

# 数学物理方法

## 第七章 分离变量法

### 第 1 节和第 2 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2022 年 10 月 21 日



# 第七章 分离变量法



本章开始研究**偏微分方程**的求解



对于**常微分方程**, 求解思路通常是先求出其**通解**, 其中含有若干个**任意常数**



任意常数的**个数**与常微分方程的**阶数相同**



然后用**附加条件** (通常是同一点的函数值和导数值) 来确定这些任意常数

# 第七章 分离变量法



本章开始研究**偏微分方程**的求解



对于**常微分方程**, 求解思路通常是先求出其**通解**, 其中含有若干个**任意常数**



**任意常数的个数**与常微分方程的**阶数相同**



然后用**附加条件**(通常是同一点的函数值和导数值)来确定这些任意常数



对于**偏微分方程**, 如果能求出**通解**, 则里面含有**任意函数**, 原则上由**定解条件**确定



但是, 这通常是**做不到的**



除了极少数简单情况, 人们并不知道怎样求出**偏微分方程**的**通解**



即使能求出**通解**, 如果**定解条件**比较复杂, 要想确定其中的**任意函数**也非常困难

# 第七章 分离变量法



本章开始研究**偏微分方程**的求解



对于**常微分方程**，求解思路通常是先求出其**通解**，其中含有若干个**任意常数**



**任意常数的个数**与常微分方程的**阶数相同**



然后用**附加条件**（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数



对于**偏微分方程**，如果能求出**通解**，则里面含有**任意函数**，原则上由**定解条件**确定



但是，这通常是**做不到的**



除了极少数简单情况，人们并不知道怎样求出**偏微分方程**的**通解**



即使能求出**通解**，如果**定解条件**比较复杂，要想确定其中的**任意函数**也非常困难



因此，对于**偏微分方程**，只能根据方程和定解条件的各种具体情况分别加以研究



**本章介绍的分离变量法**是一种比较有效的方法



它的基本思路是设法将**偏微分方程问题**转化为若干个**常微分方程问题**来求解

# §1 一维波动方程

## §1.1 分离变量

 本节以第一边值问题为例研究一维波动方程的求解

 考虑两端固定的弦在初始激励下的自由振动



 即给定初始位移和初始速度，求以后各时刻的位移  $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

 其中  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  是已知函数，分别给出弦上各点的初始位移和初始速度

# §1 一维波动方程

## §1.1 分离变量

本节以第一边值问题为例研究一维波动方程的求解

考虑两端固定的弦在初始激励下的自由振动



即给定初始位移和初始速度，求以后各时刻的位移  $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  是已知函数，分别给出弦上各点的初始位移和初始速度

现在尝试寻找  $u(x, t) = X(x)T(t)$  形式的特解，将它代入一维波动方程，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t)$$

其中 ' 表示对各自的自变量求导

# 常微分方程和初始条件

 从而  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$ , 左边与  $t$  无关, 右边与  $x$  无关

 两边相等, 应与  $x$  和  $t$  均无关, 即为常数, 记作  $-\lambda$

 由此得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

 初始条件给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

常微分方程和初始条件

从而  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$ ，左边与  $t$  无关，右边与  $x$  无关

 两边相等，应与  $x$  和  $t$  均无关，即为常数，记作  $-\lambda$

 由此得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

## 初始条件给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

然而，这两个初始条件是不可能成立的

它们表明  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  均与  $X(x)$  成正比，从而两者成正比

但实际问题中**初始位移**和**初始速度**是可以相当任意的，一般**不可能成正比**

  $X'' + \lambda X = 0$  的解是**三角函数** ( $\lambda > 0$ )、**指数函数** ( $\lambda < 0$ ) 或**线性函数** ( $\lambda = 0$ )

与  $X(x)$  成正比的  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  也必须是这些函数形式，这一般也是不可能的

# 边界条件

麦克风图标 **因此，我们暂时不要求  $u(x, t) = X(x)T(t)$  满足初始条件**

电影胶卷图标  **$x = 0$  和  $x = l$  处的**边界条件**给出**

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

电影胶卷图标 **注意到  $T(t)$  不能恒为零，否则  $u(x, t) = X(x)T(t)$  是**平庸解****

相机图标 **故必须要求**

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

# 边界条件

 因此，我们暂时不要求  $u(x, t) = X(x)T(t)$  满足初始条件

  $x = 0$  和  $x = l$  处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

 注意到  $T(t)$  不能恒为零，否则  $u(x, t) = X(x)T(t)$  是**平庸解**

 故必须要求

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

 如果  $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 、 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和**以上边界条件**同时得到满足

 那么形如  $u(x, t) = X(x)T(t)$  的解能够同时满足**一维波动方程**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

和**边界条件**  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

 至于**初始条件**，我们稍后再作考虑

## §1.2 本征值问题

 现在考虑方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ，它是常系数二阶线性齐次常微分方程

 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数

 在高等数学课中常用初始条件  $X(0) = c_0$  和  $X'(0) = c_1$  来确定这两个任意常数

 但现在的附加条件是边界条件  $X(0) = X(l) = 0$

## §1.2 本征值问题

 现在考虑方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ，它是常系数二阶线性齐次常微分方程

 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数

 在高等数学课中常用初始条件  $X(0) = c_0$  和  $X'(0) = c_1$  来确定这两个任意常数

 但现在的附加条件是边界条件  $X(0) = X(l) = 0$

 在这样的条件下，非平庸解并不一定存在，除非系数  $\lambda$  取某些特定值

 实际上，系数  $\lambda$  是在分离变量时引入的

 我们只知道  $\lambda$  是常数，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定

## §1.2 本征值问题

-  现在考虑方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ，它是常系数二阶线性齐次常微分方程
-  很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数
-  在高等数学课中常用初始条件  $X(0) = c_0$  和  $X'(0) = c_1$  来确定这两个任意常数
-  但现在的附加条件是边界条件  $X(0) = X(l) = 0$
-  在这样的条件下，非平庸解并不一定存在，除非系数  $\lambda$  取某些特定值
-  实际上，系数  $\lambda$  是在分离变量时引入的
-  我们只知道  $\lambda$  是常数，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定
-  也就是说，可以选择适当的  $\lambda$  值，使得方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  具有满足边界条件  $X(0) = X(l) = 0$  的非平庸解
-  这样的方程和边界条件构成了一个典型的本征值问题 
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$
-  它的特点是常微分方程中含有一个未定参数  $\lambda$ ，并附有边界条件

# 求解本征值问题

本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

 使问题存在**非平庸解**的  $\lambda$  值称为**本征值**, 相应的非平庸解称为**本征函数**

 在第十章 §5 将总结这类**本征值问题的一般提法**并阐述其**一般结论**

 这里直接对它进行求解

# 求解本征值问题

本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

使问题存在**非平庸解**的  $\lambda$  值称为**本征值**, 相应的非平庸解称为**本征函数**

在第十章 §5 将总结这类**本征值问题的一般提法**并阐述其**一般结论**

这里直接对它进行求解

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ )

则方程的解为  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$ , 其中  $C, D$  是**任意常数**

代入**边界条件**, 利用  $\cosh 0 = 1$  和  $\sinh 0 = 0$

得  $C = X(0) = 0$ ,  $X(l) = D \sinh \mu l = 0$

由于  $\mu l > 0$ , 有  $\sinh \mu l \neq 0$ , 故  $D = 0$

于是  $X(x) \equiv 0$ , 这是**平庸解**, 因而  $\lambda < 0$  不是本征值

$$X''(x) = \mu^2 X(x)$$

$$(\cosh \mu x)' = \mu \sinh \mu x$$

$$(\sinh \mu x)' = \mu \cosh \mu x$$

$\lambda = 0$  和  $\lambda > 0$  的情况

本征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$

2 如果  $\lambda = 0$ ，则方程的解为  $X(x) = Cx + D$ ，其中  $C, D$  是任意常数

代入边界条件,  $D = X(0) = 0$ ,  $X(l) = Cl = 0$ , 故  $C = 0$

从而  $X(x) \equiv 0$ ，这是平庸解，因而  $\lambda = 0$  不是本征值

$\lambda = 0$  和  $\lambda > 0$  的情况

$$\text{本征值问题} \left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{array} \right.$$

2 如果  $\lambda = 0$ ，则方程的解为  $X(x) = Cx + D$ ，其中  $C, D$  是任意常数

代入边界条件,  $D = X(0) = 0$ ,  $X(l) = Cl = 0$ , 故  $C = 0$

从而  $X(x) \equiv 0$ ，这是平庸解，因而  $\lambda = 0$  不是本征值

3 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )

则方程的解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数

 代入**边界条件**, 利用  $\cos 0 = 1$  和  $\sin 0 = 0$

得  $C = X(0) = 0$ ,  $X(l) = D \sin \mu l = 0$

为了得到非平庸解，必须使  $\sin \mu l = 0$ ，如此则  $D$  可取任意值

$$X''(x) = -\mu^2 X(x)$$

$$(\cos \mu x)' = -\mu \sin \mu x$$

$$(\sin \mu x)' = \mu \cos \mu x$$

# 本征值和本征函数

 因此,  $\sin \mu l = 0$  是决定**本征值**的方程, 它的解为  $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

 从而  $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  是**正弦函数**的零点

 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中已取  $D = 1$

# 本征值和本征函数

 因此,  $\sin \mu l = 0$  是决定**本征值**的方程, 它的解为  $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

 从而  $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  是**正弦函数**的零点

 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中已取  $D = 1$

 这是因为我们还要将**本征值**  $\lambda_n$  代回方程  $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$  以求解  $T(t)$

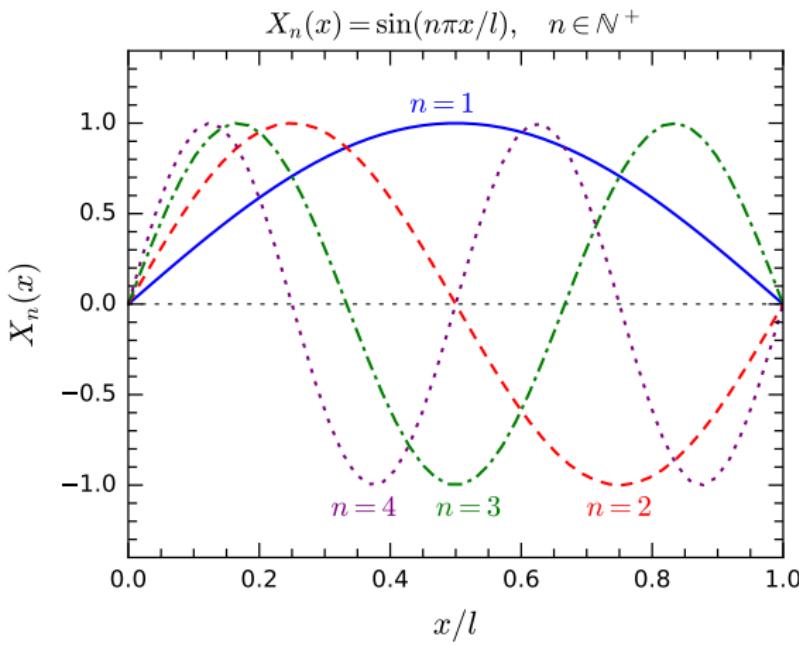
 求出来的解  $T_n(t)$  会包含两个**任意常数**

 我们关心的是  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ , 而不是  $X_n(x)$  或  $T_n(t)$  本身

 因此可以将**常数**  $D$  并入  $T_n(t)$  的**任意常数**之中, 在此处直接取  $D = 1$

# 本征函数的图像

本征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , 本征函数  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$



## §1.3 本征函数族的正交完备性

 在继续求解之前，先介绍**本征函数族**  $\left\{X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$  的两个重要性质

 首先，该**本征函数族在区间  $[0, l]$  上是正交的**

 这指的是两个**不同本征函数**  $X_m(x)$  和  $X_n(x)$  的**内积**  $(X_m(x), X_n(x))$  为零，即

$$(X_m(x), X_n(x)) \equiv \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n$$

 其中第一步是**内积的定义**

## §1.3 本征函数族的正交完备性

在继续求解之前，先介绍**本征函数族**  $\left\{X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$  的两个重要性质

首先，该本征函数族在区间  $[0, l]$  上是正交的

这指的是两个**不同本征函数**  $X_m(x)$  和  $X_n(x)$  的**内积**  $(X_m(x), X_n(x))$  为零，即

$$(X_m(x), X_n(x)) \equiv \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n$$

其中第一步是**内积的定义**

利用**积化和差公式**，有

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left[ \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{l}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = 0 \end{aligned}$$

# 本征函数的模方

本征函数  $X_n(x)$  与自身的内积称为它的模方  $\|X_n(x)\|^2$ ，有

$$\begin{aligned}\|X_n(x)\|^2 &\equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( x \Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{l}{2}\end{aligned}$$

# 本征函数的模方

↖ 本征函数  $X_n(x)$  与自身的内积称为它的模方  $\|X_n(x)\|^2$ ，有

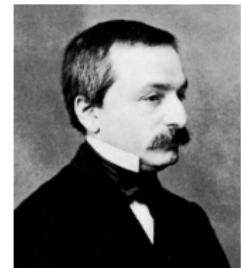
$$\begin{aligned}\|X_n(x)\|^2 &\equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( x \Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{l}{2}\end{aligned}$$

↗ 将上式与  $(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$  ( $m \neq n$ ) 合起来写作

$$(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \delta_{mn},$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^+$$

∅ 其中 Kronecker  $\delta$  符号定义为  $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$



Leopold Kronecker  
(1823–1891)

# 本征函数族的完备性

 其次，可以证明该本征函数族在区间  $[0, l]$  上是完备的

 这指的是，对于区间  $[0, l]$  上任意具有解析性质良好的函数  $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

 解析性质良好通常指具有分段连续、连续或可微等解析性质

# 本征函数族的完备性

 其次，可以证明该本征函数族在区间  $[0, l]$  上是完备的

 这指的是，对于区间  $[0, l]$  上任意具有解析性质良好的函数  $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

 解析性质良好通常指具有分段连续、连续或可微等解析性质

 将上式的求和指标  $n$  改写为  $k$ ，两边乘以  $\sin(n\pi x/l)$ ，对  $x$  从 0 到  $l$  积分，得

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{l}{2} \delta_{kn} = a_n \frac{l}{2}$$

 其中级数应当一致收敛，才能逐项积分，对此不作深究

 于是，展开系数表达为  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$

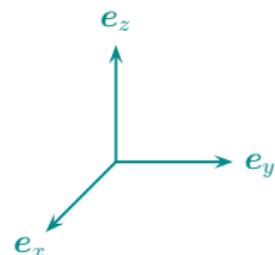
# 说明

在**本征函数族**  $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$  中去掉任何一个，剩下的就**不完备了**

这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量**  $e_x$ 、 $e_y$  和  $e_z$  构成三维空间的一组**基底**

三维空间中任何矢量 A 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备的**

倘若只有  $e_x$  和  $e_y$  两个，就**不完备了**



# 说明

在**本征函数族**  $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$  中去掉任何一个，剩下的就**不完备了**

这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量**  $e_x$ 、 $e_y$  和  $e_z$  构成三维空间的一组**基底**

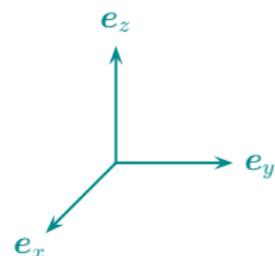
三维空间中任何矢量  $A$  都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备的**

倘若只有  $e_x$  和  $e_y$  两个，就**不完备了**

即使  $f(x)$  函数与**本征函数族不具有相同的边界条件**

上述**展开式基本上还是正确的**，只在**端点处可能不成立**

对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况



# 说明

在**本征函数族**  $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$  中去掉任何一个，剩下的就**不完备了**

这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量**  $e_x$ 、 $e_y$  和  $e_z$  构成三维空间的一组**基底**

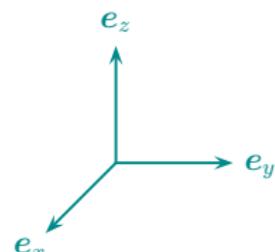
三维空间中任何矢量  $A$  都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备的**

倘若只有  $e_x$  和  $e_y$  两个，就**不完备了**

即使  $f(x)$  函数与**本征函数族不具有相同的边界条件**

上述**展开式基本上还是正确的**，只在**端点处可能不成立**

对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况



本课程遇到的**本征值问题**均属于 **Sturm-Liouville 型**，将在**第十章 §5** 作一般讨论

这类本征值问题的**本征函数族都是正交和完备的**

如果本征函数的形式比较复杂，则**正交性**难以直接验证，但可以利用它们满足的方程和边界条件加以证明

**完备性**的证明比较困难，本课程将直接引用结论而不作证明

## §1.4 一般解

 将本征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入  $T(t)$  满足的方程，得  $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

 其中  $A_n$  和  $B_n$  是任意常数

## §1.4 一般解

将**本征值**  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入  $T(t)$  满足的方程, 得  $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ , 解得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

其中  $A_n$  和  $B_n$  是任意常数

于是得到满足**一维波动方程**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  和**边界条件**  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  的一系列特解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

这些解称为**弦的本征振动**

## §1.4 一般解

 将**本征值**  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入  $T(t)$  满足的方程, 得  $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ , 解得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

 其中  $A_n$  和  $B_n$  是任意常数

 于是得到满足**一维波动方程**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  和**边界条件**  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  的一系列特解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 这些解称为**弦的本征振动**

 但是, 这些解一般并不满足**初始条件**  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  和  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$

 除非  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  同时正比于某个**本征函数**  $\sin \frac{n\pi x}{l}$

# 一般解

 现在，注意到方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  和边界条件  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  都是齐次的

 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

 于是可以写出下面的一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

# 一般解

现在，注意到方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  和边界条件  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  都是齐次的

所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

于是可以写出下面的一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

我们希望通过适当选取其中的任意常数  $A_n$  和  $B_n$

可以使给定的初始条件  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  和  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$  也得到满足

这样一来，它就满足定解问题的所有条件了

# 一般解

现在，注意到方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  和边界条件  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  都是齐次的

所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

于是可以写出下面的一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

我们希望通过适当选取其中的任意常数  $A_n$  和  $B_n$

可以使给定的初始条件  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  和  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$  也得到满足

这样一来，它就满足定解问题的所有条件了

注 一般解已不具有分离变量的形式，而且一般解不是通解

通解应该只满足偏微分方程，不同定解条件可通过调节通解中的任意函数来满足

# 关于一般解的说明

 上面的**一般解**除了满足**偏微分方程**，还满足给定的**边界条件**

 如果**边界条件**有所改变，那么它就**不成立了**，这时需要从头开始重新求解

 因此，这个**一般解**的通用性**非常有限**，它只能满足不同的**初始条件**

# 关于一般解的说明

 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件

 如果边界条件有所改变，那么它就不成立了，这时需要从头开始重新求解

 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件

 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件

 这里实际上假定了级数可以逐项求导

 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是非常苛刻的

# 关于一般解的说明

 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件

 如果边界条件有所改变，那么它就不成立了，这时需要从头开始重新求解

 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件

 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件

 这里实际上假定了级数可以逐项求导

 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是非常苛刻的

 这些条件归结为对系数  $A_n$  和  $B_n$  的限制，而它们由  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  决定

 所以最终归结为对  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的解析性质的限制，具体情况不再深入讨论

 今后我们假定所有形式操作（如逐项求导、逐项积分等）都是合法的

 不对其成立条件加以深究

## §1.5 用初始条件确定系数

 一般解  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$  对  $t$  求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

 代入初始条件, 推出

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x)$$

## §1.5 用初始条件确定系数

一般解  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$  对  $t$  求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件, 推出

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x)$$

根据前面的讨论, 本征函数族  $\{\sin(n\pi x/l)\}_{n=1}^{\infty}$  是完备的

只要  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的解析性质良好, 就能选取适当的  $A_n$  和  $B_n$  使以上两式成立

参照  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  和  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ , 有

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

# 分离变量法

🍒 给定  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的具体形式，就通过以上积分计算出系数  $A_n$  和  $B_n$

🍓 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案

# 分离变量法

- 🍒 给定  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的具体形式，就通过以上积分计算出系数  $A_n$  和  $B_n$
- 🍓 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案
- 🥝 由于以上方法的出发点是**特解**  $u(x, t) = X(x)T(t)$
- 🍐 它具有**分离变量**的形式，即  $x$  的函数与  $t$  的函数是**分离的**
- 🍏 而**一般解**是一系列这样的**特解的叠加**，因此这种方法称为**分离变量法**

# 分离变量法

🍒 给定  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的具体形式，就通过以上积分计算出系数  $A_n$  和  $B_n$

🍓 将它们代回一般解，就得到定解问题的最终答案

🥝 由于以上方法的出发点是特解  $u(x, t) = X(x)T(t)$

🍐 它具有分离变量的形式，即  $x$  的函数与  $t$  的函数是分离的

🍏 而一般解是一系列这样的特解的叠加，因此这种方法称为分离变量法

🍊 它是 J. Fourier 在 18 世纪初最先引入的，所以也称为 Fourier 方法

🍎 实际上，一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

就是  $x$  的正弦 Fourier 级数

芒果 一般解中的每一项都是驻波，所以这种方法又称为驻波法



Joseph Fourier  
(1768–1830)

## §1.6 解的物理图像

 由  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  可以看出，弦上的一般振动是一系列本征振动的叠加

 每一个本征振动的形式为  $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$

 令  $C_n \equiv \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ,  $\delta_n \equiv \arctan \frac{B_n}{A_n}$ , 则

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \delta_n, \quad \frac{B_n}{C_n} = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \delta_n$$

## §1.6 解的物理图像

 由  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  可以看出，弦上的一般振动是一系列本征振动的叠加

 每一个本征振动的形式为  $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$

 令  $C_n \equiv \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ,  $\delta_n \equiv \arctan \frac{B_n}{A_n}$ , 则

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \delta_n, \quad \frac{B_n}{C_n} = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \delta_n$$

 记  $k_n \equiv \frac{n\pi}{l}$ ,  $\omega_n \equiv k_n a = \frac{n\pi a}{l}$ , 推出

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= C_n \sin k_n x \left( \frac{A_n}{C_n} \cos \omega_n t + \frac{B_n}{C_n} \sin \omega_n t \right) \\ &= C_n \sin k_n x (\cos \omega_n t \cos \delta_n + \sin \omega_n t \sin \delta_n) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n) \end{aligned}$$

 这个结果代表一列驻波，对于给定的  $n$ ，弦上各点以同样的频率  $\omega_n$  振动

 初相位  $-\delta_n$  也是各点相同，只是在节点两侧相差  $\pi$  (因为振幅的符号相反)

 振幅  $|C_n \sin k_n x|$  则是位置的函数

## §1.6 解的物理图像

 由  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  可以看出，弦上的一般振动是一系列本征振动的叠加

 每一个本征振动的形式为  $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$

 令  $C_n \equiv \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ,  $\delta_n \equiv \arctan \frac{B_n}{A_n}$ , 则

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \delta_n, \quad \frac{B_n}{C_n} = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \delta_n$$

 记  $k_n \equiv \frac{n\pi}{l}$ ,  $\omega_n \equiv k_n a = \frac{n\pi a}{l}$ , 推出

驻波的动画演示

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= C_n \sin k_n x \left( \frac{A_n}{C_n} \cos \omega_n t + \frac{B_n}{C_n} \sin \omega_n t \right) \\ &= C_n \sin k_n x (\cos \omega_n t \cos \delta_n + \sin \omega_n t \sin \delta_n) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n) \end{aligned}$$

 这个结果代表一列驻波，对于给定的  $n$ ，弦上各点以同样的频率  $\omega_n$  振动

 初相位  $-\delta_n$  也是各点相同，只是在节点两侧相差  $\pi$  (因为振幅的符号相反)

 振幅  $|C_n \sin k_n x|$  则是位置的函数

# 驻波的特点

  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$  只决定于系统的性质 (弦的长度、线密度和张力) 和边界条件, 而与初始条件无关, 故称为本征频率

 另一方面,  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  和  $\delta_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$  则与初始条件有关

  $n = 1$  的振动称为基波, 频率为  $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$

 由于  $\omega_n = n\omega_1$ , 故  $n > 1$  的振动称为  $n$  次谐波

# 驻波的特点

znal  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$  只决定于系统的性质 (弦的长度、线密度和张力) 和边界条件, 而与初始条件无关, 故称为本征频率

蛋糕  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  和  $\delta_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$  则与初始条件有关

蛋糕  $n = 1$  的振动称为基波, 频率为  $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$

蛋糕 由于  $\omega_n = n\omega_1$ , 故  $n > 1$  的振动称为  $n$  次谐波

饼干 驻波  $u_n(x, t) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n)$  上有一些点振幅为零

甜甜圈 这些点永远不动, 称为波节或节点

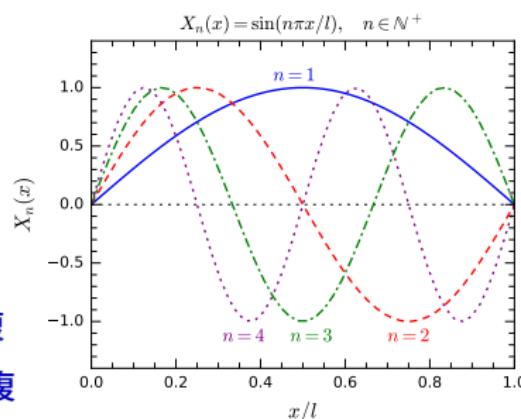
剪刀 节点满足  $k_n x = \frac{n\pi x}{l} = m\pi$ , 因而位置在

$$x = \frac{m}{n} l, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

糖葫芦 可见,  $n$  次谐波包括端点共有  $n + 1$  个节点

爆米花 基波除端点外没有节点, 振幅最大的点称为波腹

寿司 相邻节点间有一个波腹,  $n$  次谐波共有  $n$  个波腹



# 特例

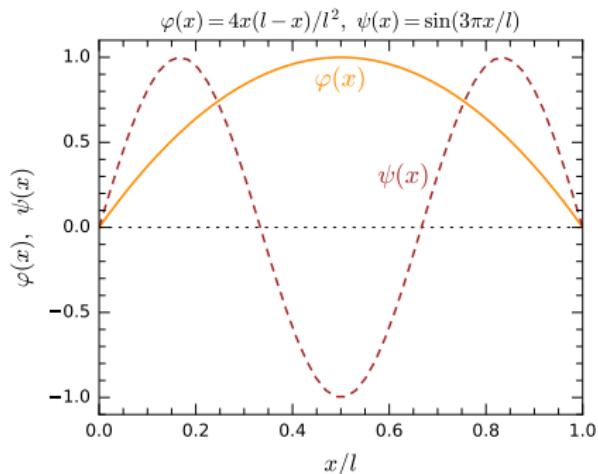
考慮特例

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 3)$$



一般解化为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a} \sin \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned}$$

# 特例

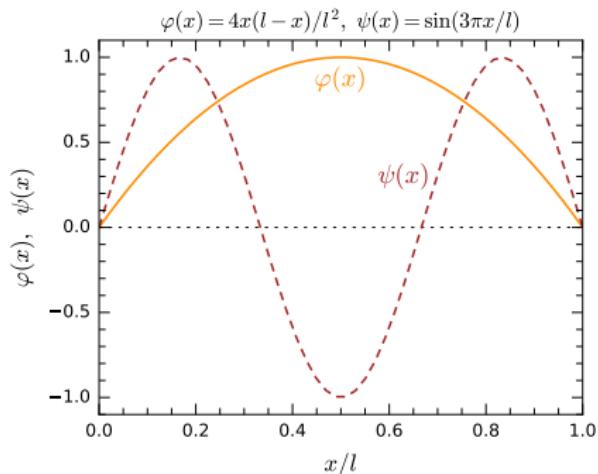
考慮特例

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 3)$$



一般解化为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a} \sin \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned}$$

解的动画演示

## §2 一维热传导方程

### §2.1 分离变量与本征值问题



本节以第二边值问题为例研究一维热传导方程的求解



考虑侧面和两端绝热的细杆的热传导问题



即给定初始温度分布，求以后各时刻的温度  $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



其中  $\varphi(x)$  是已知函数，给出杆上各点的初始温度分布

## §2 一维热传导方程

### §2.1 分离变量与本征值问题



本节以第二边值问题为例研究一维热传导方程的求解



考虑侧面和两端绝热的细杆的热传导问题



即给定初始温度分布，求以后各时刻的温度  $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



其中  $\varphi(x)$  是已知函数，给出杆上各点的初始温度分布



现在尝试寻找  $u(x, t) = X(x)T(t)$  形式的特解，将它代入一维热传导方程，得

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t)$$

# 本征值问题

从而  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$ , 左边与  $t$  无关, 右边与  $x$  无关, 必为常数, 记作  $-\lambda$

由此得到两个常微分方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

$x = 0$  和  $x = l$  处的边界条件给出

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

从而得到本征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

# 本征值问题

从而  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$ , 左边与  $t$  无关, 右边与  $x$  无关, 必为常数, 记作  $-\lambda$

由此得到两个常微分方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

$x = 0$  和  $x = l$  处的边界条件给出

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

从而得到本征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数, 有  $X'(x) = C\mu \sinh \mu x + D\mu \cosh \mu x$

由于  $\mu > 0$ ,  $X'(0) = D\mu = 0$  表明  $D = 0$

由于  $l > 0$ ,  $X'(l) = C\mu \sinh \mu l = 0$  表明  $C = 0$

于是得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ , 因而  $\lambda < 0$  不是本征值

# 本征值和本征函数

2 如果  $\lambda = 0$ ，则解为  $X(x) = Cx + D$ ，其中  $C$ 、 $D$  是任意常数

由于  $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$ ，故  $C = 0$ ，而  $D$  可任意

于是得到本征值  $\lambda_0 = 0$ ，本征函数  $X_0(\phi) = 1$

注意这里与第一边值问题的区别，如果遗漏这个解，本征函数族将是不完备的

# 本征值和本征函数

2 如果  $\lambda = 0$ ，则解为  $X(x) = Cx + D$ ，其中  $C$ 、 $D$  是任意常数

👑 由于  $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$ ，故  $C = 0$ ，而  $D$  可任意

👸 于是得到本征值  $\lambda_0 = 0$ ，本征函数  $X_0(\phi) = 1$

👑 注意这里与第一边值问题的区别，如果遗漏这个解，本征函数族将是不完备的

3 如果  $\lambda > 0$ ，令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

🎓 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $X'(x) = -C\mu \sin \mu x + D\mu \cos \mu x$

👨‍🎓 由  $X'(0) = D\mu = 0$  得  $D = 0$ ，从而  $X'(l) = -C\mu \sin \mu l = 0$

# 本征值和本征函数

2 如果  $\lambda = 0$ ，则解为  $X(x) = Cx + D$ ，其中  $C$ 、 $D$  是任意常数

由于  $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$ ，故  $C = 0$ ，而  $D$  可任意

于是得到本征值  $\lambda_0 = 0$ ，本征函数  $X_0(\phi) = 1$

注意这里与第一边值问题的区别，如果遗漏这个解，本征函数族将是不完备的

3 如果  $\lambda > 0$ ，令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $X'(x) = -C\mu \sin \mu x + D\mu \cos \mu x$

由  $X'(0) = D\mu = 0$  得  $D = 0$ ，从而  $X'(l) = -C\mu \sin \mu l = 0$

为了得到非平庸解，必须使  $\sin \mu l = 0$ ，如此则  $C$  可任意

因此  $\sin \mu l = 0$  是决定本征值的方程，它的解为  $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

从而  $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  是正弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

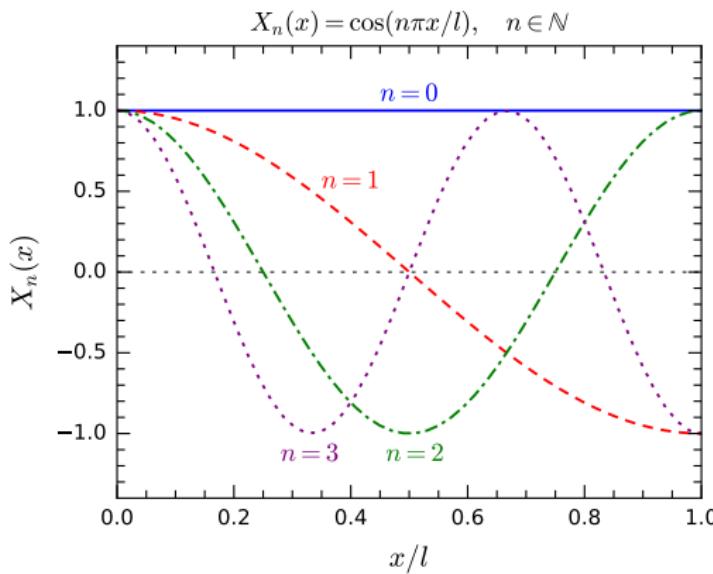
其中已取  $C = 1$

# 本征函数的图像

注意  $X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$  在  $n = 0$  时退化为  $X_0(x) = 1$

因此，可以把所有的本征值和本征函数统一写成

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$$



## §2.2 本征函数族的正交完备性

 与上节情况类似，**本征函数族**  $\left\{X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$  具有**正交完备性**

 首先，该本征函数族在区间  $[0, l]$  上是**正交的**：

$$(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}^+, \quad m \neq n$$

$$(X_0(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 利用**积化和差公式**，有

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} + \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{l}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{l}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l = 0$$

# 本征函数的模方

 本征函数的模方 定义为  $\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx$

 当  $n = 0$  时,  $\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l dx = l$

 当  $n \neq 0$  时, 有

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \cos \frac{2n\pi x}{l} + 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l + x \Big|_0^l \right) = \frac{l}{2}$$

 归纳起来, 模方 表达为

$$\|X_n(x)\|^2 = \begin{cases} l, & n = 0 \\ \frac{l}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

# 本征函数族的完备性

其次，可以证明该本征函数族在区间  $[0, l]$  上是完备的

从而，对于区间  $[0, l]$  上任意解析性质良好的函数  $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

# 本征函数族的完备性

 其次，可以证明该本征函数族在区间  $[0, l]$  上是完备的

 从而，对于区间  $[0, l]$  上任意解析性质良好的函数  $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

 将上式的求和指标  $n$  改写为  $k$ ，两边乘以  $\cos(n\pi x/l)$ ，对  $x$  从 0 到  $l$  积分，得

$$\int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = a_n \|X_n(x)\|^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

 第二步用到本征函数族的正交性，只有  $k = n$  那一项的贡献非零

 于是，展开系数表达为

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

## §2.3 一般解

 将**本征值**  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入  $T(t)$  满足的方程，得  $T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中  $A_0$  和  $A_n$  是**任意常数**

 于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = A_0$$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

## §2.3 一般解

 将**本征值**  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入  $T(t)$  满足的方程，得  $T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中  $A_0$  和  $A_n$  是**任意常数**

 于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = A_0$$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 将这些特解叠加，就得到满足**方程**和**边界条件**的**一般解**

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

 它代表**细杆两端绝热时温度分布的最一般形式**

 适当选取其中的**任意常数**  $A_0$  和  $A_n$ ，就可以满足给定的**初始条件**

## §2.4 用初始条件确定系数

 将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

 由于本征函数族  $\{\cos n\pi x/l\}_{n=0}^{\infty}$  是完备的，只要  $\varphi(x)$  具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 给定  $\varphi(x)$  的具体形式，就可以计算出以上积分

 将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

 如果初始时刻不是  $t = 0$ ，而是  $t = \tau$ ，那么只需将原一般解中的  $t$  改成  $t - \tau$

 就得到相应的一般解  $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-\lambda_n a^2(t - \tau)] \cos \frac{n\pi x}{l}$

 其中系数  $A_0$  和  $A_n$  由初始条件  $u|_{t=\tau} = \varphi(x)$  决定，仍然由上面的表达式给出

## §2.5 解的物理图像

 在一般解  $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$  中

 除了第一项，各项都有指数衰减因子  $\exp(-\lambda_n a^2 t)$

 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性

 而常数项  $A_0$  则是第二类边界条件所特有的

## §2.5 解的物理图像

 在一般解  $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$  中

 除了第一项，各项都有指数衰减因子  $\exp(-\lambda_n a^2 t)$

 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性

 而常数项  $A_0$  则是第二类边界条件所特有的

 当  $t \rightarrow \infty$  时，有  $u(x, t) \rightarrow A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$

 注意，如果在一般解表达式中不把常数项  $A_0$  单独写出来，而且忽视  $\lambda_0 = 0$  这一事实，那么就很容易得出  $u(x, t) \rightarrow 0$  的错误结果

 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值  $A_0$

## §2.5 解的物理图像

 在一般解  $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$  中

 除了第一项，各项都有指数衰减因子  $\exp(-\lambda_n a^2 t)$

 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性

 而常数项  $A_0$  则是第二类边界条件所特有的

 当  $t \rightarrow \infty$  时，有  $u(x, t) \rightarrow A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$

 注意，如果在一般解表达式中不把常数项  $A_0$  单独写出来，而且忽视  $\lambda_0 = 0$  这一事实，那么就很容易得出  $u(x, t) \rightarrow 0$  的错误结果

 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值  $A_0$

 这是因为杆的侧面和两端都是绝热的，热量只能在内部流动

 根据热传导的 Fourier 定律，热量总是从高温处流向低温处，最后温度趋于均匀

 根据能量守恒定律，最终温度只能是初始温度的平均值

# 特例

 考虑**特例**  $\varphi(x) = \sin^2 \frac{2\pi x}{l}$ , 由  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi x}{l}$$

 比较两边, 得到系数

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \ (n \neq 0, 4)$$

 定解问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left[ - \left( \frac{4\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cos \frac{4\pi x}{l}$$

# 特例

 考虑**特例**  $\varphi(x) = \sin^2 \frac{2\pi x}{l}$ , 由  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  得

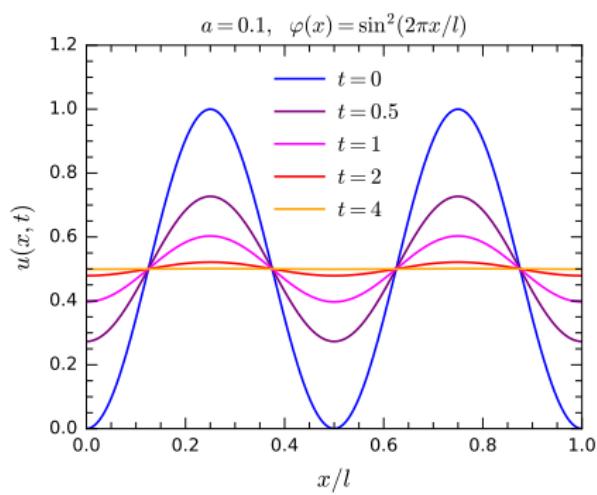
$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi x}{l}$$

 比较两边, 得到系数

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \ (n \neq 0, 4)$$

 定解问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left[ -\left( \frac{4\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cos \frac{4\pi x}{l}$$



解的动画演示