, \lambda; \mu$ x $= \langle 0| \overbracket{A^{\mu}(x)|\mathbf{p}, \lambda} \rangle = \langle 0| A^{\mu(+)}(x)|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \qquad (7.146)$

x $A, \lambda; \mu$ $= \langle \overbracket{\mathbf{p}, \lambda| A^{\mu}(x)} |0\rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda| A^{\mu(-)}(x)|0\rangle = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \qquad (7.147)$

现在讨论有质量实矢量场的内线规则。我们在前面的计算中已经发现，有质量矢量场的 Feynman 传播子表达式 (6.244) 包含一个非协变项。接下来的讨论将表明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被相互作用哈密顿量密度中非协变项 (6.92) 的贡献抵消，因而理论仍然具有 Lorentz 协变性。

与前面一样，假设相互作用拉氏量具有 (6.56) 的形式，那么，由 (6.91) 式可知，相互作用绘景中的相互作用哈密顿量密度为

$$
\mathcal{H}_1(x) = g J_{\mu}(x) A^{\mu}(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(x)]^2. \qquad (7.148)
$$

其中，g 是耦合常数，m_A 是实矢量玻色子 A 的质量，而上式右边第二项就是非协变项 (6.92)。根据 (7.4) 式，$\mathrm{i}T$ 展开式的前 2 阶为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T^{(1)} &= -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathsf{T}\Big[g J_{\mu}(x) A^{\mu}(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x) J^0(x)\Big], \qquad (7.149) \\
\mathrm{i}T^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \mathsf{T}\Big\{\Big(g J_{\mu}(x) A^{\mu}(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(x)]^2\Big) \\
&\qquad \times \Big(g J_{\nu}(y) A^{\nu}(y) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(y)]^2\Big)\Big\}. \qquad (7.150)
\end{aligned}
$$

应用 Wick 定理之后，Feynman 传播子 $\overbracket{A^{\mu}(x) A^{\nu}(y)} = \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 出现在 $n \geq 2$ 的 $\mathrm{i}T^{(n)}$ 中。比如，$\mathrm{i}T^{(2)}$ 包含一个涉及 Feynman 传播子的 g^2 阶的项

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T^{(2)}_{g^2} &= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \mathsf{N}[J_{\mu}(x) \overbracket{A^{\mu}(x) J_{\nu}(y) A^{\nu}(y)}] \\
&= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \mathsf{N}\left[J_{\mu}(x) J_{\nu}(y) \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)\right] \\
&= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \mathsf{N}\Big\{J_{\mu}(x) J_{\nu}(y)
\end{aligned}
$$

$$\times\left[\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y)\right]\Bigg\}. \tag{7.151}$$

第三步用到 (6.244) 式，而方括号中的第二项是非协变项。另一方面，$\mathrm{i}T^{(1)}$ 也包含一个 g^2 阶的项

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T^{(1)}_{g^2} &= -\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}\left[\frac{g^2}{2m_A^2}\,J^0(x)J^0(x)\right]=\frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,J^0(x)J^0(y)\delta^{(4)}(x-y)\right]\\ &=\frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,J_\mu(x)J_\nu(y)g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y)\right].\end{aligned} \tag{7.152}$$

上式是非协变的。在微扰论的 g^2 阶计算中，必须同时考虑 $\mathrm{i}T^{(2)}_{g^2}$ 和 $\mathrm{i}T^{(1)}_{g^2}$ 的贡献。两者相加，则非协变项恰好相消，得到一个 Lorentz 协变的表达式：

$$\mathrm{i}T^{(2)}_{g^2}+\mathrm{i}T^{(1)}_{g^2}=\frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[J_\mu(x)J_\nu(y)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]. \tag{7.153}$$

上式方括号中的积分是 Feynman 传播子表达式 (6.244) 中的 Lorentz 协变项，在实际计算中，只有这一项有贡献。因此，我们可以将**位置空间中有质量实矢量场的一般内线规则**设置为

$$\begin{aligned}&= \overbracket{A^\mu(y)A^\nu(x)}\ \text{的 Lorentz 协变项}\\ &=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}.\end{aligned} \tag{7.154}$$

(3) 无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述一种纯中性的无质量矢量玻色子 A，它具有螺旋度 $\lambda=\pm$ 的 2 种物理态。记动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 A 粒子态为 $|\mathbf{p},\lambda\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$。由无质量矢量场的平面波展开式 (4.275)，将正能解和负能解部分表达成

$$A^{\mu(+)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}+\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\right], \tag{7.155}$$

$$A^{\mu(-)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}+\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\right]. \tag{7.156}$$

从而，根据产生湮灭算符的对易关系 (4.271)，$A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}&\overbracket{A^\mu(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle}\equiv A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle\\ &=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma}+\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\right]\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle\\ &=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\{\sum_{\sigma=0,3}e^\mu(\mathbf{q},\sigma)[b_{\mathbf{q},\sigma},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]+\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')[a_{\mathbf{q},\lambda'},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\right\}|0\rangle\\ &=\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle=\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{7.157}$$

而 $A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子末态的缩并为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p},\lambda|\, A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^{\mu(-)}(x) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\, \langle 0|\, \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}\, \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma) b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma} + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\, \langle 0| \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma) [a_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') [a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] \right\} \\
&= \int \mathrm{d}^3 q\, \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda')\, \langle 0|\, \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0|\, \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.
\end{aligned}
\tag{7.158}
$$

我们用**波浪线**表示无质量实矢量玻色子的运动，根据上述结果及 *Feynman* 规范下的 Feynman 传播子表达式 (6.253)，写下**位置空间中无质量实矢量场的一般内外线规则**：

$A,\lambda;\mu$ x $= \langle 0|\, A^\mu(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \langle 0|\, A^{\mu(+)}(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},$ (7.159)

x $A,\lambda;\mu$ $= \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^\mu(x)\, |0\rangle = \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^{\mu(-)}(x)\, |0\rangle = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},$ (7.160)

$x;\nu$ $y;\mu$ $= A^\mu(y) A^\nu(x) = \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}.$ (7.161)

(4) 在**动量空间中**，上述**内外线 Feynman 规则**具有如下形式。

1. 正标量玻色子入射外线：ϕ $= 1\,.$
2. 反标量玻色子入射外线：$\bar{\phi}$ $= 1\,.$
3. 正标量玻色子出射外线： ϕ $= 1\,.$
4. 反标量玻色子出射外线： $\bar{\phi}$ $= 1\,.$
5. 复标量玻色子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,.$
6. 有质量实矢量玻色子入射外线：$A,\lambda;\mu$ $= \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\,.$

7. 有质量实矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu \; = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$.

8. 有质量实矢量玻色子传播子： $= \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

9. 无质量实矢量玻色子入射外线： $A, \lambda; \mu$ $= \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$.

10. 无质量实矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu \; = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$.

11. 无质量实矢量玻色子传播子： $= \dfrac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ （Feynman 规范）.

习　题

7.1 对于 7.1 节讨论的 Yukawa 理论，画出 $\psi\phi \to \psi\phi$ 散射过程的所有领头阶 Feynman 图，确定子图之间的相对符号，根据动量空间 Feynman 规则写出不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的表达式。

7.2 在 7.3 节讨论的实标量场 ϕ^4 理论中，对于 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程，画出所有包含 2 个顶点的单圈 Feynman 图，分析它们的对称性因子。

7.3 考虑拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \chi)\partial_\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \lambda \chi \phi^\dagger \phi. \tag{7.162}$$

其中 $\chi(x)$ 是质量为 m_χ 的实标量场，相应的玻色子记作 χ。$\phi(x)$ 是质量为 m_ϕ 的复标量场，相应的正反玻色子记作 ϕ 和 $\bar{\phi}$。λ 是实耦合常数。

(a) λ 的量纲是什么?

(b) 写出动量空间中的顶点 Feynman 规则。

(c) 当 $m_\chi > 2m_\phi$ 时，画出 $\chi \to \phi\bar{\phi}$ 衰变过程的领头阶 Feynman 图，并计算相应的衰变宽度。

(d) 画出下列散射过程的所有领头阶 Feynman 图。

i. $\phi\phi \to \phi\phi$.

ii. $\phi\bar{\phi} \to \phi\bar{\phi}$.

iii. $\phi\chi \to \phi\chi$.

iv. $\phi\bar{\phi} \to \chi\chi$.

v. $\chi\chi \to \chi\chi$.

7.4 考虑拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + \frac{\kappa}{2}g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu\phi, \tag{7.163}$$

其中 $\phi(x)$ 是质量为 m_ϕ 的实标量场，$A^\mu(x)$ 是质量为 m_A 的实矢量场，相应玻色子分别记作 ϕ 和 A。$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 是 A^μ 的场强张量，κ 是实耦合常数。

(a) 写出动量空间中的顶点 Feynman 规则。

(b) 当 $m_\phi > 2m_A$ 时，画出 $\phi \to AA$ 衰变过程的领头阶 Feynman 图，计算衰变宽度。

(c) 画出 $AA \to AA$ 散射过程的所有领头阶 Feynman 图。

7.5 有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 描述一对正反矢量玻色子 A 和 $\bar{A}$，在拉氏量 (4.289) 中加入相互作用项

$$\mathcal{L}_1 = -g(J_\mu A^\mu + J_\mu^\dagger A^{\mu\dagger}), \tag{7.164}$$

其中 g 是实耦合常数，$J_\mu(x)$ 是由其它场组成的复流。

(a) 用带箭头的波浪线表示复矢量玻色子的运动。论证 Feynman 传播子 (6.419) 中的非协变项在微扰论的 g^2 阶计算中没有贡献，因而位置空间中有质量复矢量场的内线规则为

$$= \overbrace{A^\mu(y)A^{\nu\dagger}}(x) \text{ 的 Lorentz 协变项}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{7.165}$$

这里的 m_A 就是拉氏量 (4.289) 中的 m。

(b) 根据平面波展开式 (4.292)，推出位置空间中有质量复矢量场的如下外线规则：

$$\begin{aligned} &= \langle 0|\,\overbrace{A^\mu(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle} = \langle 0|\,A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle \\ &= \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \end{aligned} \tag{7.166}$$

$$\begin{aligned} &= \langle 0|\,\overbrace{A^{\mu\dagger}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle} = \langle 0|\,A^{\mu\dagger(+)}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle \\ &= \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \end{aligned} \tag{7.167}$$

$$\begin{aligned} &= \langle\overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda|\,A^{\mu\dagger}(x)}\,|0\rangle = \langle\mathbf{p}^+,\lambda|\,A^{\mu\dagger(-)}(x)\,|0\rangle \\ &= \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \end{aligned} \tag{7.168}$$

$$\begin{aligned} &= \langle\overbrace{\mathbf{p}^-,\lambda|\,A^\mu(x)}\,|0\rangle = \langle\mathbf{p}^-,\lambda|\,A^{\mu(-)}(x)\,|0\rangle \\ &= \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \end{aligned} \tag{7.169}$$

因此，动量空间中有质量复矢量场的一般内外线规则为

- 有质量正矢量玻色子入射外线：$A, \lambda; \mu$ $= \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$.

- 有质量反矢量玻色子入射外线：$\bar{A}, \lambda; \mu$ $= \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$.

- 有质量正矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu \ = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$.

- 有质量反矢量玻色子出射外线： $\bar{A}, \lambda; \mu \ = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$.

- 有质量复矢量玻色子传播子：ν $\mu \ = \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^{\mu}p^{\nu}/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

第 8 章　量子电动力学

除了中微子之外，基本费米子都携带电荷，参与**电磁相互作用**。表 8.1 列出基本费米子 f 以 e 为单位的电荷 Q_f 和质量 m_f。对于带电轻子来说，正粒子带负电，记作 e^-、μ^-、τ^-；反粒子带正电，记作 e^+、μ^+、τ^+。电荷是电磁相互作用的源，单位电荷量 e 表征电磁相互作用的强度，光子是传递电磁相互作用的媒介粒子。描述带电粒子如何参与电磁相互作用的量子场理论称为**量子电动力学** (quantum electrodynamics)，简称 **QED**，于 20 世纪中叶由朝永振一郎 [30]、Julian Schwinger [31, 32]、Richard Feynman [29, 33, 34] 和 Freeman Dyson [26, 27] 建立起来，是第一个自洽的相对论性量子场论。QED 是标准模型的一个组成部分。

8.1　U(1) 规范对称性与 QED

记 f 为标准模型中某种带电的基本费米子，它对应于一个 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$。我们可以写下相应的自由场拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x) = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x). \tag{8.1}$$

表 8.1: 标准模型中的基本费米子。

费米子 f	带电轻子 (e,μ,τ)	中微子 (ν_e,ν_μ,ν_τ)	下型夸克 (d,s,b)	上型夸克 (u,c,t)
电荷 Q_f	-1	0	$-1/3$	$2/3$
质量 m_f	$m_e = 0.5110$ MeV $m_\mu = 105.7$ MeV $m_\tau = 1.777$ GeV	$m_{\nu_e} = 0$ $m_{\nu_\mu} = 0$ $m_{\nu_\tau} = 0$	$m_d = 4.70$ MeV $m_s = 93.5$ MeV $m_b = 4.18$ GeV	$m_u = 2.16$ MeV $m_c = 1.27$ GeV $m_t = 172.6$ GeV

注：这里列出的电荷是正费米子电荷。表中 d、u、s 夸克的质量是 2 GeV 能标处的 $\overline{\text{MS}}$ 质量，c 和 b 夸克的质量分别是 m_c 和 m_b 能标处的 $\overline{\text{MS}}$ 质量。标准模型中 3 代中微子均无质量。1998 年实验发现中微子振荡，表明中微子具有质量，所以需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理。

其中 m_f 是费米子 f 的质量。如 5.5.3 小节所述，$\mathcal{L}_{\text{free}}$ 具有 U(1) 整体对称性。具体来说，对 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta}\psi_f(x), \tag{8.2}$$

其中 Q_f 是正费米子 f 的电荷，也看成是场 $\psi_f(x)$ 的电荷，而 θ 是连续变换参数。于是 $\bar{\psi}'_f(x) = \bar{\psi}_f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Q_f\theta}$，而拉氏量不变：

$$\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}'_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi'_f - m_f\bar{\psi}'_f\psi'_f = \mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f = \mathcal{L}_{\text{free}}. \tag{8.3}$$

根据 Noether 定理，电荷守恒定律成立。

如果将上述变换参数 θ 改为依赖时空坐标 x^μ 的 Lorentz 标量函数 $\theta(x)$，则相应的变换

$$\boxed{\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)} \tag{8.4}$$

称为 **U(1) 规范变换**，也称为 U(1) 局域变换。此时，由于

$$\partial_\mu\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x), \tag{8.5}$$

我们不会得到 $\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathcal{L}_{\text{free}}$，故不存在相应的对称性。容易看出，原因是上式多出正比于 $\partial_\mu\theta(x)$ 的第二项，导致 $\partial_\mu\psi'_f(x) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x)$，即 $\partial_\mu\psi_f(x)$ 与 $\psi_f(x)$ 的变换形式不同。

为了得到对称性，可以将作用在 $\psi_f(x)$ 上的时空导数算符 ∂_μ 替换为**协变导数** (covariant derivative) 算符

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}Q_f eA_\mu(x),} \tag{8.6}$$

其中 $A_\mu(x)$ 是**电磁场**，e 是**单位电荷量** (1.14)。并要求在 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 规范变换 (8.4) 的同时，$A_\mu(x)$ 作规范变换

$$\boxed{A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x).} \tag{8.7}$$

将上式与 (4.201) 式比较，可知 $\theta(x) = -e\chi(x)$，而 $\chi(x)$ 是 4.4.2 小节用到的规范变换函数。这样一来，$D_\mu\psi_f(x)$ 的变换形式就与 $\psi_f(x)$ 的变换形式 (8.4) 相同：

$$\begin{aligned}
[D_\mu\psi_f(x)]' &= \partial_\mu\psi'_f(x) + \mathrm{i}Q_f eA'_\mu(x)\psi'_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f e\left[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}[\partial_\mu + \mathrm{i}Q_f eA_\mu(x)]\psi_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}D_\mu\psi_f(x).
\end{aligned} \tag{8.8}$$

从而，只要将拉氏量修改为

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu D_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x),} \tag{8.9}$$

就能得到 $\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}$，即 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ 在同时让 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 规范变换 (8.4)、$A_\mu(x)$ 作规范变换 (8.7) 的情况下不变。这种对称性称为 **U(1) 规范对称性**。

如 4.4.2 小节所述，当电磁场 $A_\mu(x)$ 作规范变换 (8.7) 时，场强张量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 不变，因此电磁场的动能项 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 是规范对称性所允许的。另一方面，质量项 $m^2 A_\mu A^\mu/2$ 不满足规范对称性。换言之，**规范对称性禁止光子具有质量**。

现在写下**量子电动力学的拉氏量**，

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_f (\mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m_f \bar{\psi}_f \psi_f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad f = e,\, \mu,\, \tau,\, d_i,\, s_i,\, b_i,\, u_i,\, c_i,\, t_i.} \tag{8.10}$$

其中，$i = 1, 2, 3$ 是夸克的颜色指标，同味异色的夸克具有相同的质量和电荷。这个拉氏量具有 U(1) 规范对称性。因此，我们说 QED 是一种 U(1) **规范理论** (gauge theory)，而电磁场是一种 U(1) **规范场** (gauge field)，光子是一种**规范玻色子** (gauge boson)。$\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 包含场的动能项和质量项。除此之外，把协变导数展开，可以发现 $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 还包含相互作用项

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = -\sum_f Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f,} \tag{8.11}$$

描述费米子 f 的**电磁相互作用**。这样的相互作用称为**规范相互作用**，而单位电荷量 e 是一个**规范耦合常数**。

容易看出，$\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 也具有 U(1) 整体对称性。类似于 5.5.3 小节的做法，根据 Noether 定理将相应守恒流定义成

$$\boxed{J^\mu_{\text{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f,} \tag{8.12}$$

注意上式在定义上包含了单位电荷量 e。J^μ_{EM} 称为**电磁流** (electromagnetic current)，满足电磁流守恒方程

$$\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}} = 0. \tag{8.13}$$

可见，QED 相互作用拉氏量具有流耦合形式

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J^\mu_{\text{EM}}. \tag{8.14}$$

注意到 (4.48) 的第一式，推出

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial A_\nu} = -J^\nu_{\text{EM}}. \tag{8.15}$$

从而，Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu_{\text{EM}}, \tag{8.16}$$

故电磁场的经典运动方程为

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu_{\mathrm{EM}}.} \tag{8.17}$$

这是有源的 **Maxwell 方程** (1.137)，源为带电费米子的电磁流。

另一方面，由

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial \psi_f} = -m_f \bar{\psi}_f - Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu, \tag{8.18}$$

有

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial \psi_f} = \mathrm{i}(\partial_\mu \bar{\psi}_f)\gamma^\mu + m_f \bar{\psi}_f + Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu. \tag{8.19}$$

取厄米共轭，利用 (5.87) 式，得

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi_f + m_f \gamma^0 \psi_f + Q_f e A_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi_f = -\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f - Q_f e A_\mu \gamma^\mu)\psi_f, \tag{8.20}$$

于是推出 ψ_f 的经典运动方程

$$\boxed{(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = 0.} \tag{8.21}$$

也就是说，只要把 Dirac 方程中的普通导数替换成协变导数，就得到 QED 中**费米子场的经典运动方程**。

对这个方程左乘 $(\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu + m_f)$，得

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu + m_f)(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = (-\gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu - m_f^2)\psi_f = -(\not{D}^2 + m_f^2)\psi_f, \tag{8.22}$$

其中，

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu D_\nu \\ &= \frac{1}{2}(2g^{\mu\nu} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu D_\nu = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu. \end{aligned} \tag{8.23}$$

调整 Lorentz 指标，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu + [\gamma^\nu, \gamma^\mu] D_\nu D_\mu) = \frac{1}{4}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu - [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\nu D_\mu) \\ &= \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][D_\mu, D_\nu], \end{aligned} \tag{8.24}$$

根据定义式 (5.42)，$\not{D}^2$ 化为

$$\not{D}^2 = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]. \tag{8.25}$$

对 ψ_f 连续作用两次协变导数算符，得

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \psi_f &= (\partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu)(\partial_\nu \psi_f + \mathrm{i}Q_f e A_\nu \psi_f) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \psi_f + \mathrm{i}Q_f e \partial_\mu (A_\nu \psi_f) + \mathrm{i}Q_f e A_\mu \partial_\nu \psi_f - Q_f^2 e^2 A_\mu A_\nu \psi_f, \end{aligned} \tag{8.26}$$

故 $[D_\mu, D_\nu]$ 对 ψ_f 的作用为

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi_f &= D_\mu D_\nu \psi_f - D_\nu D_\mu \psi_f = \mathrm{i}Q_f e[\partial_\mu(A_\nu\psi_f) + A_\mu\partial_\nu\psi_f - \partial_\nu(A_\mu\psi_f) - A_\nu\partial_\mu\psi_f] \\ &= \mathrm{i}Q_f e[(\partial_\mu A_\nu)\psi_f - (\partial_\nu A_\mu)\psi_f] = \mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}\psi_f. \end{aligned} \tag{8.27}$$

由 ψ_f 场的任意性有

$$\boxed{[D_\mu, D_\nu] = \mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}.} \tag{8.28}$$

也就是说，协变导数算符的对易子 $[D_\mu, D_\nu]$ 实际上不包含对 ψ_f 的求导操作，而直接对应于场强张量 $F_{\mu\nu}$。$\not{D}^2$ 进一步化为

$$\not{D}^2 = D^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{8.29}$$

于是，ψ_f 的运动方程 (8.22) 变成

$$\left(D^2 + m_f^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi_f = 0. \tag{8.30}$$

与自由 Dirac 旋量场满足的 Klein-Gordon 方程 (5.111) 相比，不仅普通导数替换成协变导数，还多出一个正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项。

回顾 (1.131)、(1.129)、(5.77) 和 (5.82) 式，有

$$F_{ij} = F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k, \quad F_{0i} = -F^{0i} = E^i, \tag{8.31}$$

$$\sigma^{ij} = 2\mathcal{S}^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = 2\mathcal{S}^{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}, \tag{8.32}$$

故

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} &= F_{ij}\sigma^{ij} + 2F_{0i}\sigma^{0i} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}B^k\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} + 2\mathrm{i}E^i\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix} \\ &= -2\delta^{kl}\begin{pmatrix}B^k\sigma^l & \\ & B^k\sigma^l\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E^i\sigma^i & \\ & \mathrm{i}E^i\sigma^i\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.33}$$

注意到 $Q_e = -1$，电子场 ψ_e 的运动方程可以写成

$$\left[(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 + m_e^2 + e\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi_e = 0. \tag{8.34}$$

这里采用缩写 $(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 \equiv (\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu - \mathrm{i}eA^\mu)$，即 Lorentz 矢量的平方指它的自我内积。在非相对论近似下，此方程对应于量子力学里描述电子在电磁场中运动的 **Schrödinger-Pauli 方程** [35]

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \left[\frac{1}{2m_e}(-\mathrm{i}\nabla + e\mathbf{A})^2 - eA^0 + \mu_\mathrm{B}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]|\Psi\rangle, \tag{8.35}$$

其中 $|\Psi\rangle$ 是电子的自旋双重态，而

$$\boxed{\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e}{2m_e}} \tag{8.36}$$

是 **Bohr 磁子** (magneton)，它是电子磁偶极矩 (magnetic dipole moment) 的基本单位。可见，正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项描述费米子自旋导致的内禀磁偶极矩与电磁场之间的相互作用，其中 $\pm\mathrm{i}\,\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 项是相对论修正。

下面给出 QED 的 Feynman 规则。由于电磁场是无质量矢量场，如 4.4.2 小节所述，对 QED 进行正则量子化时，需要加入规范固定项 $-(2\xi)^{-1}(\partial_\mu A^\mu)^2$，并可采用 Feynman 规范 ($\xi = 1$) 以得到简单的结果。根据第 7 章的知识，我们写出 **QED 的动量空间 Feynman 规则**如下。

1. 正费米子 f 入射外线：f, λ $= u(\mathbf{p}, \lambda)$.

2. 反费米子 $\bar{f}$ 入射外线：$\bar{f}, \lambda$ $= \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$.

3. 正费米子 f 出射外线： $f, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$.

4. 反费米子 $\bar{f}$ 出射外线： $\bar{f}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$.

5. 费米子 f 传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_f + \mathrm{i}\epsilon}$.

6. 光子 γ 入射外线：$\gamma, \lambda; \mu$ $= \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$.

7. 光子 γ 出射外线： $\gamma, \lambda; \mu = \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda)$.

8. 光子 γ 传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ (Feynman 规范) .

9. QED 相互作用顶点：

$= -\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$.

图 8.1: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 领头阶 Feynman 图。

注意，我们在这里将光子记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆。在这些规则中，Lorentz 指标 μ 和 ν 既可以写成上标，也可以写成下标，只要在写出不变振幅表达式时保证相同指标上下缩并即可。QED 顶点规则可以这样得到：将相互作用拉氏量 $-Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$ 中的场算符 A_μ、ψ_f 和 $\bar{\psi}_f$ 剥离，再乘以 i，就是顶点规则表达式 $-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$；在图形方面，从顶点引出三个线头，$A_\mu$ 场给出波浪线头，ψ_f 场给出指向顶点的实线头，$\bar{\psi}_f$ 场给出背向顶点的实线头。由于 QED 相互作用涉及多种带电费米子，我们在 QED 顶点的 Feynman 图上标注了三个线头对应的粒子名（只写正粒子名），以避免混淆。在 QED 相互作用项 (8.11) 中，每一项耦合着 ψ_f 场和它的 Dirac 共轭场 $\bar{\psi}_f$，因此，一个 QED 顶点只能联系同一种费米子 f 及其反粒子 $\bar{f}$，而无法联系不同的费米子 f 和 f'。

8.2 正负电子湮灭到正负 μ 子

在本节中，我们讨论一个典型的 QED 散射过程，一对正负电子湮灭成一对正负 μ 子，即 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$。利用 QED 的 Feynman 规则中的图形拼接出这个过程的领头阶 Feynman 图，得到一个包含 2 个 QED 顶点的树图，如图 8.1 所示，它只有 1 种拓扑结构。由于 μ 子质量比电子质量大得多，根据能动量守恒定律，此过程仅当正负电子对的质心能 $E_{\mathrm{CM}} > 2m_\mu$ 时才能发生。

8.2.1 不变振幅

根据 QED 的 Feynman 规则和 $Q_e = Q_\mu = -1$，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$= \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2'). \tag{8.37}$$

根据能动量守恒，光子传播子的四维动量 q^μ 满足

$$q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu. \tag{8.38}$$

从而，运动学要求

$$q^2 = (p_1+p_2)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 > 4m_\mu^2. \tag{8.39}$$

于是，这个过程的光子传播子 $-\mathrm{i}g_{\mu\nu}/(q^2+\mathrm{i}\epsilon)$ 在运动学允许的区域上没有极点，因此我们在写下不变振幅 (8.37) 时可以丢弃无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$。一般来说，

> 只要不涉及传播子的极点，则传播子分母上的无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$ 可以忽略。

于是，$\mathrm{i}\epsilon$ 在许多树图计算中可以忽略。然而，在圈图计算中，需要对圈动量的所有取值积分，通常会涉及到传播子的极点，因而 $\mathrm{i}\epsilon$ 不可忽略。

根据 γ^0 的厄米性和 (5.87) 式，有 $(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$，故 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 表达式中旋量双线性型 $\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)$ 的复共轭[1]为

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v. \tag{8.40}$$

类似地，$(\bar{u}\gamma_\mu v)^* = \bar{v}\gamma_\mu u$。于是，$\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的复共轭为

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1'). \tag{8.41}$$

从而，不变振幅的模方是

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{(q^2)^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1') \\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1') \\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu] \\
&\qquad \times\,\mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu].
\end{aligned} \tag{8.42}$$

第二步调换了 $[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]$ 的位置。第三步采取计算 (7.46) 式时使用过的 *Casimir* 技巧，因而出现求迹运算。第一个迹对应于正负电子的费米子线，第二个迹对应于正负 μ 子的费米子线。也就是说，运用 Casimir 技巧之后，Feynman 图中的一条费米子线通常对应于一个迹。

在现实的实验中，通常不会控制入射粒子的自旋状态，即采用非极化的入射束流。另一方面，粒子探测器 (detector) 通常也不能区分出射粒子的自旋状态。因而在计算上述过程的散射

[1]由于 $\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)$ 是旋量空间上的 1×1 矩阵，其复共轭等于厄米共轭。

截面时，需要对**入射**正负电子的螺旋度 λ_1 和 λ_2 **取平均**，对**出射**正负 μ 子的螺旋度 λ_1' 和 λ_2' **求和**。也就是说，应当计算**非极化**不变振幅模方

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=\pm}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2=\pm}\sum_{\lambda_1'=\pm}\sum_{\lambda_2'=\pm}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu] \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\nu]\ \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\nu].
\end{aligned}
\tag{8.43}
$$

最后一步用到自旋求和关系 (5.214)。现在，问题归结为计算 Dirac 矩阵乘积的迹。

8.2.2 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧

在上一章中，我们计算过 Dirac 矩阵的迹和 2 个 Dirac 矩阵乘积的迹，即 (7.50) 和 (7.53) 式：$\mathrm{tr}(\gamma^\mu)=0$，$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu}$。实际上，利用 $(\gamma^5)^2=\mathbf{1}$、$\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= \mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}\times\gamma^5\gamma^5) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^5\times\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}\times\gamma^5) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5\times\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) \\
&= -\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}).
\end{aligned}
\tag{8.44}
$$

因此，奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零。这个结论自然包含 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu)=0$。

对于 4 个 Dirac 矩阵乘积的迹，多次利用 $\gamma^\mu\gamma^\nu=2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma-2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma+\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma) \\
&= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma-2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma+2\gamma^\nu\gamma^\rho g^{\mu\sigma}-\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\sigma)-2g^{\mu\rho}\,\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\sigma)+2g^{\mu\sigma}\,\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho)-\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma),
\end{aligned}
\tag{8.45}
$$

故 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)=4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$。

根据定义，$\gamma^5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，因而它相当于 4 个 Dirac 矩阵之积。于是，γ^5 与奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零。利用 $(\gamma^0)^2=\mathbf{1}$ 和 $\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5$，得

$$
\mathrm{tr}(\gamma^5)=\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^0)=-\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0)=-\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5)=-\mathrm{tr}(\gamma^5).
\tag{8.46}
$$

可见 $\mathrm{tr}(\gamma^5)=0$。

由于 $(\gamma^\mu)^2=\pm\mathbf{1}$ 在 $\mu=0$ 时取正号、在 $\mu=1,2,3$ 时取负号，若 $\mu=\nu$，则 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^5)=0$。若 $\mu\neq\nu$，取 $\alpha\neq\mu,\nu$，再利用 $(\gamma^\alpha)^2=\pm\mathbf{1}$、$\gamma^\mu\gamma^\alpha=-\gamma^\alpha\gamma^\mu$ 和 $\gamma^\nu\gamma^\alpha=-\gamma^\alpha\gamma^\nu$ 推出

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\alpha)=\mp\,\mathrm{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha)=\mp\,\mathrm{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)=-\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5). \tag{8.47}$$

故 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)=0$ 对任意 μ 和 ν 成立。

对于 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$，只要 (μ,ν,ρ,σ) 这 4 个指标中有 2 个指标相等，就能够类似地推出 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=0$。因此,仅当 (μ,ν,ρ,σ) 是 $(0,1,2,3)$ 的某种置换时,才能得到例外的结果;由于 Dirac 矩阵的反对易性质，此时有 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$，且偶置换取正号，奇置换取负号。根据四维 Levi-Civita 符号的定义 (1.101)，即得 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$。现在,

$$\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)=-\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5)=-\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})=-4\mathrm{i}, \tag{8.48}$$

因而 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=-4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$。

总结起来，有下列**求迹公式**,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{1}) &= 4, && (8.49)\\
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= 0, && (8.50)\\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}, && (8.51)\\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), && (8.52)\\
\mathrm{tr}(\gamma^5) &= 0, && (8.53)\\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0, && (8.54)\\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= -4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. && (8.55)
\end{aligned}$$

除了求迹，还经常遇到 Lorentz 指标的缩并运算。首先,

$$\gamma^\mu\gamma_\mu=g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu+g_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu)=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=\delta^\mu{}_\mu=4. \tag{8.56}$$

其次,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu=2g^{\mu\nu}\gamma_\mu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu=2\gamma^\nu-4\gamma^\nu=-2\gamma^\nu. \tag{8.57}$$

再次,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu=2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma_\mu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu=2\gamma^\rho\gamma^\nu+2\gamma^\nu\gamma^\rho=2\{\gamma^\rho,\gamma^\nu\}=4g^{\nu\rho}. \tag{8.58}$$

最后,

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu=2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu-4g^{\rho\sigma}\gamma^\nu\\
&= 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu-2(\gamma^\rho\gamma^\sigma+\gamma^\sigma\gamma^\rho)\gamma^\nu=-2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. && (8.59)
\end{aligned}$$

另一方面，我们可能会遇到度规和 Levi-Civita 符号的缩并。首先，(1.25) 式给出 $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\nu\mu} = \delta^{\mu}{}_{\mu} = 4$。其次，(1.106) 式告诉我们 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$。

再次，根据 Levi-Civita 符号的性质，对 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ 中缩并有贡献的 α、β、γ、μ（或 ν）必须互不相同，导致 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ 只在 $\mu = \nu$ 时非零，即 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \propto \delta^{\mu}{}_{\nu}$。取 $\mu = \nu = 3$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma 3} = 3!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -6$，故比例系数为 -6。因此 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^{\mu}{}_{\nu}$。

最后，$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ 仅在 $(\mu,\nu) = (\rho,\sigma)$ 或 $(\mu,\nu) = (\sigma,\rho)$ 时非零，而且这两种情况的数值互为相反数，故 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \propto \delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho}$。取 $(\mu,\nu) = (\rho,\sigma) = (2,3)$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta 23}\varepsilon_{\alpha\beta 23} = 2!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -2$，因而 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho})$。

总结起来，有下列缩并公式，

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = 4, \tag{8.60}$$
$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = -2\gamma^{\nu}, \tag{8.61}$$
$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu} = 4g^{\nu\rho}, \tag{8.62}$$
$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu} = -2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}, \tag{8.63}$$
$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4, \tag{8.64}$$
$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24, \tag{8.65}$$
$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^{\mu}{}_{\nu}, \tag{8.66}$$
$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho}). \tag{8.67}$$

在实际计算中，经常遇到四维动量与 Dirac 矩阵的缩并，我们进一步导出下列有用公式。

$$\gamma^{\mu}\not{p} = p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = p_{\nu}(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = 2p^{\mu} - \not{p}\gamma^{\mu}, \tag{8.68}$$
$$\not{p}\not{k} = p_{\mu}\gamma^{\mu}\not{k} = p_{\mu}(2k^{\mu} - \not{k}\gamma^{\mu}) = 2\,p\cdot k - \not{k}\not{p}, \tag{8.69}$$
$$\not{p}\not{p} = \frac{1}{2}(\not{p}\not{p} + \not{p}\not{p}) = \frac{1}{2}\,2\,p\cdot p = p^2, \tag{8.70}$$
$$\gamma^{\mu}\not{p}\gamma_{\mu} = p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = -2p_{\nu}\gamma^{\nu} = -2\not{p}, \tag{8.71}$$
$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\not{p}\gamma_{\mu} = p_{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu} = 4p_{\rho}g^{\nu\rho} = 4p^{\nu}, \tag{8.72}$$
$$\gamma^{\mu}\not{p}\not{k}\gamma_{\mu} = p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\not{k}\gamma_{\mu} = 4p_{\nu}k^{\nu} = 4\,p\cdot k, \tag{8.73}$$
$$\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}) = p_{\mu}k_{\nu}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = 4p_{\mu}k_{\nu}g^{\mu\nu} = 4\,p\cdot k, \tag{8.74}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}\not{q}\not{l}) &= p_{\mu}k_{\nu}q_{\rho}l_{\sigma}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) = 4p_{\mu}k_{\nu}q_{\rho}l_{\sigma}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &= 4[(p\cdot k)(q\cdot l) - (p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)],\end{aligned} \tag{8.75}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}) &= p_{\rho}k_{\sigma}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}) = 4p_{\rho}k_{\sigma}(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \\ &= 4(p^{\mu}k^{\nu} + p^{\nu}k^{\mu} - g^{\mu\nu}p\cdot k),\end{aligned} \tag{8.76}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu})\,\mathrm{tr}(\not{q}\gamma_{\mu}\not{l}\gamma_{\nu}) &= 16(p^{\mu}k^{\nu} + p^{\nu}k^{\mu} - g^{\mu\nu}p\cdot k)(q_{\mu}l_{\nu} + q_{\nu}l_{\mu} - g_{\mu\nu}q\cdot l) \\ &= 32[(p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)].\end{aligned} \tag{8.77}$$

图 8.2: 质心系中 $2 \to 2$ 散射过程动量示意图。$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 是两个入射粒子的三维动量，$\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 是两个出射粒子的三维动量，散射角 θ 为 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 方向之间的夹角。

当求迹和缩并计算非常复杂时，可利用 `Mathematica` 程序包 `FeynCalc`[2] 辅助计算。

8.2.3　非极化散射截面

现在，我们回到 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方的计算。根据上一小节的求迹公式，(8.43) 式的第一个迹化为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] &= \mathrm{tr}(\not{k}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu) - m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= 4[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)],\end{aligned} \tag{8.78}$$

其中第一步丢弃了具有奇数个 Dirac 矩阵乘积的项。同理，第二个迹变成

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu] &= \mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu) - m_\mu^2\,\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) \\ &= 4[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)].\end{aligned} \tag{8.79}$$

于是，(8.43) 式化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)][p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)] \\ &= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\big[2(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + 2(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) - 2\,p_1\cdot p_2(k_1\cdot k_2 + m_e^2) \\ &\qquad - 2\,k_1\cdot k_2(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2) + 4(k_1\cdot k_2 + m_e^2)(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)\big] \\ &= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + (k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) + m_e^2(p_1\cdot p_2) + m_\mu^2(k_1\cdot k_2) + 2m_e^2m_\mu^2].\end{aligned} \tag{8.80}$$

现在，非极化振幅模方表达成四维动量内积的函数，具有明显的 Lorentz 不变性。

在质心系中，入射和出射粒子的三维动量如图 8.2 所示，将散射角 θ 定义为末态 μ^- 动量 $\mathbf{p}_1$ 与初态 e^- 动量 $\mathbf{k}_1$ 的方向夹角。质心系的总动量为零，即

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \tag{8.81}$$

[2]相关网址：`https://feyncalc.github.io`

故有 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$。根据 (6.358) 式，质心能 $q^0 = E_{\rm CM}$ 平分在两个入射粒子上，也平分在两个出射粒子上，

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\rm CM}}{2}. \tag{8.82}$$

由此推出

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \sqrt{(k_2^0)^2 - m_e^2} = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}^2}{4} - m_e^2} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\beta_e, \tag{8.83}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{(p_2^0)^2 - m_\mu^2} = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}^2}{4} - m_\mu^2} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\beta_\mu, \tag{8.84}$$

其中

$$\beta_e \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{E_{\rm CM}^2}} = \frac{|\mathbf{k}_1|}{k_1^0} = \frac{|\mathbf{k}_2|}{k_2^0}, \quad \beta_\mu \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{p_2^0} \tag{8.85}$$

分别是电子和 μ 子在质心系中的**运动速率**。

现在推导四维动量之间内积的表达式。质心能 $E_{\rm CM}$ 满足

$$E_{\rm CM}^2 = q^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1 \cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1 \cdot k_2), \tag{8.86}$$

同理有 $E_{\rm CM}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1 \cdot p_2)$，故

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2, \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2. \tag{8.87}$$

根据能动量守恒定律，$k_1 + k_2 = p_1 + p_2$，则 $k_1 - p_1 = p_2 - k_2$。从而推出

$$m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_1 \cdot p_1 = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_2 \cdot p_2, \tag{8.88}$$

所以有

$$k_2 \cdot p_2 = k_1 \cdot p_1 = k_1^0 p_1^0 - |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 - \beta_e\beta_\mu\cos\theta). \tag{8.89}$$

另一方面，也有 $k_1 - p_2 = p_1 - k_2$，同理推出

$$k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 + |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 + \beta_e\beta_\mu\cos\theta). \tag{8.90}$$

由 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ 得 $q \cdot k_1 = q^0 k_1^0 = E_{\rm CM}^2/2$，由此可见

$$q \cdot k_1 = q \cdot k_2 = q \cdot p_1 = q \cdot p_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2}. \tag{8.91}$$

利用以上表达式，将非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{E_{\rm CM}^4}\Bigg[&\frac{E_{\rm CM}^4}{16}(1 - \beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2 + \frac{E_{\rm CM}^4}{16}(1 + \beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2 \\ &+ m_\mu^2\left(\frac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2\right) + m_e^2\left(\frac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2\right) + 2m_e^2 m_\mu^2\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^2}\left[E_{\mathrm{CM}}^2(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta)+4(m_e^2+m_\mu^2)\right] \\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right],
\end{aligned}
\tag{8.92}
$$

其中精细结构常数定义为

$$
\boxed{\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}.}
\tag{8.93}
$$

此处 $\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto \alpha^2$，因而我们说 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程振幅模方的领头阶是 α^2 阶，而 Feynman 图 8.1 包含 2 个 QED 顶点。1 个 QED 顶点在振幅上贡献一个 e 因子，因而在振幅模方上贡献一个 α 因子。由此可以推断，包含 n 个 QED 顶点的 Feynman 图在振幅模方上对应于 α^n 阶过程。

$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 依赖于 θ，但不依赖于方位角 ϕ。根据 (6.365) 式，非极化微分散射截面为

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\beta_\mu\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e} = \frac{\alpha^2\beta_\mu}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right].
\tag{8.94}
$$

利用

$$
\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\sin\theta = \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta = 2, \qquad \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\cos^2\theta = \int_{-1}^1 \cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{3},
\tag{8.95}
$$

此过程末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，对全立体角积分，得到非极化散射截面

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{2E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[2+\frac{2}{3}\beta_e^2\beta_\mu^2+\frac{8(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[3+\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)+\frac{12(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[1+\frac{2(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}+\frac{4m_e^2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^4}\right] = \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left(1+\frac{2m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right).
\end{aligned}
\tag{8.96}
$$

图 8.3 根据上式画出散射截面 σ 随质心能 E_{CM} 的变化曲线，同时标注着 PETRA 对撞机上 TASSO 探测器测量到的实验数据 [36]。可以看到，QED 领头阶预言结果与实验数据符合得比较好。

由于 $m_e \ll m_\mu < E_{\mathrm{CM}}/2$，我们可以近似地忽略电子质量，则 $\beta_e \simeq 1$，而散射截面近似为

$$
\sigma \simeq \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right).
\tag{8.97}
$$

若 $E_{\mathrm{CM}} \gg m_\mu$，则 $\beta_\mu \simeq 1$，散射截面进一步近似为

$$
\sigma \simeq \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\mathrm{CM}}^2}.
\tag{8.98}
$$

图 8.3: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面。实验数据来自 TASSO 合作组 [36]。

8.2.4 极化振幅

根据 (8.37) 式，螺旋度为 λ_1 和 λ_2 的 e^- 和 e^+ 湮灭到螺旋度为 λ_1' 和 λ_2' 的 μ^- 和 μ^+ 的过程对应的极化不变振幅为

$$\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2'). \tag{8.99}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2' = \pm$，而 $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 都是用旋量双线性型表达的 Lorentz 矢量。在本小节中，我们将探索极化振幅的显明表达式。

依照图 8.2 中空间直角坐标系的定义，z 轴沿 $\mathbf{k}_1$ 方向，初末态四个粒子的动量均位于 xz 平面上，则末态 μ^- 和 μ^+ 四维动量的分量表达式为

$$p_1^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,\beta_\mu s_\theta,0,\beta_\mu c_\theta), \quad p_2^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,-\beta_\mu s_\theta,0,-\beta_\mu c_\theta). \tag{8.100}$$

这里我们采用了缩写 $s_\theta \equiv \sin\theta$ 和 $c_\theta \equiv \cos\theta$。根据 (5.162) 式和三角函数倍角公式

$$s_\theta = 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}, \quad 1+c_\theta = 2c_{\theta/2}^2, \quad 1-c_\theta = 2s_{\theta/2}^2, \tag{8.101}$$

得到相应螺旋态 $\xi_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)$ 和 $\xi_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的形式为

$$\xi_+(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\\ |\mathbf{p}_1|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2c_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2c_{\theta/2}^2\\ 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{8.102}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}-|\mathbf{p}_1|s_\theta\\ |\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\ c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{8.103}$$

$$\xi_+(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\\ -|\mathbf{p}_2|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2s_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2s_{\theta/2}^2\\ -2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\ -c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{8.104}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|s_\theta \\ |\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2}\end{pmatrix}. \tag{8.105}$$

可以看出，当正负 μ 子的动量在空间中转动 θ 角时，旋量空间中的螺旋态只转动 $\theta/2$ 角，这正是自旋 1/2 的特征。

另一方面，初态 e^- 和 e^+ 的四维动量分量为

$$k_1^\mu = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}(1,0,0,\beta_e), \quad k_2^\mu = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}(1,0,0,-\beta_e). \tag{8.106}$$

与 μ^- 和 μ^+ 四维动量的差异在于 β_μ 换成 β_e，且 $\theta = 0$。因此，只要将 μ^- 和 μ^+ 螺旋态表达式中的 θ 取为 0，就得到 e^- 和 e^+ 螺旋态 $\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\xi_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)$ 的如下表达式，

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{8.107}$$

在 Weyl 表象中，

$$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{\sigma}^\mu & \\ & \sigma^\mu\end{pmatrix}, \tag{8.108}$$

根据 (5.180) 和 (5.196) 式，正负电子贡献的 Lorentz 矢量 $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 化为

$$\begin{aligned}
&\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) = v^\dagger(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^0\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) \\
&= \begin{pmatrix}\lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2) & -\lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\sigma}^\mu & \\ & \sigma^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) \\ \omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\end{pmatrix} \\
&= \lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) - \lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1).
\end{aligned} \tag{8.109}$$

按照定义式 (5.168)，有

$$\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) = \sqrt{(k_2^0+|\mathbf{k}_2|)(k_1^0+|\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}} = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}, \tag{8.110}$$

$$\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) = \sqrt{(k_2^0-|\mathbf{k}_2|)(k_1^0-|\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}} = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}. \tag{8.111}$$

再由

$$\sqrt{1-\beta_e^2} = \sqrt{1-\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)} = \frac{2m_e}{E_{\mathrm{CM}}} \tag{8.112}$$

导出

$$\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) = \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\sqrt{1-\beta_e^2} = m_e. \tag{8.113}$$

将 (5.74) 和 (3.54) 式代入，得到 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ 的分量表达式为

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (0,-1,-\mathrm{i},0) = -\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1), \tag{8.114}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (0,1,-\mathrm{i},0) = -\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1), \tag{8.115}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1,0,0,1), \qquad \xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = (1,0,0,-1), \tag{8.116}$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-1,0,0,1), \quad \xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = (-1,0,0,-1). \tag{8.117}$$

从而，初末 Lorentz 矢量 $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的分量表达式是

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) + \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,\mathrm{i},0) + \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,-\mathrm{i},0),
\end{aligned} \tag{8.118}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) - \omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,\mathrm{i},0) - \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,\mathrm{i},0),
\end{aligned} \tag{8.119}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) - \omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= m_e(1,0,0,-1) - m_e(1,0,0,1) = 2m_e(0,0,0,-1),
\end{aligned} \tag{8.120}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) + \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= -m_e(-1,0,0,-1) + m_e(-1,0,0,1) = 2m_e(0,0,0,1).
\end{aligned} \tag{8.121}$$

另一方面，正负 μ 子贡献的 Lorentz 矢量 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 化为

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2') = u^\dagger(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^0\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\\
&= \begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1) & \omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\sigma}_\mu & \\ & \sigma_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2'\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\\ -\lambda_2'\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\end{pmatrix}\\
&= \lambda_2'\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2) - \lambda_2'\omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2).
\end{aligned} \tag{8.122}$$

此时有

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}, \quad \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}, \tag{8.123}$$

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = m_\mu. \tag{8.124}$$

利用三角函数公式

$$c_{\theta/2}^2 - s_{\theta/2}^2 = c_\theta, \quad s_{\theta/2}^2 + c_{\theta/2}^2 = 1, \tag{8.125}$$

推出 $\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 和 $\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的分量为

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\-c_{\theta/2}\end{pmatrix} = (0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta) = -\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2), \tag{8.126}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix} = (0,-c_\theta,-\mathrm{i},s_\theta) = -\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2), \tag{8.127}$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix} = (1,-s_\theta,0,-c_\theta), \tag{8.128}$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = (1,s_\theta,0,c_\theta), \tag{8.129}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\ -c_{\theta/2}\end{pmatrix} = (-1,-s_\theta,0,-c_\theta), \tag{8.130}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = (-1,s_\theta,0,c_\theta). \tag{8.131}$$

从而，末态 Lorentz 矢量 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 的分量是

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) &= -\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)+\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)\\ &= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}(0,-c_\theta,\mathrm{i},s_\theta)+\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}(0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta)\\ &= E_{\mathrm{CM}}(0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta),\end{aligned} \tag{8.132}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) &= \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)-\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)\\ &= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta)-\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}(0,-c_\theta,-\mathrm{i},s_\theta)\\ &= E_{\mathrm{CM}}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta),\end{aligned} \tag{8.133}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) &= \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)-\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)\\ &= m_\mu(1,s_\theta,0,c_\theta)-m_\mu(1,-s_\theta,0,-c_\theta) = 2m_\mu(0,s_\theta,0,c_\theta),\end{aligned} \tag{8.134}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) &= -\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)+\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)\\ &= -m_\mu(-1,s_\theta,0,c_\theta)+m_\mu(-1,-s_\theta,0,-c_\theta) = 2m_\mu(0,-s_\theta,0,-c_\theta).\end{aligned} \tag{8.135}$$

与动量一样，这些 Lorentz 矢量的空间分量转动的角度是 θ，对应的角动量量子数是 1，它是由两个量子数为 1/2 的自旋角动量耦合出来的。

将上述表达式代入 (8.99) 式，就得到极化振幅的显明表达式。下面分 4 类螺旋度构型进行讨论。

(1) 当正负电子具有相反螺旋度 ($\lambda_1=-\lambda_2$)、正负 μ 子也具有相反螺旋度 ($\lambda_1'=-\lambda_2'$) 时，极化振幅为

$$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -e^2(1+\cos\theta), \tag{8.136}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -e^2(1+\cos\theta), \tag{8.137}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = e^2(1-\cos\theta), \tag{8.138}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = e^2(1-\cos\theta). \tag{8.139}$$

(a) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,+,-)$, $\theta = \pi$ (b) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,-,+)$, $\theta = 0$

图 8.4: $\lambda_1 = -\lambda_2$ 且 $\lambda_1' = -\lambda_2'$ 时的零振幅构型示意图。

我们发现 $\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 且 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$。实际上，QED 是一个**宇称守恒**的理论，即具有空间反射对称性。在宇称变换下，粒子的动量方向反转，角动量方向不变，因而螺旋度翻转，但 θ 角不变。于是，对所有螺旋度作翻转变换之后，宇称守恒保证 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ 不变，故振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 不变，而振幅至多相差一个相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，

$$\mathcal{M}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_1', -\lambda_2') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'). \tag{8.140}$$

对于这里的两种情况，相位因子都是 1。

根据 (6.365) 式，$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,+,-)$ 和 $(-,+,-,+)$ 两种构型对应的极化微分散射截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu e^4(1+\cos\theta)^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1+\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}. \tag{8.141}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,-,+)$ 和 $(-,+,+,-)$ 对应的极化微分截面也相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1-\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}. \tag{8.142}$$

可以看到，当 $\theta = \pi$ 时，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = 0$。此时，动量和角动量构型如图 8.4(a) 所示，双线箭头 $\Rightarrow$ 表示自旋角动量的方向，与动量方向一致时螺旋度为正，反之为负。e^+e^- 系统角动量 $\mathbf{J}$ 的量子数为 $j = 1$，方向为 z 轴正向，J^3 本征值为 $\sigma = +1$；$\mu^+\mu^-$ 系统角动量 $\mathbf{J}$ 的量子数为 $j = 1$，方向为 z 轴负向，J^3 本征值为 $\sigma = -1$。初末态系统的 J^3 本征值不同，不满足角动量守恒，因此振幅为零。当 $\theta \neq \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统是三种 J^3 本征态 $|\sigma = +1\rangle$、$|\sigma = 0\rangle$ 和 $|\sigma = -1\rangle$ 的叠加态，在振幅上体现为一个 $(1+\cos\theta)$ 因子。

对图 8.4(b) 可作类似分析，因此 $\theta = 0$ 时有 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = 0$，而 $\theta \neq 0$ 时振幅上出现一个 $(1-\cos\theta)$ 因子。

(2) 当正负电子具有相同螺旋度 $(\lambda_1 = \lambda_2)$、正负 μ 子也具有相同螺旋度 $(\lambda_1' = \lambda_2')$ 时，极化振幅为

$$\mathcal{M}(+,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu\cos\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \tag{8.143}$$

图 8.5: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$ 且 $\theta = \pi/2$ 时的零振幅构型示意图。

$$\mathcal{M}(-,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}, \tag{8.144}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}, \tag{8.145}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}. \tag{8.146}$$

这些振幅都正比于 $m_e m_\mu \cos\theta$，宇称变换引起的相位因子都是 1。这四个振幅对应的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{16e^4 m_e^2 m_\mu^2 \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^4} = \frac{4\alpha^2 m_e^2 m_\mu^2 \beta_\mu \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^6 \beta_e}. \tag{8.147}$$

一个**类时虚粒子**的行为类似于一个实粒子，其四维动量内积的平方根 $\sqrt{p^2}$ 可以看作它的有效质量，它的自旋与相应的实粒子相同。$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的中间态是一个类时的虚光子，它的自旋为 1，角动量量子数为 $j = 1$。不过，具有相同螺旋度的正反粒子对在质心系中的角动量为 $j = 0$，必须翻转其中一个粒子的螺旋度才能得到角动量 $j = 1$。

实际上，粒子的**质量可以翻转螺旋度**。根据 3.3.2 小节知识，对于无质量的自由粒子，螺旋度在任意惯性系中不变。然而，对于有质量的自由粒子，螺旋度在不同惯性系中可以具有不同的值；毕竟，在静止系中粒子动量为零，因而螺旋度不确定。可以将质量看作一种耦合，耦合螺旋度相反的两种状态，效果是翻转粒子的螺旋度。

对于这里的情况，必须翻转 e^- 或 e^+ 的螺旋度来得到系统角动量为 $j = 1$ 的态，因此振幅中出现一个 $2m_e/E_{\rm CM}$ 因子；同时必须翻转 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度，从而出现一个 $2m_\mu/E_{\rm CM}$ 因子。由于运动学上要求 $E_{\rm CM}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅受到严重压低，贡献可以忽略。这种效应称为**螺旋度压低** (helicity suppression)。

当 $\theta = \pi/2$ 时，出现零振幅。对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$，零振幅构型如图 8.5 所示。图中 e^+ 被质量耦合（用 $\times$ 表示）翻转螺旋度，使得角动量为 $j = 0$ 的 e^+e^- 系统转化成角动量为 $j = 1$ 的虚光子。随后，虚光子转化成角动量为 $j = 1$ 的 $\mu^+\mu^-$ 系统。最后，质量耦合

(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi$

图 8.6: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,-)$ 时的零振幅构型示意图。

将 μ^+ 的螺旋度翻转，从而得到角动量为 $j = 0$ 的 $\mu^+\mu^-$ 系统。但是，虚光子的角动量沿 z 轴正向，当 $\theta = \pi/2$ 时不可能转化成角动量沿 x 轴正向的 $\mu^+\mu^-$ 系统，因而振幅为零。当 $\theta \neq \pi/2$ 时，虚光子转化成 $\mu^+\mu^-$ 系统的概率在振幅上体现为一个 $\cos\theta$ 因子。

(3) 当正负电子具有相同螺旋度 $(\lambda_1 = \lambda_2)$、正负 μ 子具有相反螺旋度 $(\lambda_1' = -\lambda_2')$ 时，极化振幅为

$$\mathcal{M}(+,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{8.148}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{8.149}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{8.150}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}. \tag{8.151}$$

这些振幅都正比于 $m_e \sin\theta$，宇称变换引起的相位因子都是 -1。这四个振幅对应的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{4e^4 m_e^2 \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_e^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4 \beta_e}. \tag{8.152}$$

这里初态 e^+e^- 系统的角动量为 $j = 0$，必须翻转 e^- 或 e^+ 的螺旋度来得到角动量为 $j = 1$ 的态，因而振幅中出现一个 $2m_e/E_{\rm CM}$ 因子，受到螺旋度压低。由于 $E_{\rm CM}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅的贡献可以忽略。当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现零振幅。对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,-)$，零振幅构型如图 8.6(a) 和 8.6(b) 所示。末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 $j = 1$，当 $\theta = 0$ 或 π 时，J^3 本征值为 $\sigma = +1$ 或 $\sigma = -1$，而 e^+e^- 系统的 J^3 本征值为 $\sigma = 0$，不满足角动量守恒，故振幅为零。当 $\theta \neq 0, \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统是 $|\sigma = +1\rangle$、$|\sigma = 0\rangle$ 和 $|\sigma = -1\rangle$ 的叠加态，在振幅上体现为一个 $\sin\theta$ 因子。

(4) 当正负电子具有相反螺旋度 $(\lambda_1 = -\lambda_2)$、正负 μ 子具有相同螺旋度 $(\lambda_1' = \lambda_2')$ 时，极化振幅为

$$\mathcal{M}(+,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{8.153}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{8.154}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{8.155}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}. \tag{8.156}$$

这些振幅都正比于 $m_\mu \sin\theta$，宇称变换引起的相位因子都是 -1。这四个振幅对应的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2\beta_e}\,\frac{4e^4 m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_\mu^2\beta_\mu\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4\beta_e}. \tag{8.157}$$

这里末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 $j=0$，必须翻转 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度来得到角动量为 $j=1$ 的态，因而振幅中出现一个 $2m_\mu/E_{\rm CM}$ 因子，受到螺旋度压低。若 $E_{\rm CM}/2 \gg m_\mu$，则这四个振幅的贡献可以忽略。当 $\theta=0,\pi$ 时，出现零振幅。理由类似于第 (3) 类情况，振幅同样正比于 $\sin\theta$。

利用上述 16 个极化振幅表达式，我们可以直接计算非极化振幅模方，

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')|^2 \\
&= \frac{e^4}{4}\left[2(1+\cos\theta)^2 + 2(1-\cos\theta)^2 + 4\,\frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\rm CM}^4} + 4\,\frac{4m_e^2\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} + 4\,\frac{4m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2}\right] \\
&= e^4\left[1+\cos^2\theta + \frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\rm CM}^4} + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)(1-\cos^2\theta)}{E_{\rm CM}^2}\right] \\
&= e^4\left[1+\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}\right] \\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}\right],
\end{aligned} \tag{8.158}$$

结果与通过求迹运算得到的 (8.92) 式一致。

8.3　手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的螺旋度之间的关系。

在 *Weyl* 表象 (5.68) 中，利用

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{8.159}$$

引入**左手投影矩阵** $P_{\rm L}$ 和**右手投影矩阵** $P_{\rm R}$，

$$\boxed{P_{\rm L} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1}-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_{\rm R} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}.} \tag{8.160}$$

它们是厄米的，而且具有投影性

$$P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}, \quad P_{\mathrm{R}}^2 = P_{\mathrm{R}}, \tag{8.161}$$

正交性

$$P_{\mathrm{L}} P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}} P_{\mathrm{L}} = \mathbf{0}, \tag{8.162}$$

和完备性

$$P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{R}} = \mathbf{1}. \tag{8.163}$$

另外，由 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 有

$$P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{R}}, \quad P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{L}}. \tag{8.164}$$

回顾 (5.112) 式，Dirac 旋量场 ψ 可分解为左手 Weyl 旋量场 η_{L} 和右手 Weyl 旋量场 η_{R}。利用投影矩阵，定义**左手**的四分量旋量场

$$\boxed{\psi_{\mathrm{L}} \equiv P_{\mathrm{L}}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ 0 \end{pmatrix},} \tag{8.165}$$

和**右手**的四分量旋量场

$$\boxed{\psi_{\mathrm{R}} \equiv P_{\mathrm{R}}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix},} \tag{8.166}$$

我们称左手旋量场和右手旋量场具有相反的**手征性**。可见，左右手投影矩阵正好挑选出具有相应手征性的 Weyl 旋量场分量。

根据定义，左手旋量场 ψ_{L} 的 Dirac 共轭为

$$\overline{\psi_{\mathrm{L}}} = (\psi_{\mathrm{L}})^\dagger\gamma^0 = \frac{1}{2}[(1-\gamma^5)\psi]^\dagger\gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5) = \bar{\psi}P_{\mathrm{R}}. \tag{8.167}$$

注意，上式中 $1 \pm \gamma^5$ 是 $\mathbf{1} \pm \gamma^5$ 的简化写法。同理得右手旋量场 ψ_{R} 的 Dirac 共轭为

$$\overline{\psi_{\mathrm{R}}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{L}}. \tag{8.168}$$

对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解，得

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &= \bar{\psi}(P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{R}})\psi = \bar{\psi}(P_{\mathrm{L}}^2 + P_{\mathrm{R}}^2)\psi = \overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}}, && (8.169)\\
\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \bar{\psi}\gamma^\mu(P_{\mathrm{L}}^2 + P_{\mathrm{R}}^2)\psi = \bar{\psi}P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\psi + \bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu P_{\mathrm{R}}\psi = \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}, && (8.170)\\
\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi &= \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu(P_{\mathrm{L}}^2 + P_{\mathrm{R}}^2)\psi = \overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mathrm{R}}, && (8.171)\\
\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi &= \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(P_{\mathrm{L}}^2 + P_{\mathrm{R}}^2)\psi = \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\mathrm{R}}. && (8.172)
\end{aligned}$$

可见，

包含偶数（奇数）个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反（相同）的旋量场。

于是，拉氏量 (5.103) 中的 Dirac 旋量场质量项分解为

$$-m\bar{\psi}\psi = -m(\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}}). \tag{8.173}$$

把上式看作微扰，那么，

质量 m 将左手旋量场 ψ_{L} 与右手旋量场 ψ_{R} 耦合起来。

在高能极限下，忽略旋量场的质量 m，则 $E_{\mathbf{p}} \simeq |\mathbf{p}|$，故

$$\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}, \quad \omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} - |\mathbf{p}|} \simeq 0. \tag{8.174}$$

按照平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式 (5.180) 和 (5.196)，有

$$u(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{8.175}$$

$$u(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.176}$$

$$v(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.177}$$

$$v(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{8.178}$$

此时，螺旋度不同的 u 和 v 显示出不同的手征性，$u(\mathbf{p},+)$ 和 $v(\mathbf{p},-)$ 是右手的，$u(\mathbf{p},-)$ 和 $v(\mathbf{p},+)$ 是左手的。可见，高能极限下手征性等价于螺旋度。回顾 5.4.2 小节，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与螺旋度为 λ 的正费米子相关；而 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与螺旋度为 λ 的反费米子相关。用投影矩阵作用，有

$$u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-) \simeq u(\mathbf{p},-), \quad u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+) \simeq u(\mathbf{p},+), \tag{8.179}$$

$$u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},+) \simeq 0, \quad u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},-) \simeq 0, \tag{8.180}$$

$$v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+) \simeq v(\mathbf{p},+), \quad v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-) \simeq v(\mathbf{p},-), \tag{8.181}$$

$$v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},-) \simeq 0, \quad v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},+) \simeq 0. \tag{8.182}$$

相应的 Dirac 共轭满足

$$\overline{u_{\mathrm{L}}}(\mathbf{p},-) = \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq \bar{u}(\mathbf{p},-), \quad \overline{u_{\mathrm{R}}}(\mathbf{p},+) = \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq \bar{u}(\mathbf{p},+), \tag{8.183}$$

$$\overline{u_{\mathrm{L}}}(\mathbf{p},+) = \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, \quad \overline{u_{\mathrm{R}}}(\mathbf{p},-) = \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq 0, \tag{8.184}$$

$$\overline{v_{\mathrm{L}}}(\mathbf{p},+) = \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq \bar{v}(\mathbf{p},+), \quad \overline{v_{\mathrm{R}}}(\mathbf{p},-) = \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq \bar{v}(\mathbf{p},-), \tag{8.185}$$

$$\overline{v_{\mathrm{L}}}(\mathbf{p},-)=\bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}}\simeq 0,\qquad \overline{v_{\mathrm{R}}}(\mathbf{p},+)=\bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}}\simeq 0. \tag{8.186}$$

据此，将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 平面波展开式 (5.216) 上，得到左右手旋量场的平面波展开式

$$\psi_{\mathrm{L}}(x) = P_{\mathrm{L}}\psi(x)\simeq\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[u(\mathbf{p},-)a_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},+)b^{\dagger}_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{8.187}$$

$$\psi_{\mathrm{R}}(x) = P_{\mathrm{R}}\psi(x)\simeq\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[u(\mathbf{p},+)a_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},-)b^{\dagger}_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{8.188}$$

相应的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x) &= [\psi_{\mathrm{L}}(x)]^{\dagger}\gamma^0\simeq\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\bar{u}(\mathbf{p},-)a^{\dagger}_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+\bar{v}(\mathbf{p},+)b_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right],\\ \overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x) &= [\psi_{\mathrm{R}}(x)]^{\dagger}\gamma^0\simeq\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\bar{u}(\mathbf{p},+)a^{\dagger}_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+\bar{v}(\mathbf{p},-)b_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{8.189}$$

也就是说，

> 在**高能极限**下，忽略质量，左手旋量场 ψ_{L}（等价于左手 Weyl 旋量场 η_{L}）描述左旋极化的正费米子和右旋极化的反费米子，右手旋量场 ψ_{R}（等价于右手 Weyl 旋量场 η_{R}）描述右旋极化的正费米子和左旋极化的反费米子，ψ_{L} 和 ψ_{R} 成为两个**相互独立**的场。

作为对高能极限的微扰，质量项 $-m(\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}}+\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}})$ 耦合着左旋极化 $(\lambda=-)$ 与右旋极化 $(\lambda=+)$ 的正费米子，也耦合着左旋极化与右旋极化的反费米子，所以我们在 8.2.4 小节说“质量可以翻转螺旋度”。

在标准模型中，每一代费米子中的无质量**中微子**由一个左手旋量场 $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 描述，相应地，以 $a^{\dagger}_{\mathbf{p},-}$ 算符产生的粒子是*左旋正中微子*，以 $b^{\dagger}_{\mathbf{p},+}$ 算符产生的粒子是*右旋反中微子*，它们互为正反粒子。标准模型中没有由右手旋量场描述的中微子。

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q},-)u(\mathbf{p},-)\simeq\bar{u}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-)=0,\quad \bar{u}(\mathbf{q},+)u(\mathbf{p},+)\simeq\bar{u}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+)=0, \tag{8.190}$$

$$\bar{v}(\mathbf{q},-)v(\mathbf{p},-)\simeq\bar{v}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-)=0,\quad \bar{v}(\mathbf{q},+)v(\mathbf{p},+)\simeq\bar{v}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+)=0. \tag{8.191}$$

此时两个平面波旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 (8.169) 在平面波旋量系数上的体现。一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \tag{8.192}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \tag{8.193}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \tag{8.194}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\quad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0. \tag{8.195}$$

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \tag{8.196}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \tag{8.197}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \tag{8.198}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0. \tag{8.199}$$

容易看出，在高能极限下，忽略质量，只有 $\lambda_1=-\lambda_2$ 且 $\lambda_1'=-\lambda_2'$ 的螺旋度构型对 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 极化振幅 (8.99) 的贡献非零，与上一小节的计算结果一致。如果不忽略质量，则其它螺旋度构型的贡献正比于质量，表现出螺旋度压低效应。

8.4　Coulomb 散射

8.4.1　$e^-\mu^-$ 散射

现在，我们讨论与 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 散射过程。这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 **Coulomb 散射**。它的领头阶费曼图与图 8.1 类似，但线的方向不同，相应的不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M}=$

$$\begin{aligned}&=\bar{u}(p_1')\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1')\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q'^2}\,\bar{u}(p_2')\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_2')\\&=\frac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2').\end{aligned} \tag{8.200}$$

为简便起见，这里我们将平面波旋量系数 u 和 $\bar{u}$ 写成在壳四维动量的函数，而且没有显明写出对螺旋度的依赖。虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^\mu=k_1'^\mu-p_1'^\mu=p_2'^\mu-k_2'^\mu. \tag{8.201}$$

$\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的复共轭是

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^*=-\frac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu u(p_1')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu u(p_2'), \tag{8.202}$$

非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{e^4}{4(q'^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu u(p_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu u(p_2')$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\sum_{\text{spins}} \mathrm{tr}[u(p_1')\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[u(p_2')\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1'+m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1'+m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_2'+m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}_2'+m_\mu)\gamma_\nu]. \qquad (8.203)
\end{aligned}
$$

其中，$\sum\limits_{\text{spins}}$ 表示对自旋求和，即对螺旋度求和。容易看出，这个结果等价于对 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方 (8.43) 作以下动量替换，

$$
k_1^\mu \to k_1'^\mu,\quad k_2^\mu\to -p_1'^\mu,\quad p_1^\mu\to p_2'^\mu,\quad p_2^\mu\to -k_2'^\mu. \qquad (8.204)
$$

注意这样的替换正好使得 $q^\mu\to q'^\mu$。可见，这两个过程确实具有密切的关系，这种关系称为**交叉对称性** (crossing symmetry)。通过动量替换，我们可以从 (8.80) 式直接得到 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 非极化振幅模方的表达式

$$
\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q'^2)^2}\left[(k_1'\cdot p_2')(p_1'\cdot k_2')+(k_1'\cdot k_2')(p_1'\cdot p_2')-m_e^2(p_2'\cdot k_2')-m_\mu^2(k_1'\cdot p_1')+2m_e^2m_\mu^2\right]. \qquad (8.205)
$$

在质心系中，根据 6.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子的动量满足

$$
|\mathbf{k}_1'|=|\mathbf{k}_2'|=|\mathbf{p}_1'|=|\mathbf{p}_2'|=\frac{E_{\text{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_e^2}{E_{\text{CM}}^2},\frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}\right)\equiv Q. \qquad (8.206)
$$

也就是说，初末态四个粒子的动量大小都是 Q。另一方面，它们的能量是

$$
k_1'^0=p_1'^0=\frac{E_{\text{CM}}^2+m_e^2-m_\mu^2}{2E_{\text{CM}}}\equiv E_e,\quad k_2'^0=p_2'^0=\frac{E_{\text{CM}}^2+m_\mu^2-m_e^2}{2E_{\text{CM}}}\equiv E_\mu, \qquad (8.207)
$$

其中 E_e 是初末态电子的能量，E_μ 是初末态 μ 子的能量。设散射角 θ 为 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$
\begin{aligned}
k_1'\cdot p_1' &= k_1'^0p_1'^0-|\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = E_e^2-Q^2\cos\theta, && (8.208)\\
k_1'\cdot p_2' &= k_1'^0p_2'^0+|\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = E_eE_\mu+Q^2\cos\theta, && (8.209)\\
k_2'\cdot p_2' &= k_2'^0p_2'^0-|\mathbf{k}_2'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = E_\mu^2-Q^2\cos\theta, && (8.210)\\
k_2'\cdot p_1' &= k_2'^0p_1'^0+|\mathbf{k}_2'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = E_eE_\mu+Q^2\cos\theta, && (8.211)\\
k_1'\cdot k_2' &= k_1'^0k_2'^0+|\mathbf{k}_1'||\mathbf{k}_2'| = E_eE_\mu+Q^2, && (8.212)\\
p_1'\cdot p_2' &= p_1'^0p_2'^0+|\mathbf{p}_1'||\mathbf{p}_2'| = E_eE_\mu+Q^2, && (8.213)\\
q'^2=(k_1'-p_1')^2 &= 2m_e^2-2\,k_1'\cdot p_1' = 2(m_e^2-E_e^2+Q^2\cos\theta) = -2Q^2(1-\cos\theta). && (8.214)
\end{aligned}
$$

对任意 $\theta>0$，有 $q'^2<0$，即虚光子是类空的。

于是，$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 化为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\big[&(E_eE_\mu+Q^2\cos\theta)^2+(E_eE_\mu+Q^2)^2 \\
&-m_e^2(E_\mu^2-Q^2\cos\theta)-m_\mu^2(E_e^2-Q^2\cos\theta)+2m_e^2m_\mu^2\big]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2 + Q^4(1+\cos^2\theta)\right.$$
$$\left. + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\right\}. \tag{8.215}$$

接着按照 (6.345) 式计算微分散射截面，式中的入射流因子

$$E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A}-\mathbf{v}_\mathcal{B}| = E_eE_\mu\left(\frac{Q}{E_e}+\frac{Q}{E_\mu}\right) = E_eE_\mu\frac{Q(E_\mu+E_e)}{E_eE_\mu} = QE_{\mathrm{CM}}, \tag{8.216}$$

故微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A}-\mathbf{v}_\mathcal{B}|}\frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{QE_{\mathrm{CM}}}\frac{Q}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2}\\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^4(1-\cos\theta)^2}\left\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2\right.\\ &\qquad\left. + Q^4(1+\cos^2\theta) + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\right\}.\end{aligned} \tag{8.217}$$

由于分母上的 $(1-\cos\theta)^2$ 因子，微分截面对于向前散射 $(\theta\to 0)$ 具有奇性，这是 Coulomb 散射的一个普遍特征。当散射角 θ 很小时，$\cos\theta \simeq 1-\theta^2/2+\mathcal{O}(\theta^4)$，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta\to 0. \tag{8.218}$$

$(1-\cos\theta)^2$ 因子来源于光子传播子贡献的 $q'^2 = -2Q^2(1-\cos\theta)$，故奇性来自接近质壳的虚光子 $(q'^2\to 0)$。

当 $E_{\mathrm{CM}} \gg m_e$ 时，忽略电子质量，有 $E_e \simeq Q = \sqrt{E_\mu^2-m_\mu^2}$，微分截面化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^2(1-\cos\theta)^2}[2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2\cos^2\theta + 2QE_\mu + 2QE_\mu\cos\theta + m_\mu^2\cos\theta]\\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^2(1-\cos\theta)^2}[(E_\mu+Q)^2 + (E_\mu+Q\cos\theta)^2 - m_\mu^2(1-\cos\theta)].\end{aligned} \tag{8.219}$$

在高能极限 $(E_{\mathrm{CM}} \gg m_\mu > m_e)$ 下，$Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{\mathrm{CM}}/2$，则微分截面变成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \simeq \frac{\alpha^2[4+(1+\cos\theta)^2]}{2E_{\mathrm{CM}}^2(1-\cos\theta)^2} = \frac{\alpha^2[1+\cos^4(\theta/2)]}{2E_{\mathrm{CM}}^2\sin^4(\theta/2)}. \tag{8.220}$$

第二步用到三角函数倍角公式 (8.101)。

8.4.2　e^-p 散射

质子 (proton) p 是自旋为 1/2 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV。它是一种**复合粒子**，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态。质子携带的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$。像这样能够贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为**价夸克** (valence quark)。由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$，q 与 $\bar{q}$ 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为**海夸克** (sea quark)。

图 8.7: 当入射电子动量远小于 m_p 时，$e^-p \to e^-p$ 过程的动量示意图。

一个相互作用过程通常涉及一个典型的能量或动量大小，比如质心能 E_{CM} 或上一小节用到的动量 Q，这样的量称为**能标** (energy scale)。当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的点粒子一样。此时，我们可以用一个 Dirac 旋量场来描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点，相应的动量空间顶点规则为

(8.221)

下面讨论电子与质子的 Coulomb 散射 $e^-p \to e^-p$。

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p，从而可取 $m_p \to \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的，初末态电子的运动速率相同，记为 v，运动方向相差散射角 θ，如图 8.7 所示，那么 Coulomb 力引起的微分散射截面为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}.} \tag{8.222}$$

这个式子就是 **Rutherford 公式** [37]。可见，$\theta \to 0$ 时 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \propto \theta^{-4}$ 的奇性在经典物理层面就已经出现了。

这样的奇性表明 Coulomb 力是一种长程力，它的作用范围是无穷大的，可以通过下面的讨论来理解。在没有相互作用的情况下，入射电子的直线运动轨迹与质子之间的最小距离称为**碰撞参数**（impact parameter，也称为瞄准距离）b。在 Coulomb 散射中，利用 Newton 第二定律和角动量守恒定律[3]，可以推出 $b \propto \cot(\theta/2)$，从而 $\theta \to 0$ 意味着无穷大的 b，即质子的 Coulomb 力作用于无穷远处的电子。当然，碰撞参数 b 在实际情况中不可能无限地大；当 b 大到一定程度时，质子携带的正电荷会被外部负电荷所屏蔽，导致 Rutherford 公式不再成立。因此，现实问题中的散射角 θ 通常存在一个下限 $\theta_0 > 0$，这个下限有可能由电荷屏蔽效应所决定，也有可能由探测器的有效覆盖范围所决定，而 Coulomb 散射截面在 $\theta > \theta_0$ 的区间上具有有限的数值。

[3]参考杨福家《原子物理学》（第四版）第一章 §3。

现在转到 QED 中进行讨论，$e^-p \to e^-p$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{u}(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(p_2)\,(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_2) \\
&= -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(k_1)\,\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(k_2). \qquad (8.223)
\end{aligned}
$$

相比于 (8.200) 式，这个结果多出一个负号，这是因为 $Q_p = -Q_\mu = +1$。由于这里只有一幅 Feynman 图，这个符号差异不会影响振幅模方。类比 (8.205) 式，$e^-p \to e^-p$ 非极化振幅模方为

$$
\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2}\,[(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_2) + (k_1\cdot k_2)(p_1\cdot p_2) - m_e^2(p_2\cdot k_2) - m_p^2(k_1\cdot p_1) + 2m_e^2m_p^2]. \qquad (8.224)
$$

现在，我们在 $m_p \to \infty$ 的极限下推导 Rutherford 公式的 QED 相对论性修正。如图 8.7 所示，此时散射前后的质子是静止的，初末态电子的能量都是 E，四维动量分解为

$$
k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}). \qquad (8.225)
$$

初末态电子的动量大小相等，记为

$$
Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}\,. \qquad (8.226)
$$

根据狭义相对论中的关系，初末态电子的运动速率为

$$
v = \frac{Q}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}\,, \qquad (8.227)
$$

因而

$$
m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2). \qquad (8.228)
$$

四维动量的内积可以表达成

$$
\begin{aligned}
k_1\cdot p_1 &= E^2 - Q^2\cos\theta = E^2(1 - v^2\cos\theta), \quad k_2\cdot p_2 = m_p^2, && (8.229)\\
k_1\cdot p_2 &= k_2\cdot p_1 = k_1\cdot k_2 = p_1\cdot p_2 = m_pE, && (8.230)\\
q^2 &= (k_1 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2E^2 + 2Q^2\cos\theta = -2Q^2(1 - \cos\theta). && (8.231)
\end{aligned}
$$

从而，非极化振幅模方化为

$$
\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\,[m_p^2E^2 + m_p^2E^2 - m_e^2m_p^2 - m_p^2E^2(1 - v^2\cos\theta) + 2m_e^2m_p^2]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left(m_p^2E^2 + m_p^2E^2v^2\cos\theta + m_e^2m_p^2\right) \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2 + m_p^2E^2v^2\cos\theta + m_p^2E^2(1-v^2)\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2(1-\cos\theta)^2}\left[2-v^2(1-\cos\theta)\right] = \frac{16\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \qquad (8.232)
\end{aligned}
$$

末态两体不变相空间积分是

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2) = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0p_2^0}\delta(k_1^0+k_2^0-p_1^0-p_2^0) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}Q\,Q^2}{16\pi^2Em_p}\delta\Big(E+m_p-\sqrt{Q^2+m_e^2}-m_p\Big) = \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,Q^2}{16\pi^2Em_p}\left|\frac{\mathrm{d}\big(E-\sqrt{Q^2+m_e^2}\big)}{\mathrm{d}Q}\right|^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q^2}{16\pi^2Em_p}\left|\frac{2Q}{2\sqrt{Q^2+m_e^2}}\right|^{-1} = \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q}{16\pi^2m_p}. \qquad (8.233)
\end{aligned}
$$

第四步用到 (2.62) 式。入射流因子

$$
E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = Em_p\frac{Q}{E} = Qm_p. \qquad (8.234)
$$

此过程末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，根据 (6.331) 式，散射截面是

$$
\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int \mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p}\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2m_p} = \frac{1}{64\pi^2m_p^2}\int \mathrm{d}\Omega\,\overline{|\mathcal{M}|^2}, \qquad (8.235)
$$

微分散射截面为

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad Q \ll m_p.} \qquad (8.236)
$$

上式是 QED 对 Rutherford 公式 (8.222) 的修正，称为 **Mott 公式** [38]。

Mott 公式跟 Rutherford 公式一样不依赖于 m_p，因而 $m_p\to\infty$ 的极限是存在的。在低速近似下，$v\ll 1$，$Q\simeq m_ev$，则 Mott 公式退化成 Rutherford 公式。Mott 公式与 Rutherford 公式的主要不同在于 (8.236) 式中大圆括号里的第二项 $-v^2\sin^2(\theta/2)$，它的起源可以从经典视角来理解：在电子静止系中，与它相对运动的质子电荷引起一个垂直于运动方向的磁场，电子自旋所对应的内禀磁偶极矩与该磁场的相互作用贡献出这一项。图 8.8 画出 $\theta=\pi/4$ 时 Rutherford 公式和 Mott 公式给出的微分散射截面随 v 的变化曲线。

8.4.3 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过交换虚光子发生 Coulomb 散射。在非相对论近似下，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而光子传播子的效应应该等价于电动力学中的 Coulomb 电势。这是接下来要论证的观点。

图 8.8: $\theta = \pi/4$ 时 Rutherford 公式和 Mott 公式给出的微分散射截面随电子速率 v 的变化。

考虑两种带电费米子 f 和 f'，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$，讨论 Coulomb 散射过程 $ff' \to ff'$。记初态四维动量为 k_1 和 k_2，末态四维动量为 p_1 和 p_2。在非相对论近似下，$|\mathbf{k}_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$，粒子能量近似为质量，即

$$k_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{p}_2). \tag{8.237}$$

在此近似下，可将正费米子的平面波旋量系数表达为

$$u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix}, \tag{8.238}$$

其中 ζ_σ 是某个固定方向上的二分量自旋本征态，不依赖于动量 $\mathbf{p}$，$\sigma = \pm 1/2$ 是磁量子数。ζ_σ 满足以下正交归一关系和完备性关系，

$$\zeta_{\sigma'}^\dagger \zeta_\sigma = \delta_{\sigma'\sigma}, \qquad \sum_{\sigma=\pm 1/2} \zeta_\sigma \zeta_\sigma^\dagger = \mathbf{1}. \tag{8.239}$$

例如，在 z 轴方向上，自旋矩阵的分量 $\sigma^3/2 = \mathrm{diag}(1/2, -1/2)$ 的本征态为

$$\zeta_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.240}$$

它们满足本征方程

$$\frac{\sigma^3}{2} \zeta_\sigma = \sigma \zeta_\sigma. \tag{8.241}$$

这样的 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 在 $\mathbf{p} \to \mathbf{0}$ 极限下满足运动方程 (5.145)，

$$(\not{p} - m) u(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = 0, \tag{8.242}$$

也满足正交归一关系 (5.140)，

$$u^\dagger(\mathbf{p},\sigma')u(\mathbf{p},\sigma) \simeq m\begin{pmatrix}\zeta^\dagger_{\sigma'} & \zeta^\dagger_{\sigma'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_\sigma\\ \zeta_\sigma\end{pmatrix} = 2m\zeta^\dagger_{\sigma'}\zeta_\sigma \simeq 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma'\sigma}. \tag{8.243}$$

于是，$ff' \to ff'$ 散射过程的 QED 领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1')\left(-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu\right)u(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_2,\sigma_2')\left(-\mathrm{i}Q_{f'}e\gamma^\nu\right)u(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\\
&= \frac{\mathrm{i}Q_fQ_{f'}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1')\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_2,\sigma_2')\gamma_\mu u(\mathbf{k}_2,\sigma_2).
\end{aligned} \tag{8.244}$$

由

$$u(\mathbf{k}_1,\sigma_1) \simeq \sqrt{m_f}\begin{pmatrix}\zeta_{\sigma_1}\\ \zeta_{\sigma_1}\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1') \simeq \sqrt{m_f}\begin{pmatrix}\zeta^\dagger_{\sigma_1'} & \zeta^\dagger_{\sigma_1'}\end{pmatrix}, \tag{8.245}$$

得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1')\gamma^0u(\mathbf{k}_1,\sigma_1) \simeq m_f\begin{pmatrix}\zeta^\dagger_{\sigma_1'} & \zeta^\dagger_{\sigma_1'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{\sigma_1}\\ \zeta_{\sigma_1}\end{pmatrix} = 2m_f\zeta^\dagger_{\sigma_1'}\zeta_{\sigma_1} = 2m_f\delta_{\sigma_1'\sigma_1}, \tag{8.246}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1')\gamma^iu(\mathbf{k}_1,\sigma_1) \simeq m_f\begin{pmatrix}\zeta^\dagger_{\sigma_1'} & \zeta^\dagger_{\sigma_1'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma^i\\ -\sigma^i&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{\sigma_1}\\ \zeta_{\sigma_1}\end{pmatrix} = 0. \tag{8.247}$$

同理有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2,\sigma_2')\gamma_0u(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \simeq 2m_{f'}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_2,\sigma_2')\gamma_iu(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \simeq 0, \tag{8.248}$$

因此在非相对论近似下只有时间分量 $\bar{u}\gamma^0u$ 的贡献。再注意到 $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$，则

$$q^2 = (q^0)^2 - |\mathbf{q}|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2, \tag{8.249}$$

将 $ff' \to ff'$ 不变振幅化为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\frac{\mathrm{i}Q_fQ_{f'}e^2}{|\mathbf{q}|^2}(2m_f\delta_{\sigma_1'\sigma_1})(2m_{f'}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}). \tag{8.250}$$

上式只在 $\sigma_1' = \sigma_1$ 且 $\sigma_2' = \sigma_2$ 时非零，也就是说，非相对论性的 Coulomb 散射不改变费米子的自旋极化态。

上式 $2m_f$ 和 $2m_{f'}$ 因子跟归一化取法有关。依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法，正费米子态定义为 $|\mathbf{p}^+,\sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle$，其中 $a^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}$ 是相应的产生算符，有 $\langle\mathbf{k}^+,\sigma'|\mathbf{p}^+,\sigma\rangle = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$。在非相对论性量子力学中，通常将正费米子态定义为

$$\left|\mathbf{p}^+,\sigma\right\rangle_{\mathrm{NR}} \equiv a^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left|\mathbf{p}^+,\sigma\right\rangle, \tag{8.251}$$

满足内积关系

$${}_{\mathrm{NR}}\langle\mathbf{k}^+,\sigma'|\mathbf{p}^+,\sigma\rangle_{\mathrm{NR}} = (2\pi)^3\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{8.252}$$

相应地，外线规则变成

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}u(\mathbf{p},\sigma), \qquad = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\bar{u}(\mathbf{p},\sigma). \tag{8.253}$$

因此，从不变振幅 (8.250) 中移去 $2m_f$ 和 $2m_{f'}$ 因子，就得到非相对论性归一化的不变振幅

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{NR}} \simeq -\frac{\mathrm{i}Q_fQ_{f'}e^2}{|\mathbf{q}|^2}\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}, \tag{8.254}$$

其中 $\mathbf{q}=\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_1$。相应的 T 矩阵元为

$${}_{\mathrm{NR}}\langle\mathbf{p}_2^+,\sigma_2';\,\mathbf{p}_1^+,\sigma_1'|\,\mathrm{i}T\,|\mathbf{k}_1^+,\sigma_1;\,\mathbf{k}_2^+,\sigma_2\rangle_{\mathrm{NR}} = \mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{NR}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2). \tag{8.255}$$

另一方面，对于 f 粒子进入势场 $V(\mathbf{x})$ 发生的散射过程，非相对论性量子力学的 **Born** 近似给出 T 矩阵元

$${}_{\mathrm{NR}}\langle\mathbf{p}_1^+,\sigma_1|\,\mathrm{i}T\,|\mathbf{k}_1^+,\sigma_1\rangle_{\mathrm{NR}} = -\mathrm{i}\tilde{V}(\mathbf{q})\cdot 2\pi\,\delta(E_{\mathbf{p}_1}-E_{\mathbf{k}_1}), \tag{8.256}$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换，即

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int \mathrm{d}^3x\,V(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \tag{8.257}$$

这里相当于对引起势场 $V(\mathbf{x})$ 的 f' 粒子的动量作积分，因而没有相关的三维动量 δ 函数因子。

比较这两个理论的 T 矩阵元，我们得到

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_fQ_{f'}e^2}{|\mathbf{q}|^2}. \tag{8.258}$$

对它求 Fourier 逆变换，推出 **Coulomb** 势能

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}) &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\tilde{V}(\mathbf{q})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_fQ_{f'}e^2}{(2\pi)^3}\int|\mathbf{q}|^2\,\mathrm{d}|\mathbf{q}|\,\mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2}\\
&= \frac{Q_fQ_{f'}e^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}|\mathbf{q}|\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-1}^1\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_fQ_{f'}e^2}{4\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{d}|\mathbf{q}|\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}\\
&= \frac{Q_fQ_{f'}e^2}{4\mathrm{i}\pi^2r}\left(\int_0^\infty\mathrm{d}Q\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q}-\int_0^\infty\mathrm{d}Q\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Qr}}{Q}\right),
\end{aligned} \tag{8.259}$$

其中 θ 是 $\mathbf{q}$ 与 $\mathbf{x}$ 之间的夹角，$Q \equiv |\mathbf{q}|$，$r \equiv |\mathbf{x}|$。作变量替换 $Q' = -Q$，将第二个积分化为

$$-\int_0^{\infty} \mathrm{d}Q\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Qr}}{Q} = \int_0^{-\infty} \mathrm{d}Q'\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q'r}}{-Q'} = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}Q'\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q'r}}{Q'} = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}Q\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q}, \tag{8.260}$$

最后一步作了变量替换 $Q = Q'$。因而可将 $V(\mathbf{x})$ 表达成

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Q\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q}. \tag{8.261}$$

利用留数定理计算这个积分，将 Q 看成复变量，则被积函数在 $Q = 0$ 处存在单极点，在 Q 的复平面上沿着实轴和半径无穷大的上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Q\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q} = \mathrm{i}\pi \operatorname*{Res}_{Q=0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q} = \mathrm{i}\pi. \tag{8.262}$$

注意，由于这里的单极点位于实轴上，它对积分的贡献只相当于上半平面孤立奇点所贡献的一半。于是，Coulomb 势能化为

$$\boxed{V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}.} \tag{8.263}$$

从而，f' 粒子引起的 **Coulomb 势**为

$$\Phi_{f'}(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}. \tag{8.264}$$

这正是电动力学中点电荷电势的形式。

Coulomb 势是长程势，以 r^{-1} 规律衰减 (attenuation)。Coulomb 势能 $V(r)$ 的符号由电荷 Q_f 和 $Q_{f'}$ 的符号决定。图 8.9 画出 $Q_f Q_{f'} = \pm 1$ 时 Coulomb 势能随距离 r 的变化曲线。当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 同号时，$V(r) > 0$，r 越大，势能越小，Coulomb 势是**排斥势**。当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 异号时，$V(r) < 0$，r 越小，势能越小，Coulomb 势是**吸引势**。

在上述推导过程中，我们通过比较 $ff' \to ff'$ 不变振幅 (8.244) 和 Born 近似下的 T 矩阵元 (8.256) 来推导 Coulomb 势能。这是振幅层面上的对比，振幅的绝对符号会影响最后得到的 Coulomb 势能。因此，严格来说，我们需要检验场算符与初末态缩并的情况来确定这个绝对符号，此时应该对末态采取左矢的严格定义，而不能使用像 (7.12) 式那样让左矢中动量排列次序与湮灭算符相同的约定。

如果用 $a^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}$ 分别代表 f 和 $\bar{f}$ 费米子的产生算符，用 $c^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}$ 和 $d^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}$ 分别代表 f' 和 $\bar{f}'$ 费米子的产生算符，那么，$ff' \to ff'$ 散射过程的初态是 $\left|\mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^+, \sigma_2\right\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}\, a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} c^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} |0\rangle$，末态 $\left|\mathbf{p}_1^+, \sigma_1'; \mathbf{p}_2^+, \sigma_2'\right\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} c^\dagger_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} |0\rangle$ 对应的左矢依照定义写成

$$\left\langle \mathbf{p}_1^+, \sigma_1'; \mathbf{p}_2^+, \sigma_2'\right| = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\, \langle 0|\, c_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} a_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'}. \tag{8.265}$$

参考 7.1 节计算方法，$ff' \to ff'$ 不变振幅对应的缩并形式是

$$\langle 0|\, c_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} a_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} \mathsf{N}[A_\mu(x)\bar{\psi}_{f,a}(x)(\gamma^\mu)_{ab}\psi_{f,b}(x) A_\nu(y)\bar{\psi}_{f',c}(y)(\gamma^\nu)_{cd}\psi_{f',d}(y)] a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} c^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} |0\rangle$$

图 8.9: Coulomb 势能与 Yukawa 势能随距离 r 的变化。

$$= \langle 0| c_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} a_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} \mathsf{N}[\bar{\psi}_{f,a}(x)\bar{\psi}_{f',c}(y)(\gamma^\mu)_{ab} A_\mu(x) A_\nu(y)(\gamma^\nu)_{cd}\psi_{f',d}(y)\psi_{f,b}(x)] a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} c^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} |0\rangle \,. \tag{8.266}$$

注意这里将缩并线连接到产生湮灭算符头上。第二步在正规乘积中调换场算符的位置，将纠缠的缩并线解开，涉及偶数次费米子算符之间的交换，没有给出额外的负号，因此上面得到的 Coulomb 势能 (8.263) 是正确的。

如果考虑 $f\bar{f}' \to f\bar{f}'$ 散射过程，就会出现不一样的情况。此时初态变成 $\left|\mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^-, \sigma_2\right\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}\, a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} d^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} |0\rangle$，末态 $\left|\mathbf{p}_1^+, \sigma_1'; \mathbf{p}_2^-, \sigma_2'\right\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} d^\dagger_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} |0\rangle$ 对应的左矢依照定义写成

$$\left\langle \mathbf{p}_1^+, \sigma_1'; \mathbf{p}_2^-, \sigma_2'\right| = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\, \langle 0| d_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} a_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} \,, \tag{8.267}$$

$f\bar{f}' \to f\bar{f}'$ 不变振幅对应的缩并形式是

$$\begin{aligned}
&\langle 0| d_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} a_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} \mathsf{N}[A_\mu(x)\bar{\psi}_{f,a}(x)(\gamma^\mu)_{ab}\psi_{f,b}(x) A_\nu(y)\bar{\psi}_{f',c}(y)(\gamma^\nu)_{cd}\psi_{f',d}(y)] a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} d^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} |0\rangle \\
&= -\langle 0| d_{\mathbf{p}_2,\sigma_2'} a_{\mathbf{p}_1,\sigma_1'} \mathsf{N}[\bar{\psi}_{f,a}(x)\psi_{f',d}(y)(\gamma^\mu)_{ab} A_\mu(x) A_\nu(y)(\gamma^\nu)_{cd}\bar{\psi}_{f',c}(y)\psi_{f,b}(x)] a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} d^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} |0\rangle \,.
\end{aligned} \tag{8.268}$$

第二步将纠缠的缩并线解开时涉及到奇数次费米子算符之间的交换，从而给出一个额外的负号，应该把它加入到 $f\bar{f}' \to f\bar{f}'$ 的领头阶不变振幅中，得到

$\mathrm{i}\mathcal{M} = -$

$$= -\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1')(-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu)u(\mathbf{k}_1, \sigma_1)\, \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\, \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)(-\mathrm{i}Q_{f'} e\gamma^\nu)v(\mathbf{p}_2, \sigma_2')$$

$$= -\frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1')\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\sigma_2'). \tag{8.269}$$

在非相对论近似下，反费米子的平面波旋量系数表达为

$$v(\mathbf{p},\sigma) \simeq \sqrt{m}\begin{pmatrix}\eta_{-\sigma}\\ -\eta_{-\sigma}\end{pmatrix}, \tag{8.270}$$

其中 η_σ 是类似于 ζ_σ 的二分量自旋本征态，满足以下正交归一关系和完备性关系，

$$\eta_{\sigma'}^\dagger\eta_\sigma = \delta_{\sigma'\sigma}, \qquad \sum_{\sigma=\pm 1/2}\eta_\sigma\eta_\sigma^\dagger = \mathbf{1}. \tag{8.271}$$

这样的 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 在 $\mathbf{p}\to\mathbf{0}$ 极限下满足运动方程 (5.184)，

$$(\not{p}+m)v(\mathbf{p},\sigma) = \begin{pmatrix} m & \sigma^\mu p_\mu\\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & m\end{pmatrix} v(\mathbf{p},\sigma) \simeq m^{3/2}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{-\sigma}\\ -\eta_{-\sigma}\end{pmatrix} = 0, \tag{8.272}$$

也满足正交归一关系 (5.141)，

$$v^\dagger(\mathbf{p},\sigma')v(\mathbf{p},\sigma) \simeq m\begin{pmatrix}\eta_{-\sigma'}^\dagger & -\eta_{-\sigma'}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{-\sigma}\\ -\eta_{-\sigma}\end{pmatrix} = 2m\eta_{-\sigma'}^\dagger\eta_{-\sigma} \simeq 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma'\sigma}. \tag{8.273}$$

从而，利用 (8.249) 式和

$$\bar{v}(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\gamma^0 v(\mathbf{p}_2,\sigma_2') \simeq m_{f'}\begin{pmatrix}-\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{-\sigma_2'}\\ -\eta_{-\sigma_2'}\end{pmatrix} = 2m_{f'}\eta_{-\sigma_2}^\dagger\eta_{-\sigma_2'} = 2m_{f'}\delta_{\sigma_2\sigma_2'}, \tag{8.274}$$

$$\bar{v}(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\gamma^i v(\mathbf{p}_2,\sigma_2') \simeq m_{f'}\begin{pmatrix}-\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^i\\ -\sigma^i & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{-\sigma_2'}\\ -\eta_{-\sigma_2'}\end{pmatrix} = 0, \tag{8.275}$$

将 $f\bar{f}'\to f\bar{f}'$ 不变振幅化为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq \frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}(2m_f\delta_{\sigma_1'\sigma_1})(2m_{f'}\delta_{\sigma_2\sigma_2'}). \tag{8.276}$$

与 $ff'\to ff'$ 不变振幅 (8.250) 比较，上式相差一个负号，它源于奇数次费米子算符的交换。于是，相应的 Coulomb 势能也多了一个负号，形式为

$$V(r) = -\frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}. \tag{8.277}$$

可见，反费米子 $\bar{f}'$ 引起的 Coulomb 势为

$$\Phi_{\bar{f}'}(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{-Q_{f'}e}{4\pi r}, \tag{8.278}$$

它与正费米子 f' 引起的 Coulomb 势 (8.264) 符号相反，符合我们对反费米子 $\bar{f}'$ 携带 $-Q_{f'}$ 电荷的认知。

我们已经看到，光子传播子在非相对论近似下的效应等价于 Coulomb 势。类似地，Yukawa 理论中标量玻色子 ϕ 的传播子应该等价于一种 **Yukawa 势** [24]。与光子不同的是，ϕ 具有质量 m_ϕ。下面推导 Yukawa 势能的形式。

假设存在两种参与 Yukawa 相互作用的费米子 f 和 f'，相应的 Yukawa 耦合常数均为 κ。根据 7.2 节的 Feynman 规则，$ff' \to ff'$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1')\,(-\mathrm{i}\kappa)\,u(\mathbf{k}_1, \sigma_1)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma_2')\,(-\mathrm{i}\kappa)\,u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \\
&= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1')u(\mathbf{k}_1, \sigma_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma_2')u(\mathbf{k}_2, \sigma_2).
\end{aligned} \tag{8.279}
$$

由于

$$
\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1')u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1'}^\dagger & \zeta_{\sigma_1'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{\sigma_1'\sigma_1}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma_2')u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{\sigma_2'\sigma_2}, \tag{8.280}
$$

振幅化为

$$
\mathrm{i}\mathcal{M} = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}\,(2m_f \delta_{\sigma_1'\sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma_2'\sigma_2}). \tag{8.281}
$$

类比前面 Coulomb 散射的计算，即得 Yukawa 势场 $V(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换

$$
\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}. \tag{8.282}
$$

于是，ϕ 传播子对应的 **Yukawa 势能**为

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta\, \frac{|\mathbf{q}|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \\
&= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}|\, \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} = -\frac{\kappa^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Q\, \frac{Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q^2 + m_\phi^2},
\end{aligned} \tag{8.283}
$$

其中 $Q \equiv |\mathbf{q}|$，$r \equiv |\mathbf{x}|$，最后一步用到 (8.260) 式中的处理技巧。现在，被积函数在 Q 的上半复平面 $Q = \mathrm{i}m_\phi$ 处存在单极点，沿着实轴和半径无穷大的上半圆周积分，利用留数定理得到

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Q\, \frac{Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q^2 + m_\phi^2} = 2\mathrm{i}\pi \operatorname*{Res}_{Q=\mathrm{i}m_\phi} \frac{Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q^2 + m_\phi^2} = 2\mathrm{i}\pi \left. \frac{Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q + \mathrm{i}m_\phi} \right|_{Q=\mathrm{i}m_\phi} = \mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{-m_\phi r}. \tag{8.284}
$$

因此，Yukawa 势能的形式是

$$\boxed{V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-m_\phi r}.} \tag{8.285}$$

对于 $f\bar{f}' \to f\bar{f}'$ 散射过程，类似于 QED 的情况，需要在领头阶不变振幅中引入一个额外的负号，得到

$\mathrm{i}\mathcal{M} = -$

$$\begin{aligned}
&= -\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1')(-\mathrm{i}\kappa)u(\mathbf{k}_1, \sigma_1)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)(-\mathrm{i}\kappa)v(\mathbf{p}_2, \sigma_2') \\
&= \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma_1')u(\mathbf{k}_1, \sigma_1)\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)v(\mathbf{p}_2, \sigma_2').
\end{aligned} \tag{8.286}$$

不过，

$$\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)v(\mathbf{p}_2, \sigma_2') \simeq m_{f'}\begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{-\sigma_2'} \\ -\eta_{-\sigma_2'} \end{pmatrix} = -2m_{f'}\eta_{-\sigma_2}^\dagger\eta_{-\sigma_2'} = -2m_{f'}\delta_{\sigma_2\sigma_2'} \tag{8.287}$$

里面也出现了一个负号，导致非相对论近似下的不变振幅与 (8.281) 式相同。于是，$f\bar{f}' \to f\bar{f}'$ 散射过程对应的 Yukawa 势能同样由 (8.285) 式给出。

图 8.9 中也画出了 $m_\phi = 80$ GeV、$\kappa = 0.6$ 时 Yukawa 势能随距离 r 的变化曲线。由于 $V(r) < 0$，r 越小，势能越小。无论对 ff' 散射还是 $f\bar{f}'$ 散射，Yukawa 势都是吸引势。在长矩离处，指数因子 $\mathrm{e}^{-m_\phi r}$ 使 Yukawa 势迅速衰减，因而它是短程势。$r_0 \equiv 1/m_\phi$ 是 Yukawa 势的特征长度，即 Yukawa 相互作用的力程。若标量玻色子 ϕ 没有质量，则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式类似。

8.5 交叉对称性和 Mandelstam 变量

在上一节中我们看到，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 与 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程具有交叉对称性，利用相应的动量替换规则 (8.204)，可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方。

交叉对称性的一般表述如下。如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的粒子 Φ，从初态中移除 Φ 并在末态中添加一个四维动量为 k^μ 的反粒子 $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程，则这两个过程的不变振幅可以通过动量替换 $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来，有

$$\boxed{\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots).} \tag{8.288}$$

(a) 正粒子 Φ 入射　　(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 出射

图 8.10: 交叉对称性示意图。

物理的初末态粒子必须具有正能量，但 $k^\mu = -p^\mu$ 意味着 Φ 和 $\bar{\Phi}$ 不可能同时具有正能量，因而看起来有一个过程是非物理的。实际上，应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的数学技巧：对第一个过程的振幅作动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$，再解析延拓 (analytic continuation) 到物理区域就得到第二个过程的振幅。可以这样想象交叉对称性：一个粒子沿着时间方向运动等价于它的反粒子逆着时间方向运动，这样的反粒子具有负能量和相反动量。

把 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$，需要先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p_1')，引起动量替换 $k_2^\mu \to -p_1'^\mu$；再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k_2')，引起动量替换 $p_2^\mu \to -k_2'^\mu$；初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，可以直接修改相应的动量记号。这样就得到替换规则 (8.204)。

交叉一个粒子的典型 Feynman 图如图 8.10 所示，灰色圆形象征一些 Feynman 图结构，图 8.10(a) 中有一个正粒子 Φ 进入顶点，图 8.10(b) 相应地替换成一个反粒子 $\bar{\Phi}$ 离开顶点，两幅图的其余部分完全相同。由于顶点处能动量守恒，图 8.10(a) 中四维动量满足 $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$，图 8.10(b) 则满足 $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$。因此，只要 $k^\mu = -p^\mu$，两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异。

如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，(8.288) 式成立。如果 Φ 是矢量玻色子，则 $\Phi(p)$ 入射时的外线因子为 $\varepsilon_\mu(p,\lambda)$。观察极化矢量表达式 (4.104)，可知 $\varepsilon_\mu(-p,\lambda) = \varepsilon_\mu^*(p,\lambda)$ 对 $\lambda = 0, \pm$ 成立。因此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，有

$$\varepsilon_\mu(p,\lambda) = \varepsilon_\mu(-k,\lambda) = \varepsilon_\mu^*(k,\lambda). \tag{8.289}$$

最右边正是 $\bar{\Phi}(k)$ 出射时的外线因子，故 (8.288) 式成立。

如果 Φ 是 *Dirac* 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子分别为平面波旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$。在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k), \tag{8.290}$$

因而两个过程的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 相差一个整体负号。可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$，还要去除一个整体负号才能得到正确的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。当我们将 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 时，交叉了两个费米子，产生了两个整体负号，它们正好相互抵消。

图 8.11: $2 \to 2$ 散射过程四维动量示意图。

如果想让振幅层面上的 (8.288) 式在交叉费米子时成立，则需要对平面波旋量系数采取特殊的定义。我们依然按照 (5.180) 式将平面波旋量系数 $u(p,\lambda)$ 定义为

$$u(p,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{8.291}$$

由螺旋态的本征方程 (5.161) 得 $-(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$，故

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}). \tag{8.292}$$

可见，$\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态。从而，我们可以将 $v(p,\lambda)$ 定义成

$$v(p,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{8.293}$$

与 (5.185) 式比较，有 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = \mathrm{i}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$，$\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -\mathrm{i}\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$。利用 $m = \sqrt{(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{(p^0 + \lambda|\mathbf{p}|)(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)}$，推出

$$\begin{aligned} -\frac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) &= -\frac{\mathrm{i}}{m}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,(p^0 + \mathbf{p}\cdot\sigma)\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\frac{\mathrm{i}}{m}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ &= -\mathrm{i}\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{8.294}$$

符合 (5.189) 式。因此，这样定义的 $v(p,\lambda)$ 满足运动方程 (5.184)，也可以验证它满足正交归一关系 (5.204)、(5.211) 和自旋求和关系 (5.214)。如此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，可以推出

$$\begin{aligned} u(p,\lambda) &= u(-k,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{k^0 + \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{k^0 - \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = v(k,\lambda), \end{aligned} \tag{8.295}$$

则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子相等，(8.288) 式成立。注意，平方根函数是多值函数，在上式推导过程中，我们利用 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$ 对两个平方根函数采用了不同的取值方式。

进一步，我们可以定义一些便于应用交叉关系的物理量。对于 $2 \to 2$ 散射，按照图 8.11 表

示的四维动量，定义三个 Lorentz 不变的 **Mandelstam 变量** [39]：

$$\boxed{\begin{aligned} s &\equiv (k_1+k_2)^2 = (p_1+p_2)^2, \\ t &\equiv (k_1-p_1)^2 = (k_2-p_2)^2, \\ u &\equiv (k_1-p_2)^2 = (k_2-p_1)^2. \end{aligned}} \tag{8.296}$$

第二步均用到能动量守恒关系 $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$。

记这些四维动量对应的质量为 m_1、m_2、m_1'、m_2'，满足

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m_1'^2, \quad p_2^2 = m_2'^2. \tag{8.297}$$

于是，四维动量的两两内积可以用 Mandelstam 变量和质量表示为

$$k_1\cdot k_2 = \frac{1}{2}(s-k_1^2-k_2^2) = \frac{1}{2}(s-m_1^2-m_2^2), \qquad p_1\cdot p_2 = \frac{1}{2}(s-m_1'^2-m_2'^2), \tag{8.298}$$

$$k_1\cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t-k_1^2-p_1^2) = -\frac{1}{2}(t-m_1^2-m_1'^2), \quad k_2\cdot p_2 = -\frac{1}{2}(t-m_2^2-m_2'^2), \tag{8.299}$$

$$k_1\cdot p_2 = -\frac{1}{2}(u-k_1^2-p_2^2) = -\frac{1}{2}(u-m_1^2-m_2'^2), \quad k_2\cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u-m_2^2-m_1'^2). \tag{8.300}$$

因为非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 只是这些四维动量内积的函数，所以用 3 个 Mandelstam 变量就足以表达任意 $2\to 2$ 散射过程的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。此外，能够推出

$$\begin{aligned} s+t+u &= (k_1+k_2)^2+(k_1-p_1)^2+(k_1-p_2)^2 = 3k_1^2+k_2^2+p_1^2+p_2^2+2\,k_1\cdot(k_2-p_1-p_2) \\ &= 3k_1^2+k_2^2+p_1^2+p_2^2-2k_1^2 = k_1^2+k_2^2+p_1^2+p_2^2, \end{aligned} \tag{8.301}$$

故

$$\boxed{s+t+u = m_1^2+m_2^2+m_1'^2+m_2'^2,} \tag{8.302}$$

即 Mandelstam 变量之和是初末态粒子质量平方和。

t 和 u 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义。在实际应用中，通常用初末态中两个性质相近的粒子来定义 t。比如，对于 8.4.1 小节的 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k_1' 与末态电子动量 p_1' 定义 $t=(k_1'-p_1')^2$，从而虚光子动量满足 $q'^2=t$。

在质心系中，$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{0}$，有

$$s = (k_1^0+k_2^0)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2, \tag{8.303}$$

故 $\sqrt{s}=E_{\mathrm{CM}}$ 就是质心能。对于任意 $2\to n$ 散射过程，将 s 定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，即

$$s = (k_1+k_2)^2 = \Big(\sum_i p_i\Big)^2. \tag{8.304}$$

那么，$\sqrt{s}$ 就是这个过程的质心能。

可以用 Mandelstam 变量表达任意 $2\to 2$ 散射过程的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。对于 8.2 节的 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 过程，非极化振幅模方 (8.80) 可化为

$$\begin{aligned}
&\overline{|\mathcal{M}(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)|^2}\\
=&\frac{8e^4}{s^2}\left[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)+(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)+m_\mu^2(k_1\cdot k_2)+m_e^2(p_1\cdot p_2)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\
=&\frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{1}{4}(t-m_e^2-m_\mu^2)^2+\frac{1}{4}(u-m_e^2-m_\mu^2)^2+\frac{1}{2}m_\mu^2(s-2m_e^2)+\frac{1}{2}m_e^2(s-2m_\mu^2)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\
=&\frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{t^2+u^2}{4}-\frac{t+u}{2}(m_e^2+m_\mu^2)+\frac{1}{2}(m_e^2+m_\mu^2)^2+\frac{s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)\right].
\end{aligned}\tag{8.305}$$

由 (8.302) 式得 $s+t+u=2m_e^2+2m_\mu^2$，即 $t+u=2(m_e^2+m_\mu^2)-s$，故

$$\begin{aligned}
&\overline{|\mathcal{M}(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)|^2}\\
=&\frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{t^2+u^2}{4}-\frac{2(m_e^2+m_\mu^2)-s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)+\frac{1}{2}(m_e^2+m_\mu^2)^2+\frac{s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\
=&\frac{2e^4}{s^2}\left[t^2+u^2+4s(m_e^2+m_\mu^2)-2(m_e^2+m_\mu^2)^2\right].
\end{aligned}\tag{8.306}$$

现在，将 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$。根据动量替换规则 (8.204)，有

$$(k_1+k_2)^2\to(k_1'-p_1')^2,\quad (k_1-p_1)^2\to(k_1'-p_2')^2,\quad (k_1-p_2)^2\to(k_1'+k_2')^2,\tag{8.307}$$

即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s\to t,\quad t\to u,\quad u\to s.\tag{8.308}$$

可见，**交叉对称性对应于 Mandelstam 变量的调换**，这样的调换保持 (8.302) 式不变。据此，我们从 (8.306) 式直接得到 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 过程的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^-\to e^-\mu^-)|^2}=\frac{2e^4}{t^2}\left[u^2+s^2+4t(m_e^2+m_\mu^2)-2(m_e^2+m_\mu^2)^2\right].\tag{8.309}$$

容易验证，这个结果与 (8.205) 式一致。

$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 过程的虚光子动量满足 $q^2=(k_1+k_2)^2=s$，交叉成 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 过程之后，虚光子动量满足 $q'^2=(k_1'-p_1')^2=t$。一般来说，当 $2\to 2$ 散射 Feynman 图只含一条内线时，内线动量的自我内积等于一个 Mandelstam 变量 s、t 或 u，我们称这种图为 **s 通道** (channel)、**t 通道**或 **u 通道**的 Feynman 图。$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 和 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 的领头阶 Feynman 图分别对应于 s 通道和 t 通道。

以 Yukawa 理论为例，三种通道具有如下特点。

s 通道：

$$\propto\frac{1}{(k_1+k_2)^2-m_\phi^2}=\frac{1}{s-m_\phi^2}\tag{8.310}$$

t 通道：

$$\propto \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m_\phi^2}=\frac{1}{t-m_\phi^2} \tag{8.311}$$

u 通道：

$$\propto \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}=\frac{1}{u-m_\phi^2} \tag{8.312}$$

一个散射过程可以包含多个通道的 Feynman 图。在 QED 中，**Bhabha 散射** $e^+e^-\to e^+e^-$ 在领头阶具有 1 个 s 通道和 1 个 t 通道的 Feynman 图，如下。

(8.313)

Møller 散射 $e^-e^-\to e^-e^-$ 在领头阶具有 1 个 t 通道和 1 个 u 通道的 Feynman 图，如下。

(8.314)

在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是 m，动量如图 8.2 所示，参考 (8.82) 至 (8.85) 式，有

$$k_1^0=k_2^0=p_1^0=p_2^0=\frac{E_{\rm CM}}{2}=\frac{\sqrt{s}}{2}, \tag{8.315}$$

$$|\mathbf{k}_1|=|\mathbf{k}_2|=|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\equiv Q. \tag{8.316}$$

从而得到

$$t=(k_1-p_1)^2=k_1^2+p_1^2-2\,k_1\cdot p_1=2m^2-2k_1^0p_1^0+2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta=-2Q^2(1-\cos\theta), \tag{8.317}$$

$$u=(k_1-p_2)^2=k_1^2+p_2^2-2\,k_1\cdot p_2=2m^2-2k_1^0p_2^0-2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta=-2Q^2(1+\cos\theta). \tag{8.318}$$

于是，$\theta\to 0$ 时 $t\to 0$，$\theta\to\pi$ 时 $u\to 0$。另一方面，$s=E_{\rm CM}^2$ 与散射角 θ 无关。三种通道的传播子对散射角 θ 的依赖截然不同。

8.6 Compton 散射

电子与光子的散射过程 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射** [40]。1923 年，Arthur Compton 用 X 射线照射核外电子，发现 X 射线因失去能量而波长变长。他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，因而核外电子可以看成是自由的。根据相对论运动学，Compton 推导出光子的波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi}{m_e}(1-\cos\theta). \tag{8.319}$$

他的实验结果证实了这条公式，从而为光的粒子性提供了直接证据。

另一方面，对于低能电磁辐射与电子散射的过程，Joseph Thomson 根据经典电磁学推导出微分散射截面

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \pi r_e^2(1+\cos^2\theta) = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta),} \tag{8.320}$$

其中 $r_e \equiv \alpha/m_e$ 称为电子的**经典半径**[4]。在 QED 中，我们应该能够得到这条微分截面公式的相对论修正。

Compton 散射在 QED 领头阶具有 1 个 s 通道和 1 个 u 通道[5]的 Feynman 图，不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_\mu^*(p_2)\,\bar{u}(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,\frac{\mathrm{i}(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_1)\,\varepsilon_\nu(k_2)\\
&\quad+\varepsilon_\nu(k_2)\,\bar{u}(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,\frac{\mathrm{i}(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1)\,\varepsilon_\mu^*(p_2)\\
&= -\mathrm{i}e^2\varepsilon_\mu^*(p_2)\,\varepsilon_\nu(k_2)\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1).
\end{aligned} \tag{8.321}$$

这里我们没有显明写出振幅对螺旋度的依赖，只将极化矢量记成在壳四维动量的函数。两幅图的电子线具有相同的拓扑结构，可通过连续变形相互转换。相应地，在两幅图对 T 矩阵元的贡献中，参与缩并的旋量场算符位置相同，因而两幅图之间的相对符号为正。

根据质壳条件 $k_1^2 = m_e^2$ 和 $k_2^2 = p_2^2 = 0$，传播子的分母化为

$$(k_1+k_2)^2 - m_e^2 = 2\,k_1\cdot k_2, \quad (k_1-p_2)^2 - m_e^2 = -2\,k_1\cdot p_2. \tag{8.322}$$

[4]经典半径 $r_e = \alpha/m_e = e^2/(4\pi m_e)$ 意味着 $m_e = e^2/(4\pi r_e)$。可见，对于电子与电子之间的经典静电学相互作用，两个电子之间的距离为经典半径 r_e 时的 Coulomb 势能等于电子质量 m_e。

[5]有些书称其为 t 通道。

由 (8.68) 式得 $\not{k}_1\gamma^\nu = 2k_1^\nu - \gamma^\nu\not{k}_1$，再利用运动方程 (5.145)，推出

$$(\not{k}_1+m_e)\gamma^\nu u(k_1) = (2k_1^\nu-\gamma^\nu\not{k}_1+m_e\gamma^\nu)u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1)-\gamma^\nu(\not{k}_1-m_e)u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1). \tag{8.323}$$

从而将振幅化简成

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}e^2\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\bar{u}(p_1)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)u(k_1). \tag{8.324}$$

8.6.1　光子极化求和与 Ward 恒等式

接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算非极化振幅模方。除了涉及对电子的螺旋度求和之外，还涉及对光子的螺旋度求和，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}}\varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p) = \sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}. \tag{8.325}$$

第二步用到极化求和关系 (4.197)。本小节讨论光子极化求和的简化方法。

考虑出射一个动量为 p^μ 的光子的任意 QED 过程，不变振幅为

$$= \mathrm{i}\mathcal{M}(p) = \mathrm{i}M^\mu(p)\,\varepsilon_\mu^*(p). \tag{8.326}$$

这里我们将出射光子的极化矢量 $\varepsilon_\mu^*(p)$ 提出来，振幅的余下部分记作 $M^\mu(p)$。对光子极化求和，振幅模方变成

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}(p)|^2 &= \sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)M^\mu(p)M^{\nu*}(p)\\ &= \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}\right]M^\mu(p)M^{\nu*}(p).\end{aligned} \tag{8.327}$$

根据 QED 相互作用拉氏量 (8.14)，上述过程的 T 矩阵元具有以下形式[6]：

$$\begin{aligned}\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle &\propto \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\langle\cdots;\mathbf{p},\lambda|\,\mathsf{N}[A_\mu(x_1)J_{\mathrm{EM}}^\mu(x_1)\cdots]\,|i\rangle\\ &= \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[J_{\mathrm{EM}}^\mu(x_1)\cdots]\,|i\rangle,\end{aligned} \tag{8.328}$$

其中第二步用到 (7.158) 式。可见，

$$M^\mu(p) \propto \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[J_{\mathrm{EM}}^\mu(x_1)\cdots]\,|i\rangle. \tag{8.329}$$

[6]此处省略号表示对其它末态粒子、场算符和各种可能的缩并线进行省略。

在经典层面上，Noether 定理表明电磁流 $J^\mu_{\rm EM}$ 满足守恒流方程 $\partial_\mu J^\mu_{\rm EM} = 0$。如果我们假设 $\partial_\mu J^\mu_{\rm EM} = 0$ 在量子层面上（即视 $J^\mu_{\rm EM}$ 为算符）也成立，就可以推出

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \langle \cdots | \,\mathsf{N}[\partial_\mu J^\mu_{\rm EM}(x_1) \cdots] \,|i\rangle \\ &= -\int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, (\partial_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}) \langle \cdots | \,\mathsf{N}[J^\mu_{\rm EM}(x_1) \cdots] \,|i\rangle \\ &= -\mathrm{i}p_\mu \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \langle \cdots | \,\mathsf{N}[J^\mu_{\rm EM}(x_1) \cdots] \,|i\rangle \propto p_\mu M^\mu(p), \end{aligned} \tag{8.330}$$

第二步用到分部积分。于是得到

$$\boxed{p_\mu M^\mu(p) = 0.} \tag{8.331}$$

这个表达式称为 **Ward 恒等式** [41]，它对于入射光子的情况同样成立。Ward 恒等式告诉我们，

> 只要将不变振幅中任何一个入射或出射光子的**极化矢量替换**成相应的**四维动量**，则结果为零。

虽然这里利用经典的守恒流方程进行论证，但实际上可以在量子场论中严格地证明 Ward 恒等式，相关证明留待后文叙述。Ward 恒等式是电磁流守恒在量子层面上的体现，与 QED 的规范对称性密切相关。电磁场负能解部分 (7.156) 里面对 (8.328) 式中电磁场算符与末态光子缩并有贡献的项为

$$A^{(-)}_\mu(x;\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{8.332}$$

上式在动量空间中贡献的外线因子是 $\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)$。对上式作规范变换 $A^{(-)}_\mu(x;\lambda) \to A^{(-)}_\mu(x;\lambda) + \partial_\mu \chi^{(-)}(x;\lambda)$，其中 $\chi^{(-)}(x;\lambda)$ 是与 $A^{(-)}_\mu(x;\lambda)$ 相关的实标量场负能解部分，表达为

$$\chi^{(-)}(x;\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{8.333}$$

从而，规范变换后的场算符是

$$\begin{aligned} A^{(-)}_\mu(x;\lambda) + \partial_\mu \chi^{(-)}(x;\lambda) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} [\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) + \partial_\mu] \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} [\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) + \mathrm{i}p_\mu] \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \end{aligned} \tag{8.334}$$

上式在动量空间中贡献的外线因子是 $\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) + \mathrm{i}p_\mu$。可见，规范变换在动量空间中体现为

$$\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) \to \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) + \mathrm{i}p_\mu, \tag{8.335}$$

因此振幅 $\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda) M^\mu(p)$ 的规范不变性等价于 Ward 恒等式 $p_\mu M^\mu(p) = 0$。以上讨论表明，**Ward 恒等式是规范对称性在不变振幅上的体现。**

应用 Ward 恒等式，我们发现 (8.327) 式方括号中后两项都没有贡献，从而得到

$$\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)M^\mu(p)M^{\nu*}(p)=-g_{\mu\nu}M^\mu(p)M^{\nu*}(p). \tag{8.336}$$

也就是说，在 QED 计算中可以使用替换关系

$$\boxed{\sum_{\text{spins}}\varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p)\to -g_{\mu\nu}\,.} \tag{8.337}$$

这就是处理光子极化求和的简化方法。

现在用 Compton 散射振幅 (8.321) 验证 Ward 恒等式。将振幅表达为

$$\mathrm{i}\mathcal{M}=\mathrm{i}\varepsilon_\mu^*(p_2)\,\varepsilon_\nu(k_2)M^{\mu\nu}, \tag{8.338}$$

则

$$M^{\mu\nu}=-e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1). \tag{8.339}$$

运动方程 (5.145) 表明

$$\not{k}_1u(k_1)=m_eu(k_1), \tag{8.340}$$

两边取厄米共轭，右乘 γ^0，得

$$\bar{u}(k_1)\not{k}_1=\bar{u}(k_1)m_e, \tag{8.341}$$

同理 $\bar{u}(p_1)\not{p}_1=\bar{u}(p_1)m_e$。再利用 $k_1^\mu+k_2^\mu=p_1^\mu+p_2^\mu$，有

$$\not{p}_2u(k_1)\;=\;-(\not{k}_1-\not{p}_2-\not{k}_1)u(k_1)=-(\not{k}_1-\not{p}_2-m_e)u(k_1), \tag{8.342}$$

$$\bar{u}(p_1)\not{p}_2\;=\;\bar{u}(p_1)(\not{k}_1+\not{k}_2-\not{p}_1)=\bar{u}(p_1)(\not{k}_1+\not{k}_2-m_e). \tag{8.343}$$

从而

$$\begin{aligned}
p_{2\mu}M^{\mu\nu}\;&=\;-e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\not{p}_2(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\not{p}_2}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1)\\
&=\;-e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{(\not{k}_1+\not{k}_2-m_e)(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}-\frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)(\not{k}_1-\not{p}_2-m_e)}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1)\\
&=\;-e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{(\not{k}_1+\not{k}_2)^2-m_e^2}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}\gamma^\nu-\gamma^\nu\frac{(\not{k}_1-\not{p}_2)^2-m_e^2}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1),
\end{aligned} \tag{8.344}$$

由 (8.70) 式得 $(\not{k}_1+\not{k}_2)^2=(k_1+k_2)^2$ 和 $(\not{k}_1-\not{p}_2)^2=(k_1-p_2)^2$，故 $p_{2\mu}M^{\mu\nu}=0$。同理可以验证 $k_{2\nu}M^{\mu\nu}=0$。注意，Compton 散射过程在 QED 领头阶具有两个 Feynman 图，若缺少其中之一的贡献，则 Ward 恒等式不能成立。一般来说，在 QED 的一个固定阶上，只有全部拓扑不等价的 Feynman 图对振幅的贡献都包括进来之后，Ward 恒等式才能成立。

其实，Ward 恒等式不仅对光子外线成立，对光子内线也成立。设光子传播子的四维动量为 p^μ，则 p^μ 流入或流出的振幅 $M^\mu(p)$ 满足 Ward 恒等式 (8.331)。

以 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程为例，根据 (8.37) 式，光子传播子的四维动量为 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$，电子线部分的振幅为 $M^\mu(q) = e\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$。运动方程 (5.184) 表明

$$\not{k}_2 v(k_2) = -m_e v(k_2), \tag{8.345}$$

两边取厄米共轭，右乘 γ^0，得

$$\bar{v}(k_2)\not{k}_2 = -\bar{v}(k_2)m_e. \tag{8.346}$$

再利用 $\not{k}_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$ 即可推出 Ward 恒等式

$$q_\mu M^\mu(q) = e\bar{v}(k_2)\not{q}u(k_1) = e\bar{v}(k_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2)u(k_1) = e\bar{v}(k_2)(m_e - m_e)u(k_1) = 0. \tag{8.347}$$

同理可验证 μ 子线部分的振幅也满足 Ward 恒等式。

8.6.2 非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式

利用

$$\begin{aligned}[\bar{u}(p_1)\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu u(k_1)]^* &= u^\dagger(k_1)(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\rho)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 u(p_1) = u^\dagger(k_1)\gamma^0\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u(p_1) \\ &= \bar{u}(k_1)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u(p_1),\end{aligned} \tag{8.348}$$

对 (8.324) 式取复共轭，得

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = \mathrm{i}e^2\varepsilon_\rho(p_2)\varepsilon_\sigma^*(k_2)\bar{u}(k_1)\left(\frac{\gamma^\sigma\not{k}_2\gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)u(p_1). \tag{8.349}$$

于是，非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4}\sum_{\text{spins}}\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\rho(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\varepsilon_\sigma^*(k_2)\,\mathrm{tr}\left[u(p_1)\bar{u}(p_1)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right. \\ &\qquad\left.\times u(k_1)\bar{u}(k_1)\left(\frac{\gamma^\sigma\not{k}_2\gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right] \\ &= \frac{e^4}{4}(-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma})\,\mathrm{tr}\left[(\not{p}_1 + m_e)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right. \\ &\qquad\left.\times(\not{k}_1 + m_e)\left(\frac{\gamma^\sigma\not{k}_2\gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right] \\ &= \frac{e^4}{16}\,\mathrm{tr}\left[(\not{p}_1 + m_e)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{k_1\cdot p_2}\right)\right. \\ &\qquad\left.\times(\not{k}_1 + m_e)\left(\frac{\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu}}{k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu}}{k_1\cdot p_2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{e^4}{16}\left[\frac{A}{(k_1\cdot k_2)^2}+\frac{B+C}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)}+\frac{D}{(k_1\cdot p_2)^2}\right], \tag{8.350}$$

其中,

$$A \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu+2\gamma_\mu k_{1\nu})], \tag{8.351}$$

$$B \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu-2\gamma_\nu k_{1\mu})], \tag{8.352}$$

$$C \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu+2\gamma_\mu k_{1\nu})], \tag{8.353}$$

$$D \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu-2\gamma_\nu k_{1\mu})]. \tag{8.354}$$

这里 A 来自 s 通道 Feynman 图，D 来自 u 通道 Feynman 图，而 B 和 C 是两个通道的交叉项。

把 A 展开，会得到 16 项，其中有 8 项包含奇数个 Dirac 矩阵之积，相应的迹为零。A 中余下的 8 项为

$$\begin{aligned}A =\ & \mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\not{k}_1\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu)+2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu)+2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\not{k}_1\gamma_\mu)+4k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\gamma_\mu)\\ &+m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu)+2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu)+2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\gamma_\mu)+4m_e^2k_1^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu).\end{aligned} \tag{8.355}$$

利用 8.2.2 小节提供的求迹和缩并公式化简这些项，得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\not{k}_1\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu) &= \mathrm{tr}(\gamma_\mu\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\not{k}_1\gamma_\nu\not{k}_2)=\mathrm{tr}[(-2\not{p}_1)\not{k}_2(-2\not{k}_1)\not{k}_2]\\ &= 4\,\mathrm{tr}[\not{p}_1\not{k}_2(2k_1\cdot k_2-\not{k}_2\not{k}_1)]=8\,k_1\cdot k_2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_2)-4k_2^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_1)\\ &= 32(k_1\cdot k_2)(p_1\cdot k_2),\end{aligned} \tag{8.356}$$

$$2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu) = 2k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma_\mu)=-4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_2)=-16m_e^2\,p_1\cdot k_2, \tag{8.357}$$

$$2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\not{k}_1\gamma_\mu) = 2k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma_\mu)=-16m_e^2\,p_1\cdot k_2, \tag{8.358}$$

$$4k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\gamma_\mu) = -8m_e^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_1)=-32m_e^2\,p_1\cdot k_1, \tag{8.359}$$

$$m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu) = 4m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_2\gamma_\mu)=4m_e^2k_2^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu)=0, \tag{8.360}$$

$$2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu) = 8m_e^2\,k_1\cdot k_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})=32m_e^2\,k_1\cdot k_2, \tag{8.361}$$

$$2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\gamma_\mu) = 32m_e^2\,k_1\cdot k_2, \tag{8.362}$$

$$4m_e^2k_1^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu) = 16m_e^4\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})=64m_e^4. \tag{8.363}$$

从而将 A 化作

$$A=32(k_1\cdot k_2)(p_1\cdot k_2)-32m_e^2\,p_1\cdot k_2-32m_e^2\,p_1\cdot k_1+64m_e^2\,k_1\cdot k_2+64m_e^4. \tag{8.364}$$

根据 8.5 节知识，此处四维动量和 Mandelstam 变量满足以下关系。

$$k_1\cdot k_2 = p_1\cdot p_2=\frac{1}{2}(s-m_e^2),\quad k_1\cdot p_1=-\frac{1}{2}(t-2m_e^2),\quad k_2\cdot p_2=-\frac{t}{2}, \tag{8.365}$$

$$k_1\cdot p_2 = k_2\cdot p_1=-\frac{1}{2}(u-m_e^2),\quad s+t+u=2m_e^2. \tag{8.366}$$

我们进而用 Mandelstam 变量将 A 表达为

$$\begin{aligned}A &= 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(u-m_e^2)+2m_e^2(t-2m_e^2)+4m_e^2(s-m_e^2)+8m_e^4]\\ &= 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(2s+t+u)-2m_e^4]=8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2 s+2m_e^4]\\ &= 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(s-m_e^2)+4m_e^4].\end{aligned} \tag{8.367}$$

为了下面计算方便，这里消去 t，保留 s 和 u。毕竟，$e^-\gamma\to e^-\gamma$ 是 s 和 u 通道的过程。

容易看出，对 (8.351) 式作动量替换 $k_2^\mu\leftrightarrow -p_2^\mu$，就得到 (8.354) 式。注意到光子的反粒子是它自己，将 $e^-\gamma\to e^-\gamma$ 过程 s 通道 Feynman 图的初态和末态光子相互交叉，就得到 u 通道 Feynman 图，因而动量替换规则是 $k_2^\mu\leftrightarrow -p_2^\mu$。据此，对 A 的以上表达式作替换 $(k_1+k_2)^2=s\leftrightarrow u=(k_1-p_2)^2$，就得到 D 的表达式

$$D=8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(u-m_e^2)+4m_e^4]. \tag{8.368}$$

类似地，把 B 展开，余下 8 项，

$$\begin{aligned}B &= \mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu\not k_2\gamma^\nu\not k_1\gamma_\mu\not p_2\gamma_\nu)+2\,\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu\not k_1\gamma_\mu\not p_2\not k_1)-2\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_2\gamma^\nu\not k_1\gamma_\nu)-4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_1\not k_1)\\ &\quad+m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not k_2\gamma^\nu\gamma_\mu\not p_2\gamma_\nu)+2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu\not p_2\not k_1)-2m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_2\gamma^\nu\gamma_\nu)-4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_1).\end{aligned} \tag{8.369}$$

对各项作缩并求迹运算，得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu\not k_2\gamma^\nu\not k_1\gamma_\mu\not p_2\gamma_\nu) &= \mathrm{tr}[\not p_1\gamma^\mu\not k_2(2k_1^\nu-\not k_1\gamma^\nu)\gamma_\mu\not p_2\gamma_\nu]\\ &= 2\,\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu\not k_2\gamma_\mu\not p_2\not k_1)-\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu\not k_2\not k_1\gamma^\nu\gamma_\mu\not p_2\gamma_\nu)\\ &= -4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_2\not p_2\not k_1)-4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not p_2\not k_2\not k_1)\\ &= -16[(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_1)-(p_1\cdot p_2)(k_1\cdot k_2)+(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)]\\ &\quad -16[(p_1\cdot p_2)(k_1\cdot k_2)-(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_1)+(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)]\\ &= -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2),\end{aligned} \tag{8.370}$$

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu\not k_1\gamma_\mu\not p_2\not k_1) &= -4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not p_2\not k_1)=-16[(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)-(p_1\cdot p_2)k_1^2+(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)]\\ &= -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)+16m_e^2\,p_1\cdot p_2,\end{aligned} \tag{8.371}$$

$$-2\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_2\gamma^\nu\not k_1\gamma_\nu) = 4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_2\not k_1)=32(p_1\cdot k_1)(k_1\cdot k_2)-16m_e^2\,p_1\cdot k_2, \tag{8.372}$$

$$-4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_1\not k_1) = -4k_1^2\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1)=-16m_e^2\,p_1\cdot k_1, \tag{8.373}$$

$$m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not k_2\gamma^\nu\gamma_\mu\not p_2\gamma_\nu) = 4m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not k_2 p_{2\mu})=4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not p_2\not k_2)=16m_e^2\,p_2\cdot k_2, \tag{8.374}$$

$$2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu\not p_2\not k_1) = 8m_e^2\,\mathrm{tr}(\not p_2\not k_1)=32m_e^2\,p_2\cdot k_1, \tag{8.375}$$

$$-2m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_2\gamma^\nu\gamma_\nu) = -8m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_2)=-32m_e^2\,k_1\cdot k_2, \tag{8.376}$$

$$-4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_1) = -16m_e^2k_1^2=-16m_e^4. \tag{8.377}$$

代入到 B 中，并用 Mandelstam 变量表达，有

$$B = -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)-32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)+32(p_1\cdot k_1)(k_1\cdot k_2)+16m_e^2\,p_1\cdot p_2$$

图 8.12: 实验室系中 Compton 散射过程动量示意图。

$$
\begin{aligned}
& -16m_e^2\, p_1\cdot k_2 - 16m_e^2\, p_1\cdot k_1 + 16m_e^2\, p_2\cdot k_2 + 32m_e^2\, p_2\cdot k_1 - 32m_e^2\, k_1\cdot k_2 - 16m_e^4 \\
= & -8[t(t-2m_e^2) + (t-2m_e^2)(u-m_e^2) + (t-2m_e^2)(s-m_e^2) - m_e^2(s-m_e^2) - m_e^2(u-m_e^2) \\
& -m_e^2(t-2m_e^2) + m_e^2 t + 2m_e^2(u-m_e^2) + 2m_e^2(s-m_e^2) + 2m_e^4] \\
= & -8[t(t+u+s) - m_e^2(4t+s+u) + 6m_e^4] = -8(-m_e^2 t + 4m_e^4) \\
= & -8[-m_e^2(2m_e^2 - s - u) + 4m_e^4] = -8[m_e^2(s-m_e^2) + m_e^2(u-m_e^2) + 4m_e^4].
\end{aligned} \tag{8.378}
$$

同样，这里消去 t，保留 s 和 u。

对 (8.352) 式作动量替换 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$，即 $s \leftrightarrow u$，将得到 (8.353) 式。故

$$
C = -8[m_e^2(u-m_e^2) + m_e^2(s-m_e^2) + 4m_e^4] = B. \tag{8.379}
$$

s 与 u 通道的交叉项 B 和 C 恰好相等。

现在，我们将 A、B、C、D 重新用四维动量内积表达成

$$
A = 32[(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2) + m_e^2\, k_1\cdot k_2 + m_e^4], \tag{8.380}
$$

$$
B = C = 16(-m_e^2\, k_1\cdot k_2 + m_e^2\, k_1\cdot p_2 - 2m_e^4), \tag{8.381}
$$

$$
D = 32[(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2) - m_e^2\, k_1\cdot p_2 + m_e^4]. \tag{8.382}
$$

代入到 (8.350) 式中，得

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{16}\left[\frac{A}{(k_1\cdot k_2)^2} + \frac{2B}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1\cdot p_2)^2}\right] \\
&= 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{m_e^2}{k_1\cdot k_2} + \frac{m_e^4}{(k_1\cdot k_2)^2} - \frac{m_e^2}{k_1\cdot p_2} + \frac{m_e^2}{k_1\cdot k_2} - \frac{2m_e^4}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2} - \frac{m_e^2}{k_1\cdot p_2} + \frac{m_e^4}{(k_1\cdot p_2)^2}\right] \\
&= 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2} + 2m_e^2\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2} - \frac{1}{k_1\cdot p_2}\right) + m_e^4\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2} - \frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{8.383}
$$

考虑实验室参考系，初态电子静止，初态光子通过 Compton 散射将能动量传递给末态电子，如图 8.12 所示。在自然单位制中，$\hbar = c = 1$，光子的能量 E 等于它的角频率 ω，即 $E = \hbar\omega = \omega$，

而波长 λ 与角频率的关系为 $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$。因此，我们用角频率 ω 和 ω' 分别表示初末态光子的能量。初末态四维动量表示为

$$k_1^\mu = (m_e, \mathbf{0}), \quad k_2^\mu = (\omega, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu = (p_1^0, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (\omega', \mathbf{p}_2), \tag{8.384}$$

其中

$$\omega = |\mathbf{k}_2|, \quad \omega' = |\mathbf{p}_2|. \tag{8.385}$$

利用质壳条件和能动量守恒，有

$$\begin{aligned} m_e^2 &= p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_2)^2 = k_1^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_2) - 2k_2 \cdot p_2 \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta), \end{aligned} \tag{8.386}$$

$$(p_1^0)^2 = m_e^2 + |\mathbf{p}_1|^2 = m_e^2 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2|^2 = m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta, \tag{8.387}$$

故

$$m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta), \tag{8.388}$$

$$p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}\,. \tag{8.389}$$

因此，由

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \omega'}{\omega'\omega} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e} \tag{8.390}$$

得到出射光子与入射光子的波长之差

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta). \tag{8.391}$$

这就是 Arthur Compton 得到的关系式 (8.319)。据此，我们用入射光子角频率 ω 和散射角 θ 将出射光子角频率表达成

$$\omega' = \left(\frac{1 - \cos\theta}{m_e} + \frac{1}{\omega}\right)^{-1} = \left[\frac{\omega(1 - \cos\theta) + m_e}{m_e\omega}\right]^{-1} = \frac{\omega}{1 + \dfrac{\omega}{m_e}(1 - \cos\theta)}. \tag{8.392}$$

再利用

$$k_1 \cdot k_2 = m_e\omega, \quad k_1 \cdot p_2 = m_e\omega', \tag{8.393}$$

将非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m_e\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) + m_e^2\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)^2\right] \\ &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2m_e\frac{1 - \cos\theta}{m_e} + m_e^2\frac{(1 - \cos\theta)^2}{m_e^2}\right] = 2e^4\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right). \end{aligned} \tag{8.394}$$

对末态两体不变相空间积分，得

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) = \int \frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0}\delta(m_e + \omega - p_1^0 - \omega')$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\omega'\,\omega'^2}{16\pi^2\omega' p_1^0}\,\delta\Big(m_e+\omega-\sqrt{m_e^2+\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta}-\omega'\Big)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta\,\omega'}{8\pi p_1^0}\left|\frac{\partial(\sqrt{m_e^2+\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta}+\omega')}{\partial\omega'}\right|^{-1}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta\,\omega'}{8\pi p_1^0}\left|\frac{2\omega'-2\omega\cos\theta}{2p_1^0}+1\right|^{-1} = \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi}\frac{\omega'}{\omega'+p_1^0-\omega\cos\theta}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi}\frac{\omega'}{m_e+\omega(1-\cos\theta)} = \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi}\frac{\omega'}{m_e+m_e(\omega-\omega')/\omega'}\\
&= \int \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{8\pi m_e\omega}\,.
\end{aligned}
\tag{8.395}
$$

倒数第三步用到能量守恒关系 $p_1^0+\omega'=m_e+\omega$，倒数第二步用到 (8.388) 式。于是，散射截面表达为

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int \mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4k_1^0k_2^0|\mathbf{k}_2|/k_2^0}\int \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{8\pi m_e\omega}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\\
&= \int \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}.
\end{aligned}
\tag{8.396}
$$

微分散射截面是

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{2e^4\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right),
\tag{8.397}
$$

即

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right).}
\tag{8.398}
$$

上式称为 **Klein-Nishina 公式** [42]，它是 Thomson 微分截面 (8.320) 的 QED 修正。图 8.13 画出 Thomson 公式和 $\omega=10,100,1000$ keV 时 Klein-Nishina 公式给出的微分散射截面随 θ 的变化曲线。

在非相对论近似下，入射光子能量 $\omega\simeq 0$，则

$$
\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1+\dfrac{\omega}{m_e}(1-\cos\theta)} \simeq 1,
\tag{8.399}
$$

从而得到

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} \simeq \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta).
\tag{8.400}
$$

此时 Klein-Nishina 公式退化到 Thomson 微分截面公式，而散射截面近似为

$$
\sigma \simeq \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta) = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2},
\tag{8.401}
$$

这个数值称为 **Thomson 散射截面**。

图 8.13: Thomson 公式和 Klein-Nishina 公式给出的微分散射截面随散射角 θ 的变化。

8.6.3 高能行为和极化振幅

下面讨论 Compton 散射的高能极限。

在质心系中，动量如图 8.2 所示，散射角 θ 定义为初末态电子动量 $\mathbf{k}_1$ 与 $\mathbf{p}_1$ 方向之间的夹角。根据 6.5.3 小节知识，粒子能量为

$$k_1^0 = p_1^0 = \frac{s+m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv E_e, \quad k_2^0 = p_2^0 = \frac{s-m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv \omega, \tag{8.402}$$

动量大小为

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \omega. \tag{8.403}$$

于是

$$k_1 \cdot k_2 = k_1^0 k_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \omega(E_e + \omega), \quad k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \omega(E_e + \omega\cos\theta), \tag{8.404}$$

故

$$\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{E_e + \omega\cos\theta}{E_e + \omega}. \tag{8.405}$$

在高能极限下，$\sqrt{s} \gg m_e$，或者说，$\omega \gg m_e$，因而可以忽略电子质量，得到

$$E_e \simeq \omega \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}. \tag{8.406}$$

只保留非极化振幅模方 (8.383) 方括号中前两项，有

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &\simeq 2e^4\left(\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2}\right) = 2e^4\left(\frac{E_e+\omega\cos\theta}{E_e+\omega} + \frac{E_e+\omega}{E_e+\omega\cos\theta}\right) \\ &\simeq 4e^4\left(\frac{1+\cos\theta}{4} + \frac{1}{1+\cos\theta}\right).\end{aligned} \tag{8.407}$$

对于向后散射，$\theta=\pi$，而 $\cos\theta=-1$，上式发散，奇性来自圆括号中的第二项。

若要避免发散，则在奇性项分母处不能忽略 m_e。将 E_e 展开到 m_e^2/ω^2 阶，得

$$E_e=\sqrt{m_e^2+\omega^2}=\omega\sqrt{1+\frac{m_e^2}{\omega^2}}\simeq\omega\left[1+\frac{m_e^2}{2\omega^2}+\mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right)\right],\tag{8.408}$$

奇性项分母化为

$$E_e+\omega\cos\theta\simeq\omega\left[1+\cos\theta+\frac{m_e^2}{2\omega^2}+\mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right)\right].\tag{8.409}$$

因此，不发散的表达式是

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\simeq 4e^4\left[\frac{1+\cos\theta}{4}+\frac{1}{1+\cos\theta+m_e^2/(2\omega^2)}\right].\tag{8.410}$$

根据 (6.345) 式，注意到 $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\simeq\omega^2$、$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|\simeq 2$、$E_{\mathrm{CM}}\simeq 2\omega$ 和 $\int\mathrm{d}\phi=2\pi$，微分截面表达为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}\simeq\frac{2\pi}{64\pi^2}\frac{1}{2\omega^2}\frac{\omega}{2\omega}\overline{|\mathcal{M}|^2}\simeq\frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2}\left[\frac{1+\cos\theta}{4}+\frac{1}{1+\cos\theta+m_e^2/(2\omega^2)}\right].\tag{8.411}$$

当 $\omega\gg m_e$ 时，微分截面虽然在 $\theta=\pi$ 处没有发散，但数值非常大。

接下来分析高能极限下 Compton 散射的极化振幅。不变振幅 (8.321) 按 Feynman 图分解为 s 和 u 通道分别贡献的两个部分，$\mathcal{M}=\mathcal{M}_s+\mathcal{M}_u$。将螺旋度依赖显明写出来，记初态电子和光子的螺旋度为 λ_1 和 λ_2，末态电子和光子的螺旋度为 λ_1' 和 λ_2'，两个通道的极化振幅为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')&=-\frac{e^2}{s-m_e^2}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\\&\simeq-\frac{e^2}{4\omega^2}\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda_1),\end{aligned}\tag{8.412}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_u(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')&=-\frac{e^2}{u-m_e^2}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\\&\simeq\frac{e^2}{4\omega^2c_{\theta/2}^2}\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')u(\mathbf{k}_1,\lambda_1).\end{aligned}\tag{8.413}$$

第二步在高能极限下忽略电子质量，并利用了

$$s-m_e^2=(k_1+k_2)^2-m_e^2=2\,k_1\cdot k_2=2\omega(E_e+\omega)\simeq 4\omega^2,\tag{8.414}$$

$$u-m_e^2=(k_1-p_2)^2-m_e^2=-2\,k_1\cdot p_2=-2\omega(E_e+\omega\cos\theta)\simeq-4\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}.\tag{8.415}$$

容易看出，$\theta=\pi$ 处的奇性来自 u 通道。不过，$\mathcal{M}_u$ 中的因子 $(2c_{\theta/2}^2)^{-1}=(1+\cos\theta)^{-1}$ 在模方 $|\mathcal{M}_u|^2$ 中变成 $(1+\cos\theta)^{-2}$，这样的奇性看起来强于非极化振幅模方 (8.407) 中 $\sim(1+\cos\theta)^{-1}$ 的奇性。我们将通过下面的计算看到奇性是如何减弱的。

为计算极化振幅，我们先导出振幅中各个因子的显明表达式。在高能极限下，初末态电子四维动量近似为

$$k_1^\mu\simeq\omega(1,0,0,1),\quad p_1^\mu\simeq\omega(1,s_\theta,0,c_\theta),\tag{8.416}$$

参照 8.2.4 小节，相应的螺旋态为

$$\xi_+(\mathbf{k}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_-(\mathbf{k}_1)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \xi_+(\mathbf{p}_1)=\begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\s_{\theta/2}\end{pmatrix},\quad \xi_-(\mathbf{p}_1)=\begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\c_{\theta/2}\end{pmatrix}. \tag{8.417}$$

根据 (8.175) 和 (8.176) 式，高能极限下的平面波旋量系数为

$$u(\mathbf{k}_1,+)\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\\xi_+(\mathbf{k}_1)\end{pmatrix}=\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad u(\mathbf{k}_1,-)\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}\xi_-(\mathbf{k}_1)\\0\end{pmatrix}=\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{8.418}$$

$$u(\mathbf{p}_1,+)\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\\xi_+(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}=\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\c_{\theta/2}\\s_{\theta/2}\end{pmatrix},\quad u(\mathbf{p}_1,-)\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}\xi_-(\mathbf{p}_1)\\0\end{pmatrix}=\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\c_{\theta/2}\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{8.419}$$

$u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$ 的 Dirac 共轭是

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)&=u^\dagger(\mathbf{p}_1,+)\gamma^0\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0&\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\end{pmatrix}\\&=\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)&0\end{pmatrix}\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}c_{\theta/2}&s_{\theta/2}&0&0\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{8.420}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0&\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\simeq\sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0&0&-s_{\theta/2}&c_{\theta/2}\end{pmatrix}. \tag{8.421}$$

另一方面，初末态光子的四维动量是

$$k_2^\mu=\omega(1,0,0,-1),\quad p_2^\mu=\omega(1,-s_\theta,0,-c_\theta). \tag{8.422}$$

根据 (4.104) 式，末态光子极化矢量表达为

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2,+)=\frac{\omega^2}{\sqrt{2}\omega^2 s_\theta}(0,s_\theta c_\theta,-\mathrm{i}s_\theta,-s_\theta^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta), \tag{8.423}$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2,-)=\frac{\omega^2}{\sqrt{2}\omega^2 s_\theta}(0,s_\theta c_\theta,\mathrm{i}s_\theta,-s_\theta^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta). \tag{8.424}$$

与动量一样，末态光子极化矢量的空间分量转动的角度为 θ，这是自旋为 1 的体现。令 $\theta=0$，即得初态光子极化矢量

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2,+)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-\mathrm{i},0),\quad \varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2,-)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\mathrm{i},0). \tag{8.425}$$

极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+)=\gamma^\mu\varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2,+)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma^1+\mathrm{i}\gamma^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -\sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2 \\ \sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \tag{8.426}$$

$$\begin{aligned}
\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-) &= \gamma^\mu\varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma^1-\mathrm{i}\gamma^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2 \\ \sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{8.427}$$

$$\begin{aligned}
\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) &= \gamma^\mu\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta\gamma^1-\mathrm{i}\gamma^2+s_\theta\gamma^3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -c_\theta\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2+s_\theta\sigma^3 \\ c_\theta\sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2-s_\theta\sigma^3 & \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c^2_{\theta/2} \\ & & s^2_{\theta/2} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c^2_{\theta/2} & & \\ -s^2_{\theta/2} & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{8.428}$$

$$\begin{aligned}
\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) &= \gamma^\mu\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta\gamma^1+\mathrm{i}\gamma^2+s_\theta\gamma^3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -c_\theta\sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2+s_\theta\sigma^3 \\ c_\theta\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2-s_\theta\sigma^3 & \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & s^2_{\theta/2} \\ & & -c^2_{\theta/2} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -s^2_{\theta/2} & & \\ c^2_{\theta/2} & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.429}$$

第一步，按照 (8.412) 式计算 s 通道极化振幅 $\mathcal{M}_s$。$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.430}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.431}$$

可见，当末态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献为零。这是因为螺旋度相反的电子和光子组成一个角动量为 $j=3/2$ 的系统，而 s 通道电子传播子对应于一个自旋为 1/2 的类时虚粒子，违背角动量守恒，相应的角动量合成情况可参考图 8.14(a)。如果不忽略电子质量，则会出现受

(a) $\mathcal{M}(+,-,+,-)$ (b) $\mathcal{M}(+,+,+,-)$

图 8.14: 质心系中 $\mathcal{M}(+,-,+,-)$ 和 $\mathcal{M}(+,+,+,-)$ 的角动量合成示意图。小双线箭头代表自旋角动量的方向，大双线箭头代表初态或末态的总角动量方向，数字标注相应的角动量量子数。

到螺旋度压低的非零贡献。$(k_1+k_2)^\mu \simeq (2\omega,0,0,0)$ 与 Dirac 矩阵的缩并表达成

$$\not{k}_1+\not{k}_2=(k_1+k_2)_\mu\begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}\simeq 2\omega\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}=2\omega\begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}. \tag{8.432}$$

乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2)\simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix} s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{8.433}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2)\simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{8.434}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2)\simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{8.435}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2)\simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8.436}$$

$\mathcal{M}_s$ 表达式 (8.412) 最后两个因子 $\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{8.437}$$

当初态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献也为零，理由同上。

将这些因子乘起来，就得到 $\mathcal{M}_s$ 的计算结果。由于 $\mathcal{M}_s$ 的初末态平面波旋量系数之间夹着 3 个 Dirac 矩阵，我们从 (8.195) 式推断螺旋度相反的初末态电子在高能极限下没有贡献，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-\lambda)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda)\simeq 0,\quad \lambda=\pm. \tag{8.438}$$

对于初末态电子螺旋度相同的情况，非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}, \tag{8.439}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}. \tag{8.440}$$

相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(+,+,+,+) = \mathcal{M}_s(-,-,-,-) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}. \tag{8.441}$$

可见，在高能极限下，s 通道贡献只来自四个粒子全部右旋极化和全部左旋极化的螺旋度构型。这两种构型在宇称变换下相互转换，由于宇称守恒，它们的振幅至多相差一个相位因子，此处相位因子为 1。

第二步，按照 (8.413) 式计算 u 通道极化振幅 $\mathcal{M}_u$。$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & s_{\theta/2} & 0\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{8.442}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & s_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8.443}$$

$(k_1-p_2)^\mu \simeq \omega(0,s_\theta,0,1+c_\theta) = 2\omega(0,s_{\theta/2}c_{\theta/2},0,c_{\theta/2}^2)$ 与 Dirac 矩阵的缩并是

$$\begin{aligned}\not{k}_1-\not{p}_2 &= (k_1-p_2)_\mu\begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \simeq 2\omega\begin{pmatrix} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 - c_{\theta/2}^2\sigma^3 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 + c_{\theta/2}^2\sigma^3 & \end{pmatrix} \\ &= 2\omega\begin{pmatrix} & & -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ & & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 & & \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.444}$$

乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)$ 后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}^2c_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{8.445}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}0 & 0 & s_{\theta/2}^2c_{\theta/2} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2\end{pmatrix}, \tag{8.446}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}-s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 & c_{\theta/2}^3 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{8.447}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}0 & 0 & c_{\theta/2}^3 & s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2\end{pmatrix}. \tag{8.448}$$

$\mathcal{M}_u$ 表达式 (8.413) 最后两个因子 $\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ c_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{8.449}$$

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} \end{pmatrix}. \tag{8.450}$$

同样根据 (8.195) 式，我们知道高能极限下螺旋度相反的初末态电子没有贡献，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-\lambda)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')u(\mathbf{k}_1,\lambda) \simeq 0, \quad \lambda=\pm. \tag{8.451}$$

对于初末态电子螺旋度相同的情况，非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2}, \tag{8.452}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2}, \tag{8.453}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3, \tag{8.454}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3. \tag{8.455}$$

相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_u(+,+,+,+) = \mathcal{M}_u(-,-,-,-) \simeq -\frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}}, \tag{8.456}$$

$$\mathcal{M}_u(+,-,+,-) = \mathcal{M}_u(-,+,-,+) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}. \tag{8.457}$$

这些表达式再次体现 QED 中的宇称守恒。可见，$\theta=\pi$ 处的奇性来自全部粒子螺旋度相同的 u 通道振幅 $\mathcal{M}_u(\pm,\pm,\pm,\pm)$，而 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\pm)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\pm)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\pm)u(\mathbf{k}_1,\pm)$ 包含一个 $c_{\theta/2}$ 因子，将振幅中原本 $\sim c_{\theta/2}^{-2}$ 的奇性减弱成 $\sim c_{\theta/2}^{-1}$ 的奇性。

在高能极限下，其余四种初末态电子螺旋度相同的振幅 $\mathcal{M}_u(+,+,+,-)$、$\mathcal{M}_u(+,-,+,+)$、$\mathcal{M}_u(-,+,-,-)$ 和 $\mathcal{M}_u(-,-,-,+)$ 都等于零，这是因为在这些过程中初态和末态的角动量量子数不相等，而电子质量已经忽略掉了，不能用于翻转螺旋度。$\mathcal{M}_u(+,+,+,-)$ 的角动量合成情况见图 8.14(b)。

现在，将 s 和 u 通道的贡献加起来，$\mathcal{M}=\mathcal{M}_s+\mathcal{M}_u$，得到非零极化振幅

$$\mathcal{M}(+,+,+,+) = \mathcal{M}(-,-,-,-) \simeq -2e^2 c_{\theta/2} - \frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}} = -\frac{2e^2}{c_{\theta/2}}, \tag{8.458}$$

$$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}. \tag{8.459}$$

于是，非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{1}{4}\left[2|\mathcal{M}(+,-,+,-)|^2 + 2|\mathcal{M}(+,+,+,+)|^2\right] \\ &\simeq \frac{1}{2}\left(4e^4 c_{\theta/2}^2 + \frac{4e^4}{c_{\theta/2}^2}\right) = 4e^4\left(\frac{1+c_\theta}{4} + \frac{1}{1+c_\theta}\right),\end{aligned} \tag{8.460}$$

与 (8.407) 式一致。

图 8.15: $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 领头阶 Feynman 图。

8.6.4　正负电子湮灭到双光子

在 QED 领头阶，正负电子湮灭到双光子过程 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 的 Feynman 图如图 8.15 所示，它与 Compton 散射过程具有交叉对称性。

设初态 e^- 和 e^+ 的动量分别为 k_1' 和 k_2'，末态两个光子的动量为 p_1' 和 p_2'。对比 (8.321) 式中 Feynman 图可以发现，将 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 交叉成 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 时，需要把初态 γ (动量为 k_2) 换成末态 γ (动量为 p_1')，并把末态 e^- (动量为 p_1) 换成初态 e^+ (动量为 k_2')，引起动量替换规则

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to -k_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to p_2'^\mu. \tag{8.461}$$

对 (8.383) 式应用这个替换规则，由于只交叉一个费米子，需要移除一个整体负号，从而得到 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left[\frac{k_1'\cdot p_2'}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{k_1'\cdot p_1'}{k_1'\cdot p_2'} + 2m_e^2\left(\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'}\right) - m_e^4\left(\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'}\right)^2\right]. \tag{8.462}$$

在质心系中，记 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 之间的夹角为 θ，则

$$k_1'\cdot p_1' = k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = \frac{s}{4}(1-\beta_e\cos\theta), \tag{8.463}$$

$$k_1'\cdot p_2' = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = \frac{s}{4}(1+\beta_e\cos\theta), \tag{8.464}$$

其中 $\beta_e = \sqrt{1-4m_e^2/s}$。从而，

$$\frac{k_1'\cdot p_2'}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{k_1'\cdot p_1'}{k_1'\cdot p_2'} = \frac{1+\beta_e\cos\theta}{1-\beta_e\cos\theta} + \frac{1-\beta_e\cos\theta}{1+\beta_e\cos\theta} = \frac{2(1+\beta_e^2\cos^2\theta)}{1-\beta_e^2\cos^2\theta}, \tag{8.465}$$

$$\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'} = \frac{4}{s}\left(\frac{1}{1-\beta_e\cos\theta} + \frac{1}{1+\beta_e\cos\theta}\right) = \frac{8}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)}. \tag{8.466}$$

于是得到

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2\alpha^2\left[\frac{2(1+\beta_e^2\cos^2\theta)}{1-\beta_e^2\cos^2\theta} + \frac{16m_e^2}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)} - \frac{64m_e^4}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]. \tag{8.467}$$

由 (6.365) 式得相应的微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 s\beta_e} = \frac{\alpha^2}{s\beta_e}\left[\frac{1+\beta_e^2\cos^2\theta}{1-\beta_e^2\cos^2\theta} + \frac{8m_e^2}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]. \tag{8.468}$$

图 8.16: $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 微分散射截面。实验数据来自 JADE 合作组 [43]。

对上式积分计算散射截面 σ 时，应当注意此过程的末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$。

PETRA 对撞机上的 JADE 探测器测量了质心能 $\sqrt{s} = 14,\ 22,\ 34.6$ GeV 的 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 微分散射截面 [43]，数据如图 8.16 所示。根据 (8.468) 式计算的 QED 预言值用实线画在图上，与实验数据基本吻合。

习　题

8.1 推出以下公式。

(a) $\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu) = 4p^\mu$.

(b) $\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}\not{q}\gamma^\mu) = 4[q^\mu(p\cdot k) - k^\mu(p\cdot q) + p^\mu(k\cdot q)]$.

(c)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\phi) = {} & 4g^{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}g^{\tau\phi} - g^{\rho\tau}g^{\sigma\phi} + g^{\rho\phi}g^{\sigma\tau}) - 4g^{\mu\rho}(g^{\nu\sigma}g^{\tau\phi} - g^{\nu\tau}g^{\sigma\phi} + g^{\nu\phi}g^{\sigma\tau}) \\ & +4g^{\mu\sigma}(g^{\nu\rho}g^{\tau\phi} - g^{\nu\tau}g^{\rho\phi} + g^{\nu\phi}g^{\rho\tau}) - 4g^{\mu\tau}(g^{\nu\rho}g^{\sigma\phi} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\phi} + g^{\nu\phi}g^{\rho\sigma}) \\ & +4g^{\mu\phi}(g^{\nu\rho}g^{\sigma\tau} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\tau} + g^{\nu\tau}g^{\rho\sigma}).\end{aligned} \tag{8.469}$$

(d)

$$\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\gamma\delta^\rho{}_\delta - \delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\delta\delta^\rho{}_\beta - \delta^\mu{}_\delta\delta^\nu{}_\beta\delta^\rho{}_\gamma + \delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\beta\delta^\rho{}_\delta + \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\delta\delta^\rho{}_\gamma + \delta^\mu{}_\delta\delta^\nu{}_\gamma\delta^\rho{}_\beta. \tag{8.470}$$

8.2 在 QED 领头阶，Bhabha 散射 $e^+e^- \to e^+e^-$ 和 Møller 散射 $e^-e^- \to e^-e^-$ 的 Feynman 图分别如 (8.313) 和 (8.314) 所示。

(a) 忽略电子质量，证明 Bhabha 散射的非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}_{\mathrm{B}}|^2} = 32\pi^2\alpha^2\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{t^2}{s^2}+\frac{s^2}{t^2}\right]. \tag{8.471}$$

(b) 利用交叉对称性，求出 Møller 散射的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}_{\mathrm{M}}|^2}$。

8.3 验证用 (8.339) 式表达的 $M^{\mu\nu}$ 满足 Ward 恒等式 $k_{2\nu}M^{\mu\nu}$。

8.4 考虑另一种形式的 **Yukawa 理论**，拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi - \kappa\,\phi\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi, \tag{8.472}$$

其中 $\phi(x)$ 是质量为 m_ϕ 的实标量场，$\psi(x)$ 是质量为 m_ψ 的 Dirac 旋量场，κ 是实耦合常数。

(a) 写出动量空间中的顶点 Feynman 规则。

(b) 设 $m_\phi > 2m_\psi$，画出衰变过程 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 的领头阶 Feynman 图，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变宽度 Γ。

(c) 画出湮灭过程 $\psi\bar{\psi} \to \phi\phi$ 的领头阶 Feynman 图。设 $m_\psi = m_\phi = 0$，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$，并在质心系中求出微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$。

8.5 考虑**四费米子相互作用理论**，拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\sum_{f=\mu,e,\nu_\mu,\nu_e}(\mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f)\\ &-\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma^\rho(1-\gamma^5)\psi_\mu\bar{\psi}_e\gamma_\rho(1-\gamma^5)\psi_{\nu_e}+\bar{\psi}_\mu\gamma^\rho(1-\gamma^5)\psi_{\nu_\mu}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\rho(1-\gamma^5)\psi_e\right],\end{aligned} \tag{8.473}$$

其中 Dirac 旋量场 $\psi_\mu(x)$、$\psi_e(x)$、$\psi_{\nu_\mu}(x)$ 和 $\psi_{\nu_e}(x)$ 分别描述 μ 子、电子、μ 子型中微子和电子型中微子，Fermi 常数 $G_{\mathrm{F}} = 1.166\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$，方括号中两项互为厄米共轭。

(a) 写出动量空间中所有顶点的 Feynman 规则。

(b) 画出三体衰变过程 $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ 的领头阶 Feynman 图。设 $m_e = m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu} = 0$，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变宽度 Γ。

(c) 计算 μ 子寿命 $\tau = 1/\Gamma$ 的数值，以秒为单位。

8.6 考虑**标准模型**里面电中性矢量玻色子 Z 和带电矢量玻色子 $W^\pm$ 与第一代轻子的相互作用，拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ZW} = &-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu-\frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+,\mu\nu}+m_W^2W^-_\mu W^{+,\mu}\\ &+\mathrm{i}\bar{\psi}_e\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e - m_e\bar{\psi}_e\psi_e+\mathrm{i}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_e}\\ &-\frac{g}{2\cos\theta_{\mathrm{W}}}Z_\mu\left[\bar{\psi}_e\gamma^\mu(g_{\mathrm{V}}^e-g_{\mathrm{A}}^e\gamma^5)\psi_e+\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(g_{\mathrm{V}}^{\nu_e}-g_{\mathrm{A}}^{\nu_e}\gamma^5)\psi_{\nu_e}\right]\end{aligned}$$

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu P_{\rm L}\psi_e+{\rm H.c.}\right). \tag{8.474}$$

其中，实矢量场 $Z^\mu(x)$ 描述质量为 $m_Z=91.19$ GeV 的 Z 玻色子；复矢量场 $W^{+,\mu}(x)$ 描述质量为 $m_W=80.38$ GeV 的 $W^\pm$ 玻色子，且 $W^{-,\mu}\equiv(W^{+,\mu})^\dagger$，相应的内外线 Feynman 规则见习题 7.5。场强张量 $Z_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu$，$W^\pm_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu W^\pm_\nu-\partial_\nu W^\pm_\mu$。Dirac 旋量场 $\psi_e(x)$ 和 $\psi_{\nu_e}(x)$ 分别描述电子和电子型中微子。g 是实的弱耦合常数，$\theta_{\rm W}$ 是弱混合角。$g_{\rm V}^e$、$g_{\rm A}^e$、$g_{\rm V}^{\nu_e}$、$g_{\rm A}^{\nu_e}$ 都是实的无量纲常数。H.c. 代表厄米共轭。

(a) 写出动量空间中所有顶点的 Feynman 规则。

(b) 画出衰变过程 $Z\to e^+e^-$ 和 $Z\to\nu_e\bar{\nu}_e$ 的领头阶 Feynman 图。计算 $Z\to e^+e^-$ 的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变分宽度 $\Gamma(Z\to e^+e^-)$。类比给出衰变分宽度 $\Gamma(Z\to\nu_e\bar{\nu}_e)$。

(c) 画出衰变过程 $W^+\to e^+\nu_e$ 的领头阶 Feynman 图，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变分宽度 $\Gamma(W^+\to e^+\nu_e)$。

(d) 已知

$$\cos^2\theta_{\rm W}=\frac{m_W^2}{m_Z^2},\quad g=\frac{e}{\sin\theta_{\rm W}},\quad g_{\rm V}^e=-\frac{1}{2}+2\sin^2\theta_{\rm W},\quad g_{\rm A}^e=-\frac{1}{2},\quad g_{\rm V}^{\nu_e}=g_{\rm A}^{\nu_e}=\frac{1}{2}. \tag{8.475}$$

计算上述三个衰变分宽度的数值，以 GeV 为单位。

8.7 以实标量场 $H(x)$ 描述质量为 m_H 的标准模型 Higgs 玻色子 H，考虑拉氏量

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{ZW}+\frac{1}{2}(\partial^\mu H)\partial_\mu H-\frac{1}{2}m_H^2H^2+\frac{m_Z^2}{v}HZ_\mu Z^\mu+\frac{2m_W^2}{v}HW_\mu^-W^{+,\mu}, \tag{8.476}$$

其中 $\mathcal{L}_{ZW}$ 由 (8.474) 式给出，而 $v=(\sqrt{2}G_{\rm F})^{-1/2}=246.2$ GeV 是 Higgs 场的真空期待值。

(a) 写出动量空间中 HZZ 和 HWW 顶点的 Feynman 规则。

(b) 设 $m_H>2m_Z$，画出衰变过程 $H\to ZZ$ 的领头阶 Feynman 图，计算相应的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变分宽度 $\Gamma(H\to ZZ)$。

(c) 设 $m_H>2m_W$，画出衰变过程 $H\to W^+W^-$ 的领头阶 Feynman 图，计算相应的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变分宽度 $\Gamma(H\to W^+W^-)$。

(d) 画出散射过程 $e^+e^-\to ZH$ 的领头阶 Feynman 图，忽略电子质量 m_e，计算相应的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和散射截面 σ，将 σ 表达为质心能 $\sqrt{s}$ 的函数。取 $m_H=125$ GeV 和 $\sqrt{s}=240$ GeV，利用 (8.475) 式计算 σ 的数值，以 pb 为单位。

第 9 章　分立对称性和 Majorana 旋量场

相对于连续变换，不能用连续变化的参数描述的对称变换称为**分立** (discrete) 变换，也称为离散变换。如果系统的作用量在一种分立变换下不变，则系统具有相应的**分立对称性** (discrete symmetry)。1.3 节末提到的宇称变换和时间反演变换是两种重要的分立变换，另一种常见的分立变换是电荷共轭变换。本章讨论量子场的分立变换和分立对称性，顺便介绍 Majorana 旋量场，并深入了解各类旋量场。

9.1　标量场的分立变换

9.1.1　标量场的 P 变换

时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 的**宇称变换**由 (1.58) 式给出，即

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1). \tag{9.1}$$

这是一种非固有保时向 Lorentz 变换，将 x^μ 变换为 $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$，将时空导数 ∂_μ 变换为 $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$，将四维动量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu = (\mathcal{P}p)^\mu = (E, -\mathbf{p})$，但同时保持时空体积元不变，$\mathrm{d}^4x' = |\det(\mathcal{P})|\,\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x$。如果场论系统的作用量 $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)$ 在宇称变换下不变，则运动方程的形式也在宇称变换下不变，此时称系统是**宇称守恒**的，即具有**空间反射对称性**。在宇称守恒的理论中，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 的宇称变换应当满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$，从而使得 $S' = \int \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}'(x') = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x) = S$。

类似于 3.1 节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$\boxed{|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})\,|\Psi\rangle = P\,|\Psi\rangle\,,} \tag{9.2}$$

称为 ***P* 变换**，其中 $P \equiv U(\mathcal{P})$ 是一个线性幺正算符。根据同态关系 $U(\mathcal{P}^{-1})U(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}) = \mathbb{I} = U^{-1}(\mathcal{P})U(\mathcal{P})$ 和 $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$，有

$$P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P, \tag{9.3}$$

即 P 是自身的逆变换算符。从而 $P^2 = P^{-1}P = \mathbb{I}$，故相继两次 P 变换的作用等同于恒等变换。由 P 的幺正性得

$$P^\dagger = P^{-1} = P, \tag{9.4}$$

因而 P 是厄米算符。此时，由量子场算符构成的拉氏量在宇称变换下不变意味着 $\mathcal{L}'(x') = P^{-1}\mathcal{L}(x')P = \mathcal{L}(x)$。作替换 $x' \to x$，$x \to \mathcal{P}^{-1}x = \mathcal{P}x$，将这个式子等价地写成

$$\boxed{P^{-1}\mathcal{L}(x)P = +\mathcal{L}(\mathcal{P}x).} \tag{9.5}$$

使拉氏量满足上式，也就是说，让拉氏量具有**偶宇称**(指上式右边的 + 号)，就能得到宇称守恒的量子场论。

现在讨论量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda, a)$ 的生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在宇称守恒理论中的 P 变换。空间反射对称性意味着存在类似于 (3.7) 的同态关系，也就是说，可以将 (3.7) 式中的固有保时向 Lorentz 变换 Λ_1 或 Λ_2 替换成宇称变换 $\mathcal{P}$，于是

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a), \tag{9.6}$$

相应的无穷小变换为

$$P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon). \tag{9.7}$$

上式与 (3.16) 式类似，因而可以推出类似于 (3.25) 和 (3.26) 式的 P 变换规则

$$P^{-1}J^{\mu\nu}P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P^{-1}P^\mu P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{9.8}$$

从而，由 (3.37) 式定义的总角动量算符 J^i 和增速算符 K^i 在 P 变换下变成

$$P^{-1}J^iP = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}P^{-1}J^{jk}P = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{P}^j{}_l\mathcal{P}^k{}_m J^{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-\delta^j{}_l)(-\delta^k{}_m)J^{lm} = +J^i, \tag{9.9}$$

$$P^{-1}K^iP = P^{-1}J^{0i}P = \mathcal{P}^0{}_0\mathcal{P}^i{}_jJ^{0j} = -\delta^i{}_jJ^{0j} = -K^i, \tag{9.10}$$

即

$$\boxed{P^{-1}\mathbf{J}P = +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P = -\mathbf{K}.} \tag{9.11}$$

总角动量算符 $\mathbf{J}$ 具有**偶宇称**，体现了它作为**三维轴矢量**的变换性质，因此角动量在宇称变换下不变。将四维动量算符分解为 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$，就得到

$$\boxed{P^{-1}HP = +H, \quad P^{-1}\mathbf{P}P = -\mathbf{P}.} \tag{9.12}$$

动量算符 $\mathbf{P}$ 具有**奇宇称**，体现了它作为**三维极矢量**的变换性质，而动量方向在宇称变换下反转。哈密顿量算符 H 的宇称为**偶**，而 $P^{-1}HP = +H$ 等价于 $[H, P] = 0$，后者在量子理论中意味着宇称算符 P 是一个**守恒量**。在宇称守恒的相互作用理论中，如果散射或衰变过程的初态是宇称本征态，那么末态也将是宇称本征态，而且初末态的宇称本征值相等。

通常来说，我们希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质。为了得到一个宇称守恒的量子场论，首先，需要让拉氏量中的自由部分在宇称变换下不变，这是容易做到的；其次，还得要求拉氏量中的相互作用部分也在宇称变换下不变，这一点并不是平庸的。实际上，尽管宇称在电磁相互作用和强相互作用中守恒，在弱相互作用中却遭到极大的破坏。这

个出乎意料的现象是 1956 年李政道和杨振宁对当时的实验结果进行理论分析时发现的 [44]。为了分析量子场论中的宇称守恒情况，我们需要知道各种量子场在 P 变换下的性质。

下面先讨论自由的**复标量场** $\phi(x)$，拉氏量为 (2.179) 式，$\phi(x)$ 的运动方程是 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2+m^2)\phi(x)=0$。宇称变换翻转了动量的方向，因而 P 变换对正标量玻色子 ϕ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^+\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a_\mathbf{p}^\dagger|0\rangle$ 的作用（参考习题 9.1）为

$$P\left|\mathbf{p}^+\right\rangle=\eta_P\left|-\mathbf{p}^+\right\rangle, \tag{9.13}$$

其中 η_P 是一个复的**相位因子**，满足 $|\eta_P|=1$。出现 η_P 的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理。

假设真空态在 P 变换下不变，即 $P|0\rangle=|0\rangle$，从而

$$P\left|\mathbf{p}^+\right\rangle=P^{-1}|\mathbf{p}^+\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,P^{-1}a_\mathbf{p}^\dagger P|0\rangle, \tag{9.14}$$

与 $P|\mathbf{p}^+\rangle=\eta_P|-\mathbf{p}^+\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,\eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ 比较，推出

$$P^{-1}a_\mathbf{p}^\dagger P=\eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger,\quad P^{-1}a_\mathbf{p}P=\eta_P^* a_{-\mathbf{p}}, \tag{9.15}$$

其中第二式由第一式取厄米共轭得到，注意 $(P^{-1}a_\mathbf{p}^\dagger P)^\dagger=(P^\dagger a_\mathbf{p}^\dagger P)^\dagger=P^\dagger a_\mathbf{p}P=P^{-1}a_\mathbf{p}P$。这是产生湮灭算符的 P 变换形式。另一方面，P 变换对反标量玻色子 $\bar\phi$ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^-\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b_\mathbf{p}^\dagger|0\rangle$ 的作用为 $P|\mathbf{p}^-\rangle=\tilde\eta_P|-\mathbf{p}^-\rangle$，出现另一个相位因子 $\tilde\eta_P$，同理推出

$$P^{-1}b_\mathbf{p}^\dagger P=\tilde\eta_P b_{-\mathbf{p}}^\dagger,\quad P^{-1}b_\mathbf{p}P=\tilde\eta_P^* b_{-\mathbf{p}}. \tag{9.16}$$

于是，复标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式 (2.187) 在 P 变换下化为

$$\begin{aligned}P^{-1}\phi(x)P&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(P^{-1}a_\mathbf{p}P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+P^{-1}b_\mathbf{p}^\dagger P\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(\eta_P^* a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\tilde\eta_P b_{-\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[\eta_P^* a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+\tilde\eta_P b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}\right],\end{aligned} \tag{9.17}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，并利用 $(\mathcal{P}p)\cdot x=p\cdot(\mathcal{P}x)$。为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变，我们必须要求 η_P 和 $\tilde\eta_P$ 满足关系式

$$\eta_P^*=\tilde\eta_P, \tag{9.18}$$

使得 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 P 变换为

$$\boxed{P^{-1}\phi(x)P=\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x),\quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P=\eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x),} \tag{9.19}$$

即 $P^{-1}\phi(x)P$ 与 $\phi(\mathcal{P}x)$ 只相差一个常数因子 η_P^*。从而，作宇称变换后，$\phi'(x') = P^{-1}\phi(x')P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x') = \eta_P^*\phi(x)$ 也满足 Klein-Gordon 方程，

$$(\partial'^2 + m^2)\phi'(x') = \eta_P^*(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0. \tag{9.20}$$

这样的话，$b_{\mathbf{p}}^\dagger$ 和 $b_{\mathbf{p}}$ 的 P 变换 (9.16) 变成

$$P^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger P = \eta_P^* b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad P^{-1}b_{\mathbf{p}}P = \eta_P b_{-\mathbf{p}}. \tag{9.21}$$

现在讨论自由复标量场的拉氏量 (2.179) 的宇称变换性质。拉氏量中的动能项涉及到时空导数算符 ∂_μ，它满足

$$\partial_{x,\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(\mathcal{P}^\nu{}_\rho x^\rho)}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}^\nu{}_\rho x^\rho)} = \mathcal{P}^\nu{}_\rho\delta^\rho{}_\mu\frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}x)^\nu} = \mathcal{P}^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}x)^\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial(\mathcal{P}x)^\nu}, \tag{9.22}$$

即

$$\boxed{\partial_{x,\mu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_{\mathcal{P}x,\nu}.} \tag{9.23}$$

这里在简写时把时空导数算符对时空点的依赖性明显写出来。取 $\Lambda = \mathcal{P}^{-1}$，则 (1.37) 式变成 $\mathcal{P}^\mu{}_\rho = g^{\mu\beta}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta g_{\rho\alpha}$，据此将 $\partial_x^\mu = g^{\mu\beta}\partial_{x,\beta} = g^{\mu\beta}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta\partial_{\mathcal{P}x,\alpha} = g^{\mu\beta}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta g_{\alpha\nu}\partial_{\mathcal{P}x}^\nu$ 化为

$$\boxed{\partial_x^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\partial_{\mathcal{P}x}^\nu.} \tag{9.24}$$

于是，拉氏量中动能项算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned} P^{-1}\partial_x^\mu\phi^\dagger(x)\partial_{x,\mu}\phi(x)P &= \partial_x^\mu P^{-1}\phi^\dagger(x)P\partial_{x,\mu}P^{-1}\phi(x)P = |\eta_P|^2\mathcal{P}^\mu{}_\nu\partial_{\mathcal{P}x}^\nu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu\partial_{\mathcal{P}x,\rho}\phi(\mathcal{P}x) \\ &= \delta^\rho{}_\nu\partial_{\mathcal{P}x}^\nu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_{\mathcal{P}x,\rho}\phi(\mathcal{P}x) = +\partial_{\mathcal{P}x}^\mu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_{\mathcal{P}x,\mu}\phi(\mathcal{P}x), \end{aligned} \tag{9.25}$$

质量项算符 $\phi^\dagger\phi$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)P = P^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\phi(x)P = |\eta_P|^2\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x) = +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x). \tag{9.26}$$

以上两式最右边表达式中的 + 号表明算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$ 和 $\phi^\dagger\phi$ 都具有偶宇称。因此，拉氏量 (2.179) 满足 (9.5) 式，即拉氏量在宇称变换下不变。从而，自由的复标量场理论是宇称守恒的，且 (9.20) 式表明相应的经典运动方程在宇称变换下保持不变。这说明以上讨论是自洽的，而关系式 (9.18) 是合理的。

在 P 变换下，(2.209) 式中的 U(1) 守恒流算符 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 变成

$$P^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial_x^\mu}\phi(x)P = \mathrm{i}P^{-1}\phi^\dagger(x)P\,\mathcal{P}^\mu{}_\nu\overleftrightarrow{\partial_{\mathcal{P}x}^\nu}P^{-1}\phi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\overleftrightarrow{\partial_{\mathcal{P}x}^\nu}\phi(\mathcal{P}x), \tag{9.27}$$

符合 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 作为极矢量的变换规则。

在质心系中考虑一对正反标量玻色子 $\phi\bar{\phi}$ 组成的态

$$\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle = \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger\left|0\right\rangle, \tag{9.28}$$

其中 $\Phi(\mathbf{p})$ 是动量空间中的波函数。当轨道角动量的量子数为 L、轨道磁量子数为 M 时，$\Phi(\mathbf{p})$ 正比于球谐函数

$$\mathrm{Y}_{LM}(\theta,\phi)=(-)^M\sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}}\,\mathrm{P}_L^M(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\phi},\quad L\in\mathbb{N},\quad M=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm L, \tag{9.29}$$

其中 θ 和 ϕ 分别是球坐标系中动量 $\mathbf{p}$ 的极角和方位角，而连带 Legendre 函数

$$\mathrm{P}_L^M(x)=\frac{(1-x^2)^{M/2}}{2^L L!}\frac{\mathrm{d}^{L+M}}{\mathrm{d}x^{L+M}}(x^2-1)^L \tag{9.30}$$

满足

$$\mathrm{P}_L^M(-x)=(-)^{L+M}\mathrm{P}_L^M(x). \tag{9.31}$$

注意 $-\mathbf{p}$ 的极角为 $\pi-\theta$，方位角为 $\phi+\pi$，而 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\pi}=(-)^M$，由

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_{LM}(\pi-\theta,\phi+\pi)&=(-)^M\sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}}\,\mathrm{P}_L^M(-\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}M(\phi+\pi)}\\&=(-)^M\sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}}\,(-)^{L+M}\mathrm{P}_L^M(\cos\theta)(-)^M\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\phi}=(-)^L\mathrm{Y}_{LM}(\theta,\phi)\end{aligned} \tag{9.32}$$

得

$$\Phi(-\mathbf{p})=(-)^L\Phi(\mathbf{p}). \tag{9.33}$$

于是，$\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned}P\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle&=\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})P^{-1}a_{\mathbf{p}}^\dagger PP^{-1}b_{-\mathbf{p}}^\dagger P\left|0\right\rangle=|\eta_P|^2\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger\left|0\right\rangle\\&=\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p})a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger\left|0\right\rangle=(-)^L\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger\left|0\right\rangle=(-)^L\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle.\end{aligned} \tag{9.34}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$。这个结果表明 $\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 是 P 算符的本征态，本征值 $(-)^L$ 是可观测量，称作 $\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 的**宇称**。宇称是一种**相乘性量子数** (multiplicative quantum number)，态矢的总宇称是各部分贡献的宇称之积。波函数 $\Phi(\mathbf{p})$ 对 $\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 宇称的贡献为 $(-)^L$，这部分称为**轨道宇称** (orbital parity)。扣除轨道宇称之后，剩下的部分称为**内禀宇称** (intrinsic parity)。$\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 的内禀宇称为 $+$，因此我们说一对正反标量玻色子的内禀宇称为偶。

接下来讨论自由的**实标量场** $\phi(x)$，拉氏量为 (2.79) 式。比较它的平面波展开式 (2.103) 与 (2.187) 式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在 $b_{\mathbf{p}}=a_{\mathbf{p}}$ 的条件下进行，由此推出

$$\eta_P=\tilde{\eta}_P=\eta_P^*. \tag{9.35}$$

于是，相位因子 η_P 是实数，满足 $\eta_P^2=|\eta_P|^2=1$，故

$$\boxed{\eta_P=\pm1.} \tag{9.36}$$

若 $\eta_P = +1$，则实标量场 $\phi(x)$ 是狭义的**标量场**，P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = +\phi(\mathcal{P}x), \tag{9.37}$$

宇称为偶。若 $\eta_P = -1$，则称它是**赝标量场**，P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = -\phi(\mathcal{P}x), \tag{9.38}$$

宇称为奇。容易看出，无论实标量场 $\phi(x)$ 具有哪种宇称，拉氏量 (2.79) 都在宇称变换下不变。不过，与旋量场发生宇称守恒的相互作用时，宇称不同的实标量场 $\phi(x)$ 具有不同的性质，可以通过实验来分辨。

对于复标量场 $\phi(x)$，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的，接下来论证这一点。如 2.4.3 小节所述，自由的复标量场具有变换形式为 $\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)$ 的 U(1) 整体对称性，相应的守恒荷算符 Q 由 (2.212) 式给出，满足 (2.232) 式，即 $[Q,\phi] = -q\phi$。由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \cdots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi, \tag{9.39}$$

再利用 (5.23) 式，推出

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\phi, (-\mathrm{i}\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\theta)^n}{n!}[\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}q\theta)^n}{n!}\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi. \tag{9.40}$$

用厄米算符 Q 和 P 算符定义一个新的幺正算符

$$P' \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Q}P, \tag{9.41}$$

满足 $P'^{-1} = P'^{\dagger} = P^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q} = P^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q}$，则复标量场 $\phi(x)$ 的 P' 变换为

$$P'^{-1}\phi(x)P' = P^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q}\phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Q}P = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}P^{-1}\phi(x)P = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x) = \eta_P'^*\phi(\mathcal{P}x), \tag{9.42}$$

其中

$$\eta_P' \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\eta_P \tag{9.43}$$

是 P' 算符的相位因子。尽管 P' 算符不是厄米的，它的作用与 P 算符的作用在实质上是相同的，能够将 $\phi(x)$ 变换成 $\phi(\mathcal{P}x)$，只相差一个相位因子 η_P'。因此，我们可以用 P' 取代 P 作为宇称变换算符，而相位因子 η_P' 将取代原来的 η_P。由于 U(1) 变换参数 θ 是任意的，η_P' 的取值也是任意的。

另一方面，实标量场 $\phi(x)$ 不具备 U(1) 整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性。可以认为，实标量场的 U(1) 荷 $q = 0$，守恒荷算符 $Q = 0$，因而用 (9.41) 式定义的 P' 与 P 相同。

这个结论可以推广到其它分立对称性和其它量子场：

> **分立变换的相位因子**对于像复标量场这样的**复场**来说取值是**任意**的，对于像实标量场这样的**自共轭场**则是**确定**的。

9.1.2 标量场的 T 变换

x^μ 的**时间反演变换**由 (1.59) 式给出，即

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1). \tag{9.44}$$

这是一种非固有反时向 Lorentz 变换，将 $x^\mu = (t,\mathbf{x})$ 变换为 $x'^\mu = (\mathcal{T}x)^\mu = (-t,\mathbf{x})$，将 ∂_μ 变换为 $\partial'_\mu = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$，将 $p^\mu = (E,\mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu = (\mathcal{T}p)^\mu = (-E,\mathbf{p})$，同时保持时空体积元不变，$\mathrm{d}^4x' = |\det(\mathcal{T})|\,\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x$。于是，只要拉氏量在时间反演变换下不变，满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$，系统就具有**时间反演对称性**。

在具有时间反演对称性的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的 $\boldsymbol{T}$ **变换**

$$\boxed{|\Psi'\rangle = U(\mathcal{T})\,|\Psi\rangle = T\,|\Psi\rangle\,,} \tag{9.45}$$

其中 $T \equiv U(\mathcal{T})$。T 是自身的逆变换算符，$T^{-1} = T$。仿照上面关于 P 变换的讨论，将同态关系 (3.7) 推广到时间反演变换 $\mathcal{T}$ 上，则量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda,a)$ 满足

$$T^{-1}U(\Lambda,a)T = U^{-1}(\mathcal{T})U(\Lambda,a)U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T},\mathcal{T}^{-1}a), \tag{9.46}$$

由此推出类似于 (3.22) 和 (3.23) 式的 T 变换规则

$$T^{-1}\mathrm{i}J^{\mu\nu}T = \mathrm{i}\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}\mathrm{i}P^\mu T = \mathrm{i}\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{9.47}$$

这里我们保留了推导过程中的虚数 i。

如果时间反演算符 T 与宇称算符 P 一样是线性幺正算符，那么，

$$T^{-1}HT = T^{-1}P^0T = \mathcal{T}^0{}_0P^0 = -H. \tag{9.48}$$

这意味着哈密顿量算符 H 在 T 变换下发生改变，导致理论不具有时间反演对称性，与我们的假设矛盾。因此，T 不可能是线性幺正算符。不过，对称变换在量子力学中不一定要用线性幺正算符表述，也可以用**反线性** (antilinear) **反幺正** (antiunitary) **算符**描述。

一般地，在反线性反幺正算符 U 的作用下，任意的态矢 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 满足

$$U(a\,|\Psi_1\rangle + b\,|\Psi_2\rangle) = a^*U\,|\Psi_1\rangle + b^*U\,|\Psi_2\rangle\,, \quad \langle U\Psi_1|U\Psi_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^*\,, \tag{9.49}$$

其中 a 和 b 是任意复数。第一个等式代表反线性，第二个等式代表反幺正。反线性意味着

$$-\mathrm{i}\,|\Psi_1\rangle = U^{-1}U(-\mathrm{i}\,|\Psi_1\rangle) = U^{-1}\mathrm{i}U\,|\Psi_1\rangle\,, \tag{9.50}$$

即

$$U^{-1}\mathrm{i}U = -\mathrm{i}. \tag{9.51}$$

对任意复数 a，则有 $U^{-1}aU = a^*$。反线性反幺正算符 U 的厄米共轭算符 $U^\dagger$ 通过下式定义，

$$\langle\Psi_1|U^\dagger\Psi_2\rangle \equiv \langle U\Psi_1|\Psi_2\rangle^* = \langle\Psi_2|U\Psi_1\rangle\,. \tag{9.52}$$

因而反幺正意味着

$$\left\langle \Psi_1 | U^{-1} U \Psi_2 \right\rangle = \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \langle U\Psi_1 | U\Psi_2 \rangle^* = \left\langle \Psi_1 | U^\dagger U \Psi_2 \right\rangle, \tag{9.53}$$

故

$$U^{-1} = U^\dagger. \tag{9.54}$$

这个等式与线性幺正算符满足的等式相同。

现在，我们将 T 算符定义为*反线性反幺正算符*，满足

$$\boxed{T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}, \quad T^{-1} = T^\dagger.} \tag{9.55}$$

那么，(9.47) 式表明生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 T 变换为

$$T^{-1} J^{\mu\nu} T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1} P^\mu T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu, \tag{9.56}$$

从而

$$T^{-1} J^i T = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} T^{-1} J^{jk} T = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \mathcal{T}^j{}_l \mathcal{T}^k{}_m J^{lm} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\delta^j{}_l \delta^k{}_m J^{lm} = -J^i, \tag{9.57}$$

$$T^{-1} K^i T = T^{-1} J^{0i} T = -\mathcal{T}^0{}_0 \mathcal{T}^i{}_j J^{0j} = \delta^i{}_j J^{0j} = K^i, \tag{9.58}$$

有

$$\boxed{T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}HT = +H, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}.} \tag{9.59}$$

于是，哈密顿量算符 H 在时间反演变换下不变，满足 $[H, T] = 0$，符合理论具有时间反演对称性的假设。此外，动量算符 $\mathbf{P}$ 和总角动量算符 $\mathbf{J}$ 在 T 变换下分别反转成 $-\mathbf{P}$ 和 $-\mathbf{J}$。时间反演变换相当于*逆着时间方向进行观察*，因而动量和角动量的方向都会反转。

下面讨论自由**复标量场** $\phi(x)$ 的 T 变换。T 变换会翻转粒子态对应的动量方向，类似于 (9.15) 和 (9.16) 式，产生湮灭算符的 T 变换为

$$T^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger T = \eta_T a_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1} a_{\mathbf{p}} T = \eta_T^* a_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1} b_{\mathbf{p}}^\dagger T = \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1} b_{\mathbf{p}} T = \tilde{\eta}_T^* b_{-\mathbf{p}}, \tag{9.60}$$

其中 η_T 和 $\tilde{\eta}_T$ 是两个模为 1 的相位因子。于是，平面波展开式的 T 变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}\phi(x)T &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(T^{-1} a_{\mathbf{p}} T T^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} T + T^{-1} b_{\mathbf{p}}^\dagger T T^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} T \right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\eta_T^* a_{-\mathbf{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[\eta_T^* a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} + \tilde{\eta}_T b_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} \right], \end{aligned} \tag{9.61}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$，并利用 $(\mathcal{P}p)\cdot x = p\cdot(\mathcal{P}x) = -p\cdot(\mathcal{T}x)$。为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变，$T^{-1}\phi(x)T$ 与 $\phi(\mathcal{T}x)$ 最多只能相差一个常数因子，因此必须要求

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T, \tag{9.62}$$

使得 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 T 变换为

$$\boxed{T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^*\phi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T\phi^\dagger(\mathcal{T}x).} \tag{9.63}$$

类似于 (9.23) 和 (9.24) 式，时空导数算符满足

$$\boxed{\partial_{x,\mu} = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_{\mathcal{T}x,\nu}, \quad \partial_x^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu\partial_{\mathcal{T}x}^\nu,} \tag{9.64}$$

那么算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 的 T 变换是

$$\begin{aligned}
T^{-1}\partial_x^\mu\phi^\dagger(x)\partial_{x,\mu}\phi(x)T &= |\eta_T|^2\mathcal{T}^\mu{}_\nu(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu\partial_{\mathcal{T}x}^\nu\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\partial_{\mathcal{T}x,\rho}\phi(\mathcal{T}x) = +\partial_{\mathcal{T}x}^\mu\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\partial_{\mathcal{T}x,\mu}\phi(\mathcal{T}x), && (9.65)\\
T^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)T &= |\eta_T|^2\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\phi(\mathcal{T}x) = +\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\phi(\mathcal{T}x), && (9.66)\\
T^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial_x^\mu}\phi(x)T &= -|\eta_T|^2\mathcal{T}^\mu{}_\nu\mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\overleftrightarrow{\partial_{\mathcal{T}x}^\nu}\phi(\mathcal{T}x) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\overleftrightarrow{\partial_{\mathcal{T}x}^\nu}\phi(\mathcal{T}x). && (9.67)
\end{aligned}$$

可见，自由复标量场的拉氏量 (2.179) 在时间反演变换下不变，满足

$$T^{-1}\mathcal{L}(x)T = +\mathcal{L}(\mathcal{T}x). \tag{9.68}$$

令 $b_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}$，就得到自由**实标量场** $\phi(x)$ 的情况，此时 $\eta_T = \tilde{\eta}_T = \eta_T^*$，故 $\eta_T^2 = |\eta_T|^2 = 1$，有

$$\boxed{\eta_T = \pm 1.} \tag{9.69}$$

因此，存在两类实标量场，一类具有 $\eta_T = +1$，相应的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = +\phi(\mathcal{T}x); \tag{9.70}$$

另一类具有 $\eta_T = -1$，相应的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = -\phi(\mathcal{T}x). \tag{9.71}$$

无论哪一类实标量场 $\phi(x)$，自由拉氏量 (2.79) 都具有时间反演不变性。

9.1.3 标量场的 C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)。电荷共轭变换将正反粒子互相转换，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反 U(1) 荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度没有影响。

在具有**电荷共轭对称性**的量子理论中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$\boxed{|\Psi'\rangle = C\,|\Psi\rangle\,,} \tag{9.72}$$

称为 ***C* 变换**。C 是自身的逆变换算符，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C, \tag{9.73}$$

因而是厄米的。

对于自由的**复标量场** $\phi(x)$，C 变换将正粒子态转化成反粒子态，形式为

$$C\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \eta_C\left|\mathbf{p}^-\right\rangle, \tag{9.74}$$

其中 η_C 是相位因子。假设真空态在 C 变换下不变，即 $C\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle$，从而

$$\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,C^{-1}a_\mathbf{p}^\dagger C\left|0\right\rangle = C\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a_\mathbf{p}^\dagger\left|0\right\rangle = C\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \eta_C\left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,\eta_C b_\mathbf{p}^\dagger\left|0\right\rangle, \tag{9.75}$$

即

$$C^{-1}a_\mathbf{p}^\dagger C = \eta_C b_\mathbf{p}^\dagger, \quad C^{-1}a_\mathbf{p}C = \eta_C^* b_\mathbf{p}. \tag{9.76}$$

第一个等式等价于 $a_\mathbf{p}^\dagger = \eta_C C b_\mathbf{p}^\dagger C^{-1}$，因而 $\eta_C^* a_\mathbf{p}^\dagger = |\eta_C|^2 C b_\mathbf{p}^\dagger C^{-1} = C b_\mathbf{p}^\dagger C^{-1}$，即

$$C^{-1}b_\mathbf{p}^\dagger C = \eta_C^* a_\mathbf{p}^\dagger, \quad C^{-1}b_\mathbf{p}C = \eta_C a_\mathbf{p}. \tag{9.77}$$

于是，复标量场 $\phi(x)$ 的 C 变换为

$$\begin{aligned} C^{-1}\phi(x)C &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(C^{-1}a_\mathbf{p}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + C^{-1}b_\mathbf{p}^\dagger C\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}) \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(\eta_C^* b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \eta_C^* a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}), \end{aligned} \tag{9.78}$$

故

$$\boxed{C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\phi^\dagger(x)C = \eta_C\phi(x).} \tag{9.79}$$

可见，C 变换使 $\phi(x)$ 与其厄米共轭场 $\phi^\dagger(x)$ 相互转换。

利用等时对易关系 (2.192)，算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 的 C 变换是

$$C^{-1}\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi^\dagger(x) = +\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x), \tag{9.80}$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x), \tag{9.81}$$

$$C^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x)C = |\eta_C|^2\mathrm{i}\phi(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi^\dagger(x) = -\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x). \tag{9.82}$$

注意，在 (9.82) 式第二步的推导中，若 $\mu = 0$，由于等时对易关系 (2.192) 给出

$$[\phi(x), \partial^0\phi^\dagger(x)] = [\phi(x), \pi(x)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad [\phi^\dagger(x), \partial^0\phi(x)] = [\phi^\dagger(x), \pi^\dagger(x)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{0}), \tag{9.83}$$

即 $\phi(x)\partial^0\phi^\dagger(x) = \partial^0\phi^\dagger(x)\phi(x) + \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 和 $-\partial^0\phi(x)\phi^\dagger(x) = -\phi^\dagger(x)\partial^0\phi(x) + \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{0})$，则有

$$\mathrm{i}\phi(x)\overleftrightarrow{\partial^0}\phi^\dagger(x) = \mathrm{i}[\phi(x)\partial^0\phi^\dagger(x) - \partial^0\phi(x)\phi^\dagger(x)]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i}[\partial^0\phi^\dagger(x)\phi(x) + \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{0}) - \phi^\dagger(x)\partial^0\phi(x) + \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{0})] \\
&= -\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^0}\phi(x) - 2\delta^{(3)}(\mathbf{0}),
\end{aligned} \tag{9.84}
$$

但 $-2\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 是一个无穷大 c 数，通常不会引起可观测效应，可将它丢弃，从而得到 (9.82) 式。(9.80) 和 (9.81) 式表明，自由复标量场的拉氏量 (2.179) 在电荷共轭变换下不变，满足

$$
C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x). \tag{9.85}
$$

对正反标量玻色子态 (9.28) 作 C 变换，得

$$
\begin{aligned}
C\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle &= \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p}}CC^{-1}b^\dagger_{-\mathbf{p}}C\left|0\right\rangle = |\eta_C|^2\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})b^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{-\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle \\
&= (-)^L\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle = (-)^L\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{9.86}
$$

第三步交换两个产生算符，第四步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，第五步用了 (9.33) 式。可见，$\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 是 C 算符的本征态，本征值 $(-)^L$ 是可观测量，称为 ***C* 宇称** (C-parity)。扣除波函数 $\Phi(\mathbf{p})$ 贡献的 $(-)^L$ 因子之后，剩下的 C 宇称为 $+$，即一对正反标量玻色子的内禀 C 宇称为偶。

对于自由的**实标量场**，$\phi^\dagger(x)=\phi(x)$，(9.79) 中两个等式表明 $\eta_C=\eta_C^*$，故 $\eta_C^2=|\eta_C|^2=1$，有

$$
\boxed{\eta_C = \pm 1,} \tag{9.87}
$$

这是 C 宇称的两种取值。也就是说，存在两类实标量场，一类具有偶的 C 宇称，$\eta_C=+1$，相应的 C 变换为

$$
C^{-1}\phi(x)C = +\phi(x); \tag{9.88}
$$

另一类具有奇的 C 宇称，$\eta_C=-1$，相应的 C 变换为

$$
C^{-1}\phi(x)C = -\phi(x). \tag{9.89}
$$

无论实标量场 $\phi(x)$ 具有哪种 C 宇称，自由拉氏量 (2.79) 都具有电荷共轭不变性。

9.2 旋量场的分立变换

9.2.1 旋量场的 C 变换

首先，讨论自由 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 C 变换。因为电荷共轭变换在互换正反粒子的同时，不改变动量 $\mathbf{p}$ 和螺旋度 $\lambda=\pm$，所以 C 变换将正费米子态 $\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle$ 转化成反费米子态 $\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle$，满足

$$
C\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \zeta_C\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle, \tag{9.90}
$$

其中 ζ_C 是相位因子。由此推出

$$C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^* b_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^* a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{9.91}$$

从而，平面波展开式 (5.216) 的 C 变换为

$$\begin{aligned}C^{-1}\psi(x)C &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda\left[u(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda\left[\zeta_C^*\,u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\zeta_C^*\,v(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{9.92}$$

在第二行中，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 与 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 相乘，而 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 与 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 相乘，这与 $\psi(x)$ 的平面波展开式 (5.216) 中出现的情况正好相反。为了得到 $\psi(x)$ 的电荷共轭场与 $\psi(x)$ 的关系，我们需要探讨平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 之间相互转换的关系。

在 *Weyl* 表象 (5.68) 中，对螺旋态表达式 (5.205) 和 (5.206) 进行转置，得

$$\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi^*_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^*_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix},\quad \bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{9.93}$$

另一方面，按照螺旋态的具体形式 (5.162)，$\mathrm{i}\sigma^2$ 对 $\xi^*_\lambda(\mathbf{p})$ 的作用为

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_+(\mathbf{p}) = N\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1-\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ -(|\mathbf{p}|+p^3)\end{pmatrix}=-\xi_-(\mathbf{p}), \tag{9.94}$$

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_-(\mathbf{p}) = N\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p^1-\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}=+\xi_+(\mathbf{p}), \tag{9.95}$$

其中归一化因子 $N\equiv[2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)]^{-1/2}$。归纳起来，有

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p})=-\lambda\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}),\quad \mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p})=\lambda\xi_\lambda(\mathbf{p}). \tag{9.96}$$

引入旋量空间上的**电荷共轭矩阵**

$$\boxed{\mathcal{C}\equiv\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2=\mathrm{i}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma^2\\ -\sigma^2&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sigma^2&\\ &\mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix},} \tag{9.97}$$

就可以导出平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 之间的转换关系式:

$$\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}-\omega_\lambda(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=v(\mathbf{p},\lambda), \tag{9.98}$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}=u(\mathbf{p},\lambda). \tag{9.99}$$

将以上两式代入到 (9.92) 式，与 (5.218) 式对照，则 $\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$C^{-1}\psi(x)C=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[\zeta_C^*\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\zeta_C^*\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]=\zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x), \tag{9.100}$$

其中

$$\boxed{\psi^{\mathrm{C}}(x)\equiv\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)} \tag{9.101}$$

便是 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**。

现在研究电荷共轭矩阵 $\mathcal{C}$ 的性质。利用 $(\sigma^2)^{\mathrm{T}}=-\sigma^2$、$\gamma^0$ 的厄米性、γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0=-\gamma^0\gamma^2$，有

$$\mathcal{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} & \\ & \mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}=-\mathcal{C}, \tag{9.102}$$

$$\mathcal{C}^{\dagger}=-\mathrm{i}(\gamma^2)^{\dagger}(\gamma^0)^{\dagger}=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0=-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2=-\mathcal{C}, \tag{9.103}$$

$$\mathcal{C}^{\dagger}\mathcal{C}=\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2=-(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2=\mathbf{1}, \tag{9.104}$$

也就是说，

$$\boxed{\mathcal{C}^{\mathrm{T}}=\mathcal{C}^{\dagger}=\mathcal{C}^{-1}=-\mathcal{C}.} \tag{9.105}$$

可见 $\mathcal{C}$ 是幺正矩阵。根据 Pauli 矩阵 (3.54) 的定义和性质，有 $\sigma^2\sigma^1\sigma^2=\mathrm{i}\sigma^2\sigma^3=-\sigma^1=-(\sigma^1)^{\mathrm{T}}$、$\sigma^2\sigma^2\sigma^2=\sigma^2=-(\sigma^2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\sigma^2\sigma^3\sigma^2=\mathrm{i}\sigma^1\sigma^2=-\sigma^3=-(\sigma^3)^{\mathrm{T}}$，归纳得到

$$\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2=\mathbf{1}^{\mathrm{T}},\quad \sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2=-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}, \tag{9.106}$$

因此

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2=(\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}},\quad \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2=(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}. \tag{9.107}$$

进而推出

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}&=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^\mu\\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} & \sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\\ \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 & \end{pmatrix}\\ &=-\begin{pmatrix} & (\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}}\\ (\sigma^\mu)^{\mathrm{T}} & \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{9.108}$$

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix}, \tag{9.109}$$

即得 γ^μ 和 γ^5 关于 $\mathcal{C}$ 的相似变换性质

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}=-(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C}=\gamma^5. \tag{9.110}$$

由于 $\mathcal{C}^{-1}=-\mathcal{C}$，这两个式子等价于

$$\boxed{\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}=-\gamma^\mu,\quad \mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}=\gamma^5.} \tag{9.111}$$

如果 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带电荷 Q，那么，根据 (8.21) 式，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0. \tag{9.112}$$

对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0，得

$$0 = \psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger(-\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar\psi[-\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m], \tag{9.113}$$

转置，推出

$$[-(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar\psi^{\mathrm{T}} = 0. \tag{9.114}$$

利用 (9.110) 式将上式化为

$$0 = [\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m\,\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}]\bar\psi^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{-1}[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\,\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}}, \tag{9.115}$$

从而得到电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的运动方程

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^{\mathrm{C}} = 0. \tag{9.116}$$

对比 $\psi(x)$ 的运动方程 (9.112)，可以看出 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 确实携带相反的电荷 $-Q$。

实际上，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 携带的任何 U(1) 荷都与 $\psi(x)$ 相反。如果 $\psi(x)$ 携带某种 U(1) 荷 q，在相应 U(1) 整体变换的作用下，有 $\psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x)$，则 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的变换为

$$(\psi^{\mathrm{C}})' = (\psi')^{\mathrm{C}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi\right)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}(\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi})^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi)^\dagger\gamma^0]^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\psi^{\mathrm{C}}. \tag{9.117}$$

可见，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 携带的相应 U(1) 荷是 $-q$。

根据 (9.105) 和 (9.111) 式，电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\overline{\psi^{\mathrm{C}}} &= (\psi^{\mathrm{C}})^\dagger\gamma^0 = (\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}})^\dagger\gamma^0 = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}(\bar\psi\mathcal{C}^{\mathrm{T}})^\dagger]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}(\psi^\dagger\gamma^0\mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^0\psi]^{\mathrm{T}} \\ &= [\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^0\psi]^{\mathrm{T}} = -(\mathcal{C}\gamma^0\gamma^0\psi)^{\mathrm{T}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{9.118}$$

即

$$\boxed{\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x) = \psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C},} \tag{9.119}$$

于是

$$C^{-1}\bar\psi C = C^\dagger\psi^\dagger C\gamma^0 = (C^{-1}\psi C)^\dagger\gamma^0 = (\zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}})^\dagger\gamma^0 = \zeta_C\overline{\psi^{\mathrm{C}}} = \zeta_C\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}. \tag{9.120}$$

也就是说，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 及其 Dirac 共轭场 $\bar\psi(x)$ 的 C 变换是

$$\boxed{C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x) = \zeta_C^*\,\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}}(x), \quad C^{-1}\bar\psi(x)C = \zeta_C\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x) = \zeta_C\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}.} \tag{9.121}$$

仿照 (9.118) 式的推导，由 (9.98) 和 (9.99) 式推出

$$\bar v(\mathbf{p},\lambda) = u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}, \quad \bar u(\mathbf{p},\lambda) = v^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}. \tag{9.122}$$

考虑一般的旋量双线性型 $\bar\psi(x)\Gamma\psi(x)$，其中 Γ 是旋量空间上的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar\psi\Gamma\psi C = C^{-1}\bar\psi C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}} = -\bar\psi\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi. \tag{9.123}$$

最后一步进行了转置。需要注意的是，

转置两个旋量场会交换两者的位置，为了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号。

从而，由 (9.105) 式得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\mathrm{C}}\psi(x), \tag{9.124}$$

其中

$$\boxed{\Gamma^{\mathrm{C}} \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}} \tag{9.125}$$

可视为矩阵 Γ 的**电荷共轭变换**。根据 (9.111) 式，有

$$\mathbf{1}^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\mathbf{1}, \qquad (\mathrm{i}\gamma^5)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\mathrm{i}\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\mathrm{i}\gamma^5, \tag{9.126}$$

$$(\gamma^\mu)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \qquad (\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\gamma^\mu\gamma^5, \tag{9.127}$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\gamma^\nu\gamma^\mu, \qquad (\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\sigma^{\mu\nu}. \tag{9.128}$$

于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{9.129}$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x), \tag{9.130}$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \tag{9.131}$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x), \tag{9.132}$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x). \tag{9.133}$$

拉氏量 (5.103) 中的动能项算符 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 在 C 变换下化为

$$\begin{aligned} C^{-1}\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= \mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}} \\ &= -\mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = -\mathrm{i}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \end{aligned} \tag{9.134}$$

最后的表达式中第一项是全散度，全时空积分后对作用量没有贡献，可以丢弃，因而上式表明动能项算符在 C 变换下不变。所以，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (5.103) 具有电荷共轭不变性。

由 (9.126) 和 (9.127) 式推出

$$(P_{\mathrm{L/R}})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{L/R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mp (\gamma^5)^{\mathrm{T}}]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp \gamma^5) = +P_{\mathrm{L/R}}, \tag{9.135}$$

$$(\gamma^\mu P_{\mathrm{L/R}})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu P_{\mathrm{L/R}})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}} \mp (\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{T}}]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(-\gamma^\mu \mp \gamma^\mu\gamma^5) = -\gamma^\mu P_{\mathrm{R/L}}. \tag{9.136}$$

从而，对于 8.3 节讨论的手征旋量场 $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$，算符 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\psi$ 和 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{R}}\psi$ 在 C 变换下不变，满足

$$C^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)C = +\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x), \tag{9.137}$$

$$C^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)C = +\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x). \tag{9.138}$$

另一方面，左手流算符

$$\boxed{\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}P_{\mathrm{L}}\psi} \tag{9.139}$$

和右手流算符

$$\boxed{\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}P_{\mathrm{R}}\psi} \tag{9.140}$$

的 C 变换为

$$C^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x)C = -\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x), \tag{9.141}$$

$$C^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x)C = -\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x), \tag{9.142}$$

两者在 C 变换下相互转化，并出现一个负号。在弱相互作用中，轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而电荷共轭对称性遭到破坏。

(5.42) 式表明，旋量表示生成元 $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}/2$，由 (9.105) 和 (9.128) 式得

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} = -\mathcal{S}^{\mu\nu}. \tag{9.143}$$

从而，旋量表示中的 Lorentz 逆变换矩阵 (5.16) 满足

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[D^{-1}(\Lambda)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\right]\mathcal{C}^{-1} \\ &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{C}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\right] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = D(\Lambda).\end{aligned} \tag{9.144}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的变换形式是 $\psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x)$，相应的电荷共轭场变换为

$$\begin{aligned}\psi^{\mathrm{C}\prime}(x') &= \mathcal{C}[\overline{\psi'}(x')]^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}\{[D(\Lambda)\psi(x)]^{\dagger}\gamma^{0}\}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}[\psi^{\dagger}(x)D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^{0}]^{\mathrm{T}} \\ &= \mathcal{C}[\bar{\psi}(x)\gamma^{0}D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^{0}]^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}[\gamma^{0}D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^{0}]^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) = \mathcal{C}[\gamma^{0}\gamma^{0}D^{-1}(\Lambda)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \\ &= \mathcal{C}[D^{-1}(\Lambda)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\psi^{\mathrm{C}}(x) = D(\Lambda)\psi^{\mathrm{C}}(x),\end{aligned} \tag{9.145}$$

其中第六步用到 (5.89) 式。可见，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 与 $\psi(x)$ 的变换形式相同，因而它也是一个 Dirac 旋量场。

9.2.2　Majorana 旋量场

如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同，$\psi(x) = \psi^{\mathrm{C}}(x)$，即满足自共轭条件

$$\boxed{\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x),} \tag{9.146}$$

那么，$\psi(x)$ 就是一种纯中性的场，不能携带任何 U(1) 荷，称为 **Majorana 旋量场** [45]。上式称为 **Majorana 条件**。于是，Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x)=\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x)$，根据 (9.119) 式，Majorana 条件等价于

$$\bar{\psi}(x)=\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}. \tag{9.147}$$

注意这个等式右边没有出现 $\psi^{\dagger}(x)$，而是出现 $\psi^{\mathrm{T}}(x)$。它表明 $\bar{\psi}_a(x)=\psi_b(x)\mathcal{C}_{ba}$ 与 $\psi_a(x)$ 线性相关。因此，$\bar{\psi}_a(x)$ 并不是独立于 $\psi_a(x)$ 的场变量，这一点与 Dirac 旋量场不同。

由 (9.92) 和 (9.100) 式得 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的平面波展开式为

$$\psi^{\mathrm{C}}(x)=\zeta_C C^{-1}\psi(x)C=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{9.148}$$

与 (5.216) 式比较，可知 Majorana 条件 (9.146) 意味着

$$b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{9.149}$$

因此，Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\boxed{\psi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],} \tag{9.150}$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\boxed{\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda},a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}\}=0.} \tag{9.151}$$

类似于实标量场，Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子，正费米子与反费米子相同，称为 **Majorana 费米子**。(9.91) 式表明 $\zeta_C=\zeta_C^*$，故

$$\boxed{\zeta_C=\pm1.} \tag{9.152}$$

也就是说，Majorana 旋量场的 C 宇称要么为偶，要么为奇。

对于 Majorana 旋量场 $\psi(x)$，C 变换关系 (9.121) 化为

$$C^{-1}\psi(x)C=\zeta_C\psi(x),\quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C=\zeta_C\bar{\psi}(x). \tag{9.153}$$

进而，在 C 变换下，由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C=C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C=\zeta_C^2\,\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)=+\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x), \tag{9.154}$$

即非平庸的 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 算符的 C 宇称必须为偶。这表明 Majorana 旋量场不能构成 C 宇称为奇的算符 $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ 和 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$，即

$$\boxed{\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)=0,\quad \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)=0.} \tag{9.155}$$

由 Majorana 旋量场构成的非平庸双线性型则具有与 Dirac 旋量场相同的 C 变换规则。

自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\psi = \frac{\mathrm{i}}{2}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi,} \tag{9.156}$$

需要注意的是，应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中的 ψ^{T} 扮演的角色跟 ψ 相同。如果将前后两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2，动能项算符可化为

$$\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 = (\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2)^{\mathrm{T}} = -(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi_1 = (\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_1 = -(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu\psi_1, \tag{9.157}$$

质量项算符可化为

$$\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_2 = (\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_2)^{\mathrm{T}} = -\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi_1 = \psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_1, \tag{9.158}$$

则

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_1} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu - \frac{1}{2}m\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_2} = -\frac{1}{2}m\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}. \tag{9.159}$$

由于 ψ_1 和 ψ_2 都是 ψ，我们得到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_1} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_2} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu - m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}, \tag{9.160}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu + m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}. \tag{9.161}$$

对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \mathcal{C}\gamma^\mu = -\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\gamma^\mu$，推出

$$0 = \mathrm{i}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\partial_\mu\psi + m\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi = \mathcal{C}^{\mathrm{T}}(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi). \tag{9.162}$$

可见，自由的 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 也满足 *Dirac 方程*

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{9.163}$$

这与平面波展开式 (9.150) 相容。

9.2.3　旋量场的 P 变换

接着，讨论自由 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 P 变换。宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度 λ 的符号（参考习题 9.1）。平面波展开式 (5.216) 中的旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 都是用螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 表达出来的，而宇称变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$。本征方程 (5.161) 和 (5.201) 表明，$\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ 都是矩阵 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 的归一化本征矢量，因而两者至多相差一个模为 1 的相位因子。下面求出这个相位因子的形式。

利用 $(|\mathbf{p}|+p^3)(|\mathbf{p}|-p^3)=|\mathbf{p}|^2-(p^3)^2=(p^1)^2+(p^2)^2=(p^1+\mathrm{i}p^2)(p^1-\mathrm{i}p^2)$，将螺旋态表达式 (5.162) 化为

$$\begin{aligned}
\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}\frac{|\mathbf{p}|+p^3}{p^1-\mathrm{i}p^2}(p^1-\mathrm{i}p^2)\\ \frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{|\mathbf{p}|-p^3}(|\mathbf{p}|-p^3)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}\frac{(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1+\mathrm{i}p^2)}{(p^1)^2+(p^2)^2}(p^1-\mathrm{i}p^2)\\ \frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{|\mathbf{p}|-p^3}(|\mathbf{p}|-p^3)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{|\mathbf{p}|-p^3}\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|-p^3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|-p^3)}}\frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|-p^3\end{pmatrix}=\kappa_{\mathbf{p},+}\xi_-(-\mathbf{p}),
\end{aligned}\tag{9.164}$$

其中 $\kappa_{\mathbf{p},+}$ 是相位因子

$$\kappa_{\mathbf{p},\lambda}\equiv\frac{\lambda p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\tag{9.165}$$

在 $\lambda=+$ 时的结果。再由 $\kappa^*_{\mathbf{p},+}\kappa_{\mathbf{p},+}=1$ 推出 $\xi_-(-\mathbf{p})=\kappa^*_{\mathbf{p},+}\xi_+(\mathbf{p})$，故

$$\xi_-(\mathbf{p})=\kappa^*_{-\mathbf{p},+}\xi_+(-\mathbf{p})=\frac{-p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\xi_+(-\mathbf{p})=\kappa_{\mathbf{p},-}\xi_+(-\mathbf{p}).\tag{9.166}$$

归纳起来，有

$$\xi_\lambda(\mathbf{p})=\kappa_{\mathbf{p},\lambda}\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}),\quad \xi_{-\lambda}(\mathbf{p})=\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}\xi_\lambda(-\mathbf{p}).\tag{9.167}$$

可见 $\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$ 就是想要得到的相位因子。它的具体形式与我们对螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的约定有关。

于是，在 Weyl 表象中，(5.180) 和 (5.196) 式表达的平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足

$$\gamma^0u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\kappa_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix}\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})\end{pmatrix},\tag{9.168}$$

$$\gamma^0v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}\begin{pmatrix}-\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_\lambda(-\mathbf{p})\\ \lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_\lambda(-\mathbf{p})\end{pmatrix}.\tag{9.169}$$

注意到

$$\kappa_{\mathbf{p},-\lambda}=\frac{-\lambda p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}=-\frac{\lambda p^1-\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}=-\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda},\tag{9.170}$$

有

$$\gamma^0u(\mathbf{p},\lambda)=\kappa_{\mathbf{p},\lambda}u(-\mathbf{p},-\lambda),\quad \gamma^0v(\mathbf{p},\lambda)=-\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}v(-\mathbf{p},-\lambda).\tag{9.171}$$

可见，γ^0 对平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 的作用反转了相应的动量和螺旋度，相当作宇称变换。

为了得到自洽的宇称变换结果，我们将正反费米子态 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 的 P 变换表达成

$$P\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle=\zeta_P\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|-\mathbf{p}^+,-\lambda\right\rangle,\quad P\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle=\tilde{\zeta}_P\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|-\mathbf{p}^-,-\lambda\right\rangle,\tag{9.172}$$

其中 ζ_P 和 $\tilde{\zeta}_P$ 是两个相位因子。从而推出 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P=\zeta_P\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda},\quad P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P=\zeta^*_P\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}a_{-\mathbf{p},-\lambda},\tag{9.173}$$

以及 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P=\tilde{\zeta}_P\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda},\quad P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}P=\tilde{\zeta}^*_P\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}b_{-\mathbf{p},-\lambda}.\tag{9.174}$$

据此，Dirac 旋量场平面波展开式 (5.216) 的 P 变换为

$$\begin{aligned}P^{-1}\psi(x)P&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[u(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_P\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}u(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},-\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\tilde{\zeta}_P\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_P\kappa_{\mathbf{p},\lambda}u(-\mathbf{p},-\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+\tilde{\zeta}_P\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}v(-\mathbf{p},-\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_P\gamma^0u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}-\tilde{\zeta}_P\gamma^0v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}\right].\end{aligned}\tag{9.175}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 和 $\lambda\to-\lambda$，第四步用到 (9.171) 式。

为了让 $\psi(x)$ 的运动方程具有空间反射对称性，$P^{-1}\psi(x)P$ 与 $\psi(\mathcal{P}x)$ 最多只能相差一个常数矩阵，因而必须要求

$$\zeta^*_P=-\tilde{\zeta}_P,\tag{9.176}$$

使 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 P 变换化为

$$P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P=-\zeta^*_P\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda},\quad P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}P=-\zeta_P\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}b_{-\mathbf{p},-\lambda},\tag{9.177}$$

而 $\psi(x)$ 的 P 变换为

$$\boxed{P^{-1}\psi(x)P=\zeta^*_PD(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x),}\tag{9.178}$$

其中 $D(\mathcal{P})=\gamma^0$ 正是 (5.46) 式引入的旋量表示中的宇称变换矩阵，它是幺正的。于是，作宇称变换后，$\psi'(x')=P^{-1}\psi(x')P=\zeta^*_PD(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x')=\zeta^*_PD(\mathcal{P})\psi(x)$ 也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned}&(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial'_\mu-m)\psi'(x')=\zeta^*_P[\mathrm{i}\gamma^\mu(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu-m]D(\mathcal{P})\psi(x)\\=&\ \zeta^*_PD(\mathcal{P})[\mathrm{i}D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu-m]\psi(x)\\=&\ \zeta^*_PD(\mathcal{P})[\mathrm{i}\mathcal{P}^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu-m]\psi(x)=\zeta^*_PD(\mathcal{P})(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0.\end{aligned}\tag{9.179}$$

第三步用到 (5.49) 式。

由 $P^{-1}\psi^\dagger(x)P=[P^{-1}\psi(x)P]^\dagger=[\zeta^*_P\gamma^0\psi(\mathcal{P}x)]^\dagger=\zeta_P\psi^\dagger(\mathcal{P}x)\gamma^0$ 得

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P=P^{-1}\psi^\dagger(x)P\,\gamma^0=\zeta_P\psi^\dagger(\mathcal{P}x)\gamma^0\gamma^0=\zeta_P\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^0.\tag{9.180}$$

宇称变换矩阵 $D(\mathcal{P})$ 的幺正性表明 $D^{-1}(\mathcal{P})=D^{\dagger}(\mathcal{P})=\gamma^0$，故 $\bar{\psi}(x)$ 的 P 变换为

$$\boxed{P^{-1}\bar{\psi}(x)P=\zeta_P\bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P}).} \tag{9.181}$$

从而，一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned}P^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)P &= P^{-1}\bar{\psi}(x)P\Gamma P^{-1}\psi(x)P=|\zeta_P|^2\bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x)\\ &= \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x).\end{aligned} \tag{9.182}$$

在 5.1 节已经推导出以下结果，

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P})=+\mathbf{1}, \qquad D^{-1}(\mathcal{P})\mathrm{i}\gamma^5D(\mathcal{P})=-\mathrm{i}\gamma^5, \tag{9.183}$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \qquad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5D(\mathcal{P})=-\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{9.184}$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu}D(\mathcal{P})=\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}. \tag{9.185}$$

由此得到各种旋量双线性型的 P 变换，

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)P = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.186}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)P = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.187}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.188}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.189}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.190}$$

$$P^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)P = \overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x), \tag{9.191}$$

$$P^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)P = \overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x), \tag{9.192}$$

$$P^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x), \tag{9.193}$$

$$P^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x). \tag{9.194}$$

根据以上宇称变换性质，$\bar{\psi}\psi$ 是狭义的标量算符，$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 是赝标量算符，$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 是极矢量算符，$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ 是轴矢量算符。另一方面，左手流算符 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}$ 在 P 变换下相互转化。在弱相互作用中，轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏，即**宇称不守恒**。利用 (9.23) 式，动能项算符 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned}P^{-1}\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_{x,\mu}\psi(x)P &= \mathrm{i}P^{-1}\bar{\psi}(x)P\gamma^\mu\partial_{x,\mu}P^{-1}\psi(x)P\\ &= \mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_{\mathcal{P}x,\nu}\psi(\mathcal{P}x)\\ &= \mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathcal{P}^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_{\mathcal{P}x,\nu}\psi(\mathcal{P}x)=+\mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\mu\partial_{\mathcal{P}x,\mu}\psi(\mathcal{P}x),\end{aligned} \tag{9.195}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (5.103) 在宇称变换下不变。

在质心系中考虑一对正反费米子 $\psi\bar{\psi}$ 组成的系统，设两个粒子的螺旋度相反，轨道角动量量子数为 L 的态矢为

$$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle=\sum_\lambda\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|0\right\rangle, \quad \Phi(-\mathbf{p})=(-)^L\Phi(\mathbf{p}), \tag{9.196}$$

相应的 P 变换是

$$
\begin{aligned}
P\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle &= \sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})P^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}PP^{-1}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}P\left|0\right\rangle \\
&= -|\zeta_P|^2\sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}a^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle = -\sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p})\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|0\right\rangle \\
&= -(-)^L\sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|0\right\rangle = (-)^{L+1}\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{9.197}
$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 和 $\lambda\to-\lambda$，第四步用到

$$
\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda} = \frac{\lambda p^1-\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\frac{\lambda p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} = 1. \tag{9.198}
$$

可见，$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle$ 的总宇称为 $(-)^{L+1}$，包含轨道宇称 $(-)^L$ 和内禀宇称 $-$。也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇。

对于自由的 **Majorana 旋量场** $\psi(x)$，$b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}$，则 $\tilde{\zeta}_P=\zeta_P$，从而 $\zeta_P^*=-\tilde{\zeta}_P=-\zeta_P$，因此

$$
\boxed{\zeta_P=\pm\mathrm{i},} \tag{9.199}
$$

故 Majorana 旋量场的宇称是虚数。

9.2.4　旋量场的 T 变换

下面讨论自由 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 T 变换。时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度 λ 不变。另一方面，T 变换是反幺正的，将一个复数变换成它的复共轭。因此 T 变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi^*_\lambda(-\mathbf{p})$，它们都出现在 (9.96) 式中。对 (9.96) 第一式取复共轭，再利用 (9.167) 式，推出 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 与 $\xi^*_\lambda(-\mathbf{p})$ 之间的关系

$$
\mathrm{i}\sigma^2\xi_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p}) = -\lambda\kappa^*_{\mathbf{p},-\lambda}\xi^*_\lambda(-\mathbf{p}), \tag{9.200}
$$

作变量替换 $\lambda\to-\lambda$，得

$$
\mathrm{i}\sigma^2\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\xi^*_{-\lambda}(-\mathbf{p}). \tag{9.201}
$$

$\mathrm{i}\sigma^2$ 出现在矩阵

$$
\mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix} \tag{9.202}
$$

的两个对角分块中，它对平面波旋量系数的作用是

$$
\mathcal{C}\gamma^5u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix} = -\lambda\kappa^*_{\mathbf{p},-\lambda}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi^*_\lambda(-\mathbf{p})\\ \omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi^*_\lambda(-\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{9.203}
$$

$$
\mathcal{C}\gamma^5v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix} = \lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix}\lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi^*_{-\lambda}(-\mathbf{p})\\ -\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi^*_{-\lambda}(-\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{9.204}
$$

由 (9.170) 式得 $\kappa^*_{\mathbf{p},-\lambda} = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$，从而推出

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p},\lambda) = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda} u^*(-\mathbf{p},\lambda), \quad \mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p},\lambda) = \lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda} v^*(-\mathbf{p},\lambda). \tag{9.205}$$

可见，

$$\boxed{D(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{C}\gamma^5} \tag{9.206}$$

是旋量空间上的**时间反演矩阵**，它对平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 的作用反转了相应的动量，并将它们转换成各自的复共轭。

为了得到自洽的时间反演变换结果，我们将正反费米子态 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 的 T 变换表达为

$$T\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \zeta_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}\left|-\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle, \quad T\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}\left|-\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle, \tag{9.207}$$

其中 ζ_T 和 $\tilde{\zeta}_T$ 是两个相位因子。由此得到 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 T 变换

$$T^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T = \zeta_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T = \zeta^*_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.208}$$

和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 T 变换

$$T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T = \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T = \tilde{\zeta}^*_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}b_{-\mathbf{p},\lambda}. \tag{9.209}$$

注意到 $T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}$，Dirac 旋量场平面波展开式 (5.216) 的 T 变换是

$$\begin{aligned}
T^{-1}\psi(x)T &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda T^{-1}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]T \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}u^*(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}v^*(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_T\lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}u^*(-\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}v^*(-\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}\right] \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_T\mathcal{C}\gamma^5u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T\mathcal{C}\gamma^5v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}\right].
\end{aligned} \tag{9.210}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，第四步用到 (9.205) 式。

为了让 $\psi(x)$ 的运动方程具有时间反演对称性，$T^{-1}\psi(x)T$ 与 $\psi(\mathcal{T}x)$ 最多只能相差一个常数矩阵，因而必须要求

$$\zeta^*_T = \tilde{\zeta}_T, \tag{9.211}$$

使得

$$T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T = \zeta^*_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T = \zeta_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}b_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.212}$$

且 $\psi(x)$ 的 T 变换为

$$\boxed{T^{-1}\psi(x)T = \zeta^*_T D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x).} \tag{9.213}$$

由 $D^\dagger(\mathcal{T})D(\mathcal{T}) = \gamma^5\mathcal{C}^\dagger\mathcal{C}\gamma^5 = \gamma^5\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\gamma^5 = \mathbf{1}$ 可知，时间反演矩阵 $D(\mathcal{T})$ 是幺正的，满足

$$D^{-1}(\mathcal{T}) = D^\dagger(\mathcal{T}) = \gamma^5\mathcal{C}^{-1}. \tag{9.214}$$

对 (9.213) 式取厄米共轭，得 $T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \zeta_T\psi^\dagger(\mathcal{T}x)D^\dagger(\mathcal{T}) = \zeta_T\psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^5\mathcal{C}^{-1}$。由 γ^0 的厄米性有 $(\gamma^0)^* = (\gamma^0)^{\mathrm{T}}$，由 (9.111) 式得 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}} = -\gamma^0\mathcal{C}^{-1}$，再利用 $\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$ 推出

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T = T^{-1}\psi^\dagger(x)T(\gamma^0)^* = \zeta_T\psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}} = \zeta_T\psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^0\gamma^5\mathcal{C}^{-1}, \tag{9.215}$$

即 $\bar{\psi}(x)$ 的 T 变换为

$$\boxed{T^{-1}\bar{\psi}(x)T = \zeta_T\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T}).} \tag{9.216}$$

据此，一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 的 T 变换是

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)T = T^{-1}\bar{\psi}(x)TT^{-1}\Gamma TT^{-1}\psi(x)T = \bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})\Gamma^*D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x), \tag{9.217}$$

即问题归结为计算 $D^{-1}(\mathcal{T})\Gamma^*D(\mathcal{T})$。

根据 γ^5 的厄米性、γ^i 的反厄米性和 (9.111) 式，有

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^*D(\mathcal{T}) = \gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 = (\gamma^5)^3 = \gamma^5, \tag{9.218}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^0)^*D(\mathcal{T}) = \gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^0\gamma^5 = \gamma^0, \tag{9.219}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^i)^*D(\mathcal{T}) = -\gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^i)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 = \gamma^5\gamma^i\gamma^5 = -\gamma^i. \tag{9.220}$$

进而得到

$$D^{-1}(\mathcal{T})\mathbf{1}^*D(\mathcal{T}) = +\mathbf{1}, \quad D^{-1}(\mathcal{T})(\mathrm{i}\gamma^5)^*D(\mathcal{T}) = -\mathrm{i}\gamma^5, \tag{9.221}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{9.222}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu\gamma^5)^*D(\mathcal{T}) = D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^*D(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{9.223}$$

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{T})(\sigma^{\mu\nu})^*D(\mathcal{T}) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}D^{-1}(\mathcal{T})[(\gamma^\mu)^*(\gamma^\nu)^* - (\gamma^\nu)^*(\gamma^\mu)^*]D(\mathcal{T}) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\mu) = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}. \end{aligned} \tag{9.224}$$

于是，各种旋量双线性型的 T 变换为

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)T = +\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\psi(\mathcal{T}x), \tag{9.225}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)T = -\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{T}x), \tag{9.226}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{T}x), \tag{9.227}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{T}x), \tag{9.228}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{T}x), \tag{9.229}$$

$$T^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)T = +\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\mathcal{T}x)\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{T}x), \tag{9.230}$$

$$T^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)T = +\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\mathcal{T}x)\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{T}x), \tag{9.231}$$

$$T^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x)T = -\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\mathcal{T}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{T}x), \tag{9.232}$$

$$T^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x)T = -\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\mathcal{T}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{T}x). \tag{9.233}$$

利用 (9.64) 式，动能项算符 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ 的 T 变换为

$$\begin{aligned}
T^{-1}\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{x,\mu}\psi(x)T &= T^{-1}\mathrm{i}TT^{-1}\bar{\psi}(x)TT^{-1}\gamma^{\mu}T\partial_{x,\mu}T^{-1}\psi(x)T \\
&= -\mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^{\mu})^{*}D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\mathcal{T}x,\nu}\psi(\mathcal{T}x) \\
&= \mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\gamma^{\rho}(\mathcal{T}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\mathcal{T}x,\nu}\psi(\mathcal{T}x) = +\mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^{\mu}\partial_{\mathcal{T}x,\mu}\psi(\mathcal{T}x).
\end{aligned} \tag{9.234}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (5.103) 在时间反演变换下不变。由于 T 变换是反线性的，Dirac 方程 $(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi(x)=0$ 的时间反演对称性意味着运动方程 $[-\mathrm{i}(\gamma^{\mu})^{*}\partial'_{\mu}-m]\psi'(x')=0$ 成立，这一点在下面的推导中得到验证：

$$\begin{aligned}
[-\mathrm{i}(\gamma^{\mu})^{*}\partial'_{\mu}-m]\psi'(x') &= [-\mathrm{i}(\gamma^{\mu})^{*}(\mathcal{T}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}-m]T^{-1}\psi(x')T \\
&= \zeta_T^{*}D(\mathcal{T})[-\mathrm{i}D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^{\mu})^{*}D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}-m]\psi(\mathcal{T}x') \\
&= \zeta_T^{*}D(\mathcal{T})[\mathrm{i}\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\gamma^{\rho}(\mathcal{T}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}-m]\psi(x) \\
&= \zeta_T^{*}D(\mathcal{T})(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi(x)=0.
\end{aligned} \tag{9.235}$$

对于自由的 **Majorana 旋量场** $\psi(x)$，$b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}$，则 $\zeta_T=\tilde{\zeta}_T=\zeta_T^{*}$，故

$$\boxed{\zeta_T=\pm 1.} \tag{9.236}$$

9.3 矢量场的分立变换

9.3.1 有质量矢量场的 C、P、T 变换

接下来讨论自由**有质量复矢量场** $A^{\mu}(x)$ 的 C、P、T 变换，拉氏量为 (4.289) 式，平面波展开式 (4.292) 用极化矢量 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ $(\lambda=\pm,0)$ 表达。宇称变换联系着 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},-\lambda)$，根据极化矢量的具体形式 (4.104)，有

$$\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},+) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix} 0 \\ p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}| \\ p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2 \end{pmatrix} = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},-) = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},-), \tag{9.237}$$

$$\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},-) = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},+) = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},+), \tag{9.238}$$

$$\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0p^1 \\ -p^0p^2 \\ -p^0p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0p^1 \\ p^0p^2 \\ p^0p^3 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},0). \tag{9.239}$$

因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$(-)^{\lambda}\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},-\lambda)=\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},\lambda). \tag{9.240}$$

时间反演变换联系着 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)$，由

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},+)=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix}0\\ p^1p^3-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\ p^2p^3+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\ -|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2\end{pmatrix}=\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},+), \tag{9.241}$$

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},-)=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix}0\\ p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\ p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\ -|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2\end{pmatrix}=\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},-), \tag{9.242}$$

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},0)=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\ -p^0p^1\\ -p^0p^2\\ -p^0p^3\end{pmatrix}=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\ p^0p^1\\ p^0p^2\\ p^0p^3\end{pmatrix}=-\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},0), \tag{9.243}$$

推出时间反演变换与极化矢量的关系

$$(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)=\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},\lambda). \tag{9.244}$$

类似于标量场和旋量场的 C、P、T 变换规律，$C^{-1}A^{\mu}(x)C$、$P^{-1}A^{\mu}(x)P$ 和 $T^{-1}A^{\mu}(x)T$ 应当分别正比于 $A^{\mu\dagger}(x)$、$\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{P}x)$ 和 $\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{T}x)$，为此，将产生湮灭算符的 C、P、T 变换表达成

$$C^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi_C b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda},\qquad C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi^*_C b_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.245}$$

$$C^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi^*_C a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda},\qquad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi_C a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.246}$$

$$P^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi_P(-)^{\lambda}a^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda},\qquad P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi^*_P(-)^{\lambda}a_{-\mathbf{p},-\lambda}, \tag{9.247}$$

$$P^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi^*_P(-)^{\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda},\qquad P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi_P(-)^{\lambda}b_{-\mathbf{p},-\lambda}, \tag{9.248}$$

$$T^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi_T(-)^{1+\lambda}a^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda},\qquad T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi^*_T(-)^{1+\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.249}$$

$$T^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi^*_T(-)^{1+\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda},\qquad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi_T(-)^{1+\lambda}b_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.250}$$

其中 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 是相位因子。从而推出

$$\begin{aligned}C^{-1}A^{\mu}(x)C&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}[\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]\\&=\xi^*_C\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}[\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}],\end{aligned} \tag{9.251}$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}A^\mu(x)P &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]\\
&= \xi_P^*\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^\lambda\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},-\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+(-)^\lambda\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]\\
&= \xi_P^*\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^\lambda\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+(-)^\lambda\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},-\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}]\\
&= \xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}],
\end{aligned}
\tag{9.252}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{-1}A^\mu(x)T &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda T^{-1}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]T\\
&= \xi_T^*\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+(-)^{1+\lambda}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}]\\
&= \xi_T^*\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}+(-)^{1+\lambda}\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}]\\
&= \xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\nu\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}],
\end{aligned}
\tag{9.253}
$$

因此，有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的分立变换为

$$
C^{-1}A^\mu(x)C=\xi_C^*A^{\mu\dagger}(x),\qquad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C=\xi_CA^\mu(x), \tag{9.254}
$$

$$
P^{-1}A^\mu(x)P=\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x),\quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P=\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x), \tag{9.255}
$$

$$
T^{-1}A^\mu(x)T=\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x),\quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T=\xi_T\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x). \tag{9.256}
$$

利用 (9.24) 和 (9.64) 式，场强张量 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ 的 C、P、T 变换为

$$
C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x)-\partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)]=\xi_C^*F^{\mu\nu\dagger}(x), \tag{9.257}
$$

$$
P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma[\partial^\rho_{\mathcal{P}x}A^\sigma(\mathcal{P}x)-\partial^\sigma_{\mathcal{P}x}A^\rho(\mathcal{P}x)]=\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{9.258}
$$

$$
T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = \xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma[\partial^\rho_{\mathcal{T}x}A^\sigma(\mathcal{T}x)-\partial^\sigma_{\mathcal{T}x}A^\rho(\mathcal{T}x)]=\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x). \tag{9.259}
$$

由 (1.112) 式得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma\mathcal{P}^\nu{}_\delta\mathcal{P}^\rho{}_\tau\mathcal{P}^\sigma{}_\phi\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma=-\mathcal{P}^\mu{}_\gamma\mathcal{P}^\nu{}_\delta\delta^\alpha{}_\tau\delta^\beta{}_\phi\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi}\\
&= -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}.
\end{aligned}
\tag{9.260}
$$

同理有

$$
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma=-\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}. \tag{9.261}
$$

从而，对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}=\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2$ 的 C、P、T 变换是

$$
C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)C = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}C^{-1}F_{\rho\sigma}(x)C=\xi_C^*\tilde{F}^{\mu\nu\dagger}(x), \tag{9.262}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)P &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P^{-1}F_{\rho\sigma}(x)P = \frac{1}{2}\xi_P^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\xi_P^*\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) = -\xi_P^*\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \qquad (9.263) \\
T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T^{-1}F_{\rho\sigma}(x)T = \frac{1}{2}\xi_T^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^{\alpha}{}_{\rho}(\mathcal{T}^{-1})^{\beta}{}_{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\xi_T^*\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x) = -\xi_T^*\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x). \qquad (9.264)
\end{aligned}
$$

可见，$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换性质与 $F^{\mu\nu}$ 不同，相差一个负号。

于是，动能项算符 $F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$
C^{-1}F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)C = |\xi_C|^2F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu\dagger}(x) = +F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \qquad (9.265)
$$

$$
P^{-1}F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)P = |\xi_P|^2F^\dagger_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(\mathcal{P}^{-1})^{\beta}{}_{\nu}\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) = +F^\dagger_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \qquad (9.266)
$$

$$
T^{-1}F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)T = |\xi_T|^2F^\dagger_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(\mathcal{T}^{-1})^{\beta}{}_{\nu}\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) = +F^\dagger_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x). \qquad (9.267)
$$

另一方面，质量项算符 $A^\dagger_\mu A^\mu$ 的 C、P、T 变换是

$$
\begin{aligned}
C^{-1}A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x)C &= |\xi_C|^2A_\mu(x)A^{\mu\dagger}(x) = +A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x), \qquad (9.268) \\
P^{-1}A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x)P &= |\xi_P|^2A^\dagger_\rho(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}A^\nu(\mathcal{P}x) = +A^\dagger_\mu(\mathcal{P}x)A^\mu(\mathcal{P}x), \qquad (9.269) \\
T^{-1}A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x)T &= |\xi_T|^2A^\dagger_\rho(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}A^\nu(\mathcal{P}x) = +A^\dagger_\mu(\mathcal{T}x)A^\mu(\mathcal{T}x). \qquad (9.270)
\end{aligned}
$$

因此，拉氏量 (4.289) 在 C、P、T 变换下都是不变的。

对于自由的**有质量实矢量场**，$A^{\mu\dagger}(x) = A^\mu(x)$，(9.254)、(9.255) 和 (9.256) 式意味着 $\xi_C = \xi_C^*$、$\xi_P = \xi_P^*$ 和 $\xi_T = \xi_T^*$，故

$$
\boxed{\xi_C = \pm 1, \quad \xi_P = \pm 1, \quad \xi_T = \pm 1.} \qquad (9.271)
$$

当 $\xi_P = +1$ 时，$A^\mu(x)$ 是**极矢量场**，满足 $P^{-1}A^\mu(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$；当 $\xi_P = -1$ 时，$A^\mu(x)$ 是**轴矢量场**，满足 $P^{-1}A^\mu(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$。无论 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 取 ± 1 中的哪些值，自由有质量实矢量场的拉氏量 (4.46) 在 C、P、T 变换下都是不变的。

9.3.2　电磁场的 C、P、T 变换

相比于有质量矢量场，无质量矢量场只有两个物理的极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$，但 C、P、T 变换性质是类似的。自由**无质量复矢量场** $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换形式同样由 (9.254)、(9.255)、(9.256) 式给出，见习题 9.5。对于自由**无质量实矢量场**，ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值只能是 ± 1。电磁场是一种无质量实矢量场，可以通过 QED 相互作用来确定 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值。

前文讨论的所有自由量子场理论都同时具有 C、P、T 对称性。在相互作用绘景中，参与相互作用的量子场与自由场具有形式相同的平面波展开式，因此前面推导出来的量子场 C、P、T 变换

性质照样成立。一个相互作用理论是否具有 C、P、T 对称性，由拉氏量中的相互作用项所决定。如果拉氏量的相互作用项之和在 C、P、T 变换下不变，那么理论就具有 C、P、T 对称性，从而哈密顿量算符 H 分别与 C、P、T 算符对易，即 $[H,C]=[H,P]=[H,T]=0$。另一方面，哈密顿量算符中的自由部分 H_0^{S} 与自由理论中的哈密顿量形式相同，因而满足 $[H_0^{\mathrm{S}},C]=[H_0^{\mathrm{S}},P]=[H_0^{\mathrm{S}},T]=0$。在这种情况下，可以论证 **Heisenberg** 绘景中场算符的 C、P、T 变换形式与相互作用绘景中的场算符相同，从而也与自由场相同。

以参与相互作用的复标量场为例，Heisenberg 绘景与相互作用绘景中场算符的变换关系为 $\phi^{\mathrm{H}}(x)=V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}}(x)V(t)$，其中 $V(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$。类似于自由场，$\phi^{\mathrm{I}}(x)$ 的 P、T、C 变换为

$$P^{-1}\phi^{\mathrm{I}}(x)P=\eta_P^*\phi^{\mathrm{I}}(\mathcal{P}x),\quad T^{-1}\phi^{\mathrm{I}}(x)T=\eta_T^*\phi^{\mathrm{I}}(\mathcal{T}x),\quad C^{-1}\phi^{\mathrm{I}}(x)C=\eta_C^*\phi^{\mathrm{I}\dagger}(x). \tag{9.272}$$

由 $[H,P]=[H_0^S,P]=0$ 得 $[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},P]=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t},P]=0$，故

$$[V(t),P]=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},P]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},P]+[\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t},P]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=0, \tag{9.273}$$

$$[V^\dagger(t),P^{-1}]=V^\dagger(t)P^\dagger-P^\dagger V^\dagger(t)=[P,V(t)]^\dagger=0. \tag{9.274}$$

同理，由 $[H,C]=[H_0^{\mathrm{S}},C]=0$ 推出

$$[V(t),C]=[V^\dagger(t),C^{-1}]=0. \tag{9.275}$$

另一方面，由 $[H,T]=[H_0^{\mathrm{S}},T]=0$ 得

$$V(t)T=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}T=TT^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}T=T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}=TV^*(t), \tag{9.276}$$

$$T^{-1}V^\dagger(t)=T^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}TT^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}T^{-1}=[V^\dagger(t)]^*T^{-1}, \tag{9.277}$$

其中复共轭符号 $*$ 只对算符中的 c 数部分起作用。于是推出

$$\begin{aligned}P^{-1}\phi^{\mathrm{H}}(x)P&=P^{-1}V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}}(x)V(t)P=V^\dagger(t)P^{-1}\phi^{\mathrm{I}}(x)PV(t)=\eta_P^*V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}}(\mathcal{P}x)V(t)\\&=\eta_P^*\phi^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}x),\end{aligned} \tag{9.278}$$

$$\begin{aligned}T^{-1}\phi^{\mathrm{H}}(x)T&=T^{-1}V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}}(x)V(t)T=[V^\dagger(t)]^*T^{-1}\phi^{\mathrm{I}}(x)TV^*(t)=\eta_T^*[V^\dagger(t)]^*\phi^{\mathrm{I}}(\mathcal{T}x)V^*(t)\\&=\eta_T^*[V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}*}(\mathcal{T}x)V(t)]^*=\eta_T^*[\phi^{\mathrm{H}*}(\mathcal{T}x)]^*=\eta_T^*\phi^{\mathrm{H}}(\mathcal{T}x),\end{aligned} \tag{9.279}$$

$$\begin{aligned}C^{-1}\phi^{\mathrm{H}}(x)C&=C^{-1}V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}}(x)V(t)C=V^\dagger(t)C^{-1}\phi^{\mathrm{I}}(x)CV(t)=\eta_C^*V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}\dagger}(x)V(t)\\&=\eta_C^*[V^\dagger(t)\phi^{\mathrm{I}}(x)V(t)]^\dagger=\eta_C^*\phi^{\mathrm{H}\dagger}(x).\end{aligned} \tag{9.280}$$

可见，$\phi^{\mathrm{H}}(x)$ 与 $\phi^{\mathrm{I}}(x)$ 确实具有相同的 P、T、C 变换形式。

在实际应用中，我们可以先假设 Heisenberg 绘景中场算符的 C、P、T 变换形式与自由场算符相同，再检验拉氏量的相互作用项之和是否在 C、P、T 变换下不变。如果答案是肯定的，那么相互作用理论就具有 C、P、T 对称性，而整个讨论是自洽的。如果答案是否定的，那么相互作用理论就不具有相应的分立对称性，而一开始的假设是不成立的。

在 QED 理论中，相互作用项的算符形式为 $A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$。根据 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 算符的 C 变换 (9.131)、P 变换 (9.188) 和 T 变换 (9.227)，**电磁场** $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换必须是[1]

$$C^{-1}A^\mu(x)C = -A^\mu(x), \tag{9.281}$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \tag{9.282}$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \tag{9.283}$$

才能使 QED 相互作用项分别在 C、P、T 变换下不变。也就是说，必须取

$$\boxed{\xi_C = -1, \quad \xi_P = +1, \quad \xi_T = -1.} \tag{9.284}$$

这样的取法是做得到的，因此我们说 QED 理论同时具有 C、P、T 对称性，即具有电荷共轭对称性、空间反射对称性和时间反演对称性。

从而，电磁场是 C 宇称为奇的极矢量场。相应场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = -F^{\mu\nu}(x), \tag{9.285}$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{9.286}$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x), \tag{9.287}$$

$$C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)C = -\tilde{F}^{\mu\nu}(x), \tag{9.288}$$

$$P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{9.289}$$

$$T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T = \mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x). \tag{9.290}$$

$F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 C 宇称均为奇。$F^{\mu\nu}$ 与 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换都相差一个负号。就 P 变换性质而言，$F^{\mu\nu}$ 是狭义的张量，而 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 是赝张量。于是，算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C = +F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \tag{9.291}$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{9.292}$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T = +F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x), \tag{9.293}$$

$$C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C = +\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \tag{9.294}$$

$$P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{9.295}$$

$$T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x). \tag{9.296}$$

可见，$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C 宇称和宇称均为偶，而 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C 宇称为偶，宇称为奇。

9.4　CP 变换

C 变换和 P 变换相继作用，就形成 ***CP* 变换**。CP 变换既反转动量的方向，又将正反粒子互换，但保持角动量不变。在弱相互作用中，左手流算符 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}$ 参

[1]这里的讨论是在 Heisenberg 绘景中进行的，但没有明确写出表示绘景的上标 H。

与不同的规范相互作用，导致电荷共轭对称性和空间反射对称性都遭到极大的破坏，但 ***CP* 对称性**却近似成立，只受到微小的破坏。另一方面，实验上还没有迹象表明电磁和强相互作用的 CP 对称性受到破坏。

对于**复标量场** $\phi(x)$，根据 (9.15)、(9.21)、(9.76) 和 (9.77) 式，产生湮灭算符的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}CP=\eta_C P^{-1}b_{\mathbf{p}}^{\dagger}P=\eta_C\eta_P^{*}b_{-\mathbf{p}}^{\dagger},\quad (CP)^{-1}a_{\mathbf{p}}CP=\eta_C^{*}P^{-1}b_{\mathbf{p}}P=\eta_C^{*}\eta_P b_{-\mathbf{p}}, \tag{9.297}$$

$$(CP)^{-1}b_{\mathbf{p}}^{\dagger}CP=\eta_C^{*}P^{-1}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}P=\eta_C^{*}\eta_P a_{-\mathbf{p}}^{\dagger},\quad (CP)^{-1}b_{\mathbf{p}}CP=\eta_C P^{-1}a_{\mathbf{p}}P=\eta_C\eta_P^{*}a_{-\mathbf{p}}. \tag{9.298}$$

由 (9.19) 和 (9.79) 式得到 $\phi(x)$ 和 $\phi^{\dagger}(x)$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}\phi(x)CP=\eta_C^{*}\eta_P\phi^{\dagger}(\mathcal{P}x),\quad (CP)^{-1}\phi^{\dagger}(x)CP=\eta_C\eta_P^{*}\phi(\mathcal{P}x). \tag{9.299}$$

由 (9.26)、(9.27)、(9.81)、(9.82) 式推出算符 $\phi^{\dagger}\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^{\dagger}\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}\phi$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}\phi^{\dagger}(x)\phi(x)CP = +\phi^{\dagger}(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x), \tag{9.300}$$

$$(CP)^{-1}\mathrm{i}\phi^{\dagger}(x)\overleftrightarrow{\partial_x^{\mu}}\phi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{i}\phi^{\dagger}(\mathcal{P}x)\overleftrightarrow{\partial_{\mathcal{P}x}^{\nu}}\phi(\mathcal{P}x). \tag{9.301}$$

可见，$\phi^{\dagger}\phi$ 的 ***CP* 宇称**为偶。

对于 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$，依照 (9.91)、(9.173) 和 (9.177) 式，产生湮灭算符的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger}CP=-\zeta_C\zeta_P^{*}\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^{*}b_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger},\quad (CP)^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}CP=-\zeta_C^{*}\zeta_P\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}b_{-\mathbf{p},-\lambda}, \tag{9.302}$$

$$(CP)^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger}CP=\zeta_C^{*}\zeta_P\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^{*}a_{-\mathbf{p},-\lambda}^{\dagger},\quad (CP)^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}CP=\zeta_C\zeta_P^{*}\kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}a_{-\mathbf{p},-\lambda}. \tag{9.303}$$

8.3 节提到，标准模型中的左旋正中微子和右旋反中微子分别由 $a_{\mathbf{p},-}^{\dagger}$ 和 $b_{\mathbf{p},+}^{\dagger}$ 算符产生，上式表明它们可以通过 CP 变换来相互转化。根据 C 变换关系 (9.129)–(9.133)、(9.137)、(9.138)、(9.141)、(9.142) 和 P 变换关系 (9.186)–(9.194)，各种旋量双线性型的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)CP = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.304}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)CP = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.305}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.306}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.307}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.308}$$

$$(CP)^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)CP = \overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x), \tag{9.309}$$

$$(CP)^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)CP = \overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x), \tag{9.310}$$

$$(CP)^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x), \tag{9.311}$$

$$(CP)^{-1}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x). \tag{9.312}$$

可以看到，$\bar{\psi}\psi$ 的 CP 宇称为偶，$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 的 CP 宇称为奇。$\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}}$ 与 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}}$ 在 CP 变换下相互转化。左手流算符 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}$ 在 CP 变换后分别回到自身。

对于有质量复矢量场 $A^\mu(x)$，由 (9.254) 和 (9.255) 式得到 $A^\mu(x)$ 和 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}A^{\mu\dagger}(x)CP = \xi_C\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x). \tag{9.313}$$

由 (9.257)、(9.258)、(9.262)、(9.263) 式推出 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP = \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x), \tag{9.314}$$

$$(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP = -\xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x). \tag{9.315}$$

另一方面，自共轭场的 CP 宇称是其 C 宇称与宇称之积。**实标量场** $\phi(x)$ 的 CP 宇称是 $\eta_C\eta_P$，取值为 ±1。**Majorana 旋量场** $\psi(x)$ 的 CP 宇称是 $\zeta_C\zeta_P$，取值为 $\pm\mathrm{i}$。**有质量实矢量场** $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C\xi_P$，取值为 ±1。

电磁场 $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C\xi_P=-1$，CP 变换为

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \tag{9.316}$$

场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{9.317}$$

$$(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x). \tag{9.318}$$

算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)CP = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{9.319}$$

$$(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)CP = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x). \tag{9.320}$$

可见，$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为偶，$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为奇。

9.5　C、P、T 对称性

前面提到，一个相互作用理论是否具有 C、P、T 对称性，取决于拉氏量的相互作用项之和是否在 C、P、T 变换下不变。由于 C、P、T 相位因子的取值具有一定的任意性，我们可以对它们取合适的值，使理论具有尽可能多的分立对称性。在一些由量子场构成的算符的分立变换中，相位因子被抵消掉了，使得这些算符具有明确的 C、P、T 变换性质，这些性质在分析分立对称性的过程中起着重要作用。为便于应用，表 9.1 总结了由**复标量场** $\phi(x)$、**Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 和**电磁场** $A^\mu(x)$ 构成的一些算符的 C、P、T 变换性质，里面用到的 $[-]^\mu$ 符号定义为

$$[-]^\mu = \begin{cases} +1, & \mu=0, \\ -1, & \mu=1,2,3. \end{cases} \tag{9.321}$$

从而，可以将 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu$ 和 $\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu$ 分别改写为 $[-]^\mu A^\mu$ 和 $-[-]^\mu A^\mu$，注意在后两个表达式中没有采用 Einstein 求和约定。

表 9.1: 一些算符的 C、P、T 变换性质。

算符	C	P	T	CP	CPT
i	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
∂^μ	$+$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-$
$(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\phi^\dagger\phi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{\psi}\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$+$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$-$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$\overline{\psi_\mathrm{R}}\psi_\mathrm{L}$	$+$	$\overline{\psi_\mathrm{L}}\psi_\mathrm{R}$	$+$	$\overline{\psi_\mathrm{L}}\psi_\mathrm{R}$	$\overline{\psi_\mathrm{L}}\psi_\mathrm{R}$
$\overline{\psi_\mathrm{L}}\psi_\mathrm{R}$	$+$	$\overline{\psi_\mathrm{R}}\psi_\mathrm{L}$	$+$	$\overline{\psi_\mathrm{R}}\psi_\mathrm{L}$	$\overline{\psi_\mathrm{R}}\psi_\mathrm{L}$
$\overline{\psi_\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$-\overline{\psi_\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$[-]^\mu\overline{\psi_\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\overline{\psi_\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$-\overline{\psi_\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$[-]^\mu\overline{\psi_\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
A^μ	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$F^{\mu\nu}$	$-$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$\tilde{F}^{\mu\nu}$	$-$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

注：这里 $\phi(x)$ 是复标量场，$\psi(x)$ 是 Dirac 旋量场，$A^\mu(x)$ 是电磁场，$F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 是电磁场的场强张量和对偶场强张量。

在拉氏量 (6.6) 描述的 Yukawa 理论中，实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\psi$，查看表 9.1 中 $\bar{\psi}\psi$ 算符的变换性质可知，C、P、T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为

$$\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1, \tag{9.322}$$

则 $\phi(x)$ 是狭义的标量场，C 宇称和宇称均为偶。

在拉氏量 (8.472) 描述的另一种 Yukawa 理论中，实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$，由 $\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 算符的变换性质可知，C、P、T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为

$$\eta_C = +1, \quad \eta_P = \eta_T = -1, \tag{9.323}$$

则 $\phi(x)$ 是赝标量场，C 宇称为偶，宇称为奇。

将 C、P、T 变换相继作用，就得到 ***CPT* 变换**，相应的变换算符记作

$$\boxed{\Theta \equiv CPT.} \tag{9.324}$$

由 $\Theta^\dagger\Theta = T^\dagger P^\dagger C^\dagger CPT = \mathbb{I}$ 得

$$\Theta^{-1} = \Theta^\dagger = T^\dagger P^\dagger C^\dagger = T^{-1}P^{-1}C^{-1}, \tag{9.325}$$

而且

$$\Theta^{-1}\mathrm{i}\Theta = T^{-1}P^{-1}C^{-1}\mathrm{i}CPT = T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}. \tag{9.326}$$

可见，Θ 跟 T 一样是反线性反幺正算符。

从表 9.1 可以看到，像 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$、$\bar\psi\gamma^\mu\psi$、$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$、$A^\mu$ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇；另一方面，像 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$、$\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$、$\bar\psi\psi$、$\bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi$、$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$、$F^{\mu\nu}$、$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶。

这种情况是普遍的，我们可以对量子场选取适当的 C、P、T 相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同，即具有奇（偶）数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的 CPT 相位因子为奇（偶）。在相对论性的局域量子场论里，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是一个厄米的 Lorentz 标量，必须由不携带未缩并 Lorentz 指标的厄米算符构成，因此 $\mathcal{L}(x)$ 的 CPT 相位因子为偶，即 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变。这就是 ***CPT* 定理**，它的准确表述如下：

> 如果一个**局域**量子场论由一个在**固有保时向 Lorentz 变换下不变的厄米**拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 描述，而且场的量子化遵循**自旋－统计定理**，那么 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变，满足
>
> $$\Theta^{-1}\mathcal{L}(x)\Theta = +\mathcal{L}(-x). \tag{9.327}$$

拉氏量的 CPT 不变性意味着作用量、场的运动方程和哈密顿量 H 都在 CPT 变换下不变，有

$$\Theta^{-1}H(t)\Theta = +H(-t), \tag{9.328}$$

因而理论具有 ***CPT* 对称性**。

在相互作用绘景中，CPT 对称性意味着相互作用部分的哈密顿量 H_1 满足

$$\Theta^{-1}H_1(t)\Theta = +H_1(-t), \tag{9.329}$$

则时间演化算符 (6.119) 的 CPT 变换为

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}U(t,t_0)\Theta &= \Theta^{-1}\,\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,H_1(t)\right]\Theta = \mathsf{T}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,\Theta^{-1}H_1(t)\Theta\right]\\ &= \mathsf{T}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,H_1(-t)\right] = \mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-t_0}^{-t}\mathrm{d}t\,H_1(t)\right] = U(-t,-t_0),\end{aligned} \tag{9.330}$$

倒数第二步作了变量替换 $t \to -t$。从而 S 算符 (6.125) 的 CPT 变换是

$$\Theta^{-1}S\Theta = \Theta^{-1}U(+\infty,-\infty)\Theta = U(-\infty,+\infty) = U^{\dagger}(+\infty,-\infty) = S^{\dagger}, \tag{9.331}$$

第三步用到 (6.100) 式。

CPT 定理的证明可追溯到 1954 年 Gerhart Lüders 和 Wolfgang Pauli 的工作 [46]。由于 CPT 定理成立的条件在量子场论中普遍得到满足，因而 CPT 对称性被认为是一个广泛存在的对称性。

> CPT 对称性保证正粒子与其反粒子的质量和寿命完全相同，电荷等守恒荷的大小相等，符号相反。

这些结论在电荷共轭对称性遭到破坏时仍然成立，因而并不平庸。

现在证明 CPT 对称性保证正反粒子的质量相同。一个静止的 $\mathcal{A}$ 粒子对应的态矢是哈密顿量 H（可包含相互作用项）、自旋角动量平方 $\mathbf{S}^2$ 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的共同本征态，本征值为 $\mathcal{A}$ 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$、$s(s+1)$ 和 σ。由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s，下面的讨论与 s 无关，我们将这个态矢记作 $|\mathcal{A},\sigma\rangle$，满足 $\langle\mathcal{A},\sigma|\mathcal{A},\sigma\rangle = 1$ 和

$$H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = m_{\mathcal{A}}\,|\mathcal{A},\sigma\rangle\,. \tag{9.332}$$

CPT 对称性意味着 (9.328) 式成立，利用它将 $\mathcal{A}$ 粒子质量表达为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = \langle\mathcal{A},\sigma|\,\Theta^{-1}H\Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle\,. \tag{9.333}$$

作为 C、P 和 T 的联合变换，CPT 变换将正反粒子互换，反转角动量的方向，同时保持动量不变。从而，CPT 变换将 S^3 本征值为 σ 的 $\mathcal{A}$ 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$，相应的量子态是

$$|\mathcal{A},\sigma\rangle_{\Theta} \equiv \Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}}\,\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle, \tag{9.334}$$

其中 $\chi_{\mathcal{A}}$ 是相位因子。利用 (9.325) 和 (9.52) 式，将 (9.333) 式化为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle\mathcal{A},\sigma|\,\Theta^{\dagger}H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_{\Theta} = {}_{\Theta}\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle^{*}_{\Theta} = {}_{\Theta}\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_{\Theta}\,. \tag{9.335}$$

另一方面，$\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle$ 是静止的 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子的哈密顿量本征态，本征值为 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子质量 $m_{\bar{\mathcal{A}}}$，故

$$m_{\bar{\mathcal{A}}} = \left\langle\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right|\,H\,\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle = |\chi_{\mathcal{A}}|^2\,{}_{\Theta}\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_{\Theta} = {}_{\Theta}\langle\mathcal{A},\sigma|\,H\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_{\Theta} = m_{\mathcal{A}}. \tag{9.336}$$

这样就证明了反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的质量与正粒子 $\mathcal{A}$ 相同。

接下来在微扰论最低阶论证 CPT 对称性保证正反粒子的寿命相同[2]。考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分，其中主要成分 $H_{\rm s}$ 描述较强的相互作用，如强相互作用，而微扰成分

[2]可参见参考书【12】第 14 章

H_{w} 描述引起衰变的较弱相互作用，如电磁或弱相互作用。这样的设定适用于发生电磁衰变或弱衰变的强子。CPT 对称性意味着

$$\Theta^{-1}H_{\mathrm{s}}(t)\Theta = H_{\mathrm{s}}(-t), \quad \Theta^{-1}H_{\mathrm{w}}(t)\Theta = H_{\mathrm{w}}(-t). \tag{9.337}$$

考虑在 $t=0$ 时刻静止的 $\mathcal{A}$ 粒子发生衰变过程 $\mathcal{A}\to f$，其中 f 代表所有可能的衰变末态。描述 $\mathcal{A}$ 粒子的态矢 $|\mathcal{A},\sigma\rangle$ 是 H_{s} 的本征态。在 H_{w} 的最低阶，根据 **Fermi 黄金定则** (Fermi's golden rule)，$\mathcal{A}$ 粒子的衰变宽度表达为

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = 2\pi\sum_f \delta(E_{\mathcal{A}}-E_f)\left|\langle f|\,U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle\right|^2, \tag{9.338}$$

其中 $E_{\mathcal{A}}=m_{\mathcal{A}}$，$E_f$ 是末态 f 中所有粒子的能量之和。时间演化算符 $U(+\infty,0)$ 只用 H_{s} 定义，描述向遥远未来的演化。相应地，反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变过程是 $\bar{\mathcal{A}}\to\bar{f}$，末态 $\bar{f}$ 中的粒子都是 f 中的反粒子，态矢 $\left|\bar{\mathcal{A}},\sigma\right\rangle$ 也是 H_{s} 的本征态，CPT 变换式 (9.334) 成立。$\bar{\mathcal{A}}$ 粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi\sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar{f}})\left|\left\langle\bar{f}\right|U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},\sigma\right\rangle\right|^2. \tag{9.339}$$

注意 $\mathcal{A}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值。

对 $|f\rangle$ 作 CPT 变换，得

$$|f\rangle_\Theta \equiv \Theta\,|f\rangle = \chi_f\left|\bar{f}\right\rangle, \tag{9.340}$$

其中 χ_f 是相位因子。由 (9.330) 和 (9.337) 式推出

$$\begin{aligned}\langle f|\,U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle &= \langle f|\,\Theta^{-1}U(-\infty,0)\Theta\Theta^{-1}H_{\mathrm{w}}(0)\Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle \\ &= {}_\Theta\langle f|\,U(-\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta^*, \end{aligned}\tag{9.341}$$

$$\begin{aligned}\left|\langle f|\,U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle\right|^2 &= \left|{}_\Theta\langle f|\,U(-\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle_\Theta^*\right|^2 \\ &= \left|\left\langle\bar{f}\right|U(-\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2. \end{aligned}\tag{9.342}$$

再利用 $U(-\infty,0)=U(-\infty,+\infty)U(+\infty,0)=S^\dagger U(+\infty,0)$，将 (9.338) 式化为

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi\sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar{f}})\left|\left\langle\bar{f}\right|S^\dagger U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar{f}})\left|\sum_{\bar{f}'}\left\langle\bar{f}\right|S^\dagger\left|\bar{f}'\right\rangle\left\langle\bar{f}'\right|U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{\bar{f},\bar{f}',\bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar{f}})\left\langle\bar{f}\right|S^\dagger\left|\bar{f}'\right\rangle\left\langle\bar{f}'\right|U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle \\ &\qquad\times\left\langle\bar{f}\right|S^\dagger\left|\bar{f}''\right\rangle^*\left\langle\bar{f}''\right|U(+\infty,0)H_{\mathrm{w}}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle^* \end{aligned}\tag{9.343}$$

第二步插入了一组完备集

$$\sum_{\bar{f}'}\left|\bar{f}'\right\rangle\left\langle\bar{f}'\right| = \mathbb{I}. \tag{9.344}$$

注意到 S 矩阵元只在初末态能量相等时非零，且 $SS^\dagger = \mathbb{I}$，对 $\bar{f}$ 求和的部分化为

$$\begin{aligned}&\sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left\langle \bar{f} \right| S^\dagger \left| \bar{f}' \right\rangle \left\langle \bar{f} \right| S^\dagger \left| \bar{f}'' \right\rangle^* = \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left(\left\langle \bar{f}' \right| S \left| \bar{f} \right\rangle \left\langle \bar{f} \right| S^\dagger \left| \bar{f}'' \right\rangle \right)^* \\ &= \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \left\langle \bar{f}' \right| SS^\dagger \left| \bar{f}'' \right\rangle^* = \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}'\bar{f}''},\end{aligned} \tag{9.345}$$

从而推出

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_{\bar{f}',\bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}'\bar{f}''} \left\langle \bar{f}' \right| U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) \left| \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \right\rangle \left\langle \bar{f}'' \right| U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) \left| \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \right\rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}'} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \left| \left\langle \bar{f}' \right| U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) \left| \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \right\rangle \right|^2 = \Gamma_{\bar{\mathcal{A}}}.\end{aligned} \tag{9.346}$$

于是，正粒子 $\mathcal{A}$ 与反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度相等，因而寿命相同。

在实验上，可以通过测量正反粒子质量和寿命的差异来验证 CPT 对称性是否遭到破坏。目前尚未发现任何破坏 CPT 对称性的现象，下面列举一些实验测量结果 [47]。对于正反电子和正反质子的质量差，实验观测在 90% 置信度上给出下列上限：

$$\frac{m_{e^+} - m_{e^-}}{(m_{e^+} + m_{e^-})/2} < 8 \times 10^{-9}, \quad \frac{m_p - m_{\bar{p}}}{m_p} < 7 \times 10^{-10}. \tag{9.347}$$

对于正反 μ 子的寿命比，实验测量得到

$$\frac{\tau_{\mu^+}}{\tau_{\mu^-}} = 1.000024 \pm 0.000078. \tag{9.348}$$

对于正反 π 介子的寿命差，实验测量给出

$$\frac{\tau_{\pi^+} - \tau_{\pi^-}}{(\tau_{\pi^+} + \tau_{\pi^-})/2} = (5.5 \pm 7.1) \times 10^{-4}. \tag{9.349}$$

9.6 Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量

9.6.1 左手和右手 Weyl 旋量

Dirac 旋量场和 Majorana 旋量场都可以分解为左手和右手的 Weyl 旋量场，为了更深刻地认识旋量场，我们在本节进一步研究 **Weyl 旋量**。

用 (5.74) 式引入的 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 定义 2×2 矩阵

$$\boxed{s^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu),} \tag{9.350}$$

由 $(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$ 和 $(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$ 推出

$$(s^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{4}[(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger] = -\frac{\mathrm{i}}{4}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = \frac{\mathrm{i}}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu), \tag{9.351}$$

从而将 *Weyl* 表象中的旋量表示生成元 (5.76) 约化为

$$\mathcal{S}^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu-\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu-\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s^{\mu\nu} & \\ & (s^{\mu\nu})^\dagger\end{pmatrix}. \tag{9.352}$$

也就是说，4×4 矩阵 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 是 2×2 矩阵 $s^{\mu\nu}$ 和 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 的直和，因而 $s^{\mu\nu}$ 和 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 是两个 Lorentz 群 2 维表示的生成元。

对于 Lorentz 变换 Λ 的一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$，用 $s^{\mu\nu}$ 生成固有保时向的有限变换

$$\boxed{d(\Lambda)\equiv\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right),} \tag{9.353}$$

它属于*左手* Weyl 旋量所处的 2 维表示。相应的逆变换矩阵为

$$d^{-1}(\Lambda)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right), \tag{9.354}$$

取厄米共轭，得

$$d^{-1\dagger}(\Lambda)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger\right]. \tag{9.355}$$

这其实是用 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 生成的固有保时向有限变换，属于*右手* Weyl 旋量所处的 2 维表示。于是，旋量表示的 4×4 变换矩阵 (5.14) 分解为

$$D(\Lambda)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)=\begin{pmatrix}\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}/2) & \\ & \exp[-\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger/2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d(\Lambda) & \\ & d^{-1\dagger}(\Lambda)\end{pmatrix}. \tag{9.356}$$

因此，4 维旋量表示 $\{D(\Lambda)\}$ 是 2 维表示 $\{d(\Lambda)\}$ 和 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 的直和。

利用 (9.107) 式推出

$$\sigma^2s^{\mu\nu}\sigma^2=\frac{\mathrm{i}}{4}(\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\sigma^2\bar{\sigma}^\nu\sigma^2-\sigma^2\sigma^\nu\sigma^2\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2)=\frac{\mathrm{i}}{4}[(\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}}(\sigma^\nu)^{\mathrm{T}}-(\bar{\sigma}^\nu)^{\mathrm{T}}(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}]=-(s^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}, \tag{9.357}$$

故

$$\sigma^2d(\Lambda)\sigma^2=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^2s^{\mu\nu}\sigma^2\right)=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\right]=\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)\right]^{\mathrm{T}}=d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda), \tag{9.358}$$

其中 $d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)=[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^*$，而线性表示 $\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\}$ 是 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 的*复共轭表示*。将 Pauli 矩阵 σ^2 看作一个幺正变换矩阵，满足

$$(\sigma^2)^{-1}=(\sigma^2)^\dagger=\sigma^2, \tag{9.359}$$

则 (9.358) 式意味着 $d(\Lambda)$ 与 $d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)$ 由一个相似变换联系起来，相似变换矩阵为 σ^2。根据 1.4 节定义，线性表示 $\{d(\Lambda)\}$ 与 $\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\}$ 是等价的。由于 $(\sigma^2)^*=-\sigma^2$，(9.358) 式的复共轭为

$$\sigma^2d^*(\Lambda)\sigma^2=d^{-1\dagger}(\Lambda). \tag{9.360}$$

$$
\begin{tikzcd}
\{d(\Lambda)\} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{复共轭}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{等价}"'] & \{d^*(\Lambda)\} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{等价}"] \\
\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{复共轭}"] & \{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}
\end{tikzcd}
$$

图 9.1: 四个 Lorentz 群 2 维表示之间的关系。

可见，线性表示 $\{d(\Lambda)\}$ 的复共轭表示 $\{d^*(\Lambda)\}$ 与线性表示 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 等价。图 9.1 归纳了这四个 2 维表示之间的关系。

于是，**左手 Weyl 旋量**

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{9.361}$$

的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\boxed{\eta'_a = [d(\Lambda)]_a{}^b \eta_b, \quad a, b = 1, 2.} \tag{9.362}$$

η_a 是 $\{d(\Lambda)\}$ 表示空间中的列矢量。引入反对称的**二维 Levi-Civita 符号** ε^{ab}，定义为

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \tag{9.363}$$

它与 Pauli 矩阵 σ^2 的关系是

$$\boxed{\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = (\mathrm{i}\sigma^2)^{ab}.} \tag{9.364}$$

通过 ε^{ab} 定义

$$\eta^a \equiv \varepsilon^{ab}\eta_b = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}, \tag{9.365}$$

则

$$\eta^1 = \eta_2, \quad \eta^2 = -\eta_1. \tag{9.366}$$

(9.358) 式等价于 $\sigma^2 d(\Lambda) = d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\sigma^2$，故 η^a 的 Lorentz 变换为

$$\eta'^a = \varepsilon^{ab}\eta'_b = \varepsilon^{ab}[d(\Lambda)]_b{}^c\eta_c = \mathrm{i}[\sigma^2 d(\Lambda)]^{ac}\eta_c = \mathrm{i}[d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\sigma^2]^{ac}\eta_c = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b\varepsilon^{bc}\eta_c, \tag{9.367}$$

即

$$\boxed{\eta'^a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b\eta^b.} \tag{9.368}$$

可见 η^a 是 $\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\}$ 表示空间中的列矢量。由于 $\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\}$ 等价于 $\{d(\Lambda)\}$，η^a 也是左手 Weyl 旋量。

两种左手 Weyl 旋量 η_a 与 η^a 是等价的，它们的关系类似于 Lorentz 逆变矢量 A^μ 与协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ 之间的关系，而 ε^{ab} 的作用类似于度规 $g_{\mu\nu}$，相当于 2 维旋量空间的度规。ε^{ab} 用于提升旋量指标。用

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \tag{9.369}$$

定义 ε_{ab}，则

$$\boxed{\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = (-\mathrm{i}\sigma^2)_{ab},} \tag{9.370}$$

满足

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_a{}^c, \tag{9.371}$$

即 ε_{ab} 是 ε^{ab} 的逆矩阵。于是 (9.366) 式表明

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta^2 \\ \eta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab}\eta^b, \tag{9.372}$$

也就是说，ε_{ab} 用于下降旋量指标。

任意两个左手 Weyl 旋量 η_a 和 ζ_a 的内积

$$\boxed{\eta^a\zeta_a = \varepsilon^{ab}\eta_b\zeta_a = \varepsilon_{ab}\eta^a\zeta^b} \tag{9.373}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^a\zeta'_a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b\eta^b[d(\Lambda)]_a{}^c\zeta_c = \eta^b[d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a[d(\Lambda)]_a{}^c\zeta_c = \eta^b\delta_b{}^c\zeta_c = \eta^a\zeta_a. \tag{9.374}$$

第二步用了转置性质 $[d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b = [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a$。可见 $\eta^a\zeta_a$ 是 Lorentz 标量。由 (9.366) 式得

$$\eta^a\zeta_a = \eta^1\zeta_1 + \eta^2\zeta_2 = \eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2 = -\eta_2\zeta^2 - \eta_1\zeta^1 = -\eta_a\zeta^a, \tag{9.375}$$

即参与缩并的旋量指标一升一降会多出一个负号。这种性质与 Lorentz 矢量内积 $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ 截然不同，原因在于我们使用的旋量空间度规 ε^{ab} 是反对称的。

(9.375) 式的特例

$$\boxed{\eta^a\eta_a = -\eta_a\eta^a} \tag{9.376}$$

表明，如果 η_a 和 η^a 是普通的复数，则 $\eta^a\eta_a = 0$。为了使 $\eta^a\eta_a \neq 0$，必须要求左手 Weyl 旋量 η^a 与 η_a 反对易，即它们是 **Grassmann 数**。*任意两个 Grassmann 数都是反对易的。*以复数作为组合系数，则若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数。因此，η_a 是 Grassmann 数意味着 $\eta^a = \varepsilon^{ab}\eta_b$ 也是 Grassmann 数。虽然如此，Grassmann 数是反对易的 c 数，而不是 Hilbert

空间上的算符。对 Grassmann 数表达的旋量场进行量子化，才得到旋量场算符，而 Grassmann 数的反对易性质与旋量场算符的反对易关系相匹配。注意，并不是所有的旋量都是 Grassmann 数，比如，平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 就是普通的复数。

假设 η_a 和 ζ^a 都是 Grassmann 数，则 $\eta_a\zeta^a=-\zeta^a\eta_a$，相应地，我们将省略旋量指标的内积写成

$$\boxed{\eta\zeta\equiv\eta^a\zeta_a=-\eta_a\zeta^a=\zeta^a\eta_a=\zeta\eta.} \tag{9.377}$$

这样一来，内积 $\eta\zeta$ 和 $\zeta\eta$ 是相等的。内积 $\eta^a\eta_a$ 有以下等价表达式，

$$\eta\eta=\eta^a\eta_a=\varepsilon_{ab}\eta^a\eta^b=-\eta^1\eta^2+\eta^2\eta^1=-2\eta^1\eta^2=2\eta_2\eta_1=\eta_2\eta_1-\eta_1\eta_2=-\varepsilon^{ab}\eta_a\eta_b=-\eta_a\eta^a. \tag{9.378}$$

将左手 Weyl 旋量 η_a 的**复共轭**记为

$$\eta_{\dot a}^\dagger=\begin{pmatrix}\eta_{\dot 1}^\dagger\\ \eta_{\dot 2}^\dagger\end{pmatrix}. \tag{9.379}$$

量子化之后，算符 η_a 和 $\eta_{\dot a}^\dagger$ 互为**厄米共轭**。对 (9.362) 式两边取复共轭，得到 $\eta_{\dot a}^\dagger$ 的 Lorentz 变换

$$\boxed{\eta_{\dot a}'^\dagger=[d^*(\Lambda)]_{\dot a}{}^{\dot b}\eta_{\dot b}^\dagger.} \tag{9.380}$$

引进指标上带着**点号**的二维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\dot a\dot b}=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}=(\mathrm{i}\sigma^2)^{\dot a\dot b},\quad \varepsilon_{\dot a\dot b}=\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}=(-\mathrm{i}\sigma^2)_{\dot a\dot b}, \tag{9.381}$$

其分量数值与 ε^{ab} 和 ε_{ab} 分别相同。定义

$$\eta^{\dagger\dot a}\equiv\varepsilon^{\dot a\dot b}\eta_{\dot b}^\dagger=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{\dot 1}^\dagger\\ \eta_{\dot 2}^\dagger\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_{\dot 2}^\dagger\\ -\eta_{\dot 1}^\dagger\end{pmatrix}, \tag{9.382}$$

则

$$\eta^{\dagger\dot 1}=\eta_{\dot 2}^\dagger,\quad \eta^{\dagger\dot 2}=-\eta_{\dot 1}^\dagger. \tag{9.383}$$

(9.360) 式等价于 $\sigma^2d^*(\Lambda)=d^{-1\dagger}(\Lambda)\sigma^2$，故 $\eta^{\dagger\dot a}$ 的 Lorentz 变换为

$$\eta'^{\dagger\dot a}=\varepsilon^{\dot a\dot b}\eta_{\dot b}'^\dagger=\varepsilon^{\dot a\dot b}[d^*(\Lambda)]_{\dot b}{}^{\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger=\mathrm{i}[\sigma^2d^*(\Lambda)]^{\dot a\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger=\mathrm{i}[d^{-1\dagger}(\Lambda)\sigma^2]^{\dot a\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger=[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot b}\varepsilon^{\dot b\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger, \tag{9.384}$$

即

$$\boxed{\eta'^{\dagger\dot a}=[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot b}\eta^{\dagger\dot b}.} \tag{9.385}$$

可见，$\eta^{\dagger\dot a}$ 是 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 表示空间中的列矢量，因而是**右手 Weyl 旋量**。由于表示 $\{d^*(\Lambda)\}$ 等价于 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$，$\eta_{\dot a}^\dagger$ 也是右手 Weyl 旋量。因此，在这套符号约定中，不带点的旋量指标对应于左手 Weyl 旋量及其表示，而带点的旋量指标对应于右手 Weyl 旋量及其表示。

任意两个右手 Weyl 旋量 $\eta^{\dagger\dot{a}}$ 和 $\zeta^{\dagger\dot{a}}$ 的内积

$$\boxed{\eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\eta^{\dagger\dot{b}}\zeta^{\dagger\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^\dagger_{\dot{b}}} \tag{9.386}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^\dagger_{\dot{a}}\zeta'^{\dagger\dot{a}} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\eta^\dagger_{\dot{b}}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}\zeta^{\dagger\dot{c}} = \eta^\dagger_{\dot{b}}[d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}\zeta^{\dagger\dot{c}} = \eta^\dagger_{\dot{b}}\delta^{\dot{b}}{}_{\dot{c}}\zeta^{\dagger\dot{c}} = \eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}}. \tag{9.387}$$

第二步用了转置性质 $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}$。可见 $\eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}}$ 是 Lorentz 标量。由 (9.383) 式得

$$\eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}} = \eta^\dagger_{\dot{1}}\zeta^{\dagger\dot{1}} + \eta^\dagger_{\dot{2}}\zeta^{\dagger\dot{2}} = -\eta^{\dagger\dot{2}}\zeta^{\dagger\dot{1}} + \eta^{\dagger\dot{1}}\zeta^{\dagger\dot{2}} = -\eta^{\dagger\dot{2}}\zeta^\dagger_{\dot{2}} - \eta^{\dagger\dot{1}}\zeta^\dagger_{\dot{1}} = -\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta^\dagger_{\dot{a}}, \tag{9.388}$$

即参与缩并的带点旋量指标一升一降会多出一个负号。假设右手 Weyl 旋量 $\eta^{\dagger\dot{a}}$ 和 $\zeta^\dagger_{\dot{a}}$ 都是 *Grassmann* 数，则 $\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta^\dagger_{\dot{a}} = -\zeta^\dagger_{\dot{a}}\eta^{\dagger\dot{a}}$。将省略带点旋量指标的内积写成

$$\boxed{\eta^\dagger\zeta^\dagger \equiv \eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}} = -\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta^\dagger_{\dot{a}} = \zeta^\dagger_{\dot{a}}\eta^{\dagger\dot{a}} = \zeta^\dagger\eta^\dagger,} \tag{9.389}$$

则内积 $\eta^\dagger\zeta^\dagger$ 和 $\zeta^\dagger\eta^\dagger$ 相等。

可以看到，只要将不带点和带点的旋量指标分别缩并完毕，就得到 Lorentz 标量。另一方面，缩并一个不带点的指标和一个带点的指标并不能得到 Lorentz 不变量，比如，$\eta^a\zeta^\dagger_{\dot{a}}$ 和 $\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta_a$ 都不是 Lorentz 标量。对于 Weyl 旋量算符 η_a 和 ζ_a，有

$$\boxed{(\eta\zeta)^\dagger = (\eta^a\zeta_a)^\dagger = (\zeta_a)^\dagger(\eta^a)^\dagger = \zeta^\dagger_{\dot{a}}\eta^{\dagger\dot{a}} = \zeta^\dagger\eta^\dagger,} \tag{9.390}$$

即 $\zeta^\dagger\eta^\dagger$ 是 $\eta\zeta$ 的厄米共轭算符，而厄米共轭操作将左手和右手 Weyl 旋量算符相互转换。

9.6.2　Dirac 和 Majorana 旋量场的分解

依照上一小节关于旋量指标的约定，将 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 分解成左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$，形式为

$$\boxed{\psi(x) = \begin{pmatrix}\eta_a(x)\\ \zeta^{\dagger\dot{a}}(x)\end{pmatrix}.} \tag{9.391}$$

在量子化之前，$\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$ 是 Grassmann 数，因而 $\psi(x)$ 也是 Grassmann 数。这是在 9.2.1 小节中转置两个旋量场必须添加一个额外负号的原因。

根据 (9.356) 式，$\psi(x)$ 的固有保时向 Lorentz 变换 (5.57) 表达成

$$\begin{pmatrix}\eta'_a(x')\\ \zeta'^{\dagger\dot{a}}(x')\end{pmatrix} = \psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x) = \begin{pmatrix}[d(\Lambda)]_a{}^b\eta_b(x)\\ [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\zeta^{\dagger\dot{b}}(x)\end{pmatrix}. \tag{9.392}$$

$\psi(x)$ 的 Dirac 共轭是

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{b}}^\dagger & \zeta^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \delta^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} \\ \delta_b{}^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{9.393}$$

保持旋量指标平衡，则 Dirac 方程 (5.113) 化为

$$\begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \\ \mathrm{i}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} = 0, \tag{9.394}$$

因而 Dirac 矩阵的指标形式是

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}. \tag{9.395}$$

注意，γ^μ 中的 γ^0 与 (9.393) 式中用于定义 Dirac 共轭的 γ^0 具有不同的指标结构，两者本质不同，有些书将后者记为 β 以示区别。

于是，γ^μ 的 Lorentz 变换规则 (5.27) 左边变成

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) &= \begin{pmatrix} [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c & \\ & [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{c\dot{d}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_d{}^b & \\ & [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c(\sigma^\mu)_{c\dot{d}}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} \\ [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d}[d(\Lambda)]_d{}^b & \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{9.396}$$

右边化为

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \begin{pmatrix} & \Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)_{a\dot{b}} \\ \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}. \tag{9.397}$$

两相比较，推出

$$\boxed{[d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c(\sigma^\mu)_{c\dot{d}}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} = \Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)_{a\dot{b}}, \quad [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d}[d(\Lambda)]_d{}^b = \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}b}.} \tag{9.398}$$

这分别是 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 的 Lorentz 变换规则。

对于任意 Weyl 旋量 η 和 ζ，定义

$$\boxed{\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\zeta^{\dagger\dot{b}}, \quad \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta \equiv \eta_{\dot{a}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\zeta_b,} \tag{9.399}$$

则相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \eta'\sigma^\mu\zeta'^\dagger &= [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_c\eta^c(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{b}}{}_{\dot{d}}\zeta^{\dagger\dot{d}} = \eta^c[d^{-1}(\Lambda)]_c{}^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{b}}{}_{\dot{d}}\zeta^{\dagger\dot{d}} \\ &= \eta^c\Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)_{c\dot{d}}\zeta^{\dagger\dot{d}} = \Lambda^\mu{}_\nu\eta\sigma^\nu\zeta^\dagger, \end{aligned} \tag{9.400}$$

$$\begin{aligned} \eta'^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta' &= [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{c}}\eta_{\dot{c}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}[d(\Lambda)]_b{}^d\zeta_d = \eta_{\dot{c}}^\dagger[d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{c}}{}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}[d(\Lambda)]_b{}^d\zeta_d \\ &= \eta_{\dot{c}}^\dagger\Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}\zeta_d = \Lambda^\mu{}_\nu\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta. \end{aligned} \tag{9.401}$$

这意味着 $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger$ 和 $\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta$ 都是 Lorentz 矢量。

(9.107) 第一式给出 $(\mathrm{i}\sigma^2)\sigma^\mu(\mathrm{i}\sigma^2) = -(\bar\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}$，相应的指标形式为

$$\varepsilon^{ac}(\sigma^\mu)_{c\dot d}\varepsilon^{\dot d\dot b} = -[(\bar\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}]^{a\dot b} = -(\bar\sigma^\mu)^{\dot b a}. \tag{9.402}$$

对于 Weyl 旋量场算符 $\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger\dot a}(x)$，有

$$\begin{aligned}[\eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}\zeta^{\dagger\dot b}]^\dagger &= \zeta^b(\sigma^\mu)^*_{\dot a b}\eta^{\dagger\dot a} = \zeta^b(\sigma^\mu)_{b\dot a}\eta^{\dagger\dot a} = -\eta^{\dagger\dot a}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\zeta^b = -\varepsilon^{\dot a\dot c}\eta^\dagger_{\dot c}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon^{bd}\zeta_d \\ &= \eta^\dagger_{\dot c}\varepsilon^{db}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon^{\dot a\dot c}\zeta_d = -\eta^\dagger_{\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot c d}\zeta_d = -[\zeta^\dagger_{\dot d}(\bar\sigma^\mu)^{\dot d c}\eta_c]^\dagger,\end{aligned} \tag{9.403}$$

第二步用到 σ^μ 的厄米性，第三步用到 Grassmann 数的性质。于是

$$\boxed{(\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger)^\dagger = \zeta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta = -(\zeta^\dagger\bar\sigma^\mu\eta)^\dagger.} \tag{9.404}$$

类似地，$\eta\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\zeta \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}(\bar\sigma^\nu)^{\dot b c}\zeta_c$ 和 $\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger \equiv \eta^\dagger_{\dot a}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}(\sigma^\nu)_{b\dot c}\zeta^{\dagger\dot c}$ 都是二阶 Lorentz 张量（习题 9.7）。(9.107) 第二式给出 $(-\mathrm{i}\sigma^2)\bar\sigma^\mu(-\mathrm{i}\sigma^2) = -(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}$，相应的指标形式为

$$\varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot c d}\varepsilon_{db} = -[(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}]_{\dot a b} = -(\sigma^\mu)_{b\dot a}. \tag{9.405}$$

利用 (9.371) 式推出

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}(\sigma^\mu)_{d\dot e}\varepsilon^{\dot e\dot b} &= \varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}\delta_d{}^f(\sigma^\mu)_{f\dot e}\varepsilon^{\dot e\dot b} = \varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}\varepsilon_{dg}\varepsilon^{gf}(\sigma^\mu)_{f\dot e}\varepsilon^{\dot e\dot b} \\ &= (-\sigma^\nu)_{g\dot a}(-\bar\sigma^\mu)^{\dot b g} = (\bar\sigma^\mu)^{\dot b g}(\sigma^\nu)_{g\dot a},\end{aligned} \tag{9.406}$$

故

$$\begin{aligned}[\eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}(\bar\sigma^\nu)^{\dot b c}\zeta_c]^\dagger &= \zeta^\dagger_{\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{*b\dot c}(\sigma^\mu)^*_{\dot a b}\eta^{\dagger\dot a} = \zeta^\dagger_{\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\eta^{\dagger\dot a} = -\eta^{\dagger\dot a}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\zeta^\dagger_{\dot c} \\ &= -\varepsilon^{\dot a\dot d}\eta^\dagger_{\dot d}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon_{\dot c\dot e}\zeta^{\dagger\dot e} = \eta^\dagger_{\dot d}\varepsilon_{\dot e\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon^{\dot a\dot d}\zeta^{\dagger\dot e} = \eta^\dagger_{\dot d}(\bar\sigma^\mu)^{\dot d g}(\sigma^\nu)_{g\dot e}\zeta^{\dagger\dot e} \\ &= [\zeta^e(\sigma^\nu)_{e\dot g}(\bar\sigma^\mu)^{\dot g d}\eta_d]^\dagger,\end{aligned} \tag{9.407}$$

即

$$(\eta\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\zeta)^\dagger = \zeta^\dagger\bar\sigma^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger = \eta^\dagger\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger = (\zeta\sigma^\nu\bar\sigma^\mu\eta)^\dagger. \tag{9.408}$$

将各种 Dirac 旋量双线性型分解成 Weyl 旋量的组合，得到

$$\bar\psi\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_a \\ \zeta^{\dagger\dot a}\end{pmatrix} = \zeta^a\eta_a + \eta^\dagger_{\dot a}\zeta^{\dagger\dot a} = \zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger, \tag{9.409}$$

$$\bar\psi\gamma^5\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\delta_a{}^b & \\ & \delta^{\dot a}{}_{\dot b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix} = -\zeta^a\eta_a + \eta^\dagger_{\dot a}\zeta^{\dagger\dot a} = -\zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger, \tag{9.410}$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot b} \\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot a b} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix} = \zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}\zeta^{\dagger\dot b} + \eta^\dagger_{\dot a}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\eta_b$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta\sigma^\mu\zeta^\dagger + \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta, && (9.411)\\
\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi &= \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\delta_b{}^c & \\ & \delta^{\dot{b}}{}_{\dot{c}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_c \\ \zeta^{\dagger\dot{c}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}\end{pmatrix} = \zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\zeta^{\dagger\dot{b}} - \eta^\dagger_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\eta_b\\
&= \zeta\sigma^\mu\zeta^\dagger - \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta, && (9.412)\\
\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a{}^b & \\ & (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\zeta^a(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a{}^b\eta_b + \frac{\mathrm{i}}{2}\eta^\dagger_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\zeta^{\dagger\dot{b}}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\zeta(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)\eta + \frac{\mathrm{i}}{2}\eta^\dagger(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\zeta^\dagger. && (9.413)
\end{aligned}
$$

这些双线性型分别被分解成两项，每一项都是由 Weyl 旋量表达的 Lorentz 张量。进一步推出

$$
\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1-\gamma^5)\psi = \zeta\eta, \qquad \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1+\gamma^5)\psi = \eta^\dagger\zeta^\dagger, \tag{9.414}
$$

$$
\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^5)\psi = \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta, \qquad \overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5)\psi = \zeta\sigma^\mu\zeta^\dagger. \tag{9.415}
$$

另一方面，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (5.103) 分解为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \\ \mathrm{i}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}\end{pmatrix}\\
&= -m\zeta^a\eta_a + \mathrm{i}\zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu\zeta^{\dagger\dot{b}} + \mathrm{i}\eta^\dagger_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu\eta_b - m\eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}}\\
&= \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta + \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger - m(\zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger). && (9.416)
\end{aligned}
$$

这里的质量项涉及两个不同的 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和 $\zeta_a(x)$，称为 **Dirac 质量项**。如果质量 $m=0$，则

$$
\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{L}} = \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta \quad \text{和} \quad \mathcal{L}_{\mathrm{R}} = \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger} \tag{9.417}
$$

分别是自由的左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**，相应的运动方程是两个 Weyl 方程 (5.115)，即

$$
\mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger = 0. \tag{9.418}
$$

接下来讨论 Weyl 旋量场的分立变换。首先，电荷共轭矩阵 (9.97) 的指标形式为

$$
\mathcal{C} = \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\end{pmatrix}. \tag{9.419}
$$

将 $\psi(x)$ 的电荷共轭场 (9.101) 分解成 Weyl 旋量场，得到

$$
\psi^{\mathrm{C}}(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) = \mathcal{C}\begin{pmatrix}\zeta^b(x) & \eta^\dagger_{\dot{b}}(x)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta^b(x) \\ \eta^\dagger_{\dot{b}}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_a(x) \\ \eta^{\dagger\dot{a}}(x)\end{pmatrix}. \tag{9.420}
$$

从而，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换 (9.100) 化为

$$\begin{pmatrix} C^{-1}\eta_a(x)C \\ C^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)C \end{pmatrix} = C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x) = \begin{pmatrix} \zeta_C^*\zeta_a(x) \\ \zeta_C^*\eta^{\dagger\dot{a}}(x) \end{pmatrix}, \tag{9.421}$$

即左右手 Weyl 旋量场的 C 变换是

$$C^{-1}\eta_a(x)C = \zeta_C^*\zeta_a(x), \quad C^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)C = \zeta_C^*\eta^{\dagger\dot{a}}(x). \tag{9.422}$$

可见，电荷共轭变换将 η 和 ζ 相互转换。对上面两式取厄米共轭，得到 $C^{-1}\eta_{\dot{b}}^\dagger(x)C = \zeta_C\zeta_{\dot{b}}^\dagger(x)$ 和 $C^{-1}\zeta^b(x)C = \zeta_C\eta^b(x)$，分别与 $\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ 和 ε_{ab} 缩并，推出

$$C^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)C = \zeta_C\zeta^{\dagger\dot{a}}(x), \quad C^{-1}\zeta_a(x)C = \zeta_C\eta_a(x). \tag{9.423}$$

其次，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 P 变换 (9.178) 表达为

$$\begin{pmatrix} P^{-1}\eta_a(x)P \\ P^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)P \end{pmatrix} = P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x) = \zeta_P^*\begin{pmatrix} & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \\ \delta_a{}^b & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{P}x) \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_P^*\zeta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x) \\ \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x) \end{pmatrix}, \tag{9.424}$$

注意此处 γ^0 的指标结构与 (9.393) 式中一样。于是得到左右手 Weyl 旋量场的 P 变换

$$P^{-1}\eta_a(x)P = \zeta_P^*\zeta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)P = \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x), \tag{9.425}$$

也就是说，宇称变换将左手和右手 Weyl 旋量场相互转换。取厄米共轭得 $P^{-1}\eta_{\dot{b}}^\dagger(x)P = \zeta_P\zeta^b(\mathcal{P}x)$ 和 $P^{-1}\zeta^b(x)P = \zeta_P\eta_{\dot{b}}^\dagger(\mathcal{P}x)$，两边与 $\mathrm{i}\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab}$ 缩并，推出

$$P^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)P = -\zeta_P\zeta_a(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\zeta_a(x)P = -\zeta_P\eta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x). \tag{9.426}$$

最后，时间反演矩阵 (9.202) 的指标形式是

$$D(\mathcal{T}) = \mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}, \tag{9.427}$$

而 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 T 变换 (9.213) 化为

$$\begin{pmatrix} T^{-1}\eta_a(x)T \\ T^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)T \end{pmatrix} = T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^*\mathcal{C}\gamma^5\psi(\mathcal{T}x) = \zeta_T^*\begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{T}x) \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_T^*\eta^a(\mathcal{T}x) \\ -\zeta_T^*\zeta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x) \end{pmatrix}, \tag{9.428}$$

则左右手 Weyl 旋量场的 T 变换是

$$T^{-1}\eta_a(x)T = \zeta_T^*\eta^a(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)T = -\zeta_T^*\zeta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x). \tag{9.429}$$

取厄米共轭，有 $T^{-1}\eta_{\dot{b}}^\dagger(x)T = \zeta_T\eta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{T}x)$ 和 $T^{-1}\zeta^b(x)T = -\zeta_T\zeta_b(\mathcal{T}x)$，与 $\mathrm{i}\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab}$ 缩并，得

$$T^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)T = -\zeta_T\eta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\zeta_a(x)T = \zeta_T\zeta^a(\mathcal{T}x). \tag{9.430}$$

下面讨论 **Majorana 旋量场**。根据 (9.420) 式，Majorana 条件 (9.146) 意味着

$$\begin{pmatrix}\eta_a\\ \zeta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix}=\psi=\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\zeta_a\\ \eta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix}, \tag{9.431}$$

即 $\eta=\zeta$，这表明 Majorana 旋量场中的左手和右手 Weyl 旋量场是相关的。因此，可以将 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 分解成

$$\boxed{\psi(x)=\begin{pmatrix}\eta_a(x)\\ \eta^{\dagger\dot{a}}(x)\end{pmatrix},} \tag{9.432}$$

而自由 Majorana 旋量场的拉氏量 (9.156) 分解为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\eta^a & \eta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu\\ \mathrm{i}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b\\ \eta^{\dagger\dot{b}}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}[\mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta+\mathrm{i}\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger-m(\eta\eta+\eta^\dagger\eta^\dagger)].\end{aligned} \tag{9.433}$$

(9.404) 式意味着 $(\partial_\mu\eta)\sigma^\mu\eta^\dagger=-\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta$，可将上式方括号中第二项化为

$$\mathrm{i}\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger=\mathrm{i}\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger)-\mathrm{i}(\partial_\mu\eta)\sigma^\mu\eta^\dagger=\mathrm{i}\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger)+\mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta. \tag{9.434}$$

扔掉全散度项 $\mathrm{i}\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger)$，拉氏量变成

$$\mathcal{L}=\mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta-\frac{m}{2}(\eta\eta+\eta^\dagger\eta^\dagger). \tag{9.435}$$

这里的质量项只涉及一个的 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$，称为 **Majorana 质量项**。

(9.404) 和 (9.408) 式表明，$\eta\sigma^\mu\eta^\dagger=-\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta$，$\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\eta=\eta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\eta$，$\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\eta^\dagger=\eta^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger$。对于 Majorana 旋量场，(9.411) 和 (9.413) 式化为

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=\eta\sigma^\mu\eta^\dagger+\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta=-\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta+\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta=0, \tag{9.436}$$

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi=\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\eta-\eta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\eta)+\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\eta^\dagger-\eta^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger)=0, \tag{9.437}$$

这样就验证了 (9.155) 式。

9.6.3 手征旋量场

本小节从手征旋量场的角度分析 Dirac 质量项和 Majorana 质量项的构造过程。用 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$ 将 8.3 节引入的四分量左手旋量场 $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和右手旋量场 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 表达为

$$\psi_{\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}\eta_a\\ 0\end{pmatrix},\quad \psi_{\mathrm{R}}=\begin{pmatrix}0\\ \zeta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix}, \tag{9.438}$$

相应的 Dirac 共轭场是

$$\overline{\psi_{\mathrm{L}}} = (\psi_{\mathrm{L}})^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix}\eta_{\dot b}^\dagger & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{\dot b}{}^{\dot a} & \\ & \delta_b{}^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}, \tag{9.439}$$

$$\overline{\psi_{\mathrm{R}}} = (\psi_{\mathrm{R}})^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & \zeta^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{\dot b}{}^{\dot a} & \\ & \delta_b{}^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta^a & 0\end{pmatrix}. \tag{9.440}$$

从而，将 (9.417) 式改写为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{L}} = \mathrm{i}\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\eta = \mathrm{i}\begin{pmatrix}0 & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\sigma^\mu)_{a\dot b} & \\ & (\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\end{pmatrix}\partial_\mu\begin{pmatrix}\eta_b\\ 0\end{pmatrix} = \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{L}}, \tag{9.441}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger = \mathrm{i}\begin{pmatrix}\zeta^a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\sigma^\mu)_{a\dot b} & \\ & (\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\end{pmatrix}\partial_\mu\begin{pmatrix}0\\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix} = \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{R}}. \tag{9.442}$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ 分别描述自由的无质量左手旋量场 ψ_{L} 和右手旋量场 ψ_{R}。

如果要在拉氏量中构造 *Dirac* 质量项，需采用 (9.414) 式给出的 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}} = \zeta\eta$ 和 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}} = \eta^\dagger\zeta^\dagger$，得到自由 Dirac 旋量场 $\psi(x) = \psi_{\mathrm{L}}(x) + \psi_{\mathrm{R}}(x)$ 的拉氏量 (9.416)：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\eta + \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger - m(\zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger) = \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{R}} - m(\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{L}}}\psi_{\mathrm{R}}). \tag{9.443}$$

如果要构造 *Majorana* 质量项，需用到 ψ_{L} 和 ψ_{R} 的电荷共轭场：

$$(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}(\overline{\psi_{\mathrm{L}}})^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}\begin{pmatrix}0 & \eta_{\dot b}^\dagger\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot a\dot b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \eta_{\dot b}^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \eta^{\dagger\dot a}\end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}}\psi^{\mathrm{C}} = (\psi^{\mathrm{C}})_{\mathrm{R}}, \tag{9.444}$$

$$(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}(\overline{\psi_{\mathrm{R}}})^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}\begin{pmatrix}\zeta^b & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot a\dot b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta^b\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_a\\ 0\end{pmatrix} = P_{\mathrm{L}}\psi^{\mathrm{C}} = (\psi^{\mathrm{C}})_{\mathrm{L}}, \tag{9.445}$$

$$\overline{(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}} = [(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}]^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & \eta^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{\dot b}{}^{\dot a} & \\ & \delta_b{}^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta^a & 0\end{pmatrix} = \overline{(\psi^{\mathrm{C}})_{\mathrm{R}}}, \tag{9.446}$$

$$\overline{(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}} = [(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}]^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix}\zeta_{\dot b}^\dagger & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{\dot b}{}^{\dot a} & \\ & \delta_b{}^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \zeta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix} = \overline{(\psi^{\mathrm{C}})_{\mathrm{L}}}. \tag{9.447}$$

上面前两行的倒数第二步用到 (9.420) 式。由此推出

$$\overline{(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}}(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}\eta^a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \eta^{\dagger\dot a}\end{pmatrix} = 0, \qquad \overline{(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}}(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}0 & \zeta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_a\\ 0\end{pmatrix} = 0, \tag{9.448}$$

$$\overline{(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix}0 & \zeta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_a\\ 0\end{pmatrix} = 0, \qquad \overline{(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix}\eta^a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \zeta^{\dagger\dot a}\end{pmatrix} = 0, \tag{9.449}$$

$$\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}\zeta^a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \eta^{\dagger\dot a}\end{pmatrix} = 0, \qquad \overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}0 & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_a\\ 0\end{pmatrix} = 0, \tag{9.450}$$

以上 6 个算符不能用于构造质量项。可用的 Majorana 质量项算符是

$$\overline{(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix}\eta^a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_a \\ 0\end{pmatrix} = \eta\eta, \qquad \overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}0 & \eta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ \eta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix} = \eta^\dagger\eta^\dagger, \tag{9.451}$$

$$\overline{(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix}0 & \zeta^\dagger_{\dot{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ \zeta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix} = \zeta^\dagger\zeta^\dagger, \quad \overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}\zeta^a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_a \\ 0\end{pmatrix} = \zeta\zeta, \tag{9.452}$$

其中 $\overline{(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{L}}$ 与 $\overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}$ 互为厄米共轭，而 $\overline{(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{R}}$ 与 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}$ 互为厄米共轭。

将拉氏量 (9.435) 改写为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M1}} = \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta - \frac{m}{2}(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger) = \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{L}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{L}} - \frac{m}{2}\left[\overline{(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{L}} + \overline{\psi_{\mathrm{L}}}(\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}}\right], \tag{9.453}$$

则它就是描述 Majorana 旋量场

$$\psi_1 \equiv \psi_{\mathrm{L}} + (\psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}\eta_a \\ \eta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix} \tag{9.454}$$

自由运动的拉氏量。另一方面，描述 Majorana 旋量场

$$\psi_2 \equiv \psi_{\mathrm{R}} + (\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}\zeta_a \\ \zeta^{\dagger\dot{a}}\end{pmatrix} \tag{9.455}$$

自由运动的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M2}} = \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger - \frac{m}{2}(\zeta\zeta + \zeta^\dagger\zeta^\dagger) = \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{R}} - \frac{m}{2}\left[\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} + \overline{(\psi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{R}}\right]. \tag{9.456}$$

9.7 费米子数破坏过程的 Feynman 规则

7.1.1 小节提到，由于 Dirac 旋量场可以携带某种 U(1) 荷，相应费米子线上的箭头代表 U(1) 荷流动的方向，或者说费米子数流动的方向。另一方面，Majorana 旋量场不能携带任何 U(1) 荷，不存在费米子数流动的方向，相应的费米子线则不应该具备箭头。如果相互作用过程涉及到 Majorana 旋量场与 Dirac 旋量场的耦合，带箭头与不带箭头的费米子线将在顶点处相接，导致一条连续的费米子线上不能处处具有相同的方向，这种情况称为**费米子数破坏** (fermion-number violation)。我们需要研究适用于费米子数破坏过程的 Feynman 规则，本节讨论两个简单例子，更一般的情况可参考文献 [48]。

9.7.1 拉氏量和 CP 对称性

考虑由复标量场 $\phi(x)$、Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 构成的拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m_\phi^2\phi^\dagger\phi + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi + \frac{1}{2}\bar{\chi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_\chi)\chi + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}, \tag{9.457}$$

其中相互作用拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \kappa\,\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\rm R}\psi + \kappa^*\phi\bar{\psi}P_{\rm L}\chi, \tag{9.458}$$

κ 是一个复耦合常数。$\mathcal{L}_{\rm int}$ 中两项互为厄米共轭，

$$(\kappa\,\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\rm R}\psi)^\dagger = \kappa^*\psi^\dagger P_{\rm R}\gamma^0\chi\phi = \kappa^*\phi\psi^\dagger\gamma^0P_{\rm L}\chi = \kappa^*\phi\bar{\psi}P_{\rm L}\chi, \tag{9.459}$$

第二步用到等时对易性 $[\phi(x),\chi(x)]=0$ 和 $[\phi(x),\psi^\dagger(x)]=0$。因此，$\mathcal{L}_{\rm int}$ 是厄米的。这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用。作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x) = {\rm e}^{{\rm i}q\theta}\phi(x), \quad \psi'(x) = {\rm e}^{{\rm i}q\theta}\psi(x), \tag{9.460}$$

则拉氏量 $\mathcal{L}$ 不变。可见，这个理论具有一个 U(1) 整体对称性，而复标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 U(1) 荷相同，均为 q。将耦合常数分解为实部和虚部，$\kappa=\kappa_{\rm R}+{\rm i}\kappa_{\rm I}$，则相互作用拉氏量化为

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \kappa_{\rm R}(\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\rm R}\psi + \phi\bar{\psi}P_{\rm L}\chi) + \kappa_{\rm I}({\rm i}\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\rm R}\psi - {\rm i}\phi\bar{\psi}P_{\rm L}\chi). \tag{9.461}$$

设三个量子场的 C、P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\mathcal{C}\bar{\psi}^{\rm T}(x), \quad C^{-1}\chi(x)C = \tilde{\zeta}_C^*\chi(x), \tag{9.462}$$

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\chi(x)P = \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x), \tag{9.463}$$

则算符 $\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\rm R}\psi$ 的 C、P 变换是

$$\begin{aligned} C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\rm R}\psi(x)C &= \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\chi^{\rm T}(x)\mathcal{C}P_{\rm R}\mathcal{C}\bar{\psi}^{\rm T}(x) = -\eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{\rm T}P_{\rm R}^{\rm T}\mathcal{C}^{\rm T}\chi(x) \\ &= \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}P_{\rm R}^{\rm T}\mathcal{C}\chi(x) = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\rm R}\chi(x), \end{aligned} \tag{9.464}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\rm R}\psi(x)P &= \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)\gamma^0P_{\rm R}\gamma^0\psi(\mathcal{P}x) \\ &= \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_{\rm L}\psi(\mathcal{P}x). \end{aligned} \tag{9.465}$$

同理推出算符 $\phi\bar{\psi}P_{\rm L}\chi$ 的 C、P 变换

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\rm L}\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\rm L}\psi(x), \tag{9.466}$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\rm L}\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\rm R}\chi(\mathcal{P}x). \tag{9.467}$$

可以看到，无论在 C 变换下还是在 P 变换下，相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\rm int}$ 都不能保持不变，因此理论不具有电荷共轭对称性和空间反射对称性。换言之，这个理论既是 ***C* 破坏** (C-violation) 的，又是 ***P* 破坏** (P-violation) 的。

进一步，算符 $\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\rm R}\psi$ 和 $\phi\bar{\psi}P_{\rm L}\chi$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\rm R}\psi(x)CP = \eta_{CP}\,\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\rm L}\chi(\mathcal{P}x), \tag{9.468}$$

$$(CP)^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\rm L}\chi(x)CP = \eta_{CP}^*\,\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_{\rm R}\psi(\mathcal{P}x), \tag{9.469}$$

其中 $\eta_{CP} \equiv \eta_C \eta_P^* \zeta_C^* \zeta_P \tilde{\zeta}_C \tilde{\zeta}_P^*$。9.1.1 小节末提到，复场的分立变换相位因子的取值是任意的。如果我们适当选取 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 相位因子的值，使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$，则算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_{\mathrm{R}} \psi + \phi \bar{\psi} P_{\mathrm{L}} \chi$ 在 CP 变换下不变，而相互作用拉氏量 (9.461) 中 κ_{R} 对应的项具有 CP 对称性，但同时 κ_{I} 对应的项会引起 ***CP* 破坏** (CP-violation)。如果相位因子的取值使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = -1$，则算符 $\mathrm{i}\phi^\dagger \bar{\chi} P_{\mathrm{R}} \psi - \mathrm{i}\phi \bar{\psi} P_{\mathrm{L}} \chi$ 在 CP 变换下不变，则 κ_{I} 对应的项具有 CP 对称性，而 κ_{R} 对应的项引起 CP 破坏。因此，当 $\kappa_{\mathrm{R}} \neq 0$ 且 $\kappa_{\mathrm{I}} \neq 0$ 时，相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 看起来会破坏 CP 对称性。

不过, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 是复的量子场, 即 Hilbert 空间上的非自共轭算符, 它的相位具有任意性（这是因为 $\psi(x)|\Psi\rangle$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\psi(x)|\Psi\rangle$ 描述相同的量子态），可用于吸收耦合常数 $\kappa \equiv |\kappa|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ 的相位 φ。如果将 Dirac 旋量场重新定义为 $\psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\psi(x)$，则 $\bar{\psi}'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\bar{\psi}(x)$，于是

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = |\kappa|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\,\phi^\dagger \bar{\chi} P_{\mathrm{R}} \psi + |\kappa|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\phi \bar{\psi} P_{\mathrm{L}} \chi = |\kappa|(\phi^\dagger \bar{\chi} P_{\mathrm{R}} \psi' + \phi \bar{\psi}' P_{\mathrm{L}} \chi) \tag{9.470}$$

描述同一个理论。但此时耦合常数 $|\kappa|$ 是实数，不会引起 CP 破坏。因此，这个理论实际上是具有 CP 对称性的。一般来说，

> 当一个理论中所有复耦合常数的相位**不能**完全被复场吸收时，才会出现 ***CP* 破坏**。

另一方面，像实标量场、实矢量场和 Majorana 旋量场这样的实场必须满足自共轭条件，这导致它不具有相位任意性。

在接下来的讨论中，不失一般性，将耦合常数 κ 取为实数，**相互作用拉氏量**表达为

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \kappa(\phi^\dagger \bar{\chi} \Gamma_1 \psi + \phi \bar{\psi} \Gamma_2 \chi),} \tag{9.471}$$

这里引入了

$$\Gamma_1 = P_{\mathrm{R}}, \quad \Gamma_2 = P_{\mathrm{L}}. \tag{9.472}$$

下面许多结论具有一般性，与 Γ_1 和 Γ_2 的具体形式无关。

9.7.2 Feynman 规则

现在讨论这个理论的 Feynman 规则。将 Dirac 旋量场 $\psi(x)$、复标量场 $\phi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 的平面波展开式表达为

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda [u(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}], \tag{9.473}$$

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (c_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}), \tag{9.474}$$

$$\chi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda [u(\mathbf{p},\lambda) f_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda) f_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]. \tag{9.475}$$

相应地，引入以下单粒子态，

$$\text{Dirac 正费米子 } \psi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^+, \lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \left|0\right\rangle, \tag{9.476}$$

$$\text{Dirac 反费米子 } \bar{\psi} \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle, \tag{9.477}$$

$$\text{正标量玻色子 } \phi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, c^\dagger_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle, \tag{9.478}$$

$$\text{反标量玻色子 } \bar{\phi} \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, d^\dagger_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle, \tag{9.479}$$

$$\text{Majorana 费米子 } \chi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p},\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, f^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle. \tag{9.480}$$

注意, Majorana 费米子 χ 是纯中性的, 动量记号的右上角没有正负号, 以此与 Dirac 费米子相区分。Dirac 旋量场与初末态的缩并见 (7.25)、(7.26)、(7.31) 和 (7.32) 式，复标量场的见 (7.139)–(7.142) 式。Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\langle 0|\,\overbracket{\chi(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv \langle 0|\,\chi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{9.481}$$

$$\langle 0|\,\overbracket{\bar{\chi}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv \langle 0|\,\bar{\chi}^{(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{9.482}$$

$$\langle \mathbf{p},\lambda|\,\overbracket{\bar{\chi}(x)\,|0\rangle} \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\,\bar{\chi}^{(-)}(x)\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{9.483}$$

$$\langle \mathbf{p},\lambda|\,\overbracket{\chi(x)\,|0\rangle} \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\,\chi^{(-)}(x)\,|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{9.484}$$

由于相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_{\text{int}}$，从 (7.4) 式得到 $\mathrm{i}T$ 算符展开式中 $n=1$ 的项

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T^{(1)} &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x)] = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{T}[\mathcal{L}_{\text{int}}(x)] \\ &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x) + \phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)].\end{aligned} \tag{9.485}$$

根据 Wick 定理 (6.166)，$\mathrm{i}T^{(1)}$ 只包含下面两项,

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)], \quad \mathrm{i}T_2^{(1)} = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]. \tag{9.486}$$

考虑 $\psi\to\chi\phi$ 衰变过程，初态为 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$，末态为 $|\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\rangle$，$\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元是

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathrm{i}T_1^{(1)}\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)]\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\ &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \overbracket{\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)]\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle} \\ &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\ &= \mathrm{i}\kappa\,\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p},\lambda)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).\end{aligned} \tag{9.487}$$

这是计算 T 矩阵元的第一种方法，与 7.1 节介绍的方法一样。

利用电荷共轭变换，可以引进第二种计算方法。对相互作用算符 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi$ 进行转置，得到

$$\bar{\chi}\Gamma_1\psi = (\bar{\chi}\Gamma_1\psi)^{\mathrm{T}} = -\psi^{\mathrm{T}}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = -\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = \overline{\psi^{\mathrm{C}}}\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi^{\mathrm{C}}, \tag{9.488}$$

最后一步用到 (9.101)、(9.119) 和 (9.125) 式。同理推出 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \overline{\chi^{\mathrm{C}}}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}$。再由 Majorana 条件 $\chi = \chi^{\mathrm{C}}$ 得

$$\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \overline{\psi^{\mathrm{C}}}\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi, \quad \bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}. \tag{9.489}$$

从而将 (9.486) 式改写为

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(x)], \quad \mathrm{i}T_2^{(1)} = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]. \tag{9.490}$$

注意，此时旋量场算符排列的次序与原来相反。现在，$\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 $\psi \to \chi\phi$ 过程 T 矩阵元也可以表达成

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\overline{\psi_a^{\mathrm{C}}}(x)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\chi_b(x)] \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \, \phi^{\dagger(-)}(x)\chi_b^{(-)}(x)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\overline{\psi_a^{\mathrm{C}}}^{(+)}(x) \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle .\end{aligned} \tag{9.491}$$

根据 (9.98)–(9.100) 式，电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的平面波展开式是

$$\begin{aligned}\psi^{\mathrm{C}}(x) &= \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda \left[\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda [u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}],\end{aligned} \tag{9.492}$$

跟 (9.473) 式的差异只在于 a 与 b 互换。相应 Dirac 共轭的展开式为

$$\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda [\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}]. \tag{9.493}$$

据此，将电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 和 $\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)$ 与初末态的缩并定义成

$$\langle 0 | \, \psi^{\mathrm{C}}(x) \, | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \, \psi^{\mathrm{C}(+)}(x) \, | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{9.494}$$

$$\langle 0 | \, \overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x) \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \, \overline{\psi^{\mathrm{C}}}^{(+)}(x) \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{9.495}$$

$$\langle \mathbf{p}^-, \lambda | \, \overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x) \, | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}^-, \lambda | \, \overline{\psi^{\mathrm{C}}}^{(-)}(x) \, | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{9.496}$$

$$\langle \mathbf{p}^+, \lambda | \, \psi^{\mathrm{C}}(x) \, | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}^+, \lambda | \, \psi^{\mathrm{C}(-)}(x) \, | 0 \rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{9.497}$$

T 矩阵元 (9.491) 变成

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \, \mathrm{i}T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\chi_b(x)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\overline{\psi_a^{\mathrm{C}}}(x)] \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, v_b(\mathbf{q},\lambda')(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\ &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}}v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\ &= -\mathrm{i}\kappa \, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}}v(\mathbf{q},\lambda') \, (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k) \\ &= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(x)] \, | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle .\end{aligned} \tag{9.498}$$

最后一步将第一步里面的场算符移回相互作用拉氏量中的次序。倒数第二行是第二种方法的计算结果。根据 (9.98)、(9.122) 和 (9.125) 式，有

$$-\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}}v(\mathbf{q},\lambda') = -u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}\Gamma_1^{\mathrm{C}}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda') = u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')$$

$$= [u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\Gamma_1^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')]^{\mathrm{T}} = \bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p},\lambda). \tag{9.499}$$

由此可见，第二种方法的结果与第一种方法的结果 (9.487) 相等。

另一方面，考虑 $\bar{\psi}\to\chi\bar{\phi}$ 衰变过程，初态为 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$，末态为 $|\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-\rangle$。根据 (9.486) 式按第一种方法计算，$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元是

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)]\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\\
&= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\chi_b(x)(\Gamma_2)_{ab}\bar{\psi}_a(x)]\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\\
&= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,v_b(\mathbf{q},\lambda')(\Gamma_2)_{ab}\bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}\\
&= -\mathrm{i}\kappa\,\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_2 v(\mathbf{q},\lambda')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).
\end{aligned}\tag{9.500}$$

根据 (9.490) 式按第二种方法计算，$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}}u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}\\
&= \mathrm{i}\kappa\,\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}}u(\mathbf{p},\lambda)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).
\end{aligned}\tag{9.501}$$

利用 (9.99)、(9.122) 和 (9.125) 式，有

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}}u(\mathbf{p},\lambda) &= v^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')\,\mathcal{C}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = -v^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\\
&= -[v^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{T}}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)]^{\mathrm{T}} = -\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_2 v(\mathbf{q},\lambda'),
\end{aligned}\tag{9.502}$$

故两种方法的计算结果相等。

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 Feynman 规则，这样的规则将特别适用于处理费米子数破坏过程。

为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示**费米子流** (fermion flow) 的方向。费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法。当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相同时，采用第一种计算方法；当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相反时，采用与电荷共轭场有关的第二种计算方法。这样一来，两种费米子流方向是等价的，对每条连续费米子线可采取任意一种方向进行计算。于是，位置空间中费米子的外线规则如下。

1. Dirac 正费米子 ψ 入射外线：

$$= \langle 0|\,\overline{\psi(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle} = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,,$$

$$= \langle 0|\,\overline{\psi^{\mathrm{C}}(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle} = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

2. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线：

$$= \langle 0| \overbracket{\bar{\psi}(x)\,|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle} = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,,$$

$$= \langle 0| \overbracket{\psi^{\mathrm{C}}(x)\,|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle} = u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

3. Dirac 正费米子 ψ 出射外线：

$$= \langle \overbracket{\mathbf{p}^+, \lambda|\,\bar{\psi}(x)}\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,,$$

$$= \langle \overbracket{\mathbf{p}^+, \lambda|\,\psi^{\mathrm{C}}(x)}\,|0\rangle = v(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

4. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线：

$$= \langle \overbracket{\mathbf{p}^-, \lambda|\,\psi(x)}\,|0\rangle = v(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,,$$

$$= \langle \overbracket{\mathbf{p}^-, \lambda|\,\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)}\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

5. Majorana 费米子 χ 入射外线：

$$= \langle 0| \overbracket{\chi(x)\,|\mathbf{p}, \lambda\rangle} = u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,,$$

$$= \langle 0| \overbracket{\bar{\chi}(x)\,|\mathbf{p}, \lambda\rangle} = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

6. Majorana 费米子 χ 出射外线：

$$= \langle \overbracket{\mathbf{p}, \lambda|\,\bar{\chi}(x)}\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,,$$

$$= \langle \overbracket{\mathbf{p}, \lambda|\,\chi(x)}\,|0\rangle = v(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

Majorana 费米子线上没有箭头，Feynman 规则依赖于费米子流方向与动量方向之间的异同。从每条连续费米子线写出散射振幅时，总是**逆着用点划线表示的费米子流方向**逐项写下费米子的贡献。

对于上述 $\psi \to \chi\phi$ 和 $\bar{\psi} \to \chi\bar{\phi}$ 过程，第一种计算方法对应于

$$\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle =$$

$$= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}, \tag{9.503}$$

$$\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = \bar{\psi},\lambda$$

$$= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_2 v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}. \tag{9.504}$$

第二种计算方法对应于

$$\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle = \psi,\lambda$$

$$= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}} v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}, \tag{9.505}$$

$$\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = \bar{\psi},\lambda$$

$$= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}} u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}. \tag{9.506}$$

两种方法在 Feynman 图上的差异只是费米子流的方向不同，即点划线的箭头方向不同。额外的负号来自两个费米子算符的交换。观察各个 Feynman 图元素与振幅表达式的关系，归纳出位置空间中的顶点 Feynman 规则，

$$= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\Gamma_1\,,$$

$$= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\Gamma_2\,, \tag{9.507}$$

$$= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\Gamma_1^{\mathrm{C}}\,,$$

$$= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\Gamma_2^{\mathrm{C}}\,. \tag{9.508}$$

这里实线和虚线上的箭头表征着 U(1) 荷流动的方向，U(1) 荷仍然是连续流动的。

研究 $\mathrm{i}T^{(2)}$ 对 T 矩阵元的贡献时，可能遇到像 $\mathsf{N}[\bar{\chi}(y)\Gamma_1\overbracket{\psi(y)\bar{\psi}}(x)\Gamma_2\chi(x)]$ 这样的表达式。如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与 (7.40) 式一致，表达为

$$= \overbracket{\psi(y)\bar{\psi}}(x) = S_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{9.509}$$

由 (9.489) 式推出

$$\mathsf{N}[\bar{\chi}(y)\Gamma_1\overbracket{\psi(y)\bar{\psi}}(x)\Gamma_2\chi(x)] = \mathsf{N}[\overbracket{\psi^{\mathrm{C}}(y)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(y)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}}(x)] = \mathsf{N}[\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\overbracket{\psi^{\mathrm{C}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}}(y)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(y)], \tag{9.510}$$

根据场算符缩并的定义 (6.161)，如果采用第二种方法进行计算，则相应的 Feynman 传播子是

$$\begin{aligned}
&= \overbracket{\psi^{\mathrm{C}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}}(y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\psi^{\mathrm{C}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{T}[\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\psi^{\mathrm{T}}(y)\,\mathcal{C}]\,|0\rangle \\
&= -\mathcal{C}\{\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi(y)\bar{\psi}(x)]\,|0\rangle\}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}[\overbracket{\psi(y)\bar{\psi}}(x)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C} \\
&= \mathcal{C}^{-1}S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}(y-x)\,\mathcal{C} = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathcal{C}^{-1}\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(-\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}.
\end{aligned} \tag{9.511}$$

最后一步用到 (9.111) 式。另一方面，Majorana 旋量场的 Feynman 传播子为

$$= \overbracket{\chi(y)\bar{\chi}}(x) = S_{\mathrm{F}}(y-x) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\chi)}{p^2-m_\chi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{9.512}$$

转换到动量空间，我们推出以下 **Feynman 规则**。

1. Dirac 正费米子 ψ 入射外线： ψ,λ $= u(\mathbf{p},\lambda)$， ψ,λ $= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$.

2. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线： $\bar{\psi},\lambda$ $= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$， $\bar{\psi},\lambda$ $= u(\mathbf{p},\lambda)$.

3. Dirac 正费米子 ψ 出射外线： $\psi,\lambda = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$， $\psi,\lambda = v(\mathbf{p},\lambda)$.

4. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线： $\bar{\psi},\lambda = v(\mathbf{p},\lambda)$， $\bar{\psi},\lambda = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$.

5. Majorana 费米子 χ 入射外线： χ,λ $= u(\mathbf{p},\lambda)$， χ,λ $= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$.

6. Majorana 费米子 χ 出射外线： $\chi,\lambda = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$， $\chi,\lambda = v(\mathbf{p},\lambda)$.

7. Dirac 费米子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}$， $= \dfrac{\mathrm{i}(-\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}$.

8. Majorana 费米子传播子：

$$= \frac{\mathrm{i}(\not{p} + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + \mathrm{i}\epsilon}.$$

9. Yukawa 相互作用顶点：

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_1,$

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_2,$

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_1^{\mathrm{C}},$

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_2^{\mathrm{C}}.$

注意，Majorana 费米子是纯中性粒子，如果末态包含超过 1 个全同的 Majorana 费米子，计算散射截面或衰变宽度时需要在末态相空间积分之后除以末态对称性因子 $\mathcal{S}$。假如拉氏量的某个相互作用项包含 2 个或以上全同的 Majorana 旋量场，类似于 7.3 节的讨论，在导出顶点 Feynman 规则时需要考虑组合因子，计算时还需要留意 *Feynman* 图的对称性因子。

9.7.3　应用

下面应用上一小节推导出来的 Feynman 规则进行计算。考虑 $\chi\chi \to \psi\bar{\psi}$ 湮灭过程，领头阶 Feynman 图如图 9.2 所示，包含一个 t 通道和一个 u 通道的 Feynman 图。现在，费米子流方向有多种取法，但各种取法的计算结果应该是等价的。在画出拓扑不等价的 Feynman 图时，不需要考虑费米子流的方向。

设初态两个 Majorana 费米子 χ 的四维动量为 k_1^μ 和 k_2^μ，末态 Dirac 费米子 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的四维动量为 p_1^μ 和 p_2^μ，令 $t = (k_1 - p_1)^2$，$u = (k_1 - p_2)^2$。添加带箭头的点划线表示费米子流方向，

图 9.2: $\chi\chi \to \psi\bar{\psi}$ 领头阶 Feynman 图，左图为 t 通道，右图为 u 通道。

应用动量空间 Feynman 规则，t 和 u 通道 Feynman 图贡献的不变振幅分别是

$\mathrm{i}\mathcal{M}_t =$

$$= \bar{u}(p_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2)u(k_1)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-k_1)^2-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_2)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1)v(p_2)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)\bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2), \tag{9.513}$$

$\mathrm{i}\mathcal{M}_u =$

$$= \bar{v}(k_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1)v(p_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2)u(k_2)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2). \tag{9.514}$$

这里省略了螺旋度指标。根据

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle \\
&+\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle \\
=\;&\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\bar{\chi}_c(y)\chi_b(x)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle \\
&-\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\chi_b(x)\bar{\chi}_c(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle\,,
\end{aligned} \tag{9.515}$$

这两个 Feynman 图的相对符号为负，因而总振幅是

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\mathcal{M}_t - \mathrm{i}\mathcal{M}_u. \tag{9.516}$$

当然，我们也可以选择其它费米子流方向进行计算。比如，同时反转 (9.513) 式中 Feynman 图上两条点划线的方向，则 t 通道振幅变成

$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t =$

$$= \bar{v}(k_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2^{\mathrm{C}})v(p_1)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-k_1)^2-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_2)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1^{\mathrm{C}})u(k_2)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\mathrm{C}}u(k_2). \tag{9.517}$$

反转 (9.514) 式中 Feynman 图上一条点划线的方向，u 通道振幅化为

$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u =$

$$= \bar{v}(k_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1)v(p_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_2)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2^{\mathrm{C}})v(p_1)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1). \tag{9.518}$$

根据

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\psi_b^{\mathrm{C}}(x)\phi^\dagger(y)\psi_c^{\mathrm{C}}(y)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{cd}\chi_d(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle \\
&+\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\psi_b^{\mathrm{C}}(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle \\
=\;&\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\psi_c^{\mathrm{C}}(y)\psi_b^{\mathrm{C}}(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{cd}\chi_d(y)\bar{\chi}_a(x)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle \\
&+\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \,|\, \mathsf{N}[\psi_d(y)\psi_b^{\mathrm{C}}(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_a(x)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle\,,
\end{aligned} \tag{9.519}$$

这两个 Feynman 图的相对符号为正，因而总振幅是

$$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}} = \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t + \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u. \tag{9.520}$$

利用 (9.98)、(9.99)、(9.122) 和 (9.125) 式，有

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\mathrm{C}}u(k_2) &= u^{\mathrm{T}}(k_1)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1)v^{\mathrm{T}}(p_2)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(k_2) \\
&= [u^{\mathrm{T}}(k_1)\Gamma_2^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1)v^{\mathrm{T}}(p_2)\Gamma_1^{\mathrm{T}}\bar{v}^{\mathrm{T}}(k_2)]^{\mathrm{T}} \\
&= \bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1),
\end{aligned} \tag{9.521}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1) &= \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)u^{\mathrm{T}}(k_2)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1) \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)[u^{\mathrm{T}}(k_2)\,\Gamma_2^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1)]^{\mathrm{T}} \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2),
\end{aligned} \tag{9.522}$$

故 $\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t = \mathrm{i}\mathcal{M}_t$，$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u = -\mathrm{i}\mathcal{M}_u$，因此

$$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}} = \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t + \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u = \mathrm{i}\mathcal{M}_t - \mathrm{i}\mathcal{M}_u = \mathrm{i}\mathcal{M}. \tag{9.523}$$

可见，根据费米子流方向的不同取法计算出来的结果确实是等价的。

接下来计算 $\chi\chi \to \psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。使用 Γ_1 和 Γ_2 的具体形式 (9.472)，得

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_t = -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_1)\bar{v}(k_2)P_{\mathrm{R}}v(p_2), \quad (\mathrm{i}\mathcal{M}_t)^* = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2), \tag{9.524}$$

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_u = -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2), \quad (\mathrm{i}\mathcal{M}_u)^* = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_1)\bar{u}(k_2)P_{\mathrm{R}}u(p_1). \tag{9.525}$$

从而，单纯 t 通道对非极化振幅模方的贡献是

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}_t|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{\kappa^4}{4(t-m_\phi^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_1)\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{v}(k_2)P_{\mathrm{R}}v(p_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2)\\ &= \frac{\kappa^4}{4(t-m_\phi^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_1+m_\chi)P_{\mathrm{R}}]\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_2-m_\psi)P_{\mathrm{L}}],\end{aligned} \tag{9.526}$$

根据左右手投影矩阵的性质 (8.164)、(8.161) 和 (8.162)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_1+m_\chi)P_{\mathrm{R}}] &= \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)(\not{k}_1P_{\mathrm{R}}+m_\chi P_{\mathrm{L}})P_{\mathrm{R}}] = \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)\not{k}_1P_{\mathrm{R}}]\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)\not{k}_1(1+\gamma^5)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_1) = 2\,k_1\cdot p_1,\end{aligned} \tag{9.527}$$

$$\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_2-m_\psi)P_{\mathrm{L}}] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_\chi)\not{p}_2(1-\gamma^5)] = 2\,k_2\cdot p_2, \tag{9.528}$$

故

$$\overline{|\mathcal{M}_t|^2} = \frac{\kappa^4(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)^2}. \tag{9.529}$$

另一方面，单纯 u 通道的贡献为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}_u|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_u|^2 = \frac{\kappa^4}{4(u-m_\phi^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{u}(k_2)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\\ &= \frac{\kappa^4}{4(u-m_\phi^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1-m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_2-m_\psi)P_{\mathrm{L}}]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_2+m_\chi)P_{\mathrm{R}}]\\ &= \frac{\kappa^4(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)}{(u-m_\phi^2)^2}.\end{aligned} \tag{9.530}$$

而 t 和 u 通道的交叉贡献是

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u\\ &= \frac{\kappa^4}{4(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2)\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2),\end{aligned} \tag{9.531}$$

其中

$$\sum_{\text{spins}}\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2)\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)[u^{\mathrm{T}}(p_2)\,\mathcal{C}P_{\mathrm{L}}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(k_2)]^{\mathrm{T}}[u^{\mathrm{T}}(k_1)\,\mathcal{C}P_{\mathrm{R}}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_2)]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{u}(k_2)\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}u(p_2)\bar{u}(p_2)\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}u(k_1) \\
&= \mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_2+m_\chi)\,\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}(\not{p}_2+m_\psi)\,\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}] \\
&= \mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1P_{\mathrm{L}}(\not{k}_2+m_\chi)P_{\mathrm{L}}(\not{p}_2+m_\psi)P_{\mathrm{R}}] = m_\chi\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1P_{\mathrm{L}}(\not{p}_2+m_\psi)P_{\mathrm{R}}] \\
&= m_\chi\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1\not{p}_2P_{\mathrm{R}}] = \frac{m_\chi}{2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1\not{p}_2(1+\gamma^5)] \\
&= \frac{m_\chi^2}{2}\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{p}_2) = 2m_\chi^2(p_1\cdot p_2),
\end{aligned}
\tag{9.532}
$$

则

$$
\overline{\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u} + \mathrm{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2(p_1\cdot p_2)}{2(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)} + \mathrm{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2(p_1\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)}. \tag{9.533}
$$

于是，$\chi\chi\to\psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \overline{|\mathcal{M}_t-\mathcal{M}_u|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u} + \mathrm{H.c.}) \\
&= \kappa^4\left[\frac{(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)^2} + \frac{(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)}{(u-m_\phi^2)^2} - \frac{m_\chi^2(p_1\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)}\right].
\end{aligned}
\tag{9.534}
$$

9.7.4　另一个例子

在上面讨论的例子中，只要将费米子流方向取得跟 Dirac 费米子线上箭头一致，就能单单采用第一种计算方法，而无需涉及与电荷共轭场相关的第二种计算方法。不过，如果相互作用拉氏量必须使用电荷共轭场来构造，那么采用与之相关的 Feynman 规则进行计算就是不可避免的。本小节将要讨论的另一个费米子数破坏的例子就属于这种情况。

假设理论中有一个复标量场 $\phi(x)$ 与两个无质量右手旋量场 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 和 $\chi_{\mathrm{R}}(x)$，它们携带的 U(1) 荷分别是

$$
q_\phi = 3,\quad q_\psi = 2,\quad q_\chi = 1. \tag{9.535}
$$

为了让理论具有 U(1) 整体对称性，将拉氏量写成

$$
\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m_\phi^2\phi^\dagger\phi + \mathrm{i}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\overline{\chi_{\mathrm{R}}}\gamma^\mu\partial_\mu\chi_{\mathrm{R}} + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}, \tag{9.536}
$$

其中包含了 Yukawa 相互作用拉氏量

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \kappa[\phi\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} + \phi^\dagger\overline{(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}}\psi_{\mathrm{R}}]. \tag{9.537}
$$

这里已将耦合常数 κ 取为实数。类似于 (9.452) 式，上式方括号中的两项互为厄米共轭。在 U(1) 整体变换下，

$$
\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\phi\theta}\phi(x),\quad \psi_{\mathrm{R}}'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\psi\theta}\psi_{\mathrm{R}}(x),\quad \chi_{\mathrm{R}}'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\chi\theta}\chi_{\mathrm{R}}(x), \tag{9.538}
$$

则 $\overline{\psi_{\mathrm{R}}'} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_\psi\theta}\overline{\psi_{\mathrm{R}}}$，$[(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}]' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_\chi\theta}(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}$，故

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{int}}' = \kappa[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_\phi-q_\psi-q_\chi)\theta}\phi\overline{\psi_{\mathrm{R}}}(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} + \mathrm{H.c.}] = \mathcal{L}_{\mathrm{int}}. \tag{9.539}
$$

可见，拉氏量在 U(1) 整体变换下确实是不变的。

由 (8.164) 和 (9.135) 式推出

$$
\begin{aligned}
(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} &= \mathcal{C}(\overline{\chi_{\mathrm{R}}})^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}[(P_{\mathrm{R}}\chi)^{\dagger}\gamma^{0}]^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}(\chi^{\dagger}P_{\mathrm{R}}\gamma^{0})^{\mathrm{T}} \\
&= \mathcal{C}(\chi^{\dagger}\gamma^{0}P_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}},
\end{aligned}
\tag{9.540}
$$

从而

$$
\overline{(\chi_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}} = (P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}})^{\dagger}\gamma^{0} = (\chi^{\mathrm{C}})^{\dagger}P_{\mathrm{L}}\gamma^{0} = (\chi^{\mathrm{C}})^{\dagger}\gamma^{0}P_{\mathrm{R}} = \overline{\chi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}. \tag{9.541}
$$

以此将相互作用拉氏量改写为

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \kappa(\phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}} + \phi^{\dagger}\overline{\chi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{R}}\psi) = \kappa(\phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}} + \phi^{\dagger}\overline{\chi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}\psi). \tag{9.542}
$$

由 (7.4) 式得

$$
\mathrm{i}T^{(1)} = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_{1}(x)] = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x\,\mathsf{T}[\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x)] = \mathrm{i}T_{1}^{(1)} + \mathrm{i}T_{2}^{(1)} \tag{9.543}
$$

其中

$$
\mathrm{i}T_{1}^{(1)} \equiv \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^{4}x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}}(x)], \quad \mathrm{i}T_{2}^{(1)} \equiv \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^{4}x\,\mathsf{N}[\phi^{\dagger}(x)\overline{\chi^{\mathrm{C}}}(x)P_{\mathrm{R}}\psi(x)], \tag{9.544}
$$

这里已经用了 Wick 定理 (6.166)。

考虑 ϕ 玻色子衰变过程 $\phi(k) \to \psi(p)\chi(q)$，圆括号中标注了每个粒子对应的动量记号，$\mathrm{i}T_{1}^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}^{+}, \lambda;\, \mathbf{q}^{+}, \lambda' | \mathrm{i}T_{1}^{(1)} | \mathbf{k}^{+} \rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^{4}x\, \langle \mathbf{p}^{+}, \lambda;\, \mathbf{q}^{+}, \lambda' | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}}(x)] | \mathbf{k}^{+} \rangle \\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^{4}x\, \langle \mathbf{p}^{+}, \lambda;\, \mathbf{q}^{+}, \lambda' | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}}(x)] | \mathbf{k}^{+} \rangle
\end{aligned}
$$

$$
= \quad \tag{9.545}
$$

画位置空间 Feynman 图时参考了 7.4 节和 9.7.2 小节的 Feynman 规则，三条粒子线上的箭头方向均对应于 U(1) 荷流动的方向，费米子流方向与费米子线方向相反时涉及到电荷共轭场的缩并。两条费米子线上的箭头方向相互背离，这是费米子数破坏的体现。再考虑 $\bar{\phi}$ 玻色子衰变过程 $\bar{\phi}(k) \to \bar{\psi}(p)\bar{\chi}(q)$，$\mathrm{i}T_{2}^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}^{-}, \lambda;\, \mathbf{q}^{-}, \lambda' | \mathrm{i}T_{2}^{(1)} | \mathbf{k}^{-} \rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^{4}x\, \langle \mathbf{p}^{-}, \lambda;\, \mathbf{q}^{-}, \lambda' | \mathsf{N}[\phi^{\dagger}(x)\overline{\chi^{\mathrm{C}}}(x)P_{\mathrm{R}}\psi(x)] | \mathbf{k}^{-} \rangle \\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^{4}x\, \langle \mathbf{p}^{-}, \lambda;\, \mathbf{q}^{-}, \lambda' | \mathsf{N}[\phi^{\dagger}(x)\overline{\chi^{\mathrm{C}}}(x)P_{\mathrm{R}}\psi(x)] | \mathbf{k}^{-} \rangle
\end{aligned}
$$

(9.546)

此时，费米子数破坏体现为两条费米子线上的箭头方向相互交汇。归纳起来，得到动量空间中的两条顶点 Feynman 规则：

$= \mathrm{i}\kappa P_{\mathrm{L}}\,,$

$= \mathrm{i}\kappa P_{\mathrm{R}}\,.$　　(9.547)

由于相互作用拉氏量 (9.542) 是用电荷共轭场 χ^{C} 表达的，这两条顶点规则中的费米子流方向与 χ 费米子线方向相反，而与 ϕ 费米子线方向相同。

对 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 中的旋量场进行转置操作，可以得到相互作用拉氏量 (9.542) 的等价形式。利用

$$(\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}})^{\mathrm{T}} = (\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\mathcal{C}\bar{\chi}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = -\bar{\chi}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \bar{\chi}\mathcal{C}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \bar{\chi}P_{\mathrm{L}}\psi^{\mathrm{C}}, \quad (\overline{\chi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}\psi)^{\mathrm{T}} = \overline{\psi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}\chi, \tag{9.548}$$

有

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \kappa[\phi(\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi^{\mathrm{C}})^{\mathrm{T}} + \phi^{\dagger}(\overline{\chi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}\psi)^{\mathrm{T}}] = \kappa\left(\phi\bar{\chi}P_{\mathrm{L}}\psi^{\mathrm{C}} + \phi^{\dagger}\overline{\psi^{\mathrm{C}}}P_{\mathrm{R}}\chi\right). \tag{9.549}$$

现在，$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 是用电荷共轭场 ψ^{C} 表达的。更进一步，推出 (9.544) 式的等价形式

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathrm{L}}\psi^{\mathrm{C}}(x)], \quad \mathrm{i}T_2^{(1)} = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi^{\dagger}(x)\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x)P_{\mathrm{R}}\chi(x)]. \tag{9.550}$$

于是，$\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 对 $\phi(k) \to \psi(p)\chi(q)$ 的贡献是

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^+, \lambda' |\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, | \mathbf{k}^+ \rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^+, \lambda' |\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathrm{L}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]\, | \mathbf{k}^+ \rangle \\ &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^+, \lambda' |\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathrm{L}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]\, | \mathbf{k}^+ \rangle\end{aligned}$$

(9.551)

而 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 对 $\bar{\phi}(k) \to \bar{\psi}(p)\bar{\chi}(q)$ 的贡献是

$$\langle \mathbf{p}^-, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' |\, \mathrm{i}T_2^{(1)}\, | \mathbf{k}^- \rangle = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}^-, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' |\, \mathsf{N}[\phi^{\dagger}(x)\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x)P_{\mathrm{R}}\chi(x)]\, | \mathbf{k}^- \rangle$$

$$= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda' | \, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\overline{\psi^{\mathrm{C}}}(x)P_{\mathrm{R}}\chi(x)] \, | \mathbf{k}^- \rangle$$

$= \bar{\phi}$

(9.552)

由此归纳出动量空间中的另外两条顶点 Feynman 规则：

$= \mathrm{i}\kappa P_{\mathrm{L}}\,,$

$= \mathrm{i}\kappa P_{\mathrm{R}}\,.$ (9.553)

此时，费米子流方向与 ψ 费米子线方向相反，而与 χ 费米子线方向相同。原则上，(9.547) 和 (9.553) 式中的四条顶点规则足以应付各种各样的情况。

习　题

9.1 利用 (9.11) 和 (9.12) 式，证明算符 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P} \equiv J^iP^i$ 满足

$$P^{-1}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{P})P = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}. \tag{9.554}$$

设 $|E, \mathbf{p}, \sigma\rangle$ 是哈密顿量算符 H、动量算符 $\mathbf{P}$ 和算符 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}$ 的共同本征态，满足

$$H\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle = E\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle\,, \quad \mathbf{P}\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle = \mathbf{p}\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle\,, \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle = \sigma\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle\,. \tag{9.555}$$

用 P 变换定义 $|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' \equiv P\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle$，证明

$$H\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' = E\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle'\,, \quad \mathbf{P}\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' = -\mathbf{p}\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle'\,, \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' = -\sigma\,|E,\mathbf{p},\sigma\rangle'\,. \tag{9.556}$$

9.2 根据 (9.42) 式，证明

$$P'^{-1}\,|\phi\bar{\phi}\rangle = (-)^L\,|\phi\bar{\phi}\rangle\,, \tag{9.557}$$

其中 $|\phi\bar{\phi}\rangle$ 是一对正反标量玻色子 $\phi\bar{\phi}$ 组成的态 (9.28)，L 是它的轨道角动量量子数。

9.3 根据 (2.182) 式把复标量场 $\phi(x)$ 分解为两个实标量场 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$，并将 C 变换相位因子改写为 $\eta_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 θ 是实数。

(a) 利用 C 变换性质 (9.79) 证明

$$C^{-1}\begin{pmatrix}\phi_1(x)\\-\phi_2(x)\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}c_\theta & -s_\theta\\ s_\theta & c_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\end{pmatrix}, \tag{9.558}$$

其中 $c_\theta\equiv\cos\theta$，$s_\theta\equiv\sin\theta$。

(b) 通过 O(2) 整体变换

$$\begin{pmatrix}\tilde\phi_1\\ \tilde\phi_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\\ -s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\\ -s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ -\phi_2\end{pmatrix} \tag{9.559}$$

引入实标量场 $\tilde\phi_1(x)$ 和 $\tilde\phi_2(x)$，证明它们具有 C 变换性质

$$C^{-1}\tilde\phi_1(x)C=+\tilde\phi_1(x),\quad C^{-1}\tilde\phi_2(x)C=-\tilde\phi_2(x). \tag{9.560}$$

可见，$\tilde\phi_1(x)$ 和 $\tilde\phi_2(x)$ 是 C 宇称分别为偶和奇的本征态。

9.4 在 Dirac 表象 (5.301) 中，考虑 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式 (5.315)，产生湮灭算符 $(c_{\mathbf{p},\sigma},c^\dagger_{\mathbf{p},\sigma})$ 和 $(d_{\mathbf{p},\sigma},d^\dagger_{\mathbf{p},\sigma})$ 满足反对易关系 (5.316)，平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 由 (5.302) 式给出。

(a) 推出 $\mathcal{C}=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2$ 和 $\mathcal{C}\gamma^5$ 的具体形式。

(b) 证明

$$\mathcal{C}\bar u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\sigma)=v(\mathbf{p},\sigma),\qquad \mathcal{C}\bar v^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\sigma)=u(\mathbf{p},\sigma), \tag{9.561}$$

$$\gamma^0u(\mathbf{p},\sigma)=u(-\mathbf{p},\sigma),\qquad \gamma^0v(\mathbf{p},\sigma)=-v(-\mathbf{p},\sigma), \tag{9.562}$$

$$\mathcal{C}\gamma^5u(\mathbf{p},\sigma)=\tau^*_{-\sigma}u^*(-\mathbf{p},-\sigma),\quad \mathcal{C}\gamma^5v(\mathbf{p},\sigma)=-\tau_\sigma v^*(-\mathbf{p},-\sigma), \tag{9.563}$$

其中 τ_σ 是 (5.309) 式中的相位因子。

(c) 设产生湮灭算符的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}c_{\mathbf{p},\sigma}C=\zeta^*_Cd_{\mathbf{p},\sigma},\quad C^{-1}d^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}C=\zeta^*_Cc^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}, \tag{9.564}$$

$$P^{-1}c_{\mathbf{p},\sigma}P=\zeta^*_Pc_{-\mathbf{p},\sigma},\quad P^{-1}d^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}P=-\zeta^*_Pd^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma}, \tag{9.565}$$

$$T^{-1}c_{\mathbf{p},\sigma}T=\zeta^*_T\tau^*_\sigma c_{-\mathbf{p},-\sigma},\quad T^{-1}d^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}T=-\zeta^*_T\tau_{-\sigma}d^\dagger_{-\mathbf{p},-\sigma}, \tag{9.566}$$

推出

$$C^{-1}\psi(x)C=\zeta^*_C\psi^C(x),\quad P^{-1}\psi(x)P=\zeta^*_P\gamma^0\psi(\mathcal{P}x),\quad T^{-1}\psi(x)T=\zeta^*_T\mathcal{C}\gamma^5\psi(\mathcal{T}x). \tag{9.567}$$

在质心系中考虑一对正反费米子 $\psi\bar{\psi}$ 组成的系统，当轨道角动量和总自旋角动量的量子数分别为 L 和 S 时，态矢表达为

$$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S} = \sum_{\sigma,\sigma'=\pm 1/2} \int \mathrm{d}^3 p\, \Phi(\mathbf{p},\sigma,\sigma') c^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} d^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'} \left|0\right\rangle, \tag{9.568}$$

其中波函数分解为

$$\Phi(\mathbf{p},\sigma,\sigma') = R(|\mathbf{p}|)\mathrm{Y}_{LM}(\theta,\phi)\chi^S_{\sigma_S}(\sigma,\sigma'), \quad S=0,1, \quad \sigma_S = 0,\cdots,\pm S. \tag{9.569}$$

这里 θ 和 ϕ 分别是球坐标系中动量 $\mathbf{p}$ 的极角和方位角。$\chi^S_{\sigma_S}(\sigma,\sigma')$ 是自旋本征波函数，可以用正费米子 ψ 和反费米子 $\bar{\psi}$ 各自的自旋本征态 ζ_σ 和 $\eta_{\sigma'}$ 的张量积表达为

$$\chi^0_0(\sigma,\sigma') = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{+1/2}\otimes\eta_{-1/2} - \zeta_{-1/2}\otimes\eta_{+1/2}), \tag{9.570}$$

$$\chi^1_{+1}(\sigma,\sigma') = \zeta_{+1/2}\otimes\eta_{+1/2}, \tag{9.571}$$

$$\chi^1_0(\sigma,\sigma') = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{+1/2}\otimes\eta_{-1/2} + \zeta_{-1/2}\otimes\eta_{+1/2}), \tag{9.572}$$

$$\chi^1_{-1}(\sigma,\sigma') = \zeta_{-1/2}\otimes\eta_{-1/2}. \tag{9.573}$$

(d) 证明

$$\Phi(-\mathbf{p},\sigma',\sigma) = (-)^{L+S+1}\Phi(\mathbf{p},\sigma,\sigma') \tag{9.574}$$

和

$$C\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S} = (-)^{L+S}\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S}, \quad P\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S} = (-)^{L+1}\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S}. \tag{9.575}$$

可见，扣除波函数 $\Phi(\mathbf{p},\sigma,\sigma')$ 对 C 宇称的贡献 $(-)^{L+S+1}$ 之后，一对正反费米子的内禀 C 宇称为奇。

9.5 类似于 (4.275) 式，无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式为

$$\begin{aligned} A^\mu(x) = &\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)c^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\ &\mp \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \end{aligned} \tag{9.576}$$

其中极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ $(\lambda=\pm)$ 的表达式由 (4.104) 式给出，极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ $(\sigma=0,3)$ 的表达式是 (4.185) 和 (4.188) 式。

(a) 证明

$$e^\mu(-\mathbf{p},\sigma) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{p},\sigma), \quad \sigma=0,3. \tag{9.577}$$

(b) 设产生湮灭算符的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C = \xi^*_C c_{\mathbf{p},\lambda}, \qquad C^{-1}c^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C = \xi^*_C a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{9.578}$$

$$C^{-1}b_{\mathbf{p},\sigma}C = \xi_C^* d_{\mathbf{p},\sigma}, \qquad C^{-1}d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger C = \xi_C^* b_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger, \tag{9.579}$$

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P = -\xi_P^* a_{-\mathbf{p},-\lambda}, \quad P^{-1}c_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = -\xi_P^* c_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger, \tag{9.580}$$

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\sigma}P = \xi_P^* b_{-\mathbf{p},\sigma}, \qquad P^{-1}d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger P = \xi_P^* d_{-\mathbf{p},\sigma}^\dagger, \tag{9.581}$$

$$T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T = \xi_T^* a_{-\mathbf{p},\lambda}, \qquad T^{-1}c_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \xi_T^* c_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \tag{9.582}$$

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\sigma}T = -\xi_T^* b_{-\mathbf{p},\sigma}, \qquad T^{-1}d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger T = -\xi_T^* d_{-\mathbf{p},\sigma}^\dagger, \tag{9.583}$$

推出 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换 (9.254)、(9.255)、(9.256)。

9.6 验证无源 Maxwell 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0$ 在 C、P、T 变换下都保持不变。

9.7 设 η^a 和 ζ_a 是左手 Weyl 旋量，证明 $\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\zeta = \eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{b}c}\zeta_c$ 是 Lorentz 张量。

第 10 章　散射矩阵元与多点关联函数

为深入了解量子场的相互作用，本章在 Heisenberg 绘景中讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点关联函数，并初步讨论重整化。

10.1　渐近态和渐近场

从前面的章节看到，不存在相互作用时，量子场具有简单的平面波展开式，相应的产生湮灭算符具有确定的动量和极化，通过它们可以定义具有明确意义的真空态 $|0\rangle$ 和各种粒子态。然而，引入相互作用之后，虽然 Heisenberg 绘景中的量子场包含着完整的动力学信息，但它不再具有简单的平面波展开式，也不能直接给出粒子态的具体形式。

另一方面，如 6.2 节所述，在散射实验中，初末态应当具有确定的动量，它们是遥远过去和遥远未来处不受相互作用影响的**渐近态**；相应地，遥远过去和遥远未来处的量子场是自由的**渐近场** (asymptotic field)。渐近态和渐近场与自由理论中的粒子态和量子场性质相似，比较容易处理。因此，我们可以寻找相互作用理论中量子场与渐近场之间的关系，从而适当地处理量子场的相互作用。注意，接下来的讨论将不再求助于相互作用绘景，而是在 **Heisenberg 绘景**中进行更加严格的处理。在 6.2 节中，我们借助相互作用绘景来定义 S 矩阵元和 S 算符，下面将引入它们在 Heisenberg 绘景中的定义。

下面主要以实标量场 $\phi(x)$ 为例进行讨论，相关结论可以推广到其它量子场。我们将遥远过去 $(x^0 \to -\infty)$ 和遥远未来 $(x^0 \to +\infty)$ 处的渐近场分别称为**入场** (in field) $\phi_{\text{in}}(x)$ 和**出场** (out field) $\phi_{\text{out}}(x)$，它们与自由场一样满足 Klein-Gordon 方程，即

$$(\partial^2 + m^2)\phi_{\text{in}} = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi_{\text{out}} = 0. \tag{10.1}$$

注意，上式中的 m 是实验上能够测量的 ϕ 玻色子**物理质量** (physical mass)。实际上，在领头阶之外的高阶计算中，相互作用会对 ϕ 玻色子的质量产生修正，因而物理质量 m 与拉氏量中的质量参数不同，我们将后者称为**裸质量** (bare mass)，在下文中改记作 m_0。与自由场类似，$\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}(x)$ 满足等时对易关系 (2.87)，也具有平面波展开式

$$\phi_{\text{in}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p},\text{in}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}), \tag{10.2}$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p},\text{out}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}), \tag{10.3}$$

其中**入算符** $(a_{\mathbf{p},\text{in}}, a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}})$ 和**出算符** $(a_{\mathbf{p},\text{out}}, a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}})$ 各自满足产生湮灭算符的对易关系 (2.122)。

假设在遥远过去和遥远未来存在稳定且唯一的真空态 $|0\rangle$，满足

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad a_{\mathbf{p},\text{in}}|0\rangle = a_{\mathbf{p},\text{out}}|0\rangle = 0. \tag{10.4}$$

以此定义包含 n 个粒子的**入态** (in state)

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{in}}|0\rangle \tag{10.5}$$

和**出态** (out state)

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{out}}|0\rangle\,. \tag{10.6}$$

对于从 n 粒子入态到 m 粒子出态的散射过程，***S* 矩阵元**定义为

$$\boxed{S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}\,|\,\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle\,.} \tag{10.7}$$

另一方面，***S* 算符**由下式定义：

$$\boxed{|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = S\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle\,, \quad \langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}| = \langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}|\,S^\dagger,} \tag{10.8}$$

其中第二式是第一式的等价形式，n 和 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ 都是任意的，而 $n = 0$ 对应于真空态。也就是说，S 算符作用到任意出态上会得到相应的入态。从而，

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}|\,S^\dagger S\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle &= \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{in}\,|\,\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle \\ &= \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}\,|\,\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle\,,\end{aligned} \tag{10.9}$$

第二个等号成立的原因是 $(a_{\mathbf{p},\text{in}}, a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}})$ 和 $(a_{\mathbf{p},\text{out}}, a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}})$ 满足相同形式的对易关系。上式表明

$$\boxed{S^\dagger S = \mathbb{I},} \tag{10.10}$$

即 $S^{-1} = S^\dagger$，可见 S 算符是么正算符。

对 (10.8) 第一式两边同时左乘 $S^\dagger$，对第二式两边同时右乘 S，得

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle = S^\dagger\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle\,, \quad \langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}| = \langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}|\,S\,. \tag{10.11}$$

于是，可以将 S 矩阵元 (10.7) 表达为

$$S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{in}|\,S\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}|\,S\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle\,. \tag{10.12}$$

上式类似于相互作用绘景中的 (6.124) 式。接照 (6.272) 式将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$，则真正表征相互作用的 ***T* 矩阵元**表达为

$$T_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{in}|\,T\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}|\,T\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle\,. \tag{10.13}$$

如果动量集合 $\{\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\}$ 与 $\{\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m\}$ 不完全相同，那么

$$\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{in}\,|\,\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle = \langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\,|\,\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{out}\rangle = 0, \tag{10.14}$$

从而 $S=\mathbb{I}+\mathrm{i}T$ 中恒等算符 $\mathbb{I}$ 对 S 矩阵元没有贡献，有

$$S_{fi}=\mathrm{i}T_{fi}. \tag{10.15}$$

真空态的稳定性和唯一性意味着 $|0;\mathrm{in}\rangle=|0;\mathrm{out}\rangle=|0\rangle$。在 (10.8) 和 (10.11) 式中取 $n=0$，得到

$$|0;\mathrm{in}\rangle = S\,|0;\mathrm{out}\rangle\,,\quad |0;\mathrm{out}\rangle = S^\dagger\,|0;\mathrm{in}\rangle\,, \tag{10.16}$$

即

$$S\,|0\rangle = S^\dagger\,|0\rangle = |0\rangle\,, \tag{10.17}$$

这表明 $\langle 0|\,S\,|0\rangle = \langle 0|\,S^\dagger\,|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$。

将 n 粒子入态表达为

$$|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle = Ca^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\mathrm{in}}\,|0\rangle = Ca^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}S\cdots S^\dagger a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\mathrm{in}}S\,|0\rangle\,, \tag{10.18}$$

其中 $C=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\cdots\sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$，第二步用到 (10.17) 式并在所有相邻产生算符之间插入 $\mathbb{I}=SS^\dagger$。再由 (10.11) 第一式得到

$$Ca^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\mathrm{out}}\,|0\rangle = |\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{out}\rangle = S^\dagger\,|\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle = CS^\dagger a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}S\cdots S^\dagger a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\mathrm{in}}S\,|0\rangle\,, \tag{10.19}$$

比较最左边和最右边，推出

$$a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = S^\dagger a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{in}}S,\quad a_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = S^\dagger a_{\mathbf{p},\mathrm{in}}S, \tag{10.20}$$

第二式是对第一式取厄米共轭得到的。进而，$\phi_{\mathrm{out}}(x)=S^\dagger\phi_{\mathrm{in}}(x)S$。可见，$S$ 算符给出联系入算符和出算符的相似变换。

单个粒子到自身的跃迁过程应当与自由运动一样，因此

$$\langle \mathbf{q};\mathrm{out}\,|\,\mathbf{p};\mathrm{in}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q};\mathrm{in}\,|\,\mathbf{p};\mathrm{in}\rangle\,, \tag{10.21}$$

这意味着

$$|\mathbf{p};\mathrm{in}\rangle = |\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle = |\mathbf{p}\rangle\,, \tag{10.22}$$

即单粒子的入态等同于出态，可以将它们统一简记为 $|\mathbf{p}\rangle$。如果局限在单粒子态空间进行讨论，那么

$$S\,|\mathbf{p};\mathrm{in}\rangle = S\,|\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle = |\mathbf{p};\mathrm{in}\rangle = |\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle\,, \tag{10.23}$$

即 S 算符对单粒子入态或出态的作用等同于恒等算符。

10.2　Källén-Lehmann 谱表示

自由的实标量场 $\phi_{\text{free}}(x)$ 等价于相互作用绘景中的实标量场 $\phi^{\text{I}}(x)$，因而用 $\phi_{\text{free}}(x)$ 计算的 Feynman 传播子 $D_{\text{F}}(x-y)=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\text{free}}(x)\phi_{\text{free}}(y)]\,|0\rangle$ 的具体形式就是简单紧凑的 (6.210) 式[1]。引入相互作用之后，在 Heisenberg 绘景中用实标量场 $\phi(x)$ 构造出来的**两点关联函数** (two-point correlation function)

$$\boxed{G^{(2)}(x,y)\equiv\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle} \tag{10.24}$$

将不再等同于 Feynman 传播子 $D_{\text{F}}(x-y)$，也会失去简单的形式。这个两点关联函数是相互作用理论中的**完整传播子**，下面对它的结构进行分析。

我们先考虑 $\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle$，并在这个期待值里面插入一组中间态的完备集 $\{|\Psi\rangle\}$，它满足**完备性关系**

$$\sum_{\Psi}|\Psi\rangle\langle\Psi|=\mathbb{I}. \tag{10.25}$$

$\{|\Psi\rangle\}$ 中包含满足 $p^2=m^2$ 和 $p^0>0$ 的单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$，也包含各种多粒子态；具体来说，里面任意的 $|\Psi\rangle$ 都是四维动量算符 P^μ 的本征态，满足

$$P^\mu|\Psi\rangle=p^\mu_\Psi|\Psi\rangle,\quad p^2_\Psi\geq 0,\quad p^0_\Psi\geq 0. \tag{10.26}$$

在相互作用理论中，应该把这些 $|\Psi\rangle$ 看作自由的渐近态，而 p^μ_Ψ 是 $|\Psi\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和。另一方面，根据 (3.78) 和 (3.81) 式，对 $\phi(0)$ 作时空平移变换，可以得到 $\phi(x)$，即

$$\phi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x}. \tag{10.27}$$

再注意到真空态不具有能动量，$P^\mu|0\rangle=0\,|0\rangle$，推出

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle&=\sum_\Psi\langle 0|\,\phi(x)\,|\Psi\rangle\langle\Psi|\,\phi(y)\,|0\rangle=\sum_\Psi\langle 0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x}\,|\Psi\rangle\langle\Psi|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot y}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot y}\,|0\rangle\\&=\sum_\Psi\langle 0|\,\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\Psi\cdot x}\,|\Psi\rangle\langle\Psi|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\Psi\cdot y}\phi(0)\,|0\rangle=\sum_\Psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\Psi\cdot(x-y)}\,|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle|^2\\&=\int\mathrm{d}^4p\sum_\Psi\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\,|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle|^2\,.\end{aligned} \tag{10.28}$$

令

$$\sum_\Psi\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\,|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle|^2=\frac{\theta(p^0)\rho(p^2)}{(2\pi)^3}, \tag{10.29}$$

其中 $\rho(p^2)$ 称为**谱密度** (spectral density)，则

$$\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\,\theta(p^0)\rho(p^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{10.30}$$

[1]注意 6.4.1 小节讨论中的实标量场是相互作用绘景的 $\phi^{\text{I}}(x)$。

(10.29) 式左边是实值、正定、Lorentz 不变的，从而谱密度作为 p^μ 的函数只能依赖于 p^2，并且 $\rho(p^2)$ 是实值、正定、Lorentz 不变的函数。由于 $p_\Psi^2 \geq 0$ 且 $p_\Psi^0 \geq 0$，四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p-p_\Psi)$ 保证具有物理意义的 p^μ 也满足 $p^2 \geq 0$ 和 $p^0 \geq 0$，这是 (10.29) 右边引入 $\theta(p^0)$ 的理由。

进一步，利用

$$\rho(p^2) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \delta(p^2 - s)\rho(s) \tag{10.31}$$

将 (10.30) 式化为

$$\langle 0|\, \phi(x)\phi(y)\, |0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \rho(s) \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^3}\, \theta(p^0)\delta(p^2 - s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \rho(s)\Delta(x-y,s), \tag{10.32}$$

其中

$$\Delta(x-y,s) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^3}\, \theta(p^0)\delta(p^2 - s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}, \tag{10.33}$$

这样就把谱密度挪到四维动量积分之外了。现在，两点关联函数表达为

$$\begin{aligned}\langle 0|\, \mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\, |0\rangle &= \theta(x^0 - y^0)\, \langle 0|\, \phi(x)\phi(y)\, |0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\, \langle 0|\, \phi(y)\phi(x)\, |0\rangle \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \rho(s)\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s),\end{aligned} \tag{10.34}$$

其中

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s) \equiv \theta(x^0 - y^0)\Delta(x-y,s) + \theta(y^0 - x^0)\Delta(y-x,s). \tag{10.35}$$

这个结果表明，两点关联函数实际上只是 $x^\mu - y^\mu$ 的函数，即 $G^{(2)}(x,y) = G^{(2)}(x-y)$。

利用 (2.62) 式推出

$$\begin{aligned}\Delta(x-y,s) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}p^0\, \theta(p^0)\, \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - s]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\cdot(x^0-y^0)}}{2p^0}\bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}.\end{aligned} \tag{10.36}$$

将 (6.208) 式中的 m^2 替换成 s，得

$$\left[\theta(x^0 - y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0} + \theta(y^0 - x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0}\right]\bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}} = \int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}. \tag{10.37}$$

从而，(10.35) 式变成

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[\theta(x^0 - y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0} + \theta(y^0 - x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0}\right]\bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},\end{aligned} \tag{10.38}$$

注意第一步对第二项的积分变量作了替换 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$。与 (6.210) 式比较可知，$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s)$ 与 Feynman 传播子 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 具有相同的形式，只是将 m^2 替换成 s。

于是，两点关联函数 (10.34) 化为

$$\boxed{\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},} \tag{10.39}$$

这样的表示方式称为 **Källén-Lehmann 谱表示** (spectral representation) [49, 50]。对于自由的实标量场，谱密度 $\rho(s)=\delta(s-m^2)$，而 (10.39) 式退化为 Feynman 传播子 (6.210)。根据 (6.280) 式对 $G^{(2)}(x,0)=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(0)]\,|0\rangle$ 作 Fourier 变换，由 (6.279) 式得

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\equiv \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}G^{(2)}(x,0) = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(0)]\,|0\rangle\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int\frac{\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-p)\cdot x} = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int \mathrm{d}^4q\,\frac{\mathrm{i}}{q^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\delta^{(4)}(q-p)\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}.\end{aligned} \tag{10.40}$$

这是**动量空间中的完整传播子**，它是动量空间中的 Feynman 传播子

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) &\equiv \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}D_{\mathrm{F}}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-p)\cdot x}\\ &= \int \mathrm{d}^4q\,\delta^{(4)}(q-p)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\end{aligned} \tag{10.41}$$

的推广。

用 (10.32) 式将 $[\phi(x),\phi(y)]$ 的真空期待值表达为

$$\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle - \langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s), \tag{10.42}$$

这也是一种 *Källén-Lehmann* 谱表示，其中

$$\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s) \equiv \Delta(x-y,s)-\Delta(y-x,s) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2p^0}\bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}} \tag{10.43}$$

与 Pauli-Jordan 传播函数 (6.111) 具有相同的形式，只是将 m^2 替换为 s。上式第二步用到 (10.36) 式。$\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s)$ 对 x^0 求导，得

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})\big|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}, \tag{10.44}$$

取 $x^0=0$，由 (2.68) 式推出

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s)\bigg|_{x^0=0} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) = -\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}), \tag{10.45}$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)\bigg|_{x^0=y^0} = -\frac{\partial}{\partial(x^0-y^0)}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)\big|_{x^0=y^0} = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{10.46}$$

Källén-Lehmann 谱表示 (10.39) 表明，谱密度 $\rho(s)$ 是在态矢 $\phi(x)\,|0\rangle$ 里面找到不变质量平方为 s 的自由态的**概率密度**，而 s 可以取物理上能够得到的任何数值。作为概率密度，$\rho(s)$ 是**归一化**的，这一点可以利用 Heisenberg 绘景中的等时对易关系来验证。假设拉氏量中相互作用项不涉及 $\partial_\mu\phi$，则 $\phi(x)$ 的共轭动量密度为 $\pi(x)=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}=\dot{\phi}(x)$，正则量子化程序要求的等时对易关系为

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{10.47}$$

另一方面，注意到 $[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]$ 是一个 c 数，根据 (10.42) 和 (10.46) 式，有

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)] &= \frac{\partial}{\partial y^0}\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle\Big|_{x^0=y^0=t}=\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\frac{\partial}{\partial y^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)\Big|_{x^0=y^0=t}\\ &=\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\end{aligned} \tag{10.48}$$

与等时对易关系 (10.47) 比较，即得**归一化条件**

$$\boxed{\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)=1.} \tag{10.49}$$

根据单粒子态内积的表达式 (2.157)，有

$$|\mathbf{q}\rangle=\int \mathrm{d}^3p\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|\mathbf{p}\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle\cdot 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}\,|\,\mathbf{q}\rangle. \tag{10.50}$$

观察最左边和最右边，得到**单粒子态的完备性关系**

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}|=\mathbb{I}_{\text{1-particle}},} \tag{10.51}$$

其中 $\mathbb{I}_{\text{1-particle}}$ 代表局限于单粒子态时的恒等算符。这个完备性关系表明，(10.25) 和 (10.29) 式中对单粒子态的求和部分可作以下替换：

$$\sum_{|\mathbf{p}\rangle}\to\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{10.52}$$

由于

$$\int \mathrm{d}p^0\,\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)=\frac{1}{2p^0}\Big|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}=\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}, \tag{10.53}$$

这种替换变成

$$\sum_{|\mathbf{p}\rangle}\to\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\,\theta(p^0)\delta(p^2-m^2), \tag{10.54}$$

从而将 (10.29) 式化为

$$\theta(p^0)\rho(p^2)=(2\pi)^3\sum_{|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-q)\,|\langle\mathbf{q}|\,\phi(0)\,|0\rangle|^2+(2\pi)^3\sum_{|\Psi\rangle\neq|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\,|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle|^2$$

图 10.1: 典型的谱密度图像。

图 10.2: 动量空间中的完整传播子 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的解析结构。

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^4 q\, \theta(q^0)\delta(q^2-m^2)\delta^{(4)}(p-q)\, |\langle \mathbf{q}|\, \phi(0)\, |0\rangle|^2 + \theta(p^0)\hat{\rho}(p^2) \\
&= \theta(p^0)\delta(p^2-m^2)\, |\langle \mathbf{p}|\, \phi(0)\, |0\rangle|^2 + \theta(p^0)\hat{\rho}(p^2),
\end{aligned} \tag{10.55}
$$

其中

$$
\theta(p^0)\hat{\rho}(p^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_{|\Psi\rangle \neq |\mathbf{q}\rangle} \delta^{(4)}(p-p_\Psi)\, |\langle \Psi|\, \phi(0)\, |0\rangle|^2 \tag{10.56}
$$

给出多粒子态贡献的谱密度 $\hat{\rho}(p^2)$。对于自由的多粒子态 $|\Psi\rangle$，$\delta^{(4)}(p-p_\Psi)$ 表明 $p^2 = p_\Psi^2$，而 p_Ψ^2 是多个粒子的质心能平方，或者说不变质量的平方，它可以取连续值，其下限是多个粒子质量之和的平方。令

$$
Z \equiv |\langle \mathbf{p}|\, \phi(0)\, |0\rangle|^2, \tag{10.57}
$$

得到

$$
\boxed{\rho(s) = Z\, \delta(s-m^2) + \hat{\rho}(s),} \tag{10.58}
$$

其中第一项和第二项分别是单粒子态和多粒子态的贡献。$\rho(s)$ 是 Lorentz 不变量，因而由 (10.57) 定义的 Z 只能依赖于 $p^2 = m^2$，这意味着它是一个常数。Z 是在态矢 $\phi(0)\,|0\rangle$ 里面找到质量为 m 的单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的概率，称为**场强重整化常数** (field strength renormalization constant)，它与量子场论的**重整化** (renormalization) 问题密切相关。

谱密度的具体形式依赖于相互作用理论。一个典型谱密度 $\rho(s)$ 的图像如图 10.1 所示。它在 $s = m^2$ 处的形式为 $Z\,\delta(s-m^2)$，用竖线表示，对应于物理质量为 m 的单粒子中间态，概率为 Z。产生双粒子末态的运动学条件是 $s > 4m^2$，因而从 $s > 4m^2$ 开始出现多粒子中间态引起的**连续谱** (continuum)。连续谱有可能呈现出比较复杂的结构，图 10.1 中在 $s \sim m_r^2$ 处存在一个**共振态** (resonance) r，它具有一定的宽度，中心质量为 m_r。在某些相互作用理论中，还可能存在由两个粒子构成的若干个**束缚态** (bound state)，它们表现为 s 略小于 $4m^2$ 处正比于 δ 函数的竖线。

将 (10.58) 式代入(10.49) 式，得到

$$1=\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)=Z+\int_{\sim 4m^2}^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s), \tag{10.59}$$

注意在 $s>m^2$ 处 $\rho(s)=\hat{\rho}(s)$。由此可见，

$$\boxed{0\le Z<1.} \tag{10.60}$$

存在相互作用时，$\phi(x)$ 作用到 $|0\rangle$ 上除了得到单粒子态之外，还有一定概率得到多粒子态，体现为 $Z<1$。在自由理论中，则有 $Z=1$。

把 (10.58) 式代入 (10.40) 式，将动量空间中的完整传播子化为

$$\boxed{\tilde{G}^{(2)}(p)=\frac{\mathrm{i}Z}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}+\int_{\sim 4m^2}^\infty \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{i}\rho(s)}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}.} \tag{10.61}$$

这是**动量空间中的 Källén-Lehmann 谱表示**。$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的解析结构如图 10.2 所示，在实轴上 $p^2=m^2$ 处存在一个**单极点**[2]，因而物理质量 m 也称为**极点质量** (pole mass)。场强重整化常数 Z 对应着 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在这个单极点处的留数，有

$$Z=\lim_{p^2\to m^2}[-\mathrm{i}(p^2-m^2)\tilde{G}^{(2)}(p)]. \tag{10.62}$$

如果存在束缚态，则实轴上 p^2 略小于 $4m^2$ 的地方还会有更多的单极点。此外，在 $p^2>4m^2$ 的实轴区间上存在一条**割线** (branch cut)，割线两边的函数值不连续。这是因为 (10.61) 式第二项的被积函数在 $p^2=s$ 处存在单极点，对无穷多个单极点位置 s 进行积分会导致割线，可以通过下面的例子理解。

函数 $f_s(z)=(z-s)^{-1}$ 在 $z=s$ 处存在单极点，对 s 从 -1 到 1 积分，得

$$g(z)=\int_{-1}^1 \mathrm{d}s\,f_s(z)=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}s}{z-s}=\ln\frac{z+1}{z-1}. \tag{10.63}$$

对数函数 $\ln z$ 的**支点** (branch point) 位于原点 $z=0$ 和无穷远点 $z=\infty$ 处，可将割线取为负实轴 $z<0$；用割线将复平面割开，可以得到单值分支。$(z+1)/(z-1)=0$ 和 $(z+1)/(z-1)=\infty$ 分别给出 $z=-1$ 和 $z=1$，这是 $g(z)$ 的两个支点，它们之间存在一条割线。$(z+1)/(z-1)<0$ 意味着 $-1<z<1$，因而 $g(z)$ 的割线可取为实区间 $(-1,1)$。(10.63) 式表明，可将这条割线看作排列在实区间 $(-1,1)$ 上具有无穷小留数 $\mathrm{d}s$ 的无穷多个单极点的集合。

(10.57) 式表明，$\langle\mathbf{p}|\,\phi(0)\,|0\rangle$ 的模是 $\sqrt{Z}$，假设它的相位因子是 1，则

$$\langle\mathbf{p}|\,\phi(0)\,|0\rangle=\sqrt{Z}. \tag{10.64}$$

利用 (10.27) 式，推出

$$\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle=\langle\mathbf{p}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x}\,|0\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\langle\mathbf{p}|\,\phi(0)\,|0\rangle=\sqrt{Z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{10.65}$$

[2]考虑到无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$，极点位置实际上在 $p^2=m^2-\mathrm{i}\epsilon$ 处，与实轴略有偏离。

另一方面，渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}(x)$ 等价于自由场，(2.165) 式成立，即

$$\langle \mathbf{p}|\,\phi_{\text{in}}(x)\,|0\rangle = \langle \mathbf{p}|\,\phi_{\text{out}}(x)\,|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{10.66}$$

可见

$$\langle \mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle = \sqrt{Z}\,\langle \mathbf{p}|\,\phi_{\text{in}}(x)\,|0\rangle = \sqrt{Z}\,\langle \mathbf{p}|\,\phi_{\text{out}}(x)\,|0\rangle\,. \tag{10.67}$$

上式并不意味着 $\phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\text{in}}(x)$ 或 $\phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\text{out}}(x)$，否则 $\phi(x)$ 会满足自由场的运动方程 $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$。不过，我们可以推测

$$\lim_{x^0\to-\infty}\phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\text{in}}(x), \qquad \lim_{x^0\to+\infty}\phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\text{out}}(x), \tag{10.68}$$

即 $\sqrt{Z}\,\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\sqrt{Z}\,\phi_{\text{out}}(x)$ 分别作为 $\phi(x)$ 在 $x^0 \to -\infty$ 和 $x^0 \to +\infty$ 时的渐近极限。

然而，(10.68) 式是不合理的，它意味着

$$\lim_{t\to-\infty}[\phi(\mathbf{x},t), \dot{\phi}(\mathbf{y},t)] = Z[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t), \dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}Z\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{10.69}$$

这个结果仅当 $Z = 1$ 时能够与等时对易关系 (10.47) 相容，但相互作用的存在却要求 $Z < 1$。其实，(10.68) 式是直接针对算符的渐近极限，在收敛性方面要求太高。我们需要把它弱化成下列**渐近条件** (asymptotic condition)：

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x^0\to-\infty}\langle \Psi_2|\,\phi(x)\,|\Psi_1\rangle &= \sqrt{Z}\,\langle \Psi_2|\,\phi_{\text{in}}(x)\,|\Psi_1\rangle\,,\\ \lim_{x^0\to+\infty}\langle \Psi_2|\,\phi(x)\,|\Psi_1\rangle &= \sqrt{Z}\,\langle \Psi_2|\,\phi_{\text{out}}(x)\,|\Psi_1\rangle\,,\end{aligned}} \tag{10.70}$$

其中 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 是 Hilbert 空间中两个任意的态矢。这样的渐近条件不能保证

$$\lim_{t\to-\infty}\langle \Psi_2|\,[\phi(\mathbf{x},t), \dot{\phi}(\mathbf{y},t)]\,|\Psi_1\rangle = Z\,\langle \Psi_2|\,[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t), \dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y},t)]\,|\Psi_1\rangle \tag{10.71}$$

成立，因而不会跟等时对易关系矛盾。

上述讨论可以推广到具有自旋的量子场，但一般需要定义多个谱函数来描述多粒子态。推广到 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 时，动量空间中的完整传播子表达为

$$\boxed{\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)]\,|0\rangle = \frac{\mathrm{i}Z_2(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} + \cdots\,,} \tag{10.72}$$

其中省略了多粒子态贡献。**场强重整化常数** Z_2 对应于物理质量为 m 的单粒子态的概率，满足

$$\langle 0|\,\psi(0)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle = \sqrt{Z_2}\,u(\mathbf{p},\lambda), \qquad \langle 0|\,\bar{\psi}(0)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = \sqrt{Z_2}\,\bar{v}(\mathbf{p},\lambda), \tag{10.73}$$

$$\langle \mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar{\psi}(0)\,|0\rangle = \sqrt{Z_2}\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda), \qquad \langle \mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi(0)\,|0\rangle = \sqrt{Z_2}\,v(\mathbf{p},\lambda). \tag{10.74}$$

相应地，存在渐近条件

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x^0\to-\infty}\langle \Psi_2|\,\psi(x)\,|\Psi_1\rangle &= \sqrt{Z_2}\,\langle \Psi_2|\,\psi_{\text{in}}(x)\,|\Psi_1\rangle\,,\\ \lim_{x^0\to+\infty}\langle \Psi_2|\,\psi(x)\,|\Psi_1\rangle &= \sqrt{Z_2}\,\langle \Psi_2|\,\psi_{\text{out}}(x)\,|\Psi_1\rangle\,.\end{aligned}} \tag{10.75}$$

10.3 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

(10.24) 式定义了实标量场 $\phi(x)$ 的两点关联函数 $G^{(2)}(x,y)$，它是两个时空点处的场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的时序乘积的真空期待值 $\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle$。类似地推广到 n 个时空点，将 **n 点关联函数**定义为

$$\boxed{G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\equiv\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle\,,} \tag{10.76}$$

它也称为 **n 点 Green 函数**。本节探讨这种多点关联函数与散射矩阵元之间的关系。

对于 $n\to m$ 散射过程, S 矩阵元由 (10.7) 式给出, 我们从入态中抽出第一个产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}$，得到

$$\begin{aligned}S_{fi}&=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\&=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\&\quad+\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}})\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\,.\end{aligned} \tag{10.77}$$

依次从第一项的出态中抽出各个湮灭算符，利用产生湮灭算符的对易关系 (2.122) 进行对易操作，最后利用 $\langle 0|\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}=0$，将第一项化为

$$\begin{aligned}&\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\=&\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\=&\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}|\,[a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)]\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\=&\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\&+2E_{\mathbf{q}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,\langle\mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\=&\sqrt{8E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_3,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}a_{\mathbf{q}_2,\text{out}}a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\&+2E_{\mathbf{q}_2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\,\langle\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\&+2E_{\mathbf{q}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,\langle\mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\\=&\cdots=\sum_{k=1}^{m}2E_{\mathbf{q}_k}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_k)\,\langle\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_{k-1},\mathbf{q}_{k+1},\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\,.\end{aligned} \tag{10.78}$$

可见，如果出态中有一个动量 $\mathbf{q}_k$ 与 $\mathbf{p}_1$ 相同，则 (10.77) 式第一项约化为 $(n-1)\to(m-1)$ 散射矩阵元与 $2E_{\mathbf{q}_k}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_k)$ 的乘积，它意味着第 1 个入态粒子只发生自由运动，根本不参与散射。为了避免处理这种可约化的情况，我们在下面的推导中**假设 m 个出态粒子的动量与 n 个入态粒子的动量各不相同**，从而 (10.77) 式中第一项的贡献为零，只需要考虑第二项，而且 (10.15) 式成立，可以用 T 矩阵元代替 S 矩阵元，即

$$\mathrm{i}T_{fi}=S_{fi}=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}})\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle\,. \tag{10.79}$$

现在处理 (10.79) 式中的算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}$。由 (2.113) 式推出

$$a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}}=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}[\partial_0\phi_{\text{in}}(x)+\mathrm{i}p^0\phi_{\text{in}}(x)]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x)-\phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}]\\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{in}}(x),
\end{aligned}
\tag{10.80}
$$

其中 $\partial_{x^0}\equiv\partial/\partial x^0$。类似地，有

$$
a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{out}}(x).
\tag{10.81}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}[\phi_{\mathrm{out}}(x)-\phi_{\mathrm{in}}(x)]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\left(\lim_{x^0\to+\infty}-\lim_{x^0\to-\infty}\right)\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x).
\end{aligned}
\tag{10.82}
$$

第二步用到渐近条件 (10.70)。尽管这里缺乏 (10.70) 式中的左矢和右矢，但算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}$ 将被用到 (10.79) 式中，因而使用渐近条件 (10.70) 是合理的。也就是说，我们为了书写方便没有给上式添加相应的左矢和右矢。

利用积分公式

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^0\,\partial_{x^0}f(x) = f(x)\Big|_{x^0\to-\infty}^{x^0\to+\infty} = \left(\lim_{x^0\to+\infty}-\lim_{x^0\to-\infty}\right)f(x)\,,
\tag{10.83}
$$

将上面的三维积分 $\int\mathrm{d}^3x$ 扩充成四维积分 $\int\mathrm{d}^4x$，推出

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_{x^0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x)]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_{x^0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial_{x^0}\phi(x)-\partial_{x^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial^2_{x^0}\phi(x)-\partial^2_{x^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]
\end{aligned}
\tag{10.84}
$$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$ 其实是 Klein-Gordon 方程的平面波解，回顾 (2.95) 式，有

$$
(\partial^2_x+m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}=0,
\tag{10.85}
$$

故

$$
\partial^2_{x^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x} = (\nabla^2_x-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}.
\tag{10.86}
$$

将上式代入，得到

$$
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial^2_{x^0}\phi(x)-(\nabla^2_x-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)].
\tag{10.87}
$$

被积函数中包含 Laplace 算符的项可化为

$$
\nabla^2_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x) = \nabla_x\cdot[\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]-\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\cdot\nabla_x\phi(x)
$$

$$= \nabla_x \cdot [\nabla_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)] - \nabla_x \cdot [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\nabla_x\phi(x)] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\nabla_x^2\phi(x), \tag{10.88}$$

从而推出

$$\begin{aligned}
&a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_{x^0}^2 - \nabla_x^2 + m^2)\phi(x) - \nabla_x\cdot[\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\nabla_x\phi(x)]\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2 + m^2)\phi(x),
\end{aligned} \tag{10.89}$$

第二步丢弃了三维全散度项。代入到 (10.79) 式中，得

$$\mathrm{i}T_{fi} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2 + m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\phi(x)\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle\,. \tag{10.90}$$

这样我们就在散射矩阵元中减少了一个动量为 $\mathbf{p}_1$ 的入态粒子，把它转换成受到 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_x^2+m^2)$ 作用的场算符 $\phi(x)$ 的 *Fourier* 变换 $\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$，并出现一个 $\mathrm{i}/\sqrt{Z}$ 因子。接下来重复这样的操作，依次减少散射矩阵元中的每个粒子，转化成用场算符表达的结果。

将动量为 $\mathbf{p}_2$ 的入态粒子的产生算符抽出来，得

$$\mathrm{i}T_{fi} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2 + m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}}\,|\mathbf{p}_3,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle\,. \tag{10.91}$$

由 (10.80) 式推出

$$\begin{aligned}
&\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}[\phi(x)\phi_{\mathrm{in}}(y)] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}[\phi(x)\phi(y)] = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\right\} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)].
\end{aligned} \tag{10.92}$$

上面第二步采用渐近条件 (10.70)；由于 $y^0\to-\infty$ 时必有 $x^0>y^0$，可将 $\phi(x)\phi(y)$ 改写成时序乘积 $\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$，得到第三步结果；第四步用到积分公式 (10.83)。参考从 (10.84) 式到 (10.89) 式的推导过程，将上式第一项化为

$$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\right\} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]; \tag{10.93}$$

第二项变成

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi(y)\phi(x)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi_{\mathrm{out}}(y)\phi(x) = a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{out}}\phi(x), \tag{10.94}$$

第一步用到 $y^0 \to +\infty$ 时必有 $y^0 > x^0$ 的情况, 第二步用到渐近条件 (10.70) , 第三步用到 (10.81) 式。从而给出

$$\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] + a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{out}}\phi(x), \tag{10.95}$$

代入到 (10.91) 式中，第二项贡献为零，得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_{fi} = &\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\right)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x+p_2\cdot y)}\\ &\times(\partial_x^2+m^2)(\partial_y^2+m^2)\left\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\right|\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\left|\mathbf{p}_3,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\right\rangle.\end{aligned} \tag{10.96}$$

按照上述做法依次处理入态中剩余的粒子，推出

$$\mathrm{i}T_{fi} = \int\left[\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2+m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\left\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\right|\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\left|0\right\rangle. \tag{10.97}$$

下面处理出态中的粒子。将动量为 $\mathbf{q}_1$ 的出态粒子的湮灭算符抽出来，得

$$\mathrm{i}T_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}}\int\left[\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2+m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\left\langle \mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\right|a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{out}}\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\left|0\right\rangle. \tag{10.98}$$

由 (2.112) 式推出

$$a_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[\partial_{x^0}\phi_{\mathrm{out}}(x) - \mathrm{i}p^0\phi_{\mathrm{out}}(x)] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{out}}(x), \tag{10.99}$$

故

$$\begin{aligned}a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{out}}\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}}}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi_{\mathrm{out}}(y)\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi(y)\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\right\}\\ &\quad+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\{\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\phi(y)\}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\\ &\quad+\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{in}}.\end{aligned} \tag{10.100}$$

将上式代入到 (10.98) 式中，第二项没有贡献，得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}} \int \mathrm{d}^4 y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}(\partial_y^2 + m^2) \left[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i\, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \\
\times \langle \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out}|\, \mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\, |0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{10.101}
$$

依次处理出态中剩余粒子，推出实标量场的 **Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) 约化公式** [51]

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} &= \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out}\,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in}\rangle \\
&= \int \left[\prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j\, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(\partial_{y_j}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \left[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i\, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \\
&\quad \times \langle 0|\, \mathsf{T}[\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\, |0\rangle\,.
\end{aligned}
} \tag{10.102}
$$

这个公式表明，$n \to m$ 散射矩阵元由 $(n+m)$ 点关联函数 $G^{(n+m)}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ 决定。对于一个动量为 $\mathbf{p}_i$ 的入态粒子，需要对 $(n+m)$ 点关联函数中的一个实标量场算符 $\phi(x_i)$ 应用 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_{x_i}^2 + m^2)$，作 *Fourier* 变换 $\int \mathrm{d}^4 x_i\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}$，再乘上一个 $\mathrm{i}/\sqrt{Z}$ 因子；对于一个动量为 $\mathbf{q}_j$ 的出态粒子，需要对 $(n+m)$ 点关联函数中的一个实标量场算符 $\phi(y_j)$ 应用 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_{y_j}^2 + m^2)$，作 *Fourier* 变换 $\int \mathrm{d}^4 y_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}$，再乘上一个 $\mathrm{i}/\sqrt{Z}$ 因子。

在 LSZ 约化公式 (10.102) 中，入态粒子和出态粒子仅由 Fourier 变换因子指数上的正负号来区分。如果要把一个动量为 p^μ 的粒子从入态移动到出态，变换成动量为 k^μ 的反粒子，相应的 T 矩阵元只需要对原来的 T 矩阵元作动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$ 来得到，这就是由 (8.288) 式描述的**交叉对称性**。

利用分部积分，可以将 (10.102) 式中的各个 Klein-Gordon 微分算符作用到平面波解 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}$ 上面。具体来说，注意到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial^2\phi(x) &= \partial^\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_\mu\phi(x)] - (\partial^\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\partial_\mu\phi(x) \\
&= \partial^\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_\mu\phi(x)] - \partial_\mu[(\partial^\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\phi(x)] + (\partial^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\phi(x) \\
&= \partial^\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_\mu\phi(x) - (\partial_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\phi(x)] - p^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\phi(x),
\end{aligned} \tag{10.103}
$$

其中第一项是对全时空积分没有贡献的四维全散度，从而在 (10.102) 式中可作替换

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2 + m^2) \to -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(p_i^2 - m^2). \tag{10.104}
$$

类似地，也可作替换

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(\partial_{y_j}^2 + m^2) \to -\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(q_j^2 - m^2). \tag{10.105}
$$

于是，LSZ 约化公式 (10.102) 可改写为

$$
\mathrm{i}T_{fi} = \int \left[\prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j\, \frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(q_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \left[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i\, \frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}}\right]
$$

$$\times\langle 0|\mathsf{T}[\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle. \tag{10.106}$$

引入**动量空间中的 n 点关联函数**，它是 n 点关联函数 (10.76) 的 Fourier 变换，即

$$\boxed{\tilde{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)\equiv\int\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}^4x_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i\cdot x_i}\right)\langle 0|\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle.} \tag{10.107}$$

由此将 (10.106) 式简化为

$$\mathrm{i}T_{fi}=\left[\prod_{j=1}^{m}\frac{-\mathrm{i}(q_j^2-m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{-\mathrm{i}(p_i^2-m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\tilde{G}^{(n+m)}(q_1,\cdots,q_m,-p_1,\cdots,-p_n). \tag{10.108}$$

可见，T 矩阵元与动量空间中的多点关联函数有着非常直接的联系，入射粒子动量 p_i 和出射粒子动量 q_j 在后者里面具有相反的符号。由于入射和出射粒子都满足质壳条件，上式中所有的 $(p_i^2-m^2)$ 和 $(q_j^2-m^2)$ 因子都等于零。因此，非平庸的 T_{fi} 意味着 $\tilde{G}^{(n+m)}(p_1,\cdots,p_n,-q_1,\cdots,-q_m)$ 必须在所有 $p_i^2=m^2$ 和 $q_j^2=m^2$ 处都存在单极点。从而，T 矩阵元正比于动量空间多点关联函数的多重留数。

现在研究动量空间中多点关联函数的极点结构。利用完备性关系 (10.25) 在 (10.107) 式中插入完备集 $\{|\Psi\rangle\}$，得

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=\sum_{\Psi}\int\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}^4x_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i\cdot x_i}\right)\langle 0|\,\phi(x_1)\,|\Psi\rangle\,\langle\Psi|\,\mathsf{T}[\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle\,\theta(x_1^0-\tau)+\cdots, \tag{10.109}$$

其中 $\tau=\max(x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 是 $x_2^0,\cdots,x_n^0$ 中的最大值。这里只保留 x_1^0 为最大时刻的项，其它项省略不写。考虑单粒子态 $|\Psi\rangle=|\mathbf{p}\rangle$ 的贡献，由 (10.65) 式得

$$\langle 0|\,\phi(x_1)\,|\mathbf{p}\rangle=\langle\mathbf{p}|\,\phi(x_1)\,|0\rangle^*=\sqrt{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}, \tag{10.110}$$

并注意对单粒子态的求和方法 (10.52)，则 (10.109) 式的保留项包含以下积分，

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^4x_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x_1}\,\langle 0|\,\phi(x_1)\,|\mathbf{p}\rangle\,\theta(x_1^0-\tau)=\sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^4x_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p)\cdot x_1}\theta(x_1^0-\tau)\\&=\sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3x_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}_1}\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})x_1^0}\\&=\sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})x_1^0},\end{aligned} \tag{10.111}$$

第三步用了质壳条件 $p^0=E_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，第四步用到 (2.68) 式。

I_1 里面对 x_1^0 的积分具有

$$\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10.112}$$

的形式，但这样的积分并不收敛。为了得到收敛的结果，我们在被积函数中引进指数衰减因子 $\mathrm{e}^{-\epsilon t}$，其中无穷小量 $\epsilon > 0$，使得

$$\int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \to \int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\epsilon t} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)t}}{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)}\right|_\tau^\infty = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)\tau}}{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)} = \frac{\mathrm{i}}{\omega+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}. \tag{10.113}$$

从而，I_1 变成

$$\begin{aligned} I_1 &\to \sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\int_\tau^\infty \mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})x_1^0-\epsilon x_1^0} \\ &= \sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\,\frac{\mathrm{i}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}}+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})\tau} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}_1}+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}_1})\tau}. \end{aligned} \tag{10.114}$$

可见，I_1 包含因子

$$\begin{aligned} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}_1}+\mathrm{i}\epsilon} &= \frac{p_1^0+E_{\mathbf{p}_1}}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{(p_1^0-E_{\mathbf{p}_1})(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})+\mathrm{i}\epsilon(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})} \\ &= \frac{p_1^0+E_{\mathbf{p}_1}}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})} \xrightarrow{p_1^0\to E_{\mathbf{p}_1}} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}, \end{aligned} \tag{10.115}$$

注意第二步分母中 $\epsilon(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})>0$ 作为无穷小量等价于 ϵ。因此，在 $p_1^0\to E_{\mathbf{p}_1}$ 处单粒子态对 (10.109) 式保留项贡献一个 $\mathrm{i}\sqrt{Z}/(p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)$ 因子，正好对应于 6.4.1 小节中的 $\mathrm{i}\epsilon$ 处理方案。

将类似讨论应用到 $\tilde{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$ 中其它时空坐标的积分，得到一系列 $\mathrm{i}\sqrt{Z}/(p_i^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)$ 因子。结合 (10.108) 式，我们得知动量空间中 $(n+m)$ 点关联函数在 $p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}$, $q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}$ 处的极点结构为

$$\boxed{\tilde{G}^{(n+m)}(q_1,\cdots,q_m,-p_1,\cdots,-p_n) \xrightarrow[q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}} \left(\prod_{j=1}^m\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_j^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)\left(\prod_{i=1}^n\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_i^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)\mathrm{i}T_{fi},} \tag{10.116}$$

这是 **LSZ 约化公式**的另一种表述方式。可见，每个粒子对应的极点结构跟动量空间中 Feynman 传播子 (10.41) 形式类似，但还出现了场强重整化的贡献 $\sqrt{Z}$。

对于 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$，考虑入态有一对正反费米子，出态也有一对正反费米子，则 **LSZ 约化公式**的形式为

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\mathbf{q}_2^-,\lambda_2';\mathrm{out}\,\middle|\,\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\mathbf{p}_2^-,\lambda_2;\mathrm{in}\right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4y_1\,\mathrm{d}^4y_2\,\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y_1}}{\sqrt{Z_2}}\left[\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{y_1}-m)\right]_{b_1}\frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2\cdot y_2}}{\sqrt{Z_2}}\left[(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{y_2}+m)v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\right]_{b_2} \\ &\quad\times\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x_1}}{\sqrt{Z_2}}\left[(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{x_1}+m)u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\right]_{a_1}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x_2}}{\sqrt{Z_2}}\left[\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{x_2}-m)\right]_{a_2} \\ &\quad\times\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi_{b_1}(y_1)\bar{\psi}_{b_2}(y_2)\bar{\psi}_{a_1}(x_1)\psi_{a_2}(x_2)]\,|0\rangle\,. \end{aligned}} \tag{10.117}$$

10.4　多点关联函数的微扰论

第 6、7 章借助相互作用绘景讨论了用微扰论处理散射矩阵的方法，引进了 Feynman 图和 Feynman 规则。既然 LSZ 约化公式将散射矩阵与多点关联函数联系起来，我们也可以将微扰论研究转移到多点关联函数上面，从而得到与前述章节一致的结论，并为高阶计算和重整化过程作铺垫。

我们仍然以实标量场为例进行讨论。n 点关联函数 (10.76) 是用 Heisenberg 绘景中的场算符 $\phi(x)$ 定义的，但存在相互作用时我们不知道如何将 $\phi(x)$ 精确地表达出来，因而需要把它转化成渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 或 $\phi_{\text{out}}(x)$ 来处理。渐近场相当于具有物理质量 m 的自由场，它们在本章讨论中取代了原先由相互作用绘景的场算符所扮演的角色。类似于 Heisenberg 绘景与相互作用绘景之间的变换关系 (6.31)，我们假设 $\phi(x)$ 与 $\phi_{\text{in}}(x)$ 由含时幺正算符 $W(t)$ 联系起来：

$$\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t), \quad \pi(x) = W^\dagger(t)\pi_{\text{in}}(x)W(t), \tag{10.118}$$

其中 $\pi(x)$ 和 $\pi_{\text{in}}(x)$ 分别是 $\phi(x)$ 与 $\phi_{\text{in}}(x)$ 对应的共轭动量密度。

将系统的哈密顿量分解为

$$H(\phi,\pi) = H_0(\phi,\pi) + H_1(\phi,\pi), \tag{10.119}$$

其中 H_0 是自由部分，H_1 是相互作用部分。它们一般可表达为 ϕ、π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的全空间积分，就像 (2.124) 式那样。根据 Heisenberg 运动方程 (2.43)，$\phi(x)$ 满足

$$\mathrm{i}\partial_0\phi = [\phi, H(\phi,\pi)]. \tag{10.120}$$

类似地，$\phi_{\text{in}}(x)$ 的运动方程是

$$\mathrm{i}\partial_0\phi_{\text{in}} = [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}})], \tag{10.121}$$

其中**渐近哈密顿量** $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}})$ 形式相同，但需要将 H_0 中的*裸质量* m_0 换成*物理质量* m。比如，在实标量场的 ϕ^4 理论 (6.5) 中，

$$H_0(\phi,\pi) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m_0^2\phi^2], \quad H_1(\phi,\pi) = \frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x\,\phi^4, \tag{10.122}$$

而渐近哈密顿量为

$$H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla\phi_{\text{in}})^2 + m^2\phi_{\text{in}}^2]. \tag{10.123}$$

(10.118) 第一式两边对时间求导，有

$$\mathrm{i}\partial_0\phi = \mathrm{i}(\partial_0 W^\dagger)\phi_{\text{in}}W + \mathrm{i}W^\dagger(\partial_0\phi_{\text{in}})W + \mathrm{i}W^\dagger\phi_{\text{in}}\partial_0 W. \tag{10.124}$$

由 $W(t)$ 算符的幺正性条件 $W^\dagger W = \mathbb{I}$ 得到 $0 = \partial_0(W^\dagger W) = (\partial_0 W^\dagger)W + W^\dagger\partial_0 W$，即

$$\partial_0 W^\dagger = -W^\dagger(\partial_0 W)W^\dagger. \tag{10.125}$$

从而，利用 $\phi(x)$ 和 $\phi_{\rm in}(x)$ 的运动方程 (10.120) 和 (10.121) 推出

$$[\phi, H(\phi,\pi)] = {\rm i}\partial_0\phi = -{\rm i}W^\dagger(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\rm in}W + W^\dagger[\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})]W + {\rm i}W^\dagger\phi_{\rm in}\partial_0 W. \tag{10.126}$$

左边乘以 W，右边乘以 $W^\dagger$，得

$$W[\phi, H(\phi,\pi)]W^\dagger = -{\rm i}(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\rm in} + [\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})] + {\rm i}\phi_{\rm in}(\partial_0 W)W^\dagger. \tag{10.127}$$

注意 (10.118) 式等价于

$$\phi_{\rm in}(x) = W(t)\phi(x)W^\dagger(t), \quad \pi_{\rm in}(x) = W(t)\pi(x)W^\dagger(t), \tag{10.128}$$

而 $H(\phi,\pi)$ 是 ϕ、π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的积分，在里面所有相邻算符之间插入 $W^\dagger W = \mathbb{I}$，推出

$$WH(\phi,\pi)W^\dagger = H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}), \tag{10.129}$$

于是将 (10.127) 式化为

$$[\phi_{\rm in}, H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})] = -{\rm i}[(\partial_0 W)W^\dagger, \phi_{\rm in}] + [\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})] \tag{10.130}$$

这意味着

$$[{\rm i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}), \phi_{\rm in}] = 0, \tag{10.131}$$

其中

$$\boxed{\tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) \equiv H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) - H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}).} \tag{10.132}$$

将 ϕ 和 $\phi_{\rm in}$ 替换成 π 和 $\pi_{\rm in}$，重复上述推导过程，得到

$$[{\rm i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}), \pi_{\rm in}] = 0. \tag{10.133}$$

由于物理质量 m 与裸质量 m_0 不同，这里定义的 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$ 也与 $H_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$ 有所差别。此外，如果相互作用项不包含 $\phi(x)$ 的时空导数 $\partial_\mu\phi$，则 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$ 不依赖于 $\pi_{\rm in}(x)$，只依赖于 $\phi_{\rm in}(x)$。下面只考虑这种情况，将它改记为 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in})$。比如，在 ϕ^4 理论中，根据 (10.122) 和 (10.123) 式，有

$$\tilde{H}_1(\phi_{\rm in}) = \int {\rm d}^3x \left[\frac{1}{2}(m_0^2 - m^2)\phi_{\rm in}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\rm in}^4\right] = \int {\rm d}^3x \left(\frac{1}{2}\delta m^2\phi_{\rm in}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\rm in}^4\right), \tag{10.134}$$

其中

$$\boxed{\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2} \tag{10.135}$$

是裸质量与物理质量的平方差。

(10.131) 和 (10.133) 式表明，算符 $A \equiv {\rm i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\rm in})$ 与 $\phi_{\rm in}$、$\pi_{\rm in}$ 都是对易的。由于 $\phi_{\rm in}$ 和 $\pi_{\rm in}$ 是系统的正则变量，用它们可以构建一组算符完备集，而这组完备集中的任意算符都与 A 对易。这说明算符 A 必定正比于恒等算符 $\mathbb{I}$，即

$${\rm i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\rm in}) = c(t)\,\mathbb{I}, \tag{10.136}$$

其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的 c 数函数。将上式改写一下，得到 $\boldsymbol{W(t)}$ **的运动方程**

$$\boxed{\mathrm{i}\partial_0 W = \tilde{H}_1^c(t) W,} \tag{10.137}$$

其中

$$\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) + c(t) \tag{10.138}$$

是用入场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 表达出来的时间 t 的函数。这个方程与 6.2 节中时间演化算符的微分方程 (6.104) 形式相同，采用类似的求解方法，将解表达为

$$W(t) = W(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \tilde{H}_1^c(t_1) W(t_1), \tag{10.139}$$

重复迭代，利用时序乘积得到

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n\, \mathsf{T}[\tilde{H}_1^c(t_1) \cdots \tilde{H}_1^c(t_n)] W(t_0) && (10.140) \\ &= \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \tilde{H}_1^c(t')\right] W(t_0). && (10.141) \end{aligned}$$

在 6.2 节中，时间演化算符 $U(t,t_0)$ 由联系 Heisenberg 绘景和相互作用绘景的含时幺正算符 $V(t)$ 通过 (6.95) 式给出。现在渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 扮演了相互作用绘景的场算符的角色，因此应该用 $W(t)$ 取代 $V(t)$，将时间演化算符定义为

$$\boxed{U(t,t_0) \equiv W(t) W^\dagger(t_0) = \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \tilde{H}_1^c(t')\right].} \tag{10.142}$$

这个结果与 (6.119) 式类似，也是一个 **Dyson 级数**，只不过 $\tilde{H}_1^c(t')$ 取代了 $H_1^{\mathrm{I}}(t')$。这样定义的时间演化算符仍然具有 6.2 节所描述的性质。

接下来用渐近场来表达 n 点关联函数，由变换关系 (10.118) 得

$$\begin{aligned} & G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \langle 0| \mathsf{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)] |0\rangle \\ = & \langle 0| \mathsf{T}[W^\dagger(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)W(t_2)\cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)W(t_n)] |0\rangle \\ = & \langle 0| \mathsf{T}[W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)W(t_2) \\ & \qquad \times \cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)W(t_n)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)] |0\rangle \\ = & \langle 0| W^\dagger(+\infty)\, \mathsf{T}[U(+\infty,t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)U(t_1,t_2)\phi_{\text{in}}(x_2) \\ & \qquad \times \cdots U(t_{n-1},t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)U(t_n,-\infty)]\, W(-\infty) |0\rangle\,. \end{aligned} \tag{10.143}$$

第三步在方括号中最左和最右分别插入了 $W^\dagger(+\infty)W(+\infty) = \mathbb{I}$ 和 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty) = \mathbb{I}$，最后一步改写成时间演化算符的形式。由于时序乘积里面的含时算符能够任意移动，可以让里面的时间演化算符相邻排列，再由乘法规则 (6.97) 得到

$$U(+\infty,t_1)U(t_1,t_2)\cdots U(t_{n-1},t_n)U(t_n,-\infty) = U(+\infty,-\infty), \tag{10.144}$$

从而推出

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|\,W^\dagger(+\infty)\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)U(+\infty,-\infty)]\,W(-\infty)\,|0\rangle\,. \tag{10.145}$$

现在需要知道 $W(+\infty)$ 和 $W(-\infty)$ 对真空态 $|0\rangle$ 作用的结果。设 $|\Psi_p;{\rm in}\rangle$ 是包含一个四维动量为 p^μ 的粒子的任意入态，表达为

$$|\Psi_p;{\rm in}\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},{\rm in}}\,|\Psi;{\rm in}\rangle\,, \tag{10.146}$$

其中 $|\Psi;{\rm in}\rangle$ 包含除这个粒子之外的其它成分。将 (10.99) 式改为对入算符使用，得

$$a_{\mathbf{p},{\rm in}}=\frac{\rm i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int {\rm d}^3x\,{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\phi_{\rm in}(x), \tag{10.147}$$

从而 $W(-\infty)\,|0\rangle$ 与 $|\Psi_p;{\rm in}\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\Psi_p;{\rm in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle\;&=\;\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\langle\Psi;{\rm in}|\,a_{\mathbf{p},{\rm in}}W(-\infty)\,|0\rangle={\rm i}\int {\rm d}^3x\,{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;{\rm in}|\,\phi_{\rm in}(x)W(-\infty)\,|0\rangle\\&=\;{\rm i}\int {\rm d}^3x\,{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;{\rm in}|\,W(t)\phi(x)W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{10.148}$$

最后一步用了变换关系 (10.128)。对上式取 $t\to-\infty$ 的极限，由渐近条件 (10.70) 得

$$\langle\Psi_p;{\rm in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle={\rm i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int {\rm d}^3x\,{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;{\rm in}|\,W(t)\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle\,, \tag{10.149}$$

其中

$$\begin{aligned}{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}[W(t)\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)]\;&=\;{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\partial_0W(t)\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)+{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}W(t)\partial_0\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)\\&\quad+{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}W(t)\phi_{\rm in}(x)\partial_0W^\dagger(t)-(\partial_0{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x})W(t)\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)\\&=\;W(t)[{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\phi_{\rm in}(x)]W^\dagger(t)\\&\quad+{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}[\partial_0W(t)\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)+W(t)\phi_{\rm in}(x)\partial_0W^\dagger(t)],\end{aligned} \tag{10.150}$$

故

$$\begin{aligned}&\langle\Psi_p;{\rm in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle\\=\;&{\rm i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int {\rm d}^3x\;\langle\Psi;{\rm in}|\,W(t)[{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\phi_{\rm in}(x)]W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle\\&+{\rm i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int {\rm d}^3x\,{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\,\langle\Psi;{\rm in}|\,[\partial_0W(t)\phi_{\rm in}(x)W^\dagger(t)+W(t)\phi_{\rm in}(x)\partial_0W^\dagger(t)]W(-\infty)\,|0\rangle\\=\;&\sqrt{2E_{\mathbf{p}}Z}\;\langle\Psi;{\rm in}|\,W(-\infty)a_{\mathbf{p},{\rm in}}\,|0\rangle\\&+{\rm i}\lim_{t\to-\infty}\int {\rm d}^3x\,{\rm e}^{{\rm i}p\cdot x}\,\langle\Psi;{\rm in}|\,[\partial_0W(t)\phi(x)+W(t)\phi(x)\partial_0W^\dagger(t)W(t)]\,|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{10.151}$$

第一项的推导用到 (10.147) 式和 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty)=\mathbb{I}$，由于 $a_{\mathbf{p},{\rm in}}\,|0\rangle=0$，此项贡献为零。第二项的推导用到渐近条件 (10.70)。根据变换关系 (10.118)，第二项中的算符化为

$$\partial_0W(t)\phi(x)+W(t)\phi(x)\partial_0W^\dagger(t)W(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t) + \phi_{\rm in}(x)W(t)\partial_0 W^\dagger(t)W(t) \\
&= \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t) + \phi_{\rm in}(x)\{\partial_0[W(t)W^\dagger(t)] - \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\}W(t) \\
&= [\partial_0 W(t)W^\dagger(t), \phi_{\rm in}(x)]W(t) = -{\rm i}[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\rm in}(x)]W(t),
\end{aligned} \tag{10.152}
$$

注意第二步中 $W(t)W^\dagger(t) = \mathbb{I}$。最后一步用到由运动方程 (10.137) 推出的 $\partial_0 W(t)W^\dagger(t) = -{\rm i}\tilde{H}_1^c(t)$。我们已经假设 $\tilde{H}_1^c(t)$ 只依赖于 $\phi_{\rm in}(x)$，因此等时对易关系保证 $[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\rm in}(x)] = 0$，从而 (10.151) 式第二项的贡献也是零。于是

$$
\langle \Psi_p; {\rm in}| \, W(-\infty) \, |0\rangle = 0. \tag{10.153}
$$

由于 $|\Psi_p; {\rm in}\rangle$ 是至少包含一个粒子的任意入态，上式表明态矢 $W(-\infty)\,|0\rangle$ 不包含任何粒子，它至多与真空态相差一个相位因子 c_-，即

$$
W(-\infty)\,|0\rangle = c_-\,|0\rangle\,. \tag{10.154}
$$

类似地，可以推出

$$
W(+\infty)\,|0\rangle = c_+\,|0\rangle\,, \tag{10.155}
$$

其中 c_+ 是另一个相位因子。

由真空态的归一化条件和 $W(t)$ 的幺正性得

$$
\begin{aligned}
1 &= \langle 0|0\rangle = \langle 0|\, W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\, W^\dagger(+\infty)U(+\infty,-\infty)W(-\infty)\,|0\rangle = c_+^* c_-\,\langle 0|\, U(+\infty,-\infty)\,|0\rangle\,,
\end{aligned} \tag{10.156}
$$

故

$$
c_+^* c_- = \frac{1}{\langle 0|\, U(+\infty,-\infty)\,|0\rangle}. \tag{10.157}
$$

结合 Dyson 级数 (10.142)，(10.145) 式化为

$$
\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) &= c_+^* c_-\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)U(+\infty,-\infty)]\,|0\rangle \\
&= \frac{\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)\exp\left[-{\rm i}\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}t\,\tilde{H}_1^c(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\,\mathsf{T}\exp\left[-{\rm i}\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}t\,\tilde{H}_1^c(t)\right]|0\rangle}.
\end{aligned} \tag{10.158}
$$

将 (10.138) 式代入上式的分子和分母中，则 $\tilde{H}_1^c(t)$ 中的 $c(t)$ 贡献一个因子 $\exp\left[-{\rm i}\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}t\,c(t)\right]$。分子和分母中的这个共同因子相互抵消，因此 $c(t)$ 实际上对 n 点关联函数没有贡献，可以用 (10.132) 式定义的 $\tilde{H}_1(t) = \tilde{H}_1(\phi_{\rm in})$ 替代 $\tilde{H}_1^c(t)$，得

$$
G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}}\,\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)\exp\left[-{\rm i}\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}t\,\tilde{H}_1(t)\right]\right\}|0\rangle\,, \tag{10.159}
$$

其中归一化因子

$$
\mathcal{N} \equiv \langle 0|\,\mathsf{T}\exp\left[-{\rm i}\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}t\,\tilde{H}_1(t)\right]|0\rangle \tag{10.160}
$$

只是一个相位因子。

设 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 是 $\tilde{H}_1(t)$ 的空间密度，它是用渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 表达的，满足

$$\tilde{H}_1(t) = \int \mathrm{d}^3x\, \tilde{\mathcal{H}}_1(x). \tag{10.161}$$

把上式代入到 (10.159) 式中，将指数函数展开，得到 $\boldsymbol{n}$ **点关联函数的微扰级数**

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) &= \frac{1}{\mathcal{N}}\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)]\,|0\rangle\,, \end{aligned} \tag{10.162}$$

其中归一化因子展开为

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \langle 0|\,\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]|0\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)]\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{10.163}$$

可以利用 Wick 定理处理这个微扰级数，并导出 Feynman 图。

10.5 多点关联函数的 Feynman 图

本节在 ϕ^4 理论中讨论多点关联函数的微扰论，并画出 Feynman 图。根据 (10.134) 式，ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分，

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x), \tag{10.164}$$

其中

$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2}\,\delta m^2\phi_{\text{in}}^2(x), \tag{10.165}$$

$$\mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!}\,\phi_{\text{in}}^4(x). \tag{10.166}$$

可见，$\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{H}_\lambda$ 之外，还出现了 ϕ_{in} 的二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$，它跟**质量重整化** (mass renormalization) 有关。根据 7.3 节讨论，$\mathcal{H}_\lambda$ 在位置空间中给出的顶点规则为 (7.120)，类似地，$\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对应的位置空间“顶点规则”是

$$= -\mathrm{i}\delta m^2\int \mathrm{d}^4x\,, \tag{10.167}$$

相应的动量空间规则为

$$= -\mathrm{i}\delta m^2. \tag{10.168}$$

10.5.1　两点关联函数的 Feynman 图

现在将两点关联函数 $G^{(2)}(x_1,x_2)$ 与归一化因子 $\mathcal{N}$ 的乘积展开，得

$$\begin{aligned}\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2) &= \langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\exp\left[-{\rm i}\int {\rm d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle \\ &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle - \frac{{\rm i}\delta m^2}{2}\int {\rm d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^2(x)]\,|0\rangle \\ &\quad -\frac{{\rm i}\lambda}{4!}\int {\rm d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^4(x)]\,|0\rangle + \cdots\,, \end{aligned} \tag{10.169}$$

这里省略了高阶贡献。下面处理前三项中的真空期待值，应用 Wick 定理 (6.166) 将时序乘积转化为正规乘积。(6.144) 式表明，任意多个场算符的正规乘积的真空期待值为零，因此，只有正规乘积中所有的场算符都发生了缩并，才能得到非平庸的结果，我们称这种情况为**完全缩并**。

(10.169) 式第一项是 6.4.1 小节讨论的实标量场 Feynman 传播子，

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)}]\,|0\rangle = D_{\rm F}(x_1-x_2) = D_{12}. \tag{10.170}$$

为便于书写，这里引进 Feynman 传播子的缩写记号，定义为

$$D_{ij}\equiv D_{\rm F}(x_i-x_j)=D_{ji},\quad D_{xy}\equiv D_{\rm F}(x-y)=D_{yx},\quad D_{ix}\equiv D_{\rm F}(x_i-x)=D_{xi}. \tag{10.171}$$

(10.169) 式第二项和第三项中的真空期待值分解为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^2(x)]\,|0\rangle &= A_2^2\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)}]\,|0\rangle \\ &\quad + \langle 0|\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)}\overbracket{\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)}]\,|0\rangle \\ &= 2D_{1x}D_{x2}+D_{12}D_{xx}, \end{aligned} \tag{10.172}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^4(x)]\,|0\rangle &= C_4^2A_2^2\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)}]\,|0\rangle \\ &\quad + C_3^1\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\overbracket{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)}\overbracket{\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)}\overbracket{\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)}]\,|0\rangle \\ &= 12D_{1x}D_{xx}D_{x2}+3D_{12}D_{xx}D_{xx}. \end{aligned} \tag{10.173}$$

将这些结果代回 (10.169) 式，得

$$\begin{aligned}\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2) &= D_{12}-{\rm i}\delta m^2\int {\rm d}^4x\left(D_{1x}D_{x2}+\frac{1}{2}D_{12}D_{xx}\right) \\ &\quad -{\rm i}\lambda\int {\rm d}^4x\left(\frac{1}{2}D_{1x}D_{xx}D_{x2}+\frac{1}{8}D_{12}D_{xx}D_{xx}\right)+\cdots \end{aligned}$$

$=$

(10.174)

第二步根据**位置空间 Feynman 规则**画出相应的 Feynman 图，而第一步中 3 个分数因子的分母正是 Feynman 图的对称性因子。2 点关联函数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ 的宗量是两个时空点 x_1^μ 和 x_2^μ，称为**外点** (external point)，在**多点关联函数的 Feynman 图**中用**圆点**表示。一般地，n 点关联函数 $G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n)$ 描述 n 个外点之间的关联，根据 LSZ 约化公式 (10.102)，这 n 个外点对应于 T 矩阵元相应 Feynman 图中的 n 条外线。第一步有 3 项包含 D_{12}，它在第二步中对应于从 x_1 到 x_2 的 Feynman 传播子，在第三步中合并这 3 个同类项，将共同因子 D_{12} 的图形提取出来，得到圆括号中的 1 加上两个气泡图。气泡图的特点是不与任何外点相连。像第二步第一、第二、第四幅图这样，将各个外点都连接起来且不包含气泡图的 Feynman 图称为**连通图** (connected diagram)。可见，第三步第一项因式分解为连通图与 1 加两个气泡图的乘积，这样的**因子化** (factorization) 是普遍的，下面作一般论述。

归一化因子 $\mathcal{N}$ 的表达式 (10.163) 中对所有时空点都进行积分，而相应的 Feynman 图不包含任何外点，必然对应着各种各样的**气泡图**。我们可以认为 $\mathcal{N}$ 描述了从真空态到真空态之间的跃迁过程。在 ϕ^4 理论中，有

$$\mathcal{N} = \langle 0| \mathsf{T} \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2}\,\delta m^2 \phi_{\mathrm{in}}^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\,\phi_{\mathrm{in}}^4(x)\right]\right\} |0\rangle$$

(10.175)

这里前三项正是 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 表达式 (10.174) 倒数第二行圆括号中的项。由此可以猜测，

> n 点关联函数 (10.162) 中的 $1/\mathcal{N}$ 因子正好**抵消**了所有气泡图对真空期待值 $\langle 0| \mathsf{T}\left\{\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle$ 的贡献，故相关 Feynman 图都是**连通图**。

接下来给出证明。

证明　将 (10.162) 式化为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)]\,|0\rangle\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\\
&\times\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j})\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
&\times\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{k-j}}{(k-j)!}\frac{(-\mathrm{i})^j}{j!}\\
&\times\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_{k-j}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j})\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
&\times\int \mathrm{d}^4y_{k-j+1}\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\,.
\end{aligned}\tag{10.176}
$$

第二步应用 Wick 定理，只保留具有非平庸贡献的完全缩并。注意完全缩并的结果必定是 c 数，可以用真空期待值表示。从而，可将相关贡献分解为两个真空期待值之积，要求第一个真空期待值只包含连通图的贡献，第二个真空期待值只包含气泡图的贡献。对于某个 k 值，挑选 j 个 $\tilde{\mathcal{H}}_1$ 放在第二个真空期待值中的方法有 $C_k^j=k!/[j!(k-j)!]$ 种，因而需要考虑这个因子，再对 j 求和。第三步拆解了积分，并利用推广的阶乘定义 (3.48) 将 j 的求和上限扩展到无穷大。

作变量替换，令 $i\equiv k-j$，把两个求和分开，得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\\
=&\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^i}{i!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_i\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_i)\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
&\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^j}{j!}\int \mathrm{d}^4y_{i+1}\cdots\mathrm{d}^4y_{i+j}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\,,
\end{aligned}\tag{10.177}
$$

这里的第二个求和式正是归一化因子 (10.163)：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^j}{j!}\int \mathrm{d}^4y_{i+1}\cdots\mathrm{d}^4y_{i+j}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})]\,|0\rangle\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^j}{j!}\int \mathrm{d}^4y_{i+1}\cdots\mathrm{d}^4y_{i+j}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\,.
\end{aligned}\tag{10.178}
$$

将归一化因子从 (10.177) 式两边同时约去，推出

$$
\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=&\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^i}{i!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_i\\
&\times\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_i)\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \text{包含 } n \text{ 个外点 } x_1, \cdots, x_n \text{ 的所有连通图}$$

$=$

, (10.179)

第三步用**灰色圆形**表示所有连通图之和。**证毕**。

下面考察二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 的影响，考虑各种连通图，那么它对两点关联函数的贡献为

$$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0| \mathsf{T}\left\{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2) \exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{H}_{\delta m^2}(x)\right]\right\}|0\rangle$$

$=$

$$= D_{12} - \mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4x\, D_{1x}D_{x2} + (-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, D_{1x}D_{xy}D_{y2} + \cdots \tag{10.180}$$

类似于 (10.40) 式，$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, 0)$ 的 Fourier 变换是

$$\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) \equiv \int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, 0). \tag{10.181}$$

首先，(10.180) 式第一项对 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献是动量空间中的 Feynman 传播子 (10.41)：

$$\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} =$$

, (10.182)

第二步画出相应的动量空间 Feynman 图。其次，(10.180) 式第二项对 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献为

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} D_{\mathrm{F}}(x_1 - x) D_{\mathrm{F}}(x) \\
&= -\mathrm{i}\delta m^2 \int \frac{\mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4p_1\, \mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^8}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot(x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
&= -\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4p_1\, \mathrm{d}^4p_2\, \delta^{(4)}(p_1 - p)\delta^{(4)}(p_2 - p_1) \frac{\mathrm{i}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}\delta m^2)\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} = \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) =
\end{aligned}$$

, (10.183)

最后一步根据动量空间 Feynman 规则 (10.168) 画出 Feynman 图。最后，(10.180) 式第三项对 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献是

$$\begin{aligned}
&(-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} D_{\mathrm{F}}(x_1 - x) D_{\mathrm{F}}(x - y) D_{\mathrm{F}}(y) \\
&= (-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4p_1\, \mathrm{d}^4p_2\, \mathrm{d}^4p_3}{(2\pi)^{12}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot(x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot(x - y)}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_3\cdot y}}{p_3^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \mathrm{d}^4p_1\,\mathrm{d}^4p_2\,\mathrm{d}^4p_3\,\delta^{(4)}(p_1-p)\delta^{(4)}(p_2-p_1)\delta^{(4)}(p_3-p_2) \\
&\quad \times \frac{\mathrm{i}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{p_3^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}\delta m^2)\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}\delta m^2)\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} \\
&= \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) =
\end{aligned}
$$

$$.\qquad (10.184)$$

综上，二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对动量空间传播子 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的贡献为

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) &= \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \cdots \\
&=
\end{aligned}
$$

$$(10.185)$$

从上述计算可以看到，对多点关联函数作 Fourier 变换之后，作时空坐标和四维动量的积分，则位置空间中的 Feynman 传播子 D_{F} 转换为相应的动量空间 Feynman 传播子 $\tilde{D}_{\mathrm{F}}$，而与顶点联系在一起的时空积分已经用掉了，这说明剩下的因子正好可以用动量空间中的 Feynman 规则（见 (10.168) 式和 7.3 节末）描述。由此得到一个普遍结论：

> 多点关联函数的 **Fourier 变换**对应于**动量空间**中的 Feynman 图。

根据这个结论，我们可以利用动量空间 Feynman 规则直接计算多点关联函数的 Fourier 变换。

(10.185) 式是一个等比级数，可改写为

$$
\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) = \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)\sum_{k=0}^{\infty}[(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)]^k = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\delta m^2}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)^k. \qquad (10.186)
$$

由等比级数公式

$$
\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z|<1, \qquad (10.187)
$$

得

$$
\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-z/a} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k, \quad |z|<|a|. \qquad (10.188)
$$

δm^2 是微扰论中的小量，取 $a = p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$ 和 $z=\delta m^2$，有

$$
\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2-\delta m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m_0^2+\mathrm{i}\epsilon}, \qquad (10.189)
$$

第二步用到定义式 (10.135)。可见，二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对两点关联函数的影响是将极点位置从物理质量平方 m^2 移动到裸质量平方 m_0^2 处。

接下来考虑 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{H}_\lambda$ 对两点关联函数的影响，它对两点关联函数的贡献为

$$
G^{(2)}_{\lambda}(x_1,x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}}\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{H}_\lambda(x)\right]\right\}|0\rangle\,, \qquad (10.190)
$$

作 Fourier 变换，将各种连通图画出来，得

$$\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) \equiv \int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} G_\lambda^{(2)}(x_1, 0) =$$

$$=$$

$$+$$

$$+ \cdots \tag{10.191}$$

在这些连通图中，第三和第六幅图是可以约化的。如果从第三幅图中移除连接中间两个点的内线，那么它会分割成两个不相连的部分。如果从第六幅图中移除连接第三和第四个点之间的内线，它也会分割成两个不相连的部分。实际上，更重要的图是像第二、第四、第五幅图这样，移除任意一条线之后不会分割成两个不相连的部分，这种图称为**单粒子不可约图** (one-particle irreducible diagram)，简称 **1PI 图**。注意第一幅图并不属于 1PI 图。利用 1PI 图可以约化各种连通图，比如第三幅图约化成两个第二幅图，第六幅图约化成第四和第二幅图。

将所有由 $\mathcal{H}_\lambda$ 贡献的两点关联函数 1PI 图记作

$$-\mathrm{i}\Pi(p^2) =$$

$$=$$

(10.192)

这些 1PI 图都属于我们在 7.3 节讨论过的 ϕ 粒子**自能图**。注意，在定义上 1PI 自能图 $-\mathrm{i}\Pi(p^2)$ 的表达式中并不包含两个连接外点的 Feynman 传播子。Lorentz 对称性保证 $\Pi(p^2)$ 是 p^2 的函数。$\Pi(p^2)$ 的领头阶是 λ^1 阶，因而它是微扰论中的小量。于是，可以将 $\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p)$ 表达为

$$\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) =$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \cdots \\
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right]^k = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}.
\end{aligned} \tag{10.193}
$$

最后一步用到 (10.188) 式。上式表明相互作用项 $\mathcal{H}_\lambda$ 也会影响两点关联函数的极点位置。

将 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 和 $\mathcal{H}_\lambda$ 的贡献合并起来，动量空间中的两点关联函数（即完整的传播子）是

$\tilde{G}^{(2)}(p) =$

$$
= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\delta m^2 + \Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right]^k = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}. \tag{10.194}
$$

在单粒子态极点附近，$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 Källén-Lehmann 谱表示 (10.61) 的第一项相同，即

$$
\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon} \xrightarrow{p^0 \to E_{\mathbf{p}}} \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}. \tag{10.195}
$$

可见，为了保持极点位于物理质量 m 的平方处，必须要求

$$
\boxed{\delta m^2 = -\Pi(m^2).} \tag{10.196}
$$

这是一个**质量重整化条件**，它表明**质量重整化常数** δm^2 由 1PI 自能图的 $\Pi(p^2)$ 所决定。由于 $\Pi(p^2)$ 的领头阶是 λ^1 阶，δm^2 的领头阶也是 λ^1 阶。在圈图计算中，$\Pi(p^2)$ 是发散的，因而 δm^2 也是发散的。不过，它们相加时发散部分相互抵消，因此对传播子的修正量

$$
f(p^2) \equiv \delta m^2 + \Pi(p^2) \tag{10.197}
$$

是有限的 $\mathcal{O}(\lambda)$ 小量。由于二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 的贡献抵消了相互作用项 $\mathcal{H}_\lambda$ 对极点位置的影响，我们称 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 为**质量抵消项** (mass counter term)。换句话说，正是因为在高阶计算中相互作用项的贡献移动了极点位置，我们需要从拉氏量中的裸质量平方 m_0^2 里面分离出 δm^2 来抵消它的影响。

在 $p^2 = m^2$ 附近将 $f(p^2)$ 展开，得

$$
\begin{aligned}
f(p^2) &\simeq \delta m^2 + \Pi(m^2) + (p^2 - m^2) \left.\frac{\mathrm{d}f(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2] \\
&= (p^2 - m^2) \left.\frac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2].
\end{aligned} \tag{10.198}
$$

从而 (10.194) 式在 $p^2 = m^2$ 附近近似为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon} &\simeq \frac{\mathrm{i}}{(p^2 - m^2)\left[1 - \mathrm{d}\Pi(p^2)/\mathrm{d}p^2|_{p^2=m^2}\right] + \mathrm{i}\epsilon} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\left[1 - \left.\frac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}\right]^{-1},\end{aligned} \tag{10.199}$$

与 (10.195) 式比较，推出

$$\boxed{Z^{-1} = 1 - \left.\frac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}.} \tag{10.200}$$

这是一个**场强重整化条件**，它表明场强重整化常数 Z 也是由 1PI 自能图 $\Pi(p^2)$ 决定的，而且

$$Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda). \tag{10.201}$$

10.5.2 四点关联函数的 Feynman 图

本小节讨论四点关联函数，展开到 λ^1 阶，有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle \\ &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)]\,|0\rangle \\ &\quad -\frac{\mathrm{i}\delta m^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)\phi_{\mathrm{in}}^2(x)]\,|0\rangle \\ &\quad -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)\phi_{\mathrm{in}}^4(x)]\,|0\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2).\end{aligned} \tag{10.202}$$

首先，(10.202) 式第一项给出的连通图为

$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$$= D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}, \tag{10.203}$$

这三个图各自描述两个独立传播的自由粒子，与散射过程无关。其次，(10.202) 式第二项给出的连通图为

$G_{\delta m^2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$$= -\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4x\,(D_{1x}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{x4} + D_{1x}D_{x3}D_{24} + D_{13}D_{2x}D_{x4} + D_{1x}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{x3}). \tag{10.204}$$

这些图只是在各个自由传播子上加入质量重整化常数的修正，跟散射过程也没有关系。

最后，(10.202) 式第三项给出两种连通图，第一种连通图为

$G^{(4)}_{\lambda,1}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$

$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\,(D_{1x}D_{xx}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{xx}D_{x4} + D_{1x}D_{xx}D_{x3}D_{24} + D_{13}D_{2x}D_{xx}D_{x4} + D_{1x}D_{xx}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{xx}D_{x3}), \tag{10.205}$$

这些图只是在各个自由传播子上加入单圈自能图的修正，与散射过程无关；第二种连通图为

$G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$

$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, D_{1x}D_{2x}D_{3x}D_{4x}. \tag{10.206}$$

在这幅连通图中，所有外点彼此都连接在一起，像这样的连通图称为**完全连通图** (fully connected diagram)。只有这种完全连通图才会贡献到 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程，接下来对它应用 LSZ 约化公式 (10.102) 以得到相应的 T 矩阵元。为此，先计算 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_x^2 + m^2)$ 对 Feynman 传播子 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 的作用，根据 (6.210) 式推出

$$(\partial_x^2 + m^2)D_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(\partial_x^2 + m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(-p^2 + m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}, \tag{10.207}$$

由 (6.279) 式得

$$\boxed{(\partial_x^2 + m^2)D_{\mathrm{F}}(x-y) = -\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y).} \tag{10.208}$$

可见，Feynman 传播子 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 是 Klein-Gordon 算符 $(\partial_x^2 + m^2)$ 的 *Green 函数*。

将 (10.206) 式代入 LSZ 约化公式 (10.102)，得到 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程的 T 矩阵元为

$$\mathrm{i}T_{fi} = \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\right)^4 \int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1 + q_2\cdot x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x_3 + p_2\cdot x_4)}$$

$$
\begin{aligned}
&\times(\partial_{x_1}^2+m^2)(\partial_{x_2}^2+m^2)(\partial_{x_3}^2+m^2)(\partial_{x_4}^2+m^2)G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
=&-\mathrm{i}\lambda\frac{\mathrm{i}^4}{Z^2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x_3+p_2\cdot x_4)}(\partial_{x_1}^2+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_1-x)\\
&\times(\partial_{x_2}^2+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_2-x)(\partial_{x_3}^2+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_3-x)(\partial_{x_4}^2+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_4-x)\\
=&-\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x_3+p_2\cdot x_4)}\\
&\times\delta^{(4)}(x_1-x)\delta^{(4)}(x_2-x)\delta^{(4)}(x_3-x)\delta^{(4)}(x_4-x)\\
=&-\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1+p_2-q_1-q_2)\cdot x}=-\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2).
\end{aligned}
\tag{10.209}
$$

与 (6.275) 式比较，则 $\phi\phi\to\phi\phi$ 散射过程的不变振幅为

$$
\mathrm{i}\mathcal{M}=-\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}=-\mathrm{i}\lambda+\mathcal{O}(\lambda^2),
\tag{10.210}
$$

第二步用到 (10.201) 式。在 λ^1 阶，这里得到的 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 与 7.3 节中的领头阶计算结果 (7.121) 相同。可以看到，

> 在微扰论的领头阶计算中，可取 $Z=1$ 和 $\delta m^2=0$，即不需要考虑重整化常数的影响。

这说明我们在第 7、8、9 章中关于领头阶过程的计算方法是合理的。

对 (10.206) 式作 Fourier 变换，得

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_{\lambda,2}^{(4)}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)=&\int\left(\prod_{i=1}^4\mathrm{d}^4x_i\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-p_1\cdot x_3-p_2\cdot x_4)}G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
=&-\mathrm{i}\lambda\int\mathrm{d}^4x\left(\prod_{i=1}^4\mathrm{d}^4x_i\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-p_1\cdot x_3-p_2\cdot x_4)}\\
&\times D_{\mathrm{F}}(x_1-x)D_{\mathrm{F}}(x_2-x)D_{\mathrm{F}}(x_3-x)D_{\mathrm{F}}(x_4-x)\\
=&-\mathrm{i}\lambda\int\mathrm{d}^4x\left(\prod_{i=1}^4\mathrm{d}^4x_i\right)\left(\prod_{j=1}^4\frac{\mathrm{d}^4k_j}{(2\pi)^4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-p_1\cdot x_3-p_2\cdot x_4)}\\
&\times\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot(x_1-x)}}{k_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot(x_2-x)}}{k_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3\cdot(x_3-x)}}{k_3^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_4\cdot(x_4-x)}}{k_4^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\
=&-\mathrm{i}\lambda\int\left(\prod_{j=1}^4\mathrm{d}^4k_j\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3+k_4)\\
&\times\delta^{(4)}(k_1-q_1)\delta^{(4)}(k_2-q_2)\delta^{(4)}(k_3+p_1)\delta^{(4)}(k_4+p_2)\\
&\times\frac{\mathrm{i}}{k_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k_3^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k_4^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\
=&(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\\
&\times(-\mathrm{i}\lambda)\frac{\mathrm{i}}{q_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{q_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\times$$

$$. \tag{10.211}$$

可见，这个结果也对应于动量空间中的 *Feynman* 图。不过，额外出现了一个表征能动量守恒的 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$ 因子。毕竟我们之前使用的动量空间 Feynman 规则是针对不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 设置的，而动量空间中的多点关联函数通过 (10.116) 式联系着 T 矩阵元 $\mathrm{i}T_{fi}$，后者相对于 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 就是多了这个因子。由另一种形式的 LSZ 约化公式 (10.116)，有

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)\xrightarrow[q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{i}T_{fi}, \tag{10.212}$$

与 (10.211) 式比较，同样可以得到 $\phi\phi\to\phi\phi$ 散射过程的 T 矩阵元 (10.209)。

10.5.3　切断 Feynman 图

本小节讨论在微扰论中考虑所有阶贡献时的形式结果。注意，(10.211) 式只包含 λ^1 阶的贡献，里面没有出现场强重整化常数 Z。另一方面，LSZ 约化公式 (10.212) 中的四点关联函数原则上包括了**所有阶贡献**的四点连通图，因而每个外点都会联系着一个完整传播子，受到 Z 的影响。结合完整传播子的形式 (10.61)，动量空间中完整四点关联函数的 Feynman 图结构应该是

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)\xrightarrow[q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}}\frac{\mathrm{i}Z}{q_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}Z}{q_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}Z}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}Z}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}T_{fi}}{(\sqrt{Z})^4}$$

$$=$$

$$, \tag{10.213}$$

即每个外点贡献一个 $\mathrm{i}Z/(q_i^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)$ 或 $\mathrm{i}Z/(p_i^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)$ 形式的完整传播子。将与外点相连的所有完整传播子从 Feynman 图上切除，得到的部分称为**切断** (amputated) Feynman 图，在上图中用 “Amp.” 标记。将四个完整传播子从 $\tilde{G}^{(4)}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)$ 的 Feynman 图中抽取出来，得到

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)\xrightarrow[q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}}\frac{\mathrm{i}Z}{q_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}Z}{q_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}Z}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}Z}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$$

$$\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\times$$

. (10.214)

这里还抽出了表征能动量守恒的 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$ 因子，从而剩余的切断 Feynman 图直接对应于动量空间 Feynman 规则。

比较 (10.213) 和 (10.214) 式，推出 T 矩阵元的形式为

$$\mathrm{i}T_{fi}=(\sqrt{Z})^4(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\times$$

, (10.215)

从而不变振幅表达成

$$\mathrm{i}\mathcal{M}=(\sqrt{Z})^4\times$$

. (10.216)

可见，除了用动量空间 Feynman 规则计算所有**切断的连通 Feynman 图**之外，还要乘上 $(\sqrt{Z})^4$ 因子才能得到正确的不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$。推广到任意 $2\to n$ 散射过程，不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M}=(\sqrt{Z})^{n+2}\times$$

. (10.217)

即每条外线贡献一个 $\sqrt{Z}$ 因子，这个因子修正了外线的场强。在领头阶计算中，这些 $\sqrt{Z}$ 因子都是 1，无关紧要；但在更高阶计算中必须把它们考虑进来才能获得正确的结果。

10.6 光学定理和不稳定粒子

在量子散射理论中，概率守恒体现为 S 算符的**幺正性**，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的**光学定理** (optical theorem)。

将 S 算符的分解式 $S=\mathbb{I}+\mathrm{i}T$ 代入幺正性条件，得到

$$\mathbb{I}=S^\dagger S=(\mathbb{I}-\mathrm{i}T^\dagger)(\mathbb{I}+\mathrm{i}T)=\mathbb{I}+\mathrm{i}(T-T^\dagger)+T^\dagger T, \tag{10.218}$$

可见，

$$-\mathrm{i}(T-T^\dagger)=T^\dagger T. \tag{10.219}$$

将上式右边放到双粒子态 $\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathrm{in}|$ 和 $|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{in}\rangle$ 之间，得到 $\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathrm{in}|\,T^\dagger T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{in}\rangle$，下面省略“in”记号。考虑在其中插入一组中间态的完备集，参考单粒子态的完备性关系 (10.51)，任意粒子态 $|\{\mathbf{q}_i\}\rangle$ 的完备性关系表达成

$$\sum_n\left(\prod_{i=1}^n\int\frac{\mathrm{d}^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}}\right)|\{\mathbf{q}_i\}\rangle\langle\{\mathbf{q}_i\}|=\mathbb{I}, \tag{10.220}$$

从而推出

$$\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T^\dagger T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle=\sum_n\left(\prod_{i=1}^n\int\frac{\mathrm{d}^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}}\right)\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T^\dagger\,|\{\mathbf{q}_i\}\rangle\langle\{\mathbf{q}_i\}|\,T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle\,. \tag{10.221}$$

根据 (6.275) 式，用不变振幅将右边两个 T 矩阵表达成

$$\langle\{\mathbf{q}_i\}|\,T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle=(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-\sum_i q_i\right)\mathcal{M}(p_1,p_2\to\{q_i\}), \tag{10.222}$$

$$\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T^\dagger\,|\{\mathbf{q}_i\}\rangle=\langle\{\mathbf{q}_i\}|\,T\,|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\rangle^*=(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_1+k_2-\sum_i q_i\right)\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to\{q_i\}), \tag{10.223}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T^\dagger T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle\;=\;&\sum_n\left(\prod_{i=1}^n\int\frac{\mathrm{d}^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}}\right)\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to\{q_i\})\mathcal{M}(p_1,p_2\to\{q_i\})\\&\times(2\pi)^8\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-\sum_i q_i\right)\delta^{(4)}\left(k_1+k_2-\sum_i q_i\right)\\=\;&\sum_n\left(\prod_{i=1}^n\int\frac{\mathrm{d}^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}}\right)\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to\{q_i\})\mathcal{M}(p_1,p_2\to\{q_i\})\\&\times(2\pi)^8\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-\sum_i q_i\right)\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2),\end{aligned} \tag{10.224}$$

第二步用到 δ 函数的性质 (2.57)。

另一方面，由于

$$\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2)\mathcal{M}(p_1,p_2\to k_1,k_2), \tag{10.225}$$

将 (10.219) 式左边放到 $\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle$ 之间，得

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\,\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,(T-T^\dagger)\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle\;=\;&-\mathrm{i}[\mathcal{M}(p_1,p_2\to k_1,k_2)-\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to p_1,p_2)]\\&\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2),\end{aligned} \tag{10.226}$$

上式与 (10.224) 式相等，必有

$$-\mathrm{i}[\mathcal{M}(p_1,p_2\to k_1,k_2)-\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to p_1,p_2)]$$

$$= \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{\mathrm{d}^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \to \{q_i\}). \tag{10.227}$$

将上式简记为

$$\boxed{-\mathrm{i}[\mathcal{M}(a \to b) - \mathcal{M}^*(b \to a)] = \sum_f \int \mathrm{d}\Pi_f \, \mathcal{M}^*(b \to f) \mathcal{M}(a \to f),} \tag{10.228}$$

注意这里 $\int \mathrm{d}\Pi_f$ 的定义类似于多体不变相空间 (6.318)，它包含了 $(2\pi)^4$ 乘以四维 δ 函数的因子。这就是**推广的光学定理**。尽管这里以 $2 \to 2$ 散射为例开始讨论，最后得到结论是*普遍适用*的，a 和 b 可以是单粒子态，也可以是任意多粒子态，f 则需要取相互作用理论允许的所有末态，涉及到的粒子可以具有自旋，也可以是不同种类的粒子。

(10.228) 式在微扰论的每一阶都成立。不过，它的左边对应于振幅，而右边则对应于两个振幅之积，所以会联系不同阶计算出来的振幅。以实标量场的 ϕ^4 理论为例，在 λ^2 阶讨论 (10.228) 式，则右边每个振幅是 λ^1 阶的树图振幅，而左边必须是 λ^2 阶的单圈振幅才能与右边相匹配。因此，(10.228) 式意味着圈图振幅与树图振幅有一定的联系。只要树图是存在的，则圈图必定也是存在的。我们通常认为树图代表着经典物理，而圈图代表着量子效应。推广的光学定理表明，只存在树图的经典相互作用理论会违反幺正性。

回到 $2 \to 2$ 散射的情况，如果初末态完全相同，则相应的散射称为**向前散射** (forward scattering)，此时 $k_1 = p_1$，$k_2 = p_2$，有

$$\mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2), \tag{10.229}$$

(10.227) 式化为

$$\boxed{2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2) = \sum_f \int \mathrm{d}\Pi_f \, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2,} \tag{10.230}$$

用 Feynman 图将上式表示为

(10.231)

它表明向前散射振幅的**虚部**对应于所有可能中间态的贡献之和，这便是量子场论中的**光学定理**。

对比 (6.319) 式可以看出，(10.230) 式右边正比于包含所有末态过程的**总散射截面** σ_{tot}。在*质心系*中，根据 (6.331) 式，总散射截面表达为

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \sum_f \int \mathrm{d}\Pi_f \, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2, \tag{10.232}$$

这里将末态对称性因子的倒数 $1/\mathcal{S}$ 吸收到 $\int \mathrm{d}\Pi_f$ 里面。严格来说，在 (10.220) 式左边也需要引入 $1/\mathcal{S}$ 因子，因此，可以认为 (10.228) 式中的 $\int \mathrm{d}\Pi_f$ 也吸收了一个 $1/\mathcal{S}$ 因子。为了得到简单的表达式，我们假设 p_1 和 p_2 对应的两个粒子具有相同质量，从而 (6.358) 式表明 $E_{\mathbf{p}_1} = E_{\mathbf{p}_2} = E_{\mathrm{CM}}/2$，由 (6.363) 式得 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 2|\mathbf{p}_1|/E_{\mathbf{p}_1}$，于是

$$4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}\frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}} = 4E_{\mathrm{CM}}|\mathbf{p}_1|, \tag{10.233}$$

故

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}|\mathbf{p}_1|}\sum_f \int \mathrm{d}\Pi_f\, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2, \tag{10.234}$$

从而 (10.230) 式化为

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2) = 2E_{\mathrm{CM}}|\mathbf{p}_1|\,\sigma_{\mathrm{tot}}.} \tag{10.235}$$

这是光学定理的常见形式。在量子理论中考虑束流打靶过程，那么，向前散射振幅的虚部对应于束流经过靶时入射波的衰减，它应当正比于发生散射的概率，而后者是由总散射截面描述的，(10.235) 式给出了精确的对应关系。

现在将推广的光学定理 (10.228) 应用到从一个**不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 跃迁到自身的 $1 \to 1$ “散射”过程上，在 $\mathcal{A}$ 的静止系中，有

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\mathcal{A} \to \mathcal{A}) = \sum_f \int \mathrm{d}\Pi_f\, |\mathcal{M}(\mathcal{A} \to f)|^2 = 2m_{\mathcal{A}}\sum_f \Gamma_f, \tag{10.236}$$

第二步用到衰变分宽度的表达式 (6.377)。所有分宽度之和就是 $\mathcal{A}$ 粒子的总宽度

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = \sum_f \Gamma_f, \tag{10.237}$$

因此，振幅 $\mathcal{M}(\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ 虚部与衰变总宽度的关系为

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\mathcal{A} \to \mathcal{A}) = m_{\mathcal{A}}\Gamma_{\mathcal{A}}.} \tag{10.238}$$

另一方面，稳定粒子的衰变宽度为零，而相应振幅 $\mathcal{M}(\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ 是实数。

对于不稳定的实标量玻色子 ϕ，(10.194) 式给出了完整的动量空间传播子

$\tilde{G}^{(2)}(p) =$

$= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon},$ (10.239)

其中 $\Pi(p^2)$ 来自 1PI 自能图

$= -\mathrm{i}\Pi(p^2).$ (10.240)

将传播子看成 $1 \to 1$ “散射”过程，要求 p^μ 满足质壳条件 $p^2 = m^2$，类比于 (10.217) 式，有

$$\mathrm{i}\mathcal{M}(\phi \to \phi) = (\sqrt{Z})^2 \times \Bigg(\text{- - - -}\xrightarrow{p}\text{(1PI)}\text{- - - -} \Bigg)\Bigg|_{p^2=m^2} = -\mathrm{i}Z\Pi(m^2), \tag{10.241}$$

注意这里切断的连通 Feynman 图就是 1PI 自能图。应用 (10.238) 式，ϕ 的衰变总宽度表达为

$$\Gamma = \frac{1}{m}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\phi \to \phi) = -\frac{Z}{m}\,\mathrm{Im}\,\Pi(m^2). \tag{10.242}$$

可见，不稳定 ϕ 粒子的 $\Pi(p^2)$ 必定具有虚部，将完整传播子 (10.239) 改写为

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \mathrm{Re}\,\Pi(p^2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)}, \tag{10.243}$$

这里已经把分母中的无穷小量 $\epsilon \ll |\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)|$ 忽略掉了。从而，我们需要把**质量重整化条件** (10.196) 修改为

$$\boxed{\delta m^2 = -\,\mathrm{Re}\,\Pi(m^2),} \tag{10.244}$$

使物理质量 m 的平方对应于极点位置的实部，并将**场强重整化条件** (10.200) 修改为

$$\boxed{Z^{-1} = 1 - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\bigg|_{p^2=m^2}.} \tag{10.245}$$

$\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)$ 的存在使得 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的单粒子态极点远离实轴，具体位置由方程 $p^2 = m^2 + \delta m^2 + \mathrm{Re}\,\Pi(p^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)$ 决定。类似于 (10.199) 式，在 $p^2 = m^2$ 附近 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 近似为

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\simeq \frac{\mathrm{i}}{(p^2 - m^2)[1 - \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\Pi(p^2)/\mathrm{d}p^2|_{p^2=m^2}] - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{(p^2 - m^2)Z^{-1} - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)} = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 - \mathrm{i}Z\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)}.\end{aligned} \tag{10.246}$$

如果 $|\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)|$ 在极点附近远小于 m^2，那么极点位置与 $p^2 = m^2$ 的偏离较小，完整的 ϕ 传播子在极点附近的行为是

$$\tilde{G}^{(2)}(p) \simeq \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 - \mathrm{i}Z\,\mathrm{Im}\,\Pi(m^2)} = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}m\Gamma} \simeq \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}m\Gamma}, \tag{10.247}$$

第二步用到 (10.242) 式，第三步取近似 $Z \simeq 1$。可见，极点位置在 p^2 复平面实轴下方 $p^2 = m^2 - \mathrm{i}m\Gamma$ 处。假如这个 ϕ 传播子出现在某个 s 通道散射过程中，有 $p^2 = s$，则散射截面满足

$$\boxed{\sigma \propto \left|\frac{1}{s - m^2 + \mathrm{i}m\Gamma}\right|^2 = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2},} \tag{10.248}$$

它在 $s = m^2$ 附近呈示出**相对论性 Breit-Wigner 分布** [52]。近似成立的条件 $|\,\mathrm{Im}\,\Pi(m^2)| \ll m^2$ 可以等价为**窄宽度条件**

$$\Gamma \ll m. \tag{10.249}$$

图 10.3: Breit-Wigner 分布。

相应的 s 通道不稳定粒子是一个**共振态**，散射截面在 $s=m^2$ 处得到共振增强，有 $\sigma\propto(m\Gamma)^{-2}$，也就是说，宽度越窄，截面越大。

在 $s=m^2$ 附近取 $\sqrt{s}+m\simeq 2m$ 的近似，将 (10.248) 式化为

$$\sigma\propto\frac{1}{(\sqrt{s}+m)^2(\sqrt{s}-m)^2+m^2\Gamma^2}\simeq\frac{1}{4m^2(\sqrt{s}-m)^2+m^2\Gamma^2}=\frac{1}{4m^2}\frac{1}{(\sqrt{s}-m)^2+\Gamma^2/4},\tag{10.250}$$

可见，散射截面在 $s=m^2$ 附近正比于归一化的 **Breit-Wigner 分布**

$$\boxed{f_{\rm BW}(\sqrt{s})=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\sqrt{s}-m)^2+\Gamma^2/4}.}\tag{10.251}$$

这个概率密度分布也称为 *Cauchy* 分布或 *Lorentz* 分布，它的图象如图 10.3 所示。可见，不稳定粒子的质量并不取固定数值，而是呈现出一个 Breit-Wigner 分布，前面所说的物理质量 m 是这个分布的中心值，也是概率最大的地方。衰变宽度 Γ 是这个分布的半峰全宽，这是它被称为“宽度”的原因。任何归一化概率密度分布在宽度趋于零的极限下都会变成 δ 函数，故

$$\lim_{\Gamma\to 0}f_{\rm BW}(\sqrt{s})=\delta(\sqrt{s}-m).\tag{10.252}$$

当 $\Gamma=0$ 时，寿命 $\tau=1/\Gamma\to\infty$，粒子是稳定的，而质量固定为 m。

上述关于不稳定粒子的讨论可以推广到其它类型的量子场和粒子。在窄宽度条件下，假如要在树图计算中考虑衰变宽度的效应，只需采用下列**不稳定粒子的动量空间内线规则**。

1. 实标量玻色子 ϕ 内线：

$=\dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m_\phi^2+\mathrm{i}m_\phi\Gamma_\phi}$.

2. 复标量玻色子 ϕ 内线： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}m_\phi\Gamma_\phi}$.

3. 有质量实矢量玻色子 A 内线： $= \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}m_A\Gamma_A}$.

4. Dirac 费米子 ψ 内线： $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}m_\psi\Gamma_\psi}$.

考虑图 10.4 所示的 $2 \to n$ 散射过程，它包含一条具有类时动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线。n 个末态粒子分为两部分，其中 a 部分包含 n_a 个粒子，而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 玻色子内线。如果这个散射过程的质心能足够高，使末态相空间包含 ϕ 粒子质壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域，那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可以通过以下方法将散射截面因子化。

将 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + f$ 散射过程的不变振幅分解为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2 - m^2 + \mathrm{i}m\Gamma}\,\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2), \tag{10.253}$$

其中 $\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)$ 是 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + \phi$ 部分的振幅，$\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2)$ 是 $\phi \to f$ 部分的振幅，它们具有对 q^2 的依赖性，由 ϕ 传播子连接起来。假设 $\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2)$ 都是实数，这对不包含其它不稳定粒子的树图过程一般是成立的，则不变振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)|^2\,\frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2}\,|\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2)|^2. \tag{10.254}$$

根据 (6.319) 式，设末态对称性因子 $\mathcal{S} = 1$，$\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + f$ 散射截面表达为

$$\sigma = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\,|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\,|\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)|^2\,\frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2}\,|\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2)|^2, \tag{10.255}$$

其中 $F = 4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}v_\mathrm{Møl}$ 是入射流因子。

将 a 部分和 f 部分末态粒子的四维动量之和分别记作

$$p_a^\mu = \sum_{i=1}^{n_a} p_i^\mu, \quad p_f^\mu = \sum_{j=n_a+1}^{n} p_j^\mu, \tag{10.256}$$

图 10.4: 包含类时 ϕ 传播子的散射过程。

n 体末态相空间表达成

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{i=1}^{n_a}\int \frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\right)\left(\prod_{j=n_a+1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_a-p_f), \tag{10.257}$$

下面对它进行分解。把 (10.53) 式改写为

$$\int \mathrm{d}q^0\,\theta(q^0)\delta(q^2-s_\phi) = \frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}, \tag{10.258}$$

其中

$$\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi) \equiv \sqrt{|\mathbf{q}|^2+s_\phi}, \quad s_\phi > 0. \tag{10.259}$$

类时的 q^μ 必定满足 $q^0>0$，由 δ 函数的性质推出

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathrm{d}^4q\,\delta^{(4)}(q-p_f)\int \mathrm{d}s_\phi\,\theta(q^0)\delta(q^2-s_\phi) = \int \mathrm{d}s_\phi\int \mathrm{d}^3q\int \mathrm{d}q^0\,\theta(q^0)\delta(q^2-s_\phi)\delta^{(4)}(q-p_f) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_f), \end{aligned} \tag{10.260}$$

注意对 q^0 积分之后，最后一行中的四维动量 q^μ 满足

$$q^0 = \tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi), \quad q^2 = s_\phi. \tag{10.261}$$

将 (10.260) 式插入到 n 体末态相空间中，得

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\Pi_n &= \left(\prod_{i=1}^{n_a}\int \frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\right)\left(\prod_{j=n_a+1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_a-p_f) \\ &\quad\times\int \frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_f) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi)\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi), \end{aligned} \tag{10.262}$$

其中

$$\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}\left(\prod_{i=1}^{n_a}\int \frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_a-q) \tag{10.263}$$

对应于 $\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+\phi$ 部分的末态相空间，而

$$\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi) \equiv \left(\prod_{j=n_a+1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_f) \tag{10.264}$$

对应于 $\phi\to f$ 部分的末态相空间，这里标注了它们对 s_ϕ 的依赖性。于是，$\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+f$ 散射截面 (10.255) 化为

$$\sigma = \frac{1}{F}\int \frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi)\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(s_\phi)|^2\,\frac{1}{(s_\phi-m^2)^2+(m\Gamma)^2}\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(s_\phi)|^2. \tag{10.265}$$

将上式中 ϕ 玻色子内线的贡献改写为

$$\frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{\pi}{m\Gamma}\frac{2m\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (2m\Gamma)^2/4}, \tag{10.266}$$

可见，它正比于以 s_ϕ 为自变量、中心值为 m^2、宽度参数为 $2m\Gamma$ 的 Breit-Wigner 分布 (10.251)，比例因子为 $\pi/(m\Gamma)$。在 $\Gamma/m \ll 1$ 的窄宽度条件下，取 $\Gamma \to 0$ 的极限，由 (10.252) 式得

$$\boxed{\lim_{\Gamma\to 0}\frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{\pi}{m\Gamma}\,\delta(s_\phi - m^2),} \tag{10.267}$$

从而 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + f$ 散射截面近似为

$$\begin{aligned}\sigma &\simeq \frac{1}{F}\int\frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi)\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(s_\phi)|^2\,\frac{\pi}{m\Gamma}\,\delta(s_\phi - m^2)|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(s_\phi)|^2 \\ &= \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(m^2)|^2\,\frac{1}{\Gamma}\frac{1}{2m}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(m^2)|^2 = \sigma_{\mathrm{P}}\,\frac{\Gamma_f}{\Gamma},\end{aligned} \tag{10.268}$$

其中

$$\sigma_{\mathrm{P}} = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(m^2)|^2 \tag{10.269}$$

是通过 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + \phi$ 散射过程产生 ϕ 玻色子的**产生截面** (production cross section)，而

$$\Gamma_f = \frac{1}{2m}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(m^2)|^2 \tag{10.270}$$

是 $\phi \to f$ 衰变过程的分宽度，注意这些公式里面 ϕ 玻色子是**在壳**的，质量为 m。由分宽度与分支比之间的关系 (6.371) 将 (10.268) 式改写为

$$\boxed{\sigma \simeq \sigma_{\mathrm{P}} B_f.} \tag{10.271}$$

也就是说，只要 ϕ 玻色子内线在运动学允许的范围内能够取得在壳动量，就可以把 Feynman 图 10.4 中 ϕ 玻色子的内线剪开，得到 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + \phi$ 和 $\phi \to f$ 的 Feynman 图，分别计算共振态 ϕ 的产生截面 σ_{P} 和衰变分支比 B_f，乘起来就得到 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + f$ 散射截面 σ。这种将包含共振态的散射截面因子化的方法称为**窄宽度近似** (narrow width approximation)。

以上讨论对于共振态为实标量玻色子或复标量玻色子的情况都成立，也可以将它推广到其它共振态。如果共振态是有质量的矢量玻色子 A，用极化求和关系 (4.101) 将它的传播子改写成

$$= \frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/m_A^2)}{q^2 - m_A^2 + \mathrm{i}m_A\Gamma_A} = \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_A^2 + \mathrm{i}m_A\Gamma_A}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda)\varepsilon^\nu(\mathbf{q},\lambda), \tag{10.272}$$

那么，$\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda)$ 正好是产生过程中的 A 玻色子出射外线因子，而 $\varepsilon^\nu(\mathbf{q},\lambda)$ 是衰变过程的 A 玻色子入射外线因子，对 λ 求和则考虑了所有极化态的贡献，因此同样可以应用窄宽度近似将散射截面因子化。

如果共振态是 Dirac 正费米子 ψ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相同，用自旋求和关系 (5.214) 将相应传播子改写为

$$= \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}m_\psi\Gamma_\psi} = \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}m_\psi\Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q},\lambda)\bar{u}(\mathbf{q},\lambda), \tag{10.273}$$

那么 $\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)$ 和 $u(\mathbf{q},\lambda)$ 刚好分别是产生过程和衰变过程中正费米子 ψ 的外线因子。如果共振态是 Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相反，相应的传播子为

$$= \frac{\mathrm{i}(-\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}m_\psi\Gamma_\psi} = \frac{-\mathrm{i}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}m_\psi\Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{q},\lambda)\bar{v}(\mathbf{q},\lambda), \tag{10.274}$$

那么 $v(\mathbf{q},\lambda)$ 和 $\bar{v}(\mathbf{q},\lambda)$ 也分别是产生过程和衰变过程中反费米子 $\bar{\psi}$ 的外线因子，上式右边分子上的负号与费米子算符的反对易性有关。

习　题

10.1 推出 Dirac 旋量场的 LSZ 约化公式 (10.117)。

10.2 仿照 (10.154) 式的推导过程，证明 (10.155) 式。

10.3 验证 Breit-Wigner 分布 (10.251) 满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{BW}}(\sqrt{s})\,\mathrm{d}\sqrt{s} = 1, \tag{10.275}$$

并论证衰变宽度 Γ 是这个分布的半峰全宽。

第 11 章　路径积分量子化

在前面的章节中，我们采用正则量子化方法对各种场作了合适的量子化，给出了合理的物理结果。不过，正则量子化具有一定的局限性，它不容易处理具有约束条件的场变量（如有质量矢量场问题）和带着时空导数的相互作用项，而且在量子化过程中不能显明地保持 Lorentz 对称性。本章将介绍另一种等价的量子化方法——**路径积分量子化** (path integral quantization)，它能够克服以上困难，更适合处理场论的各种复杂情况。

11.1　量子力学中的路径积分量子化

为了理解路径积分量子化的基本思想，我们先从非相对论性量子力学开始讨论。量子力学中的路径积分方法最初于 1933 年由 Paul Dirac 提出 [53]，并于 1948 年由 Richard Feynman 完善 [54]。考虑只有一个自由度的系统，*Schrödinger* 绘景中的哈密顿量算符 $H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}})$ 由广义坐标算符 q^{S} 和广义动量算符 p^{S} 构造，它们满足正则对易关系 $[q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$。$q^{\mathrm{S}}$ 和 p^{S} 的本征态 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 满足本征方程

$$q^{\mathrm{S}}\,|q\rangle = q\,|q\rangle\,, \quad p^{\mathrm{S}}\,|p\rangle = p\,|p\rangle\,, \tag{11.1}$$

其中本征值 p 和 q 是实数。通过适当的归一化，使这些本征态满足正交归一关系

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q'-q), \quad \langle p'|p\rangle = 2\pi\,\delta(p'-p), \tag{11.2}$$

和完备性关系

$$\int \mathrm{d}q\,|q\rangle\,\langle q| = \mathbb{I}, \quad \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,|p\rangle\,\langle p| = \mathbb{I}. \tag{11.3}$$

在坐标表象中，广义动量本征态 $|p\rangle$ 与广义坐标本征态 $|q\rangle$ 的内积具有平面波的形式：

$$\langle q|p\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}. \tag{11.4}$$

(11.2) 和 (11.3) 式中出现的归一化因子 2π 保证上式不需要归一化因子。以上表达式的自洽性可通过下式检验：

$$2\pi\,\delta(p'-p) = \langle p'|p\rangle = \int \mathrm{d}q\;\langle p'|q\rangle\,\langle q|p\rangle = \int \mathrm{d}q\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q})^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq} = \int \mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'-p)q} = 2\pi\,\delta(p'-p). \tag{11.5}$$

最后一步用到 (2.59) 式。系统的量子状态由态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 描述，它满足 Schrödinger 方程 (2.32)。态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 与广义坐标本征态 $|q\rangle$ 的内积给出坐标表象中的系统波函数 $\Psi(q,t) = \langle q|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$。

转到 *Heisenberg* 绘景，根据 (2.38) 式，广义坐标算符为 $q^{\mathrm{H}}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}q^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$。引入

$$|q,t\rangle\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle\,, \tag{11.6}$$

则 $|q,t\rangle$ 是算符 $q^{\mathrm{H}}(t)$ 在 t 时刻的瞬时本征态：

$$q^{\mathrm{H}}(t)\,|q,t\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}q^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}q^{\mathrm{S}}|q\rangle=q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle=q\,|q,t\rangle\,. \tag{11.7}$$

由于 $|q,t\rangle$ 是用幺正变换 (11.6) 定义的，正交归一关系和完备性关系得以保持：

$$\langle q',t|q,t\rangle=\langle q'|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle=\langle q'|q\rangle=\delta(q'-q), \tag{11.8}$$

$$\int\mathrm{d}q\,|q,t\rangle\,\langle q,t|=\int\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle\,\langle q|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\,\mathbb{I}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=\mathbb{I}. \tag{11.9}$$

从而，t 时刻 $|q,t\rangle$ 的集合构成 Hilbert 空间中的一组完备基底。但是，$|q,t\rangle$ 不能代表系统在 t 时刻的真实状态，因为 Heisenberg 绘景中描述系统量子状态的态矢 $|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 是不含时的。

现在，用 Heisenberg 绘景中的态矢 $|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}$ 将系统波函数表达为

$$\Psi(q,t)=\langle q|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=\langle q|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=\langle q,t|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}\,. \tag{11.10}$$

再利用完备性关系 (11.9)，将 t_b 时刻的波函数 $\Psi(q_b,t_b)$ 表达成与 t_a 时刻波函数 $\Psi(q_a,t_a)$ 相关的积分，有

$$\Psi(q_b,t_b)=\langle q_b,t_b|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}=\int\mathrm{d}q_a\,\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle\,\langle q_a,t_a|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}=\int\mathrm{d}q_a\,\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle\,\Psi(q_a,t_a), \tag{11.11}$$

其中从 t_a 时刻态矢 $|q_a,t_a\rangle$ 到 t_b 时刻态矢 $|q_b,t_b\rangle$ 的跃迁振幅

$$\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle=\langle q_b|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht_b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht_a}|q_a\rangle=\langle q_b|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_b-t_a)}|q_a\rangle \tag{11.12}$$

称为 **Feynman 核** (kernel)。如果我们知道 Feynman 核，就可以根据积分式 (11.11) 由 t_a 时刻波函数求得 t_b 时刻波函数。这种做法与求解 Schrödinger 方程是等价的。

路径积分 (path integral) 方法能够用于计算 Feynman 核，它利用经典物理量的**泛函积分** (functional integral) 来进行计算，不需要借助 Hilbert 空间上的算符和态矢。为了推出泛函积分的形式，我们先将时间间隔 $[t_a,t_b]$ 等分成 N 个小间隔，每个小间隔的长度为 ε，则各个分点对应的时刻为

$$t_n=t_a+n\varepsilon,\quad n=0,1,\cdots,N, \tag{11.13}$$

其中 $t_0=t_a$，$t_N=t_b$，且 $t_b-t_a=N\varepsilon>0$。后面会取 $N\to\infty$ 的极限，从而 $\varepsilon\to0$ 是个无穷小量。利用完备性关系 (11.9)，在 Feynman 核 $\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle$ 中插入 $N-1$ 个分点时刻的坐标本征态完备集，得到

$$\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle=\int\mathrm{d}q_{N-1}\cdots\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_1\,\langle q_N,t_N|q_{N-1},t_{N-1}\rangle\cdots\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle\,\langle q_1,t_1|q_0,t_0\rangle\,, \tag{11.14}$$

图 11.1: 连接 (t_a, q_a) 和 (t_b, q_b) 两点的一条路径。

其中 $q_0 = q_a$，$q_N = q_b$，而相邻时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的跃迁振幅为

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_{n+1}-t_n)} | q_n \rangle = \langle q_{n+1} | \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\varepsilon} | q_n \rangle . \tag{11.15}$$

如果将当前讨论的单自由度系统看作一个粒子的运动问题，则可对 (11.14) 式作以下诠释。Feynman 核 $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$ 是粒子从 t_a 时刻的坐标 q_a 传播到 t_b 时刻的坐标 q_b 的概率振幅。(11.14) 式表明这个振幅可以表达为对各条中间路径的积分，其中每条路径由各中间时刻处的坐标 q_n $(n = 1, \cdots, N-1)$ 连接而成，如图 11.1 所示。对所有 q_n 积分意味着把所有可能路径都考虑进来，这是量子力学态叠加原理的体现，而 (11.14) 式中的被积函数代表每条路径在相干叠加时所占的权重。

由于 ε 是小量，我们可以对 (11.15) 式作 Taylor 展开，保留到 ε 的第 1 阶，有

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | q_n \rangle - \mathrm{i}\varepsilon \langle q_{n+1} | H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}) | q_n \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{11.16}$$

利用完备性关系 (11.9)，在 ε^1 阶振幅 $\langle q_{n+1} | H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}) | q_n \rangle$ 里面插入动量本征态的完备集，得

$$\langle q_{n+1} | H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}) | q_n \rangle = \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}) | q_n \rangle . \tag{11.17}$$

通常来说，哈密顿量算符 $H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}})$ 是算符 q^{S} 和 p^{S} 的多项式。对于上式右边的 $\langle p_n | H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}) | q_n \rangle$，只要拿哈密顿量算符 $H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}})$ 中的 q^{S} 算符往右作用到 $|q_n\rangle$ 上、p^{S} 算符往左作用到 $\langle p_n|$ 上，就能根据本征方程 (11.1) 得到相应的本征值 q_n 和 p_n，从而将哈密顿量算符转化成经典的哈密顿量函数。然而，由于 q^{S} 与 p^{S} 不是相互对易的，哈密顿量算符中 q^{S} 与 p^{S} 的排列次序会影响计算结果。

在此，我们假设哈密顿量算符中 q^{S} 和 p^{S} 的排序遵循 **Weyl 排序** (ordering)。具体来说，若经典的哈密顿量函数表达为 $H(q, p)$，则先对它作 Fourier 变换，得到

$$\tilde{H}(\xi, \eta) = \int \mathrm{d}q\, \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi q + \eta p)} H(q, p), \tag{11.18}$$

再作变换参数为算符 q^{S} 和 p^{S} 的 Fourier 逆变换，给出

$$H(q^{\mathrm{S}},p^{\mathrm{S}})=\int\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\eta}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})}\tilde{H}(\xi,\eta). \tag{11.19}$$

这种做法的结果是以相同的权重对所有可能的排序方式进行平均。比如，若 $H(q,p)=q^3p$，则 Weyl 排序给出的结果是

$$H(q^{\mathrm{S}},p^{\mathrm{S}})=(q^{\mathrm{S}})^3p^{\mathrm{S}}-\frac{3\mathrm{i}}{2}(q^{\mathrm{S}})^2=\frac{1}{4}[(q^{\mathrm{S}})^3p^{\mathrm{S}}+(q^{\mathrm{S}})^2p^{\mathrm{S}}q^{\mathrm{S}}+q^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}(q^{\mathrm{S}})^2+p^{\mathrm{S}}(q^{\mathrm{S}})^3], \tag{11.20}$$

第二步的转换用到对易关系 $[q^{\mathrm{S}},p^{\mathrm{S}}]=\mathrm{i}$。

将 (11.19) 式代入 (11.17) 式的左边，得

$$\langle q_{n+1}|\,H(q^{\mathrm{S}},p^{\mathrm{S}})\,|q_n\rangle=\int\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\eta}{2\pi}\langle q_{n+1}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})}\,|q_n\rangle\,\tilde{H}(\xi,\eta). \tag{11.21}$$

根据指数函数的级数形式 (2.34)，将被积函数中的 $\langle q_{n+1}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})}\,|q_n\rangle$ 展开为

$$\langle q_{n+1}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})}\,|q_n\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^k}{k!}\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^k\,|q_n\rangle\,, \tag{11.22}$$

接下来用数学归纳法证明，上式右边通项中的 $\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^k\,|q_n\rangle$ 可以表达为

$$\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^k\,|q_n\rangle=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)}(\xi\bar{q}_n+\eta p_n)^k,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{11.23}$$

其中

$$\bar{q}_n\equiv\frac{q_{n+1}+q_n}{2} \tag{11.24}$$

是 q_{n+1} 和 q_n 的算术平均值。

证明　由正交归一关系 (11.2) 和 Fourier 变换式 (2.59) 推出

$$\langle q_{n+1}|q_n\rangle=\delta(q_{n+1}-q_n)=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)}, \tag{11.25}$$

故 (11.23) 式对 $k=0$ 成立。当 $k=1$ 时，利用完备性关系 (11.3)、本征方程 (11.1) 和 (11.4) 式推出

$$\begin{aligned}\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})\,|q_n\rangle&=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\frac{1}{2}[\langle q_{n+1}|p_n\rangle\langle p_n|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})\,|q_n\rangle+\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})\,|p_n\rangle\langle p_n|q_n\rangle]\\&=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{n+1}p_n}\langle p_n|\,(\xi q_n+\eta p_n)\,|q_n\rangle+\langle q_{n+1}|\,(\xi q_{n+1}+\eta p_n)\,|p_n\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_np_n}]\\&=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{n+1}p_n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_np_n}\frac{\xi q_n+\eta p_n}{2}+\frac{\xi q_{n+1}+\eta p_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{n+1}p_n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_np_n}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)}(\xi\bar{q}_n+\eta p_n).\end{aligned} \tag{11.26}$$

可见，(11.23) 式对 $k=1$ 也成立。

假设 (11.23) 式对 $k=m$ 成立，则

$$\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^m\,|q_n\rangle=\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)}(\xi\bar{q}_n+\eta p_n)^m. \tag{11.27}$$

根据 (11.3)、(11.4)、(11.1) 和 (11.2) 式，有

$$\begin{aligned}\langle q'|\,p^{\mathrm{S}}\,|q\rangle&=\int\frac{\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}p}{(2\pi)^2}\,\langle q'|p'\rangle\,\langle p'|\,p^{\mathrm{S}}\,|p\rangle\,\langle p|q\rangle=\int\frac{\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}p}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'p'}\,p\,\delta(p'-p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qp}\\&=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q'-q)}=\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial q}\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q'-q)},\end{aligned} \tag{11.28}$$

再利用 (2.59) 式推出

$$\langle q'|\,p^{\mathrm{S}}\,|q\rangle=\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial q}\,\delta(q'-q)=-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial q'}\,\delta(q'-q). \tag{11.29}$$

当 $k=m+1$ 时，插入 $\mathbb{I}=\int\mathrm{d}q\,|q\rangle\,\langle q|$，有

$$\begin{aligned}&\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^{m+1}\,|q_n\rangle\\=&\int\mathrm{d}q\,\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})\,|q\rangle\,\langle q|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^m\,|q_n\rangle\\=&\int\mathrm{d}q\,\big(\xi\,\langle q_{n+1}|\,q_{n+1}\,|q\rangle+\eta\,\langle q_{n+1}|\,p^{\mathrm{S}}\,|q\rangle\big)\,\langle q|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^m\,|q_n\rangle\\=&\int\mathrm{d}q\,\left[\xi q_{n+1}\delta(q_{n+1}-q)+\mathrm{i}\eta\,\frac{\partial}{\partial q}\,\delta(q_{n+1}-q)\right]\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q-q_n)}\left(\xi\,\frac{q+q_n}{2}+\eta p_n\right)^m\\=&\int\mathrm{d}q\,\xi q_{n+1}\delta(q_{n+1}-q)\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q-q_n)}\left(\xi\,\frac{q+q_n}{2}+\eta p_n\right)^m\\&-\mathrm{i}\eta\int\mathrm{d}q\,\delta(q_{n+1}-q)\,\frac{\partial}{\partial q}\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q-q_n)}\left(\xi\,\frac{q+q_n}{2}+\eta p_n\right)^m\\=&\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)}\xi q_{n+1}(\xi\bar{q}_n+\eta_{p_n})^m\\&+\int\mathrm{d}q\,\delta(q_{n+1}-q)\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q-q_n)}\left[\eta p_n\left(\xi\,\frac{q+q_n}{2}+\eta p_n\right)^m-\frac{\mathrm{i}m\eta\xi}{2}\left(\xi\,\frac{q+q_n}{2}+\eta p_n\right)^{m-1}\right]\\=&\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)}\left[(\xi q_{n+1}+\eta p_n)(\xi\bar{q}_n+\eta_{p_n})^m-\frac{\mathrm{i}m\eta\xi}{2}(\xi\bar{q}_n+\eta p_n)^{m-1}\right],\end{aligned} \tag{11.30}$$

第二步用到本征方程 (11.1)，第三步用到 (11.2)、(11.29) 和 (11.27) 式，第四步用到 (6.241) 式。在另一个地方位置插入 $\mathbb{I}=\int\mathrm{d}q\,|q\rangle\,\langle q|$，可推出等价的结果

$$\begin{aligned}&\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^{m+1}\,|q_n\rangle\\=&\int\mathrm{d}q\,\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^m\,|q\rangle\,\langle q|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})\,|q_n\rangle\\=&\int\mathrm{d}q\,\langle q_{n+1}|\,(\xi q^{\mathrm{S}}+\eta p^{\mathrm{S}})^m\,|q\rangle\,\big(\xi\,\langle q|\,q_n\,|q_n\rangle+\eta\,\langle q|\,p^{\mathrm{S}}\,|q_n\rangle\big)\\=&\int\mathrm{d}q\int\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q)}\left(\xi\,\frac{q_{n+1}+q}{2}+\eta p_n\right)^m\left[\xi q_n\delta(q-q_n)-\mathrm{i}\eta\,\frac{\partial}{\partial q}\,\delta(q-q_n)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}q\, \xi q_n \delta(q-q_n) \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q)} \left(\xi \frac{q_{n+1}+q}{2} + \eta p_n\right)^m \\
&\quad + \mathrm{i}\eta \int \mathrm{d}q\, \delta(q-q_n) \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q)} \left(\xi \frac{q_{n+1}+q}{2} + \eta p_n\right)^m \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} \xi q_n (\xi \bar{q}_n + \eta p_n)^m + \int \mathrm{d}q\, \delta(q-q_n) \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q)} \\
&\qquad \times \left[\eta p_n \left(\xi \frac{q_{n+1}+q}{2} + \eta p_n\right)^m + \frac{\mathrm{i}m\eta\xi}{2} \left(\xi \frac{q_{n+1}+q}{2} + \eta p_n\right)^{m-1}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} \left[(\xi q_n + \eta p_n)(\xi \bar{q}_n + \eta p_n)^m + \frac{\mathrm{i}m\eta\xi}{2} (\xi \bar{q}_n + \eta p_n)^{m-1}\right].
\end{aligned} \tag{11.31}
$$

将 (11.30) 和 (11.31) 式相加，再除以 2，得到

$$
\langle q_{n+1}|(\xi q^{\mathrm{S}} + \eta p^{\mathrm{S}})^{m+1}|q_n\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} (\xi \bar{q}_n + \eta p_n)^{m+1}, \tag{11.32}
$$

即 (11.23) 式对 $k = m+1$ 也成立。

归纳起来，(11.23) 式对任意自然数 k 成立。**证毕**。

将 (11.23) 式代入 (11.22) 式，有

$$
\langle q_{n+1}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi q^{\mathrm{S}} + \eta p^{\mathrm{S}})}\, |q_n\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi \bar{q}_n + \eta p_n)}, \tag{11.33}
$$

再将上式代入 (11.21) 式，作 Fourier 逆变换，推出

$$
\begin{aligned}
\langle q_{n+1}|\, H(q^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}})\, |q_n\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} \int \frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\eta}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi \bar{q}_n + \eta p_n)} \tilde{H}(\xi, \eta) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} H(\bar{q}_n, p_n).
\end{aligned} \tag{11.34}
$$

把这个结果代入 (11.16) 式，并利用 (11.25) 式，得到相邻时刻的跃迁振幅

$$
\langle q_{n+1}, t_{n+1}|q_n, t_n\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} [1 - \mathrm{i}\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{11.35}
$$

进一步将上式代入 Feynman 核表达式 (11.14)，取 $N \to \infty$ 的极限，推出

$$
\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \mathrm{d}q_n \int \prod_{n=0}^{N-1} \left\{\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)} [1 - \mathrm{i}\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)]\right\}. \tag{11.36}
$$

注意，$N \to \infty$ 意味着 $\varepsilon \to 0$，故 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的贡献相对于 ε^1 阶贡献可以忽略。

指数函数的极限表达式

$$
\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \mathrm{e}^x \tag{11.37}
$$

可推广为

$$
\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{x_n}{N}\right) = \exp\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n\right). \tag{11.38}
$$

取 $x_n = -\mathrm{i}N\varepsilon H(\bar{q}_n, p_n)$，则

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}[1-\mathrm{i}\varepsilon H(\bar{q}_n,p_n)] = \exp\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}[-\mathrm{i}\varepsilon H(\bar{q}_n,p_n)]\right\} = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H(\bar{q}_n,p_n)}. \tag{11.39}$$

利用上式将 Feynman 核 (11.36) 化为

$$\begin{aligned}\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\int\prod_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n(q_{n+1}-q_n)-\mathrm{i}\varepsilon H(\bar{q}_n,p_n)}\right]\\ &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\left[p_n\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon}-H(\bar{q}_n,p_n)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{11.40}$$

在 $N\to\infty$ 极限下，t-q 平面上相邻的点 (t_n,q_n) 与 (t_{n+1},q_{n+1}) 之间的距离无穷小，故所有的点 (t_n,q_n) 连续地连接成函数 $q(t)$，满足 $q_n=q(t_n)$。类似地，t-p 平面上所有的点 (t_n,p_n) 连续地连接成函数 $p(t)$，满足 $p_n=p(t_n)$。于是，(11.40) 式中的积分变成泛函积分，用以下符号标记：

$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\to\int\mathcal{D}q\,,\quad \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\to\int\mathcal{D}p\,. \tag{11.41}$$

另一方面，在此极限下，$(q_{n+1}-q_n)/\varepsilon$ 化成 $q(t)$ 的时间导数，

$$\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon}=\frac{q_{n+1}-q_n}{t_{n+1}-t_n}\to\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{t_n}\equiv\dot{q}(t_n), \tag{11.42}$$

而形如下式的求和式化为积分，

$$\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}f(t_n)\to\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\,f(t). \tag{11.43}$$

利用这些记号将 (11.40) 式改写成紧凑的泛函积分形式

$$\boxed{\langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle=\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p\,\exp\left(\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\,\{p(t)\dot{q}(t)-H[q(t),p(t)]\}\right).} \tag{11.44}$$

上式称为**相空间中的路径积分**，它对坐标空间中所有满足边界条件 $q(t_a)=q_a$ 和 $q(t_b)=q_b$ 的路径 $q(t)$ 进行积分，也对动量空间中所有的 $p(t)$ 路径进行积分。

泛函 (functional) 是定义在函数集合上的映射，它将函数映射成实数或复数，也就是说，泛函是函数的函数。(11.44) 式右边的被积函数是函数 $q(t)$ 和 $p(t)$ 的泛函，而相应的积分是一个**泛函积分**。这种积分是对无穷多条路径 $q(t)$ 和 $p(t)$ 进行的，因而也称为**路径积分**，相应的积分测度 $\mathcal{D}q$ 和 $\mathcal{D}p$ 称为**泛函测度** (functional measure)。

(11.44) 式告诉我们，以被积泛函作为权重对相空间中无穷多条可能的路径 $q(t)$ 和 $p(t)$ 进行积分，就可以得到 Feymnan 核。在路径积分表达式中，只涉及到 c 数，不涉及 Hilbert 空间上

的算符和态矢，但积分结果却给出了像 Feymnan 核这样的量子跃迁振幅，已然实现了量子化。这样的量子化方法称为**路径积分量子化**。

与 (1.158) 式对比，会发现 (11.44) 式方括号中的函数 $p\dot{q} - H(q,p)$ 在形式上很像拉格朗日量 L。但是，(1.158) 式中的广义动量是用 $p = \partial L/\partial \dot{q}$ 定义的，而这里的 $p(t)$ 是独立的变量，源自动量本征值完备集的插入。因此，这里的 $p\dot{q} - H(q,p)$ 跟拉格朗日量 L 并不完全相同。

对于一维空间中一个粒子在势场中的运动，哈密顿量的形式为

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \tag{11.45}$$

其中第一项描述粒子的动能，它正比于粒子动量 p 的平方，而 m 是粒子的质量；第二项 $V(q)$ 是势能，它不依赖于 p。此时，哈密顿量对广义动量的依赖性体现为广义动量的二次项，这是一种很常见的情况。像这样的情况，可以把广义动量积分显明地作出来，简化泛函积分的形式。

当哈密顿量取 (11.45) 的形式时，Feynman 核 (11.40) 中的对 p_n 的积分化为

$$\begin{aligned} I_n &\equiv \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon\left[p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} - H(\bar{q}_n, p_n)\right]\right\} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi} \exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon\left[p_n\dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} - V(\bar{q}_n)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{11.46}$$

其中 $\dot{q}_n \equiv (q_{n+1} - q_n)/\varepsilon$。将上式方括号中的前两项凑成完全平方的形式，有

$$\begin{aligned} p_n\dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} &= -\frac{1}{2m}\left(p_n^2 - 2mp_n\dot{q}_n + m^2\dot{q}_n^2 - m^2\dot{q}_n^2\right) \\ &= -\frac{1}{2m}(p_n - m\dot{q}_n)^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_n^2 = -\frac{\tilde{p}_n^2}{2m} + \frac{m}{2}\dot{q}_n^2, \end{aligned} \tag{11.47}$$

其中 $\tilde{p}_n \equiv p_n - m\dot{q}_n$。将积分变量换成 $\tilde{p}_n$，有 $\mathrm{d}p_n = \mathrm{d}\tilde{p}_n$，故

$$I_n = \exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n)\right]\right\} \int \frac{\mathrm{d}\tilde{p}_n}{2\pi} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\varepsilon\tilde{p}_n^2}{2m}\right). \tag{11.48}$$

现在，对 $\tilde{p}_n$ 的积分具有 Gauss 积分的形式。**Gauss 积分**为

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{e}^{-b\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}.} \tag{11.49}$$

这个积分在 $\mathrm{Re}\, b > 0$ 的情况下才是收敛的。在 b 的复平面上作解析延拓，就能在 $\mathrm{Re}\, b \leq 0$ 的情况下使用 (11.49) 式。取 $b = \mathrm{i}\varepsilon/(2m)$，推出

$$\int \frac{\mathrm{d}\tilde{p}_n}{2\pi} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\varepsilon\tilde{p}_n^2}{2m}\right) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2m\pi}{\mathrm{i}\varepsilon}} = \left(\frac{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}{m}\right)^{-1/2}, \tag{11.50}$$

从而

$$I_n = \left(\frac{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}{m}\right)^{-1/2} \exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n)\right]\right\}. \tag{11.51}$$

利用上式将 Feynman 核 (11.40) 化为

$$\begin{aligned}\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\prod_{n=0}^{N-1}I_n\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}{m}\right)^{-N/2}\int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\,\exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2-V(\bar{q}_n)\right]\right\}\\ &= C\int\mathcal{D}q\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\left[\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)\right]\right\},\end{aligned}\tag{11.52}$$

其中

$$C\equiv\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}{m}\right)^{-N/2}\tag{11.53}$$

是一个发散的归一化常数。注意，$m\dot{q}^2/2$ 是用广义速度表达的粒子动能，而动能与势能之差正是拉格朗日量

$$L(q,\dot{q})=\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q).\tag{11.54}$$

对时间 t 积分，得到作用量

$$S(q,\dot{q})=\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\,L(q,\dot{q})=\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\left[\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)\right],\tag{11.55}$$

它是 $q(t)$ 和 $\dot{q}(t)$ 的泛函。以此将 Feynman 核 (11.52) 改写为

$$\boxed{\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle = C\int\mathcal{D}q\,\exp[\mathrm{i}S(q,\dot{q})].}\tag{11.56}$$

上式称为**坐标空间中的路径积分**，它只对坐标空间中的 $q(t)$ 路径进行积分。

从分析力学的角度来看，由哈密顿量 $H(q,p)$ 求拉格朗日量 $L(q,\dot{q})$ 的流程如下。先寻找函数 $p\dot{q}-H(q,p)$ 对 p 的偏导数为零的**稳定点** (stationary point)，即

$$0=\frac{\partial}{\partial p}[p\dot{q}-H(q,p)]=\dot{q}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p},\tag{11.57}$$

然后由哈密顿量的形式 (11.45) 推出

$$\dot{q}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p}=\frac{p}{m},\tag{11.58}$$

即 p 与 $\dot{q}$ 的关系是 $p=m\dot{q}$。将它代入到 $p\dot{q}-H(q,p)$，就推出拉格朗日量 (11.54)。这是从哈密顿体系过渡到拉格朗日体系的过程，而上述讨论表明，在路径积分中积掉 $p(t)$ 函数也能实现这种过渡。

假如把约化普朗克常数 $\hbar=1$ 显明写出来，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}$，而 (11.56) 式变成

$$\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle = C\int\mathcal{D}q\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(q,\dot{q})\right].\tag{11.59}$$

$\hbar \to 0$ 是量子力学的**经典极限**，在这里对应于 $S(q,\dot{q}) \gg \hbar$。如果 $S(q,\dot{q}) \gg \hbar$，那么被积函数 $\exp[\mathrm{i}S(q,\dot{q})/\hbar] = \cos[S(q,\dot{q})/\hbar] + \mathrm{i}\sin[S(q,\dot{q})/\hbar]$ 就变成一个快速振荡的函数，导致相邻 $q(t)$ 路径的贡献会相互抵消。这种抵消在 $S(q,\dot{q})$ 变化缓慢的区域才可以避免，因此，对路径积分的主要贡献来自于作用量 $S(q,\dot{q})$ 关于 $q(t)$ 和 $\dot{q}(t)$ 的变分稳定点处，即满足 $\delta S(q,\dot{q}) = 0$ 的地方。而作用量原理告诉我们，$\delta S(q,\dot{q}) = 0$ 对应于系统的经典运动轨迹。可见，在 $S(q,\dot{q})$ 的变分稳定点处求路径积分，就可以得到系统的经典描述。如果满足 $\delta S(q,\dot{q}) = 0$ 的经典运动轨迹不只一条，比如在双缝干涉实验中的情况，那么这些轨迹的贡献会发生相干叠加，体现出显著的量子效应。

(11.53) 式表明，(11.56) 式中的归一化常数 C 在 $N \to \infty$ 极限下是发散的，但这并没有阻碍我们从 (11.56) 式中获取有用信息，因为重要的是路径积分对 $q(t)$ 泛函的依赖性，而不是路径积分的绝对大小。因此，我们可以把 C 吸收到泛函测度 $\mathcal{D}q$ 的重新定义之中，将 (11.56) 式改写为

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}q \, \exp[\mathrm{i}S(q,\dot{q})]. \tag{11.60}$$

11.2　标量场的路径积分量子化

本节将路径积分方法推广到标量场的量子理论中。

11.2.1　Feynman 核

考虑实标量场 $\phi(x)$ 构成的系统，相应的广义坐标是每个空间点 $\mathbf{x}$ 处的场 $\phi(\mathbf{x},t)$，因而系统具有无穷多个连续的自由度。参考 6.1.1 小节，在 Heisenberg 绘景中将哈密顿量算符写成

$$H(\phi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{H}}) = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H}(\phi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{H}}), \tag{11.61}$$

其中 $\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)$ 是共轭动量密度，而哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}(\phi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{H}}) = \frac{1}{2}(\pi^{\mathrm{H}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi^{\mathrm{H}})^2 + V(\phi^{\mathrm{H}}). \tag{11.62}$$

$V(\phi^{\mathrm{H}})$ 是包含了实标量场质量项的势能密度。比如，在 ϕ^4 理论中，有

$$V(\phi^{\mathrm{H}}) = \frac{1}{2}m^2(\phi^{\mathrm{H}})^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi^{\mathrm{H}})^4. \tag{11.63}$$

转到 Schrödinger 绘景，有

$$\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}, \quad \pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}, \tag{11.64}$$

而哈密顿量密度表达为

$$\mathcal{H}(\phi^{\mathrm{S}}, \pi^{\mathrm{S}}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathcal{H}(\phi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{H}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \frac{1}{2}(\pi^{\mathrm{S}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi^{\mathrm{S}})^2 + V(\phi^{\mathrm{S}}). \tag{11.65}$$

设场算符 $\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})$ 和正则共轭场算符 $\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})$ 的本征态为 $|\phi\rangle$ 和 $|\pi\rangle$，满足本征方程

$$\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\,|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})\,|\phi\rangle\,, \quad \pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\,|\pi\rangle = \pi(\mathbf{x})\,|\pi\rangle\,, \tag{11.66}$$

其中本征值 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $\pi(\mathbf{x})$ 分别是 $|\phi\rangle$ 和 $|\pi\rangle$ 对应的场构型 (field configuration，即场的分布) 和正则共轭场构型。

引入 $|\phi,t\rangle \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\phi\rangle$，则

$$\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)|\phi,t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\phi\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi,t\rangle\,, \tag{11.67}$$

即 $|\phi,t\rangle$ 是场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)$ 在 t 时刻的瞬时本征态，其本征值 $\phi(\mathbf{x})$ 是与 t 无关的场构型。从而，**Feynman 核**

$$\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle = \langle\phi_b|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht_b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht_a}|\phi_a\rangle = \langle\phi_b|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_b-t_a)}|\phi_a\rangle \tag{11.68}$$

表示从 t_a 时刻场构型 $\phi_a(\mathbf{x})$ 跃迁到 t_b 时刻场构型 $\phi_b(\mathbf{x})$ 的概率振幅。

为了讨论场的泛函积分，我们需要先把时间和空间离散化，再取连续极限，这类似于上一节和 2.2 节的讨论。具体来说，如同 (11.13) 式所在段落的处理方式，将时间间隔 $[t_a,t_b]$ 等分成 N 个长度为 ε 的小间隔，各分点时刻为 $t_n\,(n=0,1,\cdots,N)$。进一步，将每个时刻的场限制在一个有限的空间体积 V 里面，然后把 V 分隔成 K 个大小相等的体积元 ΔV，每个体积元的中心坐标为 $\mathbf{x}_k\,(k=1,2,\cdots,K)$。于是，连续极限的取法是先令 $K\to\infty$，再令 $V\to\infty$，最后令 $N\to\infty$。

在 t_n 时刻，记场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t_n)$ 的本征态为 $|\phi_n,t_n\rangle$，满足 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t_n)|\phi_n,t_n\rangle = \phi_n(\mathbf{x})|\phi_n,t_n\rangle$。只要 ΔV 足够小，连续的场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t_n)$ 就能用 K 个分立的算符 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_k,t_n)$ 来代表，它们是各个体积元中的广义坐标算符。设 $|\phi_{n,k},t_n\rangle$ 为 t_n 时刻第 k 个体积元内算符 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_k,t_n)$ 的本征态，满足本征方程

$$\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_k,t_n)|\phi_{n,k},t_n\rangle = \phi_{n,k}|\phi_{n,k},t_n\rangle \tag{11.69}$$

和完备性关系

$$\int \mathrm{d}\phi_{n,k}|\phi_{n,k},t_n\rangle\langle\phi_{n,k},t_n| = \mathbb{I}. \tag{11.70}$$

于是，可将 $|\phi_n,t_n\rangle$ 近似为 K 个体积元内的本征态的张量积

$$|\phi_n,t_n\rangle \simeq |\phi_{n,1},t_n\rangle\otimes|\phi_{n,2},t_n\rangle\otimes\cdots\otimes|\phi_{n,K},t_n\rangle\,,\quad n=0,1,\cdots,N, \tag{11.71}$$

其中 $n=0$ 和 $n=N$ 分别对应于 $t_a=t_0$ 和 $t_b=t_N$ 时刻的瞬时本征态

$$|\phi_a,t_a\rangle \simeq |\phi_{0,1},t_0\rangle\otimes|\phi_{0,2},t_0\rangle\otimes\cdots\otimes|\phi_{0,K},t_0\rangle\,, \tag{11.72}$$

$$|\phi_b,t_b\rangle \simeq |\phi_{N,1},t_N\rangle\otimes|\phi_{N,2},t_N\rangle\otimes\cdots\otimes|\phi_{N,K},t_N\rangle\,. \tag{11.73}$$

从而，相邻时刻本征态的内积为

$$\begin{aligned}\langle\phi_{n+1},t_{n+1}|\phi_n,t_n\rangle &\simeq \langle\phi_{n+1,1},t_{n+1}|\phi_{n,1},t_n\rangle\langle\phi_{n+1,2},t_{n+1}|\phi_{n,2},t_n\rangle\cdots\langle\phi_{n+1,K},t_2|\phi_{n,K},t_n\rangle\\ &= \prod_{k=1}^{K}\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle\,.\end{aligned} \tag{11.74}$$

对完备性关系 (11.70) 两边作张量积，推出

$$\int\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)|\phi_{n,1},t_n\rangle\langle\phi_{n,1},t_n|\otimes|\phi_{n,2},t_n\rangle\langle\phi_{n,2},t_n|\otimes\cdots\otimes|\phi_{n,K},t_n\rangle\langle\phi_{n,K},t_n|=\mathbb{I}, \tag{11.75}$$

这等价于 $|\phi_n,t_n\rangle$ 的完备性关系

$$\int\mathrm{d}^K\phi_n\,|\phi_n,t_n\rangle\langle\phi_n,t_n|=\mathbb{I}, \tag{11.76}$$

其中 K 重积分元

$$\mathrm{d}^K\phi_n=\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}. \tag{11.77}$$

利用完备性关系 (11.76)，在 Feynman 核 $\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle$ 中插入 $N-1$ 个分点时刻的本征态完备集，得到

$$\begin{aligned}\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle&\simeq\int\mathrm{d}^K\phi_{N-1}\cdots\int\mathrm{d}^K\phi_2\int\mathrm{d}^K\phi_1\,\langle\phi_N,t_N|\phi_{N-1},t_{N-1}\rangle\cdots\langle\phi_2,t_2|\phi_1,t_1\rangle\langle\phi_1,t_1|\phi_0,t_0\rangle\\&\simeq\int\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{N-1,k}\right)\cdots\int\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{2,k}\right)\int\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{1,k}\right)\\&\quad\times\left(\prod_{k=1}^{K}\langle\phi_{N,k},t_N|\phi_{N-1,k},t_{N-1}\rangle\right)\cdots\left(\prod_{k=1}^{K}\langle\phi_{2,k},t_2|\phi_{1,k},t_1\rangle\right)\left(\prod_{k=1}^{K}\langle\phi_{1,k},t_1|\phi_{0,k},t_0\rangle\right)\\&=\int\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)\prod_{n=0}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle\right),\end{aligned} \tag{11.78}$$

第二步用到 (11.74) 式。注意，取连续极限之后，这里的近似表达式将变成精确结果。

在第 k 个体积元中，将 Schrödinger 绘景里的场算符和共轭动量算符分别记作 $\phi_k^{\mathrm{S}}\equiv\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}_k)$ 和 $\pi_k^{\mathrm{S}}\equiv\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}_k)$，相应的本征方程是

$$\phi_k^{\mathrm{S}}|\phi_{n,k}\rangle=\phi_{n,k}|\phi_{n,k}\rangle,\quad\pi_k^{\mathrm{S}}|\pi_{n,k}\rangle=\pi_{n,k}|\pi_{n,k}\rangle, \tag{11.79}$$

其中 $|\phi_{n,k}\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht_n}|\phi_{n,k},t_n\rangle$，而 $|\pi_{n,k}\rangle$ 是 π_k^{S} 的本征态。参考 2.2 节的讨论，第 k 个体积元中的广义动量算符应该是 π_k^{S} 乘以体积 ΔV。推广 (11.3) 第二式和 (11.4) 式，得到 $|\pi_{n,k}\rangle$ 的完备性关系

$$\int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}|\pi_{n,k}\rangle\langle\pi_{n,k}|=\mathbb{I} \tag{11.80}$$

和广义动量本征态 $|\pi_{n,k}\rangle$ 与广义坐标本征态 $|\phi_{n',k}\rangle$ 之间的内积

$$\langle\phi_{n',k}|\pi_{n,k}\rangle=\exp(\mathrm{i}\Delta V\pi_{n,k}\phi_{n',k}), \tag{11.81}$$

其中 n 与 n' 可以不相等。

第 k 个体积元中的哈密顿量算符近似为 $H_k(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})\simeq\Delta V\,\mathcal{H}(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})$，相邻时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的跃迁振幅是

$$\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle=\langle\phi_{n+1,k}|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_k(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})\varepsilon}|\phi_{n,k}\rangle$$

$$= \langle\phi_{n+1,k}|\phi_{n,k}\rangle - \mathrm{i}\varepsilon\Delta V\,\langle\phi_{n+1,k}|\,\mathcal{H}(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})\,|\phi_{n,k}\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{11.82}$$

利用 (11.80) 和 (11.81) 式，将上式第一项化为

$$\begin{aligned}\langle\phi_{n+1,k}|\phi_{n,k}\rangle &= \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\langle\phi_{n+1,k}|\pi_{n,k}\rangle\langle\pi_{n,k}|\phi_{n,k}\rangle\\ &= \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\exp[\mathrm{i}\Delta V\pi_{n,k}(\phi_{n+1,k}-\phi_{n,k})].\end{aligned} \tag{11.83}$$

由哈密顿量密度的具体形式 (11.65) 和本征方程 (11.79) 推出

$$\langle\pi_{n,k}|\,\mathcal{H}(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})\,|\phi_{n,k}\rangle = \langle\pi_{n,k}|\left[\frac{1}{2}(\pi_k^{\mathrm{S}})^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi_k^{\mathrm{S}})^2+V(\phi_k^{\mathrm{S}})\right]|\phi_{n,k}\rangle = \langle\pi_{n,k}|\,\mathcal{H}(\phi_{n,k},\pi_{n,k})\,|\phi_{n,k}\rangle\,, \tag{11.84}$$

从而将 (11.82) 式中的 ε^1 阶振幅表达为

$$\begin{aligned}\langle\phi_{n+1,k}|\,\mathcal{H}(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})\,|\phi_{n,k}\rangle &= \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\langle\phi_{n+1,k}|\pi_{n,k}\rangle\langle\pi_{n,k}|\,\mathcal{H}(\phi_k^{\mathrm{S}},\pi_k^{\mathrm{S}})\,|\phi_{n,k}\rangle\\ &= \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\langle\phi_{n+1,k}|\pi_{n,k}\rangle\langle\pi_{n,k}|\,\mathcal{H}(\phi_{n,k},\pi_{n,k})\,|\phi_{n,k}\rangle\\ &= \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\langle\phi_{n+1,k}|\pi_{n,k}\rangle\langle\pi_{n,k}|\phi_{n,k}\rangle\,\mathcal{H}_{n,k}\\ &= \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta V\pi_{n,k}(\phi_{n+1,k}-\phi_{n,k})}\mathcal{H}_{n,k},\end{aligned} \tag{11.85}$$

其中 $\mathcal{H}_{n,k}\equiv\mathcal{H}(\phi_{n,k},\pi_{n,k})$。于是，(11.82) 式化为

$$\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle = \int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta V\pi_{n,k}(\phi_{n+1,k}-\phi_{n,k})}(1-\mathrm{i}\varepsilon\Delta V\mathcal{H}_{n,k})+\mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{11.86}$$

参考 (11.39) 式，取 $N\to\infty$ 的极限，推出

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta V\pi_{n,k}(\phi_{n+1,k}-\phi_{n,k})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\Delta V\mathcal{H}_{n,k}}. \tag{11.87}$$

取连续极限，将 Feynman 核 (11.78) 表达为

$$\begin{aligned}\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle &= \lim_{N\to\infty}\lim_{V\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)\prod_{n=0}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\lim_{V\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)\\ &\quad\times\prod_{n=0}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\int\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta V\pi_{n,k}(\phi_{n+1,k}-\phi_{n,k})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\Delta V\mathcal{H}_{n,k}}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\lim_{V\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)\int\prod_{n=0}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\right)\end{aligned}$$

$$\times \exp\left[\mathrm{i}\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon\sum_{k=1}^{K}\Delta V\left(\pi_{n,k}\frac{\phi_{n+1,k}-\phi_{n,k}}{\varepsilon}-\mathcal{H}_{n,k}\right)\right]. \tag{11.88}$$

在连续极限下，上式中的积分化为泛函积分，有

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{V\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)\to\int\mathcal{D}\phi, \tag{11.89}$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{V\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int\prod_{n=0}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\frac{\Delta V\mathrm{d}\pi_{n,k}}{2\pi}\right)\to\int\mathcal{D}\pi, \tag{11.90}$$

而指数上的求和化为积分，推出相空间中的路径积分

$$\boxed{\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle=\int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\pi\,\exp\left(\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\,\{\pi(x)\partial_0\phi(x)-\mathcal{H}[\phi(x),\pi(x)]\}\right),} \tag{11.91}$$

其中 $\int\mathcal{D}\phi$ 对所有满足边界条件 $\phi(\mathbf{x},t_a)=\phi_a(\mathbf{x})$ 和 $\phi(\mathbf{x},t_b)=\phi_b(\mathbf{x})$ 的路径 $\phi(\mathbf{x},t)$ 进行积分，而 $\int\mathcal{D}\pi$ 对所有 $\pi(\mathbf{x},t)$ 路径进行积分。

由于 (11.62) 式中哈密顿量密度 $\mathcal{H}$ 依赖于共轭动量密度的平方，我们可以把 (11.91) 式中的 $\int\mathcal{D}\pi$ 积分显明地作出来。先将 (11.91) 式中花括号里的项化为

$$\begin{aligned}\pi\partial_0\phi-\mathcal{H}(\phi,\pi)&=\pi\partial_0\phi-\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-V(\phi)\\&=-\frac{1}{2}[\pi^2-2\pi\partial_0\phi+(\partial_0\phi)^2-(\partial_0\phi)^2]-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-V(\phi)\\&=-\frac{1}{2}(\pi-\partial_0\phi)^2+\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-V(\phi)\\&=-\frac{1}{2}\tilde{\pi}^2+\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-V(\phi),\end{aligned} \tag{11.92}$$

其中 $\tilde{\pi}\equiv\pi-\partial_0\phi$。再将 (11.91) 式中的泛函积分变量 π 替换成 $\tilde{\pi}$，有 $\mathcal{D}\pi=\mathcal{D}\tilde{\pi}$，故

$$\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle=\int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\tilde{\pi}\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left[-\frac{\tilde{\pi}^2}{2}+\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right]\right\}, \tag{11.93}$$

其中

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi-V(\phi) \tag{11.94}$$

正是相应的拉氏量。对 $\tilde{\pi}$ 的泛函积分给出归一化常数

$$C\equiv\int\mathcal{D}\tilde{\pi}\,\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left(-\frac{\tilde{\pi}^2}{2}\right)\right], \tag{11.95}$$

以此写下场空间中的路径积分

$$\boxed{\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle=C\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right].} \tag{11.96}$$

上式对场空间中所有满足边界条件 $\phi(\mathbf{x},t_a)=\phi_a(\mathbf{x})$ 和 $\phi(\mathbf{x},t_b)=\phi_b(\mathbf{x})$ 的路径进行积分。在相对论性场论中，拉氏量 $\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ 是一个 Lorentz 标量，因而上式具有显明的 Lorentz 不变性。此外，拉氏量具有的其它对称性也将显明地保持在路径积分表达式中。由于各种对称性和相应的守恒定律在量子场论中起着至关重要的作用，我们倾向于使用拉氏量而非哈密顿量来表达场论体系。以拉氏量作为量子场论的出发点，则哈密顿量是从拉氏量导出来的。

11.2.2 多点关联函数和生成泛函

本小节推导多点关联函数的路径积分表达式。

首先，利用上一小节中的离散化方法计算 $\langle\phi_b,t_b|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_i)\,|\phi_a,t_a\rangle$，即在 Feynman 核中插入场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i)=\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l,t_p)$，其中 $t_p=x_i^0$ 是集合 $\{t_n\}_{n=1}^N$ 里面的某个时刻，而 $\mathbf{x}_l=\mathbf{x}_i$ 是集合 $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$ 里面的某个空间坐标。根据本征方程 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l,t_p)\,|\phi_{p,l},t_p\rangle=\phi_{p,l}\,|\phi_{p,l},t_p\rangle$，有

$$\begin{aligned}&\langle\phi_{p+1},t_{p+1}|\,\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l,t_p)\,|\phi_p,t_p\rangle\\ \simeq\;&\langle\phi_{p+1,1},t_{p+1}|\phi_{p,1},t_p\rangle\cdots\langle\phi_{p+1,l},t_{p+1}|\,\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l,t_p)\,|\phi_{p,l},t_p\rangle\cdots\langle\phi_{p+1,K},t_{p+1}|\phi_{p,K},t_p\rangle\\ =\;&\phi_{p,l}\prod_{k=1}^K\langle\phi_{p+1,k},t_{p+1}|\phi_{p,k},t_p\rangle\,.\end{aligned}\tag{11.97}$$

在 $\langle\phi_b,t_b|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_i)\,|\phi_a,t_a\rangle$ 中插入 $N-1$ 个分点时刻的本征态完备集，推出

$$\begin{aligned}&\langle\phi_b,t_b|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_i)\,|\phi_a,t_a\rangle\\ \simeq\;&\int\left(\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}^K\phi_n\right)\langle\phi_N,t_N|\phi_{N-1},t_{N-1}\rangle\cdots\langle\phi_{p+1},t_{p+1}|\,\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l,t_p)\,|\phi_p,t_p\rangle\cdots\langle\phi_1,t_1|\phi_0,t_0\rangle\\ \simeq\;&\int\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^K\mathrm{d}\phi_{n,k}\right)\phi_{p,l}\prod_{n=0}^{N-1}\left(\prod_{k=1}^K\langle\phi_{n+1,k},t_{n+1}|\phi_{n,k},t_n\rangle\right).\end{aligned}\tag{11.98}$$

注意,为了利用 (11.97) 式将场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i)$ 转化为 c 数 $\phi_{p,l}$,在第二步中应该将 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i)=\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l,t_p)$ 夹在 $|\phi_{p+1},t_{p+1}\rangle\langle\phi_{p+1},t_{p+1}|$ 与 $|\phi_p,t_p\rangle\langle\phi_p,t_p|$ 之间。上式与 (11.78) 式的不同之处仅在于被积函数中多了一个 $\phi_{p,l}$ 因子。取连续极限，得到泛函积分

$$\langle\phi_b,t_b|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_i)\,|\phi_a,t_a\rangle=\int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\pi\,\phi(x_i)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\,[\pi\partial_0\phi-\mathcal{H}(\phi,\pi)]\right\}.\tag{11.99}$$

与 (11.91) 式比较可知，在 Feynman 核中插入一个场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i)$ 相当于在路径积分的被积函数中增加一个经典场因子 $\phi(x_i)$。尽管在上述计算中一开始要求 x_i^0 和 $\mathbf{x}_i$ 分别是集合 $\{t_n\}_{n=1}^N$ 和 $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$ 中的元素，但在取连续极限之后，x_i^0 可取 t_a 与 t_b 之间的任意值，而 $\mathbf{x}_i$ 可取任意空间坐标。

进一步，再插入一个场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(x_j)=\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_m,t_q)$，其中 $t_q=x_j^0\in\{t_n\}_{n=1}^N$，而 $\mathbf{x}_m=\mathbf{x}_j\in\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$。如果 $x_i^0>x_j^0$，则可类似地得到

$$\langle\phi_b,t_b|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_i)\phi^{\mathrm{H}}(x_j)\,|\phi_a,t_a\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} \mathrm{d}^K \phi_n\right) \langle \phi_N, t_N | \phi_{N-1}, t_{N-1}\rangle \cdots \langle \phi_{p+1}, t_{p+1} | \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l, t_p) | \phi_p, t_p\rangle \\
&\quad \times \cdots \langle \phi_{q+1}, t_{q+1} | \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_m, t_q) | \phi_q, t_q\rangle \cdots \langle \phi_1, t_1 | \phi_0, t_0\rangle \\
&\simeq \int \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^{K} \mathrm{d}\phi_{n,k}\right) \phi_{p,l}\phi_{q,m} \prod_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=1}^{K} \langle \phi_{n+1,k}, t_{n+1} | \phi_{n,k}, t_n\rangle\right),
\end{aligned}
\tag{11.100}
$$

取连续极限后推出泛函积分

$$
\langle \phi_b, t_b | \phi^{\mathrm{H}}(x_i)\phi^{\mathrm{H}}(x_j) | \phi_a, t_a\rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi\, \phi(x_i)\phi(x_j) \exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, [\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\phi,\pi)]\right\}. \tag{11.101}
$$

但是，如果 $x_i^0 < x_j^0$，则 (11.100) 式不能成立，原因如下。插入 $N-1$ 个分点时刻的本征态完备集时，需要让它们对应的时刻从右到左由小到大排列，以保证各相邻时刻的振幅总是沿着时间正向演化，这会导致场空间中的积分路径也沿着时间正向演化。然而，为了将算符 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i)$ 和 $\phi^{\mathrm{H}}(x_j)$ 转化成 c 数 $\phi_{p,l}$ 和 $\phi_{q,m}$，需要在 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i) = \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_l, t_p)$ 右边插入 $|\phi_p, t_p\rangle\langle\phi_p, t_p|$，而在 $\phi^{\mathrm{H}}(x_j) = \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}_m, t_q)$ 右边插入 $|\phi_q, t_q\rangle\langle\phi_q, t_q|$，故 $\phi^{\mathrm{H}}(x_i)$ 位于 $\phi^{\mathrm{H}}(x_j)$ 左方意味着 $|\phi_p, t_p\rangle\langle\phi_p, t_p|$ 位于 $|\phi_q, t_q\rangle\langle\phi_q, t_q|$ 左方，这与 $t_p = x_i^0 < x_j^0 = t_q$ 的时序不合。正确的做法是，当 $x_i^0 < x_j^0$ 时，将 (11.101) 式中的 x_i 和 x_j 对调，得到

$$
\langle \phi_b, t_b | \phi^{\mathrm{H}}(x_j)\phi^{\mathrm{H}}(x_i) | \phi_a, t_a\rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi\, \phi(x_j)\phi(x_i) \exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, [\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\phi,\pi)]\right\}. \tag{11.102}
$$

上式右边泛函积分中 $\phi(x_j)$ 和 $\phi(x_i)$ 都是 c 数，可以交换它们的位置而不改变积分结果，因而这个结果实际上与 (11.101) 式相等。

利用**时序乘积**，将 $x_i^0 > x_j^0$ 和 $x_i^0 < x_j^0$ 两种情况统一写成

$$
\langle \phi_b, t_b | \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_i)\phi^{\mathrm{H}}(x_j)] | \phi_a, t_a\rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi\, \phi(x_i)\phi(x_j) \exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, [\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\phi,\pi)]\right\}. \tag{11.103}
$$

耐人寻味的是，路径积分方法自然而然地涉及到两个场算符的时序乘积。推广到 n 个场算符的情况，有

$$
\begin{aligned}
&\langle \phi_b, t_b | \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)] | \phi_a, t_a\rangle \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, [\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\phi,\pi)]\right\}.
\end{aligned}
\tag{11.104}
$$

相比于 (11.91) 式，上式泛函积分的被积函数中多了 n 个经典场的乘积 $\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$，这并不影响积掉 $\int\mathcal{D}\pi$ 以推出场空间中路径积分表达式的过程。类似于 (11.96) 式，积掉 $\int\mathcal{D}\pi$ 之后，得到

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\langle \phi_b, t_b | \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)] | \phi_a, t_a\rangle \\
&= C \int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp\left[\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right],
\end{aligned}
}
\tag{11.105}
$$

其中归一化常数 C 由 (11.95) 式给出。

(11.105) 式左边与 n 点关联函数 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0| \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]|0\rangle$ 有所不同，后者是 n 个场算符在真空态 $|0\rangle$ 上的期待值。为了推出 n 点关联函数的路径积分表达式，需要借助哈密顿量 H 的本征态 $|n\rangle$，相应的本征方程是

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle. \tag{11.106}$$

通过调整能量零点，可使 $E_n \geq 0$。$n = 0$ 对应于真空态 $|0\rangle$，其能量本征值 E_0 最低，其它能量本征值满足 $E_n > E_0$ $(n \neq 0)$。假设能量本征态 $|n\rangle$ 满足完备性关系和正交归一关系，

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}, \quad \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \tag{11.107}$$

那么，可将场算符 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, t)$ 的瞬时本征态 $|\phi, t\rangle$ 表达为

$$|\phi, t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\phi\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|n\rangle\langle n|\phi\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n t}|n\rangle\langle n|\phi\rangle, \tag{11.108}$$

从而

$$\langle n|\phi, t\rangle = \sum_{n'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{n'}t}\langle n|n'\rangle\langle n'|\phi\rangle = \sum_{n'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{n'}t}\delta_{nn'}\langle n'|\phi\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n t}\langle n|\phi\rangle. \tag{11.109}$$

利用上述公式，将 Feynman 核化为

$$\langle \phi_b, t_b|\phi_a, t_a\rangle = \sum_n \langle \phi_b, t_b|n\rangle\langle n|\phi_a, t_a\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t_b - t_a)}\langle \phi_b|n\rangle\langle n|\phi_a\rangle. \tag{11.110}$$

在 Feynman 核中插入 n 个场算符的时序乘积，推出

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_b, t_b| \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]|\phi_a, t_a\rangle \\
&= \sum_{nn'} \langle \phi_b, t_b|n'\rangle\langle n'| \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]|n\rangle\langle n|\phi_a, t_a\rangle \\
&= \sum_{nn'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{n'}t_b - E_n t_a)}\langle \phi_b|n'\rangle\langle n|\phi_a\rangle\langle n'| \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]|n\rangle.
\end{aligned} \tag{11.111}$$

求和式中 $n = n' = 0$ 的项包含 n 点关联函数 $\langle 0| \mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]|0\rangle$，我们需要想办法把它的贡献分离出来。

如果取 $t_a \to -\infty$、$t_b \to +\infty$ 的极限，则 (11.111) 式中的指数函数

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{n'}t_b - E_n t_a)} = \cos(E_{n'}t_b - E_n t_a) - \mathrm{i}\sin(E_{n'}t_b - E_n t_a) \tag{11.112}$$

会不断地振荡，而不会发生衰减。为了将指数的振荡行为转化成衰减行为，引入变量

$$\tau \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}t, \tag{11.113}$$

其中 $0 < \delta < \pi$。从而

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{n'}t_b - E_n t_a)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{n'}\tau_b - E_n\tau_a)\exp(-\mathrm{i}\delta)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{n'}\tau_b - E_n\tau_a)(\cos\delta - \mathrm{i}\sin\delta)}$$

图 11.2: 在 t 的复平面上顺时针转动 δ 角。

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{n'}\tau_b - E_n\tau_a)\cos\delta}\mathrm{e}^{-(E_{n'}\tau_b - E_n\tau_a)\sin\delta}. \tag{11.114}$$

$0<\delta<\pi$ 保证 $\sin\delta>0$，因此上式中的因子 $\mathrm{e}^{-(E_{n'}\tau_b - E_n\tau_a)\sin\delta}$ 会在 $\tau_a\to-\infty$、$\tau_b\to+\infty$ 的极限下发生衰减。由于 E_0 是最低的能量，(11.111) 式中 $n=n'=0$ 的项衰减得最慢，因而在这种极限下只需保留 $n=n'=0$ 的项。

当 τ_a 和 τ_b 取实数值时，$t_a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\tau_a$ 和 $t_b=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\tau_b$ 的取值是在 t 的复平面上顺时针转动 δ 角，如图 11.2 所示。以上做法对应的极限式是

$$\lim_{\substack{\tau_a\to-\infty\\ \tau_b\to+\infty}}\left\langle\phi_b,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\tau_b\right|\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\left|\phi_a,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\tau_a\right\rangle. \tag{11.115}$$

当 $\delta\to0$ 时，上式趋向于

$$\lim_{\substack{t_a\to-\infty\\ t_b\to+\infty}}\langle\phi_b,t_b|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|\phi_a,t_a\rangle. \tag{11.116}$$

将 t_a 和 t_b 视作复变量，假设 $\left\langle\phi_b,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\tau_b\right|\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\left|\phi_a,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\tau_a\right\rangle$ 是 t_a 和 t_b 的解析函数，那么我们可以先计算 (11.115) 式，再将所得结果**解析延拓**到 $\delta=0$ 处以得到 (11.116) 式的结果。

取转动角 $\delta=\pi/2$，则

$$t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\tau=-\mathrm{i}\tau, \tag{11.117}$$

此时相关计算会比较便捷，这样的转动称为 **Wick 转动**。在 Wick 转动下，(11.111) 式化为

$$\begin{aligned}&\langle\phi_b,-\mathrm{i}\tau_b|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|\phi_a,-\mathrm{i}\tau_a\rangle\\ =&\sum_{nn'}\mathrm{e}^{-(E_{n'}\tau_b-E_n\tau_a)}\langle\phi_b|n'\rangle\langle n|\phi_a\rangle\langle n'|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|n\rangle,\end{aligned} \tag{11.118}$$

取 $\tau_a\to-\infty$、$\tau_b\to+\infty$ 的极限，只保留衰减最慢的 $n=n'=0$ 的项，得

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\tau_a\to-\infty\\ \tau_b\to+\infty}}\langle\phi_b,-\mathrm{i}\tau_b|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|\phi_a,-\mathrm{i}\tau_a\rangle\\ =&\,\mathrm{e}^{-E_0(\tau_b-\tau_a)}\langle\phi_b|0\rangle\langle0|\phi_a\rangle\langle0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle.\end{aligned} \tag{11.119}$$

同理，由 Feynman 核表达式 (11.110) 给出

$$\lim_{\substack{\tau_a\to-\infty\\ \tau_b\to+\infty}} \langle\phi_b,-\mathrm{i}\tau_b|\phi_a,-\mathrm{i}\tau_a\rangle = \mathrm{e}^{-E_0(\tau_b-\tau_a)}\langle\phi_b|0\rangle\langle 0|\phi_a\rangle\,, \tag{11.120}$$

将以上两式左右两边分别相除，推出 n 点关联函数的表达式

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle = \lim_{\substack{\tau_a\to-\infty\\ \tau_b\to+\infty}} \frac{\langle\phi_b,-\mathrm{i}\tau_b|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|\phi_a,-\mathrm{i}\tau_a\rangle}{\langle\phi_b,-\mathrm{i}\tau_b|\phi_a,-\mathrm{i}\tau_a\rangle}. \tag{11.121}$$

把这个结果解析延拓至 $\delta=0$ 处，得到

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle = \lim_{\substack{t_a\to-\infty\\ t_b\to+\infty}} \frac{\langle\phi_b,t_b|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|\phi_a,t_a\rangle}{\langle\phi_b,t_b|\phi_a,t_a\rangle}. \tag{11.122}$$

代入 (11.96) 和 (11.105) 式，有

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle\\ &= \lim_{\substack{t_a\to-\infty\\ t_b\to+\infty}} \frac{\int\mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right]}{\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right]},\end{aligned} \tag{11.123}$$

注意分子和分母中的两个归一化常数 C 正好约掉了。这里的极限让时间积分的上下限扩展到 $(-\infty,+\infty)$，可以将上式改写为

$$\boxed{\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle = \frac{\int\mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right]}{\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right]},} \tag{11.124}$$

这就是 **n 点关联函数的路径积分表达式**。注意，在使用上式进行计算时，需要用到上述解析延拓方法。由于

$$S = \int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) \tag{11.125}$$

正是作用量，可将 (11.124) 式改写为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle = \frac{\int\mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}}{\int\mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}}. \tag{11.126}$$

原则上，利用路径积分算出多点关联函数之后，结合 LSZ 约化公式 (10.102)，就能得到散射矩阵元，进而计算散射截面和衰变宽度等可观测量。

借助生成泛函的泛函导数，可以方便地计算 n 点关联函数 (11.124)。对于本节讨论的实标量场理论，**多点关联函数的生成泛函** (generating functional) 定义为

$$\boxed{Z[J] \equiv \mathcal{N}\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left(\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\{\mathcal{L}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]+J(x)\phi(x)\}\right),} \tag{11.127}$$

即在拉氏量 $\mathcal{L}$ 的基础上添加一个**经典源项** $J(x)\phi(x)$，其中**外源** (external source) $J(x)$ 是一个任意的实值经典函数，可视作一个经典力场，它是一个 Lorentz 标量场。如果将 $J(x)\phi(x)$ 加入到拉氏量中以计算实标量场 $\phi(x)$ 的经典运动方程，则 $J(x)$ 将作为一个非齐次项出现，从而影响实标量场的运动。考虑由实标量场构成的量子系统对外源 $J(x)$ 的响应，有助于我们了解此量子系统的动力学性质。不过，这样的 $J(x)$ 只是一个辅助用的函数，不需要代表实际的物理情况。$\mathcal{N}$ 是归一化常数，通过适当选取它的数值，可使生成泛函满足归一化条件

$$Z[0] = 1. \tag{11.128}$$

现在，$Z[J]$ 是 $J(x)$ 的泛函，可对它求**泛函导数** (functional derivative)。$J(x)$ 是四维时空坐标 x^μ 的函数，相应的泛函导数 $\delta/\delta J(x)$ 定义为

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x-y).} \tag{11.129}$$

这是分立变量 x_i 的求导关系 $\partial x_j/\partial x_i = \delta^i{}_j$ 在连续极限下的推广。泛函导数类似于普通导数，满足普通导数的各种法则，如乘积法则、链式法则等。利用四维 δ 函数的挑选性，进一步推出

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int \mathrm{d}^4y\, J(y)\phi(y) = \int \mathrm{d}^4y\, \delta^{(4)}(x-y)\phi(y) = \phi(x). \tag{11.130}$$

根据复合函数的链式法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\, J(y)\phi(y)\right] &= \left\{\frac{\delta}{\delta J(x)}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\, J(y)\phi(y)\right]\right\} \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\, J(y)\phi(y)\right] \\ &= \mathrm{i}\phi(x)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\, J(y)\phi(y)\right].\end{aligned} \tag{11.131}$$

对生成泛函 $Z[J]$ 求一阶泛函导数，得

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]\right\}. \tag{11.132}$$

求 n 阶泛函导数，推出

$$\frac{1}{\mathrm{i}^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)} = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]\right\}. \tag{11.133}$$

当外源 $J = 0$ 时，有

$$Z[0] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}\right), \tag{11.134}$$

归一化条件 (11.128) 意味着

$$\mathcal{N} = \left[\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}\right)\right]^{-1}. \tag{11.135}$$

于是，可将 n 点关联函数 (11.124) 表达为

$$\boxed{\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}.} \tag{11.136}$$

记 n 点关联函数为

$$G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)]\,|0\rangle\,, \tag{11.137}$$

那么，归一化条件 (11.128) 和 (11.136) 式表明，可以将生成泛函展开为

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n), \tag{11.138}$$

而 n 点关联函数是相应的展开系数。

11.2.3 四维 Euclid 空间和 Feynman 传播子

根据 (11.117) 式对 Minkowski 时空的时间坐标 $x^0 = t$ 作 **Wick 转动**，得到的变量 $\tau = \mathrm{i}t$ 可与三个空间坐标 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 组成**四维 Euclid 空间**。具体来说，设四维 Euclid 空间的坐标为 $x^\mu_{\mathrm{E}} = (\mathbf{x}_{\mathrm{E}}, x^4_{\mathrm{E}}) = (x^1_{\mathrm{E}}, x^2_{\mathrm{E}}, x^3_{\mathrm{E}}, x^4_{\mathrm{E}})$，其中

$$\boxed{\mathbf{x}_{\mathrm{E}} \equiv \mathbf{x}, \quad x^4_{\mathrm{E}} \equiv \tau = \mathrm{i}t = \mathrm{i}x^0.} \tag{11.139}$$

如图 11.3(a) 所示，当 x^4_{E} 沿实轴正向取值时，$x^0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}x^4_{\mathrm{E}}$ 沿虚轴负向取值。引入 **Euclid 度规**

$$\boxed{\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2,3,4,} \tag{11.140}$$

其中 $\delta^{\mu\nu}$ 是度规的逆。从而，协变矢量 $x_{\mathrm{E},\mu} \equiv \delta_{\mu\nu}x^\nu_{\mathrm{E}} = (x^1_{\mathrm{E}}, x^2_{\mathrm{E}}, x^3_{\mathrm{E}}, x^4_{\mathrm{E}})$ 的各个分量均与逆变矢量 x^μ_{E} 的分量相同。Euclid 坐标 x^μ_{E} 的内积 $x_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}}$ 与 Minkowski 时空坐标的内积 $x\cdot x$ 之间的关系为

$$x_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}} \equiv \delta_{\mu\nu}x^\mu_{\mathrm{E}}x^\nu_{\mathrm{E}} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = |\mathbf{x}|^2 + (x^4)^2 = |\mathbf{x}|^2 - t^2 = -x\cdot x. \tag{11.141}$$

另一方面，四维 Euclid 空间中的四维动量定义为 $p^\mu_{\mathrm{E}} = (\mathbf{p}_{\mathrm{E}}, p^4_{\mathrm{E}})$，其中

$$\boxed{\mathbf{p}_{\mathrm{E}} \equiv \mathbf{p}, \quad p^4_{\mathrm{E}} \equiv -\mathrm{i}p^0.} \tag{11.142}$$

(a) x^0 复平面上的 Wick 转动　　(b) p^0 复平面上的 Wick 转动

图 11.3: Wick 转动。

p_{E}^μ 的内积是

$$p_{\mathrm{E}}^2 = |\mathbf{p}_{\mathrm{E}}|^2 + (p^4)^2 = |\mathbf{p}|^2 - (p^0)^2 = -p^2. \tag{11.143}$$

如图 11.3(b) 所示，根据定义，$p^0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} p_{\mathrm{E}}^4$ 在 p^0 复平面上相对于 p_{E}^4 逆时针转动了 $\pi/2$ 角。当 p_{E}^4 沿实轴正向取值时，p^0 沿虚轴正向取值。这是 p^0 复平面上的 Wick 转动，它与 x^0 复平面上的 Wick 转动方向相反。之所以这样定义，是为了让能量与时间的乘积不变，即 $p_{\mathrm{E}}^4 x_{\mathrm{E}}^4 = -\mathrm{i}p^0 \mathrm{i}x^0 = p^0 x^0$，从而

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_{\mathrm{E}}^4 x_{\mathrm{E}}^4 - \mathbf{p}_{\mathrm{E}}\cdot\mathbf{x}_{\mathrm{E}})}. \tag{11.144}$$

这意味着平面波解所描述的平面波运动方向在 Wick 转动后保持不变。注意，上式中的指数并不对应于 p_{E}^μ 与 x_{E}^μ 之间的内积

$$p_{\mathrm{E}} \cdot x_{\mathrm{E}} = \delta_{\mu\nu} p_{\mathrm{E}}^\mu x_{\mathrm{E}}^\nu = p_{\mathrm{E}}^4 x_{\mathrm{E}}^4 + \mathbf{p}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{x}_{\mathrm{E}} = p^0 x^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}. \tag{11.145}$$

当 x_{E}^μ 和 p_{E}^μ 的每个分量都取实数值时，坐标体积元和动量体积元在 Minkowski 时空与四维 Euclid 空间之间的关系为

$$\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}x_{\mathrm{E}}^4\,\mathrm{d}x_{\mathrm{E}}^1\,\mathrm{d}x_{\mathrm{E}}^2\,\mathrm{d}x_{\mathrm{E}}^3, \quad \mathrm{d}^4p = \mathrm{d}p^0\,\mathrm{d}p^1\,\mathrm{d}p^2\,\mathrm{d}p^3 = \mathrm{i}\,\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^4\,\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^1\,\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^2\,\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^3, \tag{11.146}$$

即

$$\mathrm{d}^4x = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}, \quad \mathrm{d}^4p = \mathrm{i}\,\mathrm{d}^4p_{\mathrm{E}}. \tag{11.147}$$

对四维 Euclid 空间坐标的偏导数表达为

$$\partial_{\mathrm{E},\mu} = \left(\nabla_{\mathrm{E}}, \frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{E}}^4}\right) = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}x^0)}\right) = \left(\nabla, -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^0}\right). \tag{11.148}$$

根据拉氏量 (11.94)，四维 Euclid 空间中实标量场 $\phi(\mathbf{x}_{\mathrm{E}}, x_{\mathrm{E}}^4) = \phi(\mathbf{x}, \mathrm{i}t)$ 的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial^0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) = -\frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{E}}^4\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla_{\mathrm{E}}\phi)^2 - V(\phi)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi)\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi - V(\phi), \tag{11.149}$$

生成泛函 (11.127) 则变成

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{E}}[J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi \exp\left[\mathrm{i}(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi)\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi + V(\phi) - J\phi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{11.150}$$

当 $V(\phi) \geq 0$ 时，上式中的

$$\exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi)\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi + V(\phi)\right]\right\} \tag{11.151}$$

作为 $\phi(x_{\mathrm{E}})$ 的实值泛函为积分路径提供了一个指数衰减的权重因子，有助于使路径积分收敛。这是四维 Euclid 空间中的路径积分相比于 Minkowski 时空的优势。在 Minkowski 时空中，指数因子

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi)\partial_{\mu}\phi - V(\phi)\right]\right\} \tag{11.152}$$

是振荡的，因而路径积分通常不会收敛。

接下来讨论自由的实标量场，并推出 Feynman 传播子的表达式。自由实标量场的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{0,\mathrm{E}} = -\frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi)\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{11.153}$$

生成泛函是

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J] = \mathcal{N}_0\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi)\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi\right]\right\}, \tag{11.154}$$

这里用下标 0 代表自由理论中的物理量。生成泛函 $Z_{0,\mathrm{E}}[J]$ 具有泛函 Gauss 积分的形式，可以通过推广 N 维矢量空间中的 Gauss 积分来处理。

在 N 维矢量空间中，N 维实值列矢量 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}$ 之间的内积定义为

$$(v, u) \equiv v^{\mathrm{T}}u = v_i u_i, \tag{11.155}$$

注意第二步用了 Einstein 求和约定。将 N 阶实方阵 A 乘到列矢量 u 上，得到列矢量 Au，它与 v 之间的内积是

$$(v, Au) = v^{\mathrm{T}}Au = v_i A_{ij} u_j. \tag{11.156}$$

设 B 是对称、正定的 N 阶实方阵，则 $B^{\mathrm{T}} = B$，且其本征值 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ 都是正实数。通过一个 N 阶实正交矩阵 O，可将 B 对角化，得到对角矩阵

$$\tilde{B} = OBO^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_N). \tag{11.157}$$

利用 $O^{\mathrm{T}}O = \mathbf{1}$ 推出

$$(v, Bv) = v^{\mathrm{T}}Bv = v^{\mathrm{T}}O^{\mathrm{T}}OBO^{\mathrm{T}}Ov = \tilde{v}^{\mathrm{T}}\tilde{B}\tilde{v} = \sum_{i=1}^{N} b_i\tilde{v}_i^2, \tag{11.158}$$

其中 $\tilde{v} \equiv Ov$。从而，N 维 Gauss 积分

$$\int \mathrm{d}^N v \, \exp\left[-\frac{1}{2}(v, Bv)\right] = \int \mathrm{d}^N \tilde{v} \, \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} b_i \tilde{v}_i^2\right) = \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{2\pi}{b_i}} = (2\pi)^{N/2} \left(\prod_{i=1}^{N} b_i\right)^{-1/2}, \tag{11.159}$$

其中 $\mathrm{d}^N v = \mathrm{d}v_1 \, \mathrm{d}v_2 \cdots \mathrm{d}v_N$。上式第一步作变量替换 $v \to \tilde{v}$，并应用体积元变换关系 $\mathrm{d}^N \tilde{v} = |\det O| \, \mathrm{d}^N v = \mathrm{d}^N v$，第二步用到一维 Gauss 积分公式 (11.49)。利用 $\det(AB) = \det(BA)$，有

$$\prod_{i=1}^{N} b_i = \det \tilde{B} = \det(OBO^{\mathrm{T}}) = \det(O^{\mathrm{T}}OB) = \det B, \tag{11.160}$$

于是得到 **N 维 Gauss 积分公式**

$$\boxed{\int \mathrm{d}^N v \, \exp\left[-\frac{1}{2}(v, Bv)\right] = (2\pi)^{N/2} (\det B)^{-1/2}.} \tag{11.161}$$

更进一步，可以推出 N 维 Gauss 积分公式的变种

$$\boxed{\int \mathrm{d}^N v \, \exp\left[-\frac{1}{2}(v, Bv) + (u, v)\right] = (2\pi)^{N/2} (\det B)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(u, B^{-1}u)\right].} \tag{11.162}$$

推导方法如下。根据 B 矩阵的对称性，有

$$(B^{-1})^{\mathrm{T}} B = (B^{-1})^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} = (BB^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}, \quad v^{\mathrm{T}} u = \sum_{i=1}^{N} v_i u_i = u^{\mathrm{T}} v, \tag{11.163}$$

从而给出

$$\begin{aligned}(v - B^{-1}u)^{\mathrm{T}} B (v - B^{-1}u) &= v^{\mathrm{T}} B v - u^{\mathrm{T}} (B^{-1})^{\mathrm{T}} B v - v^{\mathrm{T}} B B^{-1} u + u^{\mathrm{T}} (B^{-1})^{\mathrm{T}} B B^{-1} u \\ &= v^{\mathrm{T}} B v - 2u^{\mathrm{T}} v + u^{\mathrm{T}} B^{-1} u.\end{aligned} \tag{11.164}$$

引入 $w \equiv v - B^{-1}u$，有

$$(v, Bv) - 2(u, v) = v^{\mathrm{T}} B v - 2u^{\mathrm{T}} v = w^{\mathrm{T}} B w - u^{\mathrm{T}} B^{-1} u = (w, Bw) - (u, B^{-1}u). \tag{11.165}$$

作变量替换 $v \to w$，推出

$$\int \mathrm{d}^N v \, \exp\left[-\frac{1}{2}(v, Bv) + (u, v)\right] = \int \mathrm{d}^N w \, \exp\left[-\frac{1}{2}(w, Bw) + \frac{1}{2}(u, B^{-1}u)\right], \tag{11.166}$$

根据 N 维 Gauss 积分公式 (11.161) 作出以上积分，就得到 (11.162) 式。

对于四维 Euclid 空间上的实值函数 $f(x_{\mathrm{E}})$ 和 $g(x_{\mathrm{E}})$，内积定义为

$$\boxed{(f, g) \equiv \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}} \, f(x_{\mathrm{E}}) g(x_{\mathrm{E}}).} \tag{11.167}$$

这是 (11.155) 式在函数上的推广。此时，Euclid 空间坐标 x_{E}^{μ} 取代了原来分立指标 i 的地位，因而对 i 求和转换为对 x_{E}^{μ} 积分。类似地，将 (11.156) 式推广为

$$\boxed{(f, Ag) \equiv \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}}\, f(x_{\mathrm{E}}) A(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) g(y_{\mathrm{E}})\,.} \tag{11.168}$$

在这种推广中，可将函数 $A(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 看成一个无穷阶的“连续方阵”，它以空间坐标 x_{E}^{μ} 和 y_{E}^{μ} 作为行列指标。

自由生成泛函 (11.154) 中涉及到的积分可作以下转换：

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}} \left[(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi)\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi + m^2\phi^2\right] \\
=& \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}} \left[\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\phi(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}\phi(y_{\mathrm{E}}) + m^2\phi(x_{\mathrm{E}})\phi(y_{\mathrm{E}})\right]\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}) \\
=& \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}} \left\{\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}[\phi(x_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}\phi(y_{\mathrm{E}})]\right. \\
&\left. - \phi(x_{\mathrm{E}})\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}\phi(y_{\mathrm{E}}) + m^2\phi(x_{\mathrm{E}})\phi(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\right\} \\
=& \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}} \left\{ - \partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}[\phi(x_{\mathrm{E}})\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\phi(y_{\mathrm{E}})]\right. \\
&\left. + \phi(x_{\mathrm{E}})\left[\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\right]\phi(y_{\mathrm{E}}) + m^2\phi(x_{\mathrm{E}})\phi(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\right\} \\
=& \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}}\, \phi(x_{\mathrm{E}}) \left[\left(\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu} + m^2\right)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})\right]\phi(y_{\mathrm{E}}) = (\phi, B\phi),
\end{aligned} \tag{11.169}$$

其中 $\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu} \equiv \partial/\partial x_{\mathrm{E},\mu}$，$\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu} \equiv \partial/\partial y_{\mathrm{E}}^{\mu}$。第一步用到 δ 函数的挑选性，第二、三步用了分部积分，第三、四步丢弃对积分没有贡献的全散度项。最后一步中的连续方阵定义为

$$B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) \equiv \left(\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu} + m^2\right)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}), \tag{11.170}$$

它是关于 x_{E} 和 y_{E} 对称的，即 $B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = B(y_{\mathrm{E}}, x_{\mathrm{E}})$。从而，根据上述函数内积的定义，将自由生成泛函 (11.154) 改写为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) + (J, \phi)\right]. \tag{11.171}$$

上式具有泛函 Gauss 积分的形式。

将 N 维 Gauss 积分公式 (11.161) 推广到泛函积分的情况，得到**泛函 Gauss 积分公式**

$$\boxed{\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi)\right] = (\det B)^{-1/2}.} \tag{11.172}$$

上式右边原本应该包含一个常数因子，它是 (11.161) 式中常数 $(2\pi)^{N/2}$ 的推广。不过，这里将它吸收到泛函测度 $\mathcal{D}\phi$ 的重新定义之中，因而没有出现。类似于 (11.162) 式，上式的变种为

$$\boxed{\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi) + (J, \phi)\right] = (\det B)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(J, B^{-1}J)\right].} \tag{11.173}$$

在定义上，连续方阵 $B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的逆矩阵 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 满足

$$\int \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}}\, B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) B(y_{\mathrm{E}}, z_{\mathrm{E}}) = \delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{E}}). \tag{11.174}$$

利用 (11.173) 式处理 (11.171) 式中有泛函积分，推出

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J] = \mathcal{N}_0 (\det B)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}}\, J(x_{\mathrm{E}}) B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) J(y_{\mathrm{E}})\right]. \tag{11.175}$$

取外源 $J = 0$，得

$$Z_{0,\mathrm{E}}[0] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, B\phi)\right] = \mathcal{N}_0 (\det B)^{-1/2}. \tag{11.176}$$

归一化条件 $Z_{0,\mathrm{E}}[0] = 1$ 意味着 $\mathcal{N}_0 = (\det B)^{1/2}$，于是

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J] = \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}}\, J(x_{\mathrm{E}}) B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) J(y_{\mathrm{E}})\right]. \tag{11.177}$$

下面计算 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的具体形式。将 Fourier 变换公式

$$\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})} \tag{11.178}$$

代入 (11.170) 式，推出

$$B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = (\partial^{\mu}_{x_{\mathrm{E}}} \partial_{y_{\mathrm{E}},\mu} + m^2) \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})} = \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})} (p_{\mathrm{E}}^2 + m^2). \tag{11.179}$$

可见，$B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 变换是

$$\tilde{B}(p_{\mathrm{E}}) = p_{\mathrm{E}}^2 + m^2. \tag{11.180}$$

从而，

$$\tilde{B}^{-1}(p_{\mathrm{E}}) = \frac{1}{\tilde{B}(p_{\mathrm{E}})} = \frac{1}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2} \tag{11.181}$$

应该是 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 变换。于是，有

$$B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})} \tilde{B}^{-1}(p_{\mathrm{E}}) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})}}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2}. \tag{11.182}$$

可以验证，上式给出的 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 确实满足作为逆矩阵的条件 (11.174)：

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}}\, B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) B(y_{\mathrm{E}}, z_{\mathrm{E}}) &= \int \mathrm{d}^4 y_{\mathrm{E}} \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})}}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2} \int \frac{\mathrm{d}^4 q_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} q_{\mathrm{E}}\cdot(y_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{E}})} (q_{\mathrm{E}}^2 + m^2) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}^4 q_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \frac{q_{\mathrm{E}}^2 + m^2}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}} - q_{\mathrm{E}}\cdot z_{\mathrm{E}})} \delta^{(4)}(p_{\mathrm{E}} - q_{\mathrm{E}}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{E}})} = \delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{E}}).
\end{aligned} \tag{11.183}$$

将 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 看作 **Euclid 空间中实标量场的 Feynman 传播子**，记为

$$\boxed{D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) \equiv B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_{\mathrm{E}}^2+m^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})},} \tag{11.184}$$

它在四维 Euclid 空间中的 Klein-Gordon 微分算符 $-\partial_{x_{\mathrm{E}}}^2+m^2=\partial_x^2+m^2$ 的作用下得到

$$\begin{aligned}(-\partial_{x_{\mathrm{E}}}^2+m^2)D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_{\mathrm{E}}^2+m^2}(-\partial_{x_{\mathrm{E}}}^2+m^2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \frac{p_{\mathrm{E}}^2+m^2}{p_{\mathrm{E}}^2+m^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})} = \delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}).\end{aligned} \tag{11.185}$$

可见，$D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})$ 正是四维 Euclid 空间中 Klein-Gordon 方程的 *Green* 函数。

接下来推导 Minkowski 时空中的 Feynman 传播子。根据 (11.142)、(11.143) 和 (11.145) 式，用 Minkowski 时空中的坐标和四维动量表达 $D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})$，有

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^4 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}}{p_{\mathrm{E}}^2+m^2} = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^4} \int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}p^0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[p^0(x^0-y^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}}{-p^2+m^2} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^4} \int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}p^0 \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},\end{aligned} \tag{11.186}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$。根据 p^0 复平面上的 Wick 转动示意图 11.3(b)，上式沿实轴正向对 $p_{\mathrm{E}}^4\in(-\infty,+\infty)$ 积分等价于沿虚轴正向对 $p^0\in(-\mathrm{i}\infty,+\mathrm{i}\infty)$ 积分。为了得到 Minkowski 时空中的 Feynman 传播子，需要将上式中的被积函数解析延拓到 p^0 的实轴上，对 p^0 沿实轴积分。由 $p^2-m^2=(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2=(p^0)^2-E_{\mathbf{p}}^2$ 可知，被积函数在 p^0 复平面上具有两个单极点 $p^0=\pm E_{\mathbf{p}}$，除此之外在 p^0 复平面上解析。因此，将 p^0 沿虚轴的积分路径 C_{I} 变形为沿实轴的积分路径时，不能让变形后的路径触碰到两个极点，只能采用图 11.4 所示的路径 C_{F}，它无限地贴近实轴，但与两个极点之间具有无穷小的距离[1]。这样得到的积分结果就是 Minkowski 时空中的 Feynman 传播子，表达为

$$D_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^4} \int_{C_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}p^0 \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{11.187}$$

如果采用 6.4.1 小节中的 $\mathrm{i}\epsilon$ 处理方案，将两个极点移动到 $p^0=\pm(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\epsilon)$，其中 ϵ 是无穷小的正数，则沿实轴积分就等价于上式沿 C_{F} 积分。因此，与 (6.210) 式一样，可将 **Minkowski 时空中实标量场的 Feynman 传播子**表达为

$$\boxed{D_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.} \tag{11.188}$$

[1]可以这样看待积分路径 C_{I} 与 C_{F} 的等价性：在计算 $p^0=+E_{\mathbf{p}}$ 处留数时，可采用 C_{I} 与右半平面上半径无穷大的半圆弧组成围线来计算，也可采用 C_{F} 与下半平面上半径无穷大的半圆弧组成围线来计算，两种计算得到的结果一致。

图 11.4: 将沿虚轴的积分路径 C_{I} 变形为路径 C_{F}。

借助解析延拓, 将四维 Euclid 空间中的生成泛函 (11.177) 转换到 Minkowski 时空中, 作替换 $\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}} \to \mathrm{i}\,\mathrm{d}^4x\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}^4y = -\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y$、$J(x_{\mathrm{E}}) \to J(x)$ 和 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}) \to D_{\mathrm{F}}(x-y)$, 得到自由实标量场的生成泛函

$$\boxed{Z_0[J] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,J(x)D_{\mathrm{F}}(x-y)J(y)\right].} \tag{11.189}$$

下面利用 (11.136) 式计算自由实标量场的两点关联函数。根据 (11.129) 式，对 $Z_0[J]$ 求一阶泛函导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(y)} &= -\frac{1}{2}Z_0[J]\frac{\delta}{\delta J(y)}\int \mathrm{d}^4z\,\mathrm{d}^4w\,J(z)D_{\mathrm{F}}(z-w)J(w)\\ &= -Z_0[J]\int \mathrm{d}^4z\,\mathrm{d}^4w\,J(z)D_{\mathrm{F}}(z-w)\delta^{(4)}(y-w)\\ &= -Z_0[J]\int \mathrm{d}^4z\,J(z)D_{\mathrm{F}}(z-y).\end{aligned} \tag{11.190}$$

求二阶泛函导数，推出

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = Z_0[J]\int \mathrm{d}^4w\;J(w)D_{\mathrm{F}}(w-x)\int \mathrm{d}^4z\,J(z)D_{\mathrm{F}}(z-y) - Z_0[J]D_{\mathrm{F}}(x-y). \tag{11.191}$$

取外源 $J=0$，注意到归一化条件 $Z_0[0]=1$，有

$$\left.\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\right|_{J=0} = -D_{\mathrm{F}}(x-y). \tag{11.192}$$

于是，自由实标量场理论中的两点关联函数为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x)\phi^{\mathrm{H}}(y)]\,|0\rangle_{\mathrm{free}} = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\left.\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\right|_{J=0} = D_{\mathrm{F}}(x-y), \tag{11.193}$$

它恰好等于 Feynman 传播子。这与正则量子化方法得到的结论是相同的。

11.2.4 微扰展开和 Feynman 图

本小节讨论相互作用理论的微扰展开。以实标量场的 ϕ^4 理论为例，拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{11.194}$$

利用泛函导数公式 (11.131)，将生成泛函 (11.127) 表达成

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N}\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right]\right\} \\ &= \mathcal{N}\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J(x)}\right]^4\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi\right]\right\} \\ &= \tilde{\mathcal{N}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J(x)}\right]^4\right\}Z_0[J], \end{aligned} \tag{11.195}$$

其中 $\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$，而 $Z_0[J]$ 是自由理论的生成泛函，由 (11.189) 式得

$$Z_0[J] = \mathcal{N}_0\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi\right]\right\} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y}J_xD_{xy}J_y\right). \tag{11.196}$$

上式第二步采用以下缩写记号：

$$\int_{x,y} \equiv \int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y, \quad J_x \equiv J(x), \quad D_{xy} \equiv D_\mathrm{F}(x-y) = D_\mathrm{F}(y-x) = D_{yx}. \tag{11.197}$$

根据泛函导数的定义 (11.129)，对生成泛函求一阶泛函导数，得

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}Z_0[J] &= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{z,y}J_zD_{zy}J_y\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{z,y}J_zD_{zy}J_y\right)\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{z,y}\delta_{xz}D_{zy}J_y - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{z,y}J_zD_{zy}\delta_{xy}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{z,y}J_zD_{zy}J_y\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\int_yD_{xy}J_y + \frac{\mathrm{i}}{2}\int_zJ_zD_{zx}\right) = \left(\mathrm{i}\int_yD_{xy}J_y\right)Z_0[J], \end{aligned} \tag{11.198}$$

其中

$$\delta_{xy} \equiv \delta^{(4)}(x-y) \tag{11.199}$$

是四维 δ 函数的缩写记号。求二阶泛函导数，推出

$$\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)^2Z_0[J] = \left[D_{xx} + \left(\mathrm{i}\int_yD_{xy}J_y\right)^2\right]Z_0[J]. \tag{11.200}$$

求三阶泛函导数，有

$$\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)^3Z_0[J] = \left[D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_yD_{xy}J_y\right) + 2\left(\mathrm{i}\int_yD_{xy}J_y\right)D_{xx} + \left(\mathrm{i}\int_yD_{xy}J_y\right)^3\right]Z_0[J]$$

$$= \left[3D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right) + \left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^3\right] Z_0[J]. \tag{11.201}$$

求四阶泛函导数，得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)^4 Z_0[J] &= \left[3(D_{xx})^2 + 3D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2 + 3\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2 D_{xx} + \left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^4\right] Z_0[J] \\ &= \left[3(D_{xx})^2 + 6D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2 + \left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^4\right] Z_0[J]. \end{aligned} \tag{11.202}$$

于是，生成泛函 (11.195) 作微扰展开至 λ^1 阶的结果为

$$\begin{aligned} Z[J] &= \tilde{\mathcal{N}}\left[1 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int_x \left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)\right] Z_0[J] \\ &= \tilde{\mathcal{N}}\left\{1 - \mathrm{i}\lambda\int_x\left[\frac{1}{8}(D_{xx})^2 + \frac{1}{4}D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^4\right] + \mathcal{O}(\lambda^2)\right\} Z_0[J] \end{aligned}$$

$= \tilde{\mathcal{N}}\Big[1 +$

$\times \exp\Big($

$\Big)$. (11.203)

第三步用 Feynman 图表示结果。这里用小圆圈表示外源 $J(x)$，并引入它的 Feynman 规则

$= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, J(x)\,.$ (11.204)

顶点和 Feynman 传播子则直接采用原先的位置空间 Feynman 规则：

$= -\mathrm{i}\lambda\int \mathrm{d}^4x\,,$

$= D_{\mathrm{F}}(x-y)\,.$ (11.205)

在 (11.203) 式第三步中，方括号内第一幅图是气泡图，它的对称性因子是 8。在第二幅图中，两端连接同一顶点的内线贡献的对称性因子为 2；另一方面，注意到 Feynman 规则 (11.204) 里面对外源 $J(x)$ 作了全时空积分，这意味着第二幅图中用两个小圆圈表示的外源是全同的，因此从顶点连接到小圆圈上的两条内线也是全同的，贡献的对称性因子是 2；最终第二幅图的对称性因子为 $2\cdot 2 = 4$。在第三幅图中，从顶点连接到小圆圈上的四条内线是全同，因而对称性因子为 $4! = 24$。这些对称性因子恰好解释了 (11.203) 式第二步中的分数因子 1/8、1/4 和 1/24。此外，(11.203) 式第三步还用到 $Z_0[J]$ 的 Feynman 图表示

$$Z_0[J] = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right) = \exp\Big($$

$\Big)\,,$ (11.206)

其中指数上 Feynman 图的对称性因子是 2。相应地，(11.198) 式表示为

$$\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\exp\Big(J\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ J\Big)=\Big(x\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ J\Big)\exp\Big(J\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ J\Big)\,. \tag{11.207}$$

注意到 $Z_0[0]=1$，$Z[J]$ 的归一化条件给出

$$1=Z[0]=\tilde{\mathcal{N}}\left[1-\mathrm{i}\lambda\int_x\frac{1}{8}(D_{xx})^2+\mathcal{O}(\lambda^2)\right]Z_0[0]=\tilde{\mathcal{N}}\Bigg[1\;+$$

$$+\;\mathcal{O}(\lambda^2)\Bigg]\,. \tag{11.208}$$

这里取外源 $J=0$，使得 (11.203) 式与外源有关的 Feynman 图都不会出现，导致上式方括号中能够出现的 Feynman 图都是气泡图。考虑到微扰论中所有阶的贡献，则 $Z[0]$ 中包含了所有的气泡图。于是，归一化常数满足

$$\tilde{\mathcal{N}}=\left[1-\mathrm{i}\lambda\int_x\frac{1}{8}(D_{xx})^2+\mathcal{O}(\lambda^2)\right]^{-1}=1+\mathrm{i}\lambda\int_x\frac{1}{8}(D_{xx})^2+\mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$=1\;-$$

$$+\;\mathcal{O}(\lambda^2)\,. \tag{11.209}$$

将上式代入 (11.203) 式，得到

$$Z[J]=\left\{1-\mathrm{i}\lambda\int_x\left[\frac{1}{4}D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2+\frac{1}{24}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^4\right]+\mathcal{O}(\lambda^2)\right\}Z_0[J]$$

$$=\Bigg[1\;+$$

$$+$$

$$+\;\mathcal{O}(\lambda^2)\Bigg]\exp\Big(J\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ J\Big)\,. \tag{11.210}$$

实际上，$Z[J]$ 中所有的气泡图都被 $\tilde{N}$ 抵消掉了。因此，上式中剩下的 Feynman 图都属于**连通图**，它们将外源连接起来，但不包含气泡图。

接下来借助生成泛函计算两点关联函数和四点关联函数。根据 (11.136) 式，两点关联函数表达为

$$G^{(2)}(x_1,x_2)=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)]\,|0\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1\delta J_2}\bigg|_{J=0}\,. \tag{11.211}$$

这里进一步采用以下缩写记号：

$$J_i\equiv J(x_i),\quad D_{ix}\equiv D_{\mathrm{F}}(x_i-x)=D_{\mathrm{F}}(x-x_i)\equiv D_{xi},\quad D_{ij}\equiv D_{\mathrm{F}}(x_i-x_j)=D_{ji}. \tag{11.212}$$

对生成泛函求一阶泛函导数，得

$$\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}Z[J]=\left\{\mathrm{i}\int_y D_{1y}J_y-\mathrm{i}\lambda\int_x\left[\frac{1}{2}D_{xx}D_{x1}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)+\frac{1}{4}D_{xx}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2\left(\mathrm{i}\int_y D_{1y}J_y\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{6}D_{x1}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^3+\mathcal{O}(J^4)\Big]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big\}Z_0[J]$$

$=\Big\{$

$$+\mathcal{O}(J^4)\Big]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big\}\exp\Big(J\circ\!\text{- - - -}\!\circ J\Big). \tag{11.213}$$

上式方括号中的 $\mathcal{O}(J^4)$ 包含具有 4 个及更多个外源 J 因子的项，它们与接下来的讨论无关，因而没有显明写出来。

观察 (11.207) 式，并比较 (11.210) 和 (11.213) 式，可以归纳出 **Feynman 图泛函求导法则**：

> 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个外源 J 换成时空点 x。

这里的时空点 x 要么对应于外点，要么对应于顶点。如果一个 Feynman 图具有对称性因子 s 和 n 个全同外源 J，则外源对 s 贡献的因子是 $n!$，而相应代数表达式中包含一个 $1/s$ 因子。求一次泛函导数之后，Feynman 图只剩下 $n-1$ 个全同外源 J，它们对对称性因子的贡献是 $(n-1)!$，因而对称性因子变成 s/n。另一方面，求泛函导数时每个 J 的贡献相同，给出 n 个相同的 Feynman 图。将这些 Feynman 图加起来，给出一个因子 n，它使代数表达式中的因子变成 n/s，而这正是求导后 Feynman 图的对称性因子的倒数。因此，求导后的每幅 Feynman 图上都不需要乘以额外的数值因子，如 (11.213) 式所示。

对 (11.213) 式再求一次泛函导数，得

$$\frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1\delta J_2}=\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}Z[J]\right)$$

$$=\Big\{D_{12}+\left(\mathrm{i}\int_y D_{1y}J_y\right)\left(\mathrm{i}\int_y D_{2y}J_y\right)$$
$$-\mathrm{i}\lambda\int_x\Big[\frac{1}{2}D_{xx}D_{x1}D_{x2}+\frac{1}{2}D_{xx}D_{x1}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)\left(\mathrm{i}\int_y D_{2y}J_y\right)$$
$$+\frac{1}{2}D_{xx}D_{x2}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)\left(\mathrm{i}\int_y D_{1y}J_y\right)+\frac{1}{4}D_{xx}D_{12}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}D_{x1}D_{x2}\left(\mathrm{i}\int_y D_{xy}J_y\right)^2+\mathcal{O}(J^3)\Big]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big\}Z_0[J]$$

$=\Big\{$

(11.214)

注意上式方括号中的 $\mathcal{O}(J^3)$ 包含具有 3 个及更多个 J 因子的项。以上结果也可以直接利用上述 Feynman 图泛函求导法则得到。取外源 $J=0$，得到**两点关联函数**展开至 λ^1 阶的结果

$$G^{(2)}(x_1,x_2)=\frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1\delta J_2}\bigg|_{J=0}=D_{12}-\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\int_x D_{xx}D_{x1}D_{x2}+\mathcal{O}(\lambda^2)$$

$+\ \mathcal{O}(\lambda^2).$ (11.215)

与 (10.174) 式比较可知，这个结果与 10.5.1 小节中利用正则量子化方法得到的结果一致[2]。

现在，利用 Feynman 图泛函求导法则对 (11.214) 再求一次泛函导数，推出

$$\frac{1}{\mathrm{i}^3}\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3}$$

[2]注意，此处并没有将拉氏量中的裸质量参数分解为物理质量参数和质量重整化常数 δm^2，因而没有出现 δm^2 贡献的两点关联函数。

$+$

$+\mathcal{O}(J^2)\Big] + \mathcal{O}(\lambda^2)\Big\} \exp\Big(J$ $J\Big)$, (11.216)

其中方括号里面的 $\mathcal{O}(J^2)$ 包含具有 2 个及更多个 J 因子的项。

对 (11.216) 式再求一次泛函导数，取 $J=0$，得到**四点关联函数**展开至 λ^1 阶的结果

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{\mathrm{i}^4}\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3\delta J_4}\bigg|_{J=0}$$

$+\ \mathcal{O}(\lambda^2)$. (11.217)

与 (10.203)、(10.205) 和 (10.206) 式比较可知，这个结果也与 10.5.2 小节中利用正则量子化方法得到的结果一致。

可见，从正则量子化和路径积分量子化导出来的 Feynman 图方法是一样的，Feynman 规则也相同。这样的 Feynman 图方法可直接应用于多点关联函数、T 矩阵元和不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的计算。

11.2.5　连通关联函数

四点关联函数 (11.217) 中的 Feynman 图都是连通图，但其中只有最后一行的 Feynman 图是**完全连通图**，其它连通图都不是完全连通的。根据 10.5.2 小节的讨论，只有完全连通图才会贡献到散射过程的 T 矩阵元。因此，真正与散射过程相关的是关联函数中与完全连通图对应的部分，这部分称为**连通关联函数** (connected correlation function)，也称为*连通 Green 函数*。将

实标量场 ϕ^4 理论的 n 点连通关联函数记作 $G_{\mathrm{c}}^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则四点连通关联函数表达为

$$G_{\mathrm{c}}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

$$+ \ \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{11.218}$$

对于多点关联函数的生成泛函 $Z[J]$ 来说，完全连通图指的是将所有外源都彼此连接在一起的图。当 $n \geq 4$ 时，n 点关联函数中出现很多非完全连通图，根源在于其生成泛函 $Z[J]$ 中就包含了很多非完全连通图。将 $Z_0[J]$ 的 Feynman 图表示式 (11.206) 展开，有

$$Z_0[J] = \exp\Big(J \circ\!\!- - - -\!\!\circ J\Big) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} J_x D_{xy} J_y\right)^k$$

$$= 1 + J \circ\!\!- - - -\!\!\circ J \ +$$

$$+ \cdots \tag{11.219}$$

注意，在 k 阶的 Feynman 图中，存在 k 个不相连的全同子图，它们贡献一个对称性因子 $k!$，这恰好解释了第三步通项中的分数因子 $1/k!$。从而，生成泛函 (11.210) 展开为

$$Z[J] = 1 + J \circ\!\!- - - -\!\!\circ J \ +$$

(11.220)

可见，$Z[J]$ 的展开式中包含了大量非完全连通图，利用 Feynman 图泛函求导法则计算 $n \geq 4$ 时的 n 点关联函数，就会得到很多非完全连通图，如 (11.217) 式所示。

由于任意一个非完全连通图可以分解为若干个完全连通图的乘积，生成泛函 (11.220) 中的任意一个连通 Feynman 图 $D_{\{n_i\}}$ 可以表达为

$$D_{\{n_i\}} = \frac{1}{s_D} \prod_i (C_i)^{n_i}, \tag{11.221}$$

其中 C_i 代表一种完全连通图，而 $D_{\{n_i\}}$ 中 C_i 的数量为 n_i，$\prod_i$ 则将 D 中所有种类的完全连通图都乘起来。完全连通图 C_i 已经包含了相应的对称性因子，而 s_D 代表 $D_{\{n_i\}}$ 中额外的对称性

因子。由于 n_i 个全同的完全连通图 C_i 贡献的对称性因子为 $n_i!$，有

$$s_D = \prod_i n_i!\,. \tag{11.222}$$

这里，我们用 n_i 的集合 $\{n_i\}$ 作为下标来标记 Feynman 图 $D_{\{n_i\}}$。当 $\{n_i\} = \{0\}$ 时，$D = 1$。生成泛函 $Z[J]$ 是由所有的 $D_{\{n_i\}}$ 组成的，表达为

$$Z[J] = \sum_{\{n_i\}} D_{\{n_i\}} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i \frac{(C_i)^{n_i}}{n_i!} = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{(C_i)^{n_i}}{n_i!} = \prod_i \exp(C_i) = \exp\left(\sum_i C_i\right), \tag{11.223}$$

将上式改写为

$$\boxed{Z[J] = \exp(\mathrm{i}W[J]),} \tag{11.224}$$

其中

$$W[J] \equiv \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_i C_i \tag{11.225}$$

包含了所有的完全连通图。

根据 (11.210) 和 (11.224) 式，有

$\mathrm{i}W[J] = \ln Z[J]$

(11.226)

其中第二步用到对数函数的 Taylor 展开式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \tag{11.227}$$

从表面上看，对数函数展开式中的高阶项会给出非完全连通图，但是这些非完全连通图会彼此抵消，以保证 $\mathrm{i}W[J]$ 中只包含完全连通图。比如，(11.226) 式第三行第二幅 Feynman 图和展开式 (11.227) 第二项贡献的

(11.228)

会跟 λ^2 阶 Feynman 图

(11.229)

相互抵消。

$\mathrm{i}W[J]$ 只包含完全连通图，对它求 n 阶泛函导数并取 $J=0$，可以得到 n 点连通关联函数，即

$$\boxed{G_{\mathrm{c}}^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{\mathrm{i}^n}\frac{\delta^n(\mathrm{i}W[J])}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}.} \tag{11.230}$$

取 $n=4$，就能够利用上式和 (11.226) 式推出 (11.218) 式。于是，可以将 $\mathrm{i}W[J]$ 展开为

$$\mathrm{i}W[J]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n\,G_{\mathrm{c}}^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n). \tag{11.231}$$

因此，我们称 $W[J]$ 为**连通关联函数的生成泛函**。

11.2.6 复标量场

本小节将上述讨论推广到复标量场上。对于由复标量场 $\phi(x)$ 构造的拉氏量 $\mathcal{L}(x)$，仿照 (11.127) 式，将多点关联函数的生成泛函定义为

$$\boxed{Z[J^\dagger,J]=\mathcal{N}\int\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\,\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,[\mathcal{L}(x)+J^\dagger(x)\phi(x)+\phi^\dagger(x)J(x)]\right\},} \tag{11.232}$$

其中 $J^\dagger(x)$ 和 $J(x)$ 是复的外源，在计算中应将它们当作两个独立变量。生成泛函的归一化条件是 $Z[0,0]=1$。由于上式右边的场和外源是经典函数，$\dagger$ 符号实际上代表的是复共轭。类似于 (11.124) 和 (11.136) 式，涉及 n 个 ϕ 场和 m 个 $\phi^\dagger$ 场的 $n+m$ 点关联函数在路径积分量子化中表达为

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\cdots\phi^{\mathrm{H}}(x_n)\phi^{\mathrm{H}\dagger}(y_1)\cdots\phi^{\mathrm{H}\dagger}(y_m)]\,|0\rangle\\ =&\frac{\int\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi^\dagger(y_1)\cdots\phi^\dagger(y_m)\exp\left(\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\right)}{\int\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\,\exp\left(\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\right)}\\ =&\frac{1}{\mathrm{i}^{n+m}}\frac{\delta^{n+m}Z[J^\dagger,J]}{\delta J^\dagger(x_1)\cdots\delta J^\dagger(x_n)\delta J(y_1)\cdots\delta J(y_m)}\bigg|_{J^\dagger=J=0}.\end{aligned} \tag{11.233}$$

对于自由的复标量场 $\phi(x)$，拉氏量为

$$\mathcal{L}_0=(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi, \tag{11.234}$$

作 Wick 转动，得到四维 Euclid 空间中的拉氏量

$$\mathcal{L}_{0,\mathrm{E}} = -(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi^{\dagger})\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi - m^2\phi^{\dagger}\phi \tag{11.235}$$

和生成泛函

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J^{\dagger}, J] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^{\dagger}\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,[(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi^{\dagger})\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi + m^2\phi^{\dagger}\phi - J^{\dagger}\phi - \phi^{\dagger}J]\right\}. \tag{11.236}$$

对于四维 Euclid 空间上的复值函数 $f(x_{\mathrm{E}})$ 和 $g(x_{\mathrm{E}})$，内积定义为

$$\boxed{(f, g) \equiv \int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\, f^{\dagger}(x_{\mathrm{E}})g(x_{\mathrm{E}}).} \tag{11.237}$$

仿照 (11.169) 式，推出

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,[(\partial_{\mathrm{E}}^{\mu}\phi^{\dagger})\partial_{\mathrm{E},\mu}\phi + m^2\phi^{\dagger}\phi]\\ =&\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\phi^{\dagger}(x_{\mathrm{E}})[(\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu} + m^2)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})]\phi(y_{\mathrm{E}}) = (\phi, B\phi),\end{aligned} \tag{11.238}$$

其中

$$B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) \equiv (\partial_{x_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu} + m^2)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}), \tag{11.239}$$

$$(\phi, B\phi) \equiv \int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\, f^{\dagger}(x_{\mathrm{E}})B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})g(x_{\mathrm{E}}). \tag{11.240}$$

从而，将自由生成泛函改写为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J^{\dagger}, J] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^{\dagger}\,\exp[-(\phi, B\phi) + (J, \phi) + (\phi, J)]. \tag{11.241}$$

上式具有泛函 Gauss 积分的形式。

在 N 维矢量空间中，N 维复值列矢量 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}$ 之间的内积定义为

$$(v, u) \equiv v^{\dagger}u = v_i^{*}u_i. \tag{11.242}$$

将 N 阶复方阵 A 乘到列矢量 u 上，得到列矢量 Au，它与 v 之间的内积是

$$(v, Au) = v^{\dagger}Au = v_i^{*}A_{ij}u_j. \tag{11.243}$$

设 B 是 N 阶正定厄米矩阵，则 $B^{\dagger} = B$，且其本征值 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ 都是正实数。通过一个 N 阶幺正矩阵 U，可将 B 对角化，得到对角矩阵

$$\tilde{B} = UBU^{\dagger} = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_N). \tag{11.244}$$

利用 $U^{\dagger}U = \mathbf{1}$ 推出

$$(v, Bv) = v^{\dagger}Bu = v^{\dagger}U^{\dagger}UBU^{\dagger}Uv = \tilde{v}^{\dagger}\tilde{B}\tilde{v} = \sum_{i=1}^{N} b_i|\tilde{v}_i|^2, \tag{11.245}$$

其中 $\tilde{v} \equiv Uv$。考虑 $2N$ 维 Gauss 积分

$$\int \mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^* \exp[-(v, Bv)], \tag{11.246}$$

其中 $\mathrm{d}^N v = \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 \cdots \mathrm{d}v_N$，$\mathrm{d}^N v^* = \mathrm{d}v_1^*\, \mathrm{d}v_2^* \cdots \mathrm{d}v_N^*$。此处需要对各个复变量 v_i 和 v_i^* 的整个复平面进行积分。将 v_i 分解为实部 $v_{\mathrm{R},i}$ 和虚部 $v_{\mathrm{I},i}$，即 $v_i \equiv v_{\mathrm{R},i} + \mathrm{i}v_{\mathrm{I},i}$，则 $\mathrm{d}v_i\, \mathrm{d}v_i^* = |\mathcal{J}|\, \mathrm{d}v_{\mathrm{R},i}\, \mathrm{d}v_{\mathrm{I},i}$，其中 Jacobi 行列式为

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_i}{\partial v_{\mathrm{R},i}} & \dfrac{\partial v_i}{\partial v_{\mathrm{I},i}} \\ \dfrac{\partial v_i^*}{\partial v_{\mathrm{R},i}} & \dfrac{\partial v_i^*}{\partial v_{\mathrm{I},i}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{vmatrix} = 2\mathrm{i}, \tag{11.247}$$

故 $|\mathcal{J}| = 2$，于是

$$\mathrm{d}v_i\, \mathrm{d}v_i^* = 2\, \mathrm{d}v_{\mathrm{R},i}\, \mathrm{d}v_{\mathrm{I},i}. \tag{11.248}$$

可见，$\int \mathrm{d}v_i\, \mathrm{d}v_i^*$ 相当于在 v_i 的复平面上积分两次。这意味着

$$\mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^* = \prod_{i=1}^N (\mathrm{d}v_i\, \mathrm{d}v_i^*) = \prod_{i=1}^N (2\, \mathrm{d}v_{\mathrm{R},i}\, \mathrm{d}v_{\mathrm{I},i}) = 2^N \mathrm{d}^N v_{\mathrm{R}}\, \mathrm{d}^N v_{\mathrm{I}}. \tag{11.249}$$

其中 $v_{\mathrm{R}} = (v_{\mathrm{R},1}, v_{\mathrm{R},2}, \cdots, v_{\mathrm{R},N})^{\mathrm{T}}$ 和 $v_{\mathrm{I}} = (v_{\mathrm{I},1}, v_{\mathrm{I},2}, \cdots, v_{\mathrm{I},N})^{\mathrm{T}}$ 是两个 N 维实值列矢量。

将幺正矩阵 U 分解为 $U = V + \mathrm{i}W$，其中 V 和 W 是两个 N 阶实方阵。U 的幺正性意味着

$$\mathbf{1} = U^\dagger U = (V^{\mathrm{T}} - \mathrm{i}W^{\mathrm{T}})(V + \mathrm{i}W) = V^{\mathrm{T}}V + W^{\mathrm{T}}W + \mathrm{i}(V^{\mathrm{T}}W - W^{\mathrm{T}}V), \tag{11.250}$$

故

$$V^{\mathrm{T}}V + W^{\mathrm{T}}W = \mathbf{1}, \quad V^{\mathrm{T}}W - W^{\mathrm{T}}V = \mathbf{0}. \tag{11.251}$$

由于 $v = v_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}v_{\mathrm{I}}$，有

$$\tilde{v}_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\tilde{v}_{\mathrm{I}} \equiv \tilde{v} = Uv = (V + \mathrm{i}W)(v_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}v_{\mathrm{I}}) = Vv_{\mathrm{R}} - Wv_{\mathrm{I}} + \mathrm{i}(Wv_{\mathrm{R}} + Vv_{\mathrm{I}}). \tag{11.252}$$

上式等价于

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_{\mathrm{R}} \\ \tilde{v}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} v_{\mathrm{R}} \\ v_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}, \quad O \equiv \begin{pmatrix} V & -W \\ W & V \end{pmatrix}. \tag{11.253}$$

(11.251) 式表明，$2N$ 阶实方阵 O 满足

$$O^{\mathrm{T}}O = \begin{pmatrix} V^{\mathrm{T}} & W^{\mathrm{T}} \\ -W^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & -W \\ W & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{\mathrm{T}}V + W^{\mathrm{T}}W & -V^{\mathrm{T}}W + W^{\mathrm{T}}V \\ -W^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}W & W^{\mathrm{T}}W + V^{\mathrm{T}}V \end{pmatrix} = \mathbf{1}. \tag{11.254}$$

可见，O 是实正交矩阵，满足 $|\det O| = 1$，于是

$$\mathrm{d}^N \tilde{v}\, \mathrm{d}^N \tilde{v}^* = 2^N \mathrm{d}^N \tilde{v}_{\mathrm{R}}\, \mathrm{d}^N \tilde{v}_{\mathrm{I}} = 2^N |\det O|\, \mathrm{d}^N v_{\mathrm{R}}\, \mathrm{d}^N v_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^*. \tag{11.255}$$

作变量替换 $v \to \tilde{v}$，将 Gauss 积分 (11.246) 化为

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^* \exp[-(v, Bv)] &= \int \mathrm{d}^N \tilde{v}\, \mathrm{d}^N \tilde{v}^* \exp\left(-\sum_{i=1}^N b_i |\tilde{v}_i|^2\right) \\ &= 2^N \int \mathrm{d}^N \tilde{v}_{\mathrm{R}}\, \mathrm{d}^N \tilde{v}_{\mathrm{I}} \exp\left[-\sum_{i=1}^N b_i (\tilde{v}_{\mathrm{R},i}^2 + \tilde{v}_{\mathrm{I},i}^2)\right] \\ &= 2^N \left[\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}v_{\mathrm{R},i} \exp(-b_i \tilde{v}_{\mathrm{R},i}^2)\right] \left[\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}v_{\mathrm{I},i} \exp(-b_i \tilde{v}_{\mathrm{I},i}^2)\right] \\ &= 2^N \left(\prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{b_i}}\right) \left(\prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{b_i}}\right) = \prod_{i=1}^N \frac{2\pi}{b_i},\end{aligned} \tag{11.256}$$

其中第一步用到 (11.245) 式，第四步用到一维 Gauss 积分公式 (11.49)。再利用

$$\prod_{i=1}^N b_i = \det \tilde{B} = \det(UBU^\dagger) = \det(U^\dagger U B) = \det(B), \tag{11.257}$$

推出 **$2N$ 维 Gauss 积分公式**

$$\boxed{\int \mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^* \exp[-(v, Bv)] = \frac{(2\pi)^N}{\det B}.} \tag{11.258}$$

这是 (11.161) 式在复数域上的推广。

更进一步，可以推出 $2N$ 维 Gauss 积分公式的变种

$$\boxed{\int \mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^* \exp[-(v, Bv) + (u, v) + (v, u)] = \frac{(2\pi)^N}{\det B} \exp[(u, B^{-1}u)].} \tag{11.259}$$

这是 (11.162) 式在复数域上的推广，推导方法如下。根据 B 矩阵的厄米性，有

$$(B^{-1})^\dagger B = (B^{-1})^\dagger B^\dagger = (BB^{-1})^\dagger = \mathbf{1}, \tag{11.260}$$

从而

$$\begin{aligned}(v - B^{-1}u)^\dagger B (v - B^{-1}u) &= v^\dagger B v - u^\dagger (B^{-1})^\dagger B v - v^\dagger B B^{-1} u + u^\dagger (B^{-1})^\dagger B B^{-1} u \\ &= v^\dagger B v - u^\dagger v - v^\dagger u + u^\dagger B^{-1} u.\end{aligned} \tag{11.261}$$

引入 $w \equiv v - B^{-1}u$，有

$$(v, Bv) - (u, v) - (v, u) = v^\dagger B v - u^\dagger v - v^\dagger u = w^\dagger B w - u^\dagger B^{-1} u = (w, Bw) - (u, B^{-1}u). \tag{11.262}$$

作变量替换 $v \to w$，推出

$$\int \mathrm{d}^N v\, \mathrm{d}^N v^* \exp[-(v, Bv) + (u, v) + (v, u)] = \int \mathrm{d}^N w\, \mathrm{d}^N w^* \exp[-(w, Bw) + (u, B^{-1}u)], \tag{11.263}$$

根据 $2N$ 维 Gauss 积分公式 (11.258) 作出以上积分，就得到 (11.259) 式。

推广 $2N$ 维 Gauss 积分公式 (11.258) 和 (11.259)，得到泛函 **Gauss 积分公式**

$$\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\,\exp[-(\phi,B\phi)] = (\det B)^{-1}, \tag{11.264}$$

$$\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger\,\exp[-(\phi,B\phi)+(J,\phi)+(\phi,J)] = (\det B)^{-1}\exp[(J,B^{-1}J)]. \tag{11.265}$$

从而，将自由生成泛函 (11.241) 表达为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[J^\dagger,J] = \mathcal{N}_0(\det B)^{-1}\exp\left[\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\,J^\dagger(x_\mathrm{E})B^{-1}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})J(y_\mathrm{E})\right]. \tag{11.266}$$

归一化条件 $Z_{0,\mathrm{E}}[0,0]=1$ 给出 $\mathcal{N}_0=\det B$。由于 (11.239) 式中的连续方阵 $B(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})$ 与 (11.170) 式相同，四维 Euclid 空间中复标量场的 Feynman 传播子 $D_\mathrm{F}^\mathrm{E}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})\equiv B^{-1}(x_\mathrm{E},y_\mathrm{E})$ 仍然表达为 (11.184) 式。转换到 Minkowski 时空，复标量场的 Feynman 传播子 $D_\mathrm{F}(x-y)$ 同样由 (11.188) 式给出，而自由复标量场的生成泛函为

$$Z_0[J^\dagger,J] = \exp\left[-\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,J^\dagger(x)D_\mathrm{F}(x-y)J(y)\right]. \tag{11.267}$$

根据 (11.233) 式，自由复标量场理论中的两点关联函数为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^\mathrm{H}(x)\phi^{\mathrm{H}\dagger}(y)]\,|0\rangle_\mathrm{free} = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\delta^2 Z_0[J^\dagger,J]}{\delta J^\dagger(x)\delta J(y)}\bigg|_{J^\dagger=J=0} = D_\mathrm{F}(x-y). \tag{11.268}$$

它等于 Feynman 传播子，这与正则量子化方法的结论相同。

11.3 旋量场的路径积分量子化

本节以 Dirac 旋量场为例讨论旋量场的路径积分量子化。

11.3.1 Grassmann 数

9.6.1 小节提到，为了与旋量场算符的对易关系相匹配，旋量场在量子化之前应该用 Grassmann 数表达，而 Grassmann 数是反对易的 c 数。路径积分方法通过对经典场的泛函积分来实现量子化，泛函积分只涉及 c 数，而不涉及 Hilbert 空间上的算符。综合以上两点，在路径积分中采用 Grassmann 数来表达旋量场，才能让旋量场得到正确的量子化。本小节讨论 Grassmann 数的一般性质。

Grassmann 数最重要的性质是它的反对易性。对于任意两个 Grassmann 数 θ 和 η，有

$$\theta\eta = -\eta\theta. \tag{11.269}$$

从而，θ 与自身的乘积满足 $\theta\theta = -\theta\theta$，即

$$\theta^2 = 0. \tag{11.270}$$

可见，任何一个 Grassmann 数的平方为零。此外，两个 Grassmann 数的乘积 $\theta\eta$ 作为整体与另一个 Grassmann 数 ζ 对易：

$$(\theta\eta)\zeta = -\theta\zeta\eta = \zeta(\theta\eta). \tag{11.271}$$

对 Grassmann 数引入加法和数乘，其运算规则与线性空间中矢量的加法和数乘相同。比如，加法交换律为 $\theta+\eta = \eta+\theta$，加法结合律为 $(\theta+\eta)+\zeta = \theta+(\eta+\zeta)$，数乘分配律为 $(a+b)\theta = a\theta+b\theta$ 和 $a(\theta+\eta) = a\theta+a\eta$，其中 a 和 b 是任意复数。

为了讨论泛函积分，我们需要引入对 Grassmann 数的积分运算。但是，用 Riemann 和的极限来定义普通积分的方法并不能推广到 Grassmann 数上。接下来在形式上定义 Grassmann 数的积分，使其具有积分的一些重要性质。设 $f(\theta)$ 是 Grassmann 数 θ 的一个函数，将它展开成 θ 的幂级数，得

$$f(\theta) = a + b\theta. \tag{11.272}$$

由于 $\theta^2 = 0$，上式只能包含两项。将普通的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$ 推广为对 Grassmann 数的积分，有

$$\int \mathrm{d}\theta\, f(\theta) = \int \mathrm{d}\theta\, (a + b\theta). \tag{11.273}$$

作变量替换 $z = x + y$，则普通的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x), \tag{11.274}$$

第二步把积分变量 z 改写为 x。可见，这样的积分具有平移不变性，即在 $x \to x+y$ 变换下不变。这个性质对推出 Gauss 积分公式的变种 (11.162) 至关重要，因此，我们希望对 Grassmann 数的积分也具有平移不变性。为此，定义

$$\boxed{\int \mathrm{d}\theta = 0, \quad \int \mathrm{d}\theta\, \theta = 1.} \tag{11.275}$$

这使得

$$\int \mathrm{d}\theta\, f(\theta+\eta) = \int \mathrm{d}\theta\, [a + b(\theta+\eta)] = b = \int \mathrm{d}\theta\, (a + b\theta) = \int \mathrm{d}\theta\, f(\theta), \tag{11.276}$$

即积分 $\int \mathrm{d}\theta\, f(\theta)$ 在 $\theta \to \theta+\eta$ 变换下不变。对 Grassmann 数进行多重积分时，我们规定总是从内层积分开始计算，故

$$\int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\eta\, \eta\theta = 1, \tag{11.277}$$

而

$$\int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\eta\, \theta\eta = -\int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\eta\, \eta\theta = -1. \tag{11.278}$$

注意，Grassmann 数的微分 $\mathrm{d}\theta$ 也是 Grassmann 数，有

$$\int \mathrm{d}\eta \int \mathrm{d}\theta\, \eta\theta = -\int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\eta\, \eta\theta = -1. \tag{11.279}$$

接下来引入 Grassmann 数的微分运算。定义 Grassmann 数的导数为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\theta = 1.} \tag{11.280}$$

从而，对 $f(\theta) = a + b\theta$ 求导的结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(a + b\theta) = b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\theta = b. \tag{11.281}$$

与 (11.276) 式比较可知，对 $f(\theta)$ 求导的结果与积分是相同的。对多个 Grassmann 数的乘积求导时，约定求导算符 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta$ 与 θ 相邻时才能直接使用 (11.280) 式，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta\eta) = \eta, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\eta\theta) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta\eta) = -\eta. \tag{11.282}$$

此外，两个 Grassmann 数求导算符之间是反对易的，而一个 Grassmann 数求导算符与一个 Grassmann 数之间也是反对易的，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\eta\theta) = -\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\theta = -\eta. \tag{11.283}$$

对于 N 个独立的 Grassmann 变量 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_i}\theta_j = \delta_{ij}. \tag{11.284}$$

当 $N = 2$ 时，(11.282) 式意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_i}(\theta_1\theta_2) = \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}\theta_i}\theta_2 - \theta_1\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}\theta_i} = \delta_{i1}\theta_2 - \delta_{i2}\theta_1. \tag{11.285}$$

推广到任意 N 的情况，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_i}(\theta_1\theta_2\cdots\theta_N) &= \left(\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}\theta_i}\theta_2\cdots\theta_N\right) + \left(-\theta_1\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}\theta_i}\cdots\theta_N\right) + \cdots + \left[(-1)^{N-1}\theta_1\cdots\theta_{N-1}\frac{\mathrm{d}\theta_N}{\mathrm{d}\theta_i}\right] \\ &= (\delta_{i1}\theta_2\theta_3\cdots\theta_N) + (-\delta_{i2}\theta_1\theta_3\cdots\theta_N) + \cdots + [(-1)^{N-1}\delta_{iN}\theta_1\theta_2\cdots\theta_{N-1}].\end{aligned} \tag{11.286}$$

由于 Dirac 旋量场是复场，不满足自共轭条件，在路径积分中需要使用复的 Grassmann 数。对于两个 Grassmann 数 θ 和 η 乘积的复共轭，规定

$$(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^*. \tag{11.287}$$

也就是说，作复共轭计算时需要交换两个 Grassmann 数，再分别取其复共轭，这类似于 Hilbert 空间上算符的厄米共轭。上式第二步用到 Grassmann 数的反对易性。如果 Grassmann 数 η 满

足自共轭条件 $\eta^* = \eta$，就称 η 是实的 Grassmann 数。复的 Grassmann 数 θ 和 θ^* 可由两个实的 Grassmann 数 θ_1 和 θ_2 构造为

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + \mathrm{i}\theta_2), \quad \theta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \mathrm{i}\theta_2). \tag{11.288}$$

应该将 θ 和 θ^* 看成两个独立的 Grassmann 数，它们满足积分公式

$$\int \mathrm{d}\theta^* \, \mathrm{d}\theta \, \theta\theta^* = 1. \tag{11.289}$$

对于复数 b，将指数函数 $\mathrm{e}^{-b\theta^*\theta}$ 展开，有

$$\mathrm{e}^{-b\theta^*\theta} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b\theta^*\theta)^n}{n!} = 1 - b\theta^*\theta, \tag{11.290}$$

其中第一步是指数函数的定义。由于 Grassmann 数的反对易性，上式中 $n > 1$ 阶的项都是零。对 θ 和 θ^* 积分，得

$$\int \mathrm{d}\theta^* \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{e}^{-b\theta^*\theta} = \int \mathrm{d}\theta^* \, \mathrm{d}\theta \, (1 - b\theta^*\theta) = b \int \mathrm{d}\theta^* \, \mathrm{d}\theta \, \theta\theta^*, \tag{11.291}$$

再利用 (11.289) 式，推出 **Grassmann 数的 Gauss 积分公式**

$$\boxed{\int \mathrm{d}\theta^* \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{e}^{-b\theta^*\theta} = b.} \tag{11.292}$$

下面推导多维的 Grassmann 数 Gauss 积分公式。对于由 N 个独立的复 Grassmann 数构成的列矢量 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_N)^{\mathrm{T}}$，内积定义为

$$(\theta, \tilde{\theta}) \equiv \theta^\dagger \tilde{\theta} = \theta_i^* \tilde{\theta}_i. \tag{11.293}$$

设 A 为 N 阶复方阵，其矩阵元 A_{ij} 为普通复数，将 A 乘到列矢量 $\tilde{\theta}$ 上，得到列矢量 $A\tilde{\theta}$，它与 θ 之间的内积为

$$(\theta, A\tilde{\theta}) = \theta^\dagger A\tilde{\theta} = \theta_i^* A_{ij} \tilde{\theta}_j. \tag{11.294}$$

对任意的 N 阶复方阵 B，考虑 $2N$ 维 Grassmann 数 Gauss 积分

$$\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta)], \tag{11.295}$$

其中积分测度定义为

$$\mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \equiv \prod_{i=1}^{N} (\mathrm{d}\theta_i^* \, \mathrm{d}\theta_i) = (\mathrm{d}\theta_1^* \, \mathrm{d}\theta_1)(\mathrm{d}\theta_2^* \, \mathrm{d}\theta_2) \cdots (\mathrm{d}\theta_N^* \, \mathrm{d}\theta_N). \tag{11.296}$$

当 $N = 2$ 时，有

$$\exp[-(\theta, B\theta)] = \exp(-\theta_i^* B_{ij} \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\theta_i^* B_{ij} \theta_j)^n = 1 - \theta_i^* B_{ij} \theta_j + \frac{1}{2!} (-\theta_i^* B_{ij} \theta_j)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \theta_1^* B_{11}\theta_1 - \theta_2^* B_{22}\theta_2 - \theta_1^* B_{12}\theta_2 - \theta_2^* B_{21}\theta_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\theta_1^* B_{11}\theta_1\theta_2^* B_{22}\theta_2 + \theta_1^* B_{12}\theta_2\theta_2^* B_{21}\theta_1 + \theta_2^* B_{21}\theta_1\theta_1^* B_{12}\theta_2 + \theta_2^* B_{22}\theta_2\theta_1^* B_{11}\theta_1) \\
&= 1 - \theta_1^* B_{11}\theta_1 - \theta_2^* B_{22}\theta_2 - \theta_1^* B_{12}\theta_2 - \theta_2^* B_{21}\theta_1 + (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})\theta_1\theta_1^*\theta_2\theta_2^* \\
&= 1 - \theta_1^* B_{11}\theta_1 - \theta_2^* B_{22}\theta_2 - \theta_1^* B_{12}\theta_2 - \theta_2^* B_{21}\theta_1 + (\det B)\theta_1\theta_1^*\theta_2\theta_2^*. \qquad (11.297)
\end{aligned}
$$

在第三步中，$n \geq 3$ 阶的项必定包含 θ_i^2 或 $(\theta_i^*)^2$，因而贡献为零。根据 Grassmann 数积分的定义 (11.275)，上式最后一步中只有最后一项才对 Gauss 积分 (11.295) 有贡献，故

$$
\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta)] = \det B \int \mathrm{d}\theta_1^* \, \mathrm{d}\theta_1 \, \mathrm{d}\theta_2^* \, \mathrm{d}\theta_2 \, \theta_1\theta_1^*\theta_2\theta_2^* = \det B \qquad (11.298)
$$

对 $N = 2$ 成立。当 $N = 3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\exp[-(\theta, B\theta)] &\supset \frac{1}{3!}(-\theta_i^* B_{ij}\theta_j)^3 \\
&= -\theta_1^* B_{11}\theta_1\theta_2^* B_{22}\theta_2\theta_3^* B_{33}\theta_3 - \theta_1^* B_{11}\theta_1\theta_2^* B_{23}\theta_3\theta_3^* B_{32}\theta_2 \\
&\quad -\theta_1^* B_{12}\theta_2\theta_2^* B_{21}\theta_1\theta_3^* B_{33}\theta_3 - \theta_1^* B_{12}\theta_2\theta_2^* B_{23}\theta_3\theta_3^* B_{31}\theta_1 \\
&\quad -\theta_1^* B_{13}\theta_3\theta_2^* B_{21}\theta_1\theta_3^* B_{32}\theta_2 - \theta_1^* B_{13}\theta_3\theta_2^* B_{22}\theta_2\theta_3^* B_{31}\theta_1 \\
&= [B_{11}(B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}) - B_{12}(B_{21}B_{33} - B_{23}B_{21}) \\
&\quad + B_{13}(B_{21}B_{32} - B_{22}B_{31})]\,\theta_1\theta_1^*\theta_2\theta_2^*\theta_3\theta_3^* \\
&= (\det B)\theta_1\theta_1^*\theta_2\theta_2^*\theta_3\theta_3^*. \qquad (11.299)
\end{aligned}
$$

第一步只保留对 Gauss 积分 (11.295) 有贡献的 $n = 3$ 阶的项。在第二步第一项的计算过程中，将 $(-\theta_i^* B_{ij}\theta_j)^3$ 展开会得到 $-\theta_1^* B_{11}\theta_1$、$-\theta_2^* B_{22}\theta_2$ 与 $-\theta_3^* B_{33}\theta_3$ 三个因子相乘的项，这三个因子有 3! 种排列方式，因而得到 3! 个相等的项，将它们合为一项，得到的因子 3! 与第一步中的 1/3! 因子抵消，从而得到第二步中的第一项，其它项的计算过程也是类似的。于是，

$$
\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta)] = \det B \int \mathrm{d}\theta_1^* \, \mathrm{d}\theta_1 \, \mathrm{d}\theta_2^* \, \mathrm{d}\theta_2 \, \mathrm{d}\theta_3^* \, \mathrm{d}\theta_3 \, \theta_1\theta_1^*\theta_2\theta_2^*\theta_3\theta_3^* = \det B \qquad (11.300)
$$

对 $N = 3$ 成立。

可见，无论对 $N = 2$ 还是 $N = 3$，Gauss 积分 (11.295) 的结果都是 $\det B$，让我们有理由推测这个结果是对任意 $N \geq 1$ 成立的，一般论证如下。对任意正整数 N，有

$$
\begin{aligned}
\exp[-(\theta, B\theta)] &\supset \frac{1}{N!}(-\theta_i^* B_{ij}\theta_j)^N \\
&= \frac{1}{N!} \sum_{\text{permutations}} (-\theta_{i_1}^* B_{i_1 j_1}\theta_{j_1})(-\theta_{i_2}^* B_{i_2 j_2}\theta_{j_2}) \cdots (-\theta_{i_N}^* B_{i_N j_N}\theta_{j_N}) \\
&= \frac{1}{N!} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \cdots B_{i_N j_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N} (-\theta_1^*\theta_1)(-\theta_2^*\theta_2) \cdots (-\theta_N^*\theta_N) \\
&= \det B \, (\theta_1\theta_1^*)(\theta_2\theta_2^*) \cdots (\theta_N\theta_N^*). \qquad (11.301)
\end{aligned}
$$

第一步只保留对 Gauss 积分 (11.295) 有贡献的 $n = N$ 阶的项。在第二步的每一项中，为了得到非零的贡献，N 个 θ_i^* 必须各不相同，N 个 θ_i 也必须各不相同，这意味着 $(i_1, i_2, \cdots, i_N)$ 和

$(j_1, j_2, \cdots, j_N)$ 都是 $(1, 2, \cdots, N)$ 的某种置换，而第二步中的求和是对所有置换进行的。引入 N 维 Levi-Civita 符号 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N}$，它关于 N 个指标是全反对称的，且 $\varepsilon^{12\cdots N} = 1$。根据 Grassmann 数的反对易性，有

$$\theta^*_{i_1}\theta^*_{i_2}\cdots\theta^*_{i_N} = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N}\theta^*_1\theta^*_2\cdots\theta^*_N, \quad \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_N} = \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N}\theta_1\theta_2\cdots\theta_N. \tag{11.302}$$

利用上式推出 (11.301) 式的第三步，再用与 (1.107) 式类似的行列式表达式

$$\det B = \frac{1}{N!}\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \cdots B_{i_N j_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N} \tag{11.303}$$

推出 (11.301) 式的第四步。从而，将 Gauss 积分 (11.295) 表达为

$$\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta)] = \det B \int (\mathrm{d}\theta^*_1 \, \mathrm{d}\theta_1)(\mathrm{d}\theta^*_2 \, \mathrm{d}\theta_2) \cdots (\mathrm{d}\theta^*_N \, \mathrm{d}\theta_N)(\theta_1\theta^*_1)(\theta_2\theta^*_2)\cdots(\theta_N\theta^*_N). \tag{11.304}$$

进一步应用积分公式 (11.289)，推出 **2N 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式**

$$\boxed{\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta)] = \det B.} \tag{11.305}$$

与 (11.258) 式比较，不同之处主要是 Grassmann 数 Gauss 积分得到的行列式 $\det B$ 出现在分子上，而非分母上。

如果 B 是厄米矩阵，还可以进一步推出 $2N$ 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式的变种

$$\boxed{\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta) + (\eta, \theta) + (\theta, \eta)] = \det B \exp[(\eta, B^{-1}\eta)].} \tag{11.306}$$

推导方法如下。B 矩阵的厄米性意味着 (11.260) 式成立，由此得到

$$\begin{aligned}(\theta - B^{-1}\eta)^\dagger B(\theta - B^{-1}\eta) &= \theta^\dagger B\theta - \eta^\dagger (B^{-1})^\dagger B\theta - \theta^\dagger BB^{-1}\eta + \eta^\dagger (B^{-1})^\dagger BB^{-1}\eta \\ &= \theta^\dagger B\theta - \eta^\dagger\theta - \theta^\dagger\eta + \eta^\dagger B^{-1}\eta.\end{aligned} \tag{11.307}$$

引入 $\zeta \equiv \theta - B^{-1}\eta$，有

$$(\theta, B\theta) - (\eta, \theta) - (\theta, \eta) = \theta^\dagger B\theta - \eta^\dagger\theta - \theta^\dagger\eta = \zeta^\dagger B\zeta - \eta^\dagger B^{-1}\eta = (\zeta, B\zeta) - (\eta, B^{-1}\eta). \tag{11.308}$$

作变量替换 $\theta \to \zeta$，利用 Grasmann 数积分的平移不变性 (11.276)，推出

$$\int \mathrm{d}^N\theta^* \, \mathrm{d}^N\theta \, \exp[-(\theta, B\theta) + (\eta, \theta) + (\theta, \eta)] = \int \mathrm{d}^N\zeta^* \, \mathrm{d}^N\zeta \, \exp[-(\zeta, B\zeta) + (\eta, B^{-1}\eta)]. \tag{11.309}$$

根据 $2N$ 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式 (11.305) 作出以上积分，就得到 (11.306) 式。

11.3.2 生成泛函和 Feynman 传播子

Grassmann 场 $\theta(x)$ 是时空坐标 x^μ 的函数，它在每个时空点处的取值都是一个独立的 Grassmann 数。对 $\theta(x)$ 的泛函导数定义为

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\theta(y)=\delta^{(4)}(x-y).} \tag{11.310}$$

这是分立 Grassmann 数的求导关系 (11.284) 在连续极限下的推广。Grassmann 数的泛函求导算符与 Grassmann 数一样，具有反对易性，故

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\theta(x_1)=\theta(x_1)\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)},\quad \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\frac{\delta}{\delta\theta(x_1)}=-\frac{\delta}{\delta\theta(x_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}. \tag{11.311}$$

在高阶泛函导数计算中，内层求导运算先执行，如

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2}{\delta\eta(x_2)\delta\theta(x_1)}[\theta(x)\eta(x)] &\equiv \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\frac{\delta}{\delta\theta(x_1)}[\theta(x)\eta(x)]=\delta^{(4)}(x_1-x)\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\eta(x)\\ &=\delta^{(4)}(x_1-x)\delta^{(4)}(x_2-x).\end{aligned} \tag{11.312}$$

利用四维 δ 函数的挑选性，有

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)=\int \mathrm{d}^4y\,\frac{\delta\eta(y)}{\delta\eta(x)}\theta(y)=\int \mathrm{d}^4y\,\delta^{(4)}(x-y)\theta(y)=\theta(x). \tag{11.313}$$

进而推出

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\left[\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]^2=\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\left[\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\eta(y)\theta(y)\eta(z)\theta(z)\right]\\ &=\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta\eta(y)}{\delta\eta(x)}\theta(y)\eta(z)\theta(z)+\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\eta(y)\theta(y)\frac{\delta\eta(z)}{\delta\eta(x)}\theta(z)\\ &=\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\delta^{(4)}(x-y)\theta(y)\eta(z)\theta(z)+\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\eta(y)\theta(y)\delta^{(4)}(x-z)\theta(z)\\ &=\int \mathrm{d}^4z\,\theta(x)\eta(z)\theta(z)+\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\theta(x)=2\theta(x)\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y),\end{aligned} \tag{11.314}$$

其中第二步用到 (11.286) 式在连续极限下的推广，这与利用链式法则计算的结果一致。将上式进一步推广，得到

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\left[\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]^n=n\theta(x)\left[\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]^{n-1},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{11.315}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]&=\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}n\mathrm{i}\theta(x)\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]^{n-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i}\theta(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right]^{n-1} \\
&= \mathrm{i}\theta(x)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right],
\end{aligned}
\tag{11.316}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right] &= \frac{\delta}{\delta\theta(x)}\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\theta(y)\eta(y)\right] \\
&= -\mathrm{i}\eta(x)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\theta(y)\eta(y)\right] \\
&= -\mathrm{i}\eta(x)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\,\eta(y)\theta(y)\right].
\end{aligned}
\tag{11.317}
$$

以上两式与利用复合函数的链式法则计算得到的结果相同。

对于接下来要出现在路径积分表达式中的 Dirac 旋量场 $\psi(x)$，每个分量 $\psi_a(x)$ 都是 Grassmann 场。考虑由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构造的拉氏量 $\mathcal{L}(x)$，仿照 (11.232) 式，将**多点关联函数的生成泛函**定义为

$$
\boxed{Z[\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathcal{L}(x)+\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)]\right\}.}
\tag{11.318}
$$

上式对 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 及其 Dirac 共轭场 $\bar{\psi}(x)$ 进行泛函积分，泛函测度定义为

$$
\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi = \prod_{a=1}^{4}\left(\mathcal{D}\bar{\psi}_a\,\mathcal{D}\psi_a\right),
\tag{11.319}
$$

其中 $\mathcal{D}\bar{\psi}_a\,\mathcal{D}\psi_a$（此处不采用 Einstein 求和约定）是积分测度 (11.296) 在连续极限下的推广。由于 $\bar{\psi}_a(x) = \psi_b^\dagger(x)(\gamma^0)_{ba}$ 与 $\psi_a^\dagger(x)$ 只相差一个幺正变换，积分测度 $\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi$ 与 $\mathcal{D}\psi^\dagger\,\mathcal{D}\psi$ 是等价的。$\eta(x)$ 和 $\bar{\eta}(x)$ 是外源，其中 $\eta(x)$ 是 Dirac 旋量场，$\bar{\eta}(x)$ 是相应的 Dirac 共轭场，它们的每个分量都是 Grassmann 场。对生成泛函求高阶泛函导数并取 $\bar{\eta}=\eta=0$，可以得到多点关联函数。

为了给出两点关联函数的表达式，先对 $Z[\bar{\eta},\eta]$ 求一次泛函导数，利用 (11.317) 式，得

$$
\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_b(x_2)}Z[\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\bar{\psi}_b(x_2)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right].
\tag{11.320}
$$

再求一次泛函导数，利用 (11.316) 式，推出

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_a(x_1)}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_b(x_2)}Z[\bar{\eta},\eta] &= -\mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\bar{\psi}_b(x_2)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_a(x_1)}\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right] \\
&= -\mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\bar{\psi}_b(x_2)\psi_a(x_1)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right] \\
&= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right].
\end{aligned}
\tag{11.321}
$$

从而，可以将两点关联函数表达为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi_a^{\mathrm{H}}(x_1)\bar{\psi}_b^{\mathrm{H}}(x_2)]\,|0\rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\right)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\right)} \\ &= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_a(x_1)}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_b(x_2)}Z[\bar{\eta},\eta]\bigg|_{\bar{\eta}=\eta=0}.\end{aligned} \tag{11.322}$$

类似地，关于 $\psi_a(x_1)$、$\bar{\psi}_b(x_2)$、$\bar{\psi}_c(x_3)$ 和 $\psi_d(x_4)$ 的四点关联函数为

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi_a^{\mathrm{H}}(x_1)\bar{\psi}_b^{\mathrm{H}}(x_2)\bar{\psi}_c^{\mathrm{H}}(x_3)\psi_d^{\mathrm{H}}(x_4)]\,|0\rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)\exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\right)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\right)} \qquad (11.323) \\ &= \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_a(x_1)}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_b(x_2)}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_c(x_3)}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_d(x_4)}Z[\bar{\eta},\eta]\bigg|_{\bar{\eta}=\eta=0}, \qquad (11.324)\end{aligned}$$

这个四点关联函数通过 LSZ 约化公式 (10.117) 对应于散射过程 $\psi\bar{\psi}\to\psi\bar{\psi}$ 的 T 矩阵元。

对于自由的 Dirac 旋量场，拉氏量为

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{11.325}$$

接下来作 Wick 转动，转到 Euclid 空间。将四维 Euclid 空间中的 Dirac 矩阵定义为

$$\gamma_{\mathrm{E}}^4 = \gamma^0, \quad \gamma_{\mathrm{E}}^i \equiv -\mathrm{i}\gamma^i, \quad i = 1,2,3, \tag{11.326}$$

则 γ_{E}^4 和 γ_{E}^i 都是厄米矩阵，且

$$\{\gamma_{\mathrm{E}}^i,\gamma_{\mathrm{E}}^j\} = \{-\mathrm{i}\gamma^i,-\mathrm{i}\gamma^j\} = -2g^{ij} = 2\delta^{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{11.327}$$

$$\{\gamma_{\mathrm{E}}^4,\gamma_{\mathrm{E}}^4\} = \{\gamma^0,\gamma^0\} = 2g^{00} = 2\delta^{44}, \quad \{\gamma_{\mathrm{E}}^i,\gamma_{\mathrm{E}}^4\} = \{-\mathrm{i}\gamma^i,\gamma^0\} = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{11.328}$$

可见，γ_{E}^μ 满足反对易关系

$$\{\gamma_{\mathrm{E}}^\mu,\gamma_{\mathrm{E}}^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2,3,4. \tag{11.329}$$

根据 (11.148) 式，有

$$\gamma_{\mathrm{E}}^\mu\partial_{\mathrm{E},\mu} = \gamma_{\mathrm{E}}^i\partial_{\mathrm{E},i} + \gamma_{\mathrm{E}}^4\partial_{\mathrm{E},4} = -\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - \mathrm{i}\gamma^0\partial_0 = -\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu. \tag{11.330}$$

从而，四维 Euclid 空间中的自由拉氏量表达为

$$\mathcal{L}_{0,\mathrm{E}} = -\bar{\psi}\gamma_{\mathrm{E}}^\mu\partial_{\mathrm{E},\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{11.331}$$

由于 $\mathrm{d}^4x = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}$，相应的自由生成泛函是

$$Z_{0,\mathrm{E}}[\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}_0\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[-\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\left(\bar{\psi}\gamma_{\mathrm{E}}^\mu\partial_{\mathrm{E},\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi - \bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta\right)\right]. \tag{11.332}$$

对于四维 Euclid 空间上的 Dirac 旋量场 $\eta(x_{\mathrm{E}})$ 和 $\psi(x_{\mathrm{E}})$，内积定义为

$$(\eta,\psi)\equiv\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\bar{\eta}(x_{\mathrm{E}})\psi(y_{\mathrm{E}})=\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\bar{\eta}_a(x_{\mathrm{E}})\psi_a(y_{\mathrm{E}}),\tag{11.333}$$

其中第二步将旋量指标显明写出来。如果 $\Gamma(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})$ 既是以空间坐标 x_{E} 和 y_{E} 作为行列指标的连续方阵，又是旋量空间上的四阶方阵，就可以进一步引入内积

$$(\eta,\Gamma\psi)\equiv\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\bar{\eta}(x_{\mathrm{E}})\Gamma(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})\psi(y_{\mathrm{E}})=\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\bar{\eta}_a(x_{\mathrm{E}})\Gamma_{ab}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})\psi_b(y_{\mathrm{E}}).\tag{11.334}$$

自由生成泛函 (11.332) 中涉及到的积分可作以下转换：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,(\bar{\psi}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{\mathrm{E},\mu}\psi+m\bar{\psi}\psi)&=\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,[\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}\psi(y_{\mathrm{E}})+m\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})\psi(y_{\mathrm{E}})]\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\\&=\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\{\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}[\psi(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]\\&\quad-\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}[\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]\psi(y_{\mathrm{E}})+m\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})\psi(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\}\\&=\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})[(-\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}+m)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]\psi(y_{\mathrm{E}})\\&=(\psi,B\psi),\end{aligned}\tag{11.335}$$

其中第三步丢弃对积分没有贡献的一个全散度项，而连续方阵

$$B(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})\equiv(-\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}+m)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\tag{11.336}$$

也是旋量空间上的四阶方阵。由此将自由生成泛函 (11.332) 改写为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[\bar{\eta},\eta]=\mathcal{N}_0\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp[-(\psi,B\psi)+(\eta,\psi)+(\psi,\eta)].\tag{11.337}$$

将 $2N$ 维 Grassmann 数 Gauss 积分公式 (11.305) 和 (11.306) 推广到泛函积分的情况，得到 **Grassmann 数泛函 Gauss 积分公式**

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp[-(\psi,B\psi)]=\det B,\tag{11.338}$$

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp[-(\psi,B\psi)+(\eta,\psi)+(\psi,\eta)]=\det B\exp[(\eta,B^{-1}\eta)].\tag{11.339}$$

从而，将自由生成泛函 (11.337) 表达为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[\bar{\eta},\eta]=\mathcal{N}_0\det B\exp[(\eta,B^{-1}\eta)].\tag{11.340}$$

归一化条件 $Z_{0,\mathrm{E}}[0,0]=1$ 给出 $\mathcal{N}_0=(\det B)^{-1}$，故

$$Z_{0,\mathrm{E}}[\bar{\eta},\eta]=\exp\left[\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\bar{\eta}(x_{\mathrm{E}})B^{-1}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})\eta(y_{\mathrm{E}})\right].\tag{11.341}$$

接下来计算 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的具体形式。将 Fourier 变换公式 (11.178) 代入 (11.336) 式，得

$$B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = (-\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}},\mu}+m)\int\frac{\mathrm{d}^4p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})} = \int\frac{\mathrm{d}^4p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}(-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu}+m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}. \tag{11.342}$$

可见，$B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 变换是

$$\tilde{B}(p_{\mathrm{E}}) = \mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} + m. \tag{11.343}$$

注意到

$$\begin{aligned}(-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} + m)(\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\nu}p_{\mathrm{E},\nu} + m) &= \gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\gamma_{\mathrm{E}}^{\nu}p_{\mathrm{E},\mu}p_{\mathrm{E},\nu} + m^2 = \frac{1}{2}(\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}\gamma_{\mathrm{E}}^{\nu} + \gamma_{\mathrm{E}}^{\nu}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu})p_{\mathrm{E},\mu}p_{\mathrm{E},\nu} + m^2\\ &= \delta^{\mu\nu}p_{\mathrm{E},\mu}p_{\mathrm{E},\nu} + m^2 = p_{\mathrm{E}}^2 + m^2,\end{aligned} \tag{11.344}$$

$\tilde{B}(p_{\mathrm{E}})$ 的逆矩阵是

$$\tilde{B}^{-1}(p_{\mathrm{E}}) = (-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} + m)^{-1} = \frac{\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} + m}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2}. \tag{11.345}$$

$\tilde{B}^{-1}(p_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 逆变换 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 是 $B(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的逆矩阵，也是 Euclid 空间中 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子 $S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}})$，故

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}) \equiv B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) &= \int\frac{\mathrm{d}^4p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\tilde{B}^{-1}(p_{\mathrm{E}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} + m}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}.\end{aligned} \tag{11.346}$$

下面将它转换到 Minkowski 时空中。根据 (11.142) 和 (11.326) 式，有

$$\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} = \gamma_{\mathrm{E}}^{4}p_{\mathrm{E}}^{4} + \gamma_{\mathrm{E}}^{i}p_{\mathrm{E}}^{i} = -\mathrm{i}\gamma^0p^0 - \mathrm{i}\gamma^ip^i = -\mathrm{i}(\gamma^0p^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}), \tag{11.347}$$

再利用 (11.143) 和 (11.145) 式进行改写，得

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^4\,\frac{\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\mu} + m}{p_{\mathrm{E}}^2 + m^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}\\ &= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{\gamma^0p^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m}{-p^2 + m^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[p^0(x^0-y^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{i}\left(\not{p} + m\right)}{p^2 - m^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},\end{aligned} \tag{11.348}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$。进一步，参考 (11.188) 式推导过程的讨论，将 **Minkowski 时空中 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子**表达为

$$\boxed{S_{\mathrm{F}}(x - y) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.} \tag{11.349}$$

这个结果与 (6.267) 式一致。

借助解析延拓，将 Euclid 空间中的生成泛函 (11.341) 转换到 Minkowski 时空中，作替换 $\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}} \to \mathrm{i}\,\mathrm{d}^4x\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}^4y$、$\bar{\eta}(x_{\mathrm{E}}) \to \bar{\eta}(x)$、$\eta(y_{\mathrm{E}}) \to \eta(y)$ 和 $B^{-1}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) = S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}}) \to S_{\mathrm{F}}(x-y)$，得到自由 Dirac 旋量场的生成泛函

$$\boxed{Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp\left[-\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\bar{\eta}(x) S_{\mathrm{F}}(x-y)\eta(y)\right].} \tag{11.350}$$

根据 (11.322) 式，自由 Dirac 旋量场理论中的两点关联函数为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi_a^{\mathrm{H}}(x_1)\bar{\psi}_b^{\mathrm{H}}(x_2)]\,|0\rangle_{\text{free}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_a(x_1)}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_b(x_2)} Z_0[\bar{\eta}, \eta]\bigg|_{\bar{\eta}=\eta=0} = S_{\mathrm{F},ab}(x_1 - x_2). \tag{11.351}$$

它等于 Feynman 传播子，这与正则量子化方法的结论相同。

11.3.3　Yukawa 理论

本小节讨论路径积分方法对旋量场相互作用的处理方式。以 Yukawa 理论为例，设实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构成的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \kappa\phi\bar{\psi}\psi, \tag{11.352}$$

其中拉氏量的自由部分是

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi. \tag{11.353}$$

利用泛函导数公式 (11.131)、(11.316) 和 (11.317)，将多点关联函数的生成泛函表达为

$$\begin{aligned} Z[J, \bar{\eta}, \eta] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L} + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right] \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left(-\mathrm{i}\kappa\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_x}\right)\exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right] \\ &= \tilde{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\mathrm{i}\kappa\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_x}\right)^n Z_0[J, \bar{\eta}, \eta], \end{aligned} \tag{11.354}$$

其中 $\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$，$\eta_x \equiv \eta(x)$，$\bar{\eta}_x \equiv \bar{\eta}(x)$。根据 (11.189) 和 (11.350) 式，自由理论的生成泛函 $Z_0[J, \bar{\eta}, \eta]$ 表达为

$$\begin{aligned} Z_0[J, \bar{\eta}, \eta] &= \mathcal{N}_0\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right] \\ &= \exp\left[-\int_{x,y}\left(\frac{1}{2}J_x D_{xy} J_y + \bar{\eta}_x S_{xy}\eta_y\right)\right] \\ &= \exp\Big(J \circ\!\!- - - -\!\!\circ\, J \;+\; \eta \circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\, \bar{\eta}\Big), \end{aligned} \tag{11.355}$$

其中 $S_{xy} \equiv S_{\mathrm{F}}(x-y)$，第三步改用 Feynman 图表示。

实标量场外源的 Feynman 规则与 ϕ^4 理论相同，即 (11.204) 式。Dirac 旋量场的外源 η 和 $\bar{\eta}$ 的 Feynman 规则分别是

(11.356)

Feynman 传播子和 Yukawa 相互作用顶点则直接采用原先的位置空间 Feynman 规则：

(11.357)

根据 11.2.4 小节中的 **Feynman 图泛函求导法则**，用 $\delta/[\mathrm{i}\,\delta J(x)]$ 求泛函导数相当于将 Feynman 图中的一个外源 J 换成时空点 x。类似地，

- 用 $\dfrac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个外源 η 换成时空点 x；
- 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个外源 $\bar{\eta}$ 换成时空点 x。

接下来计算生成泛函 (11.354) 的微扰展开式。由

(11.358)

得

(11.359)

再推出 κ^1 阶的展开式

(11.360)

进一步，有

$$\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_y}\left[-\mathrm{i}\kappa\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_x}\exp\left(J\circ\!\!-\!-\!-\!\circ J+\eta\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\bar{\eta}\right)\right]$$

(11.361)

从而

$$\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_y}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_y}\left[-\mathrm{i}\kappa\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_x}\exp\left(J\circ\!\!-\!-\!-\!\circ J+\eta\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\bar{\eta}\right)\right]$$

(11.362)

由此推出 κ^2 阶的展开式

$$-\frac{\mathrm{i}\kappa}{2!}\int_y\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_y}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_y}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_y}\left[-\mathrm{i}\kappa\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_x}\exp\left(J\circ\!\!-\!-\!-\!\circ J+\eta\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\bar{\eta}\right)\right]$$

$$\times \exp\Big(J \circ\!- - - -\!\circ J + \eta \circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ \bar{\eta}\Big). \tag{11.363}$$

上式第二行中第 1 幅图和第 3 幅图是气泡图。第二、三行中每幅 Feynman 图的对称性因子都是 2，这正好对应于来自指数展开式的 1/2! 因子。在第四、五行中，拓扑结构相同的 Feynman 图成对出现。每一对 Feynman 图之间具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，将它们合为一项，得到的因子 2 会恰好抵消来自指数展开式的 1/2! 因子。

于是，将生成泛函 (11.354) 展开到 κ^2 阶的结果为

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]$$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3)\Big]\exp\Big(J \circ\!- - - -\!\circ J + \eta \circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ \bar{\eta}\Big), \tag{11.364}$$

其中所有的气泡图已被 $\tilde{\mathcal{N}}$ 所抵消。利用对数函数的 Taylor 展开式 (11.227)，推出**连通关联函数的生成泛函**

$$\mathrm{i}W[J,\bar{\eta},\eta] = \ln Z[J,\bar{\eta},\eta]$$

(11.365)

上式只包含完全连通图。

下面利用 (11.365) 式计算一些连通关联函数。实标量场的真空期待值 $\langle 0|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\,|0\rangle$ 称为**单点函数**，它仅涉及一个外点，因而只能包含完全连通图。根据 (11.365) 式，实标量场的单点函数为

$$\langle 0|\,\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\,|0\rangle = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}(\mathrm{i}W[J,\bar\eta,\eta])\Big|_{J=\bar\eta=\eta=0} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\Bigg($$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3)$$

$$= $$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3). \tag{11.366}$$

用下标 c 代表关联函数中的完全连通部分，则实标量场的两点连通关联函数表达为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}(\mathrm{i}W[J,\bar\eta,\eta])\Big|_{J=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\Bigg($$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3)$$

$$= $$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3). \tag{11.367}$$

上式是实标量场的完整传播子。Dirac 旋量场的两点连通关联函数为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi^{\mathrm{H}}(x_1)\bar\psi^{\mathrm{H}}(x_2)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}(\mathrm{i}W[J,\bar\eta,\eta])\Big|_{J=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\Bigg($$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3)$$

$$= $$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3), \tag{11.368}$$

其中 $\bar\eta_i \equiv \bar\eta(x_i)$，$\eta_i \equiv \eta(x_i)$。上式是 Dirac 旋量场的完整传播子。关于 $\phi(x_1)$、$\psi(x_2)$ 和 $\bar\psi(x_3)$ 的三点连通关联函数为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\psi^{\mathrm{H}}(x_2)\bar\psi^{\mathrm{H}}(x_3)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}(\mathrm{i}W[J,\bar\eta,\eta])\Big|_{J=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\Bigg($$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3)$$

$$=$$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3), \tag{11.369}$$

它通过 LSZ 约化公式联系着 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 衰变过程和 $\psi\bar{\psi} \to \phi$ 融合过程。

对于 (11.324) 式所示的四点关联函数，相应的四点连通关联函数是

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi^{\mathrm{H}}(x_1)\bar{\psi}^{\mathrm{H}}(x_2)\bar{\psi}^{\mathrm{H}}(x_3)\psi^{\mathrm{H}}(x_4)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} \\
&= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_4}(\mathrm{i}W[J,\bar{\eta},\eta])\Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \\
&= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_4}\Bigg($$

$$+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_4}\int_{x,y,x_5,x_6,x_7,x_8}\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\int_{x,y,x_5,x_6,x_7,x_8}\Big[\delta^{(4)}(x_4-x_5)S_{5x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8 \\
&\qquad +\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}\delta^{(4)}(x_4-x_7)S_{7y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8\Big]+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\Big(\int_{x,y,x_6,x_7,x_8}S_{4x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8 \\
&\qquad +\int_{x,y,x_5,x_6,x_8}\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}S_{4y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8\Big)+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_2}\Big(-\int_{x,y,x_7,x_8}S_{4x}S_{x3}D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8-\int_{x,y,x_6,x_7}S_{4x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y3} \\
&\qquad +\int_{x,y,x_5,x_8}\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x3}D_{xy}S_{4y}S_{y8}\mathrm{i}\eta_8-\int_{x,y,x_5,x_6}\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6 D_{xy}S_{4y}S_{y3}\Big)+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_1}\Big(-\int_{x,y,x_7}S_{4x}S_{x3}D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y2}+\int_{x,y,x_7}S_{4x}S_{x2}D_{xy}\mathrm{i}\bar{\eta}_7 S_{7y}S_{y3} \\
&\qquad +\int_{x,y,x_5}\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x3}D_{xy}S_{4y}S_{y2}-\int_{x,y,x_5}\mathrm{i}\bar{\eta}_5 S_{5x}S_{x2}D_{xy}S_{4y}S_{y3}\Big)+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int_{x,y}\big(-S_{4x}S_{x3}D_{xy}S_{1y}S_{y2}+S_{4x}S_{x2}D_{xy}S_{1y}S_{y3} \\
&\qquad +S_{1x}S_{x3}D_{xy}S_{4y}S_{y2}-S_{1x}S_{x2}D_{xy}S_{4y}S_{y3}\big)+\mathcal{O}(\kappa^3) \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\int_{x,y}(-S_{4x}S_{x3}D_{xy}S_{1y}S_{y2}+S_{4x}S_{x2}D_{xy}S_{1y}S_{y3})+\mathcal{O}(\kappa^3)
\end{aligned}$$

$=-$

$+$

$+\mathcal{O}(\kappa^3),$ (11.370)

其中 $S_{ix}\equiv S_{\mathrm{F}}(x_i-x)$，$S_{xi}\equiv S_{\mathrm{F}}(x-x_i)$。上式第二步只保留对此关联函数有贡献的一幅 κ^2 阶 Feynman 图。由于两条费米子线是全同的，这幅 Feynman 图的对称性因子为 2，它对应于来自指数函数展开式的 1/2! 因子。第三步根据 Feynman 规则 (11.356) 和 (11.357) 将 Feynman 图表达为代数表达式，第四步用到对 Grassmann 数的泛函导数的定义 (11.310)，第五步利用四维 δ 函数的挑选性进行积分。在第八步圆括号中，第 1 项与第 4 项具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，第 2 项与第 3 项也具有交换 x 和 y 的对称性，积分结果两两相等。因此，可以只保留第 1 项和第 2 项，消去前面来自指数函数展开式的 1/2! 因子，得到第九步的结果。第十步将第九步结果画成 Feynman 图。可以看到，κ^2 阶两幅拓扑不等价的 Feynman 图之间相对符号为负。根据 LSZ 约化公式 (10.117)，可以将这个四点关联函数转化为散射过程 $\psi\bar{\psi}\to\psi\bar{\psi}$ 的 T 矩阵元。从而，这个散射过程的两幅拓扑不等价的 Feynman 图之间相对符号为负，如图 7.3 所示。这个结果与 7.1.2 小节利用正则量子化方法得到的结果 (7.74) 式一致。此外，也可通过 LSZ 约化公式将这个关联函数转化为散射过程 $\psi\psi\to\psi\psi$ 和 $\bar{\psi}\bar{\psi}\to\bar{\psi}\bar{\psi}$ 的 T 矩阵元。实际上，以上三个散射过程彼此之间具有交叉对称性。

关于 $\phi(x_1)$、$\phi(x_2)$、$\psi(x_3)$ 和 $\bar{\psi}(x_4)$ 的四点连通关联函数为

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\mathsf{T}[\phi^{\mathrm{H}}(x_1)\phi^{\mathrm{H}}(x_2)\psi^{\mathrm{H}}(x_3)\bar{\psi}^{\mathrm{H}}(x_4)]|0\rangle_{\mathrm{c}}\\
&=\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_3}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_4}(\mathrm{i}W[J,\bar{\eta},\eta])\bigg|_{J=\bar{\eta}=\eta=0}\\
&=\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_3}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_4}\Bigg(\Bigg.
\begin{array}{c}\eta\\ \\ \bar{\eta}\end{array}
\begin{array}{c}\\ x\\ \\ y\\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}J\\ \\ J\end{array}
\Bigg.\Bigg)\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_3}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_4}\int_{x,y,x_5,x_6,x_7,x_8}\mathrm{i}\bar{\eta}_5S_{5y}S_{yx}S_{x6}\mathrm{i}\eta_6D_{y7}\mathrm{i}J_7D_{x8}\mathrm{i}J_8+\mathcal{O}(\kappa^3)\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_3}\int_{x,y,x_5,x_7,x_8}\mathrm{i}\bar{\eta}_5S_{5y}S_{yx}S_{x4}D_{y7}\mathrm{i}J_7D_{x8}\mathrm{i}J_8+\mathcal{O}(\kappa^3)\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_2}\int_{x,y,x_7,x_8}S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y7}\mathrm{i}J_7D_{x8}\mathrm{i}J_8+\mathcal{O}(\kappa^3)\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_1}\left(\int_{x,y,x_8}S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y2}D_{x8}\mathrm{i}J_8+\int_{x,y,x_7}S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y7}\mathrm{i}J_7D_{x2}\right)+\mathcal{O}(\kappa^3)\\
&=(-\mathrm{i}\kappa)^2\int_{x,y}(S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y2}D_{x1}+S_{3y}S_{yx}S_{x4}D_{y1}D_{x2})+\mathcal{O}(\kappa^3)
\end{aligned}
$$

$=$

$+$

$+\mathcal{O}(\kappa^3).$ (11.371)

可见，这个关联函数在 κ^2 阶包含两幅拓扑不等价的 Feynman 图，它们之间的相对符号为正。利用 LSZ 约化公式，可以将这个关联函数转化为散射过程 $\psi\bar{\psi}\to\phi\phi$、$\phi\phi\to\psi\bar{\psi}$、$\psi\phi\to\psi\phi$ 和 $\bar{\psi}\phi\to\bar{\phi}\phi$ 的 T 矩阵元，而 $\psi\bar{\psi}\to\phi\phi$ 湮灭过程在 κ^2 阶的 Feynman 图由图 7.6 给出。

11.4 量子电动力学的路径积分量子化

本节研究量子电动力学的路径积分量子化，相关讨论可以推广到一般的 U(1) 规范理论。

11.4.1 电磁场的路径积分量子化

对于自由的电磁场 $A^\mu(x)$，拉氏量由场强张量 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ 表达为

$$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{11.372}$$

多点关联函数的生成泛函定义为

$$Z_0[K]=\mathcal{N}_0\int\mathcal{D}A\,\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\mathcal{L}_0(x)+K^\mu(x)A_\mu(x)\right]\right\}, \tag{11.373}$$

其中外源 $K^\mu(x)$ 是一个实的 Lorentz 矢量场，泛函测度为 $\mathcal{D}A=\mathcal{D}A^0\,\mathcal{D}A^1\,\mathcal{D}A^2\,\mathcal{D}A^3$。参考 (4.47) 式，将拉氏量改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu\\&=-\frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\mu A^\nu)+\frac{1}{2}A_\nu\partial^2A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\nu(A_\mu\partial^\mu A^\nu)-\frac{1}{2}A_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu,\end{aligned} \tag{11.374}$$

其中两个全散度项对全时空积分没有贡献，因而

$$Z_0[K]=\mathcal{N}_0\int\mathcal{D}A\,\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}(A_\mu\partial^2A^\mu-A_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu)+K^\mu A_\mu\right]\right\}. \tag{11.375}$$

作 Wick 转动，转到四维 Euclid 空间，电磁场 $A^\mu_{\mathrm{E}}=(\mathbf{A}_{\mathrm{E}},A^4_{\mathrm{E}})$ 和外源 $K^\mu_{\mathrm{E}}=(\mathbf{K}_{\mathrm{E}},K^4_{\mathrm{E}})$ 的分量定义为

$$\mathbf{A}_{\mathrm{E}}\equiv\mathbf{A},\quad A^4_{\mathrm{E}}\equiv\mathrm{i}A^0,\quad \mathbf{K}_{\mathrm{E}}\equiv\mathbf{K},\quad K^4_{\mathrm{E}}\equiv\mathrm{i}K^0. \tag{11.376}$$

(11.148) 意味着

$$\partial^i_{\mathrm{E}}=\partial_{\mathrm{E},i}=\partial_i=-\partial^i\ (i=1,2,3),\quad \partial^4_{\mathrm{E}}=\partial_{\mathrm{E},4}=-\mathrm{i}\partial_0=-\mathrm{i}\partial^0, \tag{11.377}$$

故

$$\partial^2=\partial_0^2-\nabla^2=-\partial^2_{\mathrm{E},4}-\nabla^2_{\mathrm{E}}=-\partial^2_{\mathrm{E}}. \tag{11.378}$$

从而推出

$$A_\mu\partial^2A^\mu=A^0\partial^2A^0-A^i\partial^2A^i=(-\mathrm{i}A^4_{\mathrm{E}})\left(-\partial^2_{\mathrm{E}}\right)(-\mathrm{i}A^4_{\mathrm{E}})-A^i_{\mathrm{E}}(-\partial^2_{\mathrm{E}})A^i_{\mathrm{E}}$$

$$= A_{\mathrm{E}}^4\partial_{\mathrm{E}}^2A_{\mathrm{E}}^4 + A_{\mathrm{E}}^i\partial_{\mathrm{E}}^2A_{\mathrm{E}}^i = A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^2A_{\mathrm{E}}^\mu, \tag{11.379}$$

$$A_\mu\partial^\mu = A_0\partial_0 - A_i\partial_i = -\mathrm{i}A_{\mathrm{E},4}\mathrm{i}\partial_{\mathrm{E},4} + A_{\mathrm{E},i}\partial_{\mathrm{E},i} = A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^\mu, \tag{11.380}$$

$$\partial^\nu A_\nu = \partial_0A_0 - \partial_iA_i = \mathrm{i}\partial_{\mathrm{E},4}(-\mathrm{i}A_{\mathrm{E},4}) + \partial_{\mathrm{E},i}A_{\mathrm{E},i} = \partial_{\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}, \tag{11.381}$$

$$K^\mu A_\mu = K^0A^0 - K^iA^i = -\mathrm{i}K_{\mathrm{E}}^4(-\mathrm{i}A_{\mathrm{E}}^4) - K_{\mathrm{E}}^iA_{\mathrm{E}}^i = -K_{\mathrm{E}}^\mu A_\mu^{\mathrm{E}}. \tag{11.382}$$

再利用 (11.147) 式，将 Euclid 空间中的自由生成泛函表达为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_0\int\mathcal{D}A\,\exp\left\{\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^2A_{\mathrm{E}}^\mu - A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^\mu\partial_{\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}) - K_{\mathrm{E}}^\mu A_\mu^{\mathrm{E}}\right]\right\}. \tag{11.383}$$

下面将上式中的积分改写为内积的形式，有

$$\begin{aligned}
&\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,(A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^2A_{\mathrm{E}}^\mu - A_{\mathrm{E},\mu}\partial_{\mathrm{E}}^\mu\partial_{\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu})\\
=&\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,[A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^2A_{\mathrm{E}}^\mu(y_{\mathrm{E}}) - A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})]\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\\
=&\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\{A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}},\nu}[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu A_{\mathrm{E}}^\mu(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})] - A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})[\partial_{y_{\mathrm{E}},\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu A_{\mathrm{E}}^\mu(y_{\mathrm{E}})\\
&\quad - A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})] + A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\}\\
=&\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,\{-A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu[\partial_{y_{\mathrm{E}},\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})A_{\mathrm{E}}^\mu(y_{\mathrm{E}})]\\
&\quad + A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu\partial_{y_{\mathrm{E}},\nu}\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]A_{\mathrm{E}}^\mu(y_{\mathrm{E}}) + A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})]\\
&\quad - A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})[\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})]A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\}\\
=&-\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\left[-\left(\delta^{\mu\nu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^2 - \partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu\right)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\right]A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\\
=&-\int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}}).
\end{aligned} \tag{11.384}$$

第二、三步用了分部积分，第三、四步丢弃对 $\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}$ 积分没有贡献的全散度项。第五步中的连续方阵定义为

$$B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}}) \equiv -\left(\delta^{\mu\nu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^2 - \partial_{y_{\mathrm{E}}}^\mu\partial_{y_{\mathrm{E}}}^\nu\right)\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}), \tag{11.385}$$

它同时也是四维 Euclid 矢量空间上的四阶方阵，以 μ 和 ν 分别作为行列指标。引入内积

$$(A_{\mathrm{E}},BA_{\mathrm{E}}) \equiv \int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})A_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}}), \tag{11.386}$$

$$(K_{\mathrm{E}},A_{\mathrm{E}}) \equiv \int\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,K_{\mathrm{E}}^\mu(x_{\mathrm{E}})A_\mu^{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}}), \tag{11.387}$$

将自由生成泛函改写为

$$Z_{0,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_0\int\mathcal{D}A\,\exp\left[-\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E}},BA_{\mathrm{E}}) + (-K_{\mathrm{E}},A_{\mathrm{E}})\right]. \tag{11.388}$$

推广 (11.172) 和 (11.173)式，得到泛函 Gauss 积分公式

$$\int\mathcal{D}A\,\exp\left[-\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E}},BA_{\mathrm{E}})\right] = (\det B)^{-1/2}, \tag{11.389}$$

$$\int \mathcal{D}A \exp\left[-\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E}}, BA_{\mathrm{E}}) + (-K_{\mathrm{E}}, A_{\mathrm{E}})\right] = (\det B)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(K_{\mathrm{E}}, B^{-1}K_{\mathrm{E}})\right]. \tag{11.390}$$

原则上，利用上式可以作出自由生成泛函 $Z_{0,\mathrm{E}}[K]$ 中的泛函积分。但是，此处 B 矩阵的逆矩阵 B^{-1} 是**不存在**的，原因如下。

将 Fourier 变换公式 (11.178) 代入 (11.385) 式，得

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}}) &= -\left(\delta^{\mu\nu}\partial^2_{y_{\mathrm{E}}} - \partial^{\mu}_{y_{\mathrm{E}}}\partial^{\nu}_{y_{\mathrm{E}}}\right)\int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\,(\delta^{\mu\nu}p_{\mathrm{E}}^2 - p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}. \end{aligned} \tag{11.391}$$

可见，$B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 变换为

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(p_{\mathrm{E}}) = \delta^{\mu\nu}p_{\mathrm{E}}^2 - p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu}, \tag{11.392}$$

它是 Euclid 矢量空间上的四阶方阵。由本征方程

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(p_{\mathrm{E}})\,p_{\mathrm{E},\nu} = (\delta^{\mu\nu}p_{\mathrm{E}}^2 - p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu})\,p_{\mathrm{E},\nu} = p_{\mathrm{E}}^2 p_{\mathrm{E}}^{\mu} - p_{\mathrm{E}}^2 p_{\mathrm{E}}^{\mu} = 0\cdot p_{\mathrm{E}}^{\mu} \tag{11.393}$$

可知，0 是矩阵 $\tilde{B}(p_{\mathrm{E}})$ 的一个本征值，因而 $\tilde{B}(p_{\mathrm{E}})$ 是奇异矩阵，其行列式为零，是不可逆的。由于 $\tilde{B}(p_{\mathrm{E}})$ 是不可逆矩阵，其 Fourier 逆变换 $B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 也是不可逆矩阵。

由于 $B^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 不可逆，自由生成泛函 $Z_{0,\mathrm{E}}[K]$ 中的泛函积分不能通过 (11.390) 式给出适当的结果。导致这个问题的根源在于**规范对称性**。回顾 4.4.2 小节和 8.1 节，拉氏量 (11.372) 具有规范对称性，即它在规范变换

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta(x) \tag{11.394}$$

的作用下不会改变。转到四维 Euclid 空间，上式化为

$$-A'_{\mathrm{E},i}(x_{\mathrm{E}}) = -A_{\mathrm{E},i}(x_{\mathrm{E}}) - \frac{1}{e}\partial_{\mathrm{E},i}\theta(x_{\mathrm{E}}), \quad -\mathrm{i}A'_{\mathrm{E},4}(x_{\mathrm{E}}) = -\mathrm{i}A_{\mathrm{E},4}(x_{\mathrm{E}}) - \frac{\mathrm{i}}{e}\partial_{\mathrm{E},4}\theta(x_{\mathrm{E}}), \tag{11.395}$$

即

$$A'_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}) = A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}) + \frac{1}{e}\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_{\mathrm{E}}). \tag{11.396}$$

对 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})$ 作 Fourier 变换，得

$$\tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_{\mathrm{E}}) \equiv \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}}} A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}). \tag{11.397}$$

从而，$A'_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 变换是

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_{\mathrm{E},\mu}(p_{\mathrm{E}}) &\equiv \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}}} A'_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}) = \int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}}}\left[A_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}}) + \frac{1}{e}\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_{\mathrm{E}})\right] \\ &= \tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(p_{\mathrm{E}}) + \frac{1}{e}\int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\,\{\partial_{\mathrm{E},\mu}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}}}\theta(x_{\mathrm{E}})] - (\partial_{\mathrm{E},\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot x_{\mathrm{E}}})\theta(x_{\mathrm{E}})\} \end{aligned}$$

$$= \tilde{A}_\mu(p) - \frac{\mathrm{i}p_{\mathrm{E},\mu}}{e}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}}\theta(x_\mathrm{E}) = \tilde{A}_\mu(p) - \frac{\mathrm{i}}{e}p_{\mathrm{E},\mu}\tilde{\theta}(p_\mathrm{E}), \tag{11.398}$$

其中第四步丢弃一个对积分没有贡献的全散度项，而

$$\tilde{\theta}(p_\mathrm{E}) \equiv \int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot x_\mathrm{E}}\theta(x_\mathrm{E}) \tag{11.399}$$

是 $\theta(x_\mathrm{E})$ 的 Fourier 变换。

将自由生成泛函 (11.388) 改写成

$$Z_{0,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_0\int \mathcal{D}A\,\exp\left[-S_\mathrm{E} + (-K_\mathrm{E}, A_\mathrm{E})\right], \tag{11.400}$$

其中 S_E 是 Euclid 空间中的作用量，表达为

$$\begin{aligned} S_\mathrm{E} &= \frac{1}{2}(A_\mathrm{E}, BA_\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\,A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})B^{\mu\nu}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E})A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\,\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\left(\delta^{\mu\nu}p_\mathrm{E}^2 - p_\mathrm{E}^\mu p_\mathrm{E}^\nu\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{E}\cdot(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})}A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\tilde{A}_{\mathrm{E},\mu}(-p_\mathrm{E})\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})\tilde{A}_{\mathrm{E},\nu}(p_\mathrm{E}). \end{aligned} \tag{11.401}$$

上式第三步用到 (11.391) 式，第四步对 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 和 $A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})$ 作 Fourier 变换。

对于任意标量函数 $\theta(x_\mathrm{E})$，可通过规范变换 (11.396) 从 $A_{\mathrm{E},\mu}(x) = 0$ 得到矢量场构型

$$A_{\mathrm{E},\mu}(x) = \frac{1}{e}\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E}), \tag{11.402}$$

这种场构型称为**纯规范** (pure gauge) **构型**。纯规范构型与 $A_{\mathrm{E},\mu}(x) = 0$ 是规范等价的。根据 (11.398) 式，纯规范构型 (11.402) 的 Fourier 变换是

$$\tilde{A}_{\mathrm{E},\nu}(p_\mathrm{E}) = -\frac{\mathrm{i}}{e}p_{\mathrm{E},\mu}\tilde{\theta}(p_\mathrm{E}). \tag{11.403}$$

将上式代入 (11.401) 式，利用本征方程 (11.393)，推出

$$S_\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4p_\mathrm{E}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{e}p_{\mathrm{E},\mu}\tilde{\theta}(-p_\mathrm{E})\,\tilde{B}^{\mu\nu}(p_\mathrm{E})\left[-\frac{\mathrm{i}}{e}p_{\mathrm{E},\nu}\tilde{\theta}(p_\mathrm{E})\right] = 0. \tag{11.404}$$

可见，任何纯规范构型对作用量 S_E 的贡献都是零，从而对 (11.400) 式中的 $\exp(-S_\mathrm{E})$ 因子贡献为 1。这意味着，在计算自由生成泛函 (11.400) 时，对所有纯规范构型的泛函积分具有严重的发散行为，因为 $\exp(-S_\mathrm{E})$ 因子不再能够提供通常的 Gauss 指数压低。

由规范变换 (11.396) 可知，纯规范构型 $e^{-1}\partial_{\mathrm{E},\mu}\theta(x_\mathrm{E})$，正是 $A'_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 与 $A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})$ 之差，因而是规范等价性的体现。标量函数 $\theta(x_\mathrm{E})$ 的无穷多种取法意味着在物理上规范等价的场构型有无穷多种。泛函积分对所有的电磁场构型进行积分，从而包含了无穷多种规范等价的场构型的贡献，这导致自由生成泛函 (11.400) 不具有良好的定义。

为了解决这个问题，我们需要在泛函积分 (11.375) 中避免对规范等价的场构型进行重复计算,即采用某种规范条件来约束场构型。将规范条件融入到泛函积分计算中的方法称为 **Faddeev-Popov 方法** [55]。

设**规范固定函数** $G(A)$ 是电磁场 $A^\mu(x)$ 的函数，$G(A)=0$ 给出一个规范条件。比如，$G(A)=\partial_\mu A^\mu$ 就对应于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu=0$。为了在泛函积分中引入规范条件 $G(A)=0$，需要用到泛函 δ 函数。设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是时空坐标 x^μ 的函数，**泛函 $\boldsymbol{\delta}$ 函数** $\delta_{\mathrm{F}}[f(x)]$ 是所有时空点 x 处的 δ 函数 $\delta[f(x)]$ 的乘积，满足 $\delta_{\mathrm{F}}[f(x)]=\delta_{\mathrm{F}}[-f(x)]$ 和

$$\boxed{\int \mathcal{D}f\,\delta_{\mathrm{F}}[f(x)]=1.} \tag{11.405}$$

对于 $f(x)$ 的泛函 $F[f(x)]$，有

$$\boxed{\int \mathcal{D}f\,F[f(x)]\,\delta_{\mathrm{F}}[f(x)-g(x)]=F[g(x)].} \tag{11.406}$$

以上两式是 (2.54) 和 (2.55) 式的推广。根据 (11.405) 式，有

$$\int \mathcal{D}G\,\delta_{\mathrm{F}}[G(A)]=1. \tag{11.407}$$

设 $A^\theta_\mu(x)$ 是由场构型 $A_\mu(x)$ 经过规范变换

$$A^\theta_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{11.408}$$

得到的场构型。将 $G(A^\theta)$ 看作规范变换参数 $\theta(x)$ 的泛函，把 (11.407) 式改写为

$$\int \mathcal{D}\theta\,\det\left[\frac{\delta G(A^\theta)}{\delta\theta}\right]\,\delta_{\mathrm{F}}[G(A^\theta)]=1, \tag{11.409}$$

其中 $\det\{\delta G[A^\theta(x)]/\delta\theta(y)\}$ 是以时空坐标 x 和 y 作为行列指标的**泛函行列式**，它考虑了对 $\mathcal{D}G$ 作泛函积分与对 $\mathcal{D}\theta$ 作泛函积分之间的差异。

可以按以下方式理解 (11.409) 式。设 N 维列矢量 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_N)^{\mathrm{T}}$ 是 N 维列矢量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$ 的函数，记作 $v(u)$，则 N 维 δ 函数 $\delta^{(N)}(v)$ 满足

$$1=\int \mathrm{d}^N v\,\delta^{(N)}(v)=\int \mathrm{d}^N u\,\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right)\delta^{(N)}[v(u)]. \tag{11.410}$$

第二步作变量替换 $v\to u$，将对 v 的 N 重积分改写成对 u 的 N 重积分，而 $\det(\partial v_i/\partial u_j)$ 是相应的 Jacobi 行列式。(11.409) 式是上式在连续极限下的推广。

取外源 $K=0$，将自由生成泛函 (11.375) 表达为

$$Z_0[0]=\mathcal{N}_0\int \mathcal{D}A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A]}, \tag{11.411}$$

其中作用量泛函是

$$S[A]=\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,(A_\mu\partial^2A^\mu-A_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu). \tag{11.412}$$

将 (11.409) 式插入到 (11.411) 式，得

$$Z_0[0] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A]} \int \mathcal{D}\theta\, \det\left[\frac{\delta G(A^\theta)}{\delta\theta}\right] \delta_{\mathrm{F}}[G(A^\theta)]. \tag{11.413}$$

现在，考虑规范固定函数

$$G[A(x)] = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x), \tag{11.414}$$

其中 $\omega(x)$ 是任意的标量函数。它给出的规范条件是 $\partial^\mu A_\mu = \omega$，这是 Lorenz 规范条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 的推广。由 (11.408) 式得

$$G(A^\theta) = \partial^\mu A^\theta_\mu - \omega = \partial^\mu A_\mu - \frac{1}{e}\partial^2\theta - \omega, \tag{11.415}$$

再根据泛函导数的定义 (11.129) 推出

$$\frac{\delta G[A^\theta(x)]}{\delta\theta(y)} = -\frac{1}{e}\partial_x^2 \frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = -\frac{1}{e}\partial_x^2\delta^{(4)}(x-y). \tag{11.416}$$

于是，泛函行列式

$$D \equiv \det\left\{\frac{\delta G[A^\theta(x)]}{\delta\theta(y)}\right\} = \det\left[-\frac{1}{e}\partial_x^2\delta^{(4)}(x-y)\right] \tag{11.417}$$

是与 $A^\mu(x)$、$\theta(x)$ 和 $\omega(x)$ 均无关的无穷大常数。由此将 (11.413) 式化为

$$\begin{aligned} Z_0[0] &= \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A]}\, \delta_{\mathrm{F}}[G(A^\theta)] = \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A^\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A^\theta]}\, \delta_{\mathrm{F}}[G(A^\theta)] \\ &= \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A]}\, \delta_{\mathrm{F}}[G(A)] = \mathcal{N}_0 D \left(\int \mathcal{D}\theta\right) \int \mathcal{D}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A]}\, \delta_{\mathrm{F}}(\partial^\mu A_\mu - \omega). \end{aligned} \tag{11.418}$$

这里第二步作变量替换 $A_\mu \to A^\theta_\mu$，由 (11.408) 式可知 $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\theta$，而规范对称性意味着 $S[A] = S[A^\theta]$。现在第二步中的被积函数是 A^θ_μ 的泛函，可以将泛函积分变量 A^θ_μ 改写成 A_μ，得到第三步的结果。第四步用到 (11.414) 式。由于被积函数与 $\theta(x)$ 无关，泛函积分 $\int\mathcal{D}\theta$ 给出一个无穷大常数，它包含所有规范变换参数对路径积分的贡献。对 $\mathcal{D}A$ 的积分则受到规范条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 的约束，排除了规范等价的场构型的贡献。

(11.418) 式对任意 $\omega(x)$ 都是成立的。为了进一步得到便于使用的生成泛函，我们以

$$\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \frac{\omega^2(x)}{2\xi}\right] \tag{11.419}$$

为权重对 $\omega(x)$ 进行泛函积分，其中 ξ 为实常数。这个权重函数是 Euclid 空间中以 $\omega(x) = 0$ 为中心、ξ 为宽度参数的 Gauss 权重函数 $\exp[-\int \mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\, \omega^2(x_{\mathrm{E}})/(2\xi)]$ 在 Minkowski 时空中的解析延拓。也就是说，引入以 ξ 为参数的生成泛函

$$\begin{aligned} Z_{0,\xi}[0] &\equiv \mathcal{N}_\xi \int \mathcal{D}\omega\, \exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\right) Z_0[0] \\ &= \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D \left(\int \mathcal{D}\theta\right) \int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A]} \exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\right) \delta_{\mathrm{F}}(\partial^\mu A_\mu - \omega) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D \left(\int \mathcal{D}\theta\right) \int \mathcal{D}A \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_0\right) \exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}\right] \\
&= \mathcal{N}_{0,\xi} \int \mathcal{D}A \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_1\right),
\end{aligned} \tag{11.420}
$$

其中 $\mathcal{N}_\xi$ 是一个归一化常数。第三步利用泛函 δ 函数的性质 (11.406) 对 $\mathcal{D}\omega$ 进行积分。第四步中的常数定义为

$$
\mathcal{N}_{0,\xi} \equiv \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_0 D \int \mathcal{D}\theta, \tag{11.421}
$$

而

$$
\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{11.422}
$$

是等效的拉氏量，它正是 (4.211) 式。可见，这里的处理方法等价于 4.4.2 小节中的规范固定方法。上式中的第二项是依赖于规范固定参数 ξ 的规范固定项。添上外源，将适当的自由生成泛函定义为

$$
\boxed{Z_{0,\xi}[K] \equiv \mathcal{N}_{0,\xi} \int \mathcal{D}A \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + K^\mu A_\mu\right]\right\}.} \tag{11.423}
$$

转到四维 Euclid 空间，参考 (11.381) 和 (11.383) 式，有

$$
Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K] = \mathcal{N}_{0,\xi} \int \mathcal{D}A \exp\left(\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E} \left\{\frac{1}{2}\left[A_{\mathrm{E},\mu}\partial_\mathrm{E}^2 A_\mathrm{E}^\mu - A_{\mathrm{E},\mu}\partial_\mathrm{E}^\mu\partial_\mathrm{E}^\nu A_{\mathrm{E},\nu} - \frac{1}{\xi}(\partial_\mathrm{E}^\mu A_{\mathrm{E},\mu})^2\right] - K_\mathrm{E}^\mu A_\mu^\mathrm{E}\right\}\right). \tag{11.424}
$$

作分部积分，推出

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, (\partial_\mathrm{E}^\mu A_{\mathrm{E},\mu})^2 &= -\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\, \partial_{x_\mathrm{E}}^\mu A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}) \\
&= -\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\, \{\partial_{x_\mathrm{E}}^\mu A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu[A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})] \\
&\qquad - \partial_{x_\mathrm{E}}^\mu A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})[\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})]A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\} \\
&= -\frac{1}{\xi}\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\, \{-\partial_{x_\mathrm{E}}^\mu[A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})] \\
&\qquad + A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})[\partial_{x_\mathrm{E}}^\mu\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})]A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E})\} \\
&= -\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\, A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\left[\frac{1}{\xi}\partial_{x_\mathrm{E}}^\mu\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})\right]A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}) \\
&= -\int \mathrm{d}^4x_\mathrm{E}\, \mathrm{d}^4y_\mathrm{E}\, A_{\mathrm{E},\mu}(x_\mathrm{E})\left[-\frac{1}{\xi}\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu\partial_{y_\mathrm{E}}^\nu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E})\right]A_{\mathrm{E},\nu}(y_\mathrm{E}),
\end{aligned} \tag{11.425}
$$

其中最后一步用到

$$
\partial_{x_\mathrm{E}}^\mu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}) = \frac{\partial}{\partial(x_\mathrm{E}^\mu - y_\mathrm{E}^\mu)}\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}) = -\frac{\partial}{\partial(y_\mathrm{E}^\mu - x_\mathrm{E}^\mu)}\delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}) = -\partial_{y_\mathrm{E}}^\mu \delta^{(4)}(x_\mathrm{E}-y_\mathrm{E}). \tag{11.426}
$$

结合 (11.384) 式，得到

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K]=\mathcal{N}_{0,\xi}\int\mathcal{D}A\,\exp\left[-\frac{1}{2}(A_{\mathrm{E}},B_{\xi}A_{\mathrm{E}})+(-K_{\mathrm{E}},A_{\mathrm{E}})\right],\tag{11.427}$$

其中连续方阵定义为

$$B_{\xi}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})\equiv-\left[\delta^{\mu\nu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{2}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\right]\delta^{(4)}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}).\tag{11.428}$$

将 Fourier 变换公式 (11.178) 代入上式，得到

$$\begin{aligned}B_{\xi}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})&=-\left[\delta^{\mu\nu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{2}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\mu}\partial_{y_{\mathrm{E}}}^{\nu}\right]\int\frac{\mathrm{d}^{4}p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^{4}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^{4}p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^{4}}\left[\delta^{\mu\nu}p_{\mathrm{E}}^{2}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})},\end{aligned}\tag{11.429}$$

可见，$B_{\xi}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 变换是

$$\tilde{B}_{\xi}^{\mu\nu}(p_{\mathrm{E}})=\delta^{\mu\nu}p_{\mathrm{E}}^{2}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu}.\tag{11.430}$$

它的逆矩阵为

$$\tilde{B}_{\xi}^{-1,\mu\nu}(p_{\mathrm{E}})=\frac{1}{p_{\mathrm{E}}^{2}}\left[\delta^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}\right],\tag{11.431}$$

这可以通过下式检验：

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{\xi}^{\mu\rho}(p_{\mathrm{E}})\tilde{B}_{\xi,\rho\nu}^{-1}(p_{\mathrm{E}})&=\left[\delta^{\mu\rho}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\rho}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}\right]\left[\delta_{\rho\nu}-(1-\xi)\frac{p_{\mathrm{E},\rho}p_{\mathrm{E},\nu}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}\right]\\&=\delta^{\mu}{}_{\nu}-(1-\xi)\frac{p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\nu}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\nu}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}-\frac{(1-\xi)^{2}}{\xi}\frac{p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E},\nu}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}=\delta^{\mu}{}_{\nu}.\end{aligned}\tag{11.432}$$

$\tilde{B}_{\xi}^{-1,\mu\nu}(p_{\mathrm{E}})$ 的 Fourier 逆变换 $B_{\xi}^{-1,\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})$ 是 $B_{\xi}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})$ 的逆矩阵，也是 Euclid 空间中电磁场的 Feynman 传播子 $\Delta_{\mathrm{F,E}}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})$，即

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{F,E}}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})\equiv B_{\xi}^{-1,\mu\nu}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})&=\int\frac{\mathrm{d}^{4}p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^{4}}\tilde{B}_{\xi}^{-1,\mu\nu}(p_{\mathrm{E}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^{4}p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^{4}}\frac{1}{p_{\mathrm{E}}^{2}}\left[\delta^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p_{\mathrm{E}}^{\mu}p_{\mathrm{E}}^{\nu}}{p_{\mathrm{E}}^{2}}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})},\end{aligned}\tag{11.433}$$

它关于 μ 和 ν 指标是对称的。利用泛函 Gauss 积分公式 (11.390)，将自由生成泛函 (11.427) 表达为

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K]=\mathcal{N}_{0,\xi}(\det B_{\xi})^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}(K_{\mathrm{E}},B_{\xi}^{-1}K_{\mathrm{E}})\right].\tag{11.434}$$

归一化条件 $Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[0]=1$ 给出 $\mathcal{N}_{0,\xi}=(\det B_{\xi})^{1/2}$，故

$$Z_{0,\xi,\mathrm{E}}[K]=\exp\left[\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^{4}x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^{4}y_{\mathrm{E}}\,K_{\mathrm{E},\mu}(x_{\mathrm{E}})\Delta_{\mathrm{F,E}}^{\mu\nu}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})K_{\mathrm{E},\nu}(y_{\mathrm{E}})\right].\tag{11.435}$$

转换到 Minkowski 时空中，则电磁场的 Feynman 传播子 $\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 就是两点关联函数 $\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mu,\mathrm{H}}(x)A^{\nu,\mathrm{H}}(y)]\,|0\rangle$。根据 (11.376) 式，$(-\mathrm{i})^2A_{\mathrm{E}}^4A_{\mathrm{E}}^4$、$-\mathrm{i}A_{\mathrm{E}}^4A_{\mathrm{E}}^i$ 和 $A_{\mathrm{E}}^iA_{\mathrm{E}}^j$ 分别对应于 A^0A^0、A^0A^i 和 A^iA^j，其中 $i,j=1,2,3$。因此，$(-\mathrm{i})^2\Delta_{\mathrm{F,E}}^{44}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})$、$-\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F,E}}^{4i}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})=-\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F,E}}^{i4}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})$ 和 $\Delta_{\mathrm{F,E}}^{ij}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})$ 分别对应于 $\Delta_{\mathrm{F}}^{00}(x-y)$、$\Delta_{\mathrm{F}}^{0i}(x-y)=\Delta_{\mathrm{F}}^{i0}(x-y)$ 和 $\Delta_{\mathrm{F}}^{ij}(x-y)$。利用 (11.142)、(11.143) 和 (11.145) 式进行改写，得

$$
\begin{aligned}
(-\mathrm{i})^2\Delta_{\mathrm{F,E}}^{44}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) &= -\int\frac{\mathrm{d}^3p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^4\,\frac{1}{p_{\mathrm{E}}^2}\left[\delta^{44}-(1-\xi)\frac{p_{\mathrm{E}}^4p_{\mathrm{E}}^4}{p_{\mathrm{E}}^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}\\
&= \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{1}{-p^2}\left[1-(1-\xi)\frac{-p^0p^0}{-p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[p^0(x^0-y^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{-\mathrm{i}}{p^2}\left[g^{00}-(1-\xi)\frac{p^0p^0}{p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},
\end{aligned}
\tag{11.436}
$$

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F,E}}^{4i}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) &= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p_{\mathrm{E}}^4\,\frac{1}{p_{\mathrm{E}}^2}\left[\delta^{4i}-(1-\xi)\frac{p_{\mathrm{E}}^4p_{\mathrm{E}}^i}{p_{\mathrm{E}}^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{E}}\cdot(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}})}\\
&= -\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{1}{-p^2}\left[-(1-\xi)\frac{-\mathrm{i}p^0p^i}{-p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[p^0(x^0-y^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{-\mathrm{i}}{p^2}\left[g^{0i}-(1-\xi)\frac{p^0p^i}{p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},
\end{aligned}
\tag{11.437}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{F,E}}^{ij}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{-\mathrm{i}}{-p^2}\left[\delta^{ij}-(1-\xi)\frac{p^ip^j}{-p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[p^0(x^0-y^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{-\mathrm{i}}{p^2}\left[g^{ij}-(1-\xi)\frac{p^ip^j}{p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.
\end{aligned}
\tag{11.438}
$$

以上三式的最后一步都作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$。参考 (11.188) 式推导过程的讨论，将 **Minkowski 时空中电磁场的 Feynman 传播子**表达为

$$
\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\left[g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.}
\tag{11.439}
$$

上式是偶函数，且关于 μ 和 ν 是对称的，即

$$
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(y-x),\qquad \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\Delta_{\mathrm{F}}^{\nu\mu}(x-y).
\tag{11.440}
$$

规范固定参数 ξ 的不同取值对应于不同的规范。对于 **Feynman 规范**，$\xi=1$，有

$$
\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.}
\tag{11.441}
$$

这个结果与 (6.253) 式一致。另一种常用的规范是 **Landau 规范**，它对应于 $\xi=0$，Feynman 传播子为

$$
\boxed{\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\left(g^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.}
\tag{11.442}
$$

借助解析延拓，将 Euclid 空间中的生成泛函 (11.435) 转换到 Minkowski 时空中，作替换 $\mathrm{d}^4x_{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}^4y_{\mathrm{E}} \to \mathrm{i}\,\mathrm{d}^4x\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}^4y$、$K_{\mathrm{E},i}(x_{\mathrm{E}}) \to -K_{\mathrm{E},i}(x)$、$K_{\mathrm{E},4}(x_{\mathrm{E}}) \to \mathrm{i}K_{\mathrm{E},0}(x)$、$\Delta^{44}_{\mathrm{F,E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) \to -\Delta^{00}_{\mathrm{F}}(x-y)$、$\Delta^{4i}_{\mathrm{F,E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) \to \mathrm{i}\Delta^{0i}_{\mathrm{F}}(x-y)$ 和 $\Delta^{ij}_{\mathrm{F,E}}(x_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{E}}) \to \Delta^{ij}_{\mathrm{F}}(x-y)$，得到自由电磁场的生成泛函

$$\boxed{Z_{0,\xi}[K] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,K_\mu(x)\Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{F}}(x-y)K_\nu(y)\right].} \tag{11.443}$$

Feynman 传播子 (11.439) 的 Fourier 变换给出**动量空间中光子内线的 Feynman 规则**：

$$= \frac{-\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\left[g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]. \tag{11.444}$$

规范固定参数 ξ 的取值体现在上式方括号中的 $\xi p^\mu p^\nu/p^2$ 项上。根据 8.6.1 小节的讨论，*Ward* 恒等式表明，在不变振幅计算中将光子内线的贡献换成相应的四维动量 p^μ 或 p^ν，给出的结果为零。从而，$\xi p^\mu p^\nu/p^2$ 项在不变振幅计算中的贡献为零。于是，相关的不变振幅是规范不变量，不会受到 ξ 取值的影响。

11.4.2　旋量 QED

第 8 章讨论了描述带电费米子如何参与电磁相互作用的量子电动力学，本小节介绍在路径积分量子化中对它的处理方法。为简单起见，除电磁场 $A^\mu(x)$ 之外，只引进一种带电费米子 f，它对应于一个 Dirac 旋量场 $\psi(x)$，相应的**旋量 QED** 拉氏量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - Q_f e A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{11.445}$$

其中拉氏量的自由部分 $\mathcal{L}_0$ 已包含规范固定项，表达为

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_f\bar{\psi}\psi. \tag{11.446}$$

由于外源 $K^\mu(x)$ 的各个分量相互独立，有

$$\frac{\delta}{\delta K^\mu(x)}K^\nu(y) = \delta^\nu{}_\mu\delta^{(4)}(x-y). \tag{11.447}$$

多点关联函数的生成泛函表达为

$$\begin{aligned} Z[K,\bar{\eta},\eta] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L}+K^\mu A_\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right] \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left(-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu_{ab}\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_{a,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar{\eta}_{b,x}}\right) \\ &\quad\times\exp\left[\mathrm{i}\int_x(\mathcal{L}_0+K^\nu A_\nu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right] \end{aligned}$$

$$= \tilde{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\mathrm{i} Q_f e \gamma^{\mu}_{ab} \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^{\mu}_x} \frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta \eta_{a,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta \bar{\eta}_{b,x}} \right)^n Z_0[K, \bar{\eta}, \eta], \tag{11.448}$$

其中下标 a 和 b 是旋量指标，$\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$，$K^{\mu}_x \equiv K^{\mu}(x)$。根据 (11.350) 和 (11.443) 式，相应的自由生成泛函表达成

$$\begin{aligned} Z_0[K, \bar{\eta}, \eta] &= \mathcal{N}_0 \exp\left[\mathrm{i} \int_x (\mathcal{L}_0 + K^{\mu} A_{\mu} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right] \\ &= \exp\left[-\int_{x,y} \left(\frac{1}{2} K_{\mu,x} \Delta^{\mu\nu}_{xy} K_{\nu,x} + \bar{\eta}_x S_{xy} \eta_y \right) \right] \\ &= \exp\Big(K \sim\!\!\sim K \;+\; \eta \longrightarrow \bar{\eta} \Big), \end{aligned} \tag{11.449}$$

其中 $\Delta^{\mu\nu}_{xy} \equiv \Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{F}}(x-y)$，第三步改用 Feynman 图表示。

电磁场外源 K^{μ} 的 Feynman 规则为

$$K;\mu \sim\!\!\sim = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x\, K^{\mu}(x)\,. \tag{11.450}$$

电磁场的传播子和 QED 顶点的位置空间 Feynman 规则为

$$x;\mu \bullet\!\!\sim\!\!\sim\!\!\bullet\, y;\nu = \Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{F}}(x-y)\,, \qquad \begin{array}{c} \gamma;\mu \\ \sim \\ x \\ f \quad\quad f \end{array} = -\mathrm{i} Q_f e \int \mathrm{d}^4x\, \gamma^{\mu}\,. \tag{11.451}$$

与外源 K^{μ} 相关的 **Feynman 图泛函求导法则是**

> 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^{\mu}(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个外源 K^{μ} 换成时空点 x。

在微扰论中，将生成泛函 (11.448) 展开到 e^1 阶，得

$$\begin{aligned} Z[K, \bar{\eta}, \eta] = \Bigg[1 \;+\; x \bullet\!\!\sim\!\!\sim\!\!\circ\, K \;+\; \begin{array}{c} \eta \\ \searrow \\ x \bullet\!\!\sim\!\!\sim\!\!\circ\, K \\ \nearrow \\ \bar{\eta} \end{array} \;+\; \mathcal{O}(e^2) \Bigg] \\ \times \exp\Big(K \sim\!\!\sim K \;+\; \eta \longrightarrow \bar{\eta} \Big). \end{aligned} \tag{11.452}$$

$Z[K, \bar{\eta}, \eta]$ 中 e^2 阶的 Feynman 图结构类似于 11.3.3 小节中 Yukawa 理论在 κ^2 阶的结构，此处不再详细讨论。相应地，**连通关联函数的生成泛函表达为**

$$\mathrm{i}W[K, \bar{\eta}, \eta] = \ln Z[K, \bar{\eta}, \eta]$$

$=$

$+\ \mathcal{O}(e^2)$. (11.453)

从而，电磁场的单点函数为

$$\langle 0|\, A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)\,|0\rangle = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}(\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta])\Big|_{K=\bar\eta=\eta=0} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\Bigg($$

$$\Bigg) + \mathcal{O}(e^2)$$

$=$

$+\ \mathcal{O}(e^2)$, (11.454)

其中 $K_i^\mu \equiv K^\mu(x_i)$。电磁场的两点连通关联函数是

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)A^{\mathrm{H},\nu}(x_2)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_2^\nu}(\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta])\Big|_{K=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_2^\nu}\Big(K$$

$$K\Big) + \mathcal{O}(e^2) = x_1;\mu$$

$+\ \mathcal{O}(e^2)$. (11.455)

关于 $A(x_1)$、$\psi(x_2)$ 和 $\bar\psi(x_3)$ 的三点连通关联函数为

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)\psi^{\mathrm{H}}(x_2)\bar\psi^{\mathrm{H}}(x_3)]\,|0\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}(\mathrm{i}W[K,\bar\eta,\eta])\Big|_{K=\bar\eta=\eta=0}$$

$$= \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_1^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta\bar\eta_2}\frac{\delta}{-\mathrm{i}\,\delta\eta_3}\Bigg($$

$$\Bigg) + \mathcal{O}(e^2)$$

$=$

$+\ \mathcal{O}(e^2)$. (11.456)

尽管 (11.454) 式给出电磁场单点函数 $\langle 0|\,A^{\mathrm{H},\mu}(x_1)\,|0\rangle$ 的领头阶 Feynman 图，但具体计算得到的结果为零。这实际上是 **Furry 定理** [56] 的特例。这个定理说的是，**在 QED 中，奇数个电磁场的关联函数为零，即**

$$\boxed{\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle = 0} \tag{11.457}$$

对奇数 n 成立。这是 QED 的电荷共轭对称性引起的，证明如下。

(9.281) 式表明，电磁场算符的 C 变换为 $C^{-1}A^{\mathrm{H},\mu}(x)C = -A^{\mathrm{H},\mu}(x)$。利用 $C\,|0\rangle = |0\rangle$，推出

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle 0|\,\mathsf{T}[C^{-1}A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)CC^{-1}A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)C\cdots C^{-1}A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)C]\,|0\rangle \\
&= (-1)^n\,\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle \\
&= -\langle 0|\,\mathsf{T}[A^{\mathrm{H},\mu_1}(x_1)A^{\mathrm{H},\mu_2}(x_2)\cdots A^{\mathrm{H},\mu_n}(x_n)]\,|0\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{11.458}
$$

最后一步用到奇数 n 导致的 $(-1)^n=-1$。于是，n 为奇数时给出 (11.457) 式。

11.4.3 标量 QED

如果一个复标量场 $\phi(x)$ 携带电荷 Q_ϕ，那么它描述的正标量玻色子 ϕ 和反标量玻色子 $\bar{\phi}$ 分别携带电荷 Q_ϕ 和 $-Q_\phi$，它们参与电磁相互作用，相应的相互作用理论称为**标量 QED**。标量 QED 的拉氏量为

$$
\boxed{\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi,}
\tag{11.459}
$$

其中协变导数是

$$
D_\mu\phi=(\partial_\mu+\mathrm{i}Q_\phi eA_\mu)\phi.
\tag{11.460}
$$

相应地，$(D_\mu\phi)^\dagger=(\partial_\mu-\mathrm{i}Q_\phi eA_\mu)\phi^\dagger$。对电磁场 $A_\mu(x)$ 和复标量场 $\phi(x)$ 作 U(1) 规范变换

$$
A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta,\quad \phi'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_\phi\theta(x)}\phi(x),
\tag{11.461}
$$

类似于 (8.8) 式，推出

$$
[D_\mu\phi(x)]'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_\phi\theta(x)}D_\mu\phi(x).
\tag{11.462}
$$

可见，$D_\mu\phi(x)$ 的 U(1) 规范变换形式与 $\phi(x)$ 相同，这使得拉氏量 $\mathcal{L}$ 在 U(1) 规范变换下保持不变。因此，标量 QED 具有 U(1) 规范对称性，是一种 U(1) 规范理论。

将拉氏量中复标量场的协变动能项展开，得

$$
\begin{aligned}
(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi &= (\partial^\mu-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu)\phi^\dagger(\partial_\mu+\mathrm{i}Q_\phi eA_\mu)\phi \\
&= (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi+\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi+Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi \\
&= (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi+Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi.
\end{aligned}
\tag{11.463}
$$

上式第一项是 $\phi(x)$ 的动能项，另外两项是**规范相互作用项**

$$
\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi+Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi.}
\tag{11.464}
$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 描述复标量玻色子 ϕ 的电磁相互作用。注意，两个相互作用项在微扰论中的阶不同，上式第一项是 e^1 阶用三个场表达的**三线性相互作用项**，而第二项是 e^2 阶用四个场表达的**四线性相互作用项**。

容易看出，拉氏量 (11.459) 在 U(1) 整体变换 $\phi'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_\phi\theta}\phi(x)$ 的作用下保持不变，因而具有 U(1) 整体对称性。相应的无穷小 U(1) 整体变换是 $\bar{\delta}\phi=\delta\phi=\mathrm{i}Q_\phi\theta\phi$ 和 $\bar{\delta}\phi^\dagger=\delta\phi^\dagger=-\mathrm{i}Q_\phi\theta\phi^\dagger$，Noether 流 (1.197) 表达为

$$j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi+\bar{\delta}\phi^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}=(D^\mu\phi)^\dagger\mathrm{i}Q_\phi\theta\phi-\mathrm{i}Q_\phi\theta\phi^\dagger D^\mu\phi=-\mathrm{i}Q_\phi\theta[-(D^\mu\phi)^\dagger\phi+\phi^\dagger D^\mu\phi]. \tag{11.465}$$

将电磁流定义为

$$\begin{aligned}J^\mu_{\mathrm{EM}}&\equiv-\frac{e}{\theta}j^\mu=\mathrm{i}Q_\phi e[\phi^\dagger D^\mu\phi-(D^\mu\phi)^\dagger\phi]=\mathrm{i}Q_\phi e[\phi^\dagger(\partial_\mu+\mathrm{i}Q_\phi eA_\mu)\phi-(\partial_\mu-\mathrm{i}Q_\phi eA_\mu)\phi^\dagger\phi]\\&=\mathrm{i}Q_\phi e(\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi+2\mathrm{i}Q_\phi eA_\mu\phi^\dagger\phi),\end{aligned} \tag{11.466}$$

则 Noether 定理意味着电磁流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}}=0$。此处标量 QED 的电磁流 J^μ_{EM} 同时依赖于复标量场 $\phi(x)$ 和电磁场 $A^\mu(x)$。这一点与旋量 QED 不同，旋量场的电磁流 (8.12) 并不依赖于电磁场。

为了得到电磁场的运动方程，对拉氏量 (11.459) 求导，得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F^{\mu\nu},\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A_\nu}=-\mathrm{i}Q_\phi e\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\nu}\phi+2Q_\phi^2e^2A^\nu\phi^\dagger\phi=-J^\nu_{\mathrm{EM}}. \tag{11.467}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$0=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=-\partial_\mu F^{\mu\nu}+J^\nu_{\mathrm{EM}}, \tag{11.468}$$

故电磁场的经典运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu_{\mathrm{EM}}, \tag{11.469}$$

这是以电磁流 J^ν_{EM} 为源的 Maxwell 方程 (1.137)。

为了得到复标量场的运动方程，对拉氏量 (11.459) 求导，得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}=D^\mu\phi,\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\partial_\mu\phi+Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi-m^2\phi=-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu D_\mu\phi-m^2\phi. \tag{11.470}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.167) 给出

$$0=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=\partial_\mu D^\mu\phi+\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu D_\mu\phi+m^2\phi=D_\mu D^\mu\phi+m^2\phi, \tag{11.471}$$

故复标量场的经典运动方程为

$$\boxed{(D^2+m^2)\phi=0.} \tag{11.472}$$

上式相当于把 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2+m^2)\phi=0$ 中的普通导数换成协变导数。

接下来讨论标量 QED 的路径积分量子化。在拉氏量中加入规范固定项，得到

$$\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_0-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi+Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi, \tag{11.473}$$

其中拉氏量的自由部分为

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial^\mu\phi)^\dagger\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi. \tag{11.474}$$

引入自由生成泛函

$$\begin{aligned} Z_0[K, J^\dagger, J] &= \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger \exp\left[\mathrm{i}\int_x (\mathcal{L}_0 + K^\mu A_\mu + J^\dagger\phi + \phi^\dagger J)\right] \\ &= \exp\left[-\int_{x,y}\left(\frac{1}{2}K_{\mu,x}\Delta^{\mu\nu}_{xy}K_{\nu,x} + J^\dagger_x D_{xy} J_y\right)\right] \\ &= \exp\Big(K \sim\!\!\sim\!\!\sim\!\!\circ\!\!-\!\!\circ\; K \;+\; J \circ\!\!-\!\!-\!\!\blacktriangleright\!\!-\!\!-\!\!\circ\; J^\dagger\Big), \end{aligned} \tag{11.475}$$

其中第二步用到 (11.267) 和 (11.443) 式。第三步改用 Feynman 图表示，复标量场 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则为

$$y \bullet\!\!-\!\!-\!\!\blacktriangleright\!\!-\!\!-\!\!\bullet\; x = D_{\mathrm{F}}(x-y), \tag{11.476}$$

而外源 J 和 $J^\dagger$ 的 Feynman 规则是

$$\boxed{J \circ\!\!-\!\!-\!\!\blacktriangleright\!\!-\!\!- = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, J(x), \qquad -\!\!-\!\!\blacktriangleright\!\!-\!\!-\!\!\circ\; J^\dagger = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, J^\dagger(x).} \tag{11.477}$$

多点关联函数的生成泛函是

$$\begin{aligned} Z[K, J^\dagger, J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger \exp\left[\mathrm{i}\int_x (\mathcal{L}_1 + K^\mu A_\mu + J^\dagger\phi + \phi^\dagger J)\right] \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\phi^\dagger \exp\left\{\mathrm{i}\int_x (-\mathrm{i}Q_\phi e)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right]\right. \\ &\qquad \left. + \mathrm{i}\int_x Q_\phi^2 e^2 \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right\} \exp\left[\mathrm{i}\int_x (\mathcal{L}_0 + K^\mu A_\mu + J^\dagger\phi + \phi^\dagger J)\right] \\ &= \tilde{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{Q_\phi e\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right]\right. \\ &\qquad \left. + \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K^\mu_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right\}^n Z_0[K, J^\dagger, J], \end{aligned} \tag{11.478}$$

其中 $\tilde{\mathcal{N}} \equiv \mathcal{N}/\mathcal{N}_0$。上式花括号中第一项来自拉氏量中三线性相互作用项 $-\mathrm{i}Q_\phi e A^\mu \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi$ 的贡献，第二项来自四线性相互作用项 $Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger\phi$ 的贡献。$(\partial/\partial x^\mu\,\delta/\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x)$ 表示对用泛函导数算符 $\delta/\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x$ 求导得到的函数求时空导数，$(\partial/\partial x^\mu\,\delta/\mathrm{i}\,\delta J_x)$ 的意义类似。

在生成泛函 (11.478) 的 $n=1$ 阶，三线性相互作用项的贡献为

$$\begin{aligned} &Q_\phi e\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right] Z_0[K, J^\dagger, J] \\ &= Q_\phi e\int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \exp\left[-\int_{z,y}\left(\frac{1}{2}K_{\rho,z}\Delta^{\rho\sigma}_{zy}K_{\sigma,y}+J^\dagger_z D_{zy}J_y\right)\right]\\
&= Q_\phi e\int_x\left(\int_y \mathrm{i}\Delta^{\mu\nu}_{xy}K_{\nu,y}\right)\left[\left(\int_y \mathrm{i}J^\dagger_y D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}\frac{\partial D_{xy}}{\partial x^\mu}J_y\right)-\left(\int_y \mathrm{i}J^\dagger_y\frac{\partial D_{yx}}{\partial x^\mu}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right)\right]\\
&\times Z_0[K,J^\dagger,J].
\end{aligned}
\tag{11.479}
$$

我们需要根据上式的结构指定三线性顶点的 Feynman 规则。将 (11.188) 式代入，则上式中复标量场 Feynman 传播子的导数化为

$$
\frac{\partial D_{xy}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}p_\mu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)},\tag{11.480}
$$

$$
\frac{\partial D_{yx}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(y-x)}=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(\mathrm{i}q_\mu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(y-x)}.\tag{11.481}
$$

可见，用 $\partial/\partial x^\mu$ 对 D_{xy} 求导，相当在被积函数中添加一个 $-\mathrm{i}p^\mu$ 因子；用 $\partial/\partial x^\mu$ 对 D_{yx} 求导，相当在被积函数中添加一个 $\mathrm{i}q^\mu$ 因子；这两点可以归纳到三线性顶点的 Feynman 规则中。用 Feynman 图将 (11.479) 式表达为

$$
Q_\phi e\int_x\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x}\right)\frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger_x}\right]Z_0[K,J^\dagger,J]
$$

$=$

(11.482)

其中第一幅 Feynman 图中标注了两条复标量场内线的四维动量 p 和 q，它们是相应 Feynman 传播子表达式中的积分变量。于是，**位置空间中合适的三线性顶点 Feynman 规则是**

(11.483)

上图中标注的 γ 和 ϕ 是粒子名称。注意，(11.479) 式最后一步中的 $\partial D_{xy}/\partial x^\mu$ 对上式右边的贡献为 $-\mathrm{i}p^\mu$，而 $-\partial D_{yx}/\partial x^\mu$ 的贡献为 $-\mathrm{i}q^\mu$。在使用这条顶点规则时，应该将上式右边的 p^μ 和 q^μ 放入相应传播子的被积函数中。与外源 J 和 $J^\dagger$ 相关的 **Feynman 图泛函求导法则是**

- 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个外源 J 换成时空点 x；
- 用 $\dfrac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J^\dagger(x)}$ 求泛函导数，相当于将 Feynman 图中的一个外源 $J^\dagger$ 换成时空点 x。

另一方面，在生成泛函 (11.478) 的 $n=1$ 阶，四线性相互作用项的贡献为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_x^\mu} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} Z_0[K,J^\dagger,J] \\
&= \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\nu,x}} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x} \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta J_x^\dagger} \exp\left[-\int_{z,y}\left(\frac{1}{2}K_{\rho,z}\Delta_{zy}^{\rho\sigma}K_{\sigma,y} + J_z^\dagger D_{zy} J_y\right)\right] \\
&= \mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int_x \frac{\delta}{\mathrm{i}\,\delta K_{\mu,x}} \left\{\left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\nu\sigma}K_{\sigma,y}\right)\left(\int_y \mathrm{i}J_y^\dagger D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right)\right. \\
&\qquad \left.\times \exp\left[-\int_{z,y}\left(\frac{1}{2}K_{\rho,z}\Delta_{zy}^{\rho\sigma}K_{\sigma,y} + J_z^\dagger D_{zy} J_y\right)\right]\right\} \\
&= 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int_x \left[\frac{1}{2}\Delta_{xx}^{\mu\nu}\left(\int_y \mathrm{i}J_y^\dagger D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\mu\rho}K_{\rho,y}\right)\left(\int_y \mathrm{i}\Delta_{xy}^{\nu\sigma}K_{\sigma,y}\right)\left(\int_y \mathrm{i}J_y^\dagger D_{yx}\right)\left(\int_y \mathrm{i}D_{xy}J_y\right)\right] Z_0[K,J^\dagger,J]
\end{aligned}
$$

$=$

$\exp\Big($

$\Big)$. (11.484)

注意，最后一步中第一、二幅 Feynman 图的对称性因子都是 2。因此，我们特意在倒数第二步中提出一个因子 2 到积分之外，让方括号中的两项均含有一个因子 1/2 以解释对称性因子。由此归纳出来**位置空间中的四线性顶点 Feynman 规则为**

$= 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu} \int \mathrm{d}^4x\,.$ (11.485)

这个顶点规则中出现因子 2 的原因是四线性相互作用项 $Q_\phi^2 e^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi$ 包含 2 个全同的电磁场。

去掉 (11.483) 和 (11.485) 式中的时空坐标记号和时空坐标积分，就得到**动量空间中三线性和四线性顶点的 Feynman 规则**：

$= -\mathrm{i}Q_\phi e(p_\mu + q_\mu)\,,$

$= 2\mathrm{i}Q_\phi^2 e^2 g_{\mu\nu}\,.$

(11.486)

在这两个顶点的 Feynman 图中，拉氏量相互作用项中的 $\phi(x)$ 对应于指向顶点的虚线头，而 $\phi^\dagger(x)$ 对应于背向顶点的虚线头。在三线性顶点的 Feynman 图中，标记出来的四维动量 p 和 q 是与相应线头连接的复标量玻色子外线或内线上的动量，p 和 q 的方向由线上箭头给出。与拉氏量中的三线性相互作用项 $-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi=-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu[\phi^\dagger\partial_\mu\phi-(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi]$ 比较可知，

- 对于指向顶点的四维动量 p，相互作用项中对场的时空导数算符 ∂_μ 在动量空间 Feynman 规则中贡献一个 $-\mathrm{i}p_\mu$ 因子；
- 对于背向顶点的四维动量 q，相互作用项中对场的时空导数算符 ∂_μ 在动量空间 Feynman 规则中贡献一个 $\mathrm{i}q_\mu$ 因子。

这是一个普遍规律，可用于快速推导相互作用项的动量空间 Feynman 规则。

快速推导顶点规则的流程如下。首先，三线性相互作用项 $-\mathrm{i}Q_\phi eA^\mu[\phi^\dagger\partial_\mu\phi-(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi]$ 由三个场 $A^\mu(x)$、$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 构成，它们分别对应于一个波浪线头、一个指向顶点的虚线头和一个背向顶点的虚线头，由此画出 (11.486) 中第一幅 Feynman 图的圆点和三个线头。由于相互作用项中出现了对场的时空导数，因而 Feynman 规则与动量有关，在两个虚线头上标注指向顶点的动量 p 和背向顶点的动量 q，根据上述规律，$\phi^\dagger\partial_\mu\phi$ 给出 $-\mathrm{i}p_\mu$，$(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi$ 给出 $\mathrm{i}q_\mu$。于是，将三线性相互作用项中的三个场剥离，得到 $-\mathrm{i}Q_\phi e(-\mathrm{i}p_\mu-\mathrm{i}q_\mu)$，再乘以 i，就得到三线性顶点表达式 $-\mathrm{i}Q_\phi e(p_\mu+q_\mu)$。

其次，四线性相互作用项 $Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi=Q_\phi^2e^2g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu\phi^\dagger\phi$ 由四个场 $A^\mu(x)$、$A^\nu(x)$、$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 构成，它们分别对应于两个波浪线头、一个指向顶点的虚线头和一个背向顶点的虚线头，由此画出 (11.486) 中第二幅 Feynman 图的圆点和四个线头。将四线性相互作用项中的四个场剥离，乘以 i，再乘以两个全同电磁场的排列数 2!，就得到四线性顶点表达式 $2\mathrm{i}Q_\phi^2e^2g_{\mu\nu}$。

以上是对标量 QED 路径积分量子化的讨论。实际上，也可以使用正则量子化方法处理标量 QED，详细讨论见参考书【4】第 8 章中的 Example 8.6。标量 QED 的三线性相互作用项中包含对复标量场的时空导数，这导致复标量场的共轭动量密度与自由复标量场理论不同，从而引起相互作用绘景中的相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1^{\mathrm{I}}$ 包含一个**非协变项** $Q_\phi^2e^2\phi^{\mathrm{I}\dagger}\phi^{\mathrm{I}}(A^{\mathrm{I},0})^2$。这个非协变项在微扰论各阶中的贡献会被对复标量场 Feynman 传播子求时空导数引起的非协变项所精确抵消，从而不影响最终的物理结果。但是，这种情况导致标量 QED 的正则量子化处理比较繁琐。

尽管如此，真正对物理结果有贡献的三线性和四线性协变相互作用项所对应的顶点规则仍可通过正则量子化方法来推导。比如，相互作用绘景中的三线性相互作用项为 $-\mathrm{i}Q_\phi eA^{\mathrm{I},\mu}\phi^{\mathrm{I}\dagger}\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi^{\mathrm{I}}$，它对 e^1 阶 $\mathrm{i}T$ 算符的贡献是

$$\mathrm{i}T_1^{(1)}=Q_\phi e\int\mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}\{A^{\mathrm{I},\mu}(x)[\phi^{\mathrm{I}\dagger}(x)\partial_\mu\phi^{\mathrm{I}}(x)-\partial_\mu\phi^{\mathrm{I},\dagger}(x)\phi^{\mathrm{I}}(x)]\}. \tag{11.487}$$

接下来省略场算符右上角处表示相互作用绘景的记号 I。考虑初态包含 1 个正标量玻色子和 1

个光子，$|i\rangle = |\mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda\rangle$，末态包含 1 个正标量玻色子，$\langle f| = \langle \mathbf{q}^+|$，相应的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}^+| \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, |\mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda\rangle \\
&= Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+| \, \mathsf{N}\{A^\mu(x)[\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) - \partial_\mu\phi^\dagger(x)\phi(x)]\} \, |\mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda\rangle \\
&= Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{q}^+| \, [\phi^{\dagger(-)}(x)\partial_\mu\phi^{(+)}(x) - \partial_\mu\phi^{\dagger(-)}(x)\phi^{(+)}(x)]A^{\mu(+)}(x) \, |\mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda\rangle \, . \qquad (11.488)
\end{aligned}$$

仿照 (7.135) 和 (7.137) 式的计算过程，推出

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\phi^{(+)}(x) \, |\mathbf{p}^+\rangle &= \partial_\mu \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}} a_\mathbf{q} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \sqrt{2E_\mathbf{p}} \, a_\mathbf{p}^\dagger \, |0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}q_\mu\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}[a_\mathbf{q}, a_\mathbf{p}^\dagger] \, |0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3q \frac{-\mathrm{i}q_\mu\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \, |0\rangle = -\mathrm{i}p_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \, |0\rangle \, , \qquad (11.489) \\
\langle \mathbf{q}^+| \, \partial_\mu\phi^{\dagger(-)} &= \partial_\mu \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \, \langle 0| \, \sqrt{2E_\mathbf{q}} \, a_\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} a_\mathbf{p}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i}p_\mu\sqrt{E_\mathbf{q}}}{\sqrt{E_\mathbf{p}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \, \langle 0| \, [a_\mathbf{q}, a_\mathbf{p}^\dagger] \\
&= \int \mathrm{d}^3p \frac{\mathrm{i}p_\mu\sqrt{E_\mathbf{q}}}{\sqrt{E_\mathbf{p}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \, \langle 0| \, \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \langle 0| \, \mathrm{i}q_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}. \qquad (11.490)
\end{aligned}$$

再结合 (7.157) 式，将 (11.488) 式化为

$$\langle \mathbf{q}^+| \, \mathrm{i}T_1^{(1)} \, |\mathbf{p}^+; \mathbf{k}, \lambda\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= Q_\phi e \int \mathrm{d}^4x \, [\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}(-\mathrm{i}p_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}) - \mathrm{i}q_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}]\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}Q_\phi e \, (p_\mu + q_\mu)\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p + k - q), \qquad (11.491)
\end{aligned}$$

其中第一步画出位置空间中的 Feynman 图。相应的不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= -\mathrm{i}Q_\phi e \, (p_\mu + q_\mu)\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda), \qquad (11.492)$$

其中第一步画出动量空间中的 Feynman 图结合外线规则 (7.139)、(7.141) 和 (7.159)，通过观察归纳出位置空间和动量空间中的三线性顶点规则，得到的规则分别与 (11.483) 式和 (11.486) 第一式是一致的。

下面举一个应用 Feynman 图方法的例子。考虑一对正反标量玻色子湮灭成一对光子的过程

$\phi\bar{\phi}\to\gamma\gamma$，它的领头阶是 e^2 阶，具有三幅拓扑不等价的 Feynamn 图，相应的不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M}=$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}Q_\phi e(2k_1-p_1)_\mu\frac{\mathrm{i}}{(k_1-p_1)^2-m_\phi^2}(-\mathrm{i}Q_\phi e)(k_1-p_1-k_2)_\nu\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}_2,\lambda_1)\\
&\quad -\mathrm{i}Q_\phi e(2k_1-p_2)_\nu\frac{\mathrm{i}}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}(-\mathrm{i}Q_\phi e)(k_1-p_2-k_2)_\mu\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}_2,\lambda_1)\\
&\quad +2\mathrm{i}Q_\phi^2e^2g_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}_2,\lambda_1)\\
&= \mathrm{i}Q_\phi^2e^2M_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}_2,\lambda_1),
\end{aligned}
\tag{11.493}
$$

其中

$$
M_{\mu\nu}\equiv-\frac{(2k_1-p_1)_\mu(k_1-p_1-k_2)_\nu}{(k_1-p_1)^2-m_\phi^2}-\frac{(k_1-p_2-k_2)_\mu(2k_1-p_2)_\nu}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}+2g_{\mu\nu}. \tag{11.494}
$$

作为规范对称性的体现，**Ward 恒等式**对标量 QED 的各种过程成立。接下来验证 Ward 恒等式 $p_1^\mu M_{\mu\nu}=0$ 对 $\phi\bar{\phi}\to\gamma\gamma$ 领头阶振幅是成立的。根据能动量守恒关系 $k_1+k_2=p_1+p_2$ 以及质壳条件 $p_1^2=p_2^2=0$ 和 $k_1^2=k_2^2=m_\phi^2$，有

$$
(k_1-p_1)^2-m_\phi^2=k_1^2+p_1^2-2k_1\cdot p_1-m_\phi^2=-2k_1\cdot p_1, \tag{11.495}
$$

$$
(k_1-p_2)^2-m_\phi^2=k_1^2+p_2^2-2k_1\cdot p_2-m_\phi^2=-2k_1\cdot p_2, \tag{11.496}
$$

由 $m_\phi^2-2k_1\cdot p_2=(k_1-p_2)^2=(p_1-k_2)^2=m_\phi^2-2k_2\cdot p_1$ 得到

$$
k_1\cdot p_2=k_2\cdot p_1. \tag{11.497}
$$

再结合

$$
p_1\cdot(k_1-p_2-k_2)=p_1\cdot(p_1-2k_2)=-2k_2\cdot p_1,\quad 2k_1-p_2=k_1+p_1-k_2, \tag{11.498}
$$

推出

$$
\begin{aligned}
p_1^\mu M_{\mu\nu}&=-\frac{p_1\cdot(2k_1-p_1)(k_1-p_1-k_2)_\nu}{-2k_1\cdot p_1}-\frac{p_1\cdot(k_1-p_2-k_2)(2k_1-p_2)_\nu}{-2k_1\cdot p_2}+2p_{1\nu}\\
&=-\frac{2k_1\cdot p_1(k_1-p_1-k_2)_\nu}{-2k_1\cdot p_1}-\frac{-2k_2\cdot p_1(k_1+p_1-k_2)_\nu}{-2k_2\cdot p_1}+2p_{1\nu}\\
&=(k_1-p_1-k_2)_\nu-(k_1+p_1-k_2)_\nu+2p_{1\nu}=0.
\end{aligned}
\tag{11.499}
$$

可以看到，如果 (11.493) 式中缺少任意一幅 Feynman 图的贡献，Ward 恒等式将不再成立。也就是说，规范对称性意味着 (11.493) 式中的三幅 Feynman 图必须在 e^2 阶同时存在。如果在标量 QED 的拉氏量 (11.459) 中移除四线性相互作用项 $Q_\phi^2e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi$，理论就不再具有规范对称性。在振幅层面上，这体现为 (11.493) 式中缺少第三幅 Feynman 图的贡献，导致 Ward 恒等式不成立。

主要参考书目

【1】 M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).

【2】 M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007).

【3】 M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press (2014).

【4】 W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer (1996).

【5】 S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 1 *Foundations*, Cambridge University Press (1995).

【6】 L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd edition, Cambridge University Press (1996).

【7】 B. G. Chen, D. Derbes, D. Griffiths, B. Hill, R. Sohn, and Y.-S. Ting (editors), *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing (2019).

【8】 W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, 4th edition, Springer (2008).

【9】 J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Company (1965).

【10】 李灵峰，《量子场论》，科学出版社 (2015)。

【11】 郑汉青，《量子场论》（上下册），北京大学出版社 (2018)。

【12】 李政道，《李政道讲义：粒子物理和场论》，上海科学技术出版社 (2006)。

【13】 王正行，《简明量子场论》，北京大学出版社 (2008)。

【14】 T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press (1984).

【15】 V. P. Nair, *Quantum Field Theory: A Modern Perspective*, Springer (2005).

【16】 W. Greiner and B. Müller, *Gauge Theory of Weak Interactions*, 4th edition, Springer (2009).

【17】 W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, 3rd edition, Springer (2006).

【18】 S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 2 *Modern Applications*, Cambridge University Press (1996).

【19】 S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 3 *Supersymmetry*, Cambridge University Press (2000).

参考文献

[1] O. Klein, "Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie," *Z. Phys.* **37** (1926) 895–906.

[2] W. Gordon, "Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen theorie," *Z. Phys.* **40** (1926) 117–133.

[3] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the electron," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **117** (1928) 610–624.

[4] P. A. M. Dirac, "A theory of electrons and protons," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **126** (1930) 360–365.

[5] C. D. Anderson, "The positive electron," *Phys. Rev.* **43** (1933) 491–494.

[6] A. Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies," *Annalen Phys.* **17** (1905) 891–921.

[7] H. A. Lorentz, "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light," *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences* **6** (1904) 809–831.

[8] H. Minkowski, "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1908** (1908) 53–111.

[9] E. Noether, "Invariante Variationsprobleme," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1918** (1918) 235–257.

[10] H. Poincaré, "Sur la dynamique de l'électron," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **21** (1906) 129–176.

[11] E. Schrödinger, "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules," *Phys. Rev.* **28** (1926) 1049–1070.

[12] S. N. Bose, "Planck's law and light quantum hypothesis," *Z. Phys.* **26** (1924) 178–181.

[13] E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz Group," *Annals Math.* **40** (1939) 149–204.

[14] A. Proca, "Sur la theorie ondulatoire des electrons positifs et negatifs," *J. Phys. Radium* **7** (1936) 347–353.

[15] L. V. Lorenz, "Ueber die Identitíat der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Stríomen," *Ann. der Physik und Chemie* **131** (1867) 243–263.

[16] S. N. Gupta, "Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics," *Proc. Phys. Soc. A* **63** (1950) 681–691.

[17] K. Bleuler, "Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen," *Helv. Phys. Acta* **23** (1950) 567–586.

[18] H. Weyl, "Electron and Gravitation. 1.," *Z. Phys.* **56** (1929) 330–352.

[19] E. Fermi, "Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico," *Rendiconti Lincei* **3** (1926) 145–149.

[20] P. A. M. Dirac, "On the Theory of quantum mechanics," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **112** (1926) 661–677.

[21] W. Pauli, "Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren," *Z. Phys.* **31** (1925) 765–783.

[22] M. Fierz, "Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin," *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3–37.

[23] W. Pauli, "The Connection Between Spin and Statistics," *Phys. Rev.* **58** (1940) 716–722.

[24] H. Yukawa, "On the interaction of elementary particles I," *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.* **17** (1935) 48–57.

[25] P. Jordan and W. Pauli, "Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder," *Z. Phys.* **47** (1928) 151–173.

[26] F. J. Dyson, "The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman," *Phys. Rev.* **75** (1949) 486–502.

[27] F. J. Dyson, "The S matrix in quantum electrodynamics," *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736–1755.

[28] G. C. Wick, "The evaluation of the collision matrix," *Phys. Rev.* **80** (1950) 268–272.

[29] R. P. Feynman, "The theory of positrons," *Phys. Rev.* **76** (1949) 749–759.

[30] S. Tomonaga, "On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields," *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27–42.

[31] J. S. Schwinger, "On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron," *Phys. Rev.* **73** (1948) 416–417.

[32] J. S. Schwinger, "Quantum electrodynamics. I a covariant formulation," *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439.

[33] R. P. Feynman, "Space-time approach to quantum electrodynamics," *Phys. Rev.* **76** (1949) 769–789.

[34] R. P. Feynman, "Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction," *Phys. Rev.* **80** (1950) 440–457.

[35] W. Pauli, "Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons," *Z. Phys.* **43** (1927) 601–623.

[36] **TASSO** Collaboration, W. Braunschweig *et al.*, "A measurement of muon pair production in e^+e^- annihilation at center-of-mass energies 35 GeV $\leq \sqrt{s} \leq$ 46.8 GeV," *Z. Phys. C* **40** (1988) 163–170.

[37] E. Rutherford, "The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom," *Phil. Mag. Ser. 6* **21** (1911) 669–688.

[38] N. F. Mott, "The scattering of fast electrons by atomic nuclei," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **124** (1929) 425–442.

[39] S. Mandelstam, "Determination of the pion - nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory," *Phys. Rev.* **112** (1958) 1344–1360.

[40] A. H. Compton, "A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements," *Phys. Rev.* **21** (1923) 483–502.

[41] J. C. Ward, "An Identity in Quantum Electrodynamics," *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.

[42] O. Klein and Y. Nishina, "Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac," *Z. Phys.* **52** (1929) 853–868.

[43] **JADE** Collaboration, W. Bartel *et al.*, "Measurement of the processes $e^+e^- \to e^+e^-$ and $e^+e^- \to \gamma\gamma$ at PETRA," *Z. Phys. C* **19** (1983) 197.

[44] T. D. Lee and C. N. Yang, "Question of parity conservation in weak interactions," *Phys. Rev.* **104** (1956) 254–258.

[45] E. Majorana, "Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone," *Nuovo Cim.* **14** (1937) 171–184.

[46] W. Pauli, *Niels Bohr and the development of physics.* Pergamon Press, London, 1955.

[47] **Particle Data Group** Collaboration, R. L. Workman *et al.*, "Review of Particle Physics," *PTEP* **2022** (2022) 083C01.

[48] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck, "Feynman rules for fermion number violating interactions," *Nucl. Phys. B* **387** (1992) 467–481.

[49] G. Källén, "On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics," *Helv. Phys. Acta* **25** (1952) 417–434.

[50] H. Lehmann, "Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder," *Nuovo Cim.* **11** (1954) 342–357.

[51] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, "Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien," *Nuovo Cim.* **1** (1955) 205–225.

[52] G. Breit and E. Wigner, "Capture of Slow Neutrons," *Phys. Rev.* **49** (1936) 519–531.

[53] P. A. M. Dirac, "The Lagrangian in quantum mechanics," *Phys. Z. Sowjetunion* **3** (1933) 64–72.

[54] R. P. Feynman, "Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics," *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 367–387.

[55] L. D. Faddeev and V. N. Popov, "Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field," *Phys. Lett. B* **25** (1967) 29–30.

[56] W. H. Furry, "A Symmetry Theorem in the Positron Theory," *Phys. Rev.* **51** (1937) 125–129.

英汉对照

Additive quantum number: 相加性量子数
Algebra: 代数
Analytic continuation: 解析延拓
Amputated diagram: 切断图
Annihilation: 湮灭
Annihilation operator: 湮灭算符
Antichronous: 反时向
Antilinear: 反线性
Antiunitary: 反幺正
Antiparticle: 反粒子
Asymptotic condition: 渐近条件
Asymptotic field: 渐近场
Asymptotic state: 渐近态
Attenuation: 衰减
Auxiliary field: 辅助场
Axial gauge: 轴向规范
Axial vector: 轴矢量
Azimuthal angle: 方位角
Bare mass: 裸质量
Barn: 靶
Baryon: 重子
Beam: 束流
Boost: 增速
Boson: 玻色子
Bound state: 束缚态
Branch cut: 割线
Branch point: 支点
Branching ratio: 分支比
Bubble diagram: 气泡图
c-number: c 数
C-parity: C 宇称
C-violation: C 破坏
Canonical normalization: 正则归一化
Canonical quantization: 正则量子化
Casimir's trick: Casimir 技巧
Causality: 因果性
Center of mass: 质心
Center-of-mass energy: 质心能
Center-of-mass system: 质心系
Channel: 通道
Charge conjugation: 电荷共轭
Chiral representation: 手征表象
Chirality: 手征性
Collider: 对撞机
Color: 颜色
Conjugate momentum density: 共轭动量密度
Connected correlation function: 连通关联函数
Connected diagram: 连通图
Conserved charge: 守恒荷
Conserved current: 守恒流
Continuum: 连续谱
Contraction: 缩并
Contravariant vector: 逆变矢量
Correlation function: 关联函数
Counter term: 抵消项
Coupling constant: 耦合常数
Covariance: 协变性
Covariant derivative: 协变导数
Covariant vector: 协变矢量
Covering group: 覆盖群
CP-violation: CP 破坏
Creation operator: 产生算符

Cross section: 截面
Crossing symmetry: 交叉对称性
Decay: 衰变
Decay width: 衰变宽度
Detector: 探测器
Dimension: 量纲
Discrete symmetry: 分立对称性
Dispersion relation: 色散关系
Divergent: 发散
Dual field strength tensor: 对偶场强张量
Dynamics: 动力学
Electric charge: 电荷
Electromagnetic current: 电磁流
Electromagnetic field: 电磁场
Electromagnetic interaction: 电磁相互作用
Electron: 电子
Energy-momentum tensor: 能动张量
Energy scale: 能标
Equal time: 等时
Expectation value: 期待值
External leg: 外腿
External line: 外线
External point: 外点
External source: 外源
Factorization: 因子化
Faithful representation: 忠实表示
Fermi's golden rule: Fermi 黄金定则
Fermion: 费米子
Fermion flow: 费米子流
Fermion number: 费米子数
Fermion-number violation: 费米子数破坏
Feynman diagram: Feynman 图
Feynman kernel: Feynman 核
Feynman propagator: Feynman 传播子
Feynman rule: Feynman 规则
Field: 场
Field configuration: 场构型
Field strength renormalization: 场强重整化
Field strength tensor: 场强张量
Fine-structure constant: 精细结构常数
Finite transformation: 有限变换
Fixed target: 固定靶
Flavor: 味道
Forward scattering: 向前散射
Fully connected diagram: 完全连通图
Functional: 泛函
Functional derivative: 泛函导数
Functional integral: 泛函积分
Functional measure: 泛函测度
Fusion: 融合
Gauge boson: 规范玻色子
Gauge field: 规范场
Gauge-fixing term: 规范固定项
Gauge invariant: 规范不变量
Gauge symmetry: 规范对称性
Gauge theory: 规范理论
Gauge transformation: 规范变换
Generalized coordinate: 广义坐标
Generalized momentum: 广义动量
Generalized velocity: 广义速度
Generating functional: 生成泛函
Generator: 生成元
Global: 整体
Gluon: 胶子
Gravitational interaction: 引力相互作用
Graviton: 引力子
Group: 群
Hadron: 强子
Hamiltonian: 哈密顿量
Helicity: 螺旋度
Helicity suppression: 螺旋度压低
Hermitian conjugate: 厄米共轭
Hermitian operator: 厄米算符
Hole: 空穴

Homogeneous: 均匀
Homomorphism: 同态
Impact parameter: 碰撞参数
Improper: 非固有
In field: 入场
In state: 入态
Index: 指标
Inner product: 内积
Interaction: 相互作用
Interaction picture: 相互作用绘景
Internal line: 内线
Intrinsic parity: 内禀宇称
Invariant: 不变量
Invariant mass: 不变质量
Invariant matrix element: 不变矩阵元
Invariant scattering amplitude: 不变散射振幅
Invariant subgroup: 不变子群
Irreducible representation: 不可约表示
Isometry group: 等距群
Isomorphism: 同构
Kinematics: 运动学
Lagrangian: 拉格朗日量
Leading order: 领头阶
Left-handed: 左手
Lepton: 轻子
Lifetime: 寿命
Light cone: 光锥
Lightlike: 类光
Line element: 线元
Linear representation: 线性表示
Little group: 小群
Local: 局域
Longitudinal polarization: 纵向极化
Loop diagram: 圈图
Loop momentum: 圈动量
Lowering operator: 降算符
Mass renormalization: 质量重整化
Mass shell: 质壳
Magnetic dipole moment: 磁偶极矩
Magneton: 磁子
Meson: 介子
Metric: 度规
Microcausality: 微观因果性
Mode: 模式
Multiplicative quantum number: 相乘性量子数
Narrow width approximation: 窄宽度近似
Net contribution: 净贡献
Neutrino: 中微子
Normal order: 正规排序
Normal product: 正规乘积
Off-shell: 离壳
On-shell: 在壳
One-particle irreducible: 单粒子不可约
Operator: 算符
Optical theorem: 光学定理
Orbital angular momentum: 轨道角动量
Orbital parity: 轨道宇称
Orthochronous: 保时向
Out field: 入场
Out state: 出态
P-violation: P 破坏
Parity: 宇称
Partial decay width: 分宽度
Particle: 粒子
Particle physics: 粒子物理
Path integral: 路径积分
Path integral quantization: 路径积分量子化
Permutation: 置换
Perturbation theory: 微扰论
Phase factor: 相位因子
Phonon: 声子
Photon: 光子
Physical mass: 物理质量
Picture: 绘景

Plane-wave solution: 平面波解
Polar angle: 极角
Polar vector: 极矢量
Polarization vector: 极化矢量
Pole mass: 极点质量
Positron: 正电子
Prescription: 处理方案
Production cross section: 产生截面
Projective representation: 投影表示
Proper: 固有
Proper time: 固有时
Proton: 质子
Pseudorapidity: 赝快度
Pseudoscalar: 赝标量
Pseudotensor: 赝张量
Pure gauge: 纯规范
Quantum chromodynamics: 量子色动力学
Quantum electrodynamics: 量子电动力学
Quantum field: 量子场
Quantum field theory: 量子场论
Quark: 夸克
Raising operator: 升算符
Rapidity: 快度
Renormalization: 重整化
Renormalization condition: 重整化条件
Representation space: 表示空间
Resonance: 共振态
Right-handed: 右手
Real orthogonal matrix: 实正交矩阵
Real particle: 实粒子
Scalar: 标量
Scalar boson: 标量玻色子
Scalar field: 标量场
Scattering angle: 散射角
Scattering cross section: 散射截面
Scattering matrix: 散射矩阵
Sea quark: 海夸克
Self-conjugate: 自共轭
Self-energy diagram: 自能图
Self-interaction: 自相互作用
Simple harmonic oscillator: 简谐振子
Slash: 斜线
Space inversion: 空间反射
Spacelike: 类空
Spacetime interval: 时空间隔
Spectral density: 谱密度
Spectral representation: 谱表示
Spin: 自旋
Spin angular momentum: 自旋角动量
Spinor: 旋量
Spinor bilinear: 旋量双线性型
Spinor field: 旋量场
Spinor representation: 旋量表示
Standard model: 标准模型
State vector: 态矢
Stationary point: 稳定点
Step function: 阶跃函数
Strong interaction: 强相互作用
Structure constant: 结构常数
Subgroup: 子群
Symmetry: 对称性
Symmetry factor: 对称性因子
Tadpole diagram: 蝌蚪图
Temporal gauge: 时性规范
Tensor: 张量
Time-evolution operator: 时间演化算符
Time-ordered product: 时序乘积
Time reversal: 时间反演
Timelike: 类时
Total angular momentum: 总角动量
Total divergence: 全散度
Translation: 平移
Transverse polarization: 横向极化
Tree diagram: 树图

Truly neutral particle: 纯中性粒子
Unitarity: 幺正性
Unitary matrix: 幺正矩阵
Vacuum: 真空
Vacuum diagram: 真空图
Valence quark: 价夸克
Variation: 变分
Vector: 矢量
Vector boson: 矢量玻色子
Vector field: 矢量场
Vertex: 顶点
Virtual particle: 虚粒子
Wave packet: 波包
Weak interaction: 弱相互作用
Weyl ordering: Weyl 排序
Zero-point energy: 零点能

索　引

Abel 群, 10

靶, 243
半奇数自旋, 96
半直积群, 32, 97
保度规条件, 8
保时向 Lorentz 变换, 10
Belinfante–Rosenfeld 能动张量, 41
Bhabha 散射, 348, 367
Bianchi 恒等式, 21
变分, 24
标量玻色子, 62, 342, 344
标量场, 51, 113, 261, 492
标量 QED, 553
表示空间, 12, 165
标准模型, 1, 102, 305, 329, 368, 401
标准四维动量, 87
波包, 61, 71
波长, 349, 357
波函数, 375, 437, 483
Bohr 磁子, 310
Born 近似, 338
Bose-Einstein 统计, 62
玻色子, 1, 62
玻色子数, 297
Breit-Wigner 分布, 478, 481
不变相空间, 242, 244, 247, 335, 357, 480
不变振幅, 238, 265, 272, 287, 292, 471, 559
不变质量, 255, 445
不变子群, 99
不定度规, 148
不可约表示, 13
不稳定粒子, 250, 476, 478

Casimir 技巧, 272, 312
Casimir 算符, 90, 109, 117, 167
C 变换, 380, 387, 395, 416, 420, 552
长程力, 333
长程势, 339
场构型, 493, 544
场强重整化常数, 446, 448, 469
场强重整化条件, 469, 477
场强张量, 21, 117, 141, 309, 397, 541
产生截面, 481
产生算符, 43, 53
产生湮灭算符对易关系, 43, 55, 65, 127, 145, 152
产生湮灭算符反对易关系, 187, 387
重整化, 446
出场, 439
纯规范, 544
纯中性粒子, 69, 127, 266, 292, 387, 428
出算符, 440
出态, 440
磁感应强度, 21, 141
磁量子数, 92, 95, 323, 336, 375
磁偶极矩, 310
Compton 散射, 349

Coulomb 规范, 142
Coulomb 力, 333
Coulomb 散射, 330, 333
Coulomb 势, 4, 335
Coulomb 势能, 338
CP 变换, 400
CP 对称性, 401
C 破坏, 386, 420
CP 破坏, 421
CPT 变换, 404
CPT 定理, 404
CPT 对称性, 404
CP 宇称, 401
C 宇称, 381, 387

d'Alembert 方程, 144
d'Alembert 微分算符, 17
单点函数, 538, 552
单连通, 82, 90
单粒子不可约图, 467, 476
单粒子态, 59, 87, 109, 127, 148, 153, 190, 262, 421, 441, 445
单圈图, 284, 475
单位词头, 243
单位电荷量, 4, 306
单值分支, 447
δ 函数, 48, 238, 478
等比级数, 466
等价表示, 13, 409
等距群, 32, 99
等时对易关系, 47, 52, 65, 119, 144, 184, 206, 445, 448
等时反对易关系, 186
电场强度, 21, 141
电磁波, 102
电磁场, 21, 141, 306, 398, 402, 541
电磁辐射, 349
电磁流, 307, 351, 554
电磁衰变, 406
电磁相互作用, 1, 102, 305, 307, 372, 401, 550, 553
电荷, 1, 305, 384
电荷共轭变换, 379, 385, 422
电荷共轭场, 383, 415, 418, 423
电荷共轭对称性, 379, 400, 552
电荷共轭矩阵, 382, 415
电荷守恒定律, 39, 306
点粒子, 333
电弱规范理论, 1
电子, 2, 311, 349, 368, 407
顶点, 266, 276
顶点规则, 266, 292, 426, 461, 556, 557
Dirac 表象, 195, 436
Dirac 方程, 2, 169, 308, 388, 390, 413
Dirac 费米子, 193, 265, 344, 391, 422, 482
Dirac 共轭, 168, 327, 384, 413, 423
Dirac 矩阵, 157, 272, 313, 413, 531
Dirac 斜线, 173
Dirac 旋量, 163
Dirac 旋量场, 164, 214, 235, 261, 305, 333, 381, 388, 392, 401, 402, 412, 419, 448, 455, 530, 550
Dirac 质量项, 328, 415, 418
抵消项, 468
动量, 16, 33, 60, 323
动量空间, 287, 296, 300, 351, 375, 427, 444, 447, 454, 465, 472, 550, 557
动量空间体积元, 61
动量守恒定律, 34, 86
动量算符, 56, 69, 86, 129, 151, 188, 372, 378
动量微分算符, 52, 241
动力学, 204, 244, 271
动能, 490
动能项, 374

短程势, 343
对偶, 36
对偶场强张量, 23, 397
对数函数, 447, 518
对易, 62, 81
对易子, 43, 221
对撞机, 245, 318, 367
多重对易子, 159, 201, 376
多重留数, 454
多点关联函数, 442, 449, 454, 458, 461, 499, 516, 519, 530, 552
多粒子态, 61, 192, 239, 262, 440
多值函数, 345
Dyson 级数, 216, 217, 458

Einstein 求和约定, 6, 402
厄米共轭, 63, 411
二项式定理, 81
Euclid 度规, 503
Euclid 空间, 503, 520, 531, 541
Euler-Lagrange 方程, 25, 27
额外负号, 268, 271, 340, 385, 412, 426

Faddeev-Popov 方法, 544
反对易, 162, 193, 219
反对易关系, 157, 411, 531
反对易子, 71, 221
方位角, 247, 318, 375
泛函, 489
泛函测度, 489, 507, 541
泛函导数, 502, 511, 529
泛函 δ 函数, 545
泛函 Gauss 积分, 507, 523, 532
泛函积分, 484, 489
反粒子, 2, 68, 102, 190, 305, 329, 341, 343, 379, 405
反线性, 377, 404
反幺正, 377, 404
发散, 61, 239, 360, 468, 544
非 Abel 群, 10
非极化振幅模方, 272, 313, 326, 330, 331, 353, 365
费米子, 1, 193
费米子流, 424
费米子数, 265, 419
费米子数破坏, 419, 424, 432
费米子数守恒, 266
费米子算符, 212
非相对论近似, 37, 245, 309, 336, 358
非相对论性归一化, 338
非协变项, 210, 234, 298, 558
封闭费米子圈, 271, 285, 291
分宽度, 251, 481
分立变换, 371
分立对称性, 371
分支比, 251, 481
Fermi-Dirac 统计, 193
Fermi 常数, 368
Fermi 黄金定则, 406
Feynman 传播子, 227, 312, 335, 426, 442, 455, 462, 465, 470, 509, 523, 533, 548
Feynman 规范, 144, 234, 300, 310, 549
Feynman 规则, 266, 287, 310, 424, 463, 512, 535, 551, 555
Feynman 核, 484, 493
Feynman 图, 265, 292, 311, 461, 472, 512, 534, 551, 555
Feynman 图对称性因子, 293, 428, 463, 512, 518, 537, 557
Feynman 图泛函求导法则, 514, 535, 551, 556
Fourier 变换, 49, 54, 239, 338, 451, 454, 465, 485, 508, 533, 543
复标量玻色子, 68, 296, 374, 553
复标量场, 63, 230, 296, 373, 378, 380, 401, 402, 419, 519, 553

复场, 376, 421
覆盖群, 84, 90, 97
负概率困难, 2, 69
复共轭, 63, 411
复共轭表示, 408
复合粒子, 1, 332
负能解, 53, 172, 218, 263, 351
负能量困难, 2, 57, 149, 185
复耦合常数, 420
Furry 定理, 552
复矢量玻色子, 302
复矢量场, 155, 302, 395, 402, 437
辅助场, 143

概率密度, 445
γ^5, 161, 313
高能极限, 246, 328, 332, 359
Gauss 定理, 31
Gauss 积分, 490, 506, 522, 526, 528, 542
割线, 447
共轭动量密度, 27, 51, 65, 118, 143, 182, 200, 456, 492, 558
共振态, 446, 478
Gordon 恒等式, 195
Grassmann 场, 529
Grassmann 数, 410, 412, 523
Green 函数, 449, 470, 509
光速, 2
光速不变原理, 5
光学定理, 475
广义动量, 25, 48, 483, 494
广义 Stokes 定理, 27
广义速度, 24
广义坐标, 24, 48, 483, 494
光锥, 212
光子, 1, 102, 141, 305, 349, 559
固定靶, 242
轨道角动量, 37, 115, 116, 165, 375
轨道角动量微分算符, 115
轨道宇称, 375, 392
规范变换, 141, 156, 306, 351, 543
规范玻色子, 307
规范不变量, 141, 550
规范场, 307
规范等价性, 142, 544
规范对称性, 141, 156, 351, 543, 560
规范固定, 143, 310, 545
规范固定函数, 545
规范理论, 307, 553
规范耦合常数, 307
规范条件, 141, 545
规范相互作用, 307, 386, 401, 553
规范选取, 141
归一化, 44, 91, 239, 338, 445
归一化条件, 445, 502, 513
归一化因子, 460, 463
Gupta-Bleuler 条件, 150
固有保时向 Lorentz 变换, 34, 75, 78, 87, 96, 101, 112, 113, 115, 159, 161, 163, 404, 408, 412
固有保时向 Lorentz 群, 11, 112
固有 Lorentz 变换, 9
固有时, 15

海夸克, 332
哈密顿量, 25, 56, 69, 85, 128, 147, 182, 187, 201, 204, 207, 372, 377, 404, 456, 483, 492
哈密顿量密度, 27, 33, 492
Hamilton 正则运动方程, 26
Heaviside 阶跃函数, 60
Heisenberg 绘景, 3, 46, 201, 399, 439, 442, 456, 484, 492
Heisenberg 运动方程, 47, 86, 204, 456

恒等变换, 8, 371
恒等表示, 12
恒等算符, 75, 238, 441, 445, 457
横向极化矢量, 120
横向能量, 258
Higgs 玻色子, 1, 369
Higgs 场, 369
Hilbert 空间, 46, 75

$i\epsilon$ 处理方案, 230, 455, 509
ISO(2) 群, 99

Jacobi 行列式, 9, 29, 521, 545
Jacobi 恒等式, 109
价夸克, 332
简单连续群, 11, 82
渐近场, 439, 456
渐近哈密顿量, 456
渐近态, 216, 439
渐近条件, 448, 450, 459
简谐振子, 43
交叉对称性, 331, 343, 355, 366, 453, 540
角动量, 37, 81, 90, 115, 116, 165, 323, 362, 372, 378
角动量量子数, 92
角动量耦合, 322
角动量守恒定律, 37, 323, 333, 362
角频率, 356
胶子, 1
基本粒子, 1
基础表示, 13
极点, 228, 312, 339, 342, 447, 454, 466, 468, 477, 509
极点质量, 447
阶, 262, 318
阶乘, 81
结构常数, 79
结合能, 349
解析结构, 447
解析延拓, 344, 490, 500, 509
介子, 1
积分主值, 228
极化求和关系, 123, 124, 140, 350
极化矢量, 119, 344, 349, 351, 361, 395
极化振幅, 319, 330, 360
极角, 247, 375
经典半径, 349
经典极限, 492
精细结构常数, 4, 318
静止系, 242, 252, 476
近似对称性, 401
极矢量, 14, 163, 372, 391, 398, 400
Jordan-Wigner 量子化, 186
Jordan 引理, 228
绝对符号, 339
均匀, 32
局域场论, 26, 199, 404
矩阵群, 10

Källén-Lehmann 谱表示, 444, 447
Källén 函数, 249
蝌蚪图, 271
可约表示, 13, 170
Klein-Gordon 方程, 2, 3, 51, 64, 118, 170, 309, 374, 439, 450, 509, 554
Klein-Gordon 微分算符, 17, 451, 470
Klein-Nishina 公式, 358
空间反射对称性, 323, 371, 400
空间平移变换, 85
空穴, 2
Kronecker 符号, 7
快度, 34, 258
夸克, 1, 305

拉格朗日量, 24, 491
Lagrange 乘数法, 143

Landau 规范, 549
Laplace 算符, 450
拉氏量, 26, 51, 63, 117, 141, 169, 206, 371, 388, 404, 496
Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式, 453, 455, 470, 531, 539
类光间隔, 212
类光矢量, 14
类空动量, 331
类空间隔, 212
类空矢量, 14, 120
类时动量, 324
类时间隔, 212
类时极化矢量, 121, 139
类时矢量, 14, 120
Levi-Civita 符号, 19, 20, 81, 161, 314, 409, 528
连带 Legendre 函数, 375
两点关联函数, 442, 462, 510, 513, 523, 534
量纲, 4, 199
两体散射, 246, 274, 291, 331, 345
两体衰变, 252
量子电动力学, 1, 307, 398, 550
量子色动力学, 1
连通关联函数, 516, 538, 551
连通图, 463, 472, 477, 513
连续对称性, 28
连续方阵, 507, 532, 542
连续谱, 446
连续群, 11
Lie 代数, 79
Lie 括号, 79
Lie 群, 79
零点能, 46, 57, 201
领头阶, 272, 318, 471, 560
离壳, 270
立体角, 247
流密度, 242
留数, 228, 447
粒子, 1, 87
粒子数密度, 242
粒子数密度算符, 57
粒子数算符, 44, 63
粒子性, 349
Lorentz 变换, 5, 7, 75, 165
Lorentz 标量, 14, 18, 161, 168, 410
Lorentz 不变量, 5, 11, 60, 101, 242, 243, 246, 255, 346, 443, 497
Lorentz 代数, 79, 84, 102, 154, 158
Lorentz 对称性, 5, 213, 214, 467
Lorentz 逆变换, 8, 159, 408
Lorentz 群, 11
Lorentz 矢量, 5, 14, 18, 78, 161, 168, 319, 414
Lorentz 协变性, 17, 18, 120, 169, 210, 234, 298
Lorentz 因子, 5, 15
Lorentz 张量, 18, 78, 161, 168, 414
Lorentz 指标, 5, 18, 404
Lorenz 规范, 142, 156, 545
Lorenz 条件, 118
路径积分, 484, 489, 491, 496, 501
路径积分量子化, 490
螺旋度, 97, 100, 107, 124, 174, 323, 324, 326
螺旋度本征态, 127, 192
螺旋度构型, 322
螺旋度压低, 324, 330, 363
螺旋态, 175, 319, 361, 382
螺旋态表达式, 177, 178, 328, 382
裸质量, 439, 456, 466

Majorana 费米子, 387, 422
Majorana 条件, 387, 417
Majorana 旋量场, 387, 392, 395, 402, 417, 419

Majorana 质量项, 417, 418
Mandelstam 变量, 346, 354
Maxwell 方程, 21, 22, 141, 308, 438, 554
Minkowski 度规, 6
Minkowski 时空, 5, 15, 32, 87, 503
Møller 散射, 348, 367
Møller 速度, 244
末态对称性因子, 242, 244, 293, 428, 476
Mott 公式, 335
$\overline{\text{MS}}$ 质量, 305
μ 子, 311, 368, 407

内禀 C 宇称, 381, 437
内禀宇称, 375, 392
内部对称性, 38, 68
内部相加性量子数, 68, 87
内积, 5, 14, 60, 62, 191, 193, 309, 331, 338, 346, 410, 412, 506, 520, 526, 532, 542
内线, 270
内线规则, 270, 296, 426, 478, 550
能标, 333
能动量守恒定律, 238, 241, 276, 312, 346, 357, 473, 560
能动张量, 33
能量, 16, 33, 46, 60, 357
能量守恒定律, 33, 85
能量微分算符, 52
Newton 第二定律, 37, 333
逆变矢量, 5
Noether 定理, 28, 86, 114, 351, 554
n 值表示, 84, 90

O(3) 群, 11
耦合常数, 200

排斥势, 339
Pauli-Fierz 作用量, 156
Pauli-Jordan 传播函数, 213, 444
Pauli-Lubanski 赝矢量, 109
Pauli 不相容原理, 2, 193
Pauli 矩阵, 82, 104, 166, 383, 408
P 变换, 371, 388, 395, 416, 420
旋量表示, 390
碰撞参数, 333
ϕ^4 理论, 200, 204, 291, 456, 461, 475, 492, 511
π 介子, 407
平面波解, 52, 119, 170, 450
平面波旋量系数, 173, 195, 328, 330, 336, 344, 361, 411
平面波展开式, 53, 64, 126, 145, 181, 201, 205, 209, 329, 373, 387, 421, 439
平移变换, 31
平移不变性, 524
Poincaré 变换, 32, 75, 372
Poincaré 代数, 85
Poincaré 对称性, 75, 87
Poincaré 群, 32
Proca 方程, 118
谱密度, 442

强相互作用, 1, 102, 372, 401
强子, 1, 406
切断图, 472, 477
切空间, 79
轻子, 1, 305
气泡图, 286, 463, 512, 537
球对称, 252
求迹, 271, 272, 313, 354
球谐函数, 375
球坐标系, 375
奇性, 332, 360
圈动量, 271, 312
全散度, 27, 144, 218
全同玻色子, 281

全同费米子, 277, 290
全同粒子, 62, 193, 240, 242, 293
圈图, 271, 284, 312, 468
群, 10
群空间, 11, 83, 104

融合, 272
入场, 439, 456
弱 Lorenz 规范条件, 149
弱衰变, 406
弱相互作用, 1, 102, 372, 386, 400
入射流因子, 244, 250, 258, 332, 335, 479
入算符, 440
入态, 440
Rutherford 公式, 333

三角函数公式, 319, 321
散射, 243, 449, 470, 516
散射角, 247, 316, 348, 349, 359
散射截面, 243, 293, 318, 477
散射实验, 216, 439
散射运动学, 246
三体衰变, 253, 368
Schrödinger-Pauli 方程, 309
Schrödinger 方程, 46, 203
Schrödinger 绘景, 3, 46, 201, 483, 492
色散关系, 16, 60
生成泛函, 501, 510, 511, 519, 530, 534, 537, 541, 550, 555
生成元, 35, 76, 79, 93, 99, 102, 110, 112, 158, 408
升降算符, 44, 91
声子, 46
实标量玻色子, 265, 476
实标量场, 51, 201, 204, 213, 227, 291, 375, 379, 381, 402, 439, 456, 492
势场, 338
时间反演变换, 12, 377
时间反演对称性, 377, 395, 400
时间反演矩阵, 393, 416
时间平移变换, 85
时间演化算符, 404, 458
时空导数, 17, 199, 374, 504, 558
时空间隔, 212
时空平移变换, 75, 86, 87, 442
时空平移群, 32
时空坐标, 5
时空坐标交换对称性, 275
矢量表示, 14, 112, 115
矢量玻色子, 127, 141, 148, 297, 299, 344, 481
矢量场, 115
矢量外积, 21
实粒子, 270
势能, 490, 492
时性规范, 142
时序乘积, 212, 451, 498
实验室系, 356
实正交矩阵, 10
守恒荷, 31, 68, 155, 189, 376
守恒量, 86, 372
守恒流, 31, 68, 155, 189, 374
守恒流方程, 31, 307, 351, 554
寿命, 251, 368, 405
手征性, 326
衰变, 250, 272, 422
衰变宽度, 251, 273, 406, 476, 478
衰变运动学, 252
双连通, 83, 101
束缚态, 332, 446
束流, 242, 312, 476
树图, 271, 312, 475, 478
四费米子相互作用, 368
四维电流密度, 21
四维动量, 15, 265, 351
四维动量算符, 56, 86, 87, 372, 442

四维动量微分算符, 52, 86
四维横向条件, 121, 123, 149
四维矢势, 21
S 矩阵, 216
S 矩阵元, 217, 407, 440, 449
SL(2, $\mathbb{C}$) 群, 97, 108
SO(2) 群, 10, 73
SO(3) 群, 10, 81, 89, 104, 117
S 算符, 217, 238, 261, 440, 473
s 通道, 347, 349, 477
SU(2) 代数, 82, 93, 97, 102, 154
SU(2) 群, 82, 90, 103, 117
SU(2) 群表示, 95, 167
缩并, 6, 36, 221, 263, 281, 311, 315, 339, 422
所有阶, 472

态叠加原理, 485
探测器, 312, 333
T 变换, 377, 392, 395, 416
特征长度, 343
Thomson 散射截面, 358
替换关系, 352
T 矩阵元, 238, 264, 338, 350, 422, 440, 449, 470, 559
T 矩阵元缩并规律, 268
通道, 347
同构, 12
同态, 12, 76, 83, 88, 100, 105, 371
投影表示, 89
投影性, 327
T 算符, 238, 261, 291, 422, 558
t 通道, 347, 428
推广光学定理, 475
拓扑不等价, 282, 288, 428, 540, 560
拓扑等价, 279
拓扑结构, 279, 349

U(1) 规范变换, 306, 553
U(1) 规范对称性, 307, 553
U(1) 群, 38
U(1) 整体变换, 38
U(1) 整体对称性, 38, 68, 73, 189, 306, 376, 420, 432, 554
u 通道, 347, 349, 360, 428

外点, 463, 472
外线, 266, 463
外线规则, 266, 267, 296, 338, 424
外线因子, 344, 351, 481
外源, 502, 512, 519, 530, 541
完备集, 406, 442, 457, 474
完备性, 119, 163, 327
完备性关系, 92, 120, 175, 336, 442, 445, 483, 493, 494
完全连通图, 470, 516, 538
完全缩并, 462
完整传播子, 442, 444, 468, 472, 476, 538
Ward 恒等式, 351, 550, 560
$W^{\pm}$ 玻色子, 1, 368
味道, 1, 307
微分流形, 79
微分散射截面, 244, 293, 318, 323, 332
微扰论, 200, 262, 461, 511, 535, 551, 553
位置空间, 266, 292, 424, 463, 512, 535, 551, 555
稳定点, 491
Weyl 表象, 166, 173, 320, 326, 382, 408
Weyl 方程, 170, 415
Weyl 排序, 485
Weyl 旋量, 170, 407
Weyl 旋量场, 170, 327, 417
Wick 定理, 222, 262, 274, 422, 462
Wick 转动, 500, 503, 520, 531, 541
物理质量, 439, 456, 466, 477
无穷小变换, 29, 76, 99, 114, 115, 164, 372

无质量粒子, 16, 97, 110, 324
无质量矢量场, 141, 234, 299, 398, 437

相乘性量子数, 375
相对符号, 268, 275, 289, 429, 540
相对论性 Breit-Wigner 分布, 477
相对论性归一化, 338
相对论修正, 310, 334, 349
相对速度, 243
相互作用, 199, 238, 439, 456, 511
相互作用绘景, 202, 218, 399, 404, 442, 558
相加性量子数, 68, 332
向前散射, 475
相位任意性, 421
相位因子, 38, 89, 286, 323, 364, 373, 376, 421, 460
线极化, 124, 153
线性表示, 12, 79, 84, 88
线性独立, 119, 163
线元, 15
小群, 88
狭义相对性原理, 5, 18, 22, 26, 111, 246
协变导数, 306, 553
协变矢量, 6
吸引势, 339, 343
X 射线, 349
旋量表示, 158, 163, 408
旋量空间, 168, 272, 320, 382, 393
旋量双线性型, 168, 327, 384, 387, 391, 394, 414
旋量指标, 164, 410, 413
旋转变换, 8, 73, 81, 89
虚光子, 324, 330
虚粒子, 270, 324

赝标量, 18, 163, 376, 391
赝快度, 258
湮灭, 280, 311, 366, 428, 559
湮灭算符, 43, 53
颜色, 1, 307
赝张量, 18
幺正表示, 13, 76, 87
幺正矩阵, 10
幺正群, 10
幺正性, 75, 217, 440, 473
一般场算符, 219
因果性, 199, 213, 214
引力相互作用, 1, 102
引力子, 102
因子化, 463
右手流, 386, 391, 400
右手投影矩阵, 326
右手 Weyl 旋量, 170, 408, 411
右手 Weyl 旋量场, 170, 412
右手旋量场, 327, 385, 417
有效质量, 324
有质量粒子, 89, 109, 324
有质量矢量场, 117, 123, 206, 232, 297, 395, 402
圆极化, 102, 124, 153
宇称本征态, 372, 375
宇称本征值, 163, 372, 375
宇称变换, 12, 163, 323, 371
宇称变换矩阵, 390
宇称破坏, 102, 391, 420
宇称守恒, 102, 323, 364, 371
约化 Planck 常数, 2
跃迁概率, 239
Yukawa 理论, 200, 261, 287, 342, 368, 403, 534
Yukawa 势能, 342
Yukawa 相互作用, 200, 266, 288, 420, 432
运动速度, 15, 16
运动速率, 250, 317
运动学, 204, 244, 271

运动学条件, 241, 246, 252, 272, 311, 446

在壳, 267, 481
Z 玻色子, 1, 368
增速变换, 5
增速算符, 84
窄宽度近似, 481
窄宽度条件, 477
张量积, 240, 437, 493
正电子, 2
正规乘积, 219
正规矩阵, 157
正交归一关系, 92, 120, 124, 172, 173, 175, 179, 336, 483
正交群, 10
正交性, 327
正能解, 53, 172, 173, 218, 263
整数自旋, 96
整体负号, 344
正则变量, 26, 28, 50, 64, 457
正则对易关系, 43, 50
正则归一化, 52
正则量子化, 52, 201, 310, 558
真空期待值, 219, 369, 444, 449, 462, 538
真空态, 2, 46, 59, 89, 126, 148, 190, 240, 373, 440, 463, 499
真空图, 286
支点, 447
质点, 15
置换, 19, 161
质量, 15, 60, 87, 324, 328, 405
质量重整化, 461
质量重整化常数, 457, 466, 468
质量重整化条件, 468, 477
质量抵消项, 468
质量项, 374
质能关系, 16
质壳条件, 15, 53, 60, 64, 87, 349, 357, 454, 477, 479, 560
指数分布, 250
指数函数, 29, 46, 216, 526
指数衰减因子, 455
质心, 37
质心能, 246, 255, 317, 346, 446
质心系, 246, 293, 316, 331, 348, 359, 475
质心运动定理, 37
质心运动守恒定律, 37
质子, 332, 407
中间态, 442, 474
忠实表示, 13, 84
中微子, 1, 102, 305, 329, 368, 401
中微子振荡, 305
重整化常数, 471
重子, 1
轴对称, 249, 252
轴矢量, 15, 163, 372, 391, 398
轴向规范, 142
转置, 385, 412
自共轭场, 376, 402
自共轭条件, 51, 117, 145, 386, 421
自能图, 284, 290, 293, 467, 476
子群, 10, 81
自然单位制, 3, 199, 251, 356
自相互作用, 199
自旋, 2, 37, 87, 95, 116, 165, 320, 323, 361, 405
自旋本征态, 336, 437
自旋极化, 87, 96, 100, 119, 142, 337
自旋量子数, 95, 102, 117, 167
自旋求和关系, 181, 272, 344
自旋双重态, 310
自旋一统计定理, 193, 404
总散射截面, 475
纵向极化矢量, 121, 139

组合因子, 292
坐标表象, 483
左手流, 386, 391, 400
左手投影矩阵, 326
左手 Weyl 旋量, 170, 408, 409
左手 Weyl 旋量场, 170, 412
左手旋量场, 327, 385, 417
作用量, 24, 371, 404, 491, 501, 544
作用量原理, 24, 26, 492
左右手投影分解, 327