# 数 学 物 理 方 法

## 第八章　Fourier 变换法

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 11 月 9 日

# 第八章 Fourier 变换法

- 上一章研究了求解**数理方程定解问题**的**分离变量法**
- 由于所考虑的问题都只涉及**两个自变量**，所以情况比较**简单**
- 如果问题涉及**多个自变量**，情况就会比较**复杂**
- 在**曲线坐标系**中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
- 它们的解就是所谓的**特殊函数**
- 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法

# 第八章 Fourier 变换法

- 上一章研究了求解**数理方程定解问题**的**分离变量法**
- 由于所考虑的问题都只涉及**两个自变量**，所以情况比较**简单**
- 如果问题涉及**多个自变量**，情况就会比较**复杂**
- 在**曲线坐标系**中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
- 它们的解就是所谓的**特殊函数**
- 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法
- **分离变量法**适用于**有界区间**或**有界区域**
- 对于**无界区间**或**无界区域**上的数学物理方程定解问题，常常使用 **Fourier 变换法**
- Fourier 变换法是**积分变换法**的一种，另一种常用的积分变换法是 **Laplace 变换法**
- 积分变换法的**基本精神**也是**分离变量**，只是形式上不甚明显
- 本章介绍 **Fourier 变换法**，对于其它积分变换法，本课程不作介绍

# §1 Fourier 变换

## §1.1 复数形式的 Fourier 级数

🎸 函数族 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ $(n \in \mathbb{Z})$ 中任意两个函数在区间 $[-l, l]$ 上的内积定义为

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}) \equiv \int_{-l}^{l} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l})^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

🥁 注意内积定义中出现的复共轭，这是第七章关于实函数内积定义的推广

⬆️ 注　内积是普通三维空间中矢量点积的推广

📏 由于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与自身的内积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ 是其长度平方，一定是实数

🔒 作为它的推广，函数与自身的内积 (即模方) 应该是实数

🔑 在复值函数的内积定义中使用复共轭可以保证模方为实数

# 内积表达式

当 $m \neq n$ 时，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ 的内积为

$$\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}}{\mathrm{i}(n-m)\pi}\right|_{-l}^{l} = \frac{l[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\pi}]}{\mathrm{i}(n-m)\pi}$$

$$= \frac{2l\sin[(n-m)\pi]}{(n-m)\pi} = 0$$

这说明函数族 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上是正交的

当 $m = n$ 时，内积变成 $\displaystyle\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l} \mathrm{d}x = 2l$

可以将这两种情况合起来，内积表达为

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}) = \int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x = 2l\delta_{mn}$$

# 完备性

- 可以证明，**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上还是**完备**的
- 因此，**区间** $[-l,l]$ 上任何**解析性质良好**的**函数** $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

# 完备性

可以证明，**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上还是**完备**的

因此，**区间** $[-l,l]$ 上任何**解析性质良好**的**函数** $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

由 $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-l}^{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=2l\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\delta_{mn}=2lf_n$

得到**系数表达式**

$$f_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

# 完备性

可以证明，**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上还是**完备**的

因此，**区间** $[-l,l]$ 上任何**解析性质良好**的**函数** $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

由 $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-l}^{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=2l\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\delta_{mn}=2lf_n$

得到**系数表达式**

$$f_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

注意到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ 以 $2l$ 为周期，如果 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的**周期函数**，那么

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ **对** $x\in\mathbb{R}$ **成立**，它就是**微积分**中的**复数形式 Fourier 级数**

**注** **函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 等价于 $\{\cos n\phi,\sin n\phi\}_{n=0}^{+\infty}$，它在**区间** $[-\pi,\pi]$ 上是**完备**的，令 $\phi=\pi x/l$，容易知道**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上是**完备**的

# §1.2 Fourier 变换

现在考虑**展开式** $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ **当** $l\to\infty$ **的极限**

将**系数表达式** $f_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi$ 代入**这个展开式**，得

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

令 $k_n\equiv\frac{n\pi}{l}$，$\Delta k_n\equiv k_{n+1}-k_n=\frac{\pi}{l}$，则 $\frac{\Delta k_n}{2\pi}=\frac{1}{2l}$，将上式改写为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\Delta k_n$$

**当** $l\to\infty$ **时**，$\Delta k_n\to 0$，$k_n$ 的取值由**分立**变为**连续**，上式的**求和**变为**积分**，得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

# Fourier 变换和反变换

观察 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\, \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}k$

如果定义 $f(x)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$ 为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

则 $F(k)$ 的 **Fourier 反变换** $f(x)$ 满足

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

Joseph Fourier
(1768–1830)

# Fourier 变换和反变换

观察 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

Joseph Fourier
(1768–1830)

如果定义 $f(x)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$ 为

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

则 $F(k)$ 的 **Fourier 反变换** $f(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

**原函数和像函数的关系**

可以表示为 $f(x)\leftrightarrow F(k)$

或 $F(k)=\mathscr{F}[f(x)]$

$f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(k)]$

$F(k)$ 也称为 Fourier 变换的**像函数**，$f(x)$ 也称为 Fourier 变换的**原函数**

这里通过对 **Fourier 级数**取 $l\to\infty$ 的**极限形式**得到 **Fourier 变换**和**反变换**关系

可以证明，如果 $f(x)$ 具有**良好的解析性质**，则以上**取极限**的过程是**合理**的

# §1.3 二维与三维 Fourier 变换

- 考虑**二元函数** $f(x,y)$，先**把 $y$ 看作参数**，**对 $x$ 作 Fourier 变换**
- 得到**像函数** $\tilde{F}(k,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$
- 再**把 $k$ 当作参数**，**对 $y$ 作 Fourier 变换**，得到**像函数**

$$F(k,l)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(k,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ly}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

# §1.3 二维与三维 Fourier 变换

- 考虑二元函数 $f(x,y)$，先把 $y$ 看作参数，对 $x$ 作 Fourier 变换
- 得到像函数 $\tilde{F}(k,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$
- 再把 $k$ 当作参数，对 $y$ 作 Fourier 变换，得到像函数

$$F(k,l)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(k,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ly}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 反过来，把 $k$ 当作参数，对 $l$ 作 Fourier 反变换，有

$$\tilde{F}(k,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ly}\,\mathrm{d}l$$

- 再把 $y$ 当作参数，对 $k$ 作 Fourier 反变换，得到原函数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(k,y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}l$$

# 多维 Fourier 变换关系

这样就建立了**二维 Fourier 变换与反变换关系**

$$F(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}l$$

类似地，对于**三元函数** $f(x,y,z)$，简记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3)$

则 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_1x+k_2y+k_3z$，有**三维 Fourier 变换与反变换关系**

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{k}=\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3$$

对于**一般**的 $n$ **元函数**，也有类似结果

# §1.4 Fourier 变换的性质

- 接下来介绍 **Fourier 变换**的**性质**
- 在作 **Fourier 变换**和**反变换**计算时，可以引用**有关性质**
- 也可以**直接计算**，相当于把**有关性质**的**证明**包含在计算过程中
- 接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$，$f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)\ (i=1,2)$，则有以下**性质**

# §1.4 Fourier 变换的性质

- 接下来介绍 **Fourier 变换**的**性质**
- 在作 **Fourier 变换**和**反变换**计算时，可以引用**有关性质**
- 也可以**直接计算**，相当于把**有关性质**的**证明**包含在计算过程中
- 接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$，$f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)\ (i=1,2)$，则有以下**性质**

1. **线性定理：** $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \leftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$，其中 $a_1$ 和 $a_2$ 是常数

- 这一性质显而易见，直接来源于**积分的线性性质**

证：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\ &= a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)\end{aligned}$$

# 微分定理

2 **微分定理：** 如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

# 微分定理

2️⃣ **微分定理：** 如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

↖️ **注** 学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$，则意味着它在**远处**是**平坦**的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$，于是**以上条件**只需要**第一个**就可以了

💣 但是，这在数学上**并非**总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

💥 它的一阶导数为 $f'(x) = 2\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{x^2}$，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

💫 所以同时列出**这些条件**是**必要**的

# 微分定理

2️⃣ **微分定理：** 如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

↖️ 注　学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$，则意味着它在**远处**是**平坦**的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$，于是**以上条件**只需要**第一个**就可以了

💣 但是，这在数学上**并非**总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

💥 它的一阶导数为 $f'(x) = 2\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{x^2}$，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

💫 所以同时列出**这些条件**是**必要**的

🟥 证：
$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{-\mathrm{i}k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}kF(k)\end{aligned}$$

🧨 第二步用了**分部积分**，同理可证 $n > 1$ 的情况成立

若 $f(\pm\infty)=0$，对 **Fourier 反变换** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$ **求导**，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}kF(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}k$$

可见，**微分定理**意味着**求导**与**积分**可以**交换**，但应注意需要满足的**条件**

# 卷积

若 $f(\pm\infty)=0$，对 **Fourier 反变换** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$ **求导**，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}kF(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}k$$

可见，**微分定理**意味着**求导**与**积分**可以**交换**，但应注意需要满足的**条件**

函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的**卷积**定义为 $f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$

令 $y=x-\xi$，则 $\mathrm{d}\xi=-\mathrm{d}y$，$f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}f_1(x-y)f_2(y)(-\mathrm{d}y)$

将积分变量 $y$ 换成 $\xi$，得 $f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

这是**卷积**定义的**等价表达式**，它表明 $f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x)$

# 卷积定理

3 **卷积定理：** $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注　这一定理主要用于由**像函数**求**原函数**

基本前提是**像函数** $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的**原函数** $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ **已经知道**或**容易求出**

# 卷积定理

3 **卷积定理：** $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注　这一定理主要用于由像函数求原函数

基本前提是像函数 $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的原函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 已经知道或容易求出

证：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\xi \\
y = x - \xi \quad \Rightarrow \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}\xi \\
&= \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\, \mathrm{d}\xi \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\, \mathrm{d}y \right] \\
&= F_1(k)F_2(k)
\end{aligned}
$$

# 延迟定理和积分定理

4 **延迟定理：** $f(x-\xi) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}F(k)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证：作**变量替换** $y = x - \xi$，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x-\xi)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}F(k)\end{aligned}$$

# 延迟定理和积分定理

4 **延迟定理：** $f(x-\xi) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}F(k)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证：作**变量替换** $y = x - \xi$，得

$$\mathscr{F}[f(x-\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}F(k)$$

5 **积分定理：** 如果 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，则 $\displaystyle g(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \frac{F(k)}{\mathrm{i}k}$

证：设 $g(x) \leftrightarrow G(k)$，由于 $g(\pm\infty) = 0$，应用**微分定理**得 $\mathscr{F}[g'(x)] = \mathrm{i}kG(k)$

另一方面，有 $g'(x) = f(x)$，故 $\mathscr{F}[g'(x)] = \mathscr{F}[f(x)] = F(k)$

比较两式，得 $\mathrm{i}kG(k) = F(k)$，即 $G(k) = \dfrac{F(k)}{\mathrm{i}k}$

# 相似定理

6 **相似定理：** $f(ax) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{k}{a}\right)$，其中常数 $a \neq 0$

证：若 $a > 0$，则

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$$

$$y = ax \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky/a}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

若 $a < 0$，则

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$$

$$y = ax \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky/a}\, \mathrm{d}y = -\frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

# 例 1

**例 1** 计算三角形函数

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$

**解** $f(x)$ 的 **Fourier 变换**为

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|x|)(\cos kx-\mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1(1-x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}\sin kx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\left[(1-x)\sin kx\Big|_0^1+\int_0^1\sin kx\,\mathrm{d}x\right]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}(1-\cos k)$$

# 例 1 图像

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2}(1 - \cos k)$$

# 例 2

**例 2** 计算函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$，其中 $a>0$

**解** $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,I$$

其中积分

$$\begin{aligned}I&\equiv\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\cos kx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax}\\&=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\Big|_0^{\infty}-\frac{k}{a}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2}\int_0^{\infty}\sin kx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax}\\&=\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\Big|_0^{\infty}-\frac{k^2}{a^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{k^2}{a^2}\,I\end{aligned}$$

故 $I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{a^2+k^2}$，从而得到 $F(k)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{a}{a^2+k^2}$

# 例 2 图像（取 $a = 2$）

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2 + k^2}$$

# 例 3

**例 3** 计算 **Gauss 函数** $f(x)=\exp\left(-\dfrac{ax^2}{2}\right)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$，其中 $a>0$

**解** $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\\
&= -\frac{a}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(-\mathrm{i}x)\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x\\
\text{微分定理}\ \Rightarrow\ &= -\frac{a}{k\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{a}{k}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k}
\end{aligned}
$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k}+\dfrac{k}{a}F(k)=0$，求解这个**微分方程**，得到

$$
F(k)=F(0)\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right),\qquad F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x
$$

# 例 3 结果

- $F(0)$ 的平方是

$$[F(0)]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ay^2}{2}\right)\mathrm{d}y\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{a(x^2+y^2)}{2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 将平面上的**直角坐标** $(x, y)$ 替换成**极坐标** $(\rho, \phi)$，有

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

$$[F(0)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\phi$$
$$= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\Big|_0^{\infty}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{a}$$

- 故 $F(0) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$，于是 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $F(k) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\dfrac{k^2}{2a}\right)$

# 例 3 图像（取 $a = 1$）

$$f(x) = \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)$$

可见，**Gauss 函数**的 Fourier 变换仍然是一个 **Gauss 函数**

# 积分公式

根据上面这组 **Fourier 变换关系**，有

$$\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k$$

即

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right), \quad a > 0$$

在第 56 页计算中将会用到这条公式

这条公式也可以利用复变函数来证明，见教材第五章选读的 §10 例 2

# 例 4

**例 4** 计算 $f(x) = \cos\omega_0 x \, \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$，其中 $\omega_0$ 是**实数**

**解** $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_0 x \, \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}}{2} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\omega_0)x} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-\omega_0)x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{(k+\omega_0)^2}{2}\right] + \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{(k-\omega_0)^2}{2}\right]
\end{aligned}
$$

最后一步用到**例 3** 给出的 Fourier 变换关系 $\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)$

# 例 4 图像

🎵 将 $x$ 改记为 $t$，$k$ 改记为 $\omega$，取 $\omega_0 = 4\pi$ rad/s，相应的函数图像为

$$f(t) = \cos\omega_0 t \, \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \qquad F(\omega) = \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2}\right] + \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\right]$$

🎶 $f(t)$ 是一个受 **Gauss 函数调制**的**余弦函数信号**，**圆频率** $\omega_0 = 4\pi$ rad/s 对应的**周期**为 $0.5$ s，**频率**为 $2$ Hz，可见，Fourier 变换将**时域分布**转换成**频域分布**

# §2 无界弦的自由振动

- 无界弦指无穷长的弦，实际上并不存在
- 但是，如果弦较长，而我们所关心的部分离边界较远
- 在较短时间内，边界对所关心的部分尚未发生作用
- 就可以忽略边界的存在，从而将有界弦抽象为无界弦

# §2.1 Fourier 变换法

考虑无界弦在初始激励下的自由振动，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0$

# §2.1 Fourier 变换法

考虑无界弦在初始激励下的自由振动，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0$

下面用 Fourier 变换法求解这个定解问题

由于 $t$ 的变化范围是 $(0, +\infty)$，$x$ 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$

因此应该对 $x$ 作 Fourier 变换，设

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

# 常微分方程初值问题

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

对一维齐次波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 $x$ 方向上作 Fourier 变换，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$

线性定理 ➡ $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$

微分定理 ➡ $$= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (\mathrm{i}k)^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k^2 a^2 U$$

# 常微分方程初值问题

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

🌿 对一维齐次波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 $x$ 方向上作 Fourier 变换，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$

线性定理 ➡️ $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$

微分定理 ➡️ $$= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (\mathrm{i}k)^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k^2 a^2 U$$

🌷 从而得到常微分方程的初值问题（将 $k$ 视作参数）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$$

🍀 初值条件来自初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ 的 Fourier 变换

# $U(k,t)$ 的解

常微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + k^2a^2U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$ 的解是

$$U(k,t) = \Phi(k)\cos kat + \Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= -ka\Phi(k)\sin kat + \Psi(k)\cos kat \\ \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} &= -k^2a^2\Phi(k)\cos kat - ka\Psi(k)\sin kat = -k^2a^2U \end{aligned}$$

剩下的问题是对 $U(k,t)$ 作 **Fourier 反变换**求出**原函数** $u(x,t)$，有

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] + \mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right]$$

# Fourier 反变换计算

根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$，有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\,\mathrm{d}k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}\,\mathrm{d}k\right] \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]
\end{aligned}
$$

# Fourier 反变换计算

🪴 根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$，有

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\,\mathrm{d}k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}\,\mathrm{d}k\right] \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]
\end{aligned}$$

🌸 利用 $\int_0^t \cos ka\tau\,\mathrm{d}\tau = \left.\frac{\sin ka\tau}{ka}\right|_0^t = \frac{\sin kat}{ka}$、$\psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$ 和**上式结果**，得

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\,\frac{\sin kat}{ka}\right] &= \mathscr{F}^{-1}\left[\int_0^t \Psi(k)\cos ka\tau\,\mathrm{d}\tau\right] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[\Psi(k)\cos ka\tau]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t [\psi(x-a\tau) + \psi(x+a\tau)]\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

🌼 第二步利用了 **Fourier 反变换的线性性**，即**交换**了对 $\tau$ 积分和对 $k$ 积分的**顺序**

# d'Alembert 公式

- 作**变量替换** $\xi = x - a\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\xi}{a}$，有

$$\frac{1}{2}\int_0^t \psi(x-a\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2a}\int_x^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

- 令 $\xi = x + a\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{a}$，有 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \psi(x+a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2a}\int_x^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

# d'Alembert 公式

作**变量替换** $\xi = x - a\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\xi}{a}$，有

$$\frac{1}{2}\int_0^t \psi(x-a\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2a}\int_x^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

令 $\xi = x + a\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{a}$，有 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \psi(x+a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2a}\int_x^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right] = \frac{1}{2}\int_0^t \psi(x-a\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \psi(x+a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] + \mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\dfrac{\sin kat}{ka}\right]$ 化为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

这是最终结果，称为 **d'Alembert 公式**

Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

# 右行波和左行波

**d'Alembert 公式** $u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

如果**初始速度** $\psi(x)=0$，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

$x=x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$

令 $x_0 = x-at$，则 $x = x_0+at$，$\varphi(x-at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x-at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 $t$ 向右移动**至 $x=x_0+at$ 处

# 右行波和左行波

**d'Alembert 公式** $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

🌴 如果**初始速度** $\psi(x)=0$，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

🥥 $x=x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$

🫐 令 $x_0=x-at$，则 $x=x_0+at$，$\varphi(x-at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x-at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 $t$ 向右移动**至 $x=x_0+at$ 处

🍓 令 $x_0=x+at$，则 $x=x_0-at$，$\varphi(x+at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x+at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 $t$ 向左移动**至 $x=x_0-at$ 处

🍒 因此，$\psi(x)=0$ 时的物理图像是初始位移的波形**一半向右传播**，**一半向左传播**

🍑 $\psi(x)\neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列**右行波**和一列**左行波**叠加而成

# 右行波和左行波

**d'Alembert 公式** $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

如果**初始速度** $\psi(x)=0$，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

**解的动画演示**

$x=x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$

令 $x_0=x-at$，则 $x=x_0+at$，$\varphi(x-at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x-at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 $t$ 向右移动**至 $x=x_0+at$ 处

令 $x_0=x+at$，则 $x=x_0-at$，$\varphi(x+at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x+at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 $t$ 向左移动**至 $x=x_0-at$ 处

因此，$\psi(x)=0$ 时的物理图像是初始位移的波形**一半向右传播**，**一半向左传播**

$\psi(x)\neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列**右行波**和一列**左行波**叠加而成

# Fourier 变换法的本质

- 对无界问题用 **Fourier 变换法**，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解
- 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解
- 两者的精神一致

# Fourier 变换法的本质

- 对无界问题用 Fourier 变换法，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解
- 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解
- 两者的精神一致
- 由 $u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[U(k,t)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}U(k,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$ 可以看出
- $u(x,t)$ 是一系列“本征振动” $U(k,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的叠加（即对 $k$ 积分）
- 每一本征振动是两个因子的乘积，一个只是 $t$ 的函数，一个只是 $x$ 的函数
- 这与用分离变量法求解有界弦的振动所得一般解 $u(x,t)=\displaystyle\sum_n X_n(x)T_n(t)$ 在形式上相同
- 可见，Fourier 变换法本质上也是分离变量法

# 利用延迟定理、线性定理和积分定理

- $\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] = \dfrac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$ 可通过**延迟定理**和**线性定理**得到：

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] \xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat}]+\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}]\}$$

$$\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

# 利用延迟定理、线性定理和积分定理

- $\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$ 可通过**延迟定理**和**线性定理**得到：

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] \xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat}]+\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}]\}$$

$$\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

- $\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\,\frac{\sin kat}{ka}\right] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 可通过**延迟定理**、**线性定理**和**积分定理**

得到：由**延迟定理**和**线性定理**有 $\psi(x+at)-\psi(x-at) \leftrightarrow \Psi(k)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\,\frac{\sin kat}{ka}\right] = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})}{2\mathrm{i}ka}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2a}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})}{\mathrm{i}k}\right] \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}[\psi(y+at)-\psi(y-at)]\,\mathrm{d}y$$

- 这里应用**积分定理**的**条件**已经满足，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\psi(x+at)-\psi(x-at)]\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}[\psi(\xi)-\psi(\xi)]\,\mathrm{d}\xi = 0$$

# 化简

- 令 $\xi = y + at$，则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \psi(y+at)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 令 $\xi = y - at$，则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \psi(y-at)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 故

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\,\frac{\sin kat}{ka}\right] &= \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x} \psi(y+at)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{x} \psi(y-at)\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x-at} + \int_{x-at}^{x+at} - \int_{-\infty}^{x-at}\right] \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

# §2.2 行波法简介

- **d'Alembert 公式**也可以通过下面介绍的**行波法**得到
- 思路是先求出**偏微分方程**的**通解**，其中含多个**任意函数**，再用**初始条件**确定它们
- 对于**无界弦**的振动，这一方法非常简单
- 但是，**行波法不具有一般性**，所以只在这里作简单介绍

# §2.2 行波法简介

- d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到
- 思路是先求出偏微分方程的通解，其中含多个任意函数，再用初始条件确定它们
- 对于无界弦的振动，这一方法非常简单
- 但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍
- 右行波和左行波依赖于 $x-at$ 和 $x+at$，令 $\xi=x-at$，$\eta=x+at$，推出

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

- 从而将一维齐次波动方程化为 $0=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$

# 一维自由波动方程的通解

- 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，即 $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$
- 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ **与 $\eta$ 无关**，即 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$，其中 $f_0(\xi)$ 是 $\xi$ **的任意函数**
- 对 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$ 积分，得 $u=f(\xi)+g(\eta)$，其中 $f(\xi)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=f_0(\xi)$

# 一维自由波动方程的通解

- 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，即 $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$
- 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ **与 $\eta$ 无关**，即 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$，其中 $f_0(\xi)$ 是 $\xi$ **的任意函数**
- 对 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$ 积分，得 $u=f(\xi)+g(\eta)$，其中 $f(\xi)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=f_0(\xi)$
- 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是**任意函数**
- 根据 $\xi=x-at$ 和 $\eta=x+at$，重新用变量 $x$ 和 $t$ 写出来，得到

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

- 这是**一维自由波动方程**在**未曾考虑任何定解条件**时的最一般解，即**真正的通解**

# 一维自由波动方程的通解

- 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，即 $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$
- 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ **与 $\eta$ 无关**，即 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$，其中 $f_0(\xi)$ 是 $\xi$ **的任意函数**
- 对 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$ 积分，得 $u=f(\xi)+g(\eta)$，其中 $f(\xi)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=f_0(\xi)$
- 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是**任意函数**
- 根据 $\xi=x-at$ 和 $\eta=x+at$，重新用变量 $x$ 和 $t$ 写出来，得到

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

- 这是**一维自由波动方程**在**未曾考虑任何定解条件**时的最一般解，即**真正的通解**
- 可惜能够这样求出通解的方程**甚少**
- 即使能够求出通解，如果**定解条件比较复杂**，要决定其中的任意函数也**绝非易事**
- 对于**有限区间**上的**自由振动**，由定解条件确定以上 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 就**比较困难**

# 推出 d'Alembert 公式

- 将**通解** $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ 代入**初始条件**，得

$$u\big|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x)$$

- 对 $-f'(x) + g'(x) = \dfrac{1}{a}\psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x) + g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - 2c$
- 其中 $c$ 是**常数**，$x_0$ **可视方便取定**

# 推出 d'Alembert 公式

- 将**通解** $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$ 代入**初始条件**，得

$$u\big|_{t=0}=f(x)+g(x)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-af'(x)+ag'(x)=\psi(x)$$

- 对 $-f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{a}\psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x)+g(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-2c$
- 其中 $c$ 是**常数**，$x_0$ **可视方便取定**，与 $f(x)+g(x)=\varphi(x)$ 结合，推出

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+c,\qquad g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-c$$

- 于是，满足**初始条件**的**解**为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=f(x-at)+g(x+at)\\&=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

- 这样就再次得到 **d'Alembert 公式**，结果与 $x_0$ 和 $c$ **无关**

# §3 $\delta$ 函数

## §3.1 定义一

- 考虑位于 $x$ 轴上 $x=a$ 处具有单位质量的质点
- 为了描述它的质量密度（这里指线密度），引入函数

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

- 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ 内质量为 $1$ 的物体的质量密度

# §3 $\delta$ 函数

## §3.1 定义一

- 考虑位于 $x$ 轴上 $x=a$ 处具有单位质量的质点
- 为了描述它的质量密度（这里指线密度），引入函数

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

- 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ 内质量为 $1$ 的物体的质量密度
- 当 $\varepsilon\to 0$ 时

# §3 $\delta$ 函数

## §3.1 定义一

考虑位于 $x$ 轴上 $x=a$ 处具有单位质量的质点

为了描述它的质量密度（这里指线密度），引入函数

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度

当 $\varepsilon\to 0$ 时，就得到上述质点的质量密度

$$\delta(x-a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-a)$$

它满足 $\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$，这是 $\delta$ 函数的定义一

若质点的质量为 $m$，则质量密度为 $\rho(x)=m\delta(x-a)$

# $\delta$ 函数的历史和意义

- $\delta$ 函数是数学物理中的重要概念
- 一般认为最早由物理学家 **P. Dirac** 引入
- 实际上，在 Dirac 之前，**O. Heaviside** 已经给出明确定义
- 至于这一函数的雏形，则具有更长的历史
- 不过，它在近代物理中才获得广泛的应用

Paul Dirac
(1902–1984)

Oliver Heaviside
(1850–1925)

# $\delta$ 函数的历史和意义

- $\delta$ 函数是数学物理中的重要概念
- 一般认为最早由物理学家 **P. Dirac** 引入
- 实际上，在 Dirac 之前，**O. Heaviside** 已经给出明确定义
- 至于这一函数的雏形，则具有更长的历史
- 不过，它在近代物理中才获得广泛的应用
- $\delta$ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度
- 比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度

Paul Dirac
(1902–1984)

Oliver Heaviside
(1850–1925)

# $\delta$ 函数的历史和意义

- $\delta$ 函数是数学物理中的重要概念
- 一般认为最早由物理学家 **P. Dirac** 引入
- 实际上，在 Dirac 之前，**O. Heaviside** 已经给出明确定义
- 至于这一函数的雏形，则具有更长的历史
- 不过，它在近代物理中才获得广泛的应用
- $\delta$ 函数可以描述任何处于一点、总量为 $1$ 的物理量的密度
- 比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度
- 如果自变量是时间 $t$ 而不是位置 $x$，那么 $\delta$ 函数描述的是存在于瞬时、总量为 $1$ 的物理量的强度
- 比如，具有单位冲量的瞬时力，具有单位电荷的瞬时电流

Paul Dirac
(1902–1984)

Oliver Heaviside
(1850–1925)

# 广义函数

- $\delta$ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同
- 后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值
- 虽然也可能有奇点，但奇点通常**不在**定义域内
- 比如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，虽然 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 发散，但 $x = 0$ 并**不在**定义域内

# 广义函数

- $\delta$ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同
- 后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值
- 虽然也可能有奇点，但奇点通常**不在**定义域内
- 比如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，虽然 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 发散，但 $x = 0$ 并**不在**定义域内
- 然而，$\delta$ 函数 $\delta(x-a)$ 在 $x = a$ 处的函数值是 $\infty$
- 而且这一点对 $\delta$ 函数来说是最重要的
- 所以 $\delta$ 函数**不是**一个经典的函数，而是一个广义函数
- 严格的广义函数理论超出了本课程的论题
- 我们总是从极限的意义上对 $\delta$ 函数作直观的理解
- 即把 $\delta$ 函数当作某种经典函数序列 [如 $\delta_\varepsilon(x-a)$] 的极限

# 广义函数

- $\delta$ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同
- 后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值
- 虽然也可能有奇点，但奇点通常**不在**定义域内
- 比如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，虽然 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 发散，但 $x=0$ 并**不在**定义域内
- 然而，$\delta$ 函数 $\delta(x-a)$ 在 $x=a$ 处的函数值是 $\infty$
- 而且这一点对 $\delta$ 函数来说是最重要的
- 所以 $\delta$ 函数**不是**一个经典的函数，而是一个广义函数
- 严格的广义函数理论超出了本课程的论题
- 我们总是从极限的意义上对 $\delta$ 函数作直观的理解
- 即把 $\delta$ 函数当作某种经典函数序列 [如 $\delta_\varepsilon(x-a)$] 的极限
- 此外，由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$ 可以看到，$\delta$ 函数的量纲是其宗量量纲的倒数
- 这一点不同于三角函数、指数函数、对数函数等无量纲函数

## §3.2 定义二

根据 $\delta$ 函数的**定义一** $\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$

对于**任何连续函数** $f(x)$，有 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$

上式可看作 $\delta$ 函数的**另一种定义**（**定义二**），$f(x)$ 与 $\delta(x-a)$ 相乘之后，通过积分挑选出 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的值 $f(a)$，这也称为 $\delta$ 函数的**挑选性**

# §3.2 定义二

根据 $\delta$ 函数的**定义一** $\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$

对于**任何连续函数** $f(x)$，有 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$

上式可看作 $\delta$ 函数的**另一种定义**（**定义二**），$f(x)$ 与 $\delta(x-a)$ 相乘之后，通过积分挑选出 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的值 $f(a)$，这也称为 $\delta$ 函数的**挑选性**

**证明** 由于 $\delta(x-a)$ **只在** $a$ **点不为零**，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a+\theta\varepsilon)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a+\theta\varepsilon)$$

其中 $\theta\in[-1,1]$，第二步用了**积分中值定理**：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**连续**，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**且**不变号**，则存在 $c\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

由于**正实数** $\varepsilon$ 的大小可以**任意**，令 $\varepsilon\to 0$，就得到 $f(a+\theta\varepsilon)\to f(a)$ **证毕**

# 严格的证明

- 上述证明实际上是会引起**质疑**的
- 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**

# 严格的证明

- 上述证明实际上是会引起**质疑**的
- 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**
- 但是，如果用**经典函数** $\delta_\varepsilon(x-a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x-a)$
- 那么，每一步都是**严格成立**的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a+\theta\varepsilon)$$

- 令 $\varepsilon \to 0$，就得到要证明的 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$

# 严格的证明

- 上述证明实际上是会引起**质疑**的
- 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**
- 但是，如果用**经典函数** $\delta_\varepsilon(x-a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x-a)$
- 那么，每一步都是**严格成立**的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a+\theta\varepsilon)$$

- 令 $\varepsilon \to 0$，就得到要证明的 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$

❓ 也许有人会问，取**极限** $\varepsilon \to 0$ 得到的 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x$ 是否真的**等于** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x$？即**取极限**与**积分**是否可以**交换次序**?

❗ 正确的理解是，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x$ 正是用 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x$ 来**定义**的

# 说明和推广

- 使用 $\delta$ **函数**，使我们可以**省略**用**经典函数序列** $\delta_\varepsilon(x-a)$ 计算然后**取极限**的过程
- 需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x-a)$ **不一定**是前面用

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

定义的函数

- 只要 $\delta_\varepsilon(x-a)$ 在 $|x-a|>\varepsilon$ **时为零**，在 $|x-a|<\varepsilon$ **时为正**，且**积分为** $1$ 即可

# 说明和推广

- 使用 $\delta$ 函数，使我们可以省略用经典函数序列 $\delta_\varepsilon(x-a)$ 计算然后取极限的过程
- 需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x-a)$ **不一定**是前面用

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

定义的函数

- 只要 $\delta_\varepsilon(x-a)$ 在 $|x-a|>\varepsilon$ 时为零，在 $|x-a|<\varepsilon$ 时为正，且积分为 $1$ 即可
- 很容易将 $\delta$ 函数的定义二推广到三维或其它维数的情况
- 比如，三维 $\delta$ 函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})$ 可以由下式定义，

$$\int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=f(\boldsymbol{a})$$

- 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，我们也可以用 3 个一维 $\delta$ 函数等价地定义

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\delta(x-a_1)\delta(y-a_2)\delta(z-a_3)$$

# §3.3 $\delta$ 函数的基本性质

$\delta$ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 $\delta$ 函数的定义二，有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)[f(x)\delta(x-a)-f(a)\delta(x-a)]\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x-f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x\\=&\varphi(a)f(a)-f(a)\varphi(a)=0\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x-a)-f(a)\delta(x-a)=0$

# §3.3 $\delta$ 函数的基本性质

🦊 $\delta$ 函数的基本性质主要有以下几条

1️⃣ 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$

🟦 证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 $\delta$ 函数的定义二，有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)[f(x)\delta(x-a) - f(a)\delta(x-a)]\,\mathrm{d}x \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x - f(a)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x \\
=& \varphi(a)f(a) - f(a)\varphi(a) = 0
\end{aligned}$$

🦡 由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x-a) - f(a)\delta(x-a) = 0$

2️⃣ $x\delta(x) = 0$

🦫 上式可改写成 $\dfrac{\delta(x)}{x^{-1}} = 0$，它说明 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 处的奇性弱于 $\dfrac{1}{x}$

🦥 由此可见，$\delta$ 函数的奇性其实并不是很大

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 $\delta$ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x \delta(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(0) \cdot 0 = 0$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $x\delta(x) = 0$

# 偶函数

🟩 证：设 $\varphi(x)$ 为**任意连续函数**，根据 $\delta$ **函数**的**定义二**，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)\cdot 0 = 0$$

🦘 由 $\varphi(x)$ 的**任意性**得 $x\delta(x) = 0$

3️⃣ $\delta$ **函数**是**偶函数**，即 $\delta(-x) = \delta(x)$

🟥 证：设 $\varphi(x)$ 为**任意连续函数**，根据 $\delta$ **函数**的**定义二**，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y = -x \;\Rightarrow\; = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(y)\delta(-y)(-\mathrm{d}y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(-x)\,\mathrm{d}x$$

🦙 由 $\varphi(x)$ 的**任意性**得 $\delta(-x) = \delta(x)$

# $\delta(ax)$

4️⃣ $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$，其中 $a \neq 0$

🟨 证：设 $\varphi(x)$ 为**任意连续函数**，若 $a > 0$，令 $y = ax$，由 $\delta$ **函数**的**定义二**得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(ax)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{a} = \frac{1}{a}\varphi(0) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

🐫 由 $\varphi(x)$ 的**任意性**得 $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{a} = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$

🐫 若 $a < 0$，则 $-a > 0$，由 $\delta$ **函数**的**偶函数**性质得

$$\delta(ax) = \delta(-ax) = \frac{\delta(x)}{-a} = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

# §3.4 $\delta$ 函数的几种表达式

- $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$
- $\delta(x)$ 的 **Fourier 变换**为 $\Delta(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- 由 **Fourier 反变换公式**即得 $\delta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

# §3.4 δ 函数的几种表达式

♈ $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

🐼 $\delta(x)$ 的 **Fourier 变换**为 $\Delta(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

🦍 由 **Fourier 反变换公式**即得 $\delta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

⚠️ 实际上，上式右边的**积分并不存在**，那么如何理解这个结果呢?

🦔 如果用 $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ 代替 $\delta(x)$，就可以得到

$$\Delta_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\cos kx}{2\varepsilon}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin kx}{2k\varepsilon}\bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k\cos k\varepsilon}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{(L'Hospital 法则)}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

🦧 最后一步实际上是对这个**不存在的积分**的**定义**

# 第二种表达式

♉ $\delta(x) = \lim\limits_{K\to+\infty} \dfrac{\sin Kx}{\pi x}$

🐯 根据上述 $\delta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$，有

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} \Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-K}^{K} \Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} \left[\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta_\varepsilon(k)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} (\cos kx + \mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to+\infty} \int_{0}^{K} \cos kx\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{K\to+\infty} \frac{\sin kx}{x}\bigg|_0^K = \lim_{K\to+\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}
\end{aligned}
$$

🦭 第二步**交换**了**两个极限**的顺序，其合理性这里不作深究

🦎 随后的积分是**普通定积分**，只要 $\delta_\varepsilon(x)$ 是 $x$ 和 $\varepsilon$ 的**连续函数**，则 $\Delta_\varepsilon(k)$ 是 $k$ 和 $\varepsilon$ 的**连续函数**，从而**取** $\varepsilon \to 0$ **的极限**与**积分**可以**交换次序**（第三步）

# $\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$ 的性质和图像

- 这里介绍**函数** $\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$ $(K>0)$ 的性质
- 它的**零点**位于 $x=\pm\dfrac{n\pi}{K}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$
- 当 $x\to 0$ 时，由 **L'Hospital 法则**得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin Kx}{\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{K\cos Kx}{\pi}=\frac{K}{\pi}$$

- 根据**第五章 §7 选读的例 3**，**Dirichlet 积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin Kx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad K>0$$

- 故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin Kx}{x}\,\mathrm{d}x=1$
- 当 $K\to+\infty$ 时，$\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$ 整体行为趋近于 $\delta(x)$

Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

# 第三种表达式

♊ $\delta(x) = \lim\limits_{\sigma\to 0} \rho_\sigma(x)$，其中 $\rho_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ 是 **Gauss 分布**，$\sigma > 0$

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

🐤 当 $x \neq 0$ 时，令 $t = \dfrac{1}{\sigma}$，由 **L'Hospital 法则**得

$$\lim_{\sigma\to 0} \rho_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{x^2t^2/2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2 t\,\mathrm{e}^{x^2t^2/2}} = 0$$

🥚 当 $x = 0$ 时，有 $\lim\limits_{\sigma\to 0} \rho_\sigma(x) = \lim\limits_{\sigma\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \infty$

🐣 由于 $\rho_\sigma(x)$ 是**概率分布**，已经**归一化**，满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

🐤 这样就符合 $\delta$ **函数定义一**中的所有条件

# 第四种表达式

- $\delta(x) = \lim\limits_{b\to 0} \rho_b(x)$，其中 $\rho_b(x) = \dfrac{b}{\pi(x^2+b^2)}$ 是 **Lorentz 分布**，$b > 0$
- **Lorentz 分布**也称为 **Cauchy 分布**、**Breit–Wigner 分布**
- 当 $x \neq 0$ 时，$\lim\limits_{b\to 0} \rho_b(x) = \lim\limits_{b\to 0} \dfrac{b}{\pi(x^2+b^2)} = 0$
- 当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{b\to 0} \rho_b(x) = \lim\limits_{b\to 0} \dfrac{1}{\pi b} = \infty$
- 作为归一化的**概率分布**，$\rho_b(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_b(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

- 这样就符合 $\delta$ **函数定义一**中的所有条件
- 事实上，任何**概率分布**取其**宽度趋于零**的**极限**（从而**高度趋于无穷大**），都可以得到 $\delta$ **函数**

Hendrik Lorentz
(1853–1928)

# 第五种表达式

$\delta(x) = \theta'(x)$，其中 **Heaviside 阶跃函数**定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Oliver Heaviside
(1850–1925)

对于**任意连续函数** $f(x)$，利用**分部积分**，有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\theta'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)\theta(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\theta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(+\infty) - \int_{0}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(+\infty) - f(x)\Big|_{0}^{+\infty} = f(0) \end{aligned}$$

可见 $\theta'(x)$ 符合 $\delta$ **函数**的**定义二**

# §4 无界杆的热传导问题

- 考虑**无穷长导热细杆**在**热源**和**初始温度**作用下的**热传导问题**
- 这是一个**一维无界问题**，关于**温度分布** $u(x,t)$ 的定解问题如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

- 这里忽略了**默认**的**边界条件** $u\Big|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pm\infty} = 0$

# §4 无界杆的热传导问题

考虑**无穷长导热细杆**在**热源**和**初始温度**作用下的**热传导问题**

这是一个**一维无界问题**，关于**温度分布** $u(x,t)$ 的定解问题如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

这里忽略了**默认**的**边界条件** $u\big|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0$

令 $u = u_1 + u_2$，将问题分解为由**初始温度**引起的热传导问题（**无源问题**）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

以及由**热源**引起的热传导问题（**有源问题**）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_2|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

# §4.1 无源问题

将 $u_1$ 改记为 $u$，**无源问题**为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

**对 $x$ 作 Fourier 变换**，设

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$$

对**定解问题作 Fourier 变换**，利用**微分定理**，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k) \end{cases}$$

这个**常微分方程初值问题**的**解**为 $U(k,t) = \Phi(k)\,\mathrm{e}^{-k^2 a^2 t}$

# Fourier 反变换计算

- 剩下的问题是对 $U(k,t) = \Phi(k)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 作 **Fourier 反变换**求出**原函数** $u(x,t)$
- 根据**卷积定理** $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$，只要求出 $\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 的**原函数** $E(x)$
- 再与 $\Phi(k)$ 的**原函数** $\varphi(x)$ 作**卷积**即可得到 $u(x,t)$

# Fourier 反变换计算

- 剩下的问题是对 $U(k,t)=\Phi(k)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 作 **Fourier 反变换**求出**原函数** $u(x,t)$
- 根据**卷积定理** $f_1(x)*f_2(x)\leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$，只要求出 $\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 的**原函数** $E(x)$
- 再与 $\Phi(k)$ 的**原函数** $\varphi(x)$ 作**卷积**即可得到 $u(x,t)$
- 由**反变换公式**得

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \mathscr{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-k^2a^2t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}(\cos kx+\mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}\cos kx\,\mathrm{d}k \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{4a^2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)
\end{aligned}
$$

- 倒数第二步用到**第 23 页**推出的**积分公式** $\left(\frac{1}{2a}\to a^2t,\ \frac{a}{2}\to\frac{1}{4a^2t}\right)$

$$
\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right),\quad a>0
$$

# 无源问题的解

- 由卷积表达式得到无源问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\mathrm{e}^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

# 无源问题的解

由卷积表达式得到无源问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\mathrm{e}^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

考虑特例 $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$，即初始时刻有一定的热量集中在 $x_0$ 处

将 $\varphi(\xi)=\delta(\xi-x_0)$ 代入解的表达式，得到 $t$ 时刻的温度分布为

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]
$$

这是 $\sigma=\sqrt{2a^2t}$ 的 **Gauss 分布**，其宽度随着 $t$ 的增大而增大

高度随着 $t$ 的增大而减小，但对 $x$ 积分始终为 $1$

# 无源问题的解

由卷积表达式得到无源问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\mathrm{e}^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

考虑特例 $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$，即初始时刻有一定的热量集中在 $x_0$ 处

将 $\varphi(\xi)=\delta(\xi-x_0)$ 代入解的表达式，得到 $t$ 时刻的温度分布为

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]
$$

这是 $\sigma=\sqrt{2a^2t}$ 的 **Gauss 分布**，其宽度随着 $t$ 的增大而增大

高度随着 $t$ 的增大而减小，但对 $x$ 积分始终为 $1$

解的动画演示

# 物理图像

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]$$

- 这样的结果表明，**热量不断向远处传播**，但**总能量守恒**
- 但是，**不管 $t$ 多么小**，只要 $t>0$，杆上**各处**的**温度均不为零**
- 这表明**温度**的**传播速度**为**无穷大**，显然**不符合**实际情况
- 引起这一结果的原因是推导热传导方程时**没有考虑**热传导过程的**微观机制**
- 即所用**模型过于简化**
- 不过，**当 $t$ 较大以后**，由热传导方程解得的结果还是**符合实际情况**的

# §4.2 有源问题

- 将 $u_2$ 改记为 $u$，有源问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

- 对 $x$ 作 Fourier 变换，设 $u(x,t) \leftrightarrow U(k,t)$，$f(x,t) \leftrightarrow F(k,t)$

- 对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + k^2 a^2 U = F(k,t) \\ U|_{t=0} = 0 \end{cases}$

- 这个常微分方程初值问题的解为 $U(k,t) = \displaystyle\int_0^t F(k,\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(k,t) &= F(k,t)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-t)} + \int_0^t F(k,\tau)[-k^2a^2\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau \\ &= F(k,t) - k^2a^2U(k,t) \end{aligned}$$

# 有源问题的解

- 由前面得到的 **Fourier 变换关系** $\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 推出

$$\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}$$

- 应用**卷积定理**求得**有源问题**的**解**为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[F(k,\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi\, \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \end{aligned}$$

- 第二步利用了 **Fourier 反变换**的**线性性**，即**交换**了对 $k$ 积分和对 $\tau$ 积分的**次序**

# 有源问题的解

- 由前面得到的 **Fourier 变换关系** $\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 推出

$$\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}$$

- 应用**卷积定理**求得**有源问题**的**解**为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[F(k,\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi\, \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \end{aligned}$$

- 第二步利用了 **Fourier 反变换**的**线性性**，即**交换**了对 $k$ 积分和对 $\tau$ 积分的**次序**
- 若 $f(x,t)=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)$，则 $u(x,t)=\dfrac{\theta(t-t_0)}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}}\exp\left[-\dfrac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-t_0)}\right]$
- 此时**热源只在** $t_0$ **时刻作用于** $x_0$ **点**，故 $t_0$ **时刻以前**温度一直保持**初始温度** $0$
- $t_0$ **时刻以后**热量**从** $x_0$ **点**向外传播，温度分布为 $\sigma=\sqrt{2a^2(t-t_0)}$ 的 **Gauss 分布**