数学物理方法

第八章　Fourier 变换法

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 11 月 20 日

第八章 Fourier 变换法

- 上一章研究了求解数理方程定解问题的分离变量法
- 由于所考虑的问题都只涉及两个自变量，所以情况比较简单
- 如果问题涉及多个自变量，情况就会比较复杂
- 在曲线坐标系中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
- 它们的解就是所谓的特殊函数
- 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法

第八章　Fourier 变换法

- 上一章研究了求解数理方程定解问题的分离变量法
- 由于所考虑的问题都只涉及两个自变量，所以情况比较简单
- 如果问题涉及多个自变量，情况就会比较复杂
- 在曲线坐标系中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
- 它们的解就是所谓的特殊函数
- 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法
- 分离变量法适用于有界区间或有界区域
- 对于无界区间或无界区域上的数学物理方程定解问题，常常使用 **Fourier 变换法**
- Fourier 变换法是积分变换法的一种，另一种常用的积分变换法是 **Laplace 变换法**
- 积分变换法的基本精神也是分离变量，只是形式上不甚明显
- 本章介绍 **Fourier 变换法**，对于其它积分变换法，本课程不作介绍

§1 Fourier 变换

§1.1 复数形式的 Fourier 级数

函数族 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ $(n\in\mathbb{Z})$ 中任意两个函数在区间 $[-l,l]$ 上的内积定义为

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l},\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l})\equiv\int_{-l}^{l}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l})^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\,\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x,\quad m,n\in\mathbb{Z}$$

注意内积定义中出现的复共轭，这是第七章关于实函数内积定义的推广

注　内积是普通三维空间中矢量点积的推广

由于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与自身的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 是其长度平方，一定是实数

作为它的推广，函数与自身的内积（即模方）应该是实数

在复值函数的内积定义中使用复共轭可以保证模方为实数

内积表达式

当 $m \neq n$ 时，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ 的内积为

$$\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}}{\mathrm{i}(n-m)\pi}\right|_{-l}^{l} = \frac{l[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\pi}]}{\mathrm{i}(n-m)\pi}$$

$$= \frac{2l\sin[(n-m)\pi]}{(n-m)\pi} = 0$$

这说明函数族 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上是正交的

当 $m = n$ 时，内积变成 $\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l} \mathrm{d}x = 2l$

可以将这两种情况合起来，内积表达为

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}) = \int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l}\,\mathrm{d}x = 2l\delta_{mn}$$

完备性

- 可以证明，**函数族** $\{e^{in\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上还是**完备**的
- 因此，**区间** $[-l,l]$ 上任何**解析性质良好**的**函数** $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, e^{in\pi x/l}$$

完备性

- 可以证明，**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上还是**完备**的
- 因此，**区间** $[-l,l]$ 上任何**解析性质良好**的**函数** $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

- 由 $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-l}^{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=2l\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\delta_{mn}=2lf_n$

得到**系数**表达式

$$f_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

完备性

可以证明，**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上还是**完备**的

因此，**区间** $[-l,l]$ 上任何**解析性质良好**的**函数** $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

由 $\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-l}^{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi=2l\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_m\delta_{mn}=2lf_n$

得到**系数**表达式

$$f_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

如果 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的**周期函数**，则 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ **对一切** $x\in\mathbb{R}$ **成立**，它就是**微积分**中的**复数形式 Fourier 级数**

注　**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 等价于 $\{\cos n\phi,\sin n\phi\}_{n=0}^{+\infty}$，它在**区间** $[-\pi,\pi]$ 上是**完备**的，令 $\phi=\pi x/l$，容易知道**函数族** $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在**区间** $[-l,l]$ 上是**完备**的

§1.2 Fourier 变换

现在考虑**展开式** $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$ **当 $l\to\infty$ 的极限**

将**系数表达式** $f_n=\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi$ 代入**这个展开式**，得

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi\xi/l}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}$$

令 $k_n\equiv\dfrac{n\pi}{l}$，$\Delta k_n\equiv k_{n+1}-k_n=\dfrac{\pi}{l}$，则 $\dfrac{\Delta k_n}{2\pi}=\dfrac{1}{2l}$，将上式改写为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\Delta k_n$$

当 $l\to\infty$ 时，$\Delta k_n\to 0$，k_n 的取值由**分立**变为**连续**，上式的**求和**变为**积分**，得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

Fourier 变换和反变换

观察 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

如果定义 $f(x)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$ 为

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

则 $F(k)$ 的 **Fourier 反变换** $f(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

Joseph Fourier
(1768–1830)

Fourier 变换和反变换

观察 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

Joseph Fourier
(1768–1830)

如果定义 $f(x)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$ 为

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

则 $F(k)$ 的 **Fourier 反变换** $f(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

原函数和**像函数**的关系可以表示为 $f(x)\leftrightarrow F(k)$

或 $F(k)=\mathscr{F}[f(x)]$

$f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(k)]$

$F(k)$ 也称为 Fourier 变换的**像函数**，$f(x)$ 也称为 Fourier 变换的**原函数**

这里通过对 **Fourier 级数**取 $l\to\infty$ 的**极限形式**得到 **Fourier 变换**和**反变换**关系

可以证明，如果 $f(x)$ 具有**良好的解析性质**，则以上**取极限**的过程是**合理**的

§1.3 二维与三维 Fourier 变换

考虑二元函数 $f(x,y)$，先把 y 看作参数，对 x 作 Fourier 变换

得到像函数 $\tilde{F}(k,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$

再把 k 当作参数，对 y 作 Fourier 变换，得到像函数

$$F(k,l)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(k,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ly}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

§1.3 二维与三维 Fourier 变换

考虑二元函数 $f(x,y)$，先把 y 看作参数，对 x 作 Fourier 变换

得到像函数 $\tilde{F}(k,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$

再把 k 当作参数，对 y 作 Fourier 变换，得到像函数

$$F(k,l)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(k,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ly}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

反过来，把 k 当作参数，对 l 作 Fourier 反变换，有

$$\tilde{F}(k,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ly}\,\mathrm{d}l$$

再把 y 当作参数，对 k 作 Fourier 反变换，得到原函数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(k,y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}l$$

多维 Fourier 变换关系

这样就建立了二维 Fourier 变换与反变换关系

$$F(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}l$$

类似地，对于三元函数 $f(x,y,z)$，简记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3)$

则 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_1x+k_2y+k_3z$，有三维 Fourier 变换与反变换关系

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{k}=\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3$$

对于一般的 n 元函数，也有类似结果

§1.4 Fourier 变换的性质

- 接下来介绍 Fourier 变换的性质
- 在作 Fourier 变换和反变换计算时，可以引用有关性质
- 也可以直接计算，相当于把有关性质的证明包含在计算过程中
- 接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$，$f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)\ (i=1,2)$，则有以下性质

§1.4 Fourier 变换的性质

- 接下来介绍 **Fourier 变换**的**性质**
- 在作 **Fourier 变换**和**反变换**计算时，可以引用**有关性质**
- 也可以**直接计算**，相当于把**有关性质**的**证明**包含在计算过程中
- 接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$，$f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)$ $(i = 1, 2)$，则有以下**性质**
- **线性定理：** $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \leftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$，其中 a_1 和 a_2 是常数
- 这一性质显而易见，直接来源于**积分的线性性质**

证：
$$\mathscr{F}[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$$
$$= a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$$

微分定理

2 **微分定理：** 如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

微分定理

2 **微分定理：** 如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

注　学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$，则意味着它在远处是平坦的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$，于是以上条件只需要第一个就可以了

但是，这在数学上**并非**总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

它的一阶导数为 $f'(x) = 2\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{x^2}$，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

所以同时列出这些条件是必要的

微分定理

2 微分定理： 如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

注 学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$，则意味着它在**远处**是**平坦**的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$，于是**以上条件**只需要**第一个**就可以了

但是，这在数学上**并非**总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

它的一阶导数为 $f'(x) = 2\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{x^2}$，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

所以同时列出**这些条件**是**必要**的

证：
$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{-ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x = ikF(k)\end{aligned}$$

第二步用了**分部积分**，同理可证 $n > 1$ 的情况成立

若 $f(\pm\infty)=0$，对 **Fourier 反变换** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$ **求导**，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}kF(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}k$$

可见，**微分定理**意味着**求导**与**积分**可以**交换**，但应注意需要满足的**条件**

卷积

若 $f(\pm\infty)=0$，对 **Fourier 反变换** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$ **求导**，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}kF(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}k$$

可见，**微分定理**意味着**求导**与**积分**可以**交换**，但应注意需要满足的**条件**

函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的**卷积**定义为 $f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$

令 $y=x-\xi$，则 $\mathrm{d}\xi=-\mathrm{d}y$，$f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}f_1(x-y)f_2(y)(-\mathrm{d}y)$

将积分变量 y 换成 ξ，得 $f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

这是**卷积**定义的**等价表达式**，它表明 $f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x)$

卷积定理

卷积定理： $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注　这一定理主要用于由**像函数**求**原函数**

基本前提是**像函数** $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的**原函数** $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ **已经知道**或**容易求出**

卷积定理

卷积定理： $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注 这一定理主要用于由**像函数**求**原函数**

基本前提是**像函数** $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的**原函数** $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ **已经知道**或**容易求出**

证：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi \\
y = x-\xi \ \Rightarrow\quad &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y\right] \\
&= F_1(k)F_2(k)
\end{aligned}$$

延迟定理和积分定理

4 延迟定理： $f(x-\xi) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}F(k)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证：作**变量替换** $y = x - \xi$，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x-\xi)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}F(k)\end{aligned}$$

延迟定理和积分定理

4 **延迟定理：** $f(x-\xi) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} F(k)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证：作**变量替换** $y = x - \xi$，得

$$\mathscr{F}[f(x-\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} F(k)$$

5 **积分定理：** 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，则 $g(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \dfrac{F(k)}{\mathrm{i}k}$

证：设 $g(x) \leftrightarrow G(k)$，由于 $g(\pm\infty) = 0$，应用**微分定理**得 $\mathscr{F}[g'(x)] = \mathrm{i}kG(k)$

另一方面，有 $g'(x) = f(x)$，故 $\mathscr{F}[g'(x)] = \mathscr{F}[f(x)] = F(k)$

比较两式，得 $\mathrm{i}kG(k) = F(k)$，即 $G(k) = \dfrac{F(k)}{\mathrm{i}k}$

相似定理

6 **相似定理：** $f(ax) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{k}{a}\right)$，其中常数 $a \neq 0$

证：若 $a > 0$，则

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$$

$$y = ax \Rightarrow \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky/a}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

若 $a < 0$，则

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$$

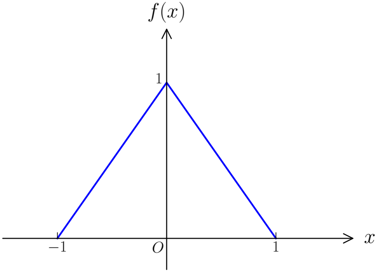
$$y = ax \Rightarrow \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky/a}\, \mathrm{d}y = -\frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

例 1

例 1 计算**三角形函数**

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$



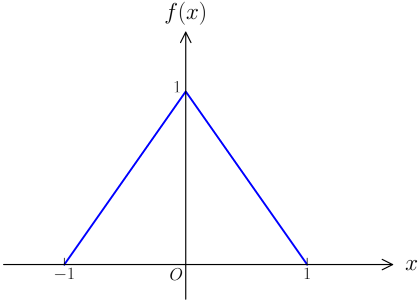
解 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**为

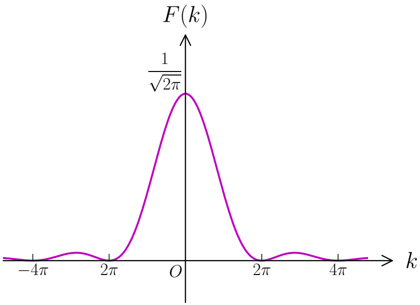
$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|x|)(\cos kx-\mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1(1-x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}\sin kx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\left[(1-x)\sin kx\Big|_0^1+\int_0^1\sin kx\,\mathrm{d}x\right]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}(1-\cos k)$$

例 1 图像





$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}(1 - \cos k)$$

例 2

例 2 计算函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$，其中 $a>0$

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

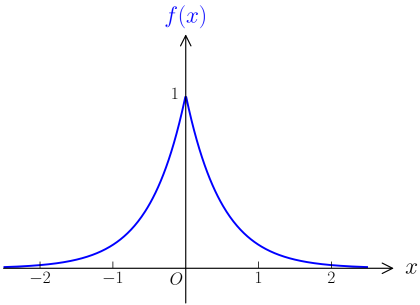
$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,I$$

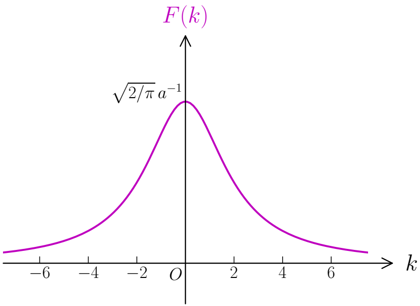
其中积分

$$\begin{aligned}
I&\equiv\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\cos kx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax}\\
&=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\Big|_0^{\infty}-\frac{k}{a}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2}\int_0^{\infty}\sin kx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax}\\
&=\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\Big|_0^{\infty}-\frac{k^2}{a^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{k^2}{a^2}\,I
\end{aligned}$$

故 $I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{a^2+k^2}$，从而得到 $F(k)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{a}{a^2+k^2}$

例 2 图像（取 $a=2$）





$$f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$$

$$F(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}$$

例 3

例 3 计算 **Gauss 函数** $f(x)=\exp\left(-\dfrac{ax^2}{2}\right)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$，其中 $a>0$

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\\ &= -\frac{a}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(-\mathrm{i}x)\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

微分定理 ➡️
$$= -\frac{a}{k\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{a}{k}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k}+\dfrac{k}{a}F(k)=0$，求解这个**微分方程**，得到

$$F(k)=F(0)\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right),\quad F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

例 3 结果

$F(0)$ 的平方是

$$[F(0)]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{ay^2}{2}\right)\mathrm{d}y\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{a(x^2+y^2)}{2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

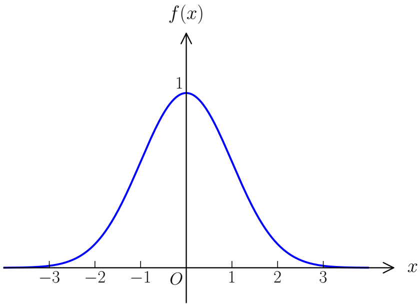
将平面上的**直角坐标** (x, y) 替换成**极坐标** (ρ, ϕ)，有

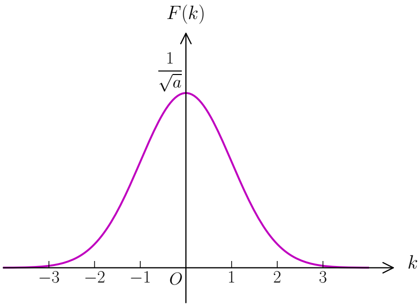
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

$$[F(0)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\phi$$
$$= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{a\rho^2}{2}\right)\Big|_0^{\infty}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{a}$$

故 $F(0) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$，于是 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $F(k) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\dfrac{k^2}{2a}\right)$

例 3 图像（取 $a=1$）





$$f(x) = \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)$$

可见，**Gauss 函数**的 Fourier 变换仍然是一个 **Gauss 函数**

积分公式

根据上面这组 **Fourier 变换关系**，有

$$\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k$$

即

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k=\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right),\quad a>0$$

在**第 56 页**计算中将会用到这条公式

例 4

例 4 计算 $f(x) = \cos\omega_0 x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 的 **Fourier 变换** $F(k)$，其中 ω_0 是**实数**

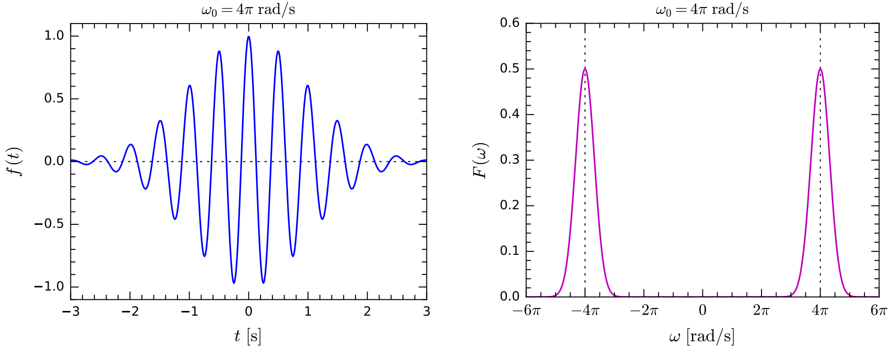
解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\omega_0)x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-\omega_0)x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(k+\omega_0)^2}{2}\right]+\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(k-\omega_0)^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

最后一步用到**例 3** 给出的 Fourier 变换关系 $\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)$

例 4 图像

🎵 将 x **改记为** t，k **改记为** ω，取 $\omega_0 = 4\pi$ rad/s，相应的函数图像为

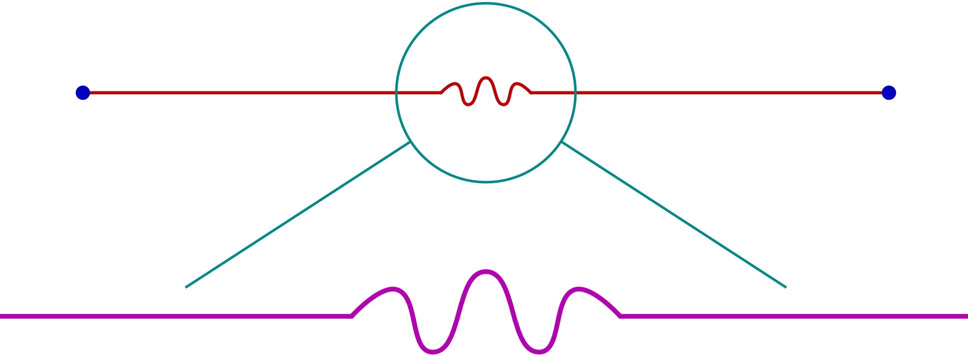


$$f(t) = \cos\omega_0 t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \qquad F(\omega) = \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2}\right] + \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\right]$$

🎶 $f(t)$ 是一个受 **Gauss 函数调制**的**余弦函数信号**，**圆频率** $\omega_0 = 4\pi$ rad/s 对应的**周期**为 0.5 s，**频率**为 2 Hz，可见，Fourier 变换将**时域分布**转换成**频域分布**

§2　无界弦的自由振动

- 无界弦指无穷长的弦，实际上并不存在
- 但是，如果弦较长，而我们所关心的部分离边界较远
- 在较短时间内，边界对所关心的部分尚未发生作用
- 就可以忽略边界的存在，从而将有界弦抽象为无界弦



§2.1 Fourier 变换法

考虑无界弦在初始激励下的自由振动，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0$

§2.1 Fourier 变换法

考虑无界弦在初始激励下的自由振动，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0$

下面用 **Fourier 变换法**求解这个定解问题

由于 t **的变化范围**是 $(0, +\infty)$，x **的变化范围**是 $(-\infty, +\infty)$

因此应该**对 x 作 Fourier 变换**，设

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

常微分方程初值问题

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

🌿 对**一维齐次波动方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 x **方向上作 Fourier 变换**，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

线性定理 ➡️ $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}u\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

微分定理 ➡️ $$= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2(\mathrm{i}k)^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k^2a^2U$$

常微分方程初值问题

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

对**一维齐次波动方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 x **方向上作 Fourier 变换**，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$$

线性定理 ➡ $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$$

微分定理 ➡ $$= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (\mathrm{i}k)^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k^2 a^2 U$$

从而得到**常微分方程**的**初值问题**

（将 k 视作参数）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$$

初值条件来自**初始条件** $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ 的 **Fourier 变换**

$U(k,t)$ 的解

常微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}+k^2a^2U=0 \\ U\big|_{t=0}=\Phi(k), \quad \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\Psi(k) \end{cases}$ 的解是

$$U(k,t)=\Phi(k)\cos kat+\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-ka\Phi(k)\sin kat+\Psi(k)\cos kat$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}=-k^2a^2\Phi(k)\cos kat-ka\Psi(k)\sin kat=-k^2a^2U$$

剩下的问题是对 $U(k,t)$ 作 **Fourier 反变换**求出**原函数** $u(x,t)$，有

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[U(k,t)]=\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat]+\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right]$$

Fourier 反变换计算

根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$，有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\,\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\,\mathrm{d}k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}\,\mathrm{d}k\right] \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]
\end{aligned}
$$

Fourier 反变换计算

根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kat})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\,\mathrm{d}k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}\,\mathrm{d}k\right] \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]\end{aligned}$$

利用 $\int_0^t \cos ka\tau\,\mathrm{d}\tau = \left.\frac{\sin ka\tau}{ka}\right|_0^t = \frac{\sin kat}{ka}$、$\psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$ 和上式结果，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right] &= \mathscr{F}^{-1}\left[\int_0^t \Psi(k)\cos ka\tau\,\mathrm{d}\tau\right] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[\Psi(k)\cos ka\tau]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t [\psi(x-a\tau) + \psi(x+a\tau)]\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

第二步利用了 Fourier 反变换的线性性，即交换了对 τ 积分和对 k 积分的顺序

d'Alembert 公式

作**变量替换** $\xi = x - a\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\xi}{a}$，有

$$\frac{1}{2}\int_0^t \psi(x-a\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2a}\int_x^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

令 $\xi = x + a\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{a}$，有 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \psi(x+a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2a}\int_x^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

d'Alembert 公式

作变量替换 $\xi = x - a\tau$，则 $d\tau = -\dfrac{d\xi}{a}$，有

$$\frac{1}{2}\int_0^t \psi(x-a\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2a}\int_x^{x-at}\psi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(\xi)\,d\xi$$

令 $\xi = x + a\tau$，则 $d\tau = \dfrac{d\xi}{a}$，有 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \psi(x+a\tau)\,d\tau = \frac{1}{2a}\int_x^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right] = \frac{1}{2}\int_0^t \psi(x-a\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \psi(x+a\tau)\,d\tau = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$

$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] + \mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\dfrac{\sin kat}{ka}\right]$ 化为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$

这是最终结果，称为 **d'Alembert 公式**

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 如果**初始速度** $\psi(x)=0$，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

- $x=x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$
- 令 $x_0=x-at$，则 $x=x_0+at$，$\varphi(x-at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x-at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间** t **向右移动**至 $x=x_0+at$ 处

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 如果**初始速度** $\psi(x)=0$，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

- $x=x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$
- 令 $x_0=x-at$，则 $x=x_0+at$，$\varphi(x-at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x-at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间** t **向右移动**至 $x=x_0+at$ 处
- 令 $x_0=x+at$，则 $x=x_0-at$，$\varphi(x+at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x+at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间** t **向左移动**至 $x=x_0-at$ 处
- 因此，$\psi(x)=0$ 时的物理图像是初始位移的波形**一半向右传播**，**一半向左传播**
- $\psi(x)\neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列**右行波**和一列**左行波**叠加而成

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 如果**初始速度** $\psi(x)=0$，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

解的动画演示

- $x=x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$
- 令 $x_0=x-at$，则 $x=x_0+at$，$\varphi(x-at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x-at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间** t **向右移动**至 $x=x_0+at$ 处
- 令 $x_0=x+at$，则 $x=x_0-at$，$\varphi(x+at)=\varphi(x_0)$，故 $\varphi(x+at)$ 描述 $x=x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间** t **向左移动**至 $x=x_0-at$ 处
- 因此，$\psi(x)=0$ 时的物理图像是初始位移的波形**一半向右传播**，**一半向左传播**
- $\psi(x)\neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列**右行波**和一列**左行波**叠加而成

Fourier 变换法的本质

- 对无界问题用 **Fourier 变换法**，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解
- 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解
- 两者的精神一致

Fourier 变换法的本质

- 对无界问题用 **Fourier 变换法**，能够将**偏微分方程**的**定解问题**化为**常微分方程**的**初值问题**求解
- 对**有界问题**用**分离变量法**，也是把**偏微分方程**化作**常微分方程**来求解
- 两者的**精神一致**
- 由 $u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} U(k,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$ 可以看出
- $u(x,t)$ 是一系列**“本征振动”** $U(k,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的**叠加**（即**对 k 积分**）
- 每一**本征振动**是两个因子的乘积，一个只是 **t 的函数**，一个只是 **x 的函数**
- 这与用**分离变量法**求解**有界弦**的振动所得**一般解** $u(x,t) = \sum\limits_n X_n(x)T_n(t)$ **在形式上相同**
- 可见，**Fourier 变换法**本质上也是**分离变量法**

利用延迟定理、线性定理和积分定理

- $\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat]=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$ 可通过延迟定理和线性定理得到：

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat]\xrightarrow{\text{线性}}\frac{1}{2}\{\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{-ikat}]+\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{ikat}]\}$$
$$\xrightarrow{\text{延迟}}\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

利用延迟定理、线性定理和积分定理

- $\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$ 可通过延迟定理和线性定理得到：

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\cos kat] \xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat}] + \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}]\}$$

$$\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

- $\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 可通过延迟定理、线性定理和积分定理得到：由延迟定理和线性定理有 $\psi(x+at)-\psi(x-at) \leftrightarrow \Psi(k)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right] = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})}{2\mathrm{i}ka}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2a}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})}{\mathrm{i}k}\right] \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}[\psi(y+at)-\psi(y-at)]\,\mathrm{d}y$$

- 这里应用积分定理的条件已经满足，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\psi(x+at)-\psi(x-at)]\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}[\psi(\xi)-\psi(\xi)]\,\mathrm{d}\xi = 0$$

化简

- 令 $\xi = y + at$，则 $\int_{-\infty}^{x} \psi(y+at)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 令 $\xi = y - at$，则 $\int_{-\infty}^{x} \psi(y-at)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

- 故

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(k)\,\frac{\sin kat}{ka}\right] &= \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x} \psi(y+at)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{x} \psi(y-at)\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x-at} + \int_{x-at}^{x+at} - \int_{-\infty}^{x-at}\right] \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

§2.2 行波法简介

- d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到
- 思路是先求出偏微分方程的通解，其中含多个任意函数，再用初始条件确定它们
- 对于无界弦的振动，这一方法非常简单
- 但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍

§2.2 行波法简介

- d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到
- 思路是先求出偏微分方程的通解，其中含多个任意函数，再用初始条件确定它们
- 对于无界弦的振动，这一方法非常简单
- 但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍
- 令 $\xi = x - at$，$\eta = x + at$，推出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

- 从而将一维齐次波动方程化为 $0 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$

一维自由波动方程的通解

- 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$，即 $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$
- 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ **与 η 无关**，即 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = f_0(\xi)$，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ **的任意函数**
- 对 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$，其中 $f(\xi)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = f_0(\xi)$

一维自由波动方程的通解

- 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，即 $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$
- 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ **与 η 无关**，即 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ **的任意函数**
- 对 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f_0(\xi)$ 积分，得 $u=f(\xi)+g(\eta)$，其中 $f(\xi)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=f_0(\xi)$
- 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是**任意函数**
- 根据 $\xi=x-at$ 和 $\eta=x+at$，重新用变量 x 和 t 写出来，得到

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

- 这是**一维自由波动方程**在**未曾考虑任何定解条件**时的最一般解，即**真正的通解**

一维自由波动方程的通解

- 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$，即 $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$
- 所以 $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ **与** η **无关**，即 $\frac{\partial u}{\partial\xi} = f_0(\xi)$，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ **的任意函数**
- 对 $\frac{\partial u}{\partial\xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = f_0(\xi)$
- 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是**任意函数**
- 根据 $\xi = x - at$ 和 $\eta = x + at$，重新用变量 x 和 t 写出来，得到

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

- 这是**一维自由波动方程**在**未曾考虑任何定解条件**时的最一般解，即**真正的通解**
- 可惜能够这样求出通解的方程**甚少**
- 即使能够求出通解，如果**定解条件比较复杂**，要决定其中的任意函数也**绝非易事**
- 对于**有限区间**上的**自由振动**，由定解条件确定以上 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 就**比较困难**

推出 d'Alembert 公式

- 将通解 $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$ 代入初始条件，得

$$u\Big|_{t=0}=f(x)+g(x)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-af'(x)+ag'(x)=\psi(x)$$

- 对 $-f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{a}\psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x)+g(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-2c$
- 其中 c 是常数，x_0 可视方便取定

推出 d'Alembert 公式

将**通解** $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$ 代入**初始条件**，得

$$u\big|_{t=0}=f(x)+g(x)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-af'(x)+ag'(x)=\psi(x)$$

对 $-f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{a}\psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x)+g(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-2c$

其中 c 是**常数**，x_0 **可视方便取定**，与 $f(x)+g(x)=\varphi(x)$ 结合，推出

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+c,\quad g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-c$$

于是，满足**初始条件**的**解**为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=f(x-at)+g(x+at)\\&=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

这样就再次得到 **d'Alembert 公式**，结果与 x_0 和 c **无关**

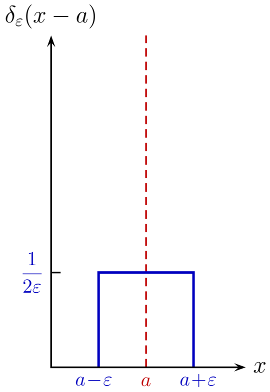
§3 δ 函数

§3.1 定义一

- 考虑位于 x 轴上 $x = a$ 处具有单位质量的质点
- 为了描述它的质量密度 (这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a| < \varepsilon \\ 0, & |x-a| > \varepsilon \end{cases}$$

- 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度



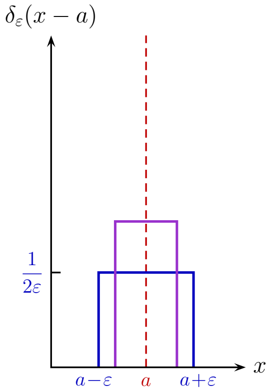
§3 δ 函数

§3.1 定义一

- 考虑位于 x 轴上 $x=a$ 处具有单位质量的质点
- 为了描述它的质量密度 (这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

- 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度
- 当 $\varepsilon\to 0$ 时



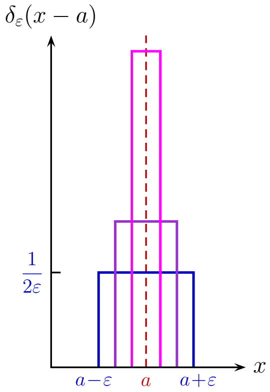
§3 δ 函数

§3.1 定义一

考虑位于 x 轴上 $x=a$ 处具有**单位质量**的**质点**

为了描述它的**质量密度**（这里指**线密度**），引入**函数**

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$



这个函数描述的是**均匀分布**在**区间** $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 内**质量为** 1 的**物体**的**质量密度**

当 $\varepsilon\to 0$ 时，就得到上述**质点**的**质量密度**

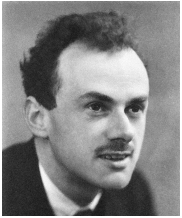
$$\delta(x-a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-a)$$

它满足 $\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$ 和 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$，这是 δ **函数**的**定义一**

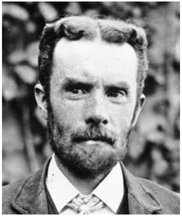
若**质点**的**质量**为 m，则**质量密度**为 $\rho(x)=m\delta(x-a)$

δ 函数的历史和意义

- 🐷 δ 函数是数学物理中的重要概念
- 🐖 一般认为最早由物理学家 **P. Dirac** 引入
- 🐑 实际上，在 Dirac 之前，**O. Heaviside** 已经给出明确定义
- 🐐 至于这一函数的雏形，则具有更长的历史
- 🐄 不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



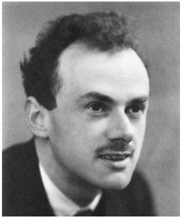
Paul Dirac
(1902–1984)



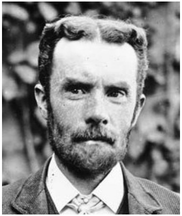
Oliver Heaviside
(1850–1925)

δ 函数的历史和意义

- δ 函数是数学物理中的重要概念
- 一般认为最早由物理学家 **P. Dirac** 引入
- 实际上，在 Dirac 之前，**O. Heaviside** 已经给出明确定义
- 至于这一函数的雏形，则具有更长的历史
- 不过，它在近代物理中才获得广泛的应用
- δ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度
- 比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度



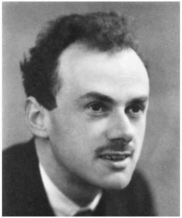
Paul Dirac
(1902–1984)



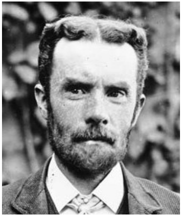
Oliver Heaviside
(1850–1925)

δ 函数的历史和意义

- δ 函数是数学物理中的重要概念
- 一般认为最早由物理学家 **P. Dirac** 引入
- 实际上，在 Dirac 之前，**O. Heaviside** 已经给出明确定义
- 至于这一函数的雏形，则具有更长的历史
- 不过，它在近代物理中才获得广泛的应用
- δ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度
- 比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度
- 如果自变量是时间 t 而不是位置 x，那么 δ 函数描述的是存在于瞬时、总量为 1 的物理量的强度
- 比如，具有单位冲量的瞬时力，具有单位电荷的瞬时电流



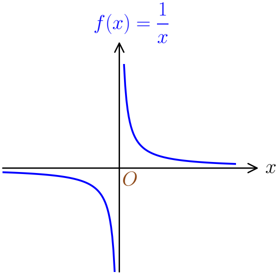
Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

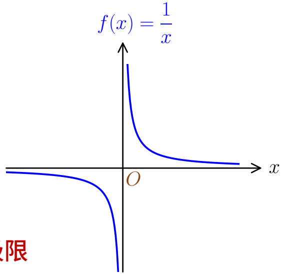
广义函数

- δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同
- 后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值
- 虽然也可能有奇点，但奇点通常**不在**定义域内
- 比如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，虽然 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 发散，但 $x=0$ 并**不在**定义域内



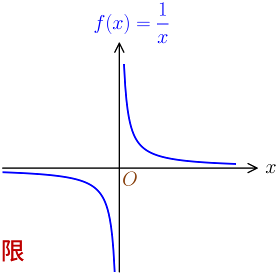
广义函数

- δ **函数**与我们过去所熟悉的**函数**颇为不同
- **后者**通常是**连续**或**分段连续**的，起码在**定义域**内的每一点应该有**确定的函数值**
- 虽然也可能有**奇点**，但奇点通常**不在**定义域内
- 比如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，虽然 $x \to 0$ 时 $f(x)$ **发散**，但 $x = 0$ 并**不在**定义域内
- 然而，δ **函数** $\delta(x-a)$ 在 $x = a$ **处**的函数值是 ∞
- 而且**这一点**对 δ 函数来说是**最重要**的
- 所以 δ **函数不是**一个**经典的函数**，而是一个**广义函数**
- 严格的**广义函数理论**超出了本课程的论题
- 我们总是从**极限**的意义上对 δ 函数作直观的理解
- 即把 δ **函数**当作某种**经典函数序列** [如 $\delta_\varepsilon(x-a)$] 的**极限**



广义函数

- δ **函数**与我们过去所熟悉的**函数**颇为不同
- **后者**通常是**连续**或**分段连续**的，起码在**定义域**内的每一点应该有**确定的函数值**
- 虽然也可能有**奇点**，但奇点通常**不在**定义域内
- 比如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，虽然 $x \to 0$ 时 $f(x)$ **发散**，但 $x = 0$ 并**不在**定义域内
- 然而，δ **函数** $\delta(x-a)$ 在 $x = a$ **处**的函数值是 ∞
- 而且**这一点**对 δ 函数来说是**最重要**的
- 所以 δ **函数不是**一个**经典的函数**，而是一个**广义函数**
- 严格的**广义函数理论**超出了本课程的论题
- 我们总是从**极限**的意义上对 δ 函数作直观的理解
- 即把 δ **函数**当作某种**经典函数序列** [如 $\delta_\varepsilon(x-a)$] 的**极限**
- 此外，由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = 1$ 可以看到，δ **函数的量纲**是其**宗量量纲**的**倒数**
- 这一点不同于三角函数、指数函数、对数函数等**无量纲**函数



§3.2 定义二

根据 δ 函数的定义一 $\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$

对于任何连续函数 $f(x)$，有 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$

上式可看作 δ 函数的另一种定义（定义二），$f(x)$ 与 $\delta(x-a)$ 相乘之后，通过积分挑选出 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的值 $f(a)$，这也称为 δ 函数的挑选性

§3.2 定义二

🦁 根据 δ 函数的定义一 $\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$

🐅 对于任何连续函数 $f(x)$，有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$

🐆 上式可看作 δ 函数的另一种定义（定义二），$f(x)$ 与 $\delta(x-a)$ 相乘之后，通过积分挑选出 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的值 $f(a)$，这也称为 δ 函数的挑选性

🟧 证明　由于 $\delta(x-a)$ 只在 a 点不为零，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a+\theta\varepsilon)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a+\theta\varepsilon)$$

🦌 其中 $\theta\in[-1,1]$，第二步用了积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则存在 $c\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

🦓 由于正实数 ε 的大小可以任意，令 $\varepsilon\to 0$，就得到 $f(a+\theta\varepsilon)\to f(a)$　证毕 🟧

严格的证明

- 🐻 上述证明实际上是会引起**质疑**的
- 🦣 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**

严格的证明

- 上述证明实际上是会引起**质疑**的
- 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**
- 但是，如果用**经典函数** $\delta_\varepsilon(x-a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x-a)$
- 那么，每一步都是**严格成立**的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a+\theta\varepsilon)$$

- 令 $\varepsilon \to 0$，就得到要证明的 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$

严格的证明

- 上述证明实际上是会引起**质疑**的
- 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**
- 但是，如果用**经典函数** $\delta_\varepsilon(x-a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x-a)$
- 那么，每一步都是**严格成立**的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a+\theta\varepsilon)$$

- 令 $\varepsilon \to 0$，就得到要证明的 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$

❓ 也许有人会问，取**极限** $\varepsilon \to 0$ 得到的 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x$ 是否真的**等于** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x$？即**取极限**与**积分**是否可以**交换次序**?

❗ 正确的理解是，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x$ 正是用 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x-a)\,\mathrm{d}x$ 来**定义**的

说明和推广

- 使用 δ **函数**，使我们可以**省略**用**经典函数序列** $\delta_\varepsilon(x-a)$ 计算然后**取极限**的过程
- 需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x-a)$ **不一定**是前面用

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

定义的函数

- 只要 $\delta_\varepsilon(x-a)$ 在 $|x-a|>\varepsilon$ **时为零**，在 $|x-a|<\varepsilon$ **时为正**，且**积分为** 1 即可

说明和推广

🐼 使用 δ 函数，使我们可以省略用经典函数序列 $\delta_\varepsilon(x-a)$ 计算然后取极限的过程

🐂 需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x-a)$ **不一定**是前面用

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a|<\varepsilon\\ 0, & |x-a|>\varepsilon\end{cases}$$

定义的函数

🦬 只要 $\delta_\varepsilon(x-a)$ 在 $|x-a|>\varepsilon$ 时为零，在 $|x-a|<\varepsilon$ 时为正，且积分为 1 即可

🐻‍❄️ 很容易将 δ 函数的定义二推广到三维或其它维数的情况

🐃 比如，三维 δ 函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})$ 可以由下式定义，

$$\int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=f(\boldsymbol{a})$$

🦓 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，我们也可以用 3 个一维 δ 函数等价地定义

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\delta(x-a_1)\delta(y-a_2)\delta(z-a_3)$$

§3.3 δ 函数的基本性质

δ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)[f(x)\delta(x-a)-f(a)\delta(x-a)]\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x-f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x\\
=&\ \varphi(a)f(a)-f(a)\varphi(a)=0
\end{aligned}
$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x-a)-f(a)\delta(x-a)=0$

§3.3 δ 函数的基本性质

δ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)[f(x)\delta(x-a)-f(a)\delta(x-a)]\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x-f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x\\=&\ \varphi(a)f(a)-f(a)\varphi(a)=0\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x-a)-f(a)\delta(x-a)=0$

2 $x\delta(x)=0$

上式可改写成 $\dfrac{\delta(x)}{x^{-1}}=0$，它说明 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 处的奇性弱于 $\dfrac{1}{x}$

由此可见，δ 函数的奇性其实并不是很大

证：设 $\varphi(x)$ 为**任意连续函数**，根据 δ **函数**的**定义二**，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)\cdot 0 = 0$$

由 $\varphi(x)$ 的**任意性**得 $x\delta(x) = 0$

偶函数

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)\cdot 0 = 0$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $x\delta(x) = 0$

3 δ 函数是偶函数，即 $\delta(-x) = \delta(x)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y = -x \quad ➡️ \quad = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(y)\delta(-y)(-\mathrm{d}y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(-x)\,\mathrm{d}x$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $\delta(-x) = \delta(x)$

$\delta(ax)$

4 $\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{|a|}$，其中 $a\neq 0$

证：设 $\varphi(x)$ 为**任意连续函数**，若 $a>0$，令 $y=ax$，由 δ **函数**的**定义二**得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(ax)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{a}=\frac{1}{a}\varphi(0)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

由 $\varphi(x)$ 的**任意性**得 $\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{a}=\dfrac{\delta(x)}{|a|}$

若 $a<0$，则 $-a>0$，由 δ **函数**的**偶函数**性质得

$$\delta(ax)=\delta(-ax)=\frac{\delta(x)}{-a}=\frac{\delta(x)}{|a|}$$

§3.4 δ 函数的几种表达式

♈ $\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

🐻‍❄️ $\delta(x)$ 的 **Fourier 变换**为 $\Delta(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

🦍 由 **Fourier 反变换公式**即得 $\delta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

§3.4 δ 函数的几种表达式

♈ $\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

🐻‍❄️ $\delta(x)$ 的 **Fourier 变换**为 $\Delta(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

🦍 由 **Fourier 反变换公式**即得 $\delta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$

⚠️ 实际上，上式右边的**积分并不存在**，那么如何理解这个结果呢?

🐺 如果用 $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|<\varepsilon\\ 0, & |x|>\varepsilon\end{cases}$ 代替 $\delta(x)$，就可以得到

$$\Delta_\varepsilon(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\cos kx}{2\varepsilon}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin kx}{2k\varepsilon}\bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta_\varepsilon(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{k\cos k\varepsilon}{k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad \text{(L'Hospital 法则)}$$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

🦧 最后一步实际上是对这个**不存在的积分**的**定义**

第二种表达式

♉ $\delta(x)=\lim\limits_{K\to+\infty}\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$

🐯 根据上述 $\delta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim\limits_{\varepsilon\to0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$，有

$$
\begin{aligned}
\delta(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K}\Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{K\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-K}^{K}\Delta_\varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K}\Big[\lim_{\varepsilon\to0}\Delta_\varepsilon(k)\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\
&=\frac{1}{2\pi}\lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K}(\cos kx+\mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to+\infty}\int_{0}^{K}\cos kx\,\mathrm{d}k\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to+\infty}\frac{\sin kx}{x}\bigg|_0^K=\lim_{K\to+\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x}
\end{aligned}
$$

🦭 第二步**交换**了**两个极限**的顺序，其合理性这里不作深究

🦎 随后的积分是**普通定积分**，只要 $\delta_\varepsilon(x)$ 是 x 和 ε 的**连续函数**，则 $\Delta_\varepsilon(k)$ 是 k 和 ε 的**连续函数**，从而**取 $\varepsilon\to0$ 的极限**与**积分**可以**交换次序**（第三步）

$\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$ 的性质和图像

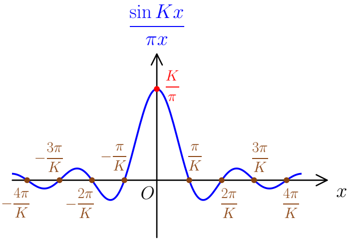
- 这里介绍**函数** $\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$ $(K>0)$ 的性质
- 它的**零点**位于 $x=\pm\dfrac{n\pi}{K}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$
- 当 $x\to 0$ 时，由 **L'Hospital 法则**得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin Kx}{\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{K\cos Kx}{\pi}=\frac{K}{\pi}$$

- 根据**第五章 §7 选读的例 3**，**Dirichlet 积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin Kx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\qquad K>0$$

- 故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin Kx}{x}\,\mathrm{d}x=1$
- 当 $K\to+\infty$ 时，$\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$ 整体行为趋近于 $\delta(x)$



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

第三种表达式

♊ $\delta(x) = \lim\limits_{\sigma\to 0} \rho_\sigma(x)$，其中 $\rho_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ 是 **Gauss 分布**，$\sigma > 0$

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

当 $x \neq 0$ 时，令 $t = \dfrac{1}{\sigma}$，由 **L'Hospital 法则**得

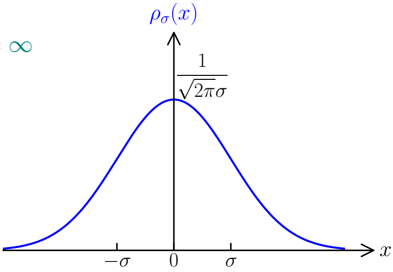
$$\lim_{\sigma\to 0} \rho_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{x^2t^2/2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2 t\,\mathrm{e}^{x^2t^2/2}} = 0$$

当 $x = 0$ 时，有 $\lim\limits_{\sigma\to 0} \rho_\sigma(x) = \lim\limits_{\sigma\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \infty$

由于 $\rho_\sigma(x)$ 是**概率分布**，已经**归一化**，满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = 1$$



这样就符合 δ **函数定义**一中的所有条件

第四种表达式

♋ $\delta(x)=\lim_{b\to 0}\rho_b(x)$，其中 $\rho_b(x)=\dfrac{b}{\pi(x^2+b^2)}$ 是 **Lorentz 分布**，$b>0$

🐔 **Lorentz 分布**也称为 **Cauchy 分布**、**Breit–Wigner 分布**

🐓 **当** $x\neq 0$ **时**，$\lim_{b\to 0}\rho_b(x)=\lim_{b\to 0}\dfrac{b}{\pi(x^2+b^2)}=0$

🦆 **当** $x=0$ **时**，$\lim_{b\to 0}\rho_b(x)=\lim_{b\to 0}\dfrac{1}{\pi b}=\infty$

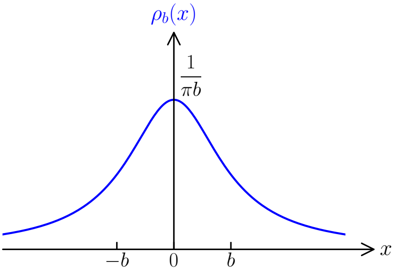
🦢 作为归一化的**概率分布**，$\rho_b(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_b(x)\,\mathrm{d}x=1$$

🦅 这样就符合 δ **函数定义一**中的所有条件

🦉 事实上，任何**概率分布**取其**宽度趋于零**的**极限**（从而**高度趋于无穷大**），都可以得到 δ **函数**

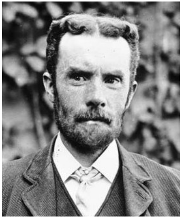
Hendrik Lorentz
(1853–1928)



第五种表达式

$\delta(x) = \theta'(x)$，其中 **Heaviside 阶跃函数**定义为

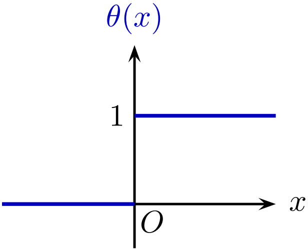
$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Oliver Heaviside
(1850–1925)

对于**任意连续函数** $f(x)$，利用**分部积分**，有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\theta'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)\theta(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\theta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(+\infty) - \int_0^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(+\infty) - f(x)\Big|_0^{+\infty} = f(0) \end{aligned}$$



可见 $\theta'(x)$ 符合 δ **函数**的**定义二**

§4 无界杆的热传导问题

- 考虑无穷长导热细杆在热源和初始温度作用下的热传导问题
- 这是一个一维无界问题，关于温度分布 $u(x,t)$ 的定解问题如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

- 这里忽略了默认的边界条件 $u\big|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0$

§4 无界杆的热传导问题

- 考虑无穷长导热细杆在热源和初始温度作用下的热传导问题
- 这是一个一维无界问题，关于温度分布 $u(x,t)$ 的定解问题如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

- 这里忽略了默认的边界条件 $u\big|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pm\infty} = 0$
- 令 $u = u_1 + u_2$，将问题分解为由初始温度引起的热传导问题 (无源问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

- 以及由热源引起的热传导问题 (有源问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_2|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

§4.1 无源问题

将 u_1 改记为 u，无源问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$$

对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + k^2 a^2 U = 0 \\ U\big|_{t=0} = \Phi(k) \end{cases}$$

这个常微分方程初值问题的解为 $U(k,t) = \Phi(k)\,\mathrm{e}^{-k^2 a^2 t}$

Fourier 反变换计算

- 剩下的问题是对 $U(k,t) = \Phi(k)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 作 **Fourier 反变换**求出**原函数** $u(x,t)$
- 根据**卷积定理** $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$，只要求出 $\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 的**原函数** $E(x)$
- 再与 $\Phi(k)$ 的**原函数** $\varphi(x)$ 作**卷积**即可得到 $u(x,t)$

Fourier 反变换计算

- 剩下的问题是对 $U(k,t)=\Phi(k)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 作 **Fourier 反变换**求出**原函数** $u(x,t)$
- 根据**卷积定理** $f_1(x)*f_2(x)\leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$，只要求出 $\mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 的**原函数** $E(x)$
- 再与 $\Phi(k)$ 的**原函数** $\varphi(x)$ 作**卷积**即可得到 $u(x,t)$
- 由**反变换公式**得

$$\begin{aligned}E(x)&=\mathscr{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-k^2a^2t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}(\cos kx+\mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}\cos kx\,\mathrm{d}k\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{4a^2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\end{aligned}$$

- 倒数第二步用到**第 23 页**推出的**积分公式** ($\frac{1}{2a}\to a^2t,\ \frac{a}{2}\to\frac{1}{4a^2t}$)

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2a}\right)\cos kx\,\mathrm{d}k=\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right),\qquad a>0$$

无源问题的解

由卷积表达式得到无源问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\mathrm{e}^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

无源问题的解

- 由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\mathrm{e}^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

- 考虑特例 $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$，即初始时刻有一定的热量集中在 x_0 处
- 将 $\varphi(\xi)=\delta(\xi-x_0)$ 代入解的表达式，得到 t 时刻的温度分布为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]$$

- 这是 $\sigma=\sqrt{2a^2t}$ 的 Gauss 分布，其宽度随着 t 的增大而增大
- 高度随着 t 的增大而减小，但对 x 积分始终为 1

无源问题的解

- 由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)\mathrm{e}^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

- 考虑特例 $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$，即初始时刻有一定的热量集中在 x_0 处
- 将 $\varphi(\xi)=\delta(\xi-x_0)$ 代入解的表达式，得到 t 时刻的温度分布为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]$$

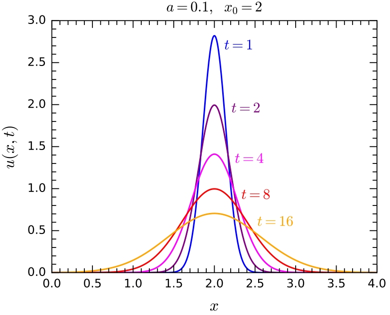
- 这是 $\sigma=\sqrt{2a^2t}$ 的 Gauss 分布，其宽度随着 t 的增大而增大
- 高度随着 t 的增大而减小，但对 x 积分始终为 1

解的动画演示

物理图像

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]$$

- 这样的结果表明，**热量不断向远处传播**，但**总能量守恒**
- 但是，**不管 t 多么小**，只要 $t>0$，杆上**各处**的**温度均不为零**
- 这表明**温度**的**传播速度**为**无穷大**，显然**不符合**实际情况
- 引起这一结果的原因是推导热传导方程时**没有考虑**热传导过程的**微观机制**
- 即所用**模型过于简化**
- 不过，**当 t 较大以后**，由热传导方程解得的结果还是**符合实际情况**的



§4.2 有源问题

将 u_2 改记为 u，有源问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

对 x 作 Fourier 变换，设 $u(x,t) \leftrightarrow U(k,t)$，$f(x,t) \leftrightarrow F(k,t)$

对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + k^2a^2U = F(k,t) \\ U|_{t=0} = 0 \end{cases}$

这个常微分方程初值问题的解为 $U(k,t) = \displaystyle\int_0^t F(k,\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(k,t) &= F(k,t)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-t)} + \int_0^t F(k,\tau)[-k^2a^2\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau \\ &= F(k,t) - k^2a^2U(k,t) \end{aligned}$$

有源问题的解

- 由前面得到的 **Fourier 变换关系** $\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)\leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 推出

$$\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}$$

- 应用卷积定理求得有源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[F(k,\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \end{aligned}$$

- 第二步利用了 **Fourier 反变换**的线性性，即交换了对 k 积分和对 τ 积分的次序

有源问题的解

- 由前面得到的 **Fourier 变换关系** $\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)\leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2t}$ 推出

$$\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\leftrightarrow \mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}$$

- 应用卷积定理求得有源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[F(k,\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \end{aligned}$$

- 第二步利用了 **Fourier 反变换**的线性性，即交换了对 k 积分和对 τ 积分的次序
- 若 $f(x,t)=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)$，则 $u(x,t)=\dfrac{\theta(t-t_0)}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}}\exp\left[-\dfrac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-t_0)}\right]$
- 此时热源只在 t_0 时刻作用于 x_0 点，故 t_0 时刻以前温度一直保持初始温度 0
- t_0 时刻以后热量从 x_0 点向外传播，温度分布为 $\sigma=\sqrt{2a^2(t-t_0)}$ 的 **Gauss 分布**