

数学物理方法

第七章 分离变量法

第 4 节和第 5 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期: 2024 年 8 月 24 日



§4 矩形区域上的稳定场方程

前面几节研究了一维波动或热传导方程定解问题的求解，它们都涉及两个自变量

平面上的稳定场方程定解问题也涉及两个自变量，因此与上述问题相似

但稳定场方程的定解问题只有边界条件，没有初始条件，其解法有一些不同之处

本节求解矩形区域上的两个稳定场问题，以加深对

分离变量法的了解

矩形区域是平面上最简单的区域

下面先讨论矩形区域上的 Laplace 方程定解问题



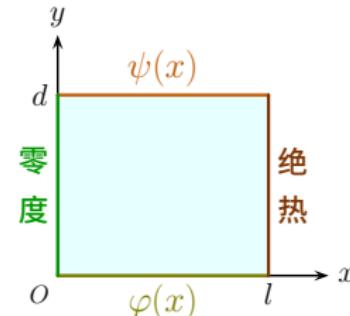
Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

矩形区域上 Laplace 方程的定解问题



考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布 $u(x, y)$ 的问题。



矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知



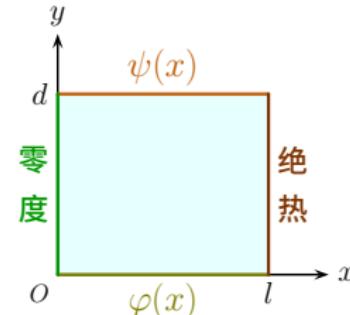
那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到

矩形区域上 Laplace 方程的定解问题



考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布 $u(x, y)$ 的问题。



矩形薄板一边保持零度, 一边绝热, 另外两边的温度分布已知



那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到。



现在尝试寻找 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ 形式的特解，将它代入 Laplace 方程，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)$$



$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ ，左边与 y 无关，右边与 x 无关，必为常数，记作 $-\lambda$

本征值问题

由此得到两个方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

本征值问题

由此得到两个方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

1 如果 $\lambda < 0$ ，令 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中 C 、 D 是任意常数，有 $C = X(0) = 0$

从而 $X'(l) = \mu D \cosh \mu l = 0$ ，但 $\cosh \mu l \geq 1$ 且 $\mu > 0$ ，故 $D = 0$

于是得到平庸解 $X(x) \equiv 0$ ，因而 $\lambda < 0$ 不是本征值

本征值问题

由此得到两个方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = X'(0)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

1 如果 $\lambda < 0$ ，令 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中 C 、 D 是任意常数, 有 $C = X(0) = 0$

从而 $X'(l) = \mu D \cosh \mu l = 0$ ，但 $\cosh \mu l \geq 1$ 且 $\mu > 0$ ，故 $D = 0$

于是得到平庸解 $X(x) \equiv 0$ ，因而 $\lambda < 0$ 不是本征值

2 如果 $\lambda = 0$ ，则解为 $X(x) = Cx + D$ ，其中 C, D 是任意常数

有 $D = X(0) = 0$, $C = X'(l) = 0$, 得到平庸解 $X(x) \equiv 0$, $\lambda = 0$ 不是本征值

本征值和本征函数

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中 C 、 D 是任意常数，有 $C = X(0) = 0$ ，从而 $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

为了得到**非平庸解**, 必须使 $\cos \mu l = 0$, 如此则 D 可任意

本征值和本征函数

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中 C 、 D 是任意常数, 有 $C = X(0) = 0$, 从而 $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos \mu l = 0$ ，如此则 D 可任意

因此 $\cos \mu l = 0$ 是决定本征值的方程, 它的解为 $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

从而 $\mu_n l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 是余弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取 $D = 1$

本征值和本征函数

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中 C 、 D 是任意常数, 有 $C = X(0) = 0$, 从而 $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

为了得到非平庸解, 必须使 $\cos \mu l = 0$, 如此则 D 可任意

因此 $\cos \mu l = 0$ 是决定本征值的方程, 它的解为 $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

从而 $\mu_n l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 是余弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取 $D = 1$

注 如果将上面的 μ_n 写成 $\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$ ，则应该取 $n \in \mathbb{N}$

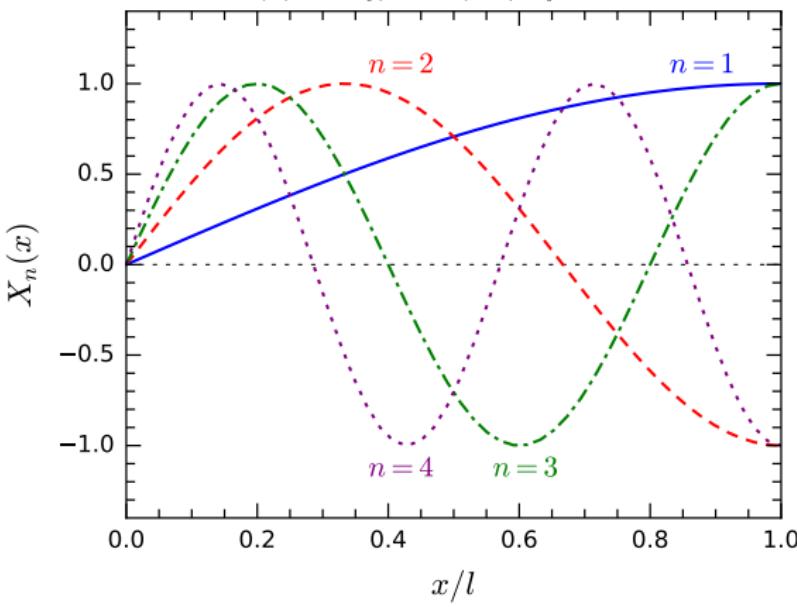
求出本征函数后，最好验证它是否确实满足**边界条件**，避免计算错误或抄写错误

比如, 这里如果将本征函数误写成 $\cos \mu_n x$, 则通过上述验证可以立即发现错误

本征函数图像

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$X_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2l], \quad n \in \mathbb{N}^+$$



求解 $Y(y)$

这里本征函数族 $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, l]$ 上的正交完备性由 **Strum-Liouville 本征值问题的一般结论** (第十章 §5) 得到保证

正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

求解 $Y(y)$

这里本征函数族 $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, l]$ 上的正交完备性由 **Strum-Liouville 本征值问题的一般结论** (第十章 §5) 得到保证

正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

将本征值 $\lambda_n = \mu_n^2$ 代入 $Y(y)$ 满足的方程, 得 $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$

它的两个线性独立解可以取为 $\{\exp(\mu_n y), \exp(-\mu_n y)\}$

因 $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, 也可取为 $\{\cosh \mu_n y, \sinh \mu_n y\}$

求解 $Y(y)$

这里本征函数族 $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, l]$ 上的正交完备性由 **Strum-Liouville 本征值问题的一般结论** (第十章 §5) 得到保证

正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

将本征值 $\lambda_n = \mu_n^2$ 代入 $Y(y)$ 满足的方程, 得 $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$

它的两个线性独立解可以取为 $\{\exp(\mu_n y), \exp(-\mu_n y)\}$

因 $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, 也可取为 $\{\cosh \mu_n y, \sinh \mu_n y\}$

由双曲函数减法公式得 $\sinh[\mu_n(d - y)] = \sinh \mu_n d \cosh \mu_n y - \cosh \mu_n d \sinh \mu_n y$

为了下面计算方便, 将**两个线性独立解**等价地取为 $\{\sinh[\mu_n(d-y)], \sinh \mu_n y\}$

从而将方程 $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$ 的通解写作

$$Y_n(y) = A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad A_n \text{ 和 } B_n \text{ 是任意常数}$$

定解问题的解

于是，满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y\} \sin \mu_n x$$

 将上式代入 y 方向的两个边界条件，得

$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \psi(x)$$

定解问题的解

于是，满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y\} \sin \mu_n x$$

将上式代入 y 方向的两个边界条件, 得

$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \psi(x)$$

由于本征函数族的正交完备性，适当的系数 A_n 和 B_n 可使以上两式成立

利用 $\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}$ ，推出

$$A_n = \frac{2}{l \sinh \mu_n d} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_n x \, dx, \quad B_n = \frac{2}{l \sinh \mu_n d} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_n x \, dx$$

给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的形式, 可以求得系数 A_n 和 B_n

将它们代回一般解，就得到定解问题的解

讨论

- 🟡 在上述**稳定场方程**定解问题中，**一部分边界条件 (齐次)** 用于构成**本征值问题**
- 🟡 **另一部分边界条件** (齐次或非齐次) 用于确定**一般解**中的**系数**
- 🟡 这是与**波动**或**热传导**问题的不同之处，后两者用**初始条件**确定**系数**
- 🟡 所以，就 **Laplace 方程**而言，**不必要求所有的边界条件都是齐次的**
- 🔴 否则就只有**平庸解**了

矩形区域上 Poisson 方程的定解问题



下面再考虑全部边界条件都非齐次的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = \mu(y), \quad u|_{x=l} = \nu(y) & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

方法一 对于这一定解问题, 可令

$$u(x, y) = v(x, y) + u_0(x, y)$$

并取 $u_0(x, y) = \mu(y) + \frac{x}{l}[\nu(y) - \mu(y)]$

从而 $v(x, y)$ 在 $x = 0$ 和 $x = l$ 处满足齐次的边界条件

虽然方程仍是非齐次的, 但可以用本征函数展开法求解



Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

分为两个定解问题

方法二 由于稳定场方程的所有定解条件都是边界条件，更简单的方法是令 $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ ，将上述定解问题化为两个问题来求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u_2|_{x=0} = \mu(y), \quad u_2|_{x=l} = \nu(y) & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=d} = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



$u_1(x, y)$ 的定解问题可以用本征函数展开法求解



$u_2(x, y)$ 的定解问题可以直接用分离变量法求出一般解，再用边界条件确定系数

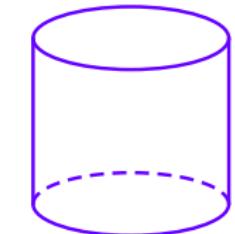
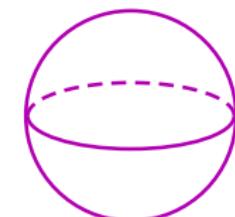
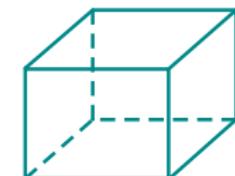
§5 平面极坐标系中的稳定场方程

分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题

分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状

在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域

它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面



§5 平面极坐标系中的稳定场方程

分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题

分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状

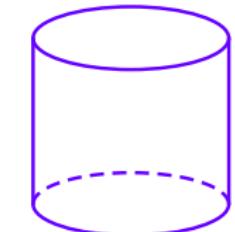
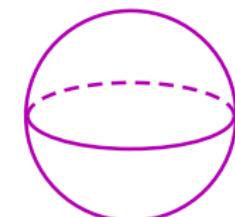
在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域

它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面

根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系

比如，对球形区域上的定解问题，就应该采用球坐标系

如果采用直角坐标系，则无法对边界条件分离变量



§5 平面极坐标系中的稳定场方程

分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题

分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状

在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域

它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面

根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系

比如，对球形区域上的定解问题，就应该采用球坐标系

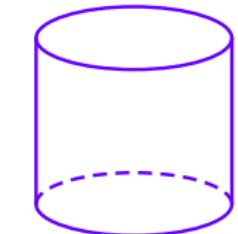
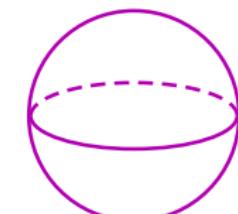
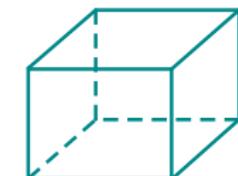
如果采用直角坐标系，则无法对边界条件分离变量

分离变量成功之后，需要求解常微分方程及其本征值问题

前面几节遇到的常微分方程的解都是初等函数，较容易处理

然而，在更多问题中，出现的微分方程不是我们所熟悉的，其解并不是初等函数

即使是弦振动问题，如果弦的线密度不是常数，那么本征值问题就困难得多



平面极坐标系

- 对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂
- 如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究
- 所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解
- 后面将对一些特殊函数作系统的介绍

平面极坐标系

对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂

如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究

所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解

后面将对一些特殊函数作系统的介绍

对于**平面区域**上的问题，如果边界涉及**圆弧**，比如**圆内**、**圆外**或**扇形区域**上的定解问题，那么显然应该采用**平面极坐标系**

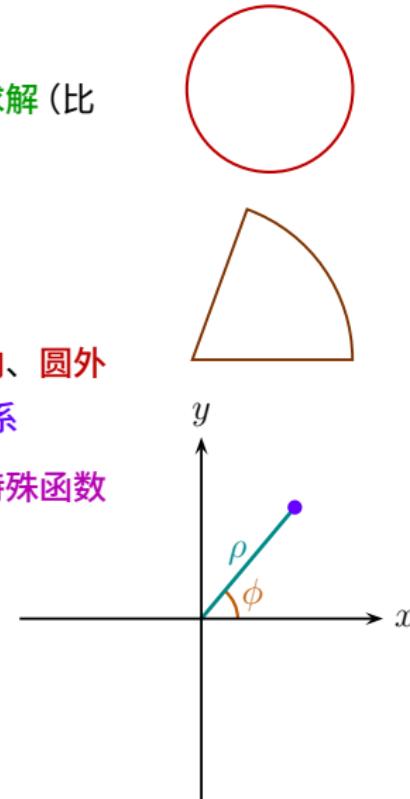
在**平面极坐标系**中求解**波动**或**热传导**方程，也会涉及**特殊函数**

但**稳定场方程**的求解则只需用到**初等函数**

这可能是**曲线坐标系中最简单**的问题了

这一问题涉及**两个自变量** ρ 和 ϕ ，与前面几节类似

但**边界条件完全不同**，方程的形式也有新的特点



§5.1 一般解



在平面极坐标系中, Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 通过坐标变换 $x = \rho \cos \phi$ 和 $y = \rho \sin \phi$ 得到

这种方法思路简单, 但计算较为繁琐, 在第九章中将会介绍其它方法

§5.1 一般解



在平面极坐标系中, Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 通过坐标变换 $x = \rho \cos \phi$ 和 $y = \rho \sin \phi$ 得到

这种方法思路简单, 但计算较为繁琐, 在第九章中将会介绍其它方法

这里暂时不给定定解条件, 先求 Laplace 方程的一般解

接下来的求解假定 ϕ 的取值不受限制, 因此下面得到的一般解不适用于扇形区域

现在尝试寻找形式为 $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 的特解, 将它代入 Laplace 方程, 有

$$0 = \nabla^2 u = R''(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)\Phi''(\phi)$$

整理得 $\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} \equiv \lambda$, 其中 λ 是常数

自然的周期性边界条件

从而得到两个方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ 和 $\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0$

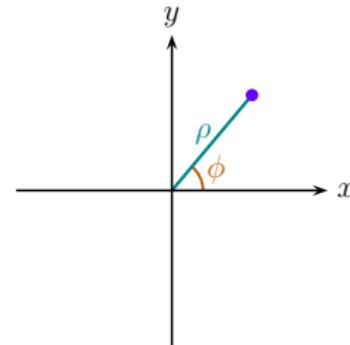
在直角坐标系中，坐标与几何点是一一对应的，但曲线坐标系却往往不是这样

在平面极坐标系中，坐标 (ρ, ϕ) 与 $(\rho, \phi + 2\pi)$ 代表同一个几何点

一个物理量在一个确定的几何点应该具有确定的取值

这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$



自然的周期性边界条件

从而得到两个方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ 和 $\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0$

在直角坐标系中，坐标与几何点是一一对应的，但曲线坐标系却往往不是这样

在平面极坐标系中，坐标 (ρ, ϕ) 与 $(\rho, \phi + 2\pi)$ 代表同一个几何点

一个物理量在一个确定的几何点应该具有确定的取值

这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$

将 $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 代入，得 $R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\phi)$

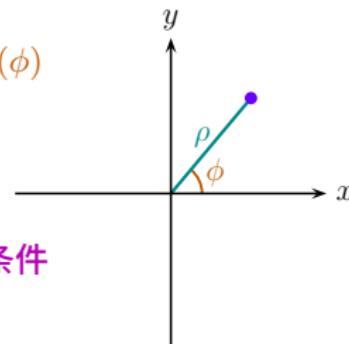
但 $R(\rho)$ 不恒为零，故

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

这是由物理量的单值性和曲线坐标的特性导出的一个边界条件

它是一种自然边界条件，自然边界条件还有其它形式

同时，它也是一种周期性边界条件



求解本征值问题

🌴 现在求解 $\Phi(\phi)$ 满足的本征值问题 $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

1 如果 $\lambda < 0$ ，令 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$

⌚ 其中 C 、 D 是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi} + De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi} = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$$

👉 $C(e^{2\pi\mu} - 1)e^{\mu\phi} + D(e^{-2\pi\mu} - 1)e^{-\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= \mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm\mu\phi})'' &= \mu^2e^{\pm\mu\phi} \end{aligned}$$

⌚ 上式必须对所有 ϕ 值成立，故 $C(e^{2\pi\mu} - 1) = 0$ ，且 $D(e^{-2\pi\mu} - 1) = 0$

🍉 但 $\mu > 0$ ，有 $e^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$ ，从而 $C = D = 0$

🍍 于是得到平庸解 $\Phi(\phi) \equiv 0$ ，因而 $\lambda < 0$ 不是本征值

求解本征值问题

🌴 现在求解 $\Phi(\phi)$ 满足的本征值问题 $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

1 如果 $\lambda < 0$ ，令 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$

🥝 其中 C 、 D 是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi} + De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi} = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$$

👉 $C(e^{2\pi\mu} - 1)e^{\mu\phi} + D(e^{-2\pi\mu} - 1)e^{-\mu\phi} = 0$

$$\Phi''(\phi) = \mu^2\Phi(\phi)$$

$$(e^{\pm\mu\phi})'' = \mu^2 e^{\pm\mu\phi}$$

🥝 上式必须对所有 ϕ 值成立，故 $C(e^{2\pi\mu} - 1) = 0$ ，且 $D(e^{-2\pi\mu} - 1) = 0$

🍉 但 $\mu > 0$ ，有 $e^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$ ，从而 $C = D = 0$

🍍 于是得到平庸解 $\Phi(\phi) \equiv 0$ ，因而 $\lambda < 0$ 不是本征值

2 如果 $\lambda = 0$ ，则解为 $\Phi(x) = C + D\phi$ ，其中 C 、 D 是任意常数

🍋 代入周期性边界条件，得 $C + D(\phi + 2\pi) = C + D\phi$ ，即 $2\pi D = 0$

🍊 故 $D = 0$ ，而 C 可任意，求得本征值 $\lambda_0 = 0$ ，本征函数 $\Phi_0(\phi) = 1$

🥭 注意这个解不能遗漏，否则本征函数族将是不完备的

继续求解本征值问题

继续求解 $\Phi(\phi)$ 满足的本征值问题 $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$

其中 C 、 D 是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$Ce^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + De^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

👉 $C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm i\mu\phi})'' &= -\mu^2 e^{\pm i\mu\phi} \end{aligned}$$

上式必须对所有 ϕ 值成立，故 $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$ ，且 $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$

后面一式两边乘以 $-e^{2i\pi\mu}$ ，得 $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

继续求解本征值问题

继续求解 $\Phi(\phi)$ 满足的本征值问题 $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$

其中 C 、 D 是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$Ce^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + De^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

👉 $C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2 \Phi(\phi) \\ (e^{\pm i\mu\phi})'' &= -\mu^2 e^{\pm i\mu\phi} \end{aligned}$$

苹果 上式必须对所有 ϕ 值成立，故 $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$ ，且 $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$

苹果 后面一式两边乘以 $-e^{2i\pi\mu}$ ，得 $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

香蕉 如果 $e^{2i\pi\mu} - 1 \neq 0$ ，则 $C = D = 0$ ，只得到平庸解

桃子 为得到非平庸解，须要求 $e^{2i\pi\mu} = 1$ ，而 C 、 D 均可任意

草莓 因此 $e^{2i\pi\mu} = 1$ 是决定本征值的方程，它的解为 $\mu = m$ ($m \in \mathbb{N}^+$)

葡萄 得到本征值 $\lambda_m = m^2$ 和本征函数 $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ ，其中 $m \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \cos m\phi &= \frac{e^{im\phi} + e^{-im\phi}}{2} \\ \sin m\phi &= \frac{e^{im\phi} - e^{-im\phi}}{2i} \end{aligned}$$

简并

 现在, 本征值 $\lambda_m = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^+$) 对应于两个独立的本征函数 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$

 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

 独立本征函数的个数称为简并度, 这里简并度为 2

简并

 现在, 本征值 $\lambda_m = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^+$) 对应于两个独立的本征函数 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$

 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

 独立本征函数的个数称为简并度, 这里简并度为 2

 注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时, 也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数, 结果是一样的

 但容易发现, 在目前的周期性边界条件下, 用指数形式更加方便

简并

 现在, 本征值 $\lambda_m = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^+$) 对应于两个独立的本征函数 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$

 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

 独立本征函数的个数称为简并度, 这里简并度为 2

 注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时, 也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数, 结果是一样的

 但容易发现, 在目前的周期性边界条件下, 用指数形式更加方便

 如果对 $\lambda_m = m^2$ 和 $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ 取 $m = 0$, 会得到 $\lambda_0 = 0$ 和 $\Phi_0(\phi) = \{1, 0\}$, 忽略平庸解 $\Phi(\phi) \equiv 0$, 则与第 2 种情况结果相同

 因此, 可以把所有的本征值和本征函数统一写成

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

 但是应该注意, 在上面的求解中, $m = 0$ 和 $m \neq 0$ 两种情况需要分开讨论

 而且 $m = 0$ 时简并度为 1, $m \neq 0$ 时简并度为 2

 这组本征函数族正是标准 Fourier 展开的基, 在区间 $[0, 2\pi]$ 上是正交完备的

求解 $R(\rho)$

🌵 将本征值 $\lambda_m = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) 代入 $R(\rho)$ 的常微分方程, 得

$$\rho^2 R''_m(\rho) + \rho R'_m(\rho) - m^2 R_m(\rho) = 0$$

🌿 这是高等数学课上学过的 Euler 方程, 特点是每一项中自变量的幂次与未知函数导数的阶相同

🥦 它虽然不是常系数的微分方程, 但很容易求解

藠头 令 $\rho = e^t$, 则 $t = \ln \rho$, $\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\rho}$, 有 $\rho \frac{dR_m}{d\rho} = \rho \frac{dt}{d\rho} \frac{dR_m}{dt} = \frac{dR_m}{dt}$, 故

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m}{d\rho} = \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR_m}{dt} \right) = \rho \frac{dt}{d\rho} \frac{d}{dt} \frac{dR_m}{dt} = \frac{d^2 R_m}{dt^2}$$

藠头 从而将 R_m 的方程化为常系数微分方程 $\frac{d^2 R_m}{dt^2} - m^2 R_m = 0$, 它的解是

$$R_m = \{e^{mt}, e^{-mt}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0 = \{1, t\} \quad (m = 0)$$



Leonhard Euler
(1707–1783)

一般解

根据 $\rho = e^t$ 将解中的自变量变换回 ρ ，得

$$R_m(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0(\rho) = \{1, \ln \rho\} \quad (m = 0)$$

再结合

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

推出 Laplace 方程 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ 的一般解为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

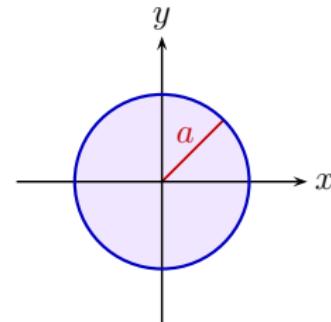
其中系数 A_m 和 B_m ($m \in \mathbb{N}$) 是常数，可以通过边界条件确定

§5.2 用边界条件确定系数



考虑圆内的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



其中 a 是圆的半径

物理量应该取有限值，而一般解中的 $\ln \rho$ 和 ρ^{-m} 在 $\rho = 0$ 处有奇性，应该舍弃

故 $B_0 = 0$, $C_m = D_m = 0$ ($m \in \mathbb{N}^+$)

从而一般解简化为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

这里为了下面计算方便，用 $\left(\frac{\rho}{a} \right)^m$ 代替原来的 ρ^m

圆内问题的解

将解式代入边界条件 $u|_{\rho=a} = F(\phi)$ ，得

$$u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) = F(\phi)$$

由于本征函数族的完备性，只要适当选取系数，上式总可以得到满足

本征函数族具有正交性，体现为

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos n\phi \, d\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin n\phi \, d\phi = \pi \delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

由此得到

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \, d\phi, \quad A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi \, d\phi, \quad B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi \, d\phi$$

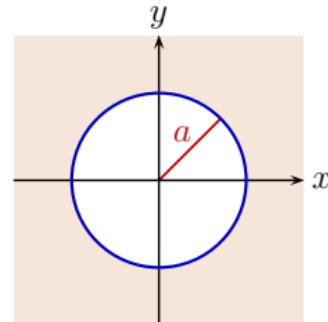
给定 $F(\phi)$ 的具体形式，计算上述积分，再将系数代回去，就得到圆内问题的解

圆外问题



类似地, 考虑圆外的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$



由于一般解中的 $\ln \rho$ 和 ρ^m 在 $\rho \rightarrow \infty$ 处有奇性

应该舍弃相应的项, 故 $B_0 = 0$, $A_m = B_m = 0$ ($m \in \mathbb{N}^+$)

从而一般解简化为 $u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$

由边界条件得 $u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) = G(\phi)$, 定出系数为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) d\phi, \quad C_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad D_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) \sin m\phi d\phi$$

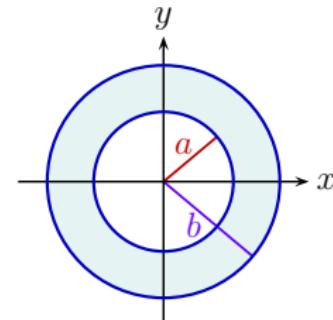
其它情况

如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

比如**环域** $a < \rho < b$ 上的定解问题，则**一般解**

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

中的**各项均必须保留**



其它情况

如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

比如**环域** $a < \rho < b$ 上的定解问题，则**一般解**

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

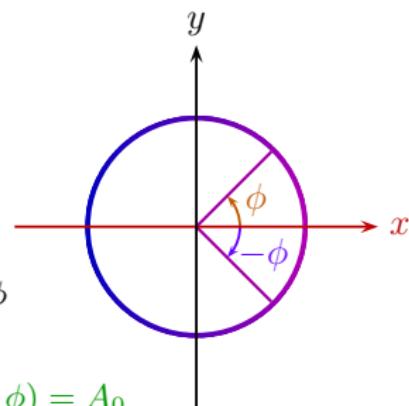
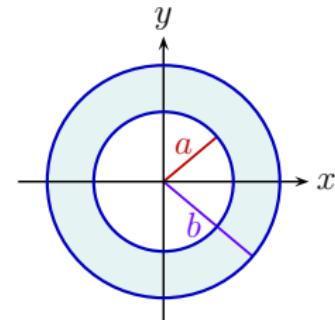
中的**各项均必须保留**

不过，如果问题的**边界条件对 x 轴具有反射对称性**

则可以推知 $u(\rho, -\phi) = u(\rho, \phi)$ ，一般解**简化为**

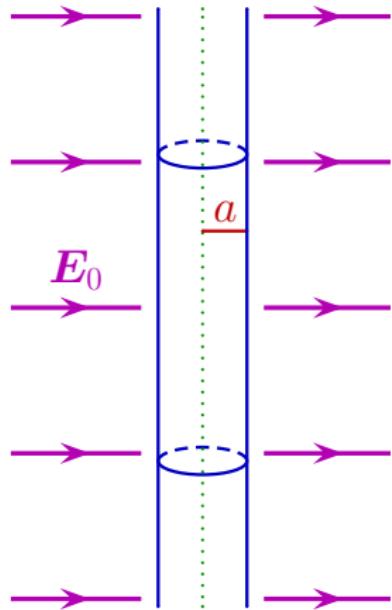
$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

在全平面上满足 **Laplace 方程** 的解则只能是**常数**， $u(\rho, \phi) = A_0$



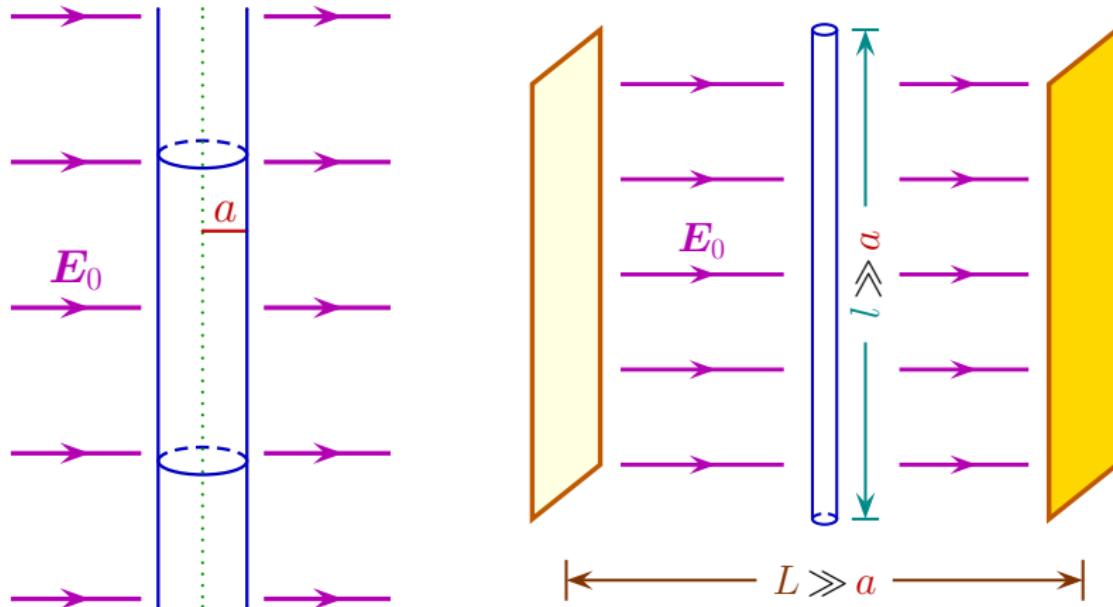
§5.3 均匀电场中的导体圆柱

工程师 考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a ，不带电，置于均匀外电场 E_0 中， E_0 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



§5.3 均匀电场中的导体圆柱

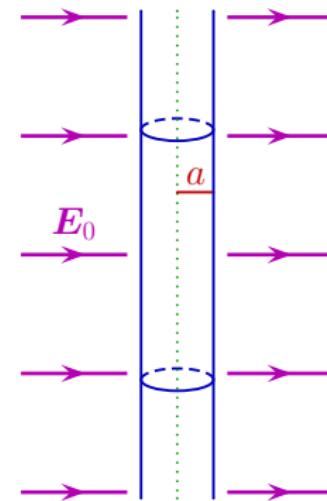
考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a ，不带电，置于均匀外电场 E_0 中， E_0 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



分析

考慮一个无限长圆柱导体，半径为 a ，不带电，置于均匀外电场 E_0 中， E_0 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力



分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a ，不带电，置于均匀外电场 E_0 中， E_0 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

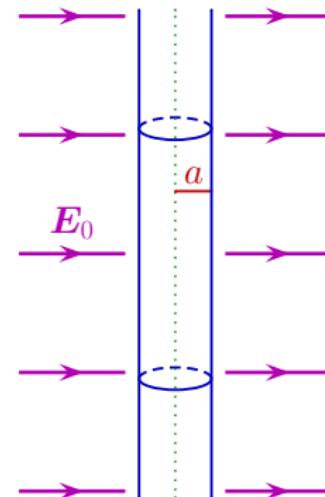
这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

1 第一步 物理分析

当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即 $u = 0$ ($\rho \leq a$)

注 由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是不合适的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势



分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a ，不带电，置于均匀外电场 E_0 中， E_0 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

1 第一步 物理分析

当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即 $u = 0$ ($\rho \leq a$)

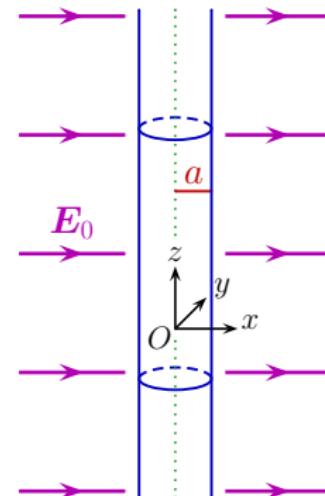
注 由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是不合适的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

2 第二步 建立坐标系

取柱轴为 z 轴，任取柱轴上一点为原点 O ，又取电场 E_0 的方向为 x 轴方向

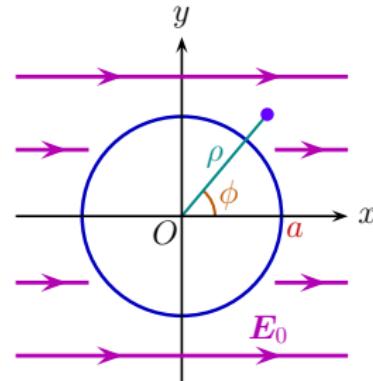
由于所有条件不随 z 变化，任何垂直于 z 轴的平面上的电势分布都是相同的

不妨选 Oxy 平面为代表来研究，故本题是二维稳定场问题



定解问题

鉴于**边界的形状**，只能采用**极坐标系** (ρ, ϕ)



定解问题

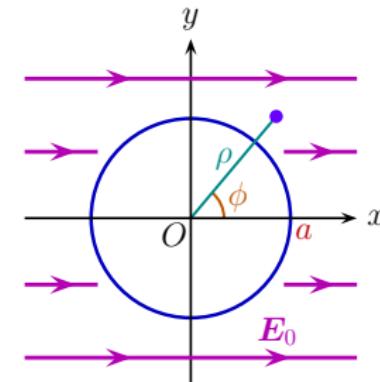
鉴于边界的形状, 只能采用极坐标系 (ρ, ϕ)

3 第三步 建立定解问题

柱外没有电荷, 电势 $u(\rho, \phi)$ 满足 Laplace 方程

本题有两个边界, 即柱面(圆周)和无穷远处

柱面的电势已取为零



定解问题

鉴于边界的形状，只能采用极坐标系 (ρ, ϕ)

3 第三步 建立定解问题

柱外没有电荷，电势 $u(\rho, \phi)$ 满足 Laplace 方程

本题有两个边界，即柱面（圆周）和无穷远处

柱面的电势已取为零

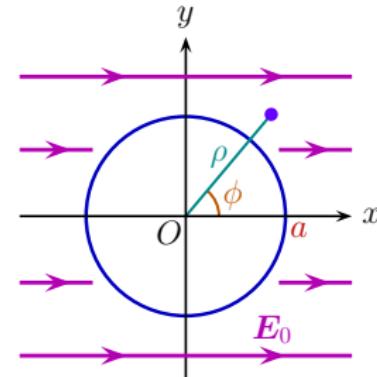
至于无穷远处， $\rho \gg a$ ， $a \rightarrow 0$ ，而原均匀电场应

基本不受影响，有 $E_0 e_x = E_0 = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial x} e_x$ ，故电势为

$$u = - \int E_0 dx = u_0 - E_0 x = u_0 - E_0 \rho \cos \phi$$

因为电势零点已经取在柱面上，所以常数 u_0 不能任取，需要通过求解来确定

于是列出定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$


求解定解问题

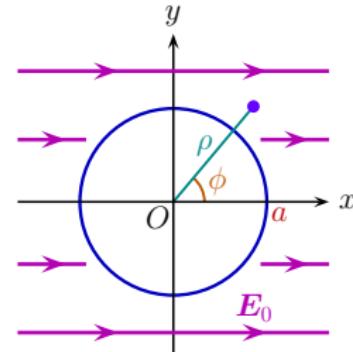
$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$

4 第四步 求解定解问题

警官 **Laplace 方程和边界条件都在 $\phi \rightarrow -\phi$ 变换下不变**

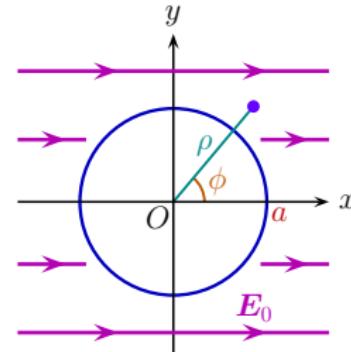
警车 因此本题具有对 x 轴的反射对称性, 如前所述, 一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$



求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$



4 第四步 求解定解问题

警笛 Laplace 方程和边界条件都在 $\phi \rightarrow -\phi$ 变换下不变

因此本题具有对 x 轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

校车 代入无穷远处的边界条件，得

$$u|_{\rho \rightarrow \infty} = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \rho^m \cos m\phi = u_0 - E_0 \rho \cos \phi$$

校车 比较两边，推出 $A_0 = u_0$, $B_0 = 0$, $A_1 = -E_0$, $A_m = 0$ ($m > 1$)

定解问题的解

从而得到 $u(\rho, \phi) = u_0 - E_0 \rho \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-m} \cos m\phi$

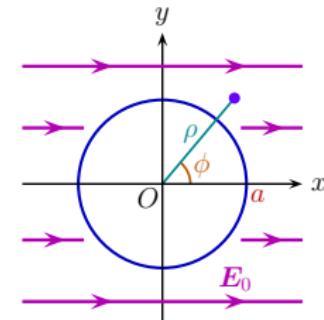
再代入柱面的边界条件，有

$$\supset \frac{C_1}{a} \cos \phi$$

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m} \cos m\phi = 0$$

比较两边，推出 $u_0 = 0, C_1 = E_0 a^2, C_m = 0 (m > 1)$

最终得到定解问题的解为 $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$



定解问题的解

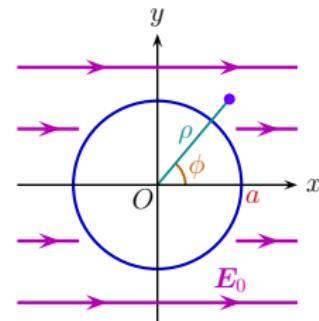
从而得到 $u(\rho, \phi) = u_0 - E_0 \rho \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-m} \cos m\phi$

再代入柱面的边界条件，有

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m} \cos m\phi = 0 \quad \supset \frac{C_1}{a} \cos \phi$$

比较两边，推出 $u_0 = 0, C_1 = E_0 a^2, C_m = 0 (m > 1)$

最终得到定解问题的解为 $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$



5 第五步 结果分析

解式中第一项是原均匀电场的电势，第二项是由柱面上的感应面电荷产生的

本题的求解区域是圆外 $\rho > a$ ，即无穷远点的邻域，但电势的求解结果中第一项在 $\rho \rightarrow \infty$ 处有奇性，因为均匀电场是由无穷远处的源产生的

求解区域存在电荷，因而前面得出的圆外的解不包含 ρ^m 和 $\ln \rho$ 项的结论不成立

不过，无穷远处的源只通过边界条件影响结果，不作为非齐次项出现在方程中

感应面电荷

根据解式 $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$, ρ 方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0 \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2} \cos \phi$$

它在柱面附近的值为 $E_\rho|_{\rho=a} = 2E_0 \cos \phi$

可见，在 $\phi = 0, \pi$ 两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

感应面电荷

根据解式 $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$, ρ 方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0 \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2} \cos \phi$$

它在柱面附近的值为 $E_\rho|_{\rho=a} = 2E_0 \cos \phi$

可见，在 $\phi = 0, \pi$ 两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

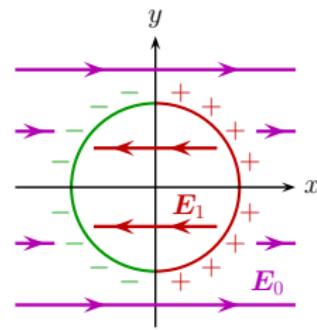
根据电磁学，记 ϵ_0 为真空介电常数，柱面上感应电荷的面密度为

$$\sigma(\phi) = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \epsilon_0 E_\rho \Big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$$

显然，柱面上 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 部分带正电， $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

部分带负电

感应电荷引起的电场 E_1 在柱内抵消外电场 E_0 ，从而达到静电平衡



电偶极矩

正如所期望的，柱面上每单位长度的总带电量为零：

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma(\phi) a d\phi = 2a\epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

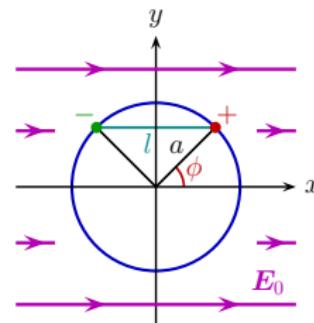
在 方位角 $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ 处 $d\phi$ 角度内的元电荷 $dq = \sigma(\phi) a d\phi$ 与 方位角 $\pi - \phi$ 处的相应元电荷形成元电偶极子

两个元电荷的距离为 $l = 2a \cos \phi$ ，元电偶极子的偶极矩为

$$dp = l dq = 2a \cos \phi \cdot 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi a d\phi = 4a^2 \epsilon_0 E_0 \cos^2 \phi d\phi$$

从而，感应面电荷引起的沿 x 轴正向的总电偶极矩为

$$\begin{aligned} p &= \int dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a^2 \epsilon_0 E_0 \cos^2 \phi d\phi = 2a^2 \epsilon_0 E_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2\phi + 1) d\phi \\ &= 2a^2 \epsilon_0 E_0 \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = 2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \end{aligned}$$



理想电偶极子

 若 $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $p = ql$ 是**理想电偶极子**

 根据电磁学，一个**二维理想电偶极子** p 产生的

$$\text{电势为 } u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$$

 将以上**沿 x 轴正向的总电偶极矩**代入，得

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ &= \frac{2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi \end{aligned}$$

 这与**解式** $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$

中的**第二项**相同

 因此，**感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子**

理想电偶极子

若 $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $p = ql$ 是**理想电偶极子**

根据电磁学，一个**二维理想电偶极子 p** 产生的电势为 $u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$

将以上沿 x 轴正向的**总电偶极矩**代入，得

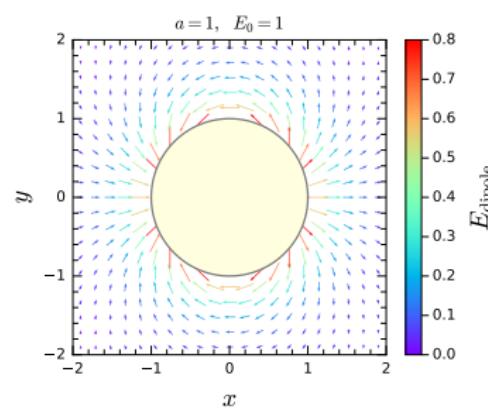
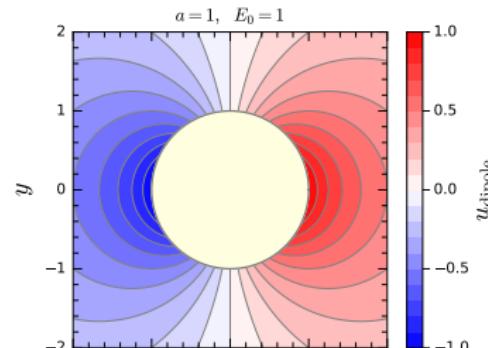
$$u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

$$= \frac{2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$$

这与解式 $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$

中的**第二项**相同

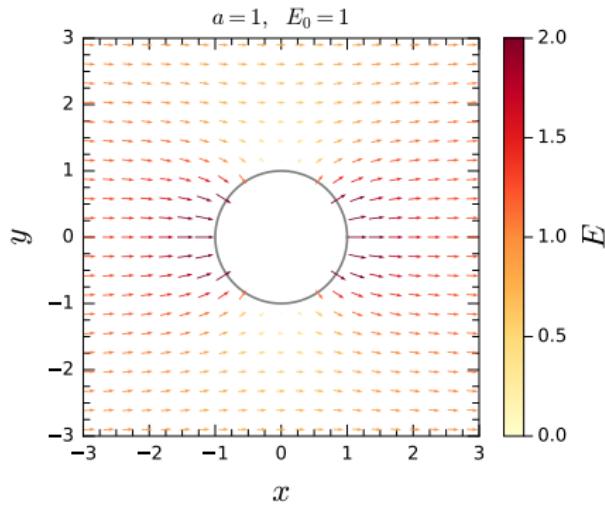
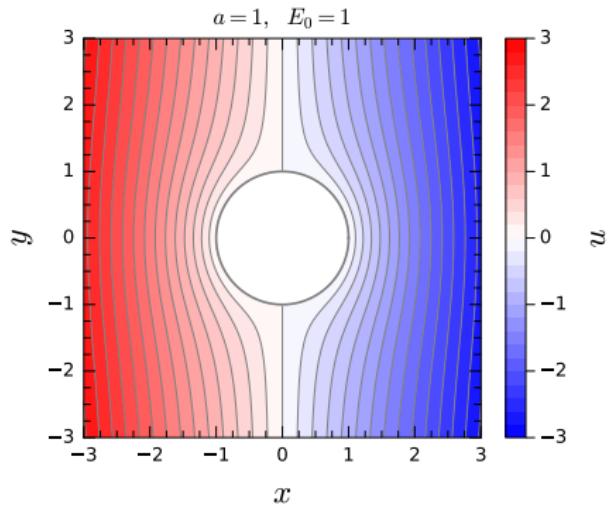
因此，**感应电荷的分布**对于**柱外区域**而言等价于一个**理想电偶极子**



电势分布和电场分布的图像

$$u = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi = -E_0 x + \frac{E_0 a^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = E_0 - \frac{E_0 a^2}{x^2 + y^2} + \frac{2E_0 a^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2E_0 a^2 x y}{(x^2 + y^2)^2}$$

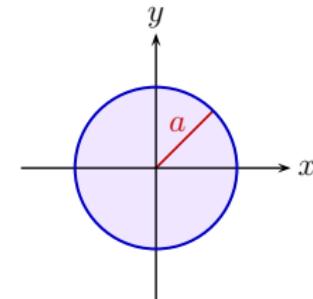


§5.4 Poisson 方程的处理

本小节介绍 Poisson 方程 (非齐次稳定场方程) 的处理方法

考虑圆内的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = f(\rho, \phi) & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$

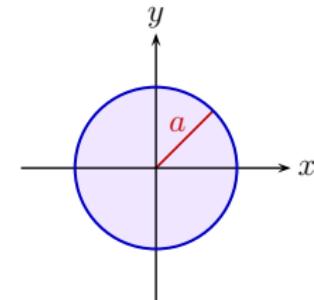


§5.4 Poisson 方程的处理

本小节介绍 Poisson 方程 (非齐次稳定场方程) 的处理方法

考虑圆内的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = f(\rho, \phi) & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



方法一 如果 $f(\rho, \phi)$ 的形式比较简单，则可以通过观察和试探寻找一个简单函数 $u_0(\rho, \phi)$ ，使得 $\nabla^2 u_0 = f(\rho, \phi)$ ，然后令 $u(\rho, \phi) = v(\rho, \phi) + u_0(\rho, \phi)$

从而 $v(\rho, \phi)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ v|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$

其中 $G(\phi) = u|_{\rho=a} - u_0|_{\rho=a} = F(\phi) - u_0(a, \phi)$

$u_0(\rho, \phi)$ 不是唯一的，因为 $u_0(\rho, \phi)$ 加上任一调和函数 (即 Laplace 方程的解，如 $\rho^m \cos m\phi$ 或 $\rho^m \sin m\phi$) 之后仍然满足要求，应该通过选择使 $G(\phi)$ 尽可能简单

方法二

♥ 方法二 如果 $f(\rho, \phi)$ 的形式比较**复杂**，则难以找到 $u_0(\rho, \phi)$

🏭 这时应该使用**本征函数展开法**，将**未知函数** $u(\rho, \phi)$ 展开为

$$u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$$

🏢 其中 $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 、 $B_m(\rho)$ 是**未知函数**

🏫 这个展开式满足**周期性边界条件** $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$

方法二

方法二 如果 $f(\rho, \phi)$ 的形式比较复杂, 则难以找到 $u_0(\rho, \phi)$

这时应该使用**本征函数展开法**, 将**未知函数** $u(\rho, \phi)$ 展开为

$$u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$$

其中 $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 、 $B_m(\rho)$ 是**未知函数**

这个展开式满足**周期性边界条件** $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$

将**非齐次项**和**边界条件**也作类似展开:

$$f(\rho, \phi) = a_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(\rho) \cos m\phi + b_m(\rho) \sin m\phi]$$

$$F(\phi) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\phi + \beta_m \sin m\phi)$$

已知函数:

$$a_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) d\phi, \quad a_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \cos m\phi d\phi, \quad b_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \sin m\phi d\phi$$

$$\text{已知常数: } \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi d\phi$$

常微分方程



将这些展开式代入定解问题, 用撇号代表对 ρ 求导, 利用

$$\begin{aligned} \nabla^2 \textcolor{teal}{u} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{1}{\rho} (\rho A'_0)' + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A''_m + \frac{1}{\rho} A'_m - \frac{m^2}{\rho^2} A_m \right) \cos m\phi + \left(B''_m + \frac{1}{\rho} B'_m - \frac{m^2}{\rho^2} B_m \right) \sin m\phi \right] \end{aligned}$$



推出未知函数 $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 和 $B_m(\rho)$ 满足的常微分方程和边界条件:

$$(\rho A'_0)' = \rho \textcolor{violet}{a}_0, \quad \rho^2 A''_m + \rho A'_m - m^2 A_m = \rho^2 \textcolor{violet}{a}_m, \quad \rho^2 B''_m + \rho B'_m - m^2 B_m = \rho^2 \textcolor{violet}{b}_m$$

$$A_0(a) = \alpha_0,$$

$$A_m(a) = \alpha_m,$$

$$B_m(a) = \beta_m$$



这些常微分方程不难求解, $A_0(\rho)$ 的方程可以直接积分



$A_m(\rho)$ 和 $B_m(\rho)$ 的方程相应的齐次方程为 Euler 方程, 容易求出通解, 对应于非齐次项的特解可以用常数变易法求出



但是, 对于每个未知函数, 边界条件只有一个, 不足以确定通解中的两个任意常数

自然边界条件

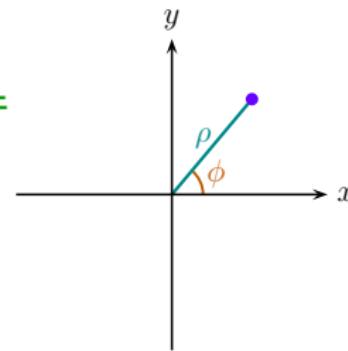
Ⅲ 实际上，还存在另一组边界条件

▲ 在平面极坐标系中， $\rho = 0$ 处 ϕ 没有定义，故 $\rho = 0$ 是坐标系的奇点

开 展开式 $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$ 本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

▲ 否则 $u(\rho, \phi)$ 在 $\rho = 0$ 处没有定义，这是一组自然边界条件



自然边界条件

实际上，还存在另一组边界条件

在平面极坐标系中， $\rho = 0$ 处 ϕ 没有定义，故 $\rho = 0$ 是坐标系的奇点

展开式 $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$ 本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

否则 $u(\rho, \phi)$ 在 $\rho = 0$ 处没有定义，这是一组自然边界条件

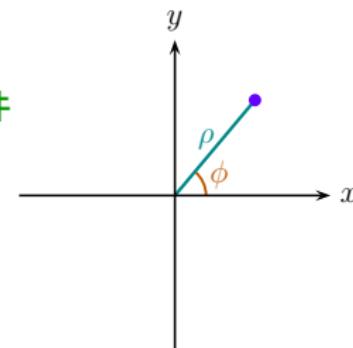
对展开式第一项 $A_0(\rho)$ 没有类似要求，但它必须有限

即满足自然边界条件

$$|A_0(0)| < \infty$$

注意，上式并不意味着 $A_0(\rho)$ 在 $\rho \neq 0$ 处可以不必有限

只不过偏微分方程的解在坐标系奇点 $\rho = 0$ 处很容易出现奇性，需要对其有限性特别加以强调



求解 $A_0(\rho)$

⚠ 下面求解 $A_0(\rho)$ 的常微分方程边值问题 $\begin{cases} (\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

❗ 方程 $(\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho)$ 对 ρ 积分, 得 $\rho A'_0 = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + C$

❗ 其中 C 为常数, 从而 $A'_0 = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + \frac{C}{\rho}$, 再次对 ρ 积分, 得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + C \ln \rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

求解 $A_0(\rho)$

⚠ 下面求解 $A_0(\rho)$ 的常微分方程边值问题 $\begin{cases} (\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

⭐ 方程 $(\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho)$ 对 ρ 积分, 得 $\rho A'_0 = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + C$

⭐ 其中 C 为常数, 从而 $A'_0 = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + \frac{C}{\rho}$, 再次对 ρ 积分, 得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + C \ln \rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

⭐ 由于 $\ln \rho$ 在 $\rho = 0$ 处发散, 自然边界条件 $|A_0(0)| < \infty$ 意味着 $C = 0$

⭐ 代入 $\rho = a$ 处的边界条件, 得 $\alpha_0 = A_0(a) = \int_0^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + D$

⭐ 故 $D = \alpha_0 - \int_0^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2$, 代回去, 得到问题的解为

$$A_0(\rho) = \alpha_0 - \int_\rho^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2$$