数 学 物 理 方 法

第五章 留数定理及其应用

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 10 月 13 日

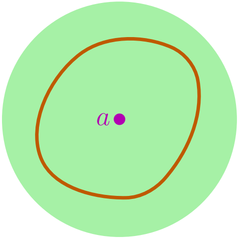
第五章　留数定理及其应用

§1　留数定理

§1.1　留数的定义

☀ 如果函数 $f(z)$ 在**点** a 的**邻域** $K:|z-a|<R$ 内**解析**，**围线** C 全含于 K（包围 a 或不包围 a），则根据 **Cauchy 积分定理**必有 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$

🌧 但如果 a 是**孤立奇点**，即 $f(z)$ 只在 a 的**去心邻域** $K\backslash\{a\}:0<|z-a|<R$ 内**解析**，**围线** C 是 $K\backslash\{a\}$ 中**包围** a 的围线，则**上式不一定成立**，故定义**留数**如下



第五章 留数定理及其应用

§1 留数定理

§1.1 留数的定义

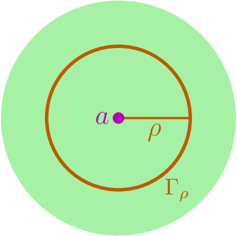
如果函数 $f(z)$ 在点 a 的邻域 $K : |z-a| < R$ 内解析，围线 C 全含于 K（包围 a 或不包围 a），则根据 **Cauchy 积分定理**必有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

但如果 a 是孤立奇点，即 $f(z)$ 只在 a 的去心邻域 $K\backslash\{a\} : 0 < |z-a| < R$ 内解析，围线 C 是 $K\backslash\{a\}$ 中包围 a 的围线，则上式不一定成立，故定义留数如下

留数定义 如果函数 $f(z)$ 以 a 为孤立奇点，即 $f(z)$ 在去心邻域 $K\backslash\{a\} : 0 < |z-a| < R$ 内解析，则积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z, \quad \Gamma_\rho : |z-a| = \rho \quad (0 < \rho < R)$$

称为 $f(z)$ 在点 a 处的留数 (residue)，记作 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$



简记为 $\operatorname{Res} f(a)$，或 $\operatorname{Res}(f, a)$

显然，只要 $0 < \rho < R$，上述积分的数值与 ρ 的大小无关

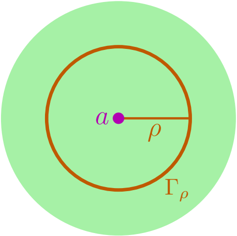
留数与 Laurent 系数

设 $f(z)$ 在 a 处的 **Laurent 展开式**为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

其中 **Laurent 系数**为

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$



令 $n=-1$，得

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z$$

与留数的定义比较，即得

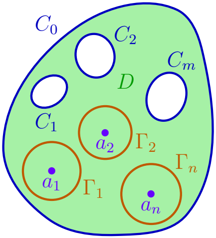
$$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1}$$

由此可知，**可去奇点**处的**留数**为 0

注　有些书上直接用 $\operatorname{Res} f(a) = c_{-1}$ 作为**留数**的定义，这与上页的定义是等价的

§1.2　Cauchy 留数定理

由 Cauchy 积分定理可推出下面关于围线积分的定理



Cauchy 留数定理　设函数 $f(z)$ 在围线或复围线 C 所围成的区域 D 中有孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，此外 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，则有

$$\boxed{\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(a_k)}$$

证明　作 n 个小圆周 $\Gamma_k : |z - a_k| = \rho_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$，使各 Γ_k 及其内部全含于 D，但各 Γ_k 互不相交也互不包含

从而 $f(z)$ 在复围线 $C + \Gamma_1^- + \Gamma_2^- + \cdots + \Gamma_n^-$ 所围成的复通闭域上解析

根据 Cauchy 积分定理和留数的定义，有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(a_k)$$

利用 Cauchy 留数定理，只要算出各孤立奇点处的留数，即可得出围线积分

§2 留数的算法

🏛 计算留数的最一般方法是作 Laurent 展开，求出系数 c_{-1}，即得展开中心的留数

🏟 但作 Laurent 展开往往**太麻烦**，所以希望有一些现成的公式可以用来计算留数

🏢 下面的方法适用于计算极点的留数

♉ **定理（极点的留数）** 设 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]\right\}\bigg|_{z\to a}}$$

§2 留数的算法

- 计算**留数**的最一般方法是作 **Laurent 展开**，求出**系数** c_{-1}，即得**展开中心**的**留数**
- 但作 **Laurent 展开**往往**太麻烦**，所以希望有一些现成的公式可以用来计算**留数**
- 下面的方法适用于计算**极点**的**留数**

定理（极点的留数） 设 a 是 $f(z)$ 的 n **阶极点**，则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}\bigg|_{z\to a}}$$

证明 由于 a 是 $f(z)$ 的 n **阶极点**，故在 a 的**某去心邻域**内有

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

- 其中 $\varphi(z)$ 在 a **点解析**，且 $\varphi(a) \neq 0$，于是

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

- 最后一步用了 **Cauchy 高阶导数公式**，代入 $\varphi(z) = (z-a)^n f(z)$ 得证

单极点和二阶极点计算公式

🏣 由上页**定理**，马上可以得到下面两个推论，它们是常用的计算公式

♊ **推论一（单极点留数第一公式）** 若 a 是 $f(z)$ 的**单极点**，则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = \left.[(z-a)f(z)]\right|_{z\to a}}$$

♋ **推论二（二阶极点留数）** 若 a 是 $f(z)$ 的**二阶极点**，则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = \left.[(z-a)^2 f(z)]'\right|_{z\to a}}$$

单极点和二阶极点计算公式

由上页定理，马上可以得到下面两个推论，它们是常用的计算公式

推论一（单极点留数第一公式） 若 a 是 $f(z)$ 的单极点，则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = [(z-a)f(z)]\big|_{z\to a}}$$

推论二（二阶极点留数） 若 a 是 $f(z)$ 的二阶极点，则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = [(z-a)^2 f(z)]'\big|_{z\to a}}$$

单极点的留数还有另一个计算公式，通常它更方便，把它写成以下定理

定理（单极点留数第二公式） 设 a 是 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的单极点，即 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 均在 a 点解析，且 $\varphi(a) \neq 0$，$\psi(a) = 0$，$\psi'(a) \neq 0$（a 是 $\psi(z)$ 的一阶零点），则

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}}$$

定理的证明

证明 按照 $\operatorname{Res} f(a) = [(z-a)f(z)]\big|_{z\to a}$，利用 $\psi(a)=0$ 等已知条件推出

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(a)}\right]$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{[\psi(z)-\psi(a)]/(z-a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

定理的证明

证明 按照 $\operatorname{Res} f(a) = [(z-a)f(z)]\big|_{z\to a}$，利用 $\psi(a)=0$ 等已知条件推出

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(a)}\right]$$
$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{[\psi(z)-\psi(a)]/(z-a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

以上三条公式就是计算**极点留数**的常用公式

当**极点**的**阶数较高**时，用 $\operatorname{Res} f(a) = \dfrac{1}{(n-1)!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}\bigg|_{z\to a}$ 计算留数**并不方便**

此时不如作 **Laurent 展开**，求出**系数** c_{-1}；对于**本性奇点**，这也是唯一的计算方法

至于**可去奇点**，前已指出，其**留数**为 0

注 作为计算**留数**的手段，作 **Laurent 展开**时只需求出**系数** c_{-1}，其它系数可以不必理会，所以只要把**包含** z^{-1} **的项**找出来就可以了

§3 用留数定理计算围线积分

下面给出几个用**留数定理**计算**围线积分**的例子

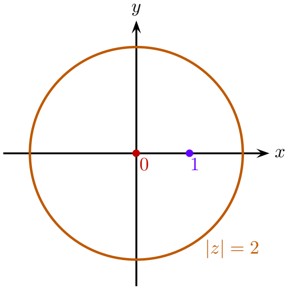
例 1 $I=\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$

解 本题的**被积函数** $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在**圆周** $|z|=2$ 的内部有**一阶极点** $z=0$ 和**二阶极点** $z=1$，则

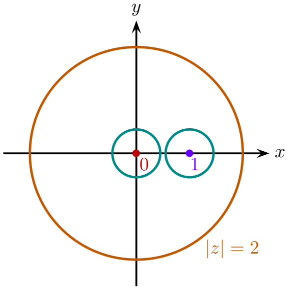
$$\operatorname{Res} f(0)=[zf(z)]\big|_{z\to0}=\frac{1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0}=1$$

$$\operatorname{Res} f(1)=[(z-1)^2f(z)]'\big|_{z\to1}=\left(\frac{1}{z}\right)'\bigg|_{z=1}=-\frac{1}{z^2}\bigg|_{z=1}=-1$$

故 $I=2\pi\mathrm{i}[\operatorname{Res} f(0)+\operatorname{Res} f(1)]=0$



§3 用留数定理计算围线积分



下面给出几个用**留数定理**计算**围线积分**的例子

例 1 $I=\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$

解 本题的**被积函数** $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在**圆周**

$|z|=2$ 的内部有**一阶极点** $z=0$ 和**二阶极点** $z=1$，则

$$\operatorname{Res} f(0)=[zf(z)]\big|_{z\to 0}=\frac{1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0}=1$$

$$\operatorname{Res} f(1)=[(z-1)^2f(z)]'\big|_{z\to 1}=\left(\frac{1}{z}\right)'\bigg|_{z=1}=-\frac{1}{z^2}\bigg|_{z=1}=-1$$

故 $I=2\pi\mathrm{i}[\operatorname{Res} f(0)+\operatorname{Res} f(1)]=0$

注 如果没有留数定理，可以作**两个小圆周**分别包围**一阶极点** $z=0$ 和**二阶极点** $z=1$，根据 **Cauchy 积分定理**，**原积分**等于沿**两个小圆周**的**积分**之和，**它们**可以分别用 **Cauchy 积分公式**和 **Cauchy 高阶导数公式**来计算

例 2

例 2 $I=\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$

解　本题的被积函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在圆周 $|z|=1$ 的内部有一个可去奇点 $z=0$

它在 $z=0$ 处的 **Laurent 展开式没有负幂项**

故 $\operatorname{Res} f(0)=c_{-1}=0$，而 $I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(0)=0$

例 2

例 2 $I=\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$

解 本题的被积函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在圆周 $|z|=1$ 的内部有一个可去奇点 $z=0$

它在 $z=0$ 处的 **Laurent 展开式没有负幂项**

故 $\operatorname{Res} f(0)=c_{-1}=0$，而 $I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(0)=0$

注 本题当然也可以用 **Cauchy 积分公式** $f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$ 来计算

被积函数已经具有公式所要求的形式，故

$$I=2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\sin 0=0$$

例 3

例 3 $I=\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{1/z}\,\mathrm{d}z$

解　本题的被积函数 $f(z)=\mathrm{e}^{1/z}$ 在圆周 $|z|=1$ 的内部有一个本性奇点 $z=0$

它在 $z=0$ 处的 **Laurent 展开式**为

$$f(z)=\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

故 $\operatorname{Res} f(0)=c_{-1}=1$，而 $I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(0)=2\pi\mathrm{i}$

例 3

❤️ **例 3** $I = \displaystyle\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{1/z}\,\mathrm{d}z$

解 本题的被积函数 $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ 在圆周 $|z| = 1$ 的内部有一个本性奇点 $z = 0$

它在 $z = 0$ 处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \mathrm{e}^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

故 $\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = 1$，而 $I = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(0) = 2\pi\mathrm{i}$

注 本题**不能**直接用 Cauchy 积分公式来计算

但可以对被积函数作 Laurent 展开后逐项积分，根据

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1 \end{cases}$$

只有 $1/z$ 项有贡献，结果当然一样

作 Laurent 展开后逐项积分，这也是与留数定理的精神一致的

讨论

- 以前曾经用 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式来计算某些围线积分
- 现在可以直接应用留数定理来计算
- 作为计算围线积分的技术，留数定理包括了 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式作为特殊情况，所以是更一般的方法
- 当然，在逻辑上是先有 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式的

讨论

- 以前曾经用 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式来计算某些围线积分
- 现在可以直接应用留数定理来计算
- 作为计算围线积分的技术，留数定理包括了 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式作为特殊情况，所以是更一般的方法
- 当然，在逻辑上是先有 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式的
- 留数定理把计算围线积分的问题转化为计算围线内各孤立奇点的留数的问题
- 由上节可以看到，计算极点的留数主要涉及微分运算
- 对于本性奇点，必须作 Laurent 展开来计算其留数
- 作 Laurent 展开，通常归结为 Taylor 展开，而计算 Taylor 展开的系数也是微分运算问题
- 所以可以说，留数定理把积分运算转化成了比较容易的微分运算，因此它为积分的计算提供了一项非常有用的技术

§5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分

当然，为了应用留数定理，必须把定积分转化为围线积分

通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射到复平面上围线

其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为 0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决

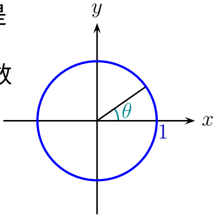
本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法

§5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

- 留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分
- 当然，为了应用留数定理，必须把定积分转化为围线积分
- 通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射到复平面上围线
- 其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为 0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决
- 本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法
- 可以用留数定理来计算的实变函数定积分是五花八门的，其中涉及的技巧也多种多样，不是一朝一夕所能掌握的
- 初学者能掌握几种固定的类型即可，学有余力再涉猎其它
- 对于这些固定的类型，可以导出相应的计算公式
- 了解这些公式的来源固然是必要的，但更重要的是掌握这些公式并能熟练地运用

变量置换

本节讨论的积分具有 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的形式，其中 R 是自变量 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数，即由多项式加减乘除得到的函数

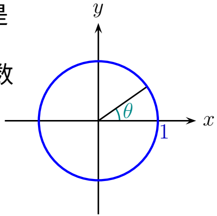


对于这类积分，关键是作变量置换

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

这一变换将 θ 的积分区间 $[0, 2\pi]$ 映射为 z 平面上的单位圆周 $|z| = 1$

变量置换



本节讨论的积分具有 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的形式，其中 R 是**自变量 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$** 的**有理函数**，即由**多项式加减乘除**得到的函数

对于**这类积分**，关键是作**变量置换**

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

这一变换将 θ 的**积分区间** $[0, 2\pi]$ 映射为 z **平面**上的**单位圆周** $|z| = 1$

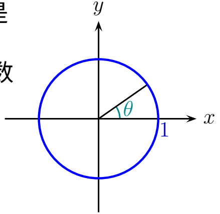
因此，**定积分**就变成了**围线积分**，注意到**指数函数**与**三角函数**之间的关系，有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

右边的**被积函数**是 z 的**有理函数**，所以用**留数定理**不难计算

变量置换

本节讨论的积分具有 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的形式，其中 R 是**自变量** $\cos\theta$ **和** $\sin\theta$ 的**有理函数**，即由**多项式加减乘除**得到的函数



对于**这类积分**，关键是作**变量置换**

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

这一变换将 θ 的**积分区间** $[0, 2\pi]$ 映射为 z **平面**上的**单位圆周** $|z| = 1$

因此，**定积分**就变成了**围线积分**，注意到**指数函数**与**三角函数**之间的关系，有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

右边的**被积函数**是 z 的**有理函数**，所以用**留数定理**不难计算

对于**这一类型的积分**，无需记住具体的公式，只要记得**变量置换** $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 就可以了

另外，如果题目中 θ 的**积分区间**是 $[-\pi, \pi]$，**同一变换**也将其映射为 z **平面**上的**单位圆周** $|z| = 1$，因此**没有必要**刻意将 θ 的积分区间先变换为 $[0, 2\pi]$

例 1

例 1 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+a\cos\theta}$，其中 $-1<a<1$

解 作变量置换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，得

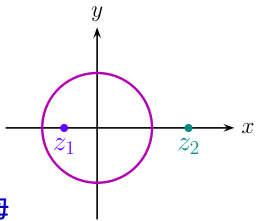
$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+a(z+z^{-1})/2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{2}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{az^2+2z+a}$$

右边已是围线积分，被积函数为有理分式，其奇点就是分母的根，满足 $az^2+2z+a=0$，由一元二次方程的求根公式得到两个根

$$z_1=\frac{-2+\sqrt{4-4a^2}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a},\qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$$

例 1

例 1 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+a\cos\theta}$，其中 $-1<a<1$



解 作**变量置换** $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，得

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+a(z+z^{-1})/2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{2}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{az^2+2z+a}$$

右边已是**围线积分**，被积函数为**有理分式**，其**奇点**就是**分母**的**根**，满足 $az^2+2z+a=0$，由**一元二次方程**的求根公式得到两个根

$$z_1=\frac{-2+\sqrt{4-4a^2}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a},\quad z_2=\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$-1<a<1$ 表明 $|z_2|>1$，由根与系数的关系有 $z_1z_2=1$，故 $|z_1|=\dfrac{1}{|z_2|}<1$

从而，只有 z_1 在**单位圆**内，即对积分有贡献的只有 z_1 的**留数**

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{az^2+2z+a},z_1\right)=\frac{1}{(az^2+2z+a)'}\bigg|_{z=z_1}=\frac{1}{2az_1+2}=\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$$

于是 $I=\dfrac{2}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{az^2+2z+a},z_1\right)=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

例 2

例 2 计算**积分** $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}$，其中 $a>1$

解 本题不需重新作围线积分

由于 $a>1$，故 $0<\frac{1}{a}<1$

利用**例 1** 的结果，有

$$I=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta/a}=\frac{1}{a}\frac{2\pi}{\sqrt{1-1/a^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

§6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

本节讨论的积分具有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，其中 $f(x)$ 通常是**有理分式**

关于这类积分，可以推导出一个计算公式，把它表述为以下定理

定理 设**函数** $f(z)$ 在**上半平面**上有**有限个孤立奇点**，此外它在**上半平面**和**实轴**上**解析**，且当 $z \to \infty$ 时，$zf(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)}$$

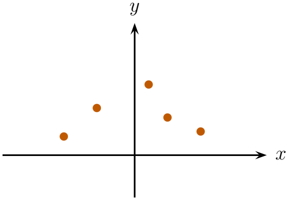
§6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

本节讨论的积分具有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，其中 $f(x)$ 通常是**有理分式**

关于这类积分，可以推导出一个计算公式，把它表述为以下定理

定理 设**函数** $f(z)$ 在**上半平面**上有**有限个孤立奇点**，此外它在**上半平面**和**实轴**上**解析**，且当 $z\to\infty$ 时，$zf(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a_k>0} \operatorname{Res} f(a_k)$$



注 $z\to\infty$ 时 $zf(z)\rightrightarrows 0$（**一致趋于** 0）的大意是 $zf(z)\to 0$ 的**速度与** z **的辐角无关**（在指定的辐角范围内，这里是 $[0,\pi]$）

精确地说，就是 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,R_0>0$ **与** θ **无关**，当 $|z|>R_0$ 时，就有 $|zf(z)|<\varepsilon$

求和号下面的 $\operatorname{Im} a_k>0$ 表示求和只对**上半平面**的**各孤立奇点**进行

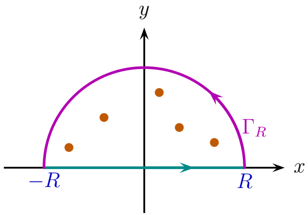
如果 $f(x)$ 是**有理分式**，则易知**分母的多项式次数**应该**至少**比**分子的次数大** 2

定理的证明

证明　作半圆 $\Gamma_R : z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0 \le \theta \le \pi)$，与实轴上的线段 $[-R, R]$ 一起构成围线 C_R，取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内

根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)$$



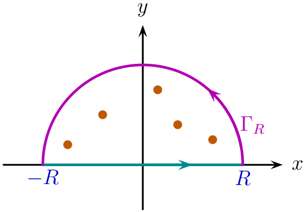
定理的证明

证明 作半圆 $\Gamma_R: z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0 \le \theta \le \pi)$，与实轴上的线段 $[-R, R]$ 一起构成围线 C_R，取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内

根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)$$

由于 $z \to \infty$ 时 $zf(z) \rightrightarrows 0$，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists R_0 > 0$ 与 θ 无关，当 $|z| > R_0$ 时，就有 $|zf(z)| < \varepsilon/\pi$



于是，当 $R > R_0$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\Gamma_R} |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_{\Gamma_R} |f(z)| R\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\Gamma_R} |zf(z)|\,\mathrm{d}\theta < \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \varepsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，对 $\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)$

取 $R \to \infty$ 的极限得证

广义积分的主值

由以上证明可以看出，这样求出的结果是主值 (principal value)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

而不是一般值 $\displaystyle\lim_{R_1\to-\infty,R_2\to+\infty}\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,\mathrm{d}x$

如果一个广义积分（包括无穷积分和瑕积分）的一般值存在，则其主值必定存在且等于一般值

广义积分的主值

由以上证明可以看出，这样求出的结果是主值 (principal value)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

而不是一般值 $\displaystyle\lim_{R_1\to-\infty,R_2\to+\infty}\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,\mathrm{d}x$

如果一个广义积分 (包括无穷积分和瑕积分) 的一般值存在，则其主值必定存在且等于一般值

但主值存在则不足以保证一般值存在

比如，积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 的主值为 0，但一般值不存在：

$$\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-R}^{R}=0,\quad \int_{R_1}^{R_2}\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+R_2^2)-\frac{1}{2}\ln(1+R_1^2)$$

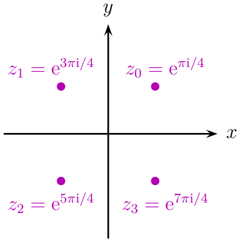
用留数定理导出的关于广义积分的公式，包括本节、下节的公式和本课程没有介绍的情况，它们给出的都是积分的主值

例 1

例 1 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解 取 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$，它满足上述定理的条件，在 z 平面上有四个一阶极点

$$z_k=(-1)^{1/4}=(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}})^{1/4}=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4+k\pi\mathrm{i}/2},\quad k=0,1,2,3$$



其中 z_0 和 z_1 在上半平面

注意到 $z_k^4=-1$，各一阶极点的留数为

$$\operatorname{Res} f(z_k)=\left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z_k}=\frac{1}{4z_k^3}=\frac{z_k}{4z_k^4}=-\frac{z_k}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(z_0)+\operatorname{Res} f(z_1)=-\frac{1}{4}(z_0+z_1)=-\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}+\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}}{4}=-\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{4}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

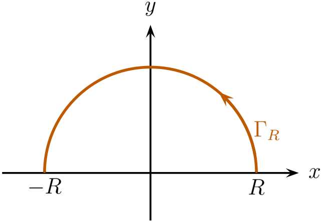
$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}[\operatorname{Res} f(z_0)+\operatorname{Res} f(z_1)]=\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

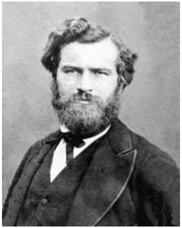
§7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{d}x$

为了计算形如 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{d}x$ 的积分，先介绍下述引理

Jordan 引理 设函数 $f(z)$ 在半圆 $\Gamma_R : z = R\mathrm{e}^{i\theta}\ (0 \le \theta \le \pi)$ 上连续，且当 $R \to \infty$ 时，$f(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{imz}\,\mathrm{d}z = 0 \quad (m > 0)$$





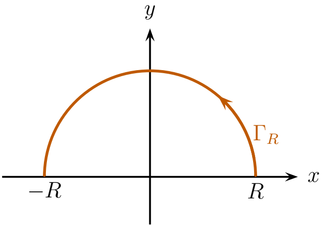
Camille Jordan
(1838–1922)

§7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{d}x$

🚎 为了计算形如 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{d}x$ 的积分，先介绍下述引理

♎ **Jordan 引理** 设函数 $f(z)$ 在半圆 $\Gamma_R: z = R\mathrm{e}^{i\theta}\ (0 \le \theta \le \pi)$ 上连续，且当 $R \to \infty$ 时，$f(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{imz}\,\mathrm{d}z = 0 \quad (m > 0)$$



🚕 证明见选读内容，这里作一点直观的说明

🚙 在上一节计算积分类型 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 时，曾经用到 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ 的结论，其条件是当 $R \to \infty$ 时，$zf(z) \rightrightarrows 0$

🚗 这里看到，Jordan 引理所要求的条件较弱

🚓 主要原因是半圆上的点满足 $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$，使得被积函数中含有因子

$$\mathrm{e}^{imz} = \mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{e}^{imR\cos\theta}$$

讨论

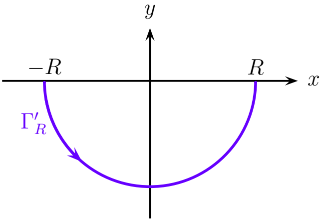
- 由于 $\sin\theta > 0\ (0 < \theta < \pi)$，$e^{-mR\sin\theta}\, e^{imR\cos\theta}$ 中**第一个因子** $e^{-mR\sin\theta}$ 随着 R 的增大**迅速衰减**（$\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两点例外，但对结论没有影响）
- 这**弥补**了 $f(z)$ **下降较慢**的**不足**
- **第二个因子** $e^{imR\cos\theta} = \cos(mR\cos\theta) + i\sin(mR\cos\theta)$ 在半径很大的圆弧上是 θ 的**快速振荡函数**，也有助于积分的收敛，但**第一个因子**起主要作用

讨论

- 由于 $\sin\theta > 0\ (0 < \theta < \pi)$，$\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\cos\theta}$ 中**第一个因子** $\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}$ 随着 R 的增大**迅速衰减**（$\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两点例外，但对结论没有影响）
- 这**弥补**了 $f(z)$ **下降较慢**的**不足**
- **第二个因子** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\cos\theta} = \cos(mR\cos\theta) + \mathrm{i}\sin(mR\cos\theta)$ 在半径很大的圆弧上是 θ 的**快速振荡函数**，也有助于积分的收敛，但**第一个因子**起主要作用
- 由上面分析看出 $m > 0$ 这个条件是**必不可少**的，因为它让**指数函数** $\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}$ 的宗量 $-mR\sin\theta < 0\ (0 < \theta < \pi)$，使得**第一个因子**随着 R 的增大而**衰减**
- 如果假设中的**半圆**改为

$$\Gamma'_R : z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (\pi \le \theta \le 2\pi)$$

- 而 $\sin\theta < 0\ (\pi < \theta < 2\pi)$
- 则 **Jordan 引理**对 $m < 0$ 才成立



定理

有了 Jordan 引理，就很容易推导出下面的公式，把它表述成定理

定理 设函数 $f(z)$ 在上半平面上有有限个孤立奇点，此外它在上半平面和实轴上解析，且当 $z \to \infty$ 时，$f(z) \rightrightarrows 0$，则

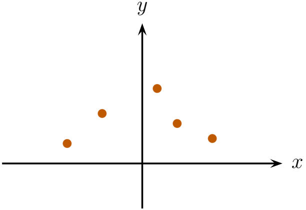
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\,a_k>0} \mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{imz}, a_k], \quad m > 0$$

注 这里求和也只对上半平面的各孤立奇点进行

注意这里的条件“当 $z \to \infty$ 时，$f(z) \rightrightarrows 0$”比上节的相应条件弱

如果 $f(x)$ 是有理分式，则易知分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 1

应特别注意公式成立的条件是 $m > 0$



🚋 如果 $m<0$，可作**变量置换** $x'=-x$，将积分化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx'}\,(-\mathrm{d}x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}|m|x}\,\mathrm{d}x$$

🚃 此时如果 $f(-z)$ 也满足**定理**的条件，就能应用**定理**

🚞 所以 $m>0$ 这一条件并不构成本质的限制

定理的证明

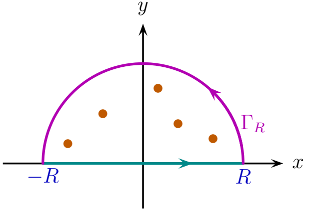
如果 $m<0$，可作**变量置换** $x'=-x$，将积分化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^{-\infty} f(-x')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx'}\,(-\mathrm{d}x')=\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}|m|x}\,\mathrm{d}x$$

此时如果 $f(-z)$ 也满足**定理**的条件，就能应用**定理**

所以 $m>0$ 这一条件并不构成本质的限制

证明 作**半圆** $\Gamma_R: z=R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0\le\theta\le\pi)$，与**实轴**上的**线段** $[-R,R]$ 一起构成**围线** C_R，取 R **充分大**以使 $f(z)$ 在**上半平面**的**孤立奇点**全落在 C_R 内



根据 **Cauchy 留数定理**，有

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k]$$

取 $R\to\infty$ 的**极限**，由 **Jordan 引理**，**半圆**上的**积分**为 0，**证毕**

例 1

例 1 计算积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$，其中 $m>0$

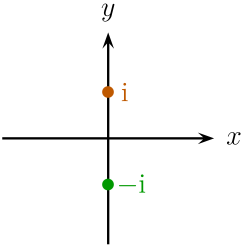
解 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}=\cos mx+\mathrm{i}\sin mx$ 中，$\cos mx$ 和 $\sin mx$ 分别是 x 的**偶函数**和**奇函数**，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

取 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$，它满足**上述定理**的条件，在**上半平面**只有一个**一阶极点** $z=\mathrm{i}$

$z=\mathrm{i}$ 处的**相关留数**为

$$\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\mathrm{i}]=\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=\mathrm{i}}=\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-m}}{2\mathrm{i}}$$



故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\mathrm{i}]=\pi\mathrm{e}^{-m}$

于是 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-m}$

例 2

例 2 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $a>0$，$m\in\mathbb{R}$ 且 $m\neq 0$

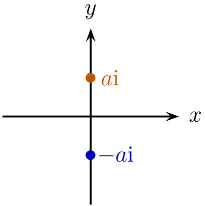
解 先考虑 $m>0$，有

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

取 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+a^2}$，它满足**上述定理**条件，在**上半平面**只有一个**一阶极点** $z=a\mathrm{i}$

$z=a\mathrm{i}$ 处**相关留数**为 $\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a\mathrm{i}]=\left.\dfrac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{(z^2+a^2)'}\right|_{z=a\mathrm{i}}=\left.\dfrac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{2z}\right|_{z=a\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-ma}}{2}$

故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a\mathrm{i}]=\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-ma}$



于是 $I=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-ma}$

$m < 0$ 的情况

当 $m < 0$ 时，有 $m = -|m|$，可利用以上 $m > 0$ 时的**结果**，得

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} \frac{x \sin |m| x}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \, \mathrm{e}^{-|m|a} = -\frac{\pi}{2} \, \mathrm{e}^{ma}$$