

# 数学物理方法

## 第十一章 球函数

### 第2节 一般球函数

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期: 2024 年 12 月 10 日



## §2 一般球函数

### §2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

 如前所述, 在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

 如果问题的边界条件并不具有轴对称性, 则除了上节讨论的特殊情况  $m = 0$  以外, 还需要研究  $m \neq 0$  的情况, 即连带 Legendre 方程的本征值问题

## §2 一般球函数

## §2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

 如果问题的边界条件并不具有轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况  $m = 0$  以外，还需要研究  $m \neq 0$  的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

作变换  $P(x) = (1 - x^2)^{m/2}y(x)$ ，代入连带 Legendre 方程

由  $\frac{dP}{dx} = (1-x^2)^{m/2}y' - mx(1-x^2)^{m/2-1}y$  推出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] &= \frac{d}{dx} [(1-x^2)^{m/2+1} y' - mx(1-x^2)^{m/2} y] \\ &= (1-x^2)^{m/2+1} y'' - (m+2)x(1-x^2)^{m/2} y' - mx(1-x^2)^{m/2} y' \\ &\quad - m(1-x^2)^{m/2} y + m^2 x^2 (1-x^2)^{m/2-1} y \end{aligned}$$

## §2 一般球函数

### §2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并不具有轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况  $m = 0$  以外，还需要研究  $m \neq 0$  的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

作变换  $P(x) = (1-x^2)^{m/2} y(x)$ ，代入连带 Legendre 方程

由  $\frac{dP}{dx} = (1-x^2)^{m/2} y' - mx(1-x^2)^{m/2-1} y$  推出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] &= \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^{m/2+1} y' - mx(1-x^2)^{m/2} y \right] \\ &= -2(m+1)x(1-x^2)^{m/2} y' \\ &= (1-x^2)^{m/2+1} y'' - (m+2)x(1-x^2)^{m/2} y' - mx(1-x^2)^{m/2} y \\ &\quad - m(1-x^2)^{m/2} y + m^2 x^2 (1-x^2)^{m/2-1} y \end{aligned}$$

# $y(x)$ 满足的方程



因此，作变换  $P(x) = (1 - x^2)^{m/2}y(x)$  之后，连带 Legendre 方程化为

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P \\
 &= (1 - x^2)^{m/2+1} y'' - 2(m+1)x(1 - x^2)^{m/2} y' - m(1 - x^2)^{m/2} y \\
 &\quad + m^2 x^2 (1 - x^2)^{m/2-1} y + \lambda(1 - x^2)^{m/2} y - m^2 (1 - x^2)^{m/2-1} y \\
 &= (1 - x^2)^{m/2} \left[ (1 - x^2) y'' - 2(m+1)xy' - my - m^2 \frac{-x^2}{1 - x^2} y + \lambda y - m^2 \frac{1}{1 - x^2} y \right] \\
 &= (1 - x^2)^{m/2} \{ (1 - x^2) y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y \}
 \end{aligned}$$



可见， $y(x)$  满足的方程为

$$(1 - x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y = 0$$

对 Legendre 方程求导  $m$  次

另一方面，将 Legendre 方程中的函数  $P(x)$  写作  $f(x)$ ，得

$$0 = \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{df}{dx} \right] + \lambda f = (1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f$$

现在对它求导  $m$  次，注意到

$$(1-x^2)'' = (-2x)' = -2, \quad C_m^0 = 1, \quad C_m^1 = m, \quad C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$$

由高阶导数的 Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned}
 [(1-x^2)f'']^{(m)} &= \sum_{k=0}^m C_m^k (1-x^2)^{(k)} f''^{(m-k)} \\
 &= C_m^0 (1-x^2) f''^{(m)} + C_m^1 (1-x^2)' f''^{(m-1)} + C_m^2 (1-x^2)'' f''^{(m-2)} \\
 &= (1-x^2) f^{(m)''} - 2mx f^{(m)'} - m(m-1) f^{(m)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2xf')^{(m)} &= \sum_{k=0}^m C_m^k (2x)^{(k)} f'^{(m-k)} = C_m^0 \cdot 2xf'^{(m)} + C_m^1 (2x)' f'^{(m-1)} \\
 &= 2xf^{(m)'} + 2mf^{(m)}
 \end{aligned}$$

## 连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)''} - 2mx f^{(m)'} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)} \end{aligned}$$

整理得  $(1 - x^2)f^{(m)''} - 2(m + 1)xf^{(m)'} + [\lambda - m(m + 1)]f^{(m)} = 0$

## 连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$\begin{aligned}0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\&= (1-x^2)f^{(m)''} - 2mx f^{(m)'} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)}\end{aligned}$$

整理得  $(1-x^2)f^{(m)''} - 2(m+1)xf^{(m)'} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$

与  $(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$  比较, 可知

$$y(x) = f^{(m)}(x)$$

也就是说，只要将 Legendre 方程的解  $f(x)$  求导  $m$  次，就能够得到方程

$(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$  的解  $y(x)$

## 连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)''} - 2mx f^{(m)'} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)} \end{aligned}$$

整理得  $(1-x^2)f^{(m)''} - 2(m+1)xf^{(m)'} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$

与  $(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$  比较, 可知

$$y(x) = f^{(m)}(x)$$

也就是说，只要将 Legendre 方程的解  $f(x)$  求导  $m$  次，就能够得到方程

$(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$  的解  $y(x)$

由于  $P(x) = (1 - x^2)^{m/2} y(x)$ , 为了满足边界条件  $P(\pm 1) = 0$ ,  $y(\pm 1)$  应该有限

因此  $f(\pm 1)$  也应该有限, 这只有当  $\lambda = l(l+1)$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) 时才有可能

相应的解为 Legendre 多项式, 即  $f(x) = P_l(x)$ , 故  $P(x) = (1-x^2)^{m/2}P_l^{(m)}(x)$

# 连带 Legendre 方程本征值问题的本征值和本征函数

于是求得连带 Legendre 方程本征值问题的本征值

$$\lambda_l = l(l+1), \quad l = m, m+1, \dots$$

相应是本征函数是连带 Legendre 函数

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x), \quad l = m, m+1, \dots$$

对于连带 Legendre 方程的本征值问题来说,  $m$  是事先给定的

它来源于  $\Phi(\phi)$  的本征值问题

如果  $l < m$  时, 则  $P_l^{(m)}(x) = 0$ , 本征函数化为零

所以  $l$  的取值被  $m$  限制为  $l = m, m+1, \dots$

当  $m = 0$  时, 连带 Legendre 函数退化为 Legendre 多项式, 即  $P_l^0(x) = P_l(x)$

与  $P_l^m(x)$  线性独立的另一个解记作  $Q_l^m(x)$ , 它在  $x = \pm 1$  处有奇性

# 说明



文献中的连带 Legendre 函数有两种不同定义



上述  $P_l^m(x) \equiv (1 - x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$  是 Ferrer 定义



另有一种 Hobson 定义  $P_l^m(x) \equiv (-)^m (1 - x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$



定义不同，有关公式（如递推关系）也会有所不同



因此读者在使用不同参考书时应该留意其所用定义

# 说明



文献中的连带 Legendre 函数有两种不同定义



上述  $P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$  是 Ferrer 定义



另有一种 Hobson 定义  $P_l^m(x) \equiv (-)^m (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$



定义不同，有关公式（如递推关系）也会有所不同



因此读者在使用不同参考书时应该留意其所用定义



有些作者将连带 Legendre 函数称为“连带 Legendre 多项式”，这一名称并不恰当



当  $m$  不是偶数时， $P_l^m(x)$  并不是  $x$  的多项式



如果令  $x = \cos \theta$ ，则  $(1-x^2)^{m/2} = \sin^m \theta$



$P_l^m(\cos \theta)$  变成两个宗量  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的多项式，显然不是通常意义下的多项式

## §2.2 连带 Legendre 函数的微分表示

由 Legendre 多项式的微分表示  $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$  得

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right]$$

可见, 连带 Legendre 函数的微分表示为

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$$

这也称为 Rodrigues 公式

### §2.3 函数 $P_l^{-m}(x)$

按照  $P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$ ， $P_l^{-m}(x)$  并没有意义

因为求导  $-m$  次是没有意义的

然而,只要  $0 \leq m \leq l$ , 就能用微分表示  $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$

定义函数  $P_l^{-m}(x)$ ，即

$$P_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l$$

## §2.3 函数 $P_l^{-m}(x)$

 按照  $P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$ ， $P_l^{-m}(x)$  并没有意义

 因为求导  $-m$  次是没有意义的

 然而，只要  $0 \leq m \leq l$ ，就能用微分表示  $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$

定义函数  $P_l^{-m}(x)$ ，即

$$P_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2 - 1)^l$$

 由于  $m$  在连带 Legendre 方程中只以  $m^2$  形式出现，方程对于  $m \rightarrow -m$  的替换是不变的，所以有理由推测，这样定义的  $P_l^{-m}(x)$  也是连带 Legendre 方程的解

 根据 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论，只要不涉及周期性边界条件，一个本征值只对应于一个线性独立的本征函数

 从而进一步推测， $P_l^{-m}(x)$  与  $P_l^m(x)$  实质上应该相同，即最多相差一个常数因子

### P<sub>l</sub><sup>-m</sup>(x) 与 P<sub>l</sub><sup>m</sup>(x) 的关系

事实上，可以证明

$$P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

对  $m > 0$  证明上式 (见选读内容) 之后, 由  $|m| = m$  推出

$$P_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(x), \quad P_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} P_l^{-|m|}(x)$$

### P<sub>l</sub><sup>-m</sup>(x) 与 P<sub>l</sub><sup>m</sup>(x) 的关系

事实上，可以证明

$$P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

对  $m > 0$  证明上式 (见选读内容) 之后, 由  $|m| = m$  推出

$$P_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(x), \quad P_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} P_l^{-|m|}(x)$$

对于  $m < 0$ ，则  $|m| = -m$ ，就可以得到

$$P_l^{-m}(x) = P_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} P_l^{-|m|}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

可见,  $P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$  对于  $m > 0$  和  $m < 0$  两种情况都成立

 如果对  $P_l^m(x)$  中  $m$  的正负不作限制，则  $l \geq |m|$

## §2.4-§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, 相同  $m$  不同  $l$  的连带 Legendre 函数在区间  $[-1, 1]$  上有正交关系

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的模 (推导过程见选读内容) 为

$$\|\mathbf{P}_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [\mathbf{P}_l^m(x)]^2 dx} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

⛵ 上式对  $m > 0$  和  $m < 0$  均成立,  $m = 0$  时退化为  $\|P_l^0\| = \|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

## §2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, 相同  $m$  不同  $l$  的连带 Legendre 函数在区间  $[-1, 1]$  上有正交关系

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的模 (推导过程见选读内容) 为

$$\|P_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

上式对  $m > 0$  和  $m < 0$  均成立,  $m = 0$  时退化为  $\|P_l^0\| = \|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

以上两式可以统一写为  $\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \|P_l^m\|^2 \delta_{ll'}$

等价地, 有  $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \|P_l^m\|^2 \delta_{ll'}$

## §2.6 广义 Fourier 级数

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, 连带 Legendre 函数在区间  $[-1, 1]$  上是完备的

为确定起见, 本小节讨论只取  $m > 0$

于是, 区间  $[-1, 1]$  上任意一个解析良好的函数  $f(x)$  必定可以用  $\{\mathbf{P}_l^m(x)\}_{l=m}^{\infty}$  展开为广义 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l \mathbf{P}_l^m(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

利用  $\int_{-1}^1 \mathbf{P}_l^m(x) \mathbf{P}_{l'}^m(x) dx = \|\mathbf{P}_l^m\|^2 \delta_{ll'}$ , 求得展开系数为

$$f_l = \frac{1}{\|\mathbf{P}_l^m\|^2} \int_{-1}^1 f(x) \mathbf{P}_l^m(x) dx, \quad l = m, m+1, \dots$$

## §2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

 连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出

 例如, 对递推关系一  $(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$  求导  $m$  次

 利用  $[xP_l(x)]^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k x^{(k)} P_l^{(m-k)}(x) = xP_l^{(m)}(x) + mP_l^{(m-1)}(x)$ , 推出

$$(2l + 1)xP_l^{(m)}(x) + m(2l + 1)P_l^{(m-1)}(x) = (l + 1)P_{l+1}^{(m)}(x) + lP_{l-1}^{(m)}(x)$$

## §2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

 连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出

例如, 对递推关系  $(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$  求导  $m$  次

利用  $[xP_l(x)]^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k x^{(k)} P_l^{(m-k)}(x) = xP_l^{(m)}(x) + mP_l^{(m-1)}(x)$ ，推出

$$(2l+1)xP_l^{(m)}(x) + m(2l+1)P_l^{(m-1)}(x) = (l+1)P_{l+1}^{(m)}(x) + lP_{l-1}^{(m)}(x)$$

对递推关系三  $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$  求导  $m-1$  次, 得

$$(2l+1)P_l^{(m-1)}(x) = P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x)$$

联立消去  $P_l^{(m-1)}(x)$ ，有

$$(2l+1)xP_l^{(m)}(x) + m[P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x)] = (l+1)P_{l+1}^{(m)}(x) + lP_{l-1}^{(m)}(x)$$

两边同乘以  $(1 - x^2)^{m/2}$ ，整理得到连带 Legendre 函数的递推关系

$$(l-m+1)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)xP_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0$$

## §2.8 球谐函数



在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量  $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$



那么, 角向部分  $Y(\theta, \phi)$  满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

由于球坐标系的特点, 函数  $Y(\theta, \phi)$  应该满足以下两个自然边界条件

$$Y(0, \phi) \text{ 和 } Y(\pi, \phi) \text{ 没有奇性, } Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi)$$

这里没有奇性指具有确切的定义, 并且是有限的

上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题

## §2.8 球谐函数

在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量  $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$

那么，角向部分  $Y(\theta, \phi)$  满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

由于球坐标系的特点, 函数  $Y(\theta, \phi)$  应该满足以下两个**自然边界条件**

$Y(0, \phi)$  和  $Y(\pi, \phi)$  没有奇性,  $Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi)$

这里没有奇性指具有确切的定义，并且是有限的

上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题

进一步作分离变量  $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$

已经求得  $\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}$  ( $m \in \mathbb{N}$ )，相应的本征值  $m^2$  进入  $H(\theta)$  的方程

对于确定的  $m$ ,  $H(\theta) = P_l^m(\cos \theta)$ , 本征值为  $\lambda_l = l(l+1)$ ,  $l = m, m+1, \dots$

# 球谐函数

对于一个确定本征值  $\lambda_l = l(l+1)$ ，上述偏微分方程本征值问题有下列本征函数

$$P_l^m(\cos \theta) \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, l$$

或者表达成

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

# 球谐函数

对于一个确定本征值  $\lambda_l = l(l+1)$ ，上述偏微分方程本征值问题有下列本征函数

$$P_l^m(\cos \theta) \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, l$$

或者表达成

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

由于  $P_l^{-m}(x)$  与  $P_l^m(x)$  只相差一个常数因子，以上本征函数又等价于

$$S_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

这些本征函数称为球谐函数 (spherical harmonics)

可见，对应于一个本征值  $\lambda_l$ ，本征函数是  $2l+1$  个线性独立的球谐函数

故本征值  $\lambda_l$  的简并度为  $2l+1$

$l$  称为球谐函数的阶

# 归一化球谐函数

 物理上更常用的是归一化的球谐函数

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^m \frac{P_l^m(\cos \theta)}{\|P_l^m\|} \frac{e^{im\phi}}{\|e^{im\phi}\|} = (-)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$l \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

 归一化因子  $\|P_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}$  是函数  $P_l^m(\cos \theta)$  的模

 归一化因子  $\|e^{im\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |e^{im\phi}|^2 d\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi} d\phi} = \sqrt{2\pi}$  是函数  $e^{im\phi}$  的模

## 归一化球谐函数

物理上更常用的是归一化的球谐函数

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^m \frac{P_l^m(\cos \theta)}{\|P_l^m\|} \frac{e^{im\phi}}{\|e^{im\phi}\|} = (-)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$l \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

 归一化因子  $\|P_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}$  是函数  $P_l^m(\cos \theta)$  的模

归一化因子  $\|e^{im\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |e^{im\phi}|^2 d\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi} d\phi} = \sqrt{2\pi}$  是函数  $e^{im\phi}$  的模

归一化以后相位因子还可以任取, 相位因子  $(-)^m$  的取法是历史上沿袭下来的

球谐函数有**不同的定义**，主要就在于相位因子的取法不同

定义不同，有关的公式也会有所不同，在使用时应该加以留意。

$l = 0, 1, 2$  的球谐函数  $Y_{lm}(\theta, \phi)$

当  $l = 0$  且  $m = 0$  的球谐函数为

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

●  $l = 1$  且  $m = 0, \pm 1$  的球谐函数为

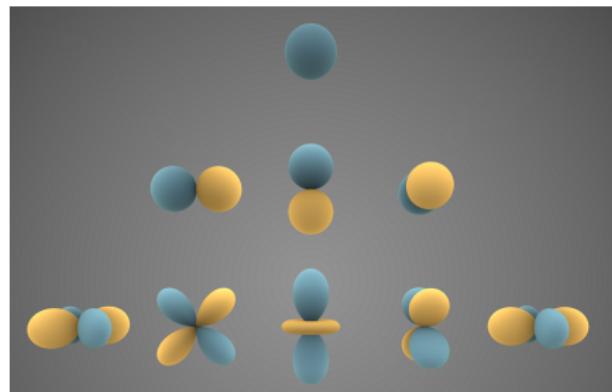
$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

当  $l = 2$  且  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  的球谐函数为

$$Y_{2,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

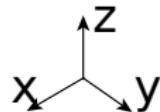
$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$



# 球谐函数图像

$l:$		$P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$	$P_\ell^{ m }(\cos \theta) \sin( m \varphi)$	
0	s			
1	p			
2	d			
3	f			
4	g			
5	h			
6	i			
	$m:$	6 5 4 3 2 1 0	-1 -2 -3 -4 -5 -6	



# 球面上的广义 Fourier 级数

 根据  $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \|P_l^m\|^2 \delta_{ll'}$  和  $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$

 容易得到归一化球谐函数在单位球面上的正交归一关系

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

# 球面上的广义 Fourier 级数

 根据  $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \|P_l^m(\cos \theta)\|^2 \delta_{ll'}$  和  $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$

 容易得到归一化球谐函数在单位球面上的正交归一关系

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

 由于  $\{e^{im\phi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$  在  $\phi \in [0, 2\pi]$  上完备,  $\{P_l^m(\cos \theta)\}_{l=|m|}^{\infty}$  在  $\theta \in [0, \pi]$  上完备

 球谐函数在球面上是完备的, 球面上任意解析良好的函数  $f(\theta, \phi)$  一定可以展开为

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

 根据正交归一关系, 展开系数为

$$f_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

## 球坐标系下 Laplace 方程的一般解

 在球坐标下讨论 Laplace 方程  $\nabla^2 u(r) = 0$ ，本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \textcolor{blue}{\lambda} Y = 0 \\ Y(0, \phi) \text{ 和 } Y(\pi, \phi) \text{ 没有奇性, } \quad Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi) \end{cases}$$

的本征值  $\lambda = l(l+1)$  与  $m$  无关

因此, 径向方程  $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$  的解仍然是  $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，球坐标系下 Laplace 方程的一般解为

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

## 球坐标系下 Laplace 方程的一般解

在球坐标下讨论 Laplace 方程  $\nabla^2 u(r) = 0$ ，本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \textcolor{blue}{\lambda} Y = 0 \\ Y(0, \phi) \text{ 和 } Y(\pi, \phi) \text{ 没有奇性, } \quad Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi) \end{cases}$$

的本征值  $\lambda = l(l+1)$  与  $m$  无关

因此, 径向方程  $r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \lambda R(r) = 0$  的解仍然是  $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，球坐标系下 Laplace 方程的一般解为

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

本征函数族  $\{\cos m\phi, \sin m\phi\}_{m=0}^{\infty}$  与  $\{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}_{m=0}^{\infty}$  等价, 一般解也可以写成

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[ r^l (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) + \frac{1}{r^{l+1}} (C_{lm} \cos m\phi + D_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta)$$

# 宇宙微波背景

$t \sim 380,000 \text{ yr}$ ,  $T \sim 3000 \text{ K}$

电子 + 原子核  $\rightarrow$  原子  
光子退耦



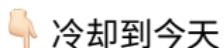
冷却到今天

2.7 K 宇宙微波背景

## 宇宙微波背景

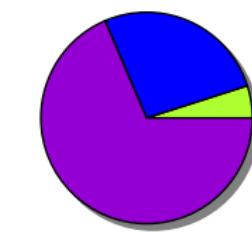
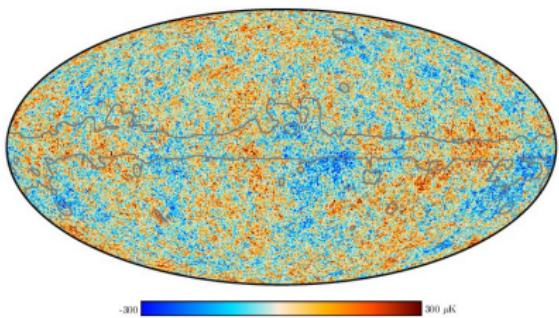
$$t \sim 380,000 \text{ yr}, \quad T \sim 3000 \text{ K}$$

电子 + 原子核  $\rightarrow$  原子  
光子退耦

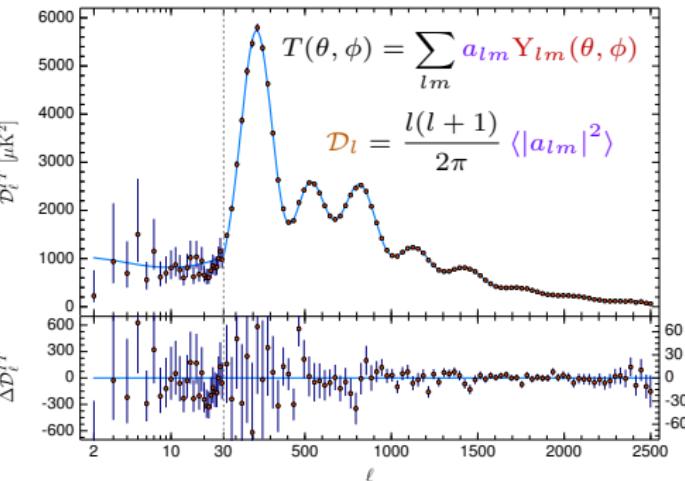


## 2.7 K 宇宙微波背景

利用球谐函数计算宇宙微波背景各向异性功率谱，确定冷暗物质比例  $\Omega_c$ 、重子物质比例  $\Omega_b$  和暗能量比例  $\Omega_\Lambda$



[1807.06205, 1807.06209]



冷暗物质 (26.5%)

$$\Omega_c h^2 = 0.1200 \pm 0.0012$$

重子物质 (4.9%)

$$\Omega_b h^2 = 0.02237 \pm 0.00015$$

暗能量 (68.6%)

$$\Omega_\Lambda = 0.6847 \pm 0.0073$$