

量子场论

第 10 章 散射矩阵元与多点关联函数

10.4 节至 10.6 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期: 2025 年 12 月 25 日



10.4 节 多点关联函数的微扰论

第 6、7 章借助相互作用绘景讨论了用微扰论处理散射矩阵的方法，引进了 Feynman 图和 Feynman 规则

既然 LSZ 约化公式将散射矩阵与多点关联函数联系起来，也可将微扰论研究转移到多点关联函数上，得到与前述章节一致的结论，并为高阶计算和重整化过程作铺垫。

下面仍然以实标量场为例进行讨论, n 点关联函数 $\langle 0 | T[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle$ 是用 Heisenberg 绘景中的场算符 $\phi(x)$ 定义的, 但是存在相互作用时我们不知道如何将 $\phi(x)$ 精确地表达出来, 因而需要把它转化成渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 或 $\phi_{\text{out}}(x)$ 来处理

10.4 节 多点关联函数的微扰论

第 6、7 章借助相互作用绘景讨论了用微扰论处理散射矩阵的方法，引进了 Feynman 图和 Feynman 规则

既然 LSZ 约化公式将散射矩阵与多点关联函数联系起来，也可将微扰论研究转移到多点关联函数上，得到与前述章节一致的结论，并为高阶计算和重整化过程作铺垫。

下面仍然以实标量场为例进行讨论, n 点关联函数 $\langle 0 | T[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle$ 是用 Heisenberg 绘景中的场算符 $\phi(x)$ 定义的, 但是存在相互作用时我们不知道如何将 $\phi(x)$ 精确地表达出来, 因而需要把它转化成渐近场 $\phi_{in}(x)$ 或 $\phi_{out}(x)$ 来处理

 **渐近场**相当于具有物理质量 m 的自由场，它们在本章讨论中取代了原先由**相互作用**绘景的**场算符**所扮演的角色

类似于 Heisenberg 绘景与相互作用绘景之间的变换关系，假设 $\phi(x)$ 与 $\phi_{\text{in}}(x)$ 由含时么正算符 $W(t)$ 联系起来：

$$\phi(x) = W^\dagger(t) \phi_{\text{in}}(x) W(t), \quad \pi(x) = W^\dagger(t) \pi_{\text{in}}(x) W(t)$$

π(x) 和 $\pi_{in}(x)$ 分别是 $\phi(x)$ 与 $\phi_{in}(x)$ 对应的**共轭动量密度**

渐近哈密顿量

将系统的哈密顿量分解为 $H(\phi, \pi) = H_0(\phi, \pi) + H_1(\phi, \pi)$

其中 H_0 是自由部分, H_1 是相互作用部分

它们一般可表达为 ϕ 、 π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的全空间积分

比如自由实标量场的哈密顿量是 $H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$

 $\phi(x)$ 所满足的 **Heisenberg 运动方程** 是 $i\partial_0\phi = [\phi, H(\phi, \pi)]$

类似地, $\phi_{\text{in}}(x)$ 的运动方程是 $i\partial_0\phi_{\text{in}} = [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})]$, 其中渐近哈密顿量 $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 形式相同, 但需要将 H_0 中裸质量 m_0 换成物理质量 m

渐近哈密顿量

将系统的哈密顿量分解为 $H(\phi, \pi) = H_0(\phi, \pi) + H_1(\phi, \pi)$

其中 H_0 是自由部分, H_1 是相互作用部分

它们一般可表达为 ϕ 、 π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的全空间积分

比如自由实标量场的哈密顿量是 $H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$

$\phi(x)$ 所满足的 **Heisenberg** 运动方程是 $i\partial_0\phi = [\phi, H(\phi, \pi)]$

类似地, $\phi_{\text{in}}(x)$ 的运动方程是 $i\partial_0\phi_{\text{in}} = [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})]$, 其中渐近哈密顿量 $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 形式相同, 但需要将 H_0 中裸质量 m_0 换成物理质量 m

例如，在实标量场的 ϕ^4 理论中，

$$H_0(\phi, \pi) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m_0^2 \phi^2], \quad H_1(\phi, \pi) = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi^4$$

而渐近哈密顿量为 $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla \phi_{\text{in}})^2 + m^2 \phi_{\text{in}}^2]$

算符方程

Ⅱ $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t)$ 两边对时间求导, 有

$$i\partial_0\phi = i(\partial_0 W^\dagger)\phi_{in}W + iW^\dagger(\partial_0\phi_{in})W + iW^\dagger\phi_{in}\partial_0W$$

由 $W(t)$ 算符的幺正性条件 $W^\dagger W = \mathbb{I}$ 得

$$0 = \partial_0(W^\dagger W) = (\partial_0 W^\dagger)W + W^\dagger \partial_0 W$$

即

$$\partial_0 W^\dagger = -W^\dagger (\partial_0 W) W^\dagger$$

从而, 利用运动方程 $i\partial_0\phi = [\phi, H(\phi, \pi)]$ 和 $i\partial_0\phi_{in} = [\phi_{in}, H_{in}(\phi_{in}, \pi_{in})]$ 推出

$$[\phi, H(\phi, \pi)] = i\partial_0 \phi = -iW^\dagger (\partial_0 W) W^\dagger \phi_{\text{in}} W + W^\dagger [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})] W + iW^\dagger \phi_{\text{in}} \partial_0 W$$

◆ 左边乘以 W ，右边乘以 W^\dagger ，得到

$$W[\phi, H(\phi, \pi)]W^\dagger = -i(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\text{in}} + [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})] + i\phi_{\text{in}}(\partial_0 W)W^\dagger$$

$$\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

注意 $H(\phi, \pi)$ 是 ϕ 、 π 和 $\nabla\phi$ 的多项式的积分，在 $H(\phi, \pi)$ 里所有相邻算符之间插入 $W^\dagger W = \mathbb{I}$ ，利用 $\phi_{\text{in}}(x) = W(t)\phi(x)W^\dagger(t)$ 和 $\pi_{\text{in}}(x) = W(t)\pi(x)W^\dagger(t)$ ，推出

$$W H(\phi, \pi) W^\dagger = H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

W[ϕ , $H(\phi, \pi)$]W † = -i($\partial_0 W$)W † ϕ_{in} + [ϕ_{in} , $H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$] + i $\phi_{\text{in}}(\partial_0 W)W^\dagger$ 化为

$$[\phi_{\text{in}}, H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})] = -i[(\partial_0 W)W^\dagger, \phi_{\text{in}}] + [\phi_{\text{in}}, H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})]$$

这意味着

$$[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}, \pi_{in}), \phi_{in}] = 0$$

其中

$$\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \equiv H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

中 将 ϕ 和 ϕ_{in} 替换成 π 和 π_{in} ，重复上述推导过程，得到

$$[\mathbf{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}), \pi_{\text{in}}] = 0$$

裸质量与物理质量的平方差

注意，物理质量 m 与裸质量 m_0 不同

这里的 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \equiv H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 也与 $H_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 有所差别

如果相互作用项不包含 $\phi(x)$ 的时空导数 $\partial_\mu \phi$ ，则 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 不依赖于 $\pi_{\text{in}}(x)$ ，只依赖于 $\phi_{\text{in}}(x)$ ；下面只考虑这种情况，将它改记为 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}})$

⑧ 比如，在 ϕ^4 理论中，有

$$H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla \phi_{\text{in}})^2 + m_0^2 \phi_{\text{in}}^2] + \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi_{\text{in}}^4$$

$$H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi_{\text{in}}^2 + (\nabla \phi_{\text{in}})^2 + \color{red}m^2\phi_{\text{in}}^2]$$

故 $\tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{m}_0^2 - \mathbf{m}^2)\phi_{\text{in}}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\text{in}}^4 \right] = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\delta\mathbf{m}^2\phi_{\text{in}}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\text{in}}^4 \right)$

其中 $\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2$ 是裸质量与物理质量的平方差

$W(t)$ 的运动方程

【 \mathfrak{M} 】 $[\mathbf{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}] = 0$ 和 $[\mathbf{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}), \pi_{\text{in}}] = 0$ 表明, 算符 $A \equiv \mathbf{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}})$ 与 ϕ_{in} 、 π_{in} 都是对易的

【】 由于 ϕ_{in} 和 π_{in} 是系统的正则变量, 用它们可以构建一组算符完备集, 而这组完备集中的任意算符都与 A 对易, 这说明算符 A 必定正比于恒等算符 \mathbb{I} , 即

$$\mathbf{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) = c(t)\mathbb{I}$$

【】 其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的 **c** 数函数

$W(t)$ 的运动方程

【 \mathfrak{M} 】 $[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}), \phi_{in}] = 0$ 和 $[i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}), \pi_{in}] = 0$ 表明, 算符 $A \equiv i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in})$ 与 ϕ_{in} 、 π_{in} 都是对易的

【】 由于 ϕ_{in} 和 π_{in} 是系统的正则变量, 用它们可以构建一组算符完备集, 而这组完备集中的任意算符都与 A 对易, 这说明算符 A 必定正比于恒等算符 \mathbb{I} , 即

$$i(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{in}) = c(t)\mathbb{I}$$

【】 其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的 **c** 数函数; 改写上式, 得到 $W(t)$ 的运动方程

$$i\partial_0 W = \tilde{H}_1^c(t)W$$

【】 这里 $\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{in}) + c(t)$ 是用入场 $\phi_{in}(x)$ 表达出来的**时间** t 的函数

【】 此方程与 6.2 节**时间演化算符**的微分方程 $i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t)U(t, t_0)$ 形式相同

【】 采用类似的求解方法, 将解表达为

$$W(t) = W(t_0) - i \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{H}_1^c(t_1)W(t_1)$$

时间演化算符的 Dyson 级数

Ω 重复迭代，利用时序乘积得到

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathsf{T}[\tilde{H}_1^c(t_1) \cdots \tilde{H}_1^c(t_n)] W(t_0) \\ &= \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \tilde{H}_1^c(t') \right] W(t_0) \end{aligned}$$

在 6.2 节中，时间演化算符 $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$ 依赖于联系 Heisenberg 绘景和相互作用绘景的含时么正算符 $V(t)$

现在渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 扮演了相互作用绘景的场算符的角色，因此应该用 $W(t)$ 取代 $V(t)$ ，将时间演化算符定义为

$$U(t, t_0) \equiv W(t)W^\dagger(t_0) = \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \tilde{H}_1^c(t') \right]$$

这个结果也是一个 Dyson 级数，只不过 $\tilde{H}_1^c(t')$ 取代了原来的 $H_1^I(t')$

这样定义的时间演化算符仍然具有 6.2 节所描述的性质

n 点关联函数与渐近场

接下来用渐近场来表达 n 点关联函数, 由变换关系 $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t)$ 得

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | \mathsf{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \mathsf{T}[W^\dagger(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)W(t_2)\cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)W(t_n)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \mathsf{T}[W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)W(t_2) \\
&\quad \times \cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)W(t_n)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | W^\dagger(+\infty) \mathsf{T}[U(+\infty, t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)U(t_1, t_2)\phi_{\text{in}}(x_2) \\
&\quad \times \cdots U(t_{n-1}, t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)U(t_n, -\infty)] W(-\infty) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

第三步在方括号中插入 $W^\dagger(+\infty)W(+\infty) = \mathbb{I}$ 和 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty) = \mathbb{I}$

最后一步改写成时间演化算符 $U(t, t_0) \equiv W(t)W^\dagger(t_0)$ 的形式

由于时序乘积里面的含时算符能够任意移动，可以让里面的时间演化算符相邻排列，再由乘法规则 $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$ 得到

$$U(+\infty, t_1)U(t_1, t_2)\cdots U(t_{n-1}, t_n)U(t_n, -\infty) = U(+\infty, -\infty)$$

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | W^\dagger(+\infty) \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \dots \phi_{\text{in}}(x_n) U(+\infty, -\infty)] W(-\infty) | 0 \rangle$$

$$\langle \Psi_n; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$$

现在需要知道 $W(+\infty)$ 和 $W(-\infty)$ 对真空态 $|0\rangle$ 作用的结果

设 $|\Psi_p; \text{in}\rangle$ 是包含一个四维动量为 p^μ 的粒子的任意入态，表达为

$$|\Psi_p; \text{in}\rangle = \sqrt{2E_p} \, \color{blue}{a}_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger \, |\Psi; \text{in}\rangle$$

其中 $|\Psi; \text{in}\rangle$ 包含除这个粒子之外的其它成分

利用 $a_{p,in} = \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ip \cdot x} \partial_0^\leftarrow \phi_{in}(x)$ 推出

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle &= \sqrt{2E_p} \langle \Psi; \text{in} | a_{p,\text{in}} W(-\infty) | 0 \rangle \\
&= i \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | \phi_{\text{in}}(x) W(-\infty) | 0 \rangle \\
&= i \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | W(t) \phi(x) W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

已用到变换关系 $\phi_{\text{in}}(x) = W(t)\phi(x)W^\dagger(t)$ ；取 $t \rightarrow -\infty$ 的极限，由渐近条件得

$$\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle = i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle$$

处理 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$

$$\begin{aligned}
e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial_0} [W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t)] &= e^{ip \cdot x} \partial_0 W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) + e^{ip \cdot x} W(t) \partial_0 \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) \\
&\quad + e^{ip \cdot x} W(t) \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 W^\dagger(t) - (\partial_0 e^{ip \cdot x}) W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) \\
&= W(t) [e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_{\text{in}}(x)] W^\dagger(t) \\
&\quad + e^{ip \cdot x} [\partial_0 W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) + W(t) \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 W^\dagger(t)]
\end{aligned}$$

从而 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$

$$\begin{aligned}
&= i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \Psi; \text{in} | W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle \\
&= i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x \langle \Psi; \text{in} | W(t) [e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x)] W^\dagger(t) W(-\infty) | 0 \rangle \\
&\quad + i\sqrt{Z} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \langle \Psi; \text{in} | [\partial_0 W(t) \phi_{\text{in}}(x) W^\dagger(t) \\
&\quad \quad \quad + W(t) \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 W^\dagger(t)] W(-\infty) | 0 \rangle \\
&= \sqrt{2E_p Z} \langle \Psi; \text{in} | W(-\infty) a_{p,\text{in}} | 0 \rangle \\
&\quad + i \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{ip \cdot x} \langle \Psi; \text{in} | [\partial_0 W(t) \phi(x) + W(t) \phi(x) \partial_0 W^\dagger(t)] W(t) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

第一项的推导用到 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty) = \mathbb{I}$ ，由于 $a_{p,in}|0\rangle = 0$ ，此项贡献为零

$W(+\infty)|0\rangle$, $W(-\infty)|0\rangle$ 与真空态

用变换关系 $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\text{in}}(x)W(t)$ 将 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$ 第二项中算符化为

$$\partial_0 W(t) \phi(x) + W(t) \phi(x) \partial_0 W^\dagger(t) W(t)$$

$$= \partial_0 W(t) W^\dagger(t) \phi_{\text{in}}(x) W(t) + \phi_{\text{in}}(x) W(t) \partial_0 W^\dagger(t) W(t)$$

$$= \partial_0 W(t) W^\dagger(t) \phi_{\text{in}}(x) W(t) + \phi_{\text{in}}(x) \{ \partial_0 [W(t) W^\dagger(t)] - \partial_0 W(t) W^\dagger(t) \} W(t)$$

$$= [\partial_0 W(t) W^\dagger(t), \phi_{\text{in}}(x)] W(t) = -i [\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\text{in}}(x)] W(t)$$

最后一步用到运动方程 $i\partial_0 W = \tilde{H}_1^c(t)W$

已经假设 $\tilde{H}_1^c(t)$ 只依赖于 $\phi_{\text{in}}(x)$ ，因此等时对易关系保证 $[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\text{in}}(x)] = 0$

从而 $\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle$ 第二项的贡献也是零, 于是

$$\langle \Psi_p; \text{in} | W(-\infty) | 0 \rangle = 0$$

由于 $|\Psi_p; \text{in}\rangle$ 是至少包含一个粒子的任意入态，上式表明态矢 $W(-\infty)|0\rangle$ 不包含任何粒子，它至多与真空态相差一个相位因子 c_- ，即 $W(-\infty)|0\rangle = c_-|0\rangle$

类似地, 可以推出 $W(+\infty)|0\rangle = c_+|0\rangle$, 其中 c_+ 是另一个相位因子

表达 n 点关联函数

由真空态的归一化条件和 $W(t)$ 的幺正性得

$$\begin{aligned} 1 &= \langle 0|0\rangle = \langle 0|W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)|0\rangle \\ &= \langle 0|W^\dagger(+\infty)U(+\infty,-\infty)W(-\infty)|0\rangle = c_+^* c_- \langle 0|U(+\infty,-\infty)|0\rangle \end{aligned}$$

故 $c_+^* c_- = \frac{1}{\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle}$

结合 Dyson 级数, 将 n 点关联函数表达为

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | W^\dagger(+\infty) \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) U(+\infty, -\infty)] W(-\infty) | 0 \rangle \\
&= c_+^* c_- \langle 0 | \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) U(+\infty, -\infty)] | 0 \rangle \\
&= \frac{\langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1^c(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1^c(t) \right] | 0 \rangle}
\end{aligned}$$

将 $\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) + c(t)$ 代入上式的分子和分母中

则 $c(t)$ 贡献一个因子 $\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt c(t)\right]$ ，分子和分母的这个共同因子相互抵消

化简 n 点关联函数

因此, $c(t)$ 实际上对 n 点关联函数没有贡献

可以用 $\tilde{H}_1(t) = \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) = H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 替代 $\tilde{H}_1^c(t)$ ，得到

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$

其中归一化因子

$$\mathcal{N} \equiv \langle 0 | \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_1(t) \right] | 0 \rangle$$

只是一个相位因子

设 $\tilde{H}_1(x)$ 是 $\tilde{H}_1(t)$ 的空间密度, 它是用渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 表达的, 满足

$$\tilde{H}_1(t) = \int d^3x \, \tilde{\mathcal{H}}_1(x)$$

n 点关联函数的微扰级数

将指数函数展开，得到 n 点关联函数的微扰级数

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4y_1 \cdots d^4y_k \langle 0 | \mathsf{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)] | 0 \rangle$$

其中归一化因子展开为

$$\mathcal{N} = \langle 0 | \mathsf{T} \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] | 0 \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4y_1 \cdots d^4y_k \langle 0 | \mathsf{T} [\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)] | 0 \rangle .$$

可以利用 **Wick 定理** 处理这个微扰级数，并导出 **Feynman 图**

10.5 节 多点关联函数的 Feynman 图

本节在 ϕ^4 理论中讨论多点关联函数的微扰论，并画出 Feynman 图

将 ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分, $\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x)$

$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x), \quad \mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x)$$

可见, $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 相互作用项 \mathcal{H}_λ 之外, 还出现了 ϕ_{in} 的二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$, 它跟质量重整化 (mass renormalization) 有关

10.5 节 多点关联函数的 Feynman 图

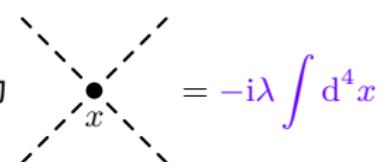
老鼠 本节在 ϕ^4 理论中讨论多点关联函数的微扰论，并画出 Feynman 图

麦穗 将 ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分， $\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x)$

$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x), \quad \mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x)$$

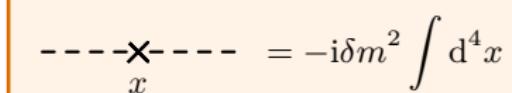
玉米 可见， $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 相互作用项 \mathcal{H}_λ 之外，还出现了 ϕ_{in} 的二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ ，它跟质量重整化 (mass renormalization) 有关

蓝莓 根据 7.3 节讨论， \mathcal{H}_λ 在位置空间中给出的顶点规则为



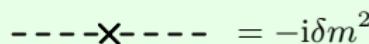
$$= -i\lambda \int d^4 x$$

橘子 类似地， $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 给出位置空间“顶点规则”



$$= -i\delta m^2 \int d^4 x$$

苹果 相应的动量空间规则为



$$= -i\delta m^2$$



10.5.1 小节 两点关联函数的 Feynman 图

hog 现在将两点关联函数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ 与归一化因子 \mathcal{N} 的乘积展开，得

$$\begin{aligned}\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2) &= \langle 0 | \mathcal{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle - \frac{i\delta m^2}{2} \int d^4x \langle 0 | \mathcal{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}^2(x)] | 0 \rangle \\ &\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | \mathcal{T}[\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}^4(x)] | 0 \rangle + \dots\end{aligned}$$

apple 这里省略了高阶贡献

peanut 下面处理前三项中的真空期待值，应用 **Wick 定理** 将时序乘积转化为正规乘积

strawberry 由于任意多个场算符的正规乘积的真空期待值为零，只有正规乘积中 **所有的** 场算符都发生了 **缩并**，才能得到 **非平庸** 的结果

apple 我们称这种情况为 **完全缩并**

两点关联函数的分解

 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 第一项是 6.4.1 小节讨论的实标量场 Feynman 传播子,

$$\langle 0 | \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathsf{N}[\overline{\phi_{\text{in}}(x_1)}\phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle = D_{\text{F}}(x_1 - x_2) = D_{12}$$

为便于书写, 这里引进 Feynman 传播子的**缩写记号**, 定义为

$$D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j) = D_{ji}, \quad D_{xy} \equiv D_F(x - y) = D_{yx}, \quad D_{ix} \equiv D_F(x_i - x) = D_{xi}$$

两点关联函数的分解

老虎 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 第一项是 6.4.1 小节讨论的实标量场 Feynman 传播子,

$$\langle 0 | \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathsf{N}[\overline{\phi_{\text{in}}(x_1)}\phi_{\text{in}}(x_2)] | 0 \rangle = D_{\text{F}}(x_1 - x_2) = D_{12}$$

为便于书写, 这里引进 Feynman 传播子的**缩写记号**, 定义为

$$D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j) = D_{ji}, \quad D_{xy} \equiv D_F(x - y) = D_{yx}, \quad D_{ix} \equiv D_F(x_i - x) = D_{xi}$$

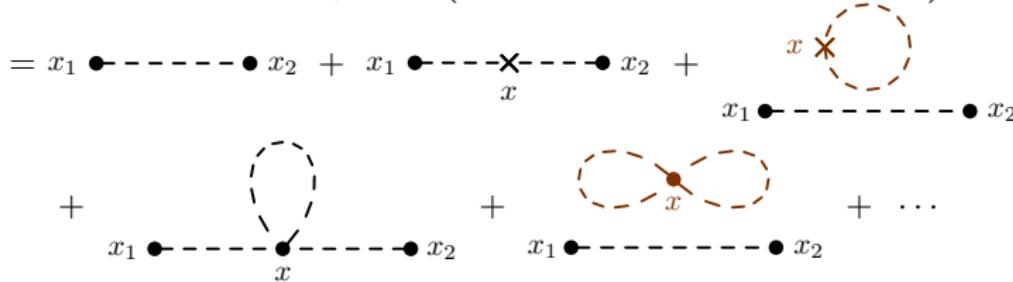
桃子 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 第二项和第三项中的真空期待值分解为

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}^2(x)] | 0 \rangle &= A_2^2 \langle 0 | \mathsf{N}[\underbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)}_{\mathcal{C}_4^2 A_2^2} \underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}_{\mathcal{C}_3^1} | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | \mathsf{N}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)] | 0 \rangle \\
&= 2D_{1x}D_{x2} + D_{12}D_{xx} \\
\langle 0 | \mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}^4(x)] | 0 \rangle &= C_4^2 A_2^2 \langle 0 | \mathsf{N}[\underbrace{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)}_{\mathcal{C}_4^1} \underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}_{\mathcal{C}_3^1} \underbrace{\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)}_{\mathcal{C}_3^1} | 0 \rangle \\
&\quad + C_3^1 \langle 0 | \mathsf{N}[\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)\phi_{\text{in}}(x)] | 0 \rangle \\
&= 12D_{1x}D_{xx}D_{x2} + 3D_{12}D_{xx}D_{xx}
\end{aligned}$$

用 Feynman 图表示两点关联函数

将这些结果代回 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ ，根据位置空间 Feynman 规则画出 Feynman 图，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2) = & D_{12} - i\delta m^2 \int d^4x \left(D_{1x}D_{x2} + \frac{1}{2} D_{12}D_{xx} \right) \\ & - i\lambda \int d^4x \left(\frac{1}{2} D_{1x}D_{xx}D_{x2} + \frac{1}{8} D_{12}D_{xx}D_{xx} \right) + \dots \end{aligned}$$



第一步中 3 个分数因子的分母正是 Feynman 图的对称性因子

2 点关联函数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ 的宗量是两个时空点 x_1^μ 和 x_2^μ ，称为外点 (external point)，在多点关联函数的 Feynman 图中用圆点表示

一般地, n 点关联函数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 描述 n 个外点之间的关联, 根据 LSZ 约化公式, 这 n 个外点对于 T 矩阵元相应 Feynman 图中的 n 条外线



气泡图和连通图

气泡图和连通图
 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 中有 3 项包含 D_{12} ，它对应于从 x_1 到 x_2 的 Feynman 传播子
 合并这 3 个同类项，将 D_{12} 的图形提取出来，余下 1 加上两个气泡图：

$$\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \bullet \dots \bullet x_2 \times \left(1 + x \times \text{气泡图 1} + \text{气泡图 2} \right)$$

$$+ x_1 \bullet \dots \times \dots \bullet x_2 + \text{气泡图 3} + \dots$$

 气泡图的特点是不与任何外点相连；将各个外点都连接起来且不包含气泡图的 Feynman 图称为连通图 (connected diagram)

 可见，这里第一项因式分解为连通图与 1 加两个气泡图的乘积，这样的因子化 (factorization) 是普遍的，下面作一般论述

归一化因子的 Feynman 图

归一化因子 $\mathcal{N} = \langle 0 | T \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] | 0 \rangle$ 对所有时空点都进行积分，而相

应的 Feynman 图不包含任何外点，必然对应着各种各样的气泡图

可以认为 \mathcal{N} 描述了从**真空态**到**真空态**之间的**跃迁过程**

在 ϕ^4 理论中，有

$$\mathcal{N} = \langle 0 | \mathsf{T} \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

$$= 1 + \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots$$

Diagrams 1 through 4 are shown in the image, each consisting of a dashed circle with a black dot inside. Diagram 1 has a single dot. Diagram 2 has two dots connected by a horizontal line. Diagram 3 has two dots connected by a diagonal line. Diagram 4 has two dots connected by a curved line.

这里前三项正是上一页 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 图形表达式圆括号中的项

多点关联函数与连通图

由此可以猜测，



n 点关联函数

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

中的 $1/N$ 因子正好抵消了所有气泡图对真空期待值

$$\langle 0 | \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

的贡献，故相关 Feynman 图都是连通图



接下来给出证明

关于连通图的证明

证明 对 $\mathcal{N}G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 应用 **Wick 定理**, 只保留有**非平庸贡献的完全缩并**;
注意完全缩并的结果必定是 **c 数**, 可用**真空期待值**表示

从而将相关贡献分解为两个**真空期待值**之积, 要求**第一个真空期待值**只包含**连通图**的贡献, **第二个真空期待值**只包含**气泡图**的贡献, 得到

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{N}G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_k \langle 0 | T[\phi_{in}(x_1) \cdots \phi_{in}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)] | 0 \rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \\
 & \quad \times \langle 0 | N[\phi_{in}(x_1) \cdots \phi_{in}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j}) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle \\
 & \quad \times \langle 0 | N[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

对于某个 k 值, 挑选 j 个 $\tilde{\mathcal{H}}_1$ 放在**第二个真空期待值**中的方法有 $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$
种, 因而需要考虑这个因子, 再对 j 求和

拆解积分

拆解积分，利用 $\frac{1}{m!} \rightarrow 0 (m < 0)$ 将 j 的求和上限扩展到无穷大，得

$$\mathcal{N}G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{(-i)^j}{j!} \\
 &\quad \times \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_{k-j} \langle 0 | \mathbf{N}[\phi_{in}(x_1) \cdots \phi_{in}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j}) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle \\
 &\quad \times \int d^4 y_{k-j+1} \cdots d^4 y_k \langle 0 | \mathbf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_k) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-i)^i}{i!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_i \langle 0 | \mathbf{N}[\phi_{in}(x_1) \cdots \phi_{in}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_i) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int d^4 y_{i+1} \cdots d^4 y_{i+j} \langle 0 | \mathbf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j}) \text{ 的所有完全缩并}] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

第二步作变量替换，令 $i \equiv k - j$ ，分开两个求和，第二个求和式正是归一化因子

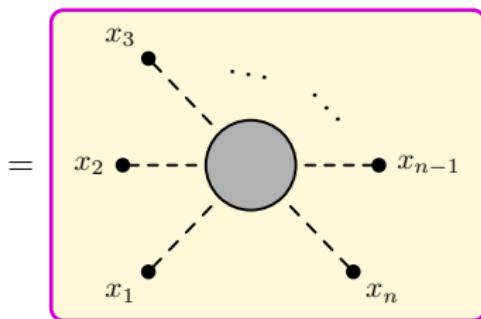
$$\mathcal{N} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int d^4 y_{i+1} \cdots d^4 y_{i+j} \langle 0 | \mathbf{T}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1}) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})] | 0 \rangle$$

完成证明



将归一化因子从左右两边同时约去，推出

$$\begin{aligned}
 G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-i)^i}{i!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_i \\
 &\quad \times \langle 0 | N[\phi_{in}(x_1) \cdots \phi_{in}(x_n) \tilde{\mathcal{H}}_1(y_1) \cdots \tilde{\mathcal{H}}_1(y_i)] \text{的所有完全缩并} | 0 \rangle \\
 &= \text{包含 } n \text{ 个外点 } x_1, \dots, x_n \text{ 的所有连通图}
 \end{aligned}$$



第三步用灰色圆形表示所有连通图之和

证毕

二次项对两点关联函数的贡献

🐑 下面考察二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2} = \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{\text{in}}^2(x)$ 的影响, 考虑各种连通图, 那么它对两点关联函数的贡献为

$$\begin{aligned}
 G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2) &\equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | T \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \right] \right\} | 0 \rangle \\
 &= x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{-----} \times \text{-----} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{-----} \times \text{-----} \times \text{-----} \bullet x_2 + \dots \\
 &= D_{12} - i\delta m^2 \int d^4x D_{1x} D_{x2} + (-i\delta m^2)^2 \int d^4x d^4y D_{1x} D_{xy} D_{y2} + \dots
 \end{aligned}$$

🎸 $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, 0)$ 的 Fourier 变换是 $\tilde{G}_{\delta m^2}(p) \equiv \int d^4x_1 e^{ip \cdot x_1} G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, 0)$

🧀 首先, $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第一项对 $\tilde{G}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献是动量空间中的 Feynman 传播子

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \bullet \text{-----} \xrightarrow{p} \bullet$$

🍔 其中第二步画出相应的动量空间 Feynman 图



$G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第二项的贡献

其次, $G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第二项对 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p)$ 的贡献为

$$\begin{aligned}
 & -i\delta m^2 \int d^4 x_1 d^4 x e^{ip \cdot x_1} D_F(x_1 - x) D_F(x) \\
 &= -i\delta m^2 \int \frac{d^4 x_1 d^4 x}{(2\pi)^8} e^{ip \cdot x_1} \frac{i e^{-ip_1 \cdot (x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_2 \cdot x}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= -i\delta m^2 \int d^4 p_1 d^4 p_2 \delta^{(4)}(p_1 - p) \delta^{(4)}(p_2 - p_1) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= \tilde{D}_F(p) (-i\delta m^2) \tilde{D}_F(p) \\
 &= \bullet \xrightarrow{p} \times \cdots \bullet
 \end{aligned}$$

最后一步根据动量空间 Feynman 规则画出 Feynman 图

$G_{\delta m^2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第三项的贡献

最后, $G_{\delta m_2}^{(2)}(x_1, x_2)$ 第三项对 $\tilde{G}_{\delta m_2}^{(2)}(p)$ 的贡献是

$$\begin{aligned}
& (-i\delta m^2)^2 \int d^4x_1 d^4x d^4y e^{ip \cdot x_1} D_F(x_1 - x) D_F(x - y) D_F(y) \\
&= (-i\delta m^2)^2 \int \frac{d^4x_1 d^4x d^4y d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}} e^{ip \cdot x_1} \\
&\quad \times \frac{i e^{-ip_1 \cdot (x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_2 \cdot (x - y)}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_3 \cdot y}}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= (-i\delta m^2)^2 \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 \delta^{(4)}(p_1 - p) \delta^{(4)}(p_2 - p_1) \delta^{(4)}(p_3 - p_2) \\
&\quad \times \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \tilde{D}_F(p) (-i\delta m^2) \tilde{D}_F(p) (-i\delta m^2) \tilde{D}_F(p) = \bullet \xrightarrow{p} -\times -\cdots -\times -\cdots \bullet
\end{aligned}$$

二次项对动量空间传播子的贡献

综上, 二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对动量空间传播子 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的贡献为

$$\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) = \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \dots$$

可见, 对多点关联函数作 Fourier 变换后, 作时空坐标和四维动量的积分, 则位置空间中的 Feynman 传播子 D_F 转换为相应的动量空间 Feynman 传播子 \tilde{D}_F

而与顶点联系在一起的时空积分已经用掉了，这说明剩下的因子正好可以用动量空间中的 Feynman 规则描述，由此得到一个普遍结论：

多点关联函数的 Fourier 变换对应于动量空间中的 Feynman 图

因此可以利用动量空间 Feynman 规则直接计算多点关联函数的 Fourier 变换

等比级数

🐷 现在 $\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p)$ 表达式是一个等比级数，可改写为

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-\text{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-\text{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p)(-\text{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p) + \dots \\ &= \tilde{D}_F(p) \sum_{k=0}^{\infty} [(-\text{i}\delta m^2)\tilde{D}_F(p)]^k = \frac{\text{i}}{p^2 - m^2 + \text{i}\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\delta m^2}{p^2 - m^2 + \text{i}\epsilon} \right)^k\end{aligned}$$

🐠 由等比级数公式 $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ($|z| < 1$) 得

$$\frac{1}{a - z} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - z/a} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^k, \quad |z| < |a|$$

🌭 δm^2 是微扰论中的小量，取 $a = p^2 - m^2 + \text{i}\epsilon$ 和 $z = \delta m^2$ ，有

$$\tilde{G}_{\delta m^2}^{(2)}(p) = \frac{\text{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 + \text{i}\epsilon} = \frac{\text{i}}{p^2 - m_0^2 + \text{i}\epsilon}$$

🌮 第二步用到定义式 $\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2$ ，可见，二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对两点关联函数的影响是将极点位置从物理质量平方 m^2 移动到裸质量平方 m_0^2 处



相互作用项对两点关联函数的贡献

接下来考虑 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{H}_\lambda = \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{in}}^4(x)$ ，对它对两点关联函数的贡献为

$$G_\lambda^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | T \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_\lambda(x) \right] \right\} | 0 \rangle$$

作 Fourier 变换，将各种连通图画出来，得

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) &\equiv \int d^4x_1 e^{ip \cdot x_1} G_\lambda^{(2)}(x_1, 0) = \bullet \xrightarrow{p} \lambda \bullet \\ &= \bullet \xrightarrow{p} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \bullet \bullet \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet + \dots \\ &\quad + \bullet \xrightarrow{p} \bullet \bullet \bullet \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet + \dots \end{aligned}$$

单粒子不可约图

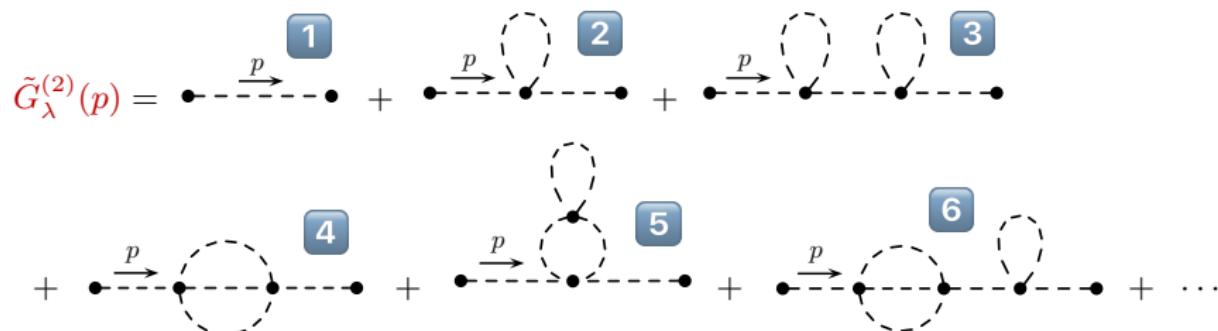
$$\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \dots$$

青蛙 在这些连通图中, 3 和 6 是可以约化的

如果从 3 中移除连接中间两个点的内线，那么它会分割成两个不相连的部分

如果从 6 中移除连接第三和第四个点的内线，它也会分割成两个不相连部分

单粒子不可约图



青蛙 在这些连通图中, 3 和 6 是可以约化的

榔头 如果从 3 中移除连接中间两个点的内线, 那么它会分割成两个不相连的部分

冰糖葫芦 如果从 6 中移除连接第三和第四个点的内线, 它也会分割成两个不相连部分

肠子 像 2、4、5 这样, 移除任意一条线之后不会分割成两个不相连的部分, 这种图称为单粒子不可约图 (one-particle irreducible diagram), 简称 1PI 图

草莓 注意 1 并不属于 1PI 图

蜡烛 可利用 1PI 图约化各种连通图, 比如 3 约化成两个 2, 6 约化成 4 和 2

两点关联函数的所有 1PI 图

将所有由 \mathcal{H}_1 贡献的两点关联函数 $1PI$ 图记作

$$-i\Pi(p^2) = \boxed{\text{---} \xrightarrow{p} \text{1PI} \text{---}}$$

$$= -\frac{p}{\pi} \int \frac{1}{z} dz + \frac{p}{\pi} \int \frac{1}{z} dz + \frac{p}{\pi} \int \frac{1}{z} dz + \dots$$

这些 1PI 图都属于 7.3 节讨论过的 ϕ 粒子自能图

定义上 1PI 自能图 $-i\Pi(p^2)$ 的表达式中不包含两个连接外点的 Feynman 传播子

Lorentz 对称性保证 $\Pi(p^2)$ 是 p^2 的函数

（3） $\Pi(p^2)$ 的领头阶是 λ^1 阶，因而它是微扰论中的小量

相互作用项对动量空间传播子的贡献

利用 1PI 自能图 $-\text{i}\Pi(p^2)$ 可以将 $\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p)$ 表达为

$$\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) = \bullet \xrightarrow{p} \lambda \bullet$$

$$= \bullet \dashrightarrow \xrightarrow{p} \bullet + \bullet \dashrightarrow \text{1PI} \dashrightarrow \bullet + \bullet \dashrightarrow \text{1PI} \dashrightarrow \text{1PI} \dashrightarrow \bullet + \dots$$

$$= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_F(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_F(p) + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^k = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}$$

最后一步用到 $\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k$, $|z| < |a|$

这个结果表明相互作用项 \mathcal{H}_λ 也会影响两点关联函数的极点位置

动量空间中的完整传播子

将 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 和 \mathcal{H}_λ 的贡献合起来, 动量空间中的**两点关联函数**(即**完整的传播子**)是

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{(2)}(p) &= \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bullet \\
&= \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \times \text{---} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \text{1PI} \text{---} \bullet \\
&\quad + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \text{1PI} \text{---} \text{1PI} \text{---} \bullet \\
&\quad + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \times \text{---} \text{1PI} \text{---} \bullet + \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \text{1PI} \text{---} \times \text{---} \bullet + \dots \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\delta m^2 + \Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^k = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}
\end{aligned}$$

质量重整化条件

在单粒子态极点附近, $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 Källén-Lehmann 谱表示

$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$ 的第一项相同, 即

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_p} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

可见, 为了保持极点位于物理质量 m 的平方处, 必须要求 $\delta m^2 = -\Pi(m^2)$

这是质量重整化条件，它表明质量重整化常数 δm^2 由 1PI 自能图的 $\Pi(p^2)$ 决定



质量重整化条件

在单粒子态极点附近, $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 Källén-Lehmann 谱表示

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$$

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_p} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

可见, 为了保持极点位于物理质量 m 的平方处, 必须要求 $\delta m^2 = -\Pi(m^2)$

这是质量重整化条件, 它表明质量重整化常数 δm^2 由 1PI 自能图的 $\Pi(p^2)$ 决定

由于 $\Pi(p^2)$ 的领头阶是 λ^1 阶, δm^2 的领头阶也是 λ^1 阶

在圈图计算中, $\Pi(p^2)$ 是发散的, 因而 δm^2 也是发散的; 不过, 它们相加时发散部分相互抵消, 因此对传播子的修正量 $f(p^2) \equiv \delta m^2 + \Pi(p^2)$ 是有限的 $\mathcal{O}(\lambda)$ 小量

由于二次项 $\mathcal{H}_{\delta m^2} = \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_{in}^2(x)$ 的贡献抵消了相互作用项 \mathcal{H}_λ 对极点位置的影响, 我们称 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 为质量抵消项 (mass counter term)

换句话说, 正是因为在高阶计算中相互作用项的贡献移动了极点位置, 我们需要从拉氏量中的裸质量平方 m_0^2 里面分离出 δm^2 来抵消它的影响

展开 $f(p^2)$

在 $p^2 = m^2$ 附近将 $f(p^2) = \delta m^2 + \Pi(p^2)$ 展开, 得

$$\begin{aligned} f(p^2) &\simeq \delta m^2 + \Pi(m^2) + (p^2 - m^2) \left. \frac{d\textcolor{red}{f}(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2] \\ &= (p^2 - m^2) \left. \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2] \end{aligned}$$

从而 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 $p^2 = m^2$ 附近近似为

$$\begin{aligned} \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} &\simeq \frac{i}{(p^2 - m^2) \left[1 - \left. \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right] + i\epsilon} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 - \left. \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

场强重整化条件

比较 $\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \simeq \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 - \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right]^{-1}$ 与

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_p} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \text{ 推出}$$

$$Z^{-1} = 1 - \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2} \bigg|_{p^2=m^2}$$

这是场强重整化条件，它表明场强重整化常数 Z 也由 1PI 自能图 $\Pi(p^2)$ 决定

$$Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$$

10.5.2 小节 四点关联函数的 Feynman 图



现在讨论四点关联函数，展开到 λ^1 阶，有

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N} G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \langle 0 | \mathcal{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4)] | 0 \rangle \\
&\quad - \frac{i\delta m^2}{2} \int d^4x \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \phi_{\text{in}}^2(x)] | 0 \rangle \\
&\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{in}}(x_2) \phi_{\text{in}}(x_3) \phi_{\text{in}}(x_4) \phi_{\text{in}}^4(x)] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)
\end{aligned}$$



10.5.2 小节 四点关联函数的 Feynman 图

🦊 现在讨论四点关联函数，展开到 λ^1 阶，有

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= \langle 0 | T \left\{ \phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) \phi_{in}(x_3) \phi_{in}(x_4) \exp \left[-i \int d^4x \tilde{\mathcal{H}}_1(x) \right] \right\} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | T[\phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) \phi_{in}(x_3) \phi_{in}(x_4)] | 0 \rangle \\
 &\quad - \frac{i\delta m^2}{2} \int d^4x \langle 0 | T[\phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) \phi_{in}(x_3) \phi_{in}(x_4) \phi_{in}^2(x)] | 0 \rangle \\
 &\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T[\phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) \phi_{in}(x_3) \phi_{in}(x_4) \phi_{in}^4(x)] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

☀️ 首先， $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第一项给出的连通图为

$$\begin{aligned}
 G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{array}{c} x_3 \bullet - - - - \bullet x_4 \\ + \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \bullet - - - - \bullet x_4 \\ + \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \bullet - - - - \bullet x_3 \\ + \end{array} \\
 &= D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}
 \end{aligned}$$

☁️ 这三个图各自描述两个独立传播的自由粒子，与散射过程无关



质量重整化常数的修正

hog 其次, $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第二项给出的连通图为

$$\begin{aligned}
 & G_{\delta m^2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= \begin{array}{c} x \\ x_3 \bullet - - - - \bullet x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x \\ x_3 \bullet - - \times - - \bullet x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x \\ x_2 \bullet - - - - \bullet x_4 \end{array} \\
 & \quad \begin{array}{c} x \\ x_1 \bullet - - \times - - \bullet x_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ x_1 \bullet - - - - \bullet x_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ x_1 \bullet - - \times - - \bullet x_3 \end{array} \\
 & \quad \begin{array}{c} x \\ x_2 \bullet - - \times - - \bullet x_4 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ x_2 \bullet - - - - \bullet x_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ x_2 \bullet - - \times - - \bullet x_3 \end{array} \\
 & + \quad \begin{array}{c} x \\ x_1 \bullet - - - - \bullet x_3 \end{array} + \quad \begin{array}{c} x \\ x_1 \bullet - - \times - - \bullet x_4 \end{array} + \quad \begin{array}{c} x \\ x_1 \bullet - - - - \bullet x_4 \end{array} \\
 & = -i\delta m^2 \int d^4x (D_{1x}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{x4} + D_{1x}D_{x3}D_{24} \\
 & \quad + D_{13}D_{2x}D_{x4} + D_{1x}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{x3})
 \end{aligned}$$

这些图在各个自由传播子上加入质量重整化常数的修正, 跟散射过程也没有关系



单圈自能图的修正

最后, $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第三项给出的两种连通图, 第一种连通图为

$$G_{\lambda,1}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\begin{aligned}
 &= x_3 \bullet \text{---} \bullet x_4 + x_3 \bullet \text{---} \bullet x_4 + x_2 \bullet \text{---} \bullet x_4 \\
 &\quad + x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 + x_1 \bullet \text{---} \bullet x_3 \\
 &\quad + x_2 \bullet \text{---} \bullet x_4 + x_2 \bullet \text{---} \bullet x_3 + x_2 \bullet \text{---} \bullet x_3 \\
 &\quad + x_1 \bullet \text{---} \bullet x_3 + x_1 \bullet \text{---} \bullet x_4 + x_1 \bullet \text{---} \bullet x_4 \\
 &= -i\lambda \int d^4x (D_{1x}D_{xx}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{xx}D_{x4} + D_{1x}D_{xx}D_{x3}D_{24} \\
 &\quad + D_{13}D_{2x}D_{xx}D_{x4} + D_{1x}D_{xx}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{xx}D_{x3})
 \end{aligned}$$

这些图只是在各个自由传播子上加入单圈自能图的修正, 与散射过程无关

连通图与散射过程



$\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第三项给出的第二种连通图为

$$G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{Diagram} = -i\lambda \int d^4x D_{1x}D_{2x}D_{3x}D_{4x}$$

The diagram shows four external points labeled x_1, x_2, x_3, x_4 connected to a central point x by dashed lines. x_1 is at the bottom left, x_2 is at the bottom right, x_3 is at the top left, and x_4 is at the top right. The central point x is connected to all four external points.

像这样所有外点彼此都连接在一起的连通图称为完全连通图；只有这种完全连通图会贡献到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程，接下来应用 LSZ 约化公式以得到 T 矩阵元

连通图与散射过程

野狼 $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 第三项给出的第二种连通图为

$$G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} \text{Diagram: Four points } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ connected by dashed lines to a central point } x. \end{array} = -i\lambda \int d^4x D_{1x}D_{2x}D_{3x}D_{4x}$$

 像这样所有外点彼此都连接在一起的连通图称为完全连通图；只有这种完全连通图会贡献到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程，接下来应用 LSZ 约化公式以得到 T 矩阵元

为此，先计算 Klein-Gordon 微分算符对 Feynman 传播子的作用，有

$$\begin{aligned}
 (\partial_x^2 + m^2) D_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (\partial_x^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}
 \end{aligned}$$

即

$$(\partial_x^2 + m^2) D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$$

可见, Feynman 传播子是 Klein-Gordon 算符的 Green 函数



T 矩阵元

将 $G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 代入 LSZ 约化公式, 得到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
 iT_{fi} &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2)} e^{-i(p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times (\partial_{x_1}^2 + m^2)(\partial_{x_2}^2 + m^2)(\partial_{x_3}^2 + m^2)(\partial_{x_4}^2 + m^2) G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= -i\lambda \frac{i^4}{Z^2} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2)} e^{-i(p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times (\partial_{x_1}^2 + m^2) D_F(x_1 - x) (\partial_{x_2}^2 + m^2) D_F(x_2 - x) \\
 &\quad \times (\partial_{x_3}^2 + m^2) D_F(x_3 - x) (\partial_{x_4}^2 + m^2) D_F(x_4 - x) \\
 &= -\frac{i\lambda}{Z^2} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2)} e^{-i(p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times \delta^{(4)}(x_1 - x) \delta^{(4)}(x_2 - x) \delta^{(4)}(x_3 - x) \delta^{(4)}(x_4 - x) \\
 &= -\frac{i\lambda}{Z^2} \int d^4x e^{-i(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \cdot x} = -\frac{i\lambda}{Z^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)
 \end{aligned}$$

领头阶计算

与 $iT_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$ 比较, 则 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程的不变振幅为

$$i\mathcal{M} = -\frac{i\lambda}{Z^2} = -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

第二步用到 $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$

 在 λ^1 阶, 这里得到的 iM 与 7.3 节中的领头阶计算结果相同

可以看到，

在微扰论的领头阶计算中，可取 $Z = 1$ 和 $\delta m^2 = 0$

即不需要考虑重整化常数的影响

这说明第7、8、9章中关于领头阶过程的计算方法是合理的



动量空间中的四点关联函数

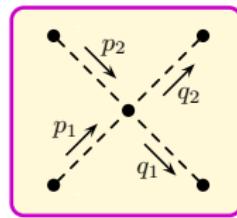
对 $G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 作 Fourier 变换, 得

$$\begin{aligned}
 & \tilde{G}_{\lambda,2}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \\
 &= \int \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 - p_2 \cdot x_4)} G_{\lambda,2}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= -i\lambda \int d^4 x \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 - p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x) \\
 &= -i\lambda \int d^4 x \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) \left(\prod_{j=1}^4 \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \right) e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 - p_2 \cdot x_4)} \\
 &\quad \times \frac{i e^{-ik_1 \cdot (x_1 - x)}}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ik_2 \cdot (x_2 - x)}}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ik_3 \cdot (x_3 - x)}}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ik_4 \cdot (x_4 - x)}}{k_4^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

动量空间中的 Feynman 图

完成积分，得到

$$\begin{aligned}
& \tilde{G}_{\lambda,2}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \\
&= -i\lambda \int \left(\prod_{j=1}^4 d^4 k_j \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
&\quad \times \delta^{(4)}(k_1 - q_1) \delta^{(4)}(k_2 - q_2) \delta^{(4)}(k_3 + p_1) \delta^{(4)}(k_4 + p_2) \\
&\quad \times \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_4^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \\
&\quad \times (-i\lambda) \frac{i}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$



可见，这个结果也对应于动量空间中的 Feynman 图

再次得到 T 矩阵元

不过, 额外出现了一个表征能动量守恒的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 因子

毕竟之前使用的动量空间 Feynman 规则是针对不变振幅 iM 设置的

而动量空间中的多点关联函数通过 LSZ 约化公式联系着 T 矩阵元 iT_{fi}

 后者相对于 iM 就是多了这个因子

再次得到 T 矩阵元

 不过，额外出现了一个表征能动量守恒的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 因子

 毕竟之前使用的动量空间 Feynman 规则 是针对不变振幅 $i\mathcal{M}$ 设置的

 而动量空间中的多点关联函数 通过 LSZ 约化公式 联系着 T 矩阵元 iT_{fi}

 后者相对于 $i\mathcal{M}$ 就是多了这个因子

 10.3 小节推导的 LSZ 约化公式的另一种表述给出

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$$

$$\xrightarrow{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}} \frac{i\sqrt{Z}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} iT_{fi}$$

$$\xrightarrow{q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}$$

 与上一页的结果比较，同样可以得到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程的 T 矩阵元

$$iT_{fi} = -\frac{i\lambda}{Z^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$$



10.5.3 小节 切断 Feynman 图

接下来讨论在微扰论中考虑所有阶贡献时的形式结果, LSZ 约化公式

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$$

$$\xrightarrow{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}} \frac{i\sqrt{Z}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{Z}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} iT_{fi}$$

中的四点关联函数原则上包括了所有阶贡献的四点连通图, 因而每个外点都会联系着一个完整传播子, 受到场强重整化常数 Z 的影响

结合完整传播子的形式 $\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} ds \frac{i\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon}$

将动量空间中完整的四点关联函数改写为

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$$

$$\xrightarrow{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}} \frac{iZ}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{(\sqrt{Z})^4} iT_{fi}$$

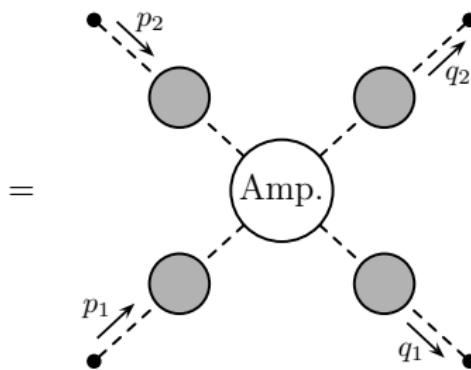
即每个外点贡献一个 $iZ/(q_i^2 - m^2 + i\epsilon)$ 或 $iZ/(p_i^2 - m^2 + i\epsilon)$ 形式的完整传播子

切断 Feynman 图

用 Feynman 图将四点关联函数表示为

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$$

$$\frac{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}}{q_j^0 \rightarrow E_{q_j}} \rightarrow \frac{iZ}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{(\sqrt{Z})^4}$$



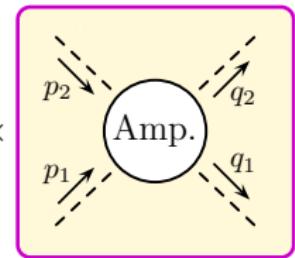
将与外点相连的所有完整传播子从 Feynman 图上切除, 得到的部分称为 **切断** (amputated) Feynman 图, 在图中用 “**Amp.**” 标记

切断 Feynman 图与动量空间 Feynman 规则

🦀 将四个完整传播子从 $\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$ 的 Feynman 图中抽取出来，得到

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[q_j^0 \rightarrow E_{q_j}]{p_i^0 \rightarrow E_{p_i}} \frac{iZ}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$



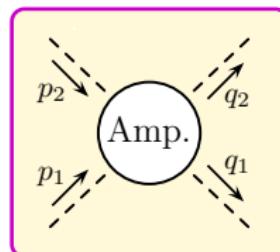
⛰️ 这里还抽出了表征能动量守恒的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ 因子，从而剩余的切断 Feynman 图直接对应于动量空间 Feynman 规则

2 → 2 散射过程的不变振幅



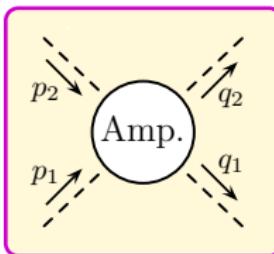
比较前两页的结果，推出 T 矩阵元的形式为

$$iT_{fi} = (\sqrt{Z})^4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$



从而不变振幅表达成

$$i\mathcal{M} = (\sqrt{Z})^4 \times$$

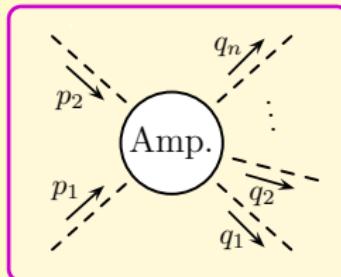


可见，除了用动量空间 Feynman 规则计算所有 **切断的连通 Feynman 图** 之外，还要乘上 $(\sqrt{Z})^4$ 因子才能得到正确的 **不变振幅 $i\mathcal{M}$**

任意 $2 \rightarrow n$ 散射过程的不变振幅

推广到任意 $2 \rightarrow n$ 散射过程, 不变振幅为

$$i\mathcal{M} = (\sqrt{Z})^{n+2} \times$$



即每条外线贡献一个 \sqrt{Z} 因子, 这个因子修正了外线的场强

在领头阶计算中, 这些 \sqrt{Z} 因子都是 1, 无关紧要

但在更高阶计算中必须把它们考虑进来才能获得正确的结果

10.6 节 光学定理和不稳定粒子

在量子散射理论中，概率守恒体现为 S 算符的幺正性，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的光学定理 (optical theorem)

将 S 算符的分解式 $S = \mathbb{I} + iT$ 代入幺正性条件，得到

$$\mathbb{I} = S^\dagger S = (\mathbb{I} - iT^\dagger)(\mathbb{I} + iT) = \mathbb{I} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

可见，

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

将上式右边放到双粒子态 $\langle k_1, k_2; \text{in} |$ 和 $| p_1, p_2; \text{in} \rangle$ 之间, 得到

$\langle k_1, k_2; \text{in} | T^\dagger T | p_1, p_2; \text{in} \rangle$ ，下面省略“in”记号，考虑插入一组中间态完备集



10.6 节 光学定理和不稳定粒子

在量子散射理论中，概率守恒体现为 S 算符的 **幺正性**，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的 **光学定理** (optical theorem)

将 S 算符的分解式 $S = \mathbb{I} + iT$ 代入 **幺正性条件**，得到

$$\mathbb{I} = S^\dagger S = (\mathbb{I} - iT^\dagger)(\mathbb{I} + iT) = \mathbb{I} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

可见，

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

将上式右边放到双粒子态 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \text{in} |$ 和 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \text{in} \rangle$ 之间，得到

$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \text{in} | T^\dagger T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \text{in} \rangle$ ，下面省略“in”记号，考虑插入一组 **中间态完备集**

参考 **单粒子态的完备性关系**，任意粒子态 $|\{\mathbf{q}_i\}\rangle$ 的 **完备性关系** 表达成

$$\sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) |\{\mathbf{q}_i\}\rangle \langle \{\mathbf{q}_i\}| = \mathbb{I}$$

从而推出

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger |\{\mathbf{q}_i\}\rangle \langle \{\mathbf{q}_i\}| T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

处理等式右边

根据 $iT_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$ ，用不变振幅将右边两个 T 矩阵表达成

$$\langle \{\mathbf{q}_i\} | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\})$$

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger | \{\mathbf{q}_i\} \rangle = \langle \{\mathbf{q}_i\} | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle^* = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum_i q_i \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\})$$

由此得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\}) \\ &\quad \times (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum_i q_i \right) \\ &= \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\}) \\ &\quad \times (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$

第二步用到 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$

处理等式左边



另一方面，由于

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2)$$

将 $-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$ 左边放到 $\langle k_1, k_2 |$ 和 $| p_1, p_2 \rangle$ 之间, 得

$$-i \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | (T - T^\dagger) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = -i [\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2)] \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$$

处理等式左边



另一方面，由于

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2)$$

将 $-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$ 左边放到 $\langle k_1, k_2 |$ 和 $| p_1, p_2 \rangle$ 之间, 得

$$\begin{aligned}
-i \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | (T - T^\dagger) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = & -i [\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2)] \\
& \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)
\end{aligned}$$



上式与上一页的 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$ 表达式相等，必有

$$\begin{aligned}
& -i[\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2)] \\
&= \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \\
& \quad \times \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow \{q_i\})
\end{aligned}$$

推广的光学定理

将上式简记为

$$-i[\mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a)] = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f)$$

注意 $\int d\Pi_f$ 的定义类似于**多体不变相空间**，包含了 $(2\pi)^4$ 乘以四维 δ 函数的因子

这就是**推广的光学定理**

尽管这里以 $2 \rightarrow 2$ 散射为例开始讨论，最后得到结论是**普遍适用的**

a 和 **b** 可以是**单粒子态**，也可以是**任意多粒子态**，**f** 则需要取**相互作用理论**允许的**所有末态**，涉及到的粒子可以具有**自旋**，也可以是**不同种类**的粒子

上式在微扰论**的**每一阶**都成立**，不过它的**左边**对应于**振幅**，而**右边**则对应于**两个振幅之积**，所以会联系**不同阶**计算出来的振幅

推广的光学定理

将上式简记为

$$-i[\mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a)] = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f)$$

以实标量场的 ϕ^4 理论为例，在 λ^2 阶讨论上式，则右边每个振幅是 λ^1 阶的树图振幅，而左边必须是 λ^2 阶的单圈振幅才能与右边相匹配

因此，上式意味着圈图振幅与树图振幅有一定的联系

只要树图是存在的，则圈图必定也是存在的

通常认为树图代表着经典物理，而圈图代表着量子效应

推广的光学定理表明, 只存在树图的经典相互作用理论会违反幺正性



光学定理

🏠 回到 $2 \rightarrow 2$ 散射的情况，如果初末态完全相同，则相应的散射称为向前散射 (forward scattering)，此时 $k_1 = p_1$ ， $k_2 = p_2$ ，有

$$\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2)$$

👗 推广的光学定理化为量子场论中的光学定理

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow f)|^2$$

🎭 用 Feynman 图将上式表示为

$$2 \operatorname{Im} \left(\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{circle} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} \right) = \sum_f \int d\Pi_f \left(\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{circle} \\ \vdots \\ f \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} f \\ \vdots \\ \text{circle} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} \right)$$

🏃 它表明向前散射振幅的虚部对应于所有可能中间态的贡献之和

总散射截面

🏡 与 6.5.2 小节截面公式 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\phi\ell}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$ 对比

🔧 可以看出, $2 \text{Im } \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow f)|^2$ 右边正比于包含所有末态过程的总散射截面 σ_{tot}

🔨 质心系总截面表达为 $\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{4E_{p_1} E_{p_2} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow f)|^2$

👨‍🏫 这里将末态对称性因子的倒数 $1/\mathcal{S}$ 吸收到 $\int d\Pi_f$ 里面

🔧 为了得到简单的表达式, 假设 p_1 和 p_2 对应的两个粒子具有相同质量

👓 从而 $E_{p_1} = E_{p_2} = \frac{E_{\text{CM}}}{2}$, 且 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{p_1}}$, 于是

$$4E_{p_1} E_{p_2} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 4E_{p_1} E_{p_2} \frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{p_1}} = 4E_{\text{CM}} |\mathbf{p}_1|$$

👨‍🏫 故

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{4E_{\text{CM}} |\mathbf{p}_1|} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow f)|^2$$

光学定理的另一个形式

从而, $2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow f)|^2$ 化为

$$\text{Im } \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2) = 2E_{\text{CM}} |\mathbf{p}_1| \sigma_{\text{tot}}$$

这是**光学定理**的常见形式

在量子理论中考虑束流打靶过程，那么，向前散射振幅的虚部对应于束流经过靶时入射波的衰减

它应当正比于发生散射的概率，而后者是由总散射截面描述的

上式给出了精确的对应关系

不稳定粒子



现在将推广的光学定理

$$-i[\mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a)] = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f)$$

应用到从一个不稳定粒子 \mathcal{A} 跃迁到自身的 $1 \rightarrow 1$ “散射” 过程上

在 \mathcal{A} 的静止系中，有

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow f)|^2 = 2m_{\mathcal{A}} \sum_f \Gamma_f$$

其中 Γ_f 就是衰变分宽度，而所有分宽度之和是 \mathcal{A} 粒子的总宽度 $\Gamma_{\mathcal{A}} = \sum_f \Gamma_f$

因此，振幅 $\mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ 虚部与衰变总宽度的关系为

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) = m_{\mathcal{A}} \Gamma_{\mathcal{A}}$$

另一方面，稳定粒子的衰变宽度为零，而相应振幅 $\mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ 是实数

不稳定的实标量玻色子

对于不稳定的实标量玻色子 ϕ ，前面的计算给出了完整的动量空间传播子

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \bullet \xrightarrow{p} \text{---} \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}$$

其中 $\Pi(p^2)$ 来自 **1PI 自能图**  $= -i\Pi(p^2)$

将传播子看成 $1 \rightarrow 1$ “散射” 过程，要求 p^μ 满足质壳条件 $p^2 = m^2$

类比前面推出的**不变振幅与切断 Feynman 图**的关系，有

$$i\mathcal{M}(\phi \rightarrow \phi) = (\sqrt{Z})^2 \times \left(\text{---} \xrightarrow{\text{---}} \text{1PI} \text{---} \text{---} \right) \bigg|_{\substack{p^2 = m^2}} = -iZ\Pi(m^2)$$

注意这里切断的连通 Feynman 图就是 1PI 自能图

从而, ϕ 的衰变总宽度表达为 $\Gamma = \frac{1}{m} \text{Im} \mathcal{M}(\phi \rightarrow \phi) = -\frac{Z}{m} \text{Im} \Pi(m^2)$

修正重整化条件

可见, 不稳定 ϕ 粒子的 $\Pi(p^2)$ 必定具有虚部, 将完整传播子改写为

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \text{Re} \Pi(p^2) - i \text{Im} \Pi(p^2)}$$

这里已经把分母中的无穷小量 $\epsilon \ll |\text{Im } \Pi(p^2)|$ 忽略掉了

从而，需要把**质量重整化条件**修改为

$$\delta m^2 = -\text{Re} \Pi(m^2)$$

使物理质量 m 的平方对应于极点位置的实部

场强重整化条件修改为

$$Z^{-1} = 1 - \frac{d \operatorname{Re} \Pi(p^2)}{dp^2} \bigg|_{p^2=m^2}$$

完整传播子在极点附近的近似

 $\text{Im } \Pi(p^2)$ 的存在使 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的 **单粒子态极点** 远离实轴, 具体位置由 $p^2 = m^2 + \delta m^2 + \text{Re } \Pi(p^2) + i \text{Im } \Pi(p^2)$ 决定, $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 $p^2 = m^2$ 附近近似为

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\simeq \frac{i}{(p^2 - m^2)[1 - d \text{Re } \Pi(p^2)/dp^2|_{p^2=m^2}] - i \text{Im } \Pi(p^2)} \\ &= \frac{i}{(p^2 - m^2)Z^{-1} - i \text{Im } \Pi(p^2)} = \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ \text{Im } \Pi(p^2)}.\end{aligned}$$

 如果 $|\text{Im } \Pi(p^2)|$ 在 **极点附近远小于** m^2 , 那么 **极点位置与** $p^2 = m^2$ 的 **偏离较小**

 从而, **完整的** ϕ **传播子在极点附近**的行为是

$$\tilde{G}^{(2)}(p) \simeq \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ \text{Im } \Pi(m^2)} = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \simeq \frac{i}{p^2 - m^2 + im\Gamma}$$

 第二步用到 $\Gamma = -\frac{Z}{m} \text{Im } \Pi(m^2)$, 第三步取**近似** $Z \simeq 1$

 可见, **极点位置在** p^2 复平面**实轴下方** $p^2 = m^2 - im\Gamma$ 处

相对论性 Breit-Wigner 分布

 若上述 ϕ 传播子出现在某个 s 通道散射过程中，有 $p^2 = s$ ，
则散射截面满足

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 + im\Gamma} \right|^2 = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2}$$



Gregory Breit
(1899–1981)

它在 $s = m^2$ 附近呈现出相对论性 Breit-Wigner 分布

近似成立的条件 $|\text{Im } \Pi(m^2)| \ll m^2$ 可以等价为**窄宽度条件**

$$\Gamma \ll m$$

相应的 s 通道不稳定粒子是一个**共振态**

小朋友 散射截面在 $s = m^2$ 处得到共振增强，有 $\sigma \propto \frac{1}{(m\Gamma)^2}$

也就是说，宽度越窄，截面越大



Eugene Wigner
(19102–1995)

Breit-Wigner 分布



在 $s = m^2$ 附近取 $\sqrt{s} + m \simeq 2m$ 的近似，将散射截面化为

$$\begin{aligned}\sigma &\propto \frac{1}{(\sqrt{s} + m)^2(\sqrt{s} - m)^2 + m^2\Gamma^2} \simeq \frac{1}{4m^2(\sqrt{s} - m)^2 + m^2\Gamma^2} \\ &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(\sqrt{s} - m)^2 + \Gamma^2/4}\end{aligned}$$



可见，散射截面在 $s = m^2$ 附近正比于归一化的 Breit-Wigner 分布

$$f_{\text{BW}}(\sqrt{s}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{s} - m)^2 + \Gamma^2/4}$$



这个概率密度分布也称为 Cauchy 分布或 Lorentz 分布

Breit-Wigner 分布图象



Breit-Wigner 分布的图象如右图所示



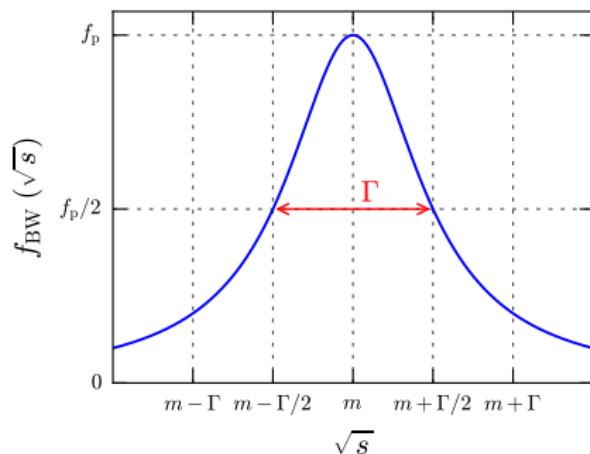
可见，不稳定粒子的质量并不取固定值，而是呈现出一个 Breit-Wigner 分布



前面所说的物理质量 m 是这个分布的中心值，也是概率最大的地方



衰变宽度 Γ 是这个分布的半峰全宽，这是它被称为“宽度”的原因



Breit-Wigner 分布图象



Breit-Wigner 分布的图象如右图所示



可见，不稳定粒子的质量并不取固定值，而是呈现出一个 Breit-Wigner 分布



前面所说的物理质量 m 是这个分布的中心值，也是概率最大的地方



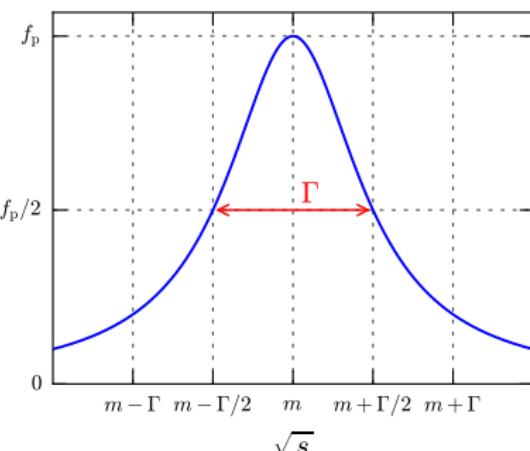
衰变宽度 Γ 是这个分布的半峰全宽，这是它被称为“宽度”的原因



任何归一化概率密度分布在宽度趋于零的极限下都会变成 δ 函数，故

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} f_{\text{BW}}(\sqrt{s}) = \delta(\sqrt{s} - m)$$

当 $\Gamma = 0$ 时，寿命 $\tau = \frac{1}{\Gamma} \rightarrow \infty$ ，粒子是稳定的，而质量固定为 m



不稳定粒子的动量空间内线规则

上述关于**不稳定粒子**的讨论可以推广到**其它类型**的量子场和粒子

 在窄宽度条件下，假如要在树图计算中考虑衰变宽度的效应，只需采用下列不稳定的粒子的动量空间内线规则

1 实标量玻色子 ϕ 内线: $\bullet - \xrightarrow{p} - \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + im_\phi \Gamma_\phi}$

② 复标量玻色子 ϕ 内线: $\bullet - \overset{p}{\longrightarrow} - \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + im_\phi \Gamma_\phi}$

③ 有质量实矢量玻色子 A 内线: $\nu \xrightarrow{\text{---}} \overset{p}{\nearrow} \xrightarrow{\text{---}} \mu = \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i m_A \Gamma_A}$

④ Dirac 费米子 ψ 内线:  $= \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i m_\psi \Gamma_\psi}$

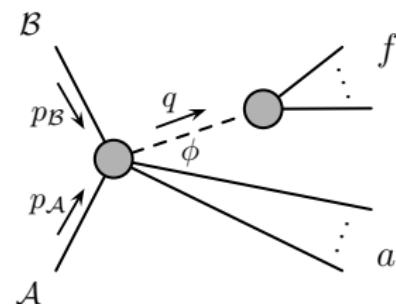
包含窄宽度内线的散射过程

考虑右图 $2 \rightarrow n$ 散射过程, 它包含一条具有类时动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线

 n 个末态粒子分为两部分，其中 a 部分包含 n_a 个粒子，而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 波色子内线

如果这个散射过程的质心能足够高, 使末态相空间包含 ϕ 粒子质壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域

那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可对散射截面进行因子化



包含窄宽度内线的散射过程

考虑右图 $2 \rightarrow n$ 散射过程, 它包含一条具有类时动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线

)n 个末态粒子分为两部分, 其中 a 部分包含 n_a 个粒子, 而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 玻色子内线

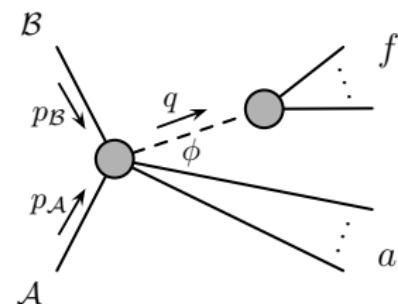
如果这个散射过程的质心能足够高, 使末态相空间包含 ϕ 粒子质壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域

那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可对散射截面进行因子化

将 $A + B \rightarrow a + f$ 散射过程的**不变振幅**分解为

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_P(q^2) \frac{i}{q^2 - m^2 + im\Gamma} i\mathcal{M}_D(q^2)$$

其中 $i\mathcal{M}_P(q^2)$ 是 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow a + \phi$ 部分的振幅, $i\mathcal{M}_D(q^2)$ 是 $\phi \rightarrow f$ 部分的振幅, 它们具有对 q^2 的依赖性, 由 ϕ 传播子连接起来



表达散射截面

假设 $\mathcal{M}_P(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_D(q^2)$ 都是实数，这对不包含其它不稳定粒子的树图过程一般是成立的，则不变振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

设末态对称性因子 $S = 1$, $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{a} + \mathcal{f}$ 散射截面表达为

$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

其中 $F = 4E_A E_B v_{Mol}$ 是入射流因子

表达散射截面

假设 $\mathcal{M}_P(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_D(q^2)$ 都是实数，这对不包含其它不稳定粒子的树图过程一般是成立的，则不变振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

设末态对称性因子 $S = 1$, $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{a} + \mathcal{f}$ 散射截面表达为

$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2$$

其中 $F = 4E_A E_B v_{Mol}$ 是入射流因子

将 a 和 f 的末态粒子的四维动量之和分别记作 $p_a^\mu = \sum_{i=1}^{n_a} p_i^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=n_a+1}^n p_j^\mu$

n 体末态相空间表达式

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{i=1}^{n_a} \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \left(\prod_{j=n_a+1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_{\textcolor{teal}{a}} - p_{\textcolor{blue}{f}})$$

下面对它进行分解

利用 δ 函数

把 $\int dp^0 \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E_p}$ 改写成

$$\int dq^0 \theta(q^0) \delta(q^2 - s_\phi) = \frac{1}{2\tilde{E}_q(s_\phi)}, \quad \tilde{E}_q(s_\phi) \equiv \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + s_\phi}, \quad s_\phi > 0$$

类时的 q^μ 必定满足 $q^0 > 0$ ，由 δ 函数的性质推出

$$\begin{aligned}
1 &= \int d^4q \delta^{(4)}(q - p_f) \int ds_\phi \theta(q^0) \delta(q^2 - s_\phi) \\
&= \int ds_\phi \int d^3q \int dq^0 \theta(q^0) \delta(q^2 - s_\phi) \delta^{(4)}(q - p_f) \\
&= \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\tilde{E}_q(s_\phi)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\textcolor{brown}{q} - p_f)
\end{aligned}$$

注意对 q^0 积分之后, 最后一行中的四维动量 q^μ 满足

$$q^0 = \tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi), \quad q^2 = s_\phi$$

分解末态相空间

III 将上页公式插入到 n 体末态相空间中, 得

$$\begin{aligned} \int d\Pi_n &= \left(\prod_{i=1}^{n_a} \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \left(\prod_{j=n_a+1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_a - p_f) \\ &\quad \times \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\tilde{E}_q(s_\phi)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_f) \\ &= \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int d\Pi_P(s_\phi) \int d\Pi_D(s_\phi) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int d\Pi_P(s_\phi) &\equiv \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\tilde{E}_q(s_\phi)} \left(\prod_{i=1}^{n_a} \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_a - q) \\ \int d\Pi_D(s_\phi) &\equiv \left(\prod_{j=n_a+1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_f) \end{aligned}$$

分别对应于 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow a + \phi$ 部分和 $\phi \rightarrow f$ 部分的末态相空间

这里标注了它们对 s_ϕ 的依赖性

分解散射截面

于是, $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow a + f$ 散射截面化为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{F} \int d\Pi_n |\mathcal{M}_P(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(q^2)|^2 \\ &= \frac{1}{F} \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int d\Pi_P(s_\phi) \int d\Pi_D(s_\phi) |\mathcal{M}_P(s_\phi)|^2 \frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_D(s_\phi)|^2\end{aligned}$$

将上式中 ϕ 玻色子内线的贡献改写为

$$\frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{\pi}{m\Gamma} \frac{2m\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (2m\Gamma)^2/4}$$

它正比于中心值为 m^2 、宽度为 $2m\Gamma$ 的 Breit-Wigner 分布, 比例因子为 $\frac{\pi}{m\Gamma}$

在 $\frac{\Gamma}{m} \ll 1$ 的窄宽度条件下取 $\Gamma \rightarrow 0$ 的极限, 由 $\lim_{\Gamma \rightarrow 0} f_{\text{BW}}(\sqrt{s}) = \delta(\sqrt{s} - m)$ 得

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{(s_\phi - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(s_\phi - m^2)$$

散射截面的因子化

从而 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow a + f$ 散射截面近似为

$$\begin{aligned}\sigma &\simeq \frac{1}{F} \int \frac{ds_\phi}{2\pi} \int d\Pi_P(s_\phi) \int d\Pi_D(s_\phi) |\mathcal{M}_P(s_\phi)|^2 \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(s_\phi - m^2) |\mathcal{M}_D(s_\phi)|^2 \\ &= \frac{1}{F} \int d\Pi_P(m^2) |\mathcal{M}_P(m^2)|^2 \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{2m} \int d\Pi_D(m^2) |\mathcal{M}_D(m^2)|^2 = \sigma_P \frac{\Gamma_f}{\Gamma}\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_P = \frac{1}{F} \int d\Pi_P(m^2) |\mathcal{M}_P(m^2)|^2$$

是通过 $A + B \rightarrow a + \phi$ 散射过程产生 ϕ 玻色子的产生截面

$$\Gamma_f = \frac{1}{2m} \int d\Pi_D(m^2) |\mathcal{M}_D(m^2)|^2$$

是 $\phi \rightarrow f$ 衰变过程的分宽度

注意这些公式里面 ϕ 玻色子是在壳的，质量为 m

窄宽度近似

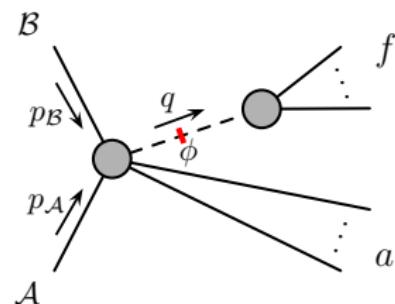
由分宽度与分支比之间的关系 $\Gamma_f = \Gamma B_f$ 将散射截面改写为

$$\sigma \simeq \sigma_P B_f$$

也就是说，只要 ϕ 玻色子内线在运动学允许的范围内能够取得在壳动量，就可以把 Feynman 图中 ϕ 玻色子的内线剪开

得到 $A + B \rightarrow a + \phi$ 和 $\phi \rightarrow f$ 的 Feynman 图，分别计算共振态 ϕ 的产生截面 σ_P 和衰变分支比 B_f ，乘起来就得到 $A + B \rightarrow a + f$ 散射截面 σ

这种将包含共振态的散射截面因子化的方法称为窄宽度近似



推广到矢量玻色子

以上讨论对于**共振态为实标量玻色子**或**复标量玻色子**的情况都成立，也可以将它推广到**其它共振态**

如果**共振态是有质量的矢量玻色子** A ，用**极化求和关系**将它的**传播子**改写成

$$\begin{aligned}
 \nu \bullet \text{---} \xrightarrow{q} \bullet \mu &= \frac{-i(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / m_A^2)}{q^2 - m_A^2 + im_A \Gamma_A} \\
 &= \frac{i}{q^2 - m_A^2 + im_A \Gamma_A} \sum_{\lambda=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda) \varepsilon^\nu(\mathbf{q}, \lambda)
 \end{aligned}$$

那么， $\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda)$ 正好是**产生过程**中的 A 玻色子**出射外线因子**

而 $\varepsilon^\nu(\mathbf{q}, \lambda)$ 是**衰变过程**的 A 玻色子**入射外线因子**

对 λ 求和则考虑了**所有极化态**的贡献

因此同样可以应用**窄宽度近似**将**散射截面因子化**

推广到 Dirac 费米子

如果共振态是 Dirac 正费米子 ψ ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相同

用自旋求和关系将相应传播子改写为

$$\begin{array}{c} q \\ \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} = \frac{i(q + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} = \frac{i}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$$

！那么 $\bar{u}(q, \lambda)$ 和 $u(q, \lambda)$ 刚好分别是产生过程和衰变过程中正费米子 ψ 的外线因子

推广到 Dirac 费米子

如果共振态是 Dirac 正费米子 ψ ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相同

用自旋求和关系将相应传播子改写为

$$\bullet \xrightarrow{q} \bullet = \frac{i(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} = \frac{i}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$$

那么 $\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $u(\mathbf{q}, \lambda)$ 刚好分别是产生过程和衰变过程中正费米子 ψ 的外线因子

如果共振态是 Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向相反

相应的传播子为

$$\bullet \xleftarrow{q} \bullet = \frac{i(-\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} = \frac{-i}{q^2 - m_\psi^2 + im_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{q}, \lambda) \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)$$

那么 $v(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $\bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)$ 也分别是产生过程和衰变过程中反费米子 $\bar{\psi}$ 的外线因子

上式右边分子上的负号与费米子算符的反对易性有关