数学物理方法

第十一章　球函数

第 1 节　轴对称球函数

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 7 月 12 日

§1 轴对称球函数

§1.1 轴对称问题的一般解

回顾第九章 §2.1 知识，在**球坐标**下对 **Laplace 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$ 分离变量，设

$$u(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

考虑到对 ϕ 的**周期性边界条件** $u(r,\theta,\phi+2\pi) = u(r,\theta,\phi)$，得

$$\Phi(\phi) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

令 $\cos\theta = x$，$H(\theta) = P(x)$

由于 $\theta = 0, \pi$ **处的自然边界条件**，$P(x)$ 满足**连带 Legendre 方程**的**本征值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0 \quad (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \ (m = 0) \end{cases}$$

轴对称问题

- 对于**轴对称**问题，取**对称轴**为球坐标系的**极轴** (z 轴)
- 那么，问题的解**与 ϕ 无关**，只需考虑 $m = 0$，而 $\Phi(\phi) = 1$
- 上述问题简化为 **Legendre 方程**的**本征值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda P = 0 \quad (-1 < x < 1) \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

- 相应的**本征值**和**本征函数**是

$$\lambda = l(l+1), \quad P(x) = \mathrm{P}_l(x), \quad l \in \mathbb{N}$$

- 这里 $\mathrm{P}_l(x)$ 是 **l 次 Legendre 多项式**
- 将本征值代回**径向方程** $r^2R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$，得

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0$$

求解径向方程

现在求解**径向方程** $r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0$，它是一个 **Euler 方程**

令 $r=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln r$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=\dfrac{1}{r}$，$r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=r\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}=r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)=r^2\frac{-1}{r^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}$$

从而 $r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$，**径向方程**化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-l(l+1)R=0$$

求解径向方程

现在求解**径向方程** $r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0$，它是一个 **Euler 方程**

令 $r=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln r$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=\dfrac{1}{r}$，$r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=r\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}=r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)=r^2\frac{-1}{r^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}$$

从而 $r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$，**径向方程**化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-l(l+1)R=0$$

将 $R=\mathrm{e}^{\mu t}$ 代入，得 $[\mu^2+\mu-l(l+1)]\mathrm{e}^{\mu t}=0$

$\mu(\mu+1)-l(l+1)=0$ 的两个根为 $\mu_1=l$ 和 $\mu_2=-l-1$，对应着两个解

$$R_1(r)=\mathrm{e}^{\mu_1 t}=r^{\mu_1}=r^l,\quad R_2(r)=\mathrm{e}^{\mu_2 t}=r^{\mu_2}=r^{-(l+1)}$$

Laplace 方程轴对称问题的一般解

- 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，有 $\Phi(\phi) = 1$、$H(\theta) = \mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 和 $R(r) = \left\{ r^l, \dfrac{1}{r^{l+1}} \right\}$
- 于是，Laplace 方程轴对称问题的一般解为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 其中 A_l 和 B_l 是任意常数，由边界条件决定
- Laplace 方程**没有**初始条件，边界条件不需要全部是齐次的，否则只有平庸解

Laplace 方程轴对称问题的一般解

- 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，有 $\Phi(\phi) = 1$、$H(\theta) = \mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 和 $R(r) = \left\{ r^l, \dfrac{1}{r^{l+1}} \right\}$
- 于是，**Laplace 方程轴对称**问题的**一般解**为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

在**原点的去心邻域**上满足 Laplace 方程

- 其中 A_l 和 B_l 是任意常数，由**边界条件**决定
- Laplace 方程**没有**初始条件，边界条件不需要全部是齐次的，否则只有平庸解
- $u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 在**原点的邻域**上满足 Laplace 方程
- $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{B_l}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 在**无穷远点的邻域**上满足 Laplace 方程
- 在**全空间**满足 Laplace 方程的解只能是 $u(r,\theta) = A_0$

§1.2 Legendre 多项式的基本性质

- 本节题目中的**“轴对称球函数”**指上述一般解中出现的 **Legendre 多项式**
- 为了将这个解**应用**于物理问题，需要先研究 Legendre 多项式的性质
- 在上一章求得 **Legendre 多项式**的**显式**为

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}\, x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

§1.2 Legendre 多项式的基本性质

- 本节题目中的**“轴对称球函数”**指上述一般解中出现的 **Legendre 多项式**
- 为了将这个解**应用**于物理问题，需要先研究 Legendre 多项式的性质
- 在上一章求得 **Legendre 多项式**的**显式**为

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

- 它具有下列**基本性质**

(1) 奇偶性：$\mathrm{P}_l(-x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x)$，即**奇**（**偶**）次 Legendre 多项式为**奇**（**偶**）函数

证：$\mathrm{P}_l(-x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-)^k (2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} (-x)^{l-2k} = (-)^{l-2k} \mathrm{P}_l(x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x)$

§1.2 Legendre 多项式的基本性质

- 本节题目中的 **“轴对称球函数”** 指上述一般解中出现的 **Legendre 多项式**
- 为了将这个解**应用**于物理问题，需要先研究 Legendre 多项式的性质
- 在上一章求得 **Legendre 多项式**的**显式**为

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}\,x^{l-2k},\quad l\in\mathbb{N}$$

- 它具有下列**基本性质**（在这种幂级数讨论中需要**定义** $0^0=1$ 以得到自洽结果）

(1) 奇偶性： $\mathrm{P}_l(-x)=(-)^l\mathrm{P}_l(x)$，即**奇**（**偶**）次 Legendre 多项式为**奇**（**偶**）函数

证：$\mathrm{P}_l(-x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-)^k(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}(-x)^{l-2k}=(-)^{l-2k}\mathrm{P}_l(x)=(-)^l\mathrm{P}_l(x)$

(2) 原点值： $\mathrm{P}_{2n+1}(0)=0,\quad \mathrm{P}_{2n}(0)=(-)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=(-)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\quad n\in\mathbb{N}$

证：$k=n$ 的项才有贡献，$\mathrm{P}_{2n}(0)=\frac{(-)^n(4n-2n)!\,0^{2n-2n}}{2^{2n}n!(2n-n)!(2n-2n)!}=(-)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Legendre 多项式的端点值和具体形式

♪ 利用 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ 和 $2^n n! = (2n)!!$ 推出

$$\mathrm{P}_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

♫ 注意，$\mathrm{P}_0(0) = 1$ 与 $(-1)!! = 0!! = 1$ 匹配

Legendre 多项式的端点值和具体形式

🎶 利用 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ 和 $2^n n! = (2n)!!$ 推出

$$\mathrm{P}_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

🎵 注意，$\mathrm{P}_0(0) = 1$ 与 $(-1)!! = 0!! = 1$ 匹配

(3) 端点值：$\mathrm{P}_l(1) = 1, \quad \mathrm{P}_l(-1) = (-)^l$

🎤 第一式将在**下一小节**证明，第二式由第一式和**奇偶性** $\mathrm{P}_l(-x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x)$ 推出

Legendre 多项式的端点值和具体形式

利用 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ 和 $2^n n! = (2n)!!$ 推出

$$\mathrm{P}_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

注意，$\mathrm{P}_0(0) = 1$ 与 $(-1)!! = 0!! = 1$ 匹配

(3) **端点值**：$\mathrm{P}_l(1) = 1, \quad \mathrm{P}_l(-1) = (-)^l$

第一式将在**下一小节**证明，第二式由第一式和**奇偶性** $\mathrm{P}_l(-x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x)$ 推出

(4) 头三个 Legendre 多项式的**具体形式**为

$$\mathrm{P}_0(x) = 1, \quad \mathrm{P}_1(x) = x, \quad \mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(x) &= \frac{(-)^0 0!}{2^0 0!0!0!} x^0 = 1, \quad \mathrm{P}_1(x) = \frac{(-)^0 2!}{2^1 0!1!1!} x^1 = x \\
\mathrm{P}_2(x) &= \frac{(-)^0 4!}{2^2 0!2!2!} x^2 + \frac{(-)^1 (4-2)!}{2^2 1!(2-1)!(2-2)!} x^{2-2} = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Legendre 多项式的零点和图像

(5) 零点： $\mathrm{P}_l(x)$ 在**区间** $(-1,1)$ 上有 l **个一阶零点**（证明见 §1.3 选读内容）

- $\mathrm{P}_l(x)$ 是 l 次多项式，总共只有 l 个零点
- 可见，$\mathrm{P}_l(x)$ 的 l 个零点均为**实数**，全部分布在区间 $(-1,1)$ 上，**没有重零点**

Legendre 多项式的零点和图像

(5) 零点： $\mathrm{P}_l(x)$ 在**区间** $(-1,1)$ 上有 l **个一阶零点**（证明见 §1.3 选读内容）

- $\mathrm{P}_l(x)$ 是 l 次多项式，总共只有 l 个零点
- 可见，$\mathrm{P}_l(x)$ 的 l 个零点均为**实数**，全部分布在区间 $(-1,1)$ 上，**没有重零点**

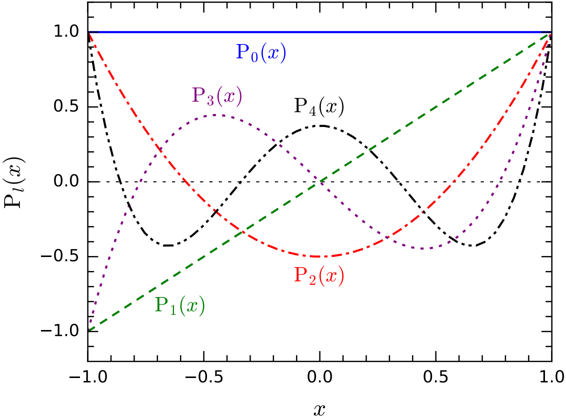
$$\mathrm{P}_0(x) = 1$$

$$\mathrm{P}_1(x) = x$$

$$\mathrm{P}_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$\mathrm{P}_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$



§1.3 Legendre 多项式的微分表示

🍔 Legendre 多项式有以下**微分表示**

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

🍟 这称为 **Rodrigues 公式**

Olinde Rodrigues
(1795–1851)

§1.3 Legendre 多项式的微分表示

Legendre 多项式有以下**微分表示**

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

这称为 **Rodrigues 公式**

Olinde Rodrigues
(1795–1851)

证明 根据**二项式定理**

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

有 $(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{l} C_l^k (x^2)^{l-k}(-)^k = \sum_{k=0}^{l}(-)^k C_l^k x^{2l-2k}$

对 x 求导 l 次，注意只有满足 $2l-2k \geq l$ (即 $k \leq l/2$) 的项才有贡献，得

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]}(-)^k C_l^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\, x^{2l-2k}$$

微分表示的证明

根据**求导公式** $\dfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}x^n = n\dfrac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}x^{n-1} = n(n-1)\dfrac{\mathrm{d}^{l-2}}{\mathrm{d}x^{l-2}}x^{n-2} = \cdots =$

$$= n(n-1)\cdots(n-l+1)x^{n-l} = \frac{n!}{(n-l)!}x^{n-l}, \quad l \leq n$$

取 $n = 2l - 2k$，即 $n - l = l - 2k$，得 $\dfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}x^{2l-2k} = \dfrac{(2l-2k)!}{(l-2k)!}x^{l-2k}$，故

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]}(-)^k C_l^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}x^{2l-2k} = \sum_{k=0}^{[l/2]}(-)^k \frac{l!}{k!(l-k)!}\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!}x^{l-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[l/2]}(-)^k \frac{l!(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]}(-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} = \mathrm{P}_l(x)$$

证毕

证明 $\mathrm{P}_l(1) = 1$

利用**微分表示**容易证明 $\mathrm{P}_l(1) = 1$

证明 根据**高阶导数的 Leibniz 公式**

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

利用 $(x^2-1)^l = [(x-1)(x+1)]^l$，有

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}[(x-1)^l (x+1)^l] = \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{l} C_l^k \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x-1)^l\right] \left[\frac{\mathrm{d}^{l-k}}{\mathrm{d}x^{l-k}}(x+1)^l\right]$$

$k < l$ 的各项求导后含有因子 $(x-1)^{l-k}$，因而在 $x = 1$ 处为零

于是，只有 $k = l$ 的项有贡献，而 $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l}$ 表明 $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} x^l = l!$，故

$$\mathrm{P}_l(1) = \frac{1}{2^l l!} \left[\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x-1)^l\right] (x+1)^l \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^l l!}\, l!\, 2^l = 1$$

最高幂次项 x^l

§1.5–§1.6 Legendre 多项式的正交关系和模

- 作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**Legendre 多项式**在 $[-1,1]$ 上**相互正交**
- 注意到**权函数** $\rho(x)=1$，**正交关系**为 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l'}(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad l\neq l'$
- Legendre 多项式的**模**定义为 $\|\mathrm{P}_l\|\equiv\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l(x)]^2\,\mathrm{d}x}$
- 下一节将用 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 表示**连带 Legendre 函数**，应注意不把 $[\mathrm{P}_l(x)]^2$ 写成 $\mathrm{P}_l^2(x)$，否则会与 $m=2$ 时的 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 相**混淆**

§1.5–§1.6 Legendre 多项式的正交关系和模

作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**Legendre 多项式**在 $[-1,1]$ 上**相互正交**

注意到**权函数** $\rho(x)=1$，**正交关系**为 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l'}(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad l\neq l'$

Legendre 多项式的**模**定义为 $\|\mathrm{P}_l\|\equiv\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l(x)]^2\,\mathrm{d}x}$

下一节将用 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 表示**连带 Legendre 函数**，应注意不把 $[\mathrm{P}_l(x)]^2$ 写成 $\mathrm{P}_l^2(x)$，否则会与 $m=2$ 时的 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 相**混淆**

利用 Legendre 多项式的**微分表示**，Legendre 多项式的**模方**为

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{P}_l\|^2 &= \int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\,\underline{\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x}\\
&=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\,\underline{\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\right]}
\end{aligned}$$

分部积分 ➡️ $$=\frac{1}{2^l l!}\mathrm{P}_l(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\,\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

计算 Legendre 多项式的模方

🐘 注意到

$$\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l = \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}[(x-1)^l(x+1)^l]$$

高阶导数的 Leibniz 公式 ➡️

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x-1)^l\right]\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1-k}}{\mathrm{d}x^{l-1-k}}(x+1)^l\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}x^n = \frac{n!}{(n-l)!}x^{n-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l!}{(l-k)!}\frac{l!}{(k+1)!}(x-1)^{l-k}(x+1)^{k+1}$$

$$\|\mathrm{P}_l\|^2 = \frac{1}{2^l l!}\mathrm{P}_l(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

计算 Legendre 多项式的模方

🐘 注意到

$$\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l = \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left[(x-1)^l(x+1)^l\right]$$

高阶导数的 Leibniz 公式 ➡️

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x-1)^l\right]\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1-k}}{\mathrm{d}x^{l-1-k}}(x+1)^l\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}x^n = \frac{n!}{(n-l)!}x^{n-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l!}{(l-k)!}\frac{l!}{(k+1)!}(x-1)^{l-k}(x+1)^{k+1}$$

🦏 由于 $l-k>0$ 且 $k+1>0$，上式在 $x=\pm 1$ 处均为零，故

$$\|\mathrm{P}_l\|^2 = \frac{1}{2^l l!}\mathrm{P}_l(x)\left.\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\right|_{-1}^{1} - \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

$$= (-)^1\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

共作 l 次分部积分

$$= \cdots = (-)^l\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^l\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

化简 $\|\mathrm{P}_l\|^2$

$\mathrm{P}_l(x)$ 是 l **次**多项式，**求导 l 次**后得到**常数**

$$\frac{\mathrm{d}^l \mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^l} = \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left[\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\right] = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{2l}}{\mathrm{d}x^{2l}}x^{2l} = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

其中**幂次小于 $2l$** 的各项求导为**零**，于是

$$\|\mathrm{P}_l\|^2 = (-)^l \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^l \mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \,\mathrm{d}x = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_0^1 (1-x^2)^l \,\mathrm{d}x$$

第二步利用被积函数的**偶函数**性质将积分范围调整为 $[0,1]$，再**乘以** 2

作**变量替换** $x=\cos\theta$，则 $x\in[0,1]$ 对应于 $\theta\in[0,\pi/2]$，有

$$1-x^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}\cos\theta = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^l\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \sin^{2l}\theta\,(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1}\theta\,\mathrm{d}\theta \equiv I_{2l+1}$$

积分 I_{2l+1}

现在求积分 I_{2l+1}

$$I_{2l+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1}\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int_0^{\pi/2} \sin^{2l}\theta\,\mathrm{d}\cos\theta$$

$$= -\sin^{2l}\theta\,\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} + 2l\int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1}\theta\,\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2l\int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1}\theta\,(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2l\left[\int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1}\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1}\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = 2l(I_{2l-1} - I_{2l+1})$$

推出递推关系 $I_{2l-1} = \dfrac{I_{2l+1}}{2l} + I_{2l+1} = \dfrac{2l+1}{2l}\,I_{2l+1}$，即 $I_{2l+1} = \dfrac{2l}{2l+1}\,I_{2l-1}$

由 $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = 1$ 得到

$$I_{2l+1} = \frac{2l}{2l+1}\,I_{2l-1} = \frac{2l(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)}\,I_{2l-3} = \cdots = \frac{2l(2l-2)\cdots 2}{(2l+1)(2l-1)\cdots 3}\,I_1$$

$$= \frac{[2l(2l-2)\cdots 2]^2}{(2l+1)2l(2l-1)(2l-2)\cdots 3\cdot 2} = \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}$$

Legendre 多项式的模

将 I_{2l+1} 的积分结果代入，得

$$\|\mathrm{P}_l\|^2=\frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_0^1(1-x^2)^l\,\mathrm{d}x=\frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\,I_{2l+1}=\frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\,\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}=\frac{2}{2l+1}$$

从而，Legendre 多项式的**模**为

$$\|\mathrm{P}_l\|=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}$$

将 $\int_{-1}^1\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l'}(x)\,\mathrm{d}x=0\ (l\neq l')$ 和 $\|\mathrm{P}_l\|^2=\int_{-1}^1[\mathrm{P}_l(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}$ **统一**写成

$$\boxed{\int_{-1}^1\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l'}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}}$$

§1.7 广义 Fourier 级数

- 作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**Legendre 多项式**在 $[-1,1]$ 上是**完备**的
- 因此，区间 $[-1,1]$ 上任意一个**解析良好的函数** $f(x)$ 必定可以用 $\{\mathrm{P}_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$ 展开为**广义 Fourier 级数**

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty} f_l \mathrm{P}_l(x), \quad -1 \le x \le 1$$

- 利用 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l'}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}$，求得**展开系数**为

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x, \quad l\in\mathbb{N}$$

§1.8 Legendre 多项式的母函数

- 考虑三维空间的 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$$

- 将 $u(\boldsymbol{r})$ 看成静电场的电势，对比静电场 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

- ϵ_0 是真空介电常数，可见 $\rho(\boldsymbol{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$

§1.8 Legendre 多项式的母函数

- 考虑三维空间的 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$$

- 将 $u(\boldsymbol{r})$ 看成静电场的电势，对比静电场 Poisson 方程

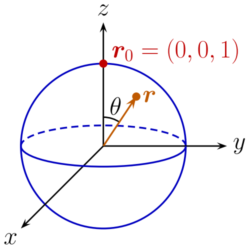
$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

- ϵ_0 是真空介电常数，可见 $\rho(\boldsymbol{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$
- $\rho(\boldsymbol{r})$ 是一个点电荷的电荷密度，它位于单位球面北极，直角坐标为 $\boldsymbol{r}_0 = (0,0,1)$
- 点电荷的电量为 $Q = 4\pi\epsilon_0$，根据电磁学，它产生的静电势为

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

- 使用 $\boldsymbol{r}$ 的球坐标 (r,θ,ϕ)，由 $z = r\cos\theta$ 得

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2 = x^2+y^2+(z-1)^2 = x^2+y^2+z^2-2z+1 = r^2-2r\cos\theta+1$$



解

- 于是，**Poisson 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$ 的解为

$$u(\boldsymbol{r}) = u(r,\theta) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

- 这里借助**电磁学**求解，也可以从数学上直接证明它是解（见**第十三章 Green 函数法**）
- 这**不是**唯一的解，对它加上任一**调和函数**（即 **Laplace 方程**的解）就得到另一个解
- 不过，在**全空间有限**的**调和函数**只有**常数**，一般解是对这个解加上一个任意常数
- 如果将**电势零点**取为**无穷远点**，则该常数为**零**，那么这个解就是唯一解

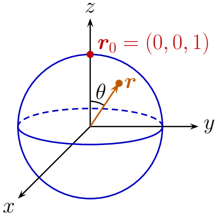
解

- 于是，Poisson 方程 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$ 的解为

$$u(\boldsymbol{r}) = u(r,\theta) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

- 这里借助**电磁学**求解，也可以从数学上直接证明它是解（见**第十三章 Green 函数法**）
- 这**不是**唯一的解，对它加上任一**调和函数**（即 **Laplace 方程**的解）就得到另一个解
- 不过，在**全空间有限**的**调和函数**只有**常数**，一般解是对这个解加上一个任意常数
- 如果将**电势零点**取为**无穷远点**，则该常数为**零**，那么这个解就是唯一解
- 在**单位球体内**（$r<1$），**Poisson 方程**化为 **Laplace 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$
- 由于这是个**轴对称**问题，该区域的解必定可以表达为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$



- $r=0$ 处没有电荷，电势应该**有限**，因此所有 $B_l = 0$

母函数

于是，**单位球体内**电势的另一个表达式为

$$u(\boldsymbol{r}) = u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r<1$$

适当选取 A_l 的值，可以使上式与 $u(r,\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$ 一致，即

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(x), \quad r<1$$

这里已将 $\cos\theta$ 改写为 x

母函数

于是，**单位球体内**电势的另一个表达式为

$$u(\boldsymbol{r}) = u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r<1$$

适当选取 A_l 的值，可以使上式与 $u(r,\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$ 一致，即

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(x), \quad r<1$$

这里已将 $\cos\theta$ 改写为 x，令 $x=1$，由 $\mathrm{P}_l(1)=1$ 得 $\sum\limits_{l=0}^{\infty} r^l = \dfrac{1}{1-r} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l r^l$

由此立即得到**所有** $A_l = 1$，故

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x), \quad r<1}$$

上式左边的函数称为 Legendre 多项式的**母函数**，或者**生成函数**

可见，将**母函数**在 $r=0$ 的邻域 $r<1$ 内展开成 r 的 **Taylor 级数**，则**展开系数**正是 **l 次 Legendre 多项式** $\mathrm{P}_l(x)$

$r > 1$ 的情况

- 如果 $r > 1$，则 $\dfrac{1}{r} < 1$
- 将 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x)$ $(r < 1)$ 中的 r 替换为 $\dfrac{1}{r}$，得

$$\frac{1}{\sqrt{(1/r)^2 - 2x/r + 1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^l \mathrm{P}_l(x), \quad \frac{1}{r} < 1$$

- 故

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \frac{1}{r\sqrt{(1/r)^2 - 2x/r + 1}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^l \mathrm{P}_l(x)$$

- 从而得到**母函数**的另一个展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(x), \quad r > 1$$

- 这里将**母函数**在 $r > 1$ 处展开成 **Laurent 级数**，对应于在级数 $\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{B_l}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(x)$ 中取**所有** $B_l = 1$

§1.9 Legendre 多项式的递推关系

将母函数公式 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x)$ 两边对 r 求导，左边化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(1-2rx+r^2)^{-1/2}=-\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(2r-2x)=(x-r)(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

再乘以 $1-2rx+r^2$，左边变成

$$(1-2rx+r^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(1-2rx+r^2)^{-1/2}=(x-r)(1-2rx+r^2)^{-1/2}$$

$$=(x-r)\sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty} x\mathrm{P}_l(x)r^l-\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x)r^{l+1}=\sum_{l=0}^{\infty} x\mathrm{P}_l(x)r^l-\sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{P}_{l-1}(x)r^l$$

§1.9 Legendre 多项式的递推关系

将母函数公式 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l\mathrm{P}_l(x)$ 两边对 r 求导，左边化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(1-2rx+r^2)^{-1/2}=-\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(2r-2x)=(x-r)(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

再乘以 $1-2rx+r^2$，左边变成

$$(1-2rx+r^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(1-2rx+r^2)^{-1/2}=(x-r)(1-2rx+r^2)^{-1/2}$$

$$=(x-r)\sum_{l=0}^{\infty}r^l\mathrm{P}_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}x\mathrm{P}_l(x)r^l-\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)r^{l+1}=\sum_{l=0}^{\infty}x\mathrm{P}_l(x)r^l-\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{P}_{l-1}(x)r^l$$

右边变成 $(1-2rx+r^2)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{l=0}^{\infty}r^l\mathrm{P}_l(x)=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}\mathrm{P}_l(x)$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}l\mathrm{P}_l(x)r^{l-1}-\sum_{l=0}^{\infty}2xl\mathrm{P}_l(x)r^l+\sum_{l=0}^{\infty}l\mathrm{P}_l(x)r^{l+1}$$

$$=\sum_{l=-1}^{\infty}(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)r^l-\sum_{l=0}^{\infty}2xl\mathrm{P}_l(x)r^l+\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)\mathrm{P}_{l-1}(x)r^l$$

递推关系一

综上，得到

$$\sum_{l=0}^{\infty} x\mathrm{P}_l(x)r^l - \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{P}_{l-1}(x)r^l = \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xl\mathrm{P}_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty}(l-1)\mathrm{P}_{l-1}(x)r^l$$

比较两边 r^l 的系数，推出

$$x\mathrm{P}_l(x) - \mathrm{P}_{l-1}(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) - 2xl\mathrm{P}_l(x) + (l-1)\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

整理得**递推关系一**

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

递推关系一

综上，得到

$$\sum_{l=0}^{\infty} x\mathrm{P}_l(x)r^l - \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{P}_{l-1}(x)r^l = \sum_{l=-1}^{\infty}(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xl\mathrm{P}_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty}(l-1)\mathrm{P}_{l-1}(x)r^l$$

比较两边 r^l **的系数**，推出

$$x\mathrm{P}_l(x) - \mathrm{P}_{l-1}(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) - 2xl\mathrm{P}_l(x) + (l-1)\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

整理得**递推关系一**

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

将**母函数公式** $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x)$ 两边**对** x **求导**，**左边**化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-2rx+r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(-2r) = r(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

递推关系二

再乘以 $1-2rx+r^2$，左边变成

$$\begin{aligned}(1-2rx+r^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-2rx+r^2)^{-1/2} &= r(1-2rx+r^2)^{-1/2} \\ &= r\sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^{l+1}\end{aligned}$$

右边变成 $(1-2rx+r^2)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l(x) = (1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty} r^l \mathrm{P}_l'(x)$

$$\begin{aligned}&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l'(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2x\mathrm{P}_l'(x) r^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l'(x) r^{l+2} \\ &= \sum_{l=-1}^{\infty} \mathrm{P}_{l+1}'(x) r^{l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} 2x\mathrm{P}_l'(x) r^{l+1} + \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{P}_{l-1}'(x) r^{l+1}\end{aligned}$$

比较两边 r^{l+1} 的系数，得到递推关系二

$$\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}_{l+1}'(x) - 2x\mathrm{P}_l'(x) + \mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

递推关系三

对递推关系一 $(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)$ 求导，有

$$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)+(2l+1)x\mathrm{P}_l'(x)=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}'(x)+l\mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

两边乘以 2，移项得

$$2(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=-2(2l+1)x\mathrm{P}_l'(x)+2(l+1)\mathrm{P}_{l+1}'(x)+2l\mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

对递推关系二 $\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)+\mathrm{P}_{l-1}'(x)$ 两边乘以 $(2l+1)$ 得

减

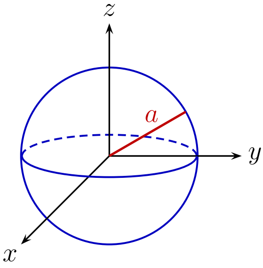
$$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=(2l+1)\mathrm{P}_{l+1}'(x)-2(2l+1)x\mathrm{P}_l'(x)+(2l+1)\mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

两式相减，得到递推关系三

$$\boxed{(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)}$$

§1.10 应用

💙 **例 1** 已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $f(\theta)$，球内外无电荷，求空间各处的电势 u



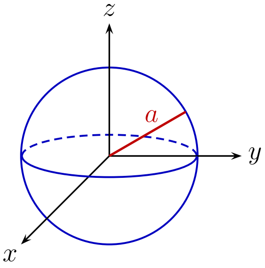
由于球内外无电荷，电势在球内外均满足 **Laplace 方程**

题意已隐含电势零点取在无穷远处，则定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (r < a,\ r > a) \\ u\big|_{r=a} = f(\theta), \quad u\big|_{r=\infty} = 0 \end{cases}$$

§1.10 应用

例 1 已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $f(\theta)$，球内外无电荷，求空间各处的电势 u



由于球内外无电荷，电势在球内外均满足 Laplace 方程

题意已隐含电势零点取在无穷远处，则定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (r < a,\ r > a) \\ u\big|_{r=a} = f(\theta), \quad u\big|_{r=\infty} = 0 \end{cases}$$

由于定解条件与 ϕ 无关，本问题为轴对称问题，故一般解为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

首先求解球内的电势，为了计算方便，将一般解改写为

$$u_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l + B_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

球内的解

由于球内没有电荷，**球心** $(r=0)$ 处电势应该**有限**，所以 $B_l = 0 \ (l \in \mathbb{N})$

球内的解化为

$$u_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

代入**球面**上的**边界条件** $u\big|_{r=a} = f(\theta)$，得到 $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = f(\theta)$

或者改写为 $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l \mathrm{P}_l(x) = g(x)$，其中 $x = \cos\theta$，$g(x) = f(\theta)$

球内的解

- 由于球内没有电荷，**球心** ($r=0$) 处电势应该**有限**，所以 $B_l=0\ (l\in\mathbb{N})$
- **球内的解**化为

$$u_1(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 代入**球面**上的**边界条件** $u\big|_{r=a}=f(\theta)$，得到 $\sum_{l=0}^{\infty}A_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=f(\theta)$
- 或者改写为 $\sum_{l=0}^{\infty}A_l\mathrm{P}_l(x)=g(x)$，其中 $x=\cos\theta$，$g(x)=f(\theta)$
- 根据**广义 Fourier 级数展开系数**的公式，推出

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

- 第二步注意 $\mathrm{d}x=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，$\cos 0=1$，$\cos\pi=-1$
- 给定 $f(\theta)$ 的具体形式，即可按上式计算展开系数 A_l
- 将所得系数代回**解的表达式**，就得到球内的电势

球外的解

- 其次求球外的电势，一般解的形式仍为

$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[C_l\left(\frac{r}{a}\right)^l+D_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 由于球外没有电荷，电势应该处处有限，$C_l=0\ (l\in\mathbb{N}^+)$
- 注意到 $\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1$，而无穷远点已取为电势零点，则 $C_0=0$
- 于是球外的解化为

$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}D_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 代入边界条件 $u\big|_{r=a}=f(\theta)$，得到 $\sum_{l=0}^{\infty}D_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=f(\theta)$
- 与 $\sum_{l=0}^{\infty}A_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=f(\theta)$ 比较，应有 $D_l=A_l$
- 将算得的系数代回解的表达式，就得到球外的电势

特例

💜 **特例** $f(\theta) = \cos^2\theta$，即 $g(x) = x^2$

像这样简单的函数，就不需要使用上面计算系数的公式了

注意到 $\mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$，立得 $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)$

由于 $\mathrm{P}_0(x) = 1$，有 $x^2 = \frac{1}{3}\mathrm{P}_0(x) + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)$，与 $x^2 = g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \mathrm{P}_l(x)$ 比较

推出**系数** $A_0 = D_0 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = D_2 = \frac{2}{3}, \quad A_l = D_l = 0 \quad (l \neq 0, 2)$

特例

特例 $f(\theta) = \cos^2\theta$，即 $g(x) = x^2$

像这样简单的函数，就不需要使用上面计算系数的公式了

注意到 $\mathrm{P}_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$，立得 $x^2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)$

由于 $\mathrm{P}_0(x) = 1$，有 $x^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{P}_0(x) + \dfrac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)$，与 $x^2 = g(x) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l \mathrm{P}_l(x)$ 比较

推出**系数** $A_0 = D_0 = \dfrac{1}{3}, \quad A_2 = D_2 = \dfrac{2}{3}, \quad A_l = D_l = 0 \quad (l \neq 0, 2)$

将这些系数代回**球内**和**球外**的解

$$u_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

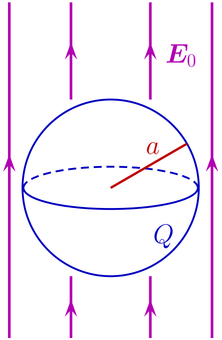
得到

$$u_1(r,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{P}_2(\cos\theta), \quad u_2(r,\theta) = \frac{1}{3}\frac{a}{r} + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathrm{P}_2(\cos\theta)$$

写下**球外**的结果时**容易出错**，应特别注意 $\dfrac{a}{r}$ **的幂次**

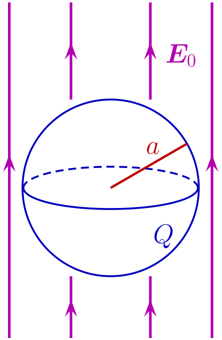
例 2

❤️ **例 2** 在均匀电场 E_0 中放入半径为 a、带电为 Q 的导体球，求放入导体球后的电场分布



例 2

❤️ **例 2** 在均匀电场 E_0 中放入半径为 a、带电为 Q 的导体球，求放入导体球后的电场分布



1 第一步 物理分析

⚖️ 静电场中的导体达到静电平衡时，体内电场为零

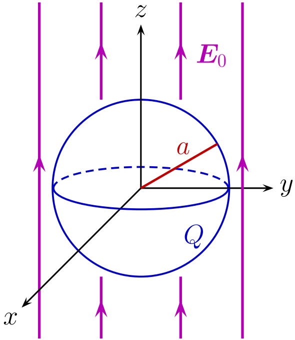
整个导体为等势体，故球内和球面的电势为常数，记为 u_0，通过下面的求解可以确定它

🔧 本题关键在于求解球外的电势分布 u

🪛 求出电势，就能直接计算电场的分布 $\boldsymbol{E} = -\nabla u$

例 2

❤️ **例 2** 在均匀电场 E_0 中放入半径为 a、带电为 Q 的导体球，求放入导体球后的电场分布



1 第一步 物理分析

⚖️ 静电场中的导体达到静电平衡时，体内电场为零

🗜️ 整个导体为等势体，故球内和球面的电势为常数，记为 u_0，通过下面的求解可以确定它

🔧 本题关键在于求解球外的电势分布 u

🪛 求出电势，就能直接计算电场的分布 $\boldsymbol{E} = -\nabla u$

2 第二步 建立坐标系

🌐 取球坐标系，以球心为原点、电场 E_0 的方向为极轴方向

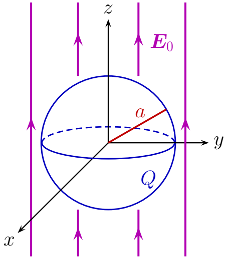
🔩 这样的话，电势分布显然具有轴对称性，故球外电势 $u(\boldsymbol{r}) = u(r, \theta)$

建立定解问题

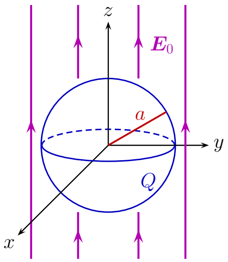
3 第三步　建立定解问题

🛏 由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$

🚪 本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势 $u\Big|_{r=a} = u_0$



建立定解问题

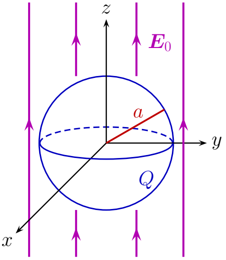


3 第三步 建立定解问题

- 由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$
- 本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势 $u\big|_{r=a} = u_0$
- 球内等势，电场为零，球内电荷密度 $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$
- 故电荷**全部**分布在球面上，球面带电 Q
- 电场满足 $\boldsymbol{E} = -\nabla u = -\dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$
- 球面面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\,\boldsymbol{e}_r$，Gauss 定律给出 $\dfrac{Q}{\epsilon_0} = \displaystyle\int_{r=a+} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{r=a+}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}S$

建立定解问题

3 第三步　建立定解问题



- 由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$
- 本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势 $u\big|_{r=a} = u_0$
- 球内等势，电场为零，球内电荷密度 $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$
- 故电荷**全部**分布在球面上，球面带电 Q
- 电场满足 $\boldsymbol{E} = -\nabla u = -\dfrac{\partial u}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$
- 球面面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\,\boldsymbol{e}_r$，Gauss 定律给出 $\dfrac{Q}{\epsilon_0} = \displaystyle\int_{r=a+} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{r=a+} \left(-\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) \mathrm{d}S$
- 在无穷远 ($r \to \infty$) 处，半径 $a \to 0$，原均匀电场应基本不受影响，有

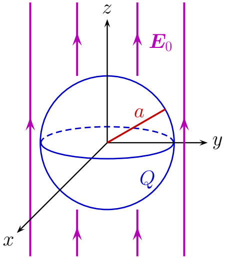
$$E_0\,\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{E}_0 = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z$$

- 故 $u\big|_{r\to\infty} = -\displaystyle\int E_0\,\mathrm{d}z' = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$，这里已将积分常数取为零

定解问题

综上，**定解问题**为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (r > a) \\ u\big|_{r=a} = u_0, \\ \displaystyle\int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right) \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ u\big|_{r\to\infty} = -E_0 r\cos\theta \end{cases}$$



注　由 $u\big|_{r\to\infty} = -E_0 r\cos\theta$ 得 $u(r\to\infty, \theta = \pi/2) = 0$

即**电势零点**已取在 xy **平面**的**无穷远**处，故**球面电势** u_0 是**确定**的

边界条件 $\displaystyle\int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right) \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 来源于 **Gause 定律**，它表示**球面带电** Q

这个边界条件是**电动力学**所特有的

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

求解定解问题

4 第四步　求解定解问题

由于**轴对称性**，一般解为 $u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$

代入**无穷远处**的**边界条件** $u\big|_{r\to\infty}=-E_0 r\cos\theta$，利用 $\mathrm{P}_1(x)=x$，得

$$u\big|_{r\to\infty}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta=-E_0 r\,\mathrm{P}_1(\cos\theta)$$

故 $A_1=-E_0$，$A_l=0\ (l\neq 1)$，解化为 $u(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$

求解定解问题

4 第四步 求解定解问题

由于**轴对称性**，一般解为 $u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$

代入**无穷远处**的**边界条件** $u\big|_{r\to\infty}=-E_0 r\cos\theta$，利用 $\mathrm{P}_1(x)=x$，得

$$u\big|_{r\to\infty}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta=-E_0 r\,\mathrm{P}_1(\cos\theta)$$

故 $A_1=-E_0$，$A_l=0\ (l\neq 1)$，解化为 $u(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$

代入**球面**的**边界条件** $u\big|_{r=a}=u_0$，利用 $\mathrm{P}_0(x)=1$，得

$$u\big|_{r=a}=-E_0 a\,\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\underline{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{a^{l+1}}}\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)=u_0=u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta)$$

$$\supset\frac{B_0}{a}\mathrm{P}_0(\cos\theta)+\frac{B_1}{a^2}\mathrm{P}_1(\cos\theta)$$

比较系数，推出 $B_0=u_0 a$，$B_1=E_0 a^3$，$B_l=0\ (l\neq 0,1)$

解

- 将求得的系数代入一般解，得 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \dfrac{u_0 a}{r}$
- 求导得 $-\dfrac{\partial u}{\partial r} = E_0\cos\theta + \dfrac{2E_0 a^3}{r^3}\cos\theta + \dfrac{u_0 a}{r^2}$
- 需要将上式代入**球面**的**另一边界条件** $\displaystyle\int_{r=a^+}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 以确定 u_0

解

将求得的系数代入一般解，得 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{u_0 a}{r}$

求导得 $-\frac{\partial u}{\partial r} = E_0\cos\theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3}\cos\theta + \frac{u_0 a}{r^2}$

需要将上式代入**球面**的**另一边界条件** $\int_{r=a^+}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 以确定 u_0

$r = a^+$ 只比**半径** a 大一个无穷小量，故 $r = a^+$ **球面面元**为 $\mathrm{d}S = a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

利用 $\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^\pi = 0$，推出

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{r=a^+}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}S = \int\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}\right)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \frac{u_0 a}{a^2}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi u_0 a\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -2\pi u_0 a\cos\theta\Big|_0^\pi = 4\pi u_0 a$$

从而 $u_0 a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$，**解**的最终形式为 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

结果分析

5 第五步　结果分析

- 在**球外电势**的解 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中
- 第一项是**原均匀电场的电势** $u\big|_{r\to\infty}$
- 第二项是**球面**上**感应面电荷**产生的电势，它是**电偶极子势**
- 第三项是因导体球**带电** Q 而产生的电势
- 当 $Q=0$ 时，**第三项消失**，变成电场中放入**不带电**导体球以后的电势分布
- 当 $a=0$ 时，**第二项消失**，变成**均匀场**电势与**点电荷**电势的线性叠加

结果分析

5 第五步　结果分析

- 在球外电势的解 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中
- 第一项是原均匀电场的电势 $u\big|_{r\to\infty}$
- 第二项是球面上感应面电荷产生的电势，它是电偶极子势
- 第三项是因导体球带电 Q 而产生的电势
- 当 $Q=0$ 时，第三项消失，变成电场中放入不带电导体球以后的电势分布
- 当 $a=0$ 时，第二项消失，变成均匀场电势与点电荷电势的线性叠加
- 根据 $\boldsymbol{E} = -\nabla u = -\dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi = E_r\boldsymbol{e}_r + E_\theta\boldsymbol{e}_\theta + E_\phi\boldsymbol{e}_\phi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -E_0\cos\theta - \frac{2E_0a^3}{r^3}\cos\theta - \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2},\quad \frac{\partial u}{\partial\theta} = E_0 r\sin\theta - \frac{E_0a^3}{r^2}\sin\theta,\quad \frac{\partial u}{\partial\phi} = 0$$

- 球外电场分布 $\boldsymbol{E}$ 的分量为 $E_r = -\dfrac{\partial u}{\partial r} = E_0\cos\theta + \dfrac{2E_0a^3}{r^3}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$

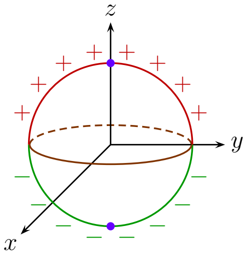
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -E_0\sin\theta + \frac{E_0a^3}{r^3}\sin\theta,\quad E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi} = 0$$

$Q=0$ 时球面附近的电场和面电荷密度

当 $Q=0$ 时，**球面附近**的**电场分布**为

$$E_r\Big|_{r=a}=E_0\cos\theta+\frac{2E_0a^3}{a^3}\cos\theta=3E_0\cos\theta,\quad E_\theta\Big|_{r=a}=-E_0\sin\theta+\frac{E_0a^3}{a^3}\sin\theta=0$$

可见，**电场方向与球面垂直**，符合导体表面电场方向**与导体表面垂直**的**电磁学**规律



在 $\theta=\pi/2$ 处，场强为**零**

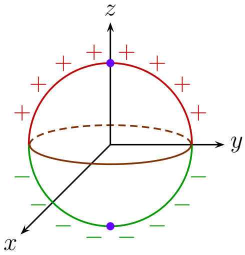
在 $\theta=0,\pi$ 处，场强是原场强的 **3 倍**，当外场较强时，这两处**容易被击穿**

$Q=0$ 时球面附近的电场和面电荷密度

当 $Q=0$ 时，**球面附近**的**电场分布**为

$$E_r\Big|_{r=a}=E_0\cos\theta+\frac{2E_0a^3}{a^3}\cos\theta=3E_0\cos\theta,\quad E_\theta\Big|_{r=a}=-E_0\sin\theta+\frac{E_0a^3}{a^3}\sin\theta=0$$

可见，**电场方向与球面垂直**，符合导体表面电场方向**与导体表面垂直**的**电磁学**规律



在 $\theta=\pi/2$ 处，场强为**零**

在 $\theta=0,\pi$ 处，场强是原场强的 **3 倍**，当外场较强时，这两处**容易被击穿**

当 $Q=0$ 时，**球面**上的**电荷面密度**为

$$\sigma(\theta)=-\epsilon_0\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=a}=-\epsilon_0\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=\epsilon_0E_r\Big|_{r=a}=3\epsilon_0E_0\cos\theta$$

显然，球面上 $\theta\in[0,\pi/2)$ 部分带**正电**，$\theta\in(\pi/2,\pi]$ 部分带**负电**

总带电量为 $Q=\int\sigma(\theta)\,\mathrm{d}S=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}3\epsilon_0E_0\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=0$

本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

从而使得结果 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 在 $r\to\infty$ 处出现奇性

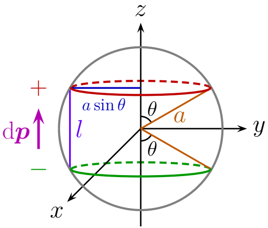
总电偶极矩

- 本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性
- 从而使得结果 $u(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta+\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 在 $r\to\infty$ 处出现奇性
- 在极角 $\theta\in(0,\pi/2)$ 处，$\mathrm{d}\theta$ 角度内纬带里的元电荷为

$$\mathrm{d}q=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, a\sin\theta\,\sigma(\theta)\,a\,\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\sin\theta\cdot 3\epsilon_0 E_0\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

- 它与极角 $\pi-\theta$ 处的相应元电荷形成元电偶极子
- 两个元电荷距离为 $l=2a\cos\theta$，元电偶极子的偶极矩为

$$\mathrm{d}p=l\,\mathrm{d}q=12\pi a^3\epsilon_0 E_0\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$



总电偶极矩

本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

从而使得结果 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 在 $r\to\infty$ 处出现奇性

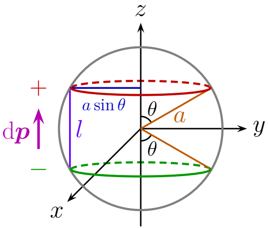
在极角 $\theta\in(0,\pi/2)$ 处，$\mathrm{d}\theta$ 角度内纬带里的元电荷为

$$\mathrm{d}q = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, a\sin\theta\,\sigma(\theta)\,a\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a^2\sin\theta\cdot 3\epsilon_0 E_0\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

它与极角 $\pi-\theta$ 处的相应元电荷形成元电偶极子

两个元电荷距离为 $l = 2a\cos\theta$，元电偶极子的偶极矩为

$$\mathrm{d}p = l\,\mathrm{d}q = 12\pi a^3\epsilon_0 E_0\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$



利用 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta = -\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$

得到沿 z 轴正向的总电偶极矩

$$p = \int\mathrm{d}p = 12\pi a^3\epsilon_0 E_0\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi a^3\epsilon_0 E_0$$

理想电偶极子

- 若 $l \to 0$、$q \to \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是**理想电偶极子**
- 根据**电磁学**，三维空间中一个**理想电偶极子** $\boldsymbol{p}$ 产生的**电势**为 $u_{\text{dipole}} = \dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

理想电偶极子

若 $l \to 0$、$q \to \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是**理想电偶极子**

根据**电磁学**，三维空间中一个**理想电偶极子** $\boldsymbol{p}$ 产生的**电势**为 $u_{\text{dipole}} = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

代入**沿 z 轴正向**的**总电偶极矩** $p = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$，

$$
\begin{aligned}
u_{\text{dipole}} &= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{4\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

与 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中的第二项一致

说明**感应电荷的分布**对于**球外**区域来说等价于一个**理想电偶极子**

理想电偶极子

若 $l \to 0$、$q \to \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是理想电偶极子

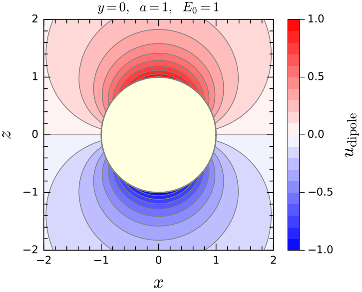
根据电磁学，三维空间中一个理想电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 产生的电势为 $u_{\text{dipole}} = \dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

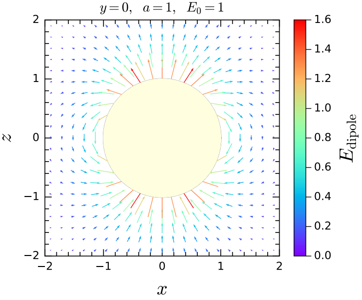
代入沿 z 轴正向的总电偶极矩 $p = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$，

$$
\begin{aligned}
u_{\text{dipole}} &= \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{4\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

与 $u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中的第二项一致

说明感应电荷的分布对于球外区域来说等价于一个理想电偶极子

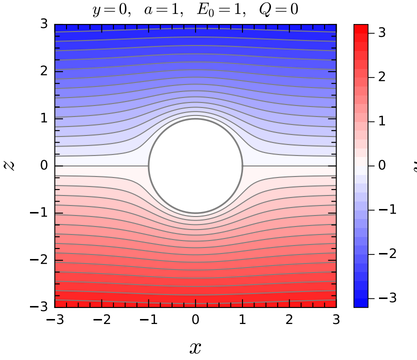


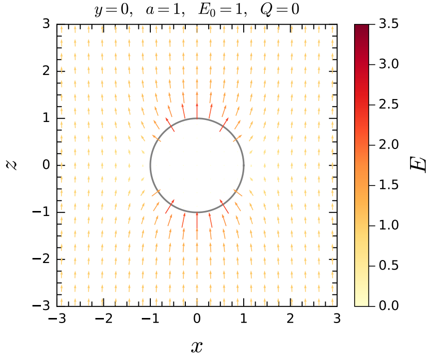


电势分布和电场分布的图像 $(Q=0)$

$$u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta$$

$$E_r = E_0\cos\theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3}\cos\theta, \quad E_\theta = -E_0\sin\theta + \frac{E_0 a^3}{r^3}\sin\theta, \quad E_\phi = 0$$





电势分布和电场分布的图像 $(Q \neq 0)$

$$u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_r = E_0\cos\theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3}\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad E_\theta = -E_0\sin\theta + \frac{E_0 a^3}{r^3}\sin\theta, \quad E_\phi = 0$$