

粒子物理简介

第二节 粒子运动学、衰变和散射

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 5 月 4 日



能量、动量和质量

 粒子物理学常常研究高速运动的粒子，需要在**狭义相对论**框架下描述粒子的运动

 平直时空中的**闵可夫斯基度规**通常约定为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

 粒子的**能量** E 和 **3 维动量** \mathbf{p} 构成 **4 维动量** $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ， p^μ 是一个洛伦兹逆变矢量，对应的协变矢量为 $p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\mathbf{p})$

爱因斯坦求和约定

省略求和符号
对重复的指标求和

能量、动量和质量

 粒子物理学常常研究高速运动的粒子，需要在**狭义相对论**框架下描述粒子的运动

 平直时空中的**闵可夫斯基度规**通常约定为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

爱因斯坦求和约定

省略求和符号
对重复的指标求和

 粒子的**能量** E 和 **3 维动量** \mathbf{p} 构成 **4 维动量** $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ， p^μ 是一个洛伦兹逆变矢量，对应的协变矢量为 $p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\mathbf{p})$

 p^μ 的内积 $p^2 \equiv p \cdot p \equiv p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ 是一个**洛伦兹不变量**，即在洛伦兹变换下不变，在所有惯性系中有相同的值

 m 是粒子的**(静止) 质量**

 自由运动的粒子满足**质壳条件** $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$ ，即 $E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$

 粒子的**3 维速度**定义为 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$

洛伦兹变换

 洛伦兹变换将一个洛伦兹矢量在一个惯性参考系 Σ 中的测量值变成它在另一个惯性参考系 Σ' 中的测量值

 设 Σ' 系相对于 Σ 系的运动速度为 β , 粒子在 Σ 系中的能量和动量分别为 E 和 \mathbf{p} , 记 \mathbf{p} 在平行于 β 方向上的分量为 p_L , 在垂直于 β 方向上的分量为 \mathbf{p}_T , 则粒子在 Σ' 系中的能量和动量为

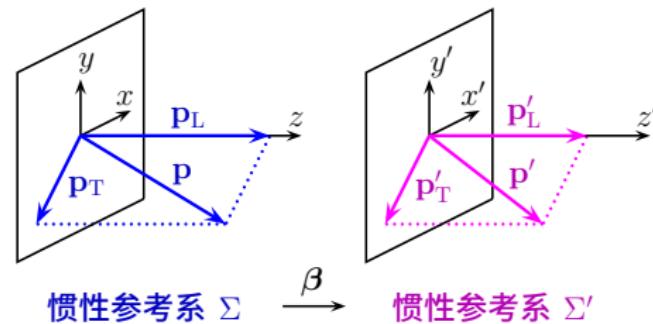
$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\beta| \\ -\gamma|\beta| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}'_T = \mathbf{p}_T$$

 洛伦兹因子 $\gamma = (1 - |\beta|^2)^{-1/2}$

 可以验证, $p'^2 = p^2$, 即 4 维动量的内积在洛伦兹变换下不变

粒子能量 E 与质量 m 的关系为

$$E = \gamma m, \text{ 这里 } \gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$$



动尺缩短和动钟延缓

 时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 是洛伦兹矢量，服从洛伦兹变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\beta| \\ -\gamma|\beta| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_T = \mathbf{x}_T$$

 引起两个相对论效应

- ① **运动的尺子变短**: 从静止参考系 Σ 中观察固定在运动参考系 Σ' 中的一个物体，则它在平行于 β 方向上的长度 L' 变短为 $L = L'/\gamma < L'$
- ② **运动的时钟变慢**: 运动参考系 Σ' 中的时间间隔 $\Delta t'$ 比静止参考系 Σ 中的时间间隔 Δt 长，满足 $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$

动尺缩短和动钟延缓

 时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 是洛伦兹矢量，服从洛伦兹变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\beta| \\ -\gamma|\beta| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_T = \mathbf{x}_T$$

 引起两个相对论效应

- ① **运动的尺子变短**: 从静止参考系 Σ 中观察固定在运动参考系 Σ' 中的一个物体，则它在平行于 β 方向上的长度 L' 变短为 $L = L'/\gamma < L'$
- ② **运动的时钟变慢**: 运动参考系 Σ' 中的时间间隔 $\Delta t'$ 比静止参考系 Σ 中的时间间隔 Δt 长，满足 $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$

 μ 子质量 $m = 106 \text{ MeV}$ ，寿命 $\tau = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ ；对于能量 $E = 106 \text{ GeV}$ 的 μ 子， $\gamma = E/m = 10^3$ ，因而飞行寿命会延长到 $\tau' = 2.2 \times 10^{-3} \text{ s}$

 π^\pm 介子质量为 140 MeV ，寿命为 $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ ，能量为 1.4 GeV 时从产生到衰变平均可以飞行七十多米，能量为 14 GeV 时则可达到七百多米

质心系

 对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的

 不过，对于多粒子系统，在**质心参考系**中描述粒子运动状态通常会更加简单

 **质心系**定义为使系统总动量为零的参考系，满足 $\mathbf{p}_{\text{CM}} \equiv \sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}} = \mathbf{0}$

 系统的**质心系能量 (质心能)** $E_{\text{CM}} \equiv \sum_i E_i^{\text{CM}}$ 是一个洛伦兹不变量：

$$p_{\text{CM}}^\mu \equiv (E_{\text{CM}}, \mathbf{p}_{\text{CM}}), \quad p_{\text{CM}}^2 = \left(\sum_i E_i^{\text{CM}} \right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}} \right)^2 = \left(\sum_i E_i^{\text{CM}} \right)^2 = E_{\text{CM}}^2$$

 系统的质心系总能量 E_{CM} 是激发粒子体系内部相互作用的**有效能量**

质心系

对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的

不过，对于多粒子系统，在**质心参考系**中描述粒子运动状态通常会更加简单

质心系定义为使系统总动量为零的参考系，满足 $\mathbf{p}_{\text{CM}} \equiv \sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}} = \mathbf{0}$

系统的**质心系能量(质心能)** $E_{\text{CM}} \equiv \sum_i E_i^{\text{CM}}$ 是一个洛伦兹不变量：

$$p_{\text{CM}}^\mu \equiv (E_{\text{CM}}, \mathbf{p}_{\text{CM}}), \quad p_{\text{CM}}^2 = \left(\sum_i E_i^{\text{CM}} \right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}} \right)^2 = \left(\sum_i E_i^{\text{CM}} \right)^2 = E_{\text{CM}}^2$$

系统的质心系总能量 E_{CM} 是激发粒子体系内部相互作用的**有效能量**

几个粒子的总质心能也称为它们的**不变质量**， $m_{\text{inv}} = E_{\text{CM}}$ ；由于**能动量守恒**，如果几个粒子是同一个母粒子的衰变产物， m_{inv} 就是母粒子的质量

两个粒子碰撞时，质心系中两个入射粒子动量大小相同，方向相反；质心系中出射粒子的角度分布是**轴对称**的，以任一入射粒子的动量方向为轴

标量粒子衰变所产生的次级粒子在质心系中呈**球对称**分布；若母粒子自旋不为零，次级粒子在质心系中则呈**轴对称**分布，以母粒子自旋方向为轴

固定靶实验和对撞实验

固定靶实验用粒子束流轰击固定靶来发生相互作用。实验室系中，记静止靶粒子 \mathcal{A} 的动量为 $p_{\mathcal{A}}^{\mu} = (m_{\mathcal{A}}, \mathbf{0})$ ，入射粒子 \mathcal{B} 的动量为 $p_{\mathcal{B}}^{\mu} = (E_{\mathcal{B}}, \mathbf{p}_{\mathcal{B}})$ ，则

$$E_{\text{CM}}^2 = (p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = p_{\mathcal{A}}^2 + p_{\mathcal{B}}^2 + 2p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 + 2m_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}$$

对于高能入射粒子， $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \ll E_{\mathcal{B}}$ ，质心能 $E_{\text{CM}} \simeq \sqrt{2m_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}$

固定靶实验和对撞实验

 **固定靶实验**用粒子束流轰击固定靶来发生相互作用。实验室系中，记静止靶粒子 \mathcal{A} 的动量为 $p_{\mathcal{A}}^{\mu} = (m_{\mathcal{A}}, \mathbf{0})$ ，入射粒子 \mathcal{B} 的动量为 $p_{\mathcal{B}}^{\mu} = (E_{\mathcal{B}}, \mathbf{p}_{\mathcal{B}})$ ，则

$$E_{\text{CM}}^2 = (p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = p_{\mathcal{A}}^2 + p_{\mathcal{B}}^2 + 2p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 + 2m_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}$$

 对于高能入射粒子， $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \ll E_{\mathcal{B}}$ ，质心能 $E_{\text{CM}} \simeq \sqrt{2m_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}$

 **对撞实验**用两个粒子束流相撞来发生相互作用。目前已有 e^+e^- 、 pp 、 $p\bar{p}$ 和 $e^\pm p$ 等束流不同的对撞机。设粒子 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 沿相反方向入射并对撞，若能量远高于质量，则 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| \simeq E_{\mathcal{A}}$ ， $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| \simeq E_{\mathcal{B}}$ ， $p_{\mathcal{A}}^2 \simeq p_{\mathcal{B}}^2 \simeq 0$ ，在实验室系中可得

$$E_{\text{CM}}^2 = p_{\mathcal{A}}^2 + p_{\mathcal{B}}^2 + 2p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}} \simeq 2E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} + 2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}||\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| \simeq 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}$$

 质心能 $E_{\text{CM}} \simeq \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}$

 费米实验室的 Tevatron 是 $p\bar{p}$ 对撞机， $E_p = E_{\bar{p}} \simeq 1 \text{ TeV}$ ， $E_{\text{CM}} \simeq 2 \text{ TeV}$

 若改为以 p 为靶的打靶实验，需要入射 \bar{p} 能量为 $E_{\bar{p}} \simeq 2000 \text{ TeV}$ 才能达到相同的质心能，可见**对撞实验远比固定靶实验更能有效地利用能量**

末态相空间

🔍 衰变和散射过程可包含多个末态粒子，其能动量可取运动学允许的任意值

🧅 计算衰变宽度和散射总截面要对所有末态粒子的动量相空间积分

🥔 单个粒子的洛伦兹不变动量相空间体积元为 $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = \frac{dp^0 d^3 p}{(2\pi)^4}$

🧅 末态粒子应满足质壳条件且能量为正

🥦 考虑到这两个限制，体积元变成 $\frac{dp^0 d^3 p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]\theta(p^0)$

末态相空间

衰变和散射过程可包含多个末态粒子，其能动量可取运动学允许的任意值

计算衰变宽度和散射总截面要对所有末态粒子的动量相空间积分

单个粒子的洛伦兹不变动量相空间体积元为 $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = \frac{dp^0 d^3 p}{(2\pi)^4}$

末态粒子应满足质壳条件且能量为正

考虑到这两个限制，体积元变成 $\frac{dp^0 d^3 p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]\theta(p^0)$

对 p^0 积分，利用恒等式 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ (x_i 为 $f(x)$ 的根)，可得

$$\begin{aligned} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi} 2\pi\delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]\theta(p^0) &= \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2})}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} \\ &= \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \end{aligned}$$

因此， n 体末态相空间不变体积元为 $d\Pi_n = \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$

衰变

 不稳定粒子的**衰变**是一个泊松随机过程

 在静止参考系中，粒子衰变前存活的时间 $\geq t$ 的概率由**指数分布**给出，

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \Gamma e^{-\Gamma t}$$

 τ 是粒子**寿命**， Γ 是粒子**衰变宽度**

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$$

衰变

火山 不稳定粒子的**衰变**是一个泊松随机过程

向日葵 在静止参考系中，粒子衰变前存活的时间 $\geq t$ 的概率由**指数分布**给出，

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \Gamma e^{-\Gamma t}$$

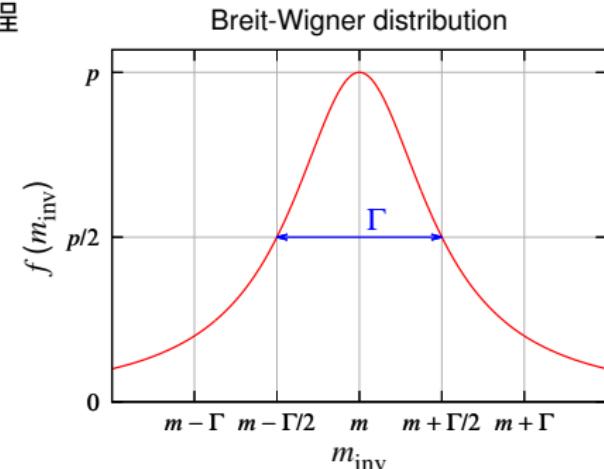
桃花 τ 是粒子**寿命**， Γ 是粒子**衰变宽度**

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$$

蜜蜂 不稳定粒子的质量并不是确定的值，而是**一个分布**，即衰变产物不变质量 m_{inv} 的分布，服从 **Breit-Wigner 分布**

$$f(m_{\text{inv}}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(m_{\text{inv}} - m)^2 + \Gamma^2/4}$$

蜜蜂 分布的中心值 m 是通常所说的粒子**质量**，分布的半峰全宽是粒子宽度 Γ



分支比和分宽度

 一个粒子可能有多种衰变过程。在一次衰变中，某个衰变过程 j 发生的概率称为它的**分支比** \mathcal{B}_j 。定义衰变过程 j 的**分宽度**为 $\Gamma_j = \Gamma \mathcal{B}_j$ ，则

$$\sum_j \mathcal{B}_j = \frac{1}{\Gamma} \sum_j \Gamma_j = 1, \quad \text{即 } \Gamma = \sum_j \Gamma_j$$

 对于末态为 n 体的衰变过程 j ，分宽度在理论计算中表达为

$$\Gamma_j = \frac{1}{2m} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p^\mu - \sum_i p_i^\mu \right) |\mathcal{M}_j|^2$$

 这里 m 和 p^μ 是母粒子的质量和 4 动量，**4 维 δ 函数**体现能动量守恒

 不变振幅 \mathcal{M}_j 是发生 j 过程的概率振幅，在洛伦兹变换下不变

分支比和分宽度

 一个粒子可能有多种衰变过程。在一次衰变中，某个衰变过程 j 发生的概率称为它的**分支比** \mathcal{B}_j 。定义衰变过程 j 的**分宽度**为 $\Gamma_j = \Gamma \mathcal{B}_j$ ，则

$$\sum_j \mathcal{B}_j = \frac{1}{\Gamma} \sum_j \Gamma_j = 1, \quad \text{即 } \Gamma = \sum_j \Gamma_j$$

 对于末态为 n 体的衰变过程 j ，分宽度在理论计算中表达为

$$\Gamma_j = \frac{1}{2m} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p^\mu - \sum_i p_i^\mu \right) |\mathcal{M}_j|^2$$

 这里 m 和 p^μ 是母粒子的质量和 4 动量，**4 维 δ 函数**体现能动量守恒

 **不变振幅** \mathcal{M}_j 是发生 j 过程的概率振幅，在洛伦兹变换下不变

 一个粒子物理理论模型会定义粒子类型和拉格朗日量密度 (**拉氏量**)，由此给出一套**费曼规则**  利用这套规则画出**费曼图**来表示所有可能发生的衰变和散射过程  根据**量子场论**知识，通过费曼图计算**不变振幅**

寿命和衰变长度

⚽ 寿命长于 10^{-10} s 的粒子

 μ^\pm, π^\pm 介子, K^\pm 介子, 中子 n , Λ^0 重子, K_L^0 介子,

 相对稳定, 产生后能够飞行较长距离

🏀 寿命在 $10^{-12} - 10^{-10}$ s 之间的粒子

 τ^\pm, K_S^0 介子, D^0 介子, D^\pm 介子, B^0 介子, B^\pm 介子,

 产生后能够飞行一段探测器可分辨的距离

🏈 寿命短于 10^{-12} s 的粒子

 $W^\pm, Z^0, t, H^0, \pi^0$ 介子, ρ^0 介子, ρ^\pm 介子,

寿命和衰变长度

⚽ 寿命长于 10^{-10} s 的粒子

🏀 μ^\pm, π^\pm 介子, K^\pm 介子, 中子 n , Λ^0 重子, K_L^0 介子,

👉 相对稳定, 产生后能够飞行较长距离

🏀 寿命在 $10^{-12} - 10^{-10}$ s 之间的粒子

🍎 τ^\pm, K_S^0 介子, D^0 介子, D^\pm 介子, B^0 介子, B^\pm 介子,

👉 产生后能够飞行一段探测器可分辨的距离

🏓 寿命短于 10^{-12} s 的粒子

🍐 $W^\pm, Z^0, t, H^0, \pi^0$ 介子, ρ^0 介子, ρ^\pm 介子,

🌹 平均衰变长度 $d = \beta\gamma\tau \simeq \gamma \left(\frac{\tau}{10^{-12} \text{ s}} \right) 300 \text{ } \mu\text{m}$, $\gamma = \frac{E}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

🐎 π^\pm 介子质量 $m = 140 \text{ MeV}$, 寿命 $\tau = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$, 能量 $E = 1.4 \text{ GeV}$
时 $\gamma = 10$, 平均衰变长度 $d \simeq 10 \times (2.6 \times 10^4) \times (3 \times 10^{-4} \text{ m}) = 78 \text{ m}$

散射

 **散射**是两个粒子通过碰撞发生反应的过程

 **弹性散射**: 碰撞粒子之间只有动量交换, 类型和内部状态没有发生改变

 **非弹性散射**: 粒子内部状态有所改变或转化为其它粒子

 描述散射过程本质的物理量是**散射截面** σ , 它是粒子间相互作用的有效面积, 表征相互作用的强弱

 散射截面的常用单位是**靶**, 记作 b, $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$

 $1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{ cm}^2 = 2.568 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$, $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb}$

散射

 **散射**是两个粒子通过碰撞发生反应的过程

 **弹性散射**: 碰撞粒子之间只有动量交换, 类型和内部状态没有发生改变

 **非弹性散射**: 粒子内部状态有所改变或转化为其它粒子

 描述散射过程本质的物理量是**散射截面** σ , 它是粒子间相互作用的有效面积, 表征相互作用的强弱

 散射截面的常用单位是**靶**, 记作 b, $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$

 $1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{ cm}^2 = 2.568 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$, $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb}$

 对于末态为 n 体的散射过程, 散射截面在理论计算中表达为

$$\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A^\mu + p_B^\mu - \sum_i p_i^\mu \right) |\mathcal{M}|^2$$

 与分宽度的计算公式类似, **4 维 δ 函数**体现能动量守恒, 而 \mathcal{M} 是散射过程的**不变振幅**, 可以通过费曼图计算

散射截面与相互作用率

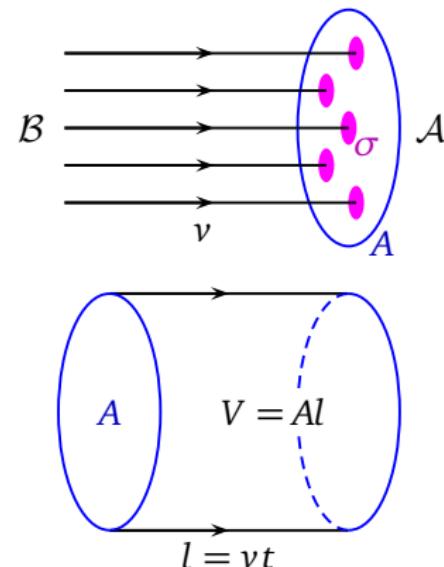
设两束粒子 A 和 B 发生散射，各自含有 N_A 和 N_B 个粒子， A 与 B 相互作用的散射截面为 σ ，粒子束相互投射的区域横截面积为 A ，则相互作用发生的次数为

$$N = N_A N_B \frac{\sigma}{A}$$

若两个粒子束的数密度为 n_A 和 n_B ，彼此间相对速度为 $v = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ ，则在 t 时间内相互投射的区域体积为 $V = A v t$

由于 $N_A = n_A V$, $N_B = n_B V$ ，单位时间单位体积内的相互作用率为

$$R = \frac{N}{Vt} = \frac{1}{Vt} \frac{n_A V n_B V \sigma}{A} = n_A n_B \sigma \frac{V}{At} = n_A n_B \sigma v$$



Mandelstam 变量

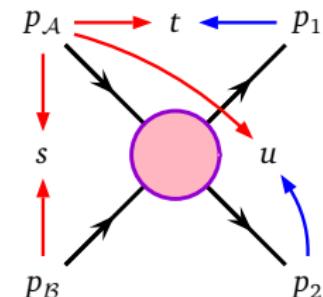
两体散射常用到洛伦兹不变的 **Mandelstam 变量**

$$s \equiv (p_A + p_B)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_A - p_1)^2 = (p_B - p_2)^2$$

$$u \equiv (p_A - p_2)^2 = (p_B - p_1)^2, \quad s + t + u = \sum_{i=\mathcal{A},\mathcal{B},1,2} m_i^2$$

四叶草 s 的定义可推广到任意 n 体末态，且 $\sqrt{s} = E_{\text{CM}}$

小鱼 习惯上使用 \sqrt{s} 表示散射过程的**质心能**



Mandelstam 变量

两体散射常用到洛伦兹不变的 Mandelstam 变量

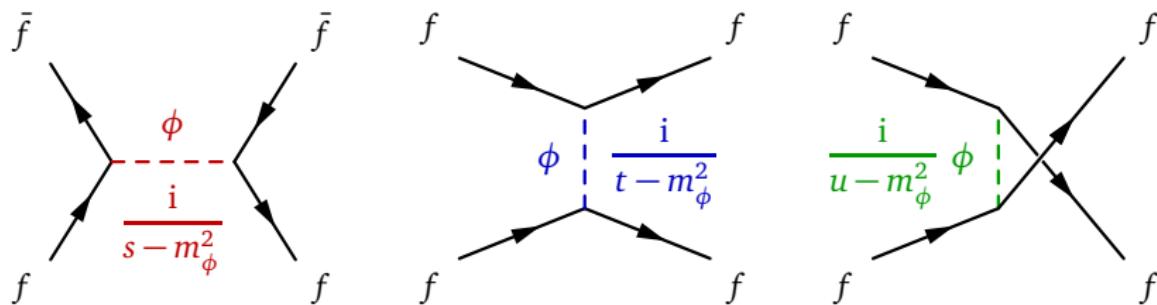
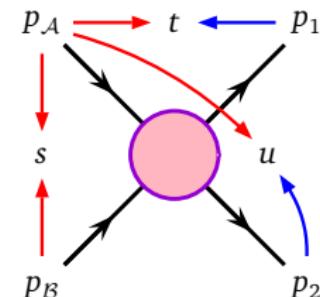
$$s \equiv (p_A + p_B)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_A - p_1)^2 = (p_B - p_2)^2$$

$$u \equiv (p_A - p_2)^2 = (p_B - p_1)^2, \quad s + t + u = \sum_{i=A,B,1,2} m_i^2$$

s 的定义可推广到任意 n 体末态，且 $\sqrt{s} = E_{\text{CM}}$

习惯上使用 \sqrt{s} 表示散射过程的质心能

当两体散射费曼图只包含一条内线时，内线传播子的动量对应于 s 、 t 或 u ，相应地称之为 s 通道、 t 通道或 u 通道的费曼图



运动学条件

根据**狭义相对性原理**, 物理定律在一切惯性参考系中具有相同形式

 利用**质心系**可以方便地分析一个过程需要满足的运动学条件

 衰变过程的质心能为母粒子质量 m

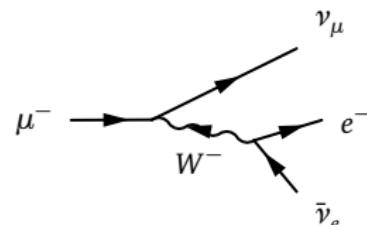
 根据能量守恒, 发生衰变的**运动学条件**是 $m > \sum_i m_i$

 粒子只能衰变成质量之和比它轻的末态粒子

 $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}$, $m_{\nu_e} \simeq m_{\nu_\mu} \simeq 0$

 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ 可以发生, $e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e$ 不能发生

 μ 子是**不稳定**粒子, 电子是**稳定**粒子



运动学条件

根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同形式

利用质心系可以方便地分析一个过程需要满足的运动学条件

衰变过程的质心能为母粒子质量 m

根据能量守恒，发生衰变的**运动学条件**是 $m > \sum_i m_i$

粒子只能衰变成质量之和比它轻的末态粒子

棒球 $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}$, $m_{\nu_e} \simeq m_{\nu_\mu} \simeq 0$

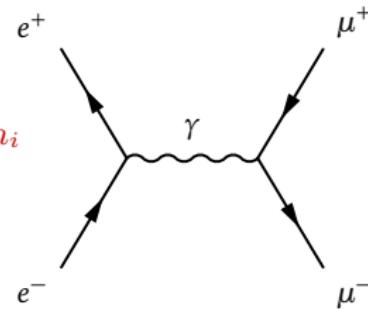
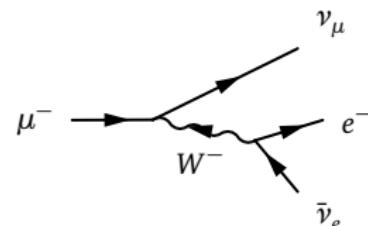
双链 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ 可以发生, $e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e$ 不能发生

沙漏 μ 子是**不稳定**粒子，电子是**稳定**粒子

孔雀 对于**散射过程**，能量守恒要求的**运动学条件**是 $\sqrt{s} > \sum_i m_i$

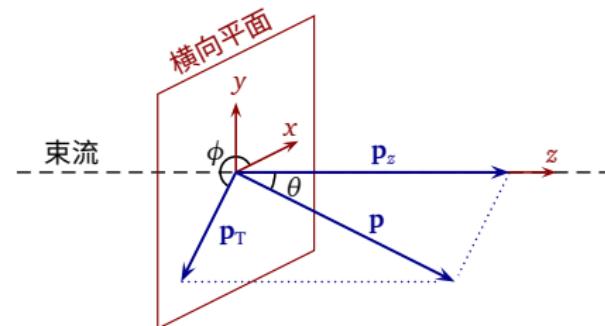
剪刀 散射过程质心能应大于末态粒子质量之和

网球 当 $\sqrt{s} > 2m_\mu$ 时, $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 过程才能发生



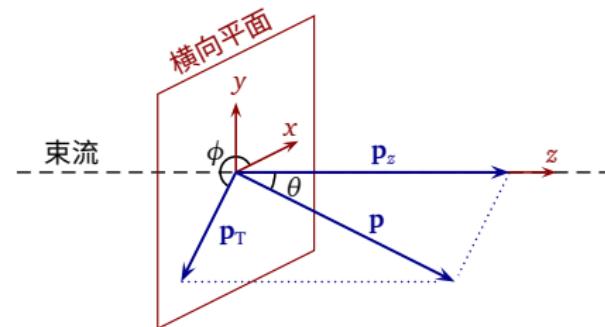
对撞机实验坐标系

- 以束流方向为 z 轴, 视作**纵向**
- 将粒子的三维动量 \mathbf{p} 分解为**纵向动量** $p_z \equiv |\mathbf{p}_z|$ 和**横向动量** $p_T \equiv |\mathbf{p}_T|$
- \mathbf{p} 的方向由**极角** $\theta \in [0, \pi]$ 和**方位角** $\phi \in [0, 2\pi)$ 描述



对撞机实验坐标系

- duck 以束流方向为 z 轴, 视作**纵向**
- chicken 将粒子的三维动量 \mathbf{p} 分解为**纵向动量** $p_z \equiv |\mathbf{p}_z|$ 和**横向动量** $p_T \equiv |\mathbf{p}_T|$
- fish \mathbf{p} 的方向由**极角** $\theta \in [0, \pi]$ 和**方位角** $\phi \in [0, 2\pi]$ 描述
- bird 通常用**赝快度** $\eta \in (-\infty, \infty)$ 代替 θ



$$\eta \equiv -\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right), \quad \theta = 2 \tan^{-1} e^{-\eta}, \quad -\eta = -\ln \left(\tan \frac{\pi - \theta}{2} \right)$$

η	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5	10
θ	90°	62.5°	40.4°	25.2°	15.4°	9.4°	5.7°	2.1°	0.77°	0.005°

- bunny 在壳粒子的四维动量 $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ 可以用变量集 $\{m, p_T, \eta, \phi\}$ 表达
- dog 两个粒子动量之间的**角间距**用 $\Delta R = \sqrt{(\phi_1 - \phi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$ 描述
- cat p_T 较大的粒子更可能来自**硬散射** 🤝 以 p_T 大小为粒子或喷注 (jet) **排序**

快度

hog 引入快度 $\xi \equiv \tanh^{-1} \frac{p_z}{E}$, 它是将 p_z 变换为零的洛伦兹变换的速度参数

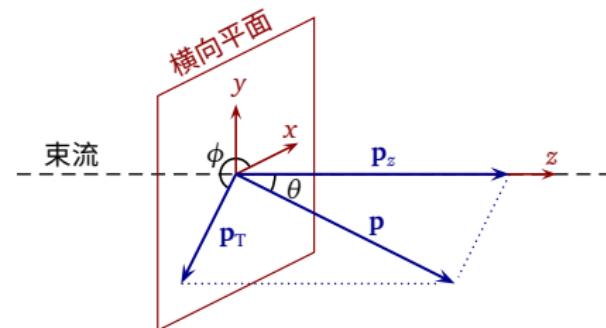
horse 质量 $m = 0$ $E = |\mathbf{p}|$

$$\text{hand} \quad \cos \theta = \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_z}{E} = \tanh \xi$$

$$\text{hand} \quad \eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh \xi}{1 - \tanh \xi} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh \xi + \sinh \xi}{\cosh \xi - \sinh \xi} = \frac{1}{2} \ln e^{2\xi} = \xi$$

butterfly 对于相对论性粒子, 腹快度 η 是快度 ξ 的良好近似



快度

hog 引入快度 $\xi \equiv \tanh^{-1} \frac{p_z}{E}$, 它是将 p_z 变换为零的洛伦兹变换的速度参数

horse 质量 $m = 0$ $E = |\mathbf{p}|$

$$\text{hand icon} \quad \cos \theta = \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_z}{E} = \tanh \xi$$

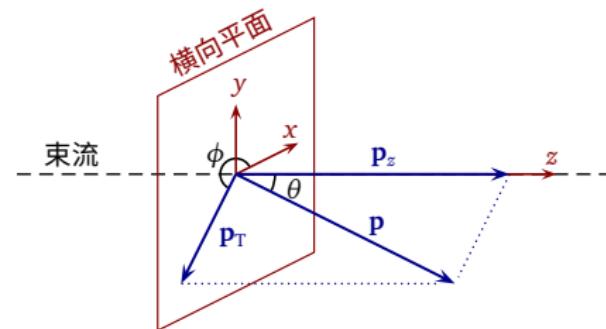
$$\begin{aligned} \text{hand icon} \quad \eta &= -\ln \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh \xi}{1 - \tanh \xi} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh \xi + \sinh \xi}{\cosh \xi - \sinh \xi} = \frac{1}{2} \ln e^{2\xi} = \xi \end{aligned}$$

butterfly 对于相对论性粒子, 腹快度 η 是快度 ξ 的良好近似

horse 引入横向能量 $E_T \equiv \sqrt{m^2 + p_T^2}$ $E = E_T \cosh \xi, \quad p_z = E_T \sinh \xi$

bee 若一个粒子衰变为粒子 1 和粒子 2, 则它的质量 m 可以表达为

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2[E_{1T}E_{2T} \cosh(\xi_1 - \xi_2) - \mathbf{p}_{1T} \cdot \mathbf{p}_{2T}]}$$



运动学变量：不变质量、反冲质量

在对撞机实验中，经常有多个过程贡献到相同的末态

通过构造多种各具特色的运动学变量，可以在数据分析中区分不同过程

不变质量 $m_{\text{inv}} \equiv \sqrt{(p_1 + p_2 + \dots + p_i)^2}$ 用于从衰变产物重建母粒子质量

运动学变量：不变质量、反冲质量

在对撞机实验中，经常有多个过程贡献到相同的末态

通过构造多种各具特色的运动学变量，可以在数据分析中区分不同过程

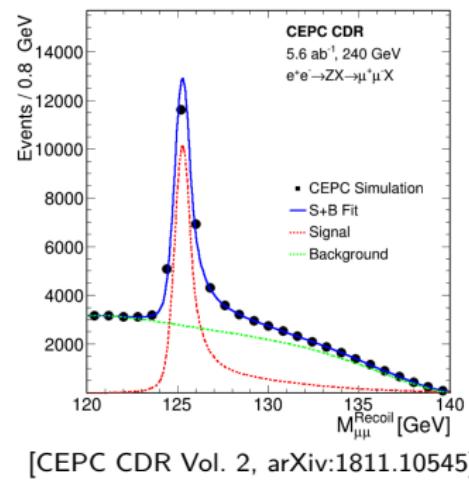
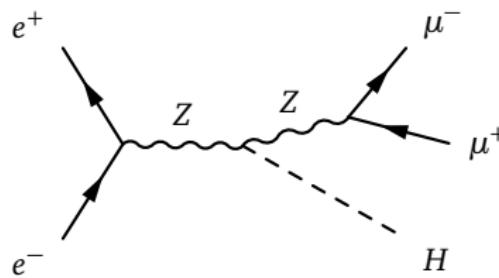
不变质量 $m_{\text{inv}} \equiv \sqrt{(p_1 + p_2 + \dots + p_i)^2}$ 用于从衰变产物重建母粒子质量

在 e^+e^- 对撞机上，入射粒子的四维动量是确定的，可以定义**反冲质量**

对于 $e^+ + e^- \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ 过程，**粒子 1** 的**反冲质量**定义为

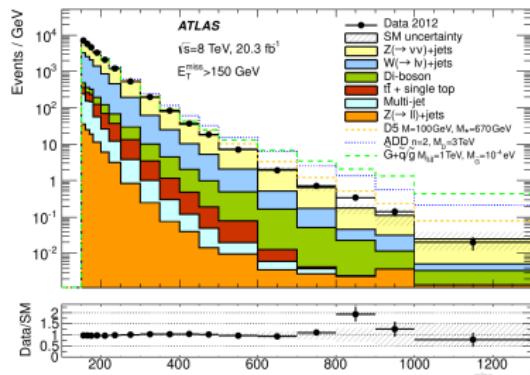
$$m_{1, \text{rec}} \equiv \sqrt{[p_{e^+} + p_{e^-} - (p_2 + \dots + p_n)]^2}$$

在 e^+e^- 对撞机上可以利用**伴随产生的粒子**来测量**粒子质量和产生截面**



运动学变量: \cancel{E}_T , H_T , m_{eff}

对撞机上的探测器不能测量中微子和假想的暗物质粒子, 它们的存在会导致测量到的横向总动量非零, 可用所有可见粒子 i 的横向动量定义横向丢失动量 $\cancel{p}_T \equiv - \sum_i \mathbf{p}_T^i$ 和横向丢失能量 $\cancel{E}_T \equiv |\cancel{p}_T|$ (亦记为 E_T^{miss}), 以表征不可见粒子的能量标度



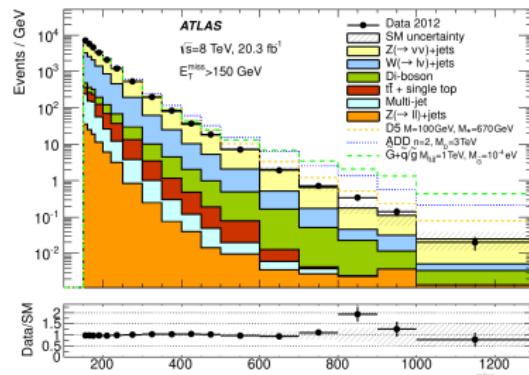
[ATLAS Coll., arXiv:1502.01518, EPJC]

运动学变量: \not{E}_T , H_T , m_{eff}

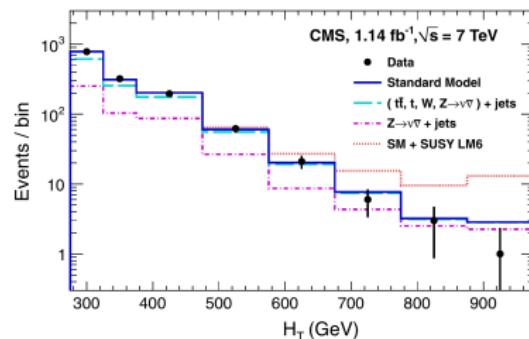
对撞机上的探测器不能测量中微子和假想的暗物质粒子, 它们的存在会导致测量到的横向总动量非零, 可用所有可见粒子 i 的横向动量定义横向丢失动量 $\not{p}_T \equiv -\sum_i \not{p}_T^i$ 和横向丢失能量 $\not{E}_T \equiv |\not{p}_T|$ (亦记为 E_T^{miss}), 以表征不可见粒子的能量标度

喷注 j_i 的横向动量的标量和 $H_T \equiv \sum_i p_T^{j_i}$ 表征硬散射过程中喷注的能量标度

有效质量 $m_{\text{eff}} \equiv \not{E}_T + H_T$ 表征硬散射过程中喷注加不可见粒子的能量标度



[ATLAS Coll., arXiv:1502.01518, EPJC]



[CMS Coll., arXiv:1109.2352, PRL]

运动学变量: m_T

🦌 考虑像 $W \rightarrow \ell\nu_\ell$ 这样的半不可见衰变过程 $P \rightarrow v + i$, 其中 v 是可见粒子, i 是不可见粒子, 定义**横向质量** $m_T \equiv \sqrt{m_v^2 + m_i^2 + 2(E_T^v E_T^i - \mathbf{p}_T^v \cdot \mathbf{p}_T^i)}$

🦀 这里 $E_T^{v,i} \equiv \sqrt{m_{v,i}^2 + (p_T^{v,i})^2}$, $\mathbf{p}_T^i = \cancel{\mathbf{p}}_T$, 由 $\cosh x \geq 1$ 得

$$m_T \leq \sqrt{m_v^2 + m_i^2 + 2[E_T^v E_T^i \cosh(\xi_v - \xi_i) - \mathbf{p}_T^v \cdot \mathbf{p}_T^i]} = \cancel{m}_P$$

🚲 P 的质量 m_P 约束了 m_T 的值

运动学变量： m_T

🦌 考虑像 $W \rightarrow \ell \nu_\ell$ 这样的半不可见衰变过程 $P \rightarrow v + i$, 其中 v 是可见粒子, i 是不可见粒子, 定义**横向质量** $m_T \equiv \sqrt{m_v^2 + m_i^2 + 2(E_T^v E_T^i - \mathbf{p}_T^v \cdot \mathbf{p}_T^i)}$

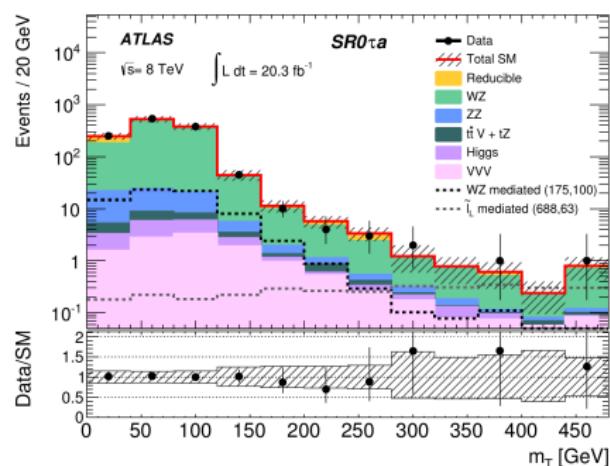
🦀 这里 $E_T^{v,i} \equiv \sqrt{m_{v,i}^2 + (p_T^{v,i})^2}$, $\mathbf{p}_T^i = \cancel{\mathbf{p}}_T$, 由 $\cosh x \geq 1$ 得

$$m_T \leq \sqrt{m_v^2 + m_i^2 + 2[E_T^v E_T^i \cosh(\xi_v - \xi_i) - \mathbf{p}_T^v \cdot \mathbf{p}_T^i]} = m_P$$

🚲 P 的质量 m_P 约束了 m_T 的值

🐐 在实践中, m_v 通常很小, m_i 要么为零要么未知, 因此经常采用**近似**定义 $m_T = \sqrt{2(p_T^v E_T - \mathbf{p}_T^v \cdot \cancel{\mathbf{p}}_T)}$

🐑 对于只包含一个不可见粒子的**三体衰变**过程 (如 $t \rightarrow b\ell^+\nu_\ell$), 可以先将两个可见粒子的横向动量叠加起来, 然后再定义 m_T



[ATLAS Coll., arXiv:1402.7029, JHEP]

运动学变量： m_{T2}

对于双重半不可见衰变过程，可以利用 m_{T2} 变量

考虑一对正反粒子 $P\bar{P}$ 的衰变过程 $P(\rightarrow v_1 i) + \bar{P}(\rightarrow v_2 \bar{i})$ ，其中 v_1 和 v_2 是可见粒子， i 和 \bar{i} 是不可见粒子，定义 [Lester & Summers, arXiv:hep-ph/9906349, PLB]

$$m_{T2}(\mu_i) = \min_{p_T^1 + p_T^2 = p_T} \left\{ \max \left[m_T(p_T^{v_1}, p_T^1; m_{v_1}, \mu_i), m_T(p_T^{v_2}, p_T^2; m_{v_2}, \mu_i) \right] \right\}$$

μ_i 是 i 粒子的测试质量，经常设为零

如果 μ_i 等于 i 粒子的真实质量 m_i，就可以推出 $m_{T2} \leq m_P$

