数 学 物 理 方 法

第七章　分离变量法

第 1 节和第 2 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2023 年 2 月 4 日

第七章　分离变量法

- 本章开始研究**偏微分方程**的求解
- 对于**常微分方程**，求解思路通常是先求出其**通解**，其中含有若干个**任意常数**
- 任意常数的**个数**与常微分方程的**阶数相同**
- 然后用**附加条件**（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数

第七章　分离变量法

- 本章开始研究偏微分方程的求解
- 对于常微分方程，求解思路通常是先求出其通解，其中含有若干个任意常数
- 任意常数的个数与常微分方程的阶数相同
- 然后用附加条件（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数
- 对于偏微分方程，如果能求出通解，则里面含有任意函数，原则上由定解条件确定
- 但是，这通常是**做不到**的
- 除了极少数简单情况，人们并不知道怎样求出偏微分方程的通解
- 即使能求出通解，如果定解条件比较复杂，要想确定其中的任意函数也非常困难

第七章　分离变量法

- 本章开始研究**偏微分方程**的求解
- 对于**常微分方程**，求解思路通常是先求出其**通解**，其中含有若干个**任意常数**
- 任意常数的**个数**与常微分方程的**阶数相同**
- 然后用**附加条件**（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数
- 对于**偏微分方程**，如果能求出**通解**，则里面含有**任意函数**，原则上由**定解条件**确定
- 但是，这通常是**做不到**的
- 除了极少数简单情况，人们并**不知道**怎样求出**偏微分方程**的**通解**
- 即使能求出**通解**，如果**定解条件**比较复杂，要想确定其中的**任意函数**也**非常困难**
- 因此，对于**偏微分方程**，只能根据方程和定解条件的各种具体情况分别加以研究
- 本章介绍的**分离变量法**是一种比较有效的方法
- 它的基本思路是设法将**偏微分方程问题**转化为**若干个常微分方程问题**来求解

§1 一维波动方程

§1.1 分离变量

- 本节以**第一边值问题**为例研究**一维波动方程**的求解
- 考虑**两端固定**的**弦**在**初始激励**下的**自由振动**

- 即给定**初始位移**和**初始速度**，求以后各时刻的**位移** $u(x,t)$，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

- 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是**已知**函数，分别给出**弦上各点**的**初始位移**和**初始速度**

§1 一维波动方程
§1.1 分离变量

- 本节以**第一边值问题**为例研究**一维波动方程**的求解
- 考虑**两端固定**的**弦**在**初始激励**下的**自由振动**

- 即给定**初始位移**和**初始速度**，求以后各时刻的**位移** $u(x,t)$，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

- 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是**已知**函数，分别给出**弦上各点**的**初始位移**和**初始速度**
- 现在尝试寻找 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 形式的**特解**，将它代入**一维波动方程**，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t)$$

- 其中 $'$ **号**表示对各自的自变量**求导**

常微分方程和初始条件

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$，**左边与 t 无关**，**右边与 x 无关**
- 两边相等，应**与 x 和 t 均无关**，即为**常数**，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个**常微分方程**

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- **初始条件**给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

常微分方程和初始条件

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$，**左边与 t 无关**，**右边与 x 无关**
- 两边相等，应**与 x 和 t 均无关**，即为**常数**，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个**常微分方程**

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- **初始条件**给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

- 然而，这两个**初始条件**是**不可能**成立的
- 它们表明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均与 $X(x)$ **成正比**，从而**两者成正比**
- 但实际问题中**初始位移**和**初始速度**是可以相当任意的，一般**不可能**成正比
- $X'' + \lambda X = 0$ 的解是**三角函数** $(\lambda > 0)$、**指数函数** $(\lambda < 0)$ 或**线性函数** $(\lambda = 0)$
- 与 $X(x)$ 成正比的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也必须是这些函数形式，这一般也是**不可能**的

边界条件

- 因此，我们暂时**不要求** $u(x,t) = X(x)T(t)$ **满足初始条件**
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

- 注意到 $T(t)$ **不能恒为零**，否则 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 是**平庸解**
- 故必须要求

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

边界条件

- 因此，我们暂时**不要求** $u(x,t) = X(x)T(t)$ **满足初始条件**
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

- 注意到 $T(t)$ **不能恒为零**，否则 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 是**平庸解**
- 故必须要求

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

- 如果 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$、$X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和**以上边界条件**同时得到满足
- 那么形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 的**解**能够同时满足**一维波动方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

- 至于**初始条件**，我们稍后再作考虑

§1.2 本征值问题

- 现在考虑方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$，它是**常系数二阶线性齐次常微分方程**
- 很容易求出它的**通解**，其中含有两个**任意常数**
- 在高等数学课中常用**初始条件** $X(0) = c_0$ **和** $X'(0) = c_1$ 来确定这两个**任意常数**
- 但现在的附加条件是**边界条件** $X(0) = X(l) = 0$

§1.2 本征值问题

- 现在考虑方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$，它是**常系数二阶线性齐次常微分方程**
- 很容易求出它的**通解**，其中含有两个**任意常数**
- 在高等数学课中常用**初始条件** $X(0) = c_0$ **和** $X'(0) = c_1$ 来确定这两个**任意常数**
- 但现在的附加条件是**边界条件** $X(0) = X(l) = 0$
- 在这样的条件下，**非平庸解**并**不一定**存在，除非**系数** λ 取某些特定值
- 实际上，**系数** λ 是在**分离变量**时引入的
- 我们只知道 λ 是**常数**，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定

§1.2 本征值问题

- 现在考虑方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$，它是**常系数二阶线性齐次常微分方程**
- 很容易求出它的**通解**，其中含有两个**任意常数**
- 在高等数学课中常用**初始条件** $X(0)=c_0$ **和** $X'(0)=c_1$ 来确定这两个**任意常数**
- 但现在的附加条件是**边界条件** $X(0)=X(l)=0$
- 在这样的条件下，**非平庸解**并**不一定**存在，除非**系数** λ 取某些特定值
- 实际上，**系数** λ 是在**分离变量**时引入的
- 我们只知道 λ 是**常数**，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定
- 也就是说，可以选择**适当**的 λ **值**，使得**方程** $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 具有满足**边界条件** $X(0)=X(l)=0$ 的**非平庸解**
- 这样的**方程**和**边界条件**构成了一个典型的**本征值问题** $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, \quad X(l)=0 \end{cases}$
- 它的特点是**常微分方程**中含有一个**未定参数** λ，并附有**边界条件**

求解本征值问题

$$\text{本征值问题}\quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

- 使问题存在**非平庸解**的 λ **值**称为**本征值**，相应的非平庸解称为**本征函数**
- 在**第十章 §5** 将总结这类**本征值问题**的**一般提法**并阐述其**一般结论**
- 这里直接对它进行求解

求解本征值问题

$$\text{本征值问题}\quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

- 使问题存在**非平庸解**的 λ 值称为**本征值**，相应的非平庸解称为**本征函数**
- 在**第十章 §5** 将总结这类**本征值问题**的**一般提法**并阐述其**一般结论**
- 这里直接对它进行求解
- 1 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$
- 则方程的解为 $X(x) = C\cosh\mu x + D\sinh\mu x$，其中 C、D 是**任意常数**
- 代入**边界条件**，利用 $\cosh 0 = 1$ 和 $\sinh 0 = 0$
- 得 $C = X(0) = 0$，$X(l) = D\sinh\mu l = 0$
- 由于 $\mu l > 0$，有 $\sinh\mu l \neq 0$，故 $D = 0$
- 于是 $X(x) \equiv 0$，这是**平庸解**，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

$$\begin{aligned} X''(x) &= \mu^2 X(x) \\ (\cosh\mu x)' &= \mu\sinh\mu x \\ (\sinh\mu x)' &= \mu\cosh\mu x \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的情况

本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$

2️⃣ 如果 $\lambda = 0$，则方程的解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

代入**边界条件**，$D = X(0) = 0$，$X(l) = Cl = 0$，故 $C = 0$

从而 $X(x) \equiv 0$，这是**平庸解**，因而 $\lambda = 0$ **不是**本征值

$\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的情况

$$\text{本征值问题} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

2 如果 $\lambda = 0$，则方程的解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

代入**边界条件**，$D = X(0) = 0$，$X(l) = Cl = 0$，故 $C = 0$

从而 $X(x) \equiv 0$，这是**平庸解**，因而 $\lambda = 0$ **不是**本征值

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$

则方程的解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

其中 C、D 是**任意常数**

代入**边界条件**，利用 $\cos 0 = 1$ 和 $\sin 0 = 0$

得 $C = X(0) = 0$，$X(l) = D\sin\mu l = 0$

为了得到**非平庸解**，必须使 $\sin\mu l = 0$，如此则 D 可取**任意值**

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu^2 X(x) \\ (\cos\mu x)' &= -\mu\sin\mu x \\ (\sin\mu x)' &= \mu\cos\mu x \end{aligned}$$

本征值和本征函数

- 因此，$\sin \mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 是**正弦函数**的**零点**
- 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中已取 $D = 1$

本征值和本征函数

- 因此，$\sin \mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 是**正弦函数**的**零点**
- 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中已取 $D = 1$
- 这是因为我们还要将**本征值** λ_n 代回方程 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 以求解 $T(t)$
- 求出来的**解** $T_n(t)$ 会包含两个**任意常数**
- 我们关心的是 $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$，而不是 $X_n(x)$ 或 $T_n(t)$ 本身
- 因此可以将**常数** D 并入 $T_n(t)$ 的**任意常数**之中，在此处直接取 $D = 1$

本征函数的图像

本征值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, **本征函数** $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}^+$

§1.3 本征函数族的正交完备性

在继续求解之前，先介绍**本征函数族** $\left\{X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个重要性质

首先，**该本征函数族**在**区间** $[0,l]$ 上是**正交**的

这指的是两个**不同本征函数** $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 的**内积** $(X_m(x),X_n(x))$ 为**零**，即

$$(X_m(x),X_n(x))\equiv\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n$$

其中第一步是**内积**的**定义**

§1.3 本征函数族的正交完备性

在继续求解之前，先介绍**本征函数族** $\left\{X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个重要性质

首先，**该本征函数族**在**区间** $[0,l]$ 上是**正交**的

这指的是两个**不同本征函数** $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 的**内积** $(X_m(x),X_n(x))$ 为**零**，即

$$(X_m(x),X_n(x))\equiv\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n$$

其中第一步是**内积**的**定义**

利用**积化和差公式**，有

$$\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}-\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\bigg|_0^l-\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\bigg|_0^l\right]=0$$

本征函数的模方

🔨 **本征函数** $X_n(x)$ 与自身的**内积**称为它的**模方** $\|X_n(x)\|^2$，有

$$\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l\right) = \frac{l}{2}$$

本征函数的模方

🔨 **本征函数** $X_n(x)$ 与自身的**内积**称为它的**模方** $\|X_n(x)\|^2$，有

$$\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l\right) = \frac{l}{2}$$

⚒ 将上式与 $(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 0\ (m \neq n)$ 合起来写作

$$(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn},$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^+$$

🔗 其中 **Kronecker δ 符号**定义为 $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

Leopold Kronecker
(1823–1891)

本征函数族的完备性

- 其次，可以证明**该本征函数族**在**区间** $[0,l]$ 上是**完备**的
- 这指的是，对于区间 $[0,l]$ 上**任意**具有**解析性质良好**的**函数** $f(x)$，只要与本征函数族具有**相同**的**边界条件**，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

- **解析性质良好**通常指具有**分段连续**、**连续**或**可微**等解析性质

本征函数族的完备性

🔧 其次，可以证明**该本征函数族**在**区间** $[0,l]$ 上是**完备**的

🪓 这指的是，对于区间 $[0,l]$ 上**任意**具有**解析性质良好**的**函数** $f(x)$，只要与本征函数族具有**相同**的**边界条件**，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

🪛 **解析性质良好**通常指具有**分段连续**、**连续**或**可微**等解析性质

⛓️ 将上式的求和指标 n 改写为 k，两边乘以 $\sin(n\pi x/l)$，对 x 从 0 到 l 积分，得

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,\frac{l}{2}\,\delta_{kn}=a_n\,\frac{l}{2}$$

🪚 其中级数应当**一致收敛**，才能**逐项积分**，对此不作深究

🛡️ 于是，**展开系数**表达为 $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$

说明

- 在**本征函数族** $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备**了
- 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 构成三维空间的一组**基底**
- 三维空间中任何矢量 $\mathbf{A}$ 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备**的
- 倘若只有 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 两个，就**不完备**了

说明

- 在**本征函数族** $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备**了
- 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 构成三维空间的一组**基底**
- 三维空间中任何矢量 $\mathbf{A}$ 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备**的
- 倘若只有 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 两个，就**不完备**了
- 即使 $f(x)$ **函数**与**本征函数族**不具有相同的**边界条件**
- 上述**展开式基本上**还是**正确**的，只在**端点处可能不成立**
- 对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况

说明

- 在**本征函数族** $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备**了
- 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 构成三维空间的一组**基底**
- 三维空间中任何矢量 $\mathbf{A}$ 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备**的
- 倘若只有 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 两个，就**不完备**了
- 即使 $f(x)$ **函数**与**本征函数族不具有**相同的**边界条件**
- 上述**展开式基本上**还是**正确**的，只在**端点处可能不成立**
- 对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况

- 本课程遇到的**本征值问题**均属于 **Sturm-Liouville 型**，将在**第十章 §5** 作一般讨论
- 这类本征值问题的**本征函数族**都是**正交**和**完备**的
- 如果本征函数的形式比较复杂，则**正交性**难以直接验证，但可以利用它们满足的方程和边界条件加以证明
- **完备性**的证明比较困难，本课程将直接引用结论而不作证明

§1.4 一般解

- 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}$$

- 其中 A_n 和 B_n 是**任意常数**

§1.4 一般解

将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}$$

其中 A_n 和 B_n 是**任意常数**

于是得到满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 的**一系列特解**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

这些解称为**弦**的**本征振动**

§1.4 一般解

将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}$$

其中 A_n 和 B_n 是**任意常数**

于是得到满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 的**一系列特解**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

这些解称为**弦**的**本征振动**

但是，这些解**一般并不满足初始条件** $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$

除非 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 同时正比于某个**本征函数** $\sin\frac{n\pi x}{l}$

一般解

- 现在，注意到方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 都是齐次的
- 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件
- 于是可以写出下面的一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

一般解

- 现在，注意到方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 都是齐次的
- 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件
- 于是可以写出下面的一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式
- 我们希望通过适当选取其中的任意常数 A_n 和 B_n
- 可以使给定的初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ 也得到满足
- 这样一来，它就满足定解问题的所有条件了

一般解

- 现在，注意到方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 都是齐次的
- 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件
- 于是可以写出下面的一般解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式
- 我们希望通过适当选取其中的任意常数 A_n 和 B_n
- 可以使给定的初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ 也得到满足
- 这样一来，它就满足定解问题的所有条件了
- 注　一般解已**不具有**分离变量的形式，而且一般解**不是**通解
- 通解应该只满足偏微分方程，不同定解条件可通过调节通解中的任意函数来满足

关于一般解的说明

- 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件
- 如果边界条件有所改变，那么它就**不成立**了，这时需要从头开始重新求解
- 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件

关于一般解的说明

- 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件
- 如果边界条件有所改变，那么它就**不成立**了，这时需要从头开始重新求解
- 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件
- 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件
- 这里实际上假定了级数可以逐项求导
- 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是**非常苛刻**的

关于一般解的说明

- 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件
- 如果边界条件有所改变，那么它就**不成立**了，这时需要从头开始重新求解
- 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件
- 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件
- 这里实际上假定了级数可以逐项求导
- 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是**非常苛刻**的
- 这些条件归结为对系数 A_n 和 B_n 的限制，而它们由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 决定
- 所以最终归结为对 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的解析性质的限制，具体情况不再深入讨论
- 今后我们假定所有形式操作（如逐项求导、逐项积分等）都是合法的
- 不对其成立条件加以深究

§1.5 用初始条件确定系数

一般解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 对 t 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件，推出

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

§1.5 用初始条件确定系数

- **一般解** $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 对 t 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

- 代入**初始条件**，推出

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

- 根据前面的讨论，**本征函数族** $\{\sin(n\pi x/l)\}_{n=1}^{\infty}$ 是**完备**的
- 只要 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的**解析性质良好**，就能选取适当的 A_n 和 B_n 使以上两式成立
- 参照 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ 和 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$，有

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\qquad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

分离变量法

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出**系数** A_n 和 B_n
- 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案

分离变量法

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出**系数** A_n 和 B_n
- 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案
- 由于以上方法的出发点是**特解** $u(x,t) = X(x)T(t)$
- 它具有**分离变量**的形式，即 x **的函数**与 t **的函数**是**分离**的
- 而**一般解**是一系列这样的**特解**的**叠加**，因此这种方法称为**分离变量法**

分离变量法

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出**系数** A_n 和 B_n
- 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案
- 由于以上方法的出发点是**特解** $u(x,t) = X(x)T(t)$
- 它具有**分离变量**的形式，即 x **的函数**与 t **的函数**是**分离**的
- 而**一般解**是一系列这样的**特解**的**叠加**，因此这种方法称为**分离变量法**
- 它是 **J. Fourier** 在 18 世纪初最先引入的，所以也称为 **Fourier 方法**
- 实际上，**一般解**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

就是 x 的**正弦 Fourier 级数**

- **一般解**中的每一项都是**驻波**，所以这种方法又称为**驻波法**

Joseph Fourier
(1768–1830)

§1.6 解的物理图像

- 由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 可以看出，弦上的**一般振动**是一系列**本征振动**的叠加
- 每一个**本征振动**的形式为 $u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$
- 令 $C_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，$\delta_n\equiv\arctan\frac{B_n}{A_n}$，则

$$\frac{A_n}{C_n}=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\cos\delta_n,\quad \frac{B_n}{C_n}=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\sin\delta_n$$

§1.6 解的物理图像

- 由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 可以看出，弦上的**一般振动**是一系列**本征振动**的叠加
- 每一个**本征振动**的形式为 $u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$
- 令 $C_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，$\delta_n\equiv\arctan\frac{B_n}{A_n}$，则

$$\frac{A_n}{C_n}=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\cos\delta_n,\quad \frac{B_n}{C_n}=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\sin\delta_n$$

- 记 $k_n\equiv\frac{n\pi}{l}$，$\omega_n\equiv k_na=\frac{n\pi a}{l}$，推出

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=C_n\sin k_nx\left(\frac{A_n}{C_n}\cos\omega_nt+\frac{B_n}{C_n}\sin\omega_nt\right)\\&=C_n\sin k_nx(\cos\omega_nt\cos\delta_n+\sin\omega_nt\sin\delta_n)=C_n\sin k_nx\cos(\omega_nt-\delta_n)\end{aligned}$$

- 这个结果代表**一列驻波**，对于给定的 n，弦上**各点**以同样的**频率** ω_n 振动
- **初相位** $-\delta_n$ 也是**各点相同**，只是在**节点两侧相差** π（因为振幅的符号**相反**）
- **振幅** $|C_n\sin k_nx|$ 则是**位置的函数**

§1.6 解的物理图像

- 由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 可以看出，弦上的**一般振动**是一系列**本征振动**的叠加
- 每一个**本征振动**的形式为 $u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$
- 令 $C_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，$\delta_n\equiv\arctan\frac{B_n}{A_n}$，则

$$\frac{A_n}{C_n}=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\cos\delta_n,\quad \frac{B_n}{C_n}=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\sin\delta_n$$

- 记 $k_n\equiv\frac{n\pi}{l}$，$\omega_n\equiv k_na=\frac{n\pi a}{l}$，推出

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=C_n\sin k_nx\left(\frac{A_n}{C_n}\cos\omega_nt+\frac{B_n}{C_n}\sin\omega_nt\right)\\&=C_n\sin k_nx(\cos\omega_nt\cos\delta_n+\sin\omega_nt\sin\delta_n)=C_n\sin k_nx\cos(\omega_nt-\delta_n)\end{aligned}$$

驻波的动画演示

- 这个结果代表**一列驻波**，对于给定的 n，弦上**各点**以同样的**频率** ω_n 振动
- **初相位** $-\delta_n$ 也是**各点相同**，只是在**节点两侧相差** π（因为振幅的符号**相反**）
- **振幅** $|C_n\sin k_nx|$ 则是**位置的函数**

驻波的特点

- $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$ 只决定于系统的性质（弦的长度、线密度和张力）和边界条件，而与初始条件无关，故称为本征频率
- 另一方面，$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ 和 $\delta_n = \arctan \dfrac{B_n}{A_n}$ 则与初始条件有关
- $n = 1$ 的振动称为基波，频率为 $\omega_1 = \dfrac{\pi a}{l}$
- 由于 $\omega_n = n\omega_1$，故 $n > 1$ 的振动称为 n 次谐波

驻波的特点

- $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$ 只决定于系统的性质（弦的长度、线密度和张力）和边界条件，而与初始条件无关，故称为本征频率
- 另一方面，$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ 和 $\delta_n = \arctan \dfrac{B_n}{A_n}$ 则与初始条件有关
- $n = 1$ 的振动称为基波，频率为 $\omega_1 = \dfrac{\pi a}{l}$
- 由于 $\omega_n = n\omega_1$，故 $n > 1$ 的振动称为 n 次谐波
- 驻波 $u_n(x,t) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n)$ 上有一些点振幅为零
- 这些点永远不动，称为波节或节点
- 节点满足 $k_n x = \dfrac{n\pi x}{l} = m\pi$，因而位置在

$$x = \frac{m}{n} l, \quad m = 0, 1, \cdots, n$$

- 可见，n 次谐波包括端点共有 $n+1$ 个节点
- 基波除端点外没有节点，振幅最大的点称为波腹
- 相邻节点间有一个波腹，n 次谐波共有 n 个波腹

特例

考虑**特例**

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \ (n \neq 3)$$

一般解化为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} \end{aligned}$$

特例

考虑**特例**

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \ (n \neq 3)$$

一般解化为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}$$

解的动画演示

§2 一维热传导方程

§2.1 分离变量与本征值问题

- 本节以**第二边值问题**为例研究**一维热传导方程**的求解
- 考虑**侧面**和**两端绝热**的**细杆**的**热传导**问题

- 即给定**初始温度分布**，求以后各时刻的**温度** $u(x,t)$，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

- 其中 $\varphi(x)$ 是**已知**函数，给出杆上各点的初始温度分布

§2 一维热传导方程

§2.1 分离变量与本征值问题

- 本节以**第二边值问题**为例研究**一维热传导方程**的求解
- 考虑**侧面**和**两端绝热**的**细杆**的**热传导**问题

- 即给定**初始温度分布**，求以后各时刻的**温度** $u(x,t)$，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

- 其中 $\varphi(x)$ 是**已知**函数，给出杆上各点的初始温度分布
- 现在尝试寻找 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 形式的**特解**，将它代入**一维热传导方程**，得

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t)$$

本征值问题

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}$，**左边与 t 无关**，**右边与 x 无关**，必为**常数**，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个**常微分方程** $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

本征值问题

- 从而 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}$，**左边与 t 无关**，**右边与 x 无关**，必为**常数**，记作 $-\lambda$
- 由此得到两个**常微分方程** $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$
- 1 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cosh\mu x + D\sinh\mu x$
- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $X'(x) = C\mu\sinh\mu x + D\mu\cosh\mu x$
- 由于 $\mu > 0$，$X'(0) = D\mu = 0$ 表明 $D = 0$
- 由于 $l > 0$，$X'(l) = C\mu\sinh\mu l = 0$ 表明 $C = 0$
- 于是得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

本征值和本征函数

- 2️⃣ 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**
- 👑 由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$，故 $C = 0$，而 D 可**任意**
- 👸🏻 于是得到**本征值** $\lambda_0 = 0$，**本征函数** $X_0(x) = 1$，其中已取 $D = 1$
- 🙇🏻‍♀️ 注意这里与**第一边值问题**的区别，如果**遗漏**这个解，**本征函数族**将是**不完备**的

本征值和本征函数

2️⃣ 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

👑 由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$，故 $C = 0$，而 D 可**任意**

👸🏻 于是得到**本征值** $\lambda_0 = 0$，**本征函数** $X_0(x) = 1$，其中已取 $D = 1$

🙇🏻‍♀️ 注意这里与**第一边值问题**的区别，如果**遗漏**这个解，**本征函数族**将是**不完备**的

3️⃣ 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

🎓 其中 C、D 是**任意常数**，有 $X'(x) = -C\mu\sin\mu x + D\mu\cos\mu x$

👨🏻‍🎓 由 $X'(0) = D\mu = 0$ 得 $D = 0$，从而 $X'(l) = -C\mu\sin\mu l = 0$

本征值和本征函数

2 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**

由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$，故 $C = 0$，而 D 可**任意**

于是得到**本征值** $\lambda_0 = 0$，**本征函数** $X_0(x) = 1$，其中已取 $D = 1$

注意这里与**第一边值问题**的区别，如果**遗漏**这个解，**本征函数族**将是**不完备**的

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

其中 C、D 是**任意常数**，有 $X'(x) = -C\mu\sin\mu x + D\mu\cos\mu x$

由 $X'(0) = D\mu = 0$ 得 $D = 0$，从而 $X'(l) = -C\mu\sin\mu l = 0$

为了得到**非平庸解**，必须使 $\sin\mu l = 0$，如此则 C 可**任意**

因此 $\sin\mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 是**正弦函数**的**零点**，于是得到**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\mu_n x = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取 $C = 1$

本征函数的图像

- 注意 $X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi x}{l}$ 在 $n = 0$ 时退化为 $X_0(x) = 1$
- 因此，可以把**所有**的**本征值**和**本征函数**统一写成

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

§2.2 本征函数族的正交完备性

与上节情况类似，**本征函数族** $\left\{X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 具有**正交完备性**

首先，该本征函数族在**区间** $[0,l]$ 上是**正交**的：

$$(X_m(x),X_n(x))=\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\quad m,n\in\mathbb{N}^+,\quad m\neq n$$

$$(X_0(x),X_n(x))=\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

利用**积化和差公式**，有

$$\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\bigg|_0^l+\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\bigg|_0^l\right]=0$$

$$\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l=0$$

本征函数的模方

- 本征函数的模方定义为 $\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$
- 当 $n=0$ 时，$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \int_0^l \mathrm{d}x = l$
- 当 $n \neq 0$ 时，有

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos\frac{2n\pi x}{l} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l + x\Big|_0^l\right) = \frac{l}{2}$$

- 归纳起来，模方表达为

$$\|X_n(x)\|^2 = \begin{cases} l, & n=0 \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

本征函数族的完备性

- 其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0,l]$ 上是完备的
- 从而，对于区间 $[0,l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

本征函数族的完备性

其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0,l]$ 上是完备的

从而，对于区间 $[0,l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0,l]$$

将上式的求和指标 n 改写为 k，两边乘以 $\cos(n\pi x/l)$，对 x 从 0 到 l 积分，得

$$\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^l\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=a_n\|X_n(x)\|^2,\quad n\in\mathbb{N}$$

第二步用到本征函数族的正交性，只有 $k=n$ 那一项的贡献**非零**

于是，展开系数表达为

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

§2.3 一般解

- 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中 A_0 和 A_n 是**任意常数**
- 于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= X_0(x)T_0(t) = A_0 \\ u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

§2.3 一般解

- 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中 A_0 和 A_n 是**任意常数**
- 于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= X_0(x)T_0(t) = A_0 \\ u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t)\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

- 将这些特解叠加，就得到满足**方程**和**边界条件**的**一般解**

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

- 它代表**细杆两端绝热**时**温度分布**的**最一般形式**
- 适当选取其中的**任意常数**A_0 和 A_n，就可以满足给定的**初始条件**

§2.4 用初始条件确定系数

🚕 将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

🚙 由于本征函数族 $\{\cos\ n\pi x/l\ \}_{n=0}^{\infty}$ 是完备的，只要 $\varphi(x)$ 具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

🚗 给定 $\varphi(x)$ 的具体形式，就可以计算出以上积分

🚌 将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

§2.4 用初始条件确定系数

🚕 将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

🚙 由于本征函数族 $\{\cos\ n\pi x/l\ \}_{n=0}^{\infty}$ 是完备的，只要 $\varphi(x)$ 具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

🚗 给定 $\varphi(x)$ 的具体形式，就可以计算出以上积分

🚌 将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

🚃 如果初始时刻不是 $t=0$，而是 $t=\tau$，那么只需将原一般解中的 t 改成 $t-\tau$

🚡 就得到相应的一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-\lambda_n a^2(t-\tau)]\cos\frac{n\pi x}{l}$

🚠 其中系数 A_0 和 A_n 由初始条件 $u|_{t=\tau} = \varphi(x)$ 决定，仍然由上面的表达式给出

§2.5 解的物理图像

- 在**一般解** $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中
- 除了**第一项**，各项都有**指数衰减因子** $\exp(-\lambda_n a^2 t)$
- 这是**输运问题**的解的特点，它体现了过程的**不可逆性**
- 而**常数项** A_0 则是**第二类边界条件**所特有的

§2.5 解的物理图像

- 在一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中
- 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$
- 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性
- 而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的
- 当 $t \to \infty$ 时，有 $u(x,t) \to A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

⚠ 注意，如果在一般解表达式中不把常数项 A_0 单独写出来，而且**忽视** $\lambda_0 = 0$ 这一事实，那么就很容易得出 $u(x,t) \to 0$ 的错误结果

- 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值 A_0

§2.5 解的物理图像

- 在一般解 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中
- 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$
- 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性
- 而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的
- 当 $t \to \infty$ 时，有 $u(x,t) \to A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

⚠ 注意，如果在一般解表达式中不把常数项 A_0 单独写出来，而且**忽视** $\lambda_0 = 0$ 这一事实，那么就很容易得出 $u(x,t) \to 0$ 的错误结果

- 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值 A_0
- 这是因为杆的侧面和两端都是绝热的，热量只能在内部流动
- 根据热传导的 Fourier 定律，热量总是从高温处流向低温处，最后温度趋于均匀
- 根据能量守恒定律，最终温度只能是初始温度的平均值

特例

考虑特例 $\varphi(x) = \sin^2 \dfrac{2\pi x}{l}$，由 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi x}{l}$$

比较两边，得到系数

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \ (n \neq 0, 4)$$

定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp\left[-\left(\frac{4\pi a}{l}\right)^2 t\right] \cos \frac{4\pi x}{l}$$

特例

考虑特例 $\varphi(x)=\sin^2\dfrac{2\pi x}{l}$，由 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 得

$$u|_{t=0}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi x}{l}$$

比较两边，得到系数

$$A_0=\frac{1}{2},\quad A_4=-\frac{1}{2},\quad A_n=0\ (n\neq 0,4)$$

定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\exp\left[-\left(\frac{4\pi a}{l}\right)^2 t\right]\cos\frac{4\pi x}{l}$$

解的动画演示