量 子 场 论

第 7 章　量子电动力学

7.1 节和 7.2 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 5 月 25 日

第 7 章　量子电动力学

- 除了**中微子**之外，基本费米子都携带**电荷**，参与**电磁相互作用**
- **下表**列出基本费米子的电荷和质量，其中标示的电荷是**正费米子电荷**

标准模型中的基本费米子

费米子 f	带电轻子 e, μ, τ	中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ	下型夸克 d, s, b	上型夸克 u, c, t
电荷 Q_f	-1	0	$-1/3$	$2/3$
质量 m_f	$m_e = 0.5110$ MeV $m_\mu = 105.7$ MeV $m_\tau = 1.777$ GeV	$m_{\nu_e} = 0$ $m_{\nu_\mu} = 0$ $m_{\nu_\tau} = 0$	$m_d = 4.67$ MeV $m_s = 93$ MeV $m_b = 4.78$ GeV	$m_u = 2.16$ MeV $m_c = 1.67$ GeV $m_t = 172.8$ GeV

- **带电轻子**的**正粒子带负电**，记作 e^-、μ^-、τ^-；**反粒子带正电**，记作 e^+、μ^+、τ^+
- u、d、s 夸克质量是 2 GeV 能标处的流夸克质量，b、c、t 夸克质量是极点质量
- **标准模型**中 3 代中微子都**没有质量**，但 1998 年实验发现**中微子振荡**，表明**中微子具有质量**，所以需要**扩充**标准模型才能正确描述中微子物理

量子电动力学 (QED)

❤️ **电荷**是电磁相互作用的**源**，**单位电荷量** e 表征电磁相互作用**强度**

💙 **光子**是传递电磁相互作用的**媒介粒子**

💜 描述带电费米子如何参与**电磁相互作用**的量子场理论称为**量子电动力学** (quantum electrodynamics)，简称 **QED**，它是**标准模型**的一个组成部分

💚 QED 于 20 世纪中叶由**朝永振一郎**、**Julian Schwinger**、**Richard Feynman** 和 **Freeman Dyson** 建立起来，是第一个**自洽**的**相对论性量子场论**

朝永振一郎
(1906–1979)

Julian Schwinger
(1918–1994)

Richard Feynman
(1918–1988)

Freeman Dyson
(1923–2020)

7.1 节 U(1) 规范对称性与 QED

- 记 f 为标准模型中某种带电的基本费米子，它对应于一个 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$
- 写下相应的自由场拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)$$

- m_f 是费米子 f 的质量
- 如 4.5.3 小节所述，$\mathcal{L}_{\text{free}}$ 具有 U(1) 整体对称性

7.1 节 U(1) 规范对称性与 QED

- 记 f 为标准模型中某种带电的基本费米子，它对应于一个 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$
- 写下相应的自由场拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)$$

- m_f 是费米子 f 的质量
- 如 4.5.3 小节所述，$\mathcal{L}_{\text{free}}$ 具有 U(1) 整体对称性
- 具体来说，对 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta}\psi_f(x)$$

- Q_f 是正费米子 f 的电荷，也看成是场 $\psi_f(x)$ 的电荷；θ 是连续变换参数
- 从而，$\bar{\psi}'_f(x) = \bar{\psi}_f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Q_f\theta}$，拉氏量不变：

$$\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}'_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi'_f - m_f\bar{\psi}'_f\psi'_f = \mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f = \mathcal{L}_{\text{free}}$$

- 根据 Noether 定理，电荷守恒定律成立

U(1) 规范变换

- 将变换参数 θ 改为**依赖于** x^μ 的 **Lorentz 标量函数** $\theta(x)$，就变成 **U(1) 规范变换**

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$$

- 由于 $\partial_\mu\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$
- 不会得到 $\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathcal{L}_{\text{free}}$，故**不存在**相应的对称性
- 原因是 $\partial_\mu\psi'_f(x)$ 包含正比于 $\partial_\mu\theta(x)$ 的**第二项**，导致 $\partial_\mu\psi'_f(x) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x)$

U(1) 规范变换

- 将变换参数 θ 改为**依赖于** x^μ 的 **Lorentz 标量函数** $\theta(x)$，就变成 **U(1) 规范变换**

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$$

- 由于 $\partial_\mu\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$
- 不会得到 $\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathcal{L}_{\text{free}}$，故**不存在**相应的对称性
- 原因是 $\partial_\mu\psi'_f(x)$ 包含正比于 $\partial_\mu\theta(x)$ 的**第二项**，导致 $\partial_\mu\psi'_f(x) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x)$
- 为了得到对称性，将作用在 $\psi_f(x)$ 上的 ∂_μ 替换为**协变导数** (covariant derivative)

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}Q_f e A_\mu(x)$$

- $A_\mu(x)$ 是**电磁场**，e 是**单位电荷量**
- 要求在 $\psi_f(x)$ 作 **U(1) 规范变换**的同时，电磁场 $A_\mu(x)$ 作**规范变换**

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)$$

- **3.5.2 小节**中用到的**规范变换函数** $\chi(x)$ 与 $\theta(x)$ 的关系为 $\theta(x) = e\chi(x)$

U(1) 规范对称性

这样一来，$D_\mu\psi_f(x)$ **的变换形式就与** $\psi_f(x)$ **相同**：

$$
\begin{aligned}
[D_\mu\psi_f(x)]' &= \partial_\mu\psi'_f(x) - \mathrm{i}Q_f e A'_\mu(x)\psi'_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&\quad - \mathrm{i}Q_f e\left[A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}[\partial_\mu - \mathrm{i}Q_f e A_\mu(x)]\psi_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}D_\mu\psi_f(x)
\end{aligned}
$$

只要将**拉氏量**修改为 $\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu D_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)$

那么，同时让 $\psi_f(x)$ **作 U(1) 规范变换** $\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$、$A_\mu(x)$ **作规范变换** $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + e^{-1}\partial_\mu\theta(x)$ 会使得 $\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}$

U(1) 规范对称性

这样一来，$D_\mu\psi_f(x)$ **的变换形式就与** $\psi_f(x)$ **相同**：

$$
\begin{aligned}
[D_\mu\psi_f(x)]' &= \partial_\mu\psi'_f(x) - \mathrm{i}Q_f e A'_\mu(x)\psi'_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&\quad - \mathrm{i}Q_f e\left[A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}[\partial_\mu - \mathrm{i}Q_f e A_\mu(x)]\psi_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}D_\mu\psi_f(x)
\end{aligned}
$$

只要将**拉氏量**修改为 $\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu D_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)$

那么，同时让 $\psi_f(x)$ **作 U(1) 规范变换** $\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$、$A_\mu(x)$ **作规范变换** $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + e^{-1}\partial_\mu\theta(x)$ 会使得 $\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}$

这种对称性称为 **U(1) 规范对称性**

3.5.2 小节表明，当电磁场 $A_\mu(x)$ 作**规范变换**时，场强张量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 不变，因此**动能项** $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 是规范对称性所**允许**的

但是，**质量项** $m^2 A_\mu A^\mu/2$ 不满足规范对称性，即**规范对称性禁止光子具有质量**

QED 拉氏量

现在写下量子电动力学的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \sum_f (\mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m_f \bar{\psi}_f \psi_f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad f = e,\, \mu,\, \tau,\, d_i,\, s_i,\, b_i,\, u_i,\, c_i,\, t_i$$

$i = 1, 2, 3$ 是夸克的颜色指标

$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 具有 U(1) 规范对称性，因此称 QED 是 U(1) 规范理论 (gauge theory)，电磁场是 U(1) 规范场 (gauge field)，光子是规范玻色子 (gauge boson)

QED 拉氏量

现在写下量子电动力学的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \sum_f (\mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m_f \bar{\psi}_f \psi_f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad f = e,\, \mu,\, \tau,\, d_i,\, s_i,\, b_i,\, u_i,\, c_i,\, t_i$$

$i = 1, 2, 3$ 是夸克的颜色指标

$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 具有 U(1) 规范对称性，因此称 QED 是 U(1) 规范理论 (gauge theory)，电磁场是 U(1) 规范场 (gauge field)，光子是规范玻色子 (gauge boson)

$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 包含场的动能项和质量项

将协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}Q_f e A_\mu(x)$ 展开，发现 $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 还包含相互作用项

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \sum_f Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 描述费米子 f 的电磁相互作用

这样的相互作用称为规范相互作用，而单位电荷量 e 是一个规范耦合常数

电磁流和 Maxwell 方程

- 容易看出，$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 也具有 U(1) **整体对称性**
- 类似于 4.5.3 小节的做法，根据 **Noether 定理**将相应**守恒流**定义成

$$J^{\mu}_{\mathrm{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_f$$

- J^{μ}_{EM} 称为**电磁流** (electromagnetic current)，满足**电磁流守恒方程** $\partial_\mu J^{\mu}_{\mathrm{EM}} = 0$

电磁流和 Maxwell 方程

- 容易看出，$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 也具有 $\mathrm{U}(1)$ **整体对称性**
- 类似于 4.5.3 小节的做法，根据 **Noether 定理**将相应**守恒流**定义成

$$J^{\mu}_{\mathrm{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_f$$

- J^{μ}_{EM} 称为**电磁流** (electromagnetic current)，满足**电磁流守恒方程** $\partial_\mu J^{\mu}_{\mathrm{EM}} = 0$
- 求导得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial A_\nu} = J^{\nu}_{\mathrm{EM}}$
- **Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^{\nu}_{\mathrm{EM}}$
- 故电磁场的经典运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^{\nu}_{\mathrm{EM}}$$

- 这是**有源**的 **Maxwell 方程**，**源**为带电费米子的**电磁流**

费米子场经典运动方程

- 求导得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} = {\rm i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial \psi_f} = -m_f \bar{\psi}_f + Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$，**Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial \psi_f} = {\rm i}(\partial_\mu \bar{\psi}_f)\gamma^\mu + m_f \bar{\psi}_f - Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$
- 取厄米共轭，利用 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$，有

$$0 = -{\rm i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi_f + m_f \gamma^0 \psi_f - Q_f e A_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi_f = -\gamma^0 ({\rm i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f + Q_f e A_\mu \gamma^\mu)\psi_f$$

- 于是推出**费米子场 ψ_f 的经典运动方程** $({\rm i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = 0$
- 这个方程只是将 **Dirac 方程**中的**普通导数**替换成**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu - {\rm i}Q_f e A_\mu$

费米子场经典运动方程

- 求导得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} = {\rm i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial \psi_f} = -m_f \bar{\psi}_f + Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$，**Euler-Lagrange** 方程给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial \psi_f} = {\rm i}(\partial_\mu \bar{\psi}_f)\gamma^\mu + m_f \bar{\psi}_f - Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$
- 取厄米共轭，利用 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$，有

$$0 = -{\rm i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi_f + m_f \gamma^0 \psi_f - Q_f e A_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi_f = -\gamma^0({\rm i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f + Q_f e A_\mu \gamma^\mu)\psi_f$$

- 于是推出**费米子场 ψ_f 的经典运动方程** $({\rm i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = 0$
- 这个方程只是将 **Dirac 方程**中的**普通导数**替换成**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu - {\rm i}Q_f e A_\mu$
- 对**运动方程左乘** $({\rm i}\gamma^\nu D_\nu + m_f)$，得

$$0 = ({\rm i}\gamma^\nu D_\nu + m_f)[({\rm i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f] = (-\gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu - m_f^2)\psi_f = -(\not{D}^2 + m_f^2)\psi_f$$

$$\begin{aligned}\not{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu) \\ &= \frac{1}{2}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) D_\mu D_\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu] = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu\end{aligned}$$

协变导数的对易子

- 调整 Lorentz 指标，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu + [\gamma^\nu,\gamma^\mu]D_\nu D_\mu)\\ &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu - [\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\nu D_\mu) = \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]\end{aligned}$$

- 根据 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$，有 $\not{D}^2 = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu,D_\nu]$

协变导数的对易子

- 调整 Lorentz 指标，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu + [\gamma^\nu,\gamma^\mu]D_\nu D_\mu)\\ &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu - [\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\nu D_\mu) = \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]\end{aligned}$$

- 根据 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$，有 $\not{D}^2 = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu,D_\nu]$
- 对 ψ_f 连续作用两次协变导数，得

$$\begin{aligned}D_\mu D_\nu \psi_f &= (\partial_\mu - \mathrm{i}Q_f e A_\mu)(\partial_\nu\psi_f - \mathrm{i}Q_f e A_\nu \psi_f)\\ &= \partial_\mu\partial_\nu\psi_f - \mathrm{i}Q_f e\partial_\mu(A_\nu\psi_f) - \mathrm{i}Q_f e A_\mu\partial_\nu\psi_f - Q_f^2 e^2 A_\mu A_\nu \psi_f\end{aligned}$$

- 故 $[D_\mu, D_\nu]$ 对 ψ_f 的作用为

$$\begin{aligned}&[D_\mu,D_\nu]\psi_f = D_\mu D_\nu\psi_f - D_\nu D_\mu\psi_f\\ &= -iQ_f e[\partial_\mu(A_\nu\psi_f) + A_\mu\partial_\nu\psi_f - \partial_\nu(A_\mu\psi_f) - A_\nu\partial_\mu\psi_f]\\ &= -\mathrm{i}Q_f e[(\partial_\mu A_\nu)\psi_f + A_\nu\partial_\mu\psi_f + A_\mu\partial_\nu\psi_f - (\partial_\nu A_\mu)\psi_f - A_\mu\partial_\nu\psi_f - A_\nu\partial_\mu\psi_f]\\ &= -\mathrm{i}Q_f e(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi_f = -\mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}\psi_f\end{aligned}$$

ψ_f 的运动方程

- 由 ψ_f 场构型的任意性有

$$[D_\mu, D_\nu] = -\mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}$$

- 也就是说，**协变导数的对易子** $[D_\mu, D_\nu]$ 实际上不包含对 ψ_f 的求导操作，而直接对应于**场强张量** $F_{\mu\nu}$
- $\not{D}^2 = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]$ 进一步化为

$$\not{D}^2 = D^2 - \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

ψ_f 的运动方程

由 ψ_f 场构型的任意性有

$$[D_\mu, D_\nu] = -\mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}$$

也就是说，**协变导数的对易子** $[D_\mu, D_\nu]$ 实际上不包含对 ψ_f 的求导操作，而直接对应于**场强张量** $F_{\mu\nu}$

$\not{D}^2 = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]$ 进一步化为

$$\not{D}^2 = D^2 - \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

于是，ψ_f **的运动方程** $(\not{D}^2 + m_f^2)\psi_f = 0$ 变成

$$\left(D^2 + m_f^2 - \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi_f = 0$$

与自由 Dirac 旋量场满足的 **Klein-Gordon 方程** $(\partial^2 + m^2)\psi_f = 0$ 相比，不仅**普通导数**替换成**协变导数**，还多出一个正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项

电子场的运动方程

由于 $F_{ij} = F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$ ， $F_{0i} = -F^{0i} = E^i$ ，

$$\sigma^{ij} = 2S^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = 2S^{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = F_{ij}\sigma^{ij} + 2F_{0i}\sigma^{0i} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}B^k\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} + 2\mathrm{i}E^i\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$= -2\delta^{kl}\begin{pmatrix}B^k\sigma^l & \\ & B^k\sigma^l\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E^i\sigma^i & \\ & \mathrm{i}E^i\sigma^i\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

电子场的运动方程

由于 $F_{ij} = F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$，$F_{0i} = -F^{0i} = E^i$，

$$\sigma^{ij} = 2S^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = 2S^{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = F_{ij}\sigma^{ij} + 2F_{0i}\sigma^{0i} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}B^k\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} + 2\mathrm{i}E^i\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$= -2\delta^{kl}\begin{pmatrix}B^k\sigma^l & \\ & B^k\sigma^l\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E^i\sigma^i & \\ & \mathrm{i}E^i\sigma^i\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

电子场 ψ_e 的运动方程化为

$$\left[(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)^2 + m_e^2 - e\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi_e = 0$$

这里采用缩写 $(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)^2 \equiv (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu + \mathrm{i}eA^\mu)$，即 Lorentz 矢量的平方指它的自我内积

Schrödinger-Pauli 方程

- 电子场 $\psi_e(x)$ 的运动方程

$$\left[(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)^2 + m_e^2 - e\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi_e = 0$$

在非相对论近似下对应于量子力学里的 **Schrödinger-Pauli 方程**

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = \left[\frac{1}{2m_e}(-\mathrm{i}\nabla + e\mathbf{A})^2 - eA^0 + \mu_\mathrm{B}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]|\Psi\rangle$$

- 它描述电子在电磁场中的运动
- $|\Psi\rangle$ 是电子的自旋双重态，$\mu_\mathrm{B} = \dfrac{e}{2m_e}$ 是 **Bohr 磁子** (magneton)
- 可见，正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项描述费米子的内禀磁偶极矩 (magnetic dipole moment)
- $\pm\mathrm{i}\,\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 项是相对论修正

QED 的 Feynman 规则

由于**电磁场**是**无质量矢量场**，如 3.5.2 小节所述，对 QED 进行**正则量子化**时，需要加入**规范固定项** $-(2\xi)^{-1}(\partial_\mu A^\mu)^2$

可采用 **Feynman 规范** ($\xi = 1$) 以得到简单的结果

QED 的 Feynman 规则

- 由于**电磁场**是**无质量矢量场**，如 3.5.2 小节所述，对 QED 进行**正则量子化**时，需要加入**规范固定项** $-(2\xi)^{-1}(\partial_\mu A^\mu)^2$
- 可采用 **Feynman 规范** ($\xi = 1$) 以得到简单的结果
- 根据第 6 章知识，**QED 的动量空间 Feynman 规则**如下

1. 正费米子 f 入射外线：f, λ $= u(\mathbf{p}, \lambda)$
2. 反费米子 $\bar{f}$ 入射外线：$\bar{f}, \lambda$ $= \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$
3. 正费米子 f 出射外线： $f, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$
4. 反费米子 $\bar{f}$ 出射外线： $\bar{f}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$
5. 费米子 f 传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_f + \mathrm{i}\epsilon}$

QED 的 Feynman 规则

- 这里将光子记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆

6. 光子 γ 入射外线：$\gamma, \lambda; \mu$ $= \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

7. 光子 γ 出射外线： $\gamma, \lambda; \mu = \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

8. 光子 γ 传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **(Feynman 规范)**

QED 的 Feynman 规则

这里将**光子**记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆

6. 光子 γ 入射外线：$\gamma, \lambda; \mu$ $= \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

7. 光子 γ 出射外线： $\gamma, \lambda; \mu = \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

8. 光子 γ 传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **(Feynman 规范)**

9. **QED 相互作用顶点**： $= \mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$

在这些 Feynman 规则中，**Lorentz 指标** μ 和 ν 既可写成**上标**，也可写成**下标**，只要在写出不变振幅表达式时保证**相同指标上下缩并**

剥离相互作用拉氏量 $Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$ 中的**场算符** A_μ、ψ_f **和** $\bar{\psi}_f$，再**乘以** i，就得到 QED 顶点规则表达式 $\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$

7.2 节　正负电子湮灭到正负 μ 子

♈ 本节讨论一个典型的 QED 散射过程，**一对正负电子湮灭成一对正负 μ 子**，即

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$$

👶 这个过程的**领头阶 Feynman 图**是一个包含 2 个 QED 顶点的**树图**

👦 如**右图**所示，只有 **1 种拓扑结构**

👧 由于 μ 子质量比电子质量大得多，根据**能动量守恒定律**，此过程仅当正负电子对的质心能 $E_{\mathrm{CM}} > 2m_\mu$ 时才能发生

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 领头阶 Feynman 图

7.2.1 小节　不变振幅

♉ 根据 QED 的 Feynman 规则和 $Q_e = Q_\mu = -1$，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$= \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,(-\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\,(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

7.2.1 小节　不变振幅

♉ 根据 QED 的 Feynman 规则和 $Q_e = Q_\mu = -1$，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$= \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,(-\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\,(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

> 👩 一般来说，传播子分母上的无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$ 对于圈图计算是必要的，但在树图计算中通常可以忽略

👨 根据能动量守恒，光子传播子的四维动量 q^μ 满足 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

👩 运动学要求 $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 > 4m_\mu^2$

👨‍🎓 光子传播子 $\dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ 在运动学允许的区域上没有极点，可以丢弃无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$

不变振幅模方

♊ 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$，有 $(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$

👴 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 中旋量双线性型 $\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)$ 的复共轭为

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v$$

$(\bar{u}\gamma_\mu v)^* = \bar{v}\gamma_\mu u$，$\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 的复共轭为

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$$

不变振幅模方

♊ 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$，有 $(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$

👴 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 中旋量双线性型 $\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)$ 的**复共轭**为

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v$$

$(\bar{u}\gamma_\mu v)^* = \bar{v}\gamma_\mu u$，$\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 的**复共轭**为

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$$

👵 **不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{(q^2)^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2') \\
&\qquad \times[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1') \\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)] \\
&\qquad \times\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1') \\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu] \\
&\qquad \times\mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu]
\end{aligned}$$

👨🏻‍🏫 第三步采取计算 6.1.1 小节用过的 **Casimir 技巧**，因而出现**求迹**运算

非极化不变振幅模方

- 实际实验通常**不会控制入射粒子的自旋状态**，即采用非极化的入射束流
- 粒子探测器 (detector) 通常也**不能区分出射粒子的自旋状态**
- 在计算散射截面时，需要对**入射**正负电子的**螺旋度** λ_1 和 λ_2 **取平均**，对**出射**正负 μ 子的**螺旋度** λ_1' 和 λ_2' **求和**，也就是说，应当计算**非极化不变振幅模方**

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=\pm}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2=\pm}\sum_{\lambda_1'=\pm}\sum_{\lambda_2'=\pm}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2$$

非极化不变振幅模方

- 实际实验通常**不会控制入射粒子的自旋状态**，即采用非极化的入射束流
- 粒子探测器 (detector) 通常也**不能区分出射粒子的自旋状态**
- 在计算散射截面时，需要对**入射**正负电子的**螺旋度** λ_1 和 λ_2 **取平均**，对**出射**正负 μ 子的**螺旋度** λ_1' 和 λ_2' **求和**，也就是说，应当计算**非极化不变振幅模方**

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=\pm}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2=\pm}\sum_{\lambda_1'=\pm}\sum_{\lambda_2'=\pm}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu] \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\nu]
\end{aligned}
$$

- 最后用到**自旋求和关系** $\sum_{\lambda=\pm}u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)=\not{p}+m$ 和 $\sum_{\lambda=\pm}v(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)=\not{p}-m$
- 现在问题归结为计算 **Dirac 矩阵乘积的迹**

7.2.2 小节 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧

- 第 6 章计算过与 Dirac 矩阵相关的迹 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$，$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- 实际上，利用 $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$、$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= \mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5\gamma^5) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积})
\end{aligned}
$$

- 因此，**奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**，这个结论自然包含 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$

7.2.2 小节 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧

- 第 6 章计算过与 Dirac 矩阵相关的迹 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$，$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- 实际上，利用 $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$、$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= \mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5\gamma^5) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) \\
&= -\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积})
\end{aligned}
$$

- 因此，**奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**，这个结论自然包含 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$
- 对于 4 个 Dirac 矩阵乘积的迹，多次利用 $\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma) \\
&= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + 2\gamma^\nu\gamma^\rho g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\sigma) - 2g^{\mu\rho}\,\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\sigma) + 2g^{\mu\sigma}\,\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho) - \mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

γ^5 相关求迹公式

- 根据定义，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，因而它相当于 **4 个 Dirac 矩阵之积**
- 于是，**γ^5 与奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**
- 利用 $(\gamma^0)^2 = 1$ 和 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$，得

$$\mathrm{tr}(\gamma^5) = \mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^5)$$

- 可见 $\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$

γ^5 相关求迹公式

- 根据定义，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，因而它相当于 **4 个 Dirac 矩阵之积**
- 于是，**γ^5 与奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**
- 利用 $(\gamma^0)^2 = 1$ 和 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$，得

$$\mathrm{tr}(\gamma^5) = \mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^5)$$

- 可见 $\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$
- $(\gamma^\mu)^2 = \pm 1$ 在 $\mu = 0$ 时取正号、在 $\mu = 1, 2, 3$ 时取负号
- 若 $\mu = \nu$，则 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = \pm\,\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$
- 若 $\mu \neq \nu$，取 $\alpha \neq \mu, \nu$，利用 $(\gamma^\alpha)^2 = \pm 1$、$\gamma^\mu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\mu$、$\gamma^\nu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\nu$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= \pm\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\alpha) = \mp\,\mathrm{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha) \\ &= \mp\,\mathrm{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)\end{aligned}$$

- 故 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0$ 对任意 μ 和 ν 成立

$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$

- 对于 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$，只要 (μ,ν,ρ,σ) 这 4 个指标中**有 2 个指标相等**，就能够类似地推出 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=0$
- 因此，仅当 (μ,ν,ρ,σ) **是** $(0,1,2,3)$ **的某种置换**时，才能得到例外的结果
- 由于 Dirac 矩阵的反对易性质，此时有 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$，且**偶置换**取**正号**，**奇置换**取**负号**

$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$

对于 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$，只要 (μ,ν,ρ,σ) 这 4 个指标中**有 2 个指标相等**，就能够类似地推出 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=0$

因此，仅当 (μ,ν,ρ,σ) **是** $(0,1,2,3)$ **的某种置换**时，才能得到例外的结果

由于 Dirac 矩阵的反对易性质，此时有 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$，且**偶置换**取**正号**，**奇置换**取**负号**

根据 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的偶置换},\\ -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的奇置换},\\ 0, & \text{其它情况},\end{cases}$ 即得

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$$

由于
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5) &= \mathrm{tr}(\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)=-\,\mathrm{tr}(\mathrm{i}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{i}\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3)=\mathrm{tr}(\mathrm{i}\gamma^3\gamma^3)=-\,\mathrm{tr}(\mathrm{i})=-4\mathrm{i}\end{aligned}$$

推出 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=-4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

求迹公式小结

总结起来，有下列**求迹公式**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
\mathrm{tr}(\gamma^5) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= -4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

Dirac 矩阵相关缩并

- 除了求迹，还经常遇到 Lorentz 指标的**缩并运算**
- 首先，

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu + g_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$$

- 其次，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu$$

- 再次，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\rho = 2\{\gamma^\rho,\gamma^\nu\} = 4g^{\nu\rho}$$

- 最后，

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 4g^{\rho\sigma}\gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2(\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho)\gamma^\nu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\end{aligned}$$

Levi-Civita 符号的缩并

- 另一方面，可能会遇到 **Levi-Civita 符号的缩并**
- 首先，1.5 节已经推出 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$

Levi-Civita 符号的缩并

- 另一方面，可能会遇到 **Levi-Civita 符号的缩并**
- 首先，1.5 节已经推出 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$
- 其次，根据 Levi-Civita 符号的性质，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ **只在 $\mu = \nu$ 时非零**，即

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \propto \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

- 取 $\mu = \nu = 3$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma 3} = 3!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -6$，故**比例系数**为 -6
- 因此 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^{\mu}{}_{\nu}$

Levi-Civita 符号的缩并

- 另一方面，可能会遇到 **Levi-Civita 符号的缩并**
- 首先，1.5 节已经推出 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$
- 其次，根据 Levi-Civita 符号的性质，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ **只在 $\mu = \nu$ 时非零**，即

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \propto \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

- 取 $\mu = \nu = 3$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma 3} = 3!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -6$，故**比例系数**为 -6
- 因此 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^{\mu}{}_{\nu}$
- 再次，$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ **仅在 $(\mu,\nu) = (\rho,\sigma)$ 或 $(\mu,\nu) = (\sigma,\rho)$ 时非零**，而且这两种情况的数值互为**相反数**，故

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \propto \delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho}$$

- 取 $(\mu,\nu) = (2,3)$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta 23}\varepsilon_{\alpha\beta 23} = 2!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -2$
- 因而 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho})$

缩并公式小结

总结起来，有下列**缩并公式**

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24 \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu{}_\nu \\
\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)
\end{aligned}
$$

四维动量与 Dirac 矩阵的缩并

实际计算中经常遇到**四维动量与 Dirac 矩阵的缩并**，进一步导出下列有用公式

$$\gamma^\mu \not{p} = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu$$

$$\not{p}\not{k} = p_\mu \gamma^\mu \not{k} = p_\mu (2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu) = 2\,p\cdot k - \not{k}\not{p}$$

$$\not{p}\not{p} = \frac{1}{2}(\not{p}\not{p} + \not{p}\not{p}) = \frac{1}{2}\,2\,p\cdot p = p^2$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2p_\nu \gamma^\nu = -2\not{p}$$

四维动量与 Dirac 矩阵的缩并

实际计算中经常遇到**四维动量与 Dirac 矩阵的缩并**，进一步导出下列有用公式

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu \not{p} &= p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu \\
\not{p}\not{k} &= p_\mu \gamma^\mu \not{k} = p_\mu (2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu) = 2\,p\cdot k - \not{k}\not{p} \\
\not{p}\not{p} &= \frac{1}{2}(\not{p}\not{p} + \not{p}\not{p}) = \frac{1}{2}\,2\,p\cdot p = p^2 \\
\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu &= p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2p_\nu \gamma^\nu = -2\not{p} \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu &= p_\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4p_\rho g^{\nu\rho} = 4p^\nu \\
\gamma^\mu \not{p}\not{k} \gamma_\mu &= p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \not{k} \gamma_\mu = 4p_\nu k^\nu = 4\,p\cdot k \\
\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}) &= p_\mu k_\nu\, \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4p_\mu k_\nu g^{\mu\nu} = 4\,p\cdot k \\
\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}\not{q}\not{l}) &= p_\mu k_\nu q_\rho l_\sigma\, \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4p_\mu k_\nu q_\rho l_\sigma (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
&= 4[(p\cdot k)(q\cdot l) - (p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]
\end{aligned}
$$

FeynCalc 程序包

此外，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu) &= p_\rho k_\sigma \mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) = 4p_\rho k_\sigma(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \\
&= 4(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k) \\
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu)\,\mathrm{tr}(\not{q}\gamma_\mu \not{l}\gamma_\nu) &= 16(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k)(q_\mu l_\nu + q_\nu l_\mu - g_{\mu\nu}q\cdot l) \\
&= 32[(p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]
\end{aligned}
$$

FeynCalc 程序包

此外，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu) &= p_\rho k_\sigma \mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) = 4p_\rho k_\sigma(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \\
&= 4(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k) \\
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu)\,\mathrm{tr}(\not{q}\gamma_\mu \not{l}\gamma_\nu) &= 16(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k)(q_\mu l_\nu + q_\nu l_\mu - g_{\mu\nu}q\cdot l) \\
&= 32[(p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]
\end{aligned}
$$

- 当求迹和缩并计算非常复杂时，可利用 Mathematica 程序包 FeynCalc 辅助计算
- FeynCalc 网址：https://feyncalc.github.io

Description

FeynCalc is a Mathematica package for symbolic evaluation of Feynman diagrams and algebraic calculations in quantum field theory and

Installation

For installation instructions please follow the steps outlined in our wiki. The impatient can simply type

Usage

FeynCalc is maintained and developed on a voluntarily basis by Rolf Mertig, Frederik Orellana and Vladyslav Shtabovenko.

7.2.3 小节 非极化散射截面

♌ 现在回来计算 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

👩🏻‍⚖️ 根据上一小节的求迹公式，第一个迹化为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] &= \mathrm{tr}(\not{k}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu) - m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= 4[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)]\end{aligned}$$

🕴️ 第一步丢弃了具有奇数个 Dirac 矩阵乘积的项

7.2.3 小节　非极化散射截面

♌ 现在回来计算 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4E_{\rm CM}^4}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

👩🏻‍⚕️ 根据上一小节的求迹公式，第一个迹化为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] &= \mathrm{tr}(\not{k}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu) - m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)\\ &= 4[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)]\end{aligned}$$

🕵🏻‍♂️ 第一步丢弃了具有奇数个 Dirac 矩阵乘积的项

🧐 同理，第二个迹变成

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu] &= \mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu) - m_\mu^2\,\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)\\ &= 4[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)]\end{aligned}$$

👨🏻‍💻 于是

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{4e^4}{E_{\rm CM}^4}[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)][p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)]$$

化简 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$

♍ 化简，得

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)\right] \\
&\qquad \times\left[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)\right] \\
&= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\Big[2(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + 2(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) - 2\,p_1\cdot p_2(k_1\cdot k_2 + m_e^2) \\
&\qquad - 2\,k_1\cdot k_2(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2) + 4(k_1\cdot k_2 + m_e^2)(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)\Big] \\
&= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + (k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)\right. \\
&\qquad \left. + m_e^2(p_1\cdot p_2) + m_\mu^2(k_1\cdot k_2) + 2m_e^2 m_\mu^2\right]
\end{aligned}
$$

🧖🏻‍♀️ 现在，非极化振幅模方表达成**四维动量内积**的函数，具有明显的 **Lorentz 不变性**

质心系运动学

- 在质心系中，入射和出射粒子的三维动量如右图所示
- 将散射角 θ 定义为 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的方向夹角
- 质心系总动量为零，$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$
- 故有 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$
- 5.5.3 小节表明，质心能 $q^0 = E_{\mathrm{CM}}$ 平分在两个入射（出射）粒子上

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}$$

质心系运动学

- 在质心系中，入射和出射粒子的三维动量如右图所示
- 将散射角 θ 定义为 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的方向夹角
- 质心系总动量为零，$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$
- 故有 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

- 5.5.3 小节表明，质心能 $q^0 = E_{\mathrm{CM}}$ 平分在两个入射（出射）粒子上

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}$$

- 由此推出

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \sqrt{(k_2^0)^2 - m_e^2} = \sqrt{E_{\mathrm{CM}}^2/4 - m_e^2} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\beta_e$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{(p_2^0)^2 - m_\mu^2} = \sqrt{E_{\mathrm{CM}}^2/4 - m_\mu^2} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\beta_\mu$$

- 其中，电子和 μ 子在质心系中的运动速率为

$$\beta_e \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{k}_1|}{k_1^0} = \frac{|\mathbf{k}_2|}{k_2^0}, \quad \beta_\mu \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{p_2^0}$$

四维动量内积

- 现在推导**四维动量**之间**内积**的表达式，质心能 E_{CM} 满足

$$E_{\mathrm{CM}}^2 = q^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\, k_1 \cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1 \cdot k_2)$$

- 同理有 $E_{\mathrm{CM}}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1 \cdot p_2)$，故 $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2} - m_e^2$，$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2} - m_\mu^2$

四维动量内积

♏ 现在推导**四维动量**之间**内积**的表达式，质心能 $E_{\rm CM}$ 满足

$$E_{\rm CM}^2 = q^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1 \cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1 \cdot k_2)$$

💂 同理有 $E_{\rm CM}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1 \cdot p_2)$，故 $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2$，$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2$

🕵 根据**能动量守恒定律**，$k_1 + k_2 = p_1 + p_2$，则 $k_1 - p_1 = p_2 - k_2$，从而推出

$$m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_1 \cdot p_1 = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_2 \cdot p_2$$

👷 所以有 $k_2 \cdot p_2 = k_1 \cdot p_1 = k_1^0 p_1^0 - |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 - \beta_e\beta_\mu\cos\theta)$

🕴 另一方面，也有 $k_1 - p_2 = p_1 - k_2$，同理推出

$$k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 + |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 + \beta_e\beta_\mu\cos\theta)$$

四维动量内积

♏ 现在推导**四维动量**之间**内积**的表达式，质心能 $E_{\rm CM}$ 满足

$$E_{\rm CM}^2 = q^2 = (k_1+k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1\cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1\cdot k_2)$$

💂 同理有 $E_{\rm CM}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1\cdot p_2)$，故 $k_1\cdot k_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2$，$p_1\cdot p_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2$

🕵 根据**能动量守恒定律**，$k_1 + k_2 = p_1 + p_2$，则 $k_1 - p_1 = p_2 - k_2$，从而推出

$$m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_1\cdot p_1 = (k_1-p_1)^2 = (p_2-k_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_2\cdot p_2$$

👷 所以有 $k_2\cdot p_2 = k_1\cdot p_1 = k_1^0 p_1^0 - |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{4}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)$

💂 另一方面，也有 $k_1 - p_2 = p_1 - k_2$，同理推出

$$k_2\cdot p_1 = k_1\cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 + |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)$$

💇 由 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ 得 $q\cdot k_1 = q^0 k_1^0 = E_{\rm CM}^2/2$，由此可见

$$q\cdot k_1 = q\cdot k_2 = q\cdot p_1 = q\cdot p_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2}$$

质心系非极化振幅模方

利用以上表达式，将**非极化振幅模方**化为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2+\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2\right.\\
&\qquad\left.+m_\mu^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_e^2\right)+m_e^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_\mu^2\right)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^2}\left[E_{\mathrm{CM}}^2(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta)+4(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]
\end{aligned}
$$

精细结构常数定义为 $\alpha \equiv \dfrac{e^2}{4\pi}$

质心系非极化振幅模方

利用以上表达式，将**非极化振幅模方**化为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2+\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2\right.\\
&\qquad\left.+m_\mu^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_e^2\right)+m_e^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_\mu^2\right)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^2}\left[E_{\mathrm{CM}}^2(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta)+4(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]
\end{aligned}
$$

精细结构常数定义为 $\alpha \equiv \dfrac{e^2}{4\pi}$

$\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto \alpha^2$，因而称 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的**领头阶**是 $\boldsymbol{\alpha^2}$ **阶**，而相应 Feynman 图包含 **2 个 QED 顶点**

由此可以推断，包含 $\boldsymbol{n}$ **个 QED 顶点**的 Feynman 图对应于 $\boldsymbol{\alpha^n}$ **阶**过程

非极化散射截面

- $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 依赖于 θ，但**不依赖**于方位角 ϕ
- 根据 5.5.3 小节公式，**非极化微分散射截面**为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\beta_\mu \overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_e} = \frac{\alpha^2 \beta_\mu}{4E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_e}\left[1 + \beta_e^2\beta_\mu^2 \cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]$$

- 利用 $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta = \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta = 2, \quad \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \cos^2\theta = \int_{-1}^1 \cos^2\theta\, \mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{3}$
- 此过程**末态对称性因子** $\mathcal{S} = 1$，对**全立体角积分**，得到**非极化散射截面**

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{2E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[2 + \frac{2}{3}\beta_e^2\beta_\mu^2 + \frac{8(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[3 + \left(1 - \frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) + \frac{12(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[1 + \frac{2(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2} + \frac{4m_e^2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^4}\right] = \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left(1 + \frac{2m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1 + \frac{2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)
\end{aligned}$$

实验数据

- 右下图根据以上公式画出领头阶散射截面 σ 随质心能 E_{CM} 的变化曲线
- 误差棒标注着 1988 年 PETRA 对撞机上 TASSO 探测器测量到的实验数据
- 可以看到，QED 领头阶预言结果与实验数据符合得比较好

实验数据

- 右下图根据以上公式画出领头阶散射截面 σ 随质心能 $E_{\rm CM}$ 的变化曲线
- 误差棒标注着 1988 年 PETRA 对撞机上 TASSO 探测器测量到的实验数据
- 可以看到，QED 领头阶预言结果与实验数据符合得比较好
- 由于 $m_e \ll m_\mu < E_{\rm CM}/2$，可以近似地忽略电子质量，则 $\beta_e \simeq 1$，而散射截面近似为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2\beta_e}\left(1+\frac{2m_e^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\\ &\simeq \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\end{aligned}$$

- 若 $E_{\rm CM} \gg m_\mu$，则 $\beta_\mu \simeq 1$，散射截面进一步近似为

$$\sigma \simeq \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm CM}^2}$$

7.2.4 小节 极化振幅

🐭 根据前面的计算结果，螺旋度为 λ_1 和 λ_2 的 e^- 和 e^+ 湮灭到螺旋度为 λ_1' 和 λ_2' 的 μ^- 和 μ^+ 的过程对应的**极化不变振幅**为

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\, \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

🦙 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2' = \pm$，而 $\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$ 都是用**旋量双线性型**表达的 **Lorentz 矢量**

🦘 本小节探索极化振幅的显明表达式

7.2.4 小节　极化振幅

根据前面的计算结果，螺旋度为 λ_1 和 λ_2 的 e^- 和 e^+ 湮灭到螺旋度为 λ_1' 和 λ_2' 的 μ^- 和 μ^+ 的过程对应的**极化不变振幅**为

$$\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2' = \pm$，而 $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 都是用**旋量双线性型**表达的 **Lorentz 矢量**

本小节探索极化振幅的显明表达式

依照**右图质心系**中**坐标系**的定义，z **轴**沿 $\mathbf{k}_1$ 方向，初末态四个粒子的动量均位于 xz **平面**上，则末态 μ^- 和 μ^+ 四维动量的分量表达式为

$$p_1^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,\beta_\mu s_\theta,0,\beta_\mu c_\theta)$$
$$p_2^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,-\beta_\mu s_\theta,0,-\beta_\mu c_\theta)$$

这里采用了**缩写** $s_\theta \equiv \sin\theta$ 和 $c_\theta \equiv \cos\theta$

末态螺旋态

根据**螺旋态**表达式

$$\xi_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}$$

得到末态 μ^- 和 μ^+ 对应螺旋态 $\xi_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)$ 和 $\xi_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的形式为

$$\xi_+(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\\ |\mathbf{p}_1|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2c_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2c_{\theta/2}^2\\ 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}-|\mathbf{p}_1|s_\theta\\ |\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\ c_{\theta/2}\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}1+c_\theta &= 2c_{\theta/2}^2\\ s_\theta &= 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{aligned}$$

$$\xi_+(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\\ -|\mathbf{p}_2|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2s_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2s_{\theta/2}^2\\ -2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\ -c_{\theta/2}\end{pmatrix}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|s_\theta\\ |\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix} \qquad 1-c_\theta = 2s_{\theta/2}^2$$

当 $\mu^\pm$ **动量转动 θ 角**时，**螺旋态只转动 $\theta/2$ 角**，这正是**自旋 $1/2$** 的特征

初态螺旋态

- 初态 e^- 和 e^+ 的四维动量为 $k_1^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,\beta_e)$ 和 $k_2^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,-\beta_e)$
- 与 μ^- 和 μ^+ 四维动量的差异在于 β_μ 换成 β_e，且 $\theta = 0$
- 只要将上一页 μ^- 和 μ^+ 螺旋态的 θ 取为 0，就得到 e^- 和 e^+ 的螺旋态

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

初态螺旋态

- 初态 e^- 和 e^+ 的四维动量为 $k_1^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,\beta_e)$ 和 $k_2^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,-\beta_e)$
- 与 μ^- 和 μ^+ 四维动量的差异在于 β_μ 换成 β_e，且 $\theta = 0$
- 只要将上一页 μ^- 和 μ^+ 螺旋态的 θ 取为 0，就得到 e^- 和 e^+ 的螺旋态

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

- 在 Weyl 表象中，$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^\mu\\ \bar\sigma^\mu & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar\sigma^\mu & \\ & \sigma^\mu\end{pmatrix}$
- 根据 4.4.2 小节 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋态表达式，$e^\pm$ 贡献的 Lorentz 矢量为

$$\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) = v^\dagger(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^0\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2) & -\lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\sigma^\mu & \\ & \sigma^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\\ \omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) - \lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$$

$\omega_\lambda(\mathbf{p})$ 的性质

按照 $\omega_\lambda(\mathbf{p})$ 函数的定义 $\omega_\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{E_\mathbf{p} + \lambda|\mathbf{p}|}$，有

$$\begin{aligned}
\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) &= \sqrt{(k_2^0 + |\mathbf{k}_2|)(k_1^0 + |\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}} \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2} \\
\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) &= \sqrt{(k_2^0 - |\mathbf{k}_2|)(k_1^0 - |\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}} \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}
\end{aligned}$$

再由 $\sqrt{1-\beta_e^2} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)} = \frac{2m_e}{E_{\mathrm{CM}}}$ 导出

$$\begin{aligned}
\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) = \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) &= \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}} \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\sqrt{1-\beta_e^2} = m_e
\end{aligned}$$

初态分量

代入 $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$、$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$ 和

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

得到 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 的**分量**表达式

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, -1, -\mathrm{i}, 0) = -\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1, -\mathrm{i}, 0) = -\xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 1), \qquad \xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = (1, 0, 0, -1)$$

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, 0, 1), \quad \xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = (-1, 0, 0, -1)$$

初态 Lorentz 矢量的分量

从而，**初态 Lorentz 矢量** $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的**分量**表达式是

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)+\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,\mathrm{i},0)+\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,-\mathrm{i},0)\\
\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)-\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,\mathrm{i},0)-\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,\mathrm{i},0)\\
\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)-\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= m_e(1,0,0,-1)-m_e(1,0,0,1)=2m_e(0,0,0,-1)\\
\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)+\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= -m_e(-1,0,0,-1)+m_e(-1,0,0,1)=2m_e(0,0,0,1)
\end{aligned}
$$

末态 Lorentz 矢量

- 另一方面，**末态正负 μ 子**贡献的 **Lorentz 矢量**为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2') = u^\dagger(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^0\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$$

$$= \begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1) & \omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\sigma}_\mu & \\ & \sigma_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2'\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\\ -\lambda_2'\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_2'\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2) - \lambda_2'\omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$$

- 此时有

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}$$

$$\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}$$

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = m_\mu$$

末态分量

- 利用三角函数公式 $c_{\theta/2}^2 - s_{\theta/2}^2 = c_\theta$ 和 $s_{\theta/2}^2 + c_{\theta/2}^2 = 1$
- 推出 $\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 和 $\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的**分量**为

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} s_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2} \end{pmatrix} = (0, c_\theta, -\mathrm{i}, -s_\theta) = -\xi^\dagger_+(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} & c_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix} = (0, -c_\theta, -\mathrm{i}, s_\theta) = -\xi^\dagger_-(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)$$

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix} = (1, -s_\theta, 0, -c_\theta)$$

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = (1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} & c_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} s_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2} \end{pmatrix} = (-1, -s_\theta, 0, -c_\theta)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = (-1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

末态 Lorentz 矢量的分量

🐵 从而，**末态 Lorentz 矢量** $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$ 的**分量**是

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, -) &= -\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) + \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) \\
&= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}(0, -c_\theta, \mathrm{i}, s_\theta) + \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}(0, c_\theta, -\mathrm{i}, -s_\theta) \\
&= E_{\mathrm{CM}}(0, c_\theta, -\mathrm{i}, -s_\theta) \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, +) &= \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) - \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}(0, c_\theta, \mathrm{i}, -s_\theta) - \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}(0, -c_\theta, -\mathrm{i}, s_\theta) \\
&= E_{\mathrm{CM}}(0, c_\theta, \mathrm{i}, -s_\theta) \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, +) &= \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) - \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) \\
&= m_\mu(1, s_\theta, 0, c_\theta) - m_\mu(1, -s_\theta, 0, -c_\theta) = 2m_\mu(0, s_\theta, 0, c_\theta) \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, -) &= -\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) + \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) \\
&= -m_\mu(-1, s_\theta, 0, c_\theta) + m_\mu(-1, -s_\theta, 0, -c_\theta) = 2m_\mu(0, -s_\theta, 0, -c_\theta)
\end{aligned}
$$

极化振幅：$\lambda_1 = -\lambda_2$，$\lambda_1' = -\lambda_2'$

- 代入上述表达式，就得到**极化振幅** $\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$ 的显明表达式
- 下面分 4 类**螺旋度构型**来讨论

(1) 当 $e^\pm$ 具有**相反螺旋度** $(\lambda_1 = -\lambda_2)$、$\mu^\pm$ 也具有**相反螺旋度** $(\lambda_1' = -\lambda_2')$ 时，得

$$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -e^2(1+\cos\theta)$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -e^2(1+\cos\theta)$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = e^2(1-\cos\theta)$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = e^2(1-\cos\theta)$$

- 可见，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 且 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$

宇称守恒

- 实际上，QED 是一个宇称守恒的理论
- 在宇称变换下，动量方向反转，角动量方向不变，因而螺旋度翻转，但 θ 角不变
- 于是，对所有螺旋度作翻转变换之后，宇称守恒保证 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ 不变，故振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 不变，而振幅至多相差一个相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，

$$\mathcal{M}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_1', -\lambda_2') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$$

- 这里得到 $\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$，故相应的相位因子都是 1

宇称守恒

🐶 实际上，QED 是一个**宇称守恒**的理论

🦅 在**宇称变换**下，动量方向**反转**，角动量方向**不变**，因而**螺旋度翻转**，但 θ 角不变

🦉 于是，对**所有螺旋度**作**翻转变换**之后，**宇称守恒**保证 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ **不变**，故振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ **不变**，而振幅至多相差一个**相位因子** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，

$$\mathcal{M}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_1', -\lambda_2') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$$

🦢 这里得到 $\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$，故相应的**相位因子**都是 1

🦆 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,+,-)$ 和 $(-,+,-,+)$ 两种构型的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu e^4(1+\cos\theta)^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1+\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}$$

🦜 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,-,+)$ 和 $(-,+,+,-)$ 对应的极化微分截面也相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1-\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}$$

$\mathcal{M}(+,-,+,-)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+)$ 的零振幅构型

- 当 $\theta = \pi$ 时，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = -e^2(1+\cos\pi) = 0$，动量和角动量如左下图所示
- 双线箭头 $\Rightarrow$ 表示自旋角动量的方向，与动量方向一致时螺旋度为正，反之为负
- e^+e^- 系统的角动量为 1，方向为 z 轴正向，投影在 z 轴上的本征值必定为 $+1$
- $\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 1，方向为 z 轴负向，投影在 z 轴上的本征值必定为 -1
- 初末态系统的角动量投影本征值不同，不满足角动量守恒，因此振幅为零
- 当 $\theta \neq \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统的角动量有一定概率在 z 轴上投影出本征值 $+1$，在振幅上体现为一个 $(1+\cos\theta)$ 因子

$\mathcal{M}(+,-,+,-)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+)$ 的零振幅构型

- 当 $\theta = \pi$ 时，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = -e^2(1+\cos\pi) = 0$，动量和角动量如**左下图**所示
- **双线箭头** $\Rightarrow$ 表示**自旋角动量的方向**，与**动量方向一致**时**螺旋度**为**正**，**反之**为**负**
- e^+e^- 系统的角动量为 1，方向为 z 轴**正向**，投影在 z 轴上的本征值必定为 $+1$
- $\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 1，方向为 z 轴**负向**，投影在 z 轴上的本征值必定为 -1
- 初末态系统的角动量投影本征值不同，**不满足角动量守恒**，因此振幅为零
- 当 $\theta \neq \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统的角动量有一定概率在 z 轴上投影出本征值 $+1$，在振幅上体现为一个 $(1+\cos\theta)$ 因子
- 对**右下图**可作类似分析，因此 $\theta = 0$ 时有 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = e^2(1-\cos 0) = 0$，而 $\theta \neq 0$ 时振幅上出现一个 $(1-\cos\theta)$ 因子

极化振幅：$\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda_1' = \lambda_2'$

(2) 当 $e^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1 = \lambda_2$)、$\mu^\pm$ 也具有**相同螺旋度** ($\lambda_1' = \lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

🐢 这些振幅都**正比于** $m_e m_\mu \cos\theta$，**宇称变换**引起的**相位因子**都是 1

🐍 这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{16e^4 m_e^2 m_\mu^2 \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^4} = \frac{4\alpha^2 m_e^2 m_\mu^2 \beta_\mu \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^6 \beta_e}$$

螺旋度压低

- 光子是 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的中间态，自旋为 1，因而在质心系中角动量也为 1
- 不过，具有相同螺旋度的正反粒子对系统在质心系中的角动量为 0，必须翻转其中一个粒子的螺旋度才能得到角动量 1

螺旋度压低

- 🐼 **光子**是 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的中间态，**自旋为** 1，因而在质心系中**角动量**也为 1
- 🐉 不过，具有**相同螺旋度**的正反粒子对系统在质心系中的**角动量为** 0，必须**翻转**其中一个粒子的螺旋度才能得到**角动量** 1
- 🐊 实际上，粒子的**质量可以翻转螺旋度**
- 🦖 对于**无质量**的自由粒子，**螺旋度**在任意惯性系中**不变**
- 🦕 对于**有质量**的自由粒子，**螺旋度**在**不同惯性系**中可以具有**不同**的值
- 👆 毕竟，在**静止系**中粒子动量为零，因而螺旋度**不确定**

螺旋度压低

- 光子是 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的中间态，自旋为 1，因而在质心系中角动量也为 1
- 不过，具有相同螺旋度的正反粒子对系统在质心系中的角动量为 0，必须翻转其中一个粒子的螺旋度才能得到角动量 1
- 实际上，粒子的质量可以翻转螺旋度
- 对于无质量的自由粒子，螺旋度在任意惯性系中不变
- 对于有质量的自由粒子，螺旋度在不同惯性系中可以具有不同的值
- 毕竟，在静止系中粒子动量为零，因而螺旋度不确定
- 可将质量看作一种耦合，耦合螺旋度相反的两种状态，效果是翻转粒子的螺旋度
- 这里必须翻转 e^- 或 e^+ 的螺旋度来得到系统角动量为 1 的态，振幅中出现一个 $2m_e/E_{\mathrm{CM}}$ 因子；同时必须翻转 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度，出现一个 $2m_\mu/E_{\mathrm{CM}}$ 因子
- 由于运动学上要求 $E_{\mathrm{CM}}/2 > m_\mu \gg m_e$，这些振幅受到**严重压低**，贡献可忽略
- 这种效应称为螺旋度压低 (helicity suppression)

$\mathcal{M}(+,+,+,+)$ 的零振幅构型

- 由于 $\mathcal{M} \propto \cos\theta$，当 $\theta = \pi/2$ 时，这四种情况都出现**零振幅**
- 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$，零振幅构型如**右下图**所示
- 图中 e^+ 被**质量耦合**（用 $\times$ 表示）**翻转**螺旋度，使得**角动量为 0** 的 e^+e^- 系统转化成**角动量为 1** 的光子
- 随后，光子转化成**角动量为 1** 的 $\mu^+\mu^-$ 系统
- 最后，质量耦合将 μ^+ 的螺旋度**翻转**，从而得到**角动量为 0** 的 $\mu^+\mu^-$ 系统

$\mathcal{M}(+,+,+,+)$ 的零振幅构型

- 由于 $\mathcal{M} \propto \cos\theta$，当 $\theta = \pi/2$ 时，这四种情况都出现**零振幅**
- 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$，零振幅构型如**右下图**所示
- 图中 e^+ 被**质量耦合**（用 $\times$ 表示）**翻转**螺旋度，使得**角动量为 0** 的 e^+e^- 系统转化成**角动量为 1** 的光子
- 随后，光子转化成**角动量为 1** 的 $\mu^+\mu^-$ 系统
- 最后，质量耦合将 μ^+ 的螺旋度**翻转**，从而得到**角动量为 0** 的 $\mu^+\mu^-$ 系统
- 但是，光子的角动量**沿 z 轴正向**，当 $\theta = \pi/2$ 时**不可能**转化成角动量**沿 x 轴正向**的 $\mu^+\mu^-$ 系统，因而振幅为零
- 当 $\theta \neq \pi/2$ 时，光子转化成 $\mu^+\mu^-$ 系统的概率在振幅上体现为一个 $\cos\theta$ 因子

极化振幅：$\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda_1' = -\lambda_2'$

(3) 当 $e^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1 = \lambda_2$)、$\mu^\pm$ 具有**相反螺旋度** ($\lambda_1' = -\lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

- 这些振幅都**正比于** $m_e \sin\theta$，**宇称变换**引起的**相位因子**都是 -1
- 这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{4e^4 m_e^2 \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_e^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4 \beta_e}$$

$\mathcal{M}(+,+,+,-)$ 的零振幅构型

- 这里初态 e^+e^- 系统的**角动量为 0**
- 必须**翻转 e^-** 或 e^+ 的**螺旋度**来得到**角动量为 1** 的态，因而振幅中出现一个 $2m_e/E_{\mathrm{CM}}$ 因子，受到**螺旋度压低**
- 由于 $E_{\mathrm{CM}}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅的贡献可以忽略

$\mathcal{M}(+,+,+,-)$ 的零振幅构型

- 这里初态 e^+e^- 系统的**角动量为 0**
- 必须**翻转 e^-** 或 e^+ 的**螺旋度**来得到**角动量为 1** 的态，因而振幅中出现一个 $2m_e/E_{\mathrm{CM}}$ 因子，受到**螺旋度压低**
- 由于 $E_{\mathrm{CM}}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅的贡献可以忽略
- 当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现**零振幅**
- 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,-)$，零振幅构型如**右上图**和**右下图**所示
- 末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的**角动量为 1**，当 $\theta = 0$ 或 π 时，它**在 z 轴上的投影**必定为 $+1$ 或 -1，而 e^+e^- 系统**角动量的投影为 0**，**不满足角动量守恒**，故振幅为零
- 当 $\theta \neq 0, \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统的角动量有一定概率在 z 轴上投影出**本征值 0**，在振幅上体现为一个 $\sin\theta$ 因子

极化振幅：$\lambda_1 = -\lambda_2$，$\lambda_1' = \lambda_2'$

(4) 当 $e^\pm$ 具有**相反螺旋度** ($\lambda_1 = -\lambda_2$)、$\mu^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1' = \lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

宇称变换引起的**相位因子**都是 -1，这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{4e^4 m_\mu^2 \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_\mu^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4 \beta_e}$$

极化振幅：$\lambda_1 = -\lambda_2$，$\lambda_1' = \lambda_2'$

(4) 当 $e^\pm$ 具有**相反螺旋度** ($\lambda_1 = -\lambda_2$)、$\mu^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1' = \lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

宇称变换引起的**相位因子**都是 -1，这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2\beta_e}\,\frac{4e^4 m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_\mu^2\beta_\mu\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4\beta_e}$$

这里末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的**角动量为 0**，必须**翻转 μ^-** 或 **μ^+** 的**螺旋度**来得到**角动量为 1** 的态，因而振幅中出现一个 $2m_\mu/E_{\rm CM}$ 因子，受到**螺旋度压低**

当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现**零振幅**，理由类似于**第 (3) 类**情况

非极化振幅模方

♓ 利用上述 **16 个极化振幅**表达式，可以直接计算**非极化振幅模方**，

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'} |\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')|^2 \\
&= \frac{e^2}{4}\left[2(1+\cos\theta)^2 + 2(1-\cos\theta)^2 + 4\,\frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 4\,\frac{4m_e^2\sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2} + 4\,\frac{4m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= e^2\left[1+\cos^2\theta + \frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4} + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)(1-\cos^2\theta)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= e^2\left[1+\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]
\end{aligned}
$$

🐞 结果与 **7.2.3 小节**中通过**求迹运算**得到的表达式**一致**