

量子场论

第 5 章 量子旋量场

5.1 节至 5.3 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期: 2024 年 12 月 17 日



第5章 量子旋量场

本章讨论旋量场 (spinor field) 的正则量子化, 旋量场对应于旋量表示 (spinor representation)

旋量表示是固有保时向 Lorentz 群 $SO^{\uparrow}(1, 3)$ 的一个投影表示，也是相应覆盖群 $SL(2, \mathbb{C})$ 的一个线性表示

Paul Dirac 在 1928 年首次将旋量表示引入到描述电子的理论中，建立了 **Dirac 方程**

木桩 $SO^+(1, 3)$ 和 $SL(2, \mathbb{C})$ 的 Lie 代数都是 Lorentz 代数，它们的表示可以通过构造满足 Lorentz 代数关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

的生成元矩阵来得到

下面就以这样的方式建立旋量表示



Paul Dirac
(1902–1984)

5.1 节 Lorentz 群的旋量表示

假设能够找到一组满足如下反对易关系的 $N \times N$ 矩阵 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

最后一步是一种简写，省略了 $N \times N$ 单位矩阵 1

这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 γ 矩阵

这个反对易关系意味着 $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$

5.1 节 Lorentz 群的旋量表示

假设能够找到一组满足如下反对易关系的 $N \times N$ 矩阵 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

最后一步是一种简写，省略了 $N \times N$ 单位矩阵 1

这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 γ 矩阵

这个反对易关系意味着 $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$

当 $\mu \neq \nu$ 时, $g^{\mu\nu} \equiv 0$, 而 γ^μ 与 γ^ν 是反对易的, 即

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \quad \mu \neq \nu$$

当 $\mu = \nu$ 时, 有

$$(\gamma^0)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^0, \gamma^0\} = g^{00} = \textcolor{brown}{1}, \quad (\gamma^i)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^i, \gamma^i\} = g^{ii} = \textcolor{teal}{-1}$$

Dirac 矩阵的性质

进一步假设 γ^μ 是正规矩阵，即满足 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^\mu = \gamma^\mu (\gamma^\mu)^\dagger$ (这里不采用 Einstein 求和约定)，从而用正规矩阵作相似变换可以将它们对角化

（ γ^0 ）² = 1 和 $(\gamma^i)^2 = -1$ 表明，对角化之后 γ^0 的对角元只能取实数 ± 1 ，而 γ^i 的对角元只能取虚数 $\pm i$ ：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm i & & & \\ & \pm i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm i \end{pmatrix}$$

Dirac 矩阵的性质

进一步假设 γ^μ 是正规矩阵，即满足 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^\mu = \gamma^\mu (\gamma^\mu)^\dagger$ (这里不采用 Einstein 求和约定)，从而用幺正矩阵作相似变换可以将它们对角化

（ γ^0 ）² = 1 和 $(\gamma^i)^2 = -1$ 表明，对角化之后 γ^0 的对角元只能取实数 ± 1 ，而 γ^i 的对角元只能取虚数 $\pm i$ ：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm i & & & \\ & \pm i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm i \end{pmatrix}$$

这些性质告诉我们, γ^0 是厄米矩阵, γ^i 是反厄米矩阵, 即

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

于是 $(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^i)^\dagger \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = 1$

可见 γ^0 和 γ^i 都是么正矩阵

矩阵 $S^{\mu\nu}$

Ⅱ 以 Dirac 矩阵的对易子定义另一组 $N \times N$ 矩阵

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

显然, $S^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 反对称, $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$

因而 $\{S^{\mu\nu}\}$ 中一共有 6 个独立矩阵

利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

以及反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ，推出

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu, \gamma^\rho] = \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - (2g^{\nu\mu} \mathbf{1} - \gamma^\mu \gamma^\nu), \gamma^\rho] = \frac{i}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\rho] \\
&= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\nu) = \mathbf{i} (\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})
\end{aligned}$$

旋量表示的生成元矩阵

6 根据对易子公式 $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ 和 $[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$ ，

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{i}{4} [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho] = \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \gamma^\sigma + \gamma^\rho [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \gamma^\rho - \gamma^\sigma [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} [i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \gamma^\sigma + i\gamma^\rho (\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\quad - i(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \gamma^\rho - i\gamma^\sigma (\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})]
\end{aligned}$$

旋量表示的生成元矩阵

6 根据对易子公式 $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ 和 $[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$ ，

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{i}{4} [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho] = \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \gamma^\sigma + \gamma^\rho [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \gamma^\rho - \gamma^\sigma [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} [i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \gamma^\sigma + i\gamma^\rho (\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\quad - i(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \gamma^\rho - i\gamma^\sigma (\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})] \\
&= \frac{i^2}{4} [g^{\nu\rho} (\gamma^\mu \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\mu) - g^{\mu\rho} (\gamma^\nu \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\nu) \\
&\quad - g^{\nu\sigma} (\gamma^\mu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\mu) + g^{\mu\sigma} (\gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu)] \\
&= i(g^{\nu\rho} \mathcal{S}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \mathcal{S}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \mathcal{S}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} \mathcal{S}^{\nu\rho})
\end{aligned}$$

满足 **Lorentz 代数关系** $[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

因而 $S^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$ 必定是 Lorentz 群某个表示的生成元矩阵

以 $S^{\mu\nu}$ 生成的表示就是**旋量表示**

旋量表示中的固有保时向 Lorentz 变换矩阵

根据 4.1 节的讨论, 一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 在 Lorentz 群的矢量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = e^X, \quad X \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}$$

类似地, 这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = e^Y, \quad Y \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}$$

这样定义的 $D(\Lambda)$ 是旋量表示中的 Lorentz 变换矩阵

由于 $e^{-Y} e^Y = e^{-Y+Y} = e^0 = 1$, $D(\Lambda)$ 的逆矩阵为

$$D^{-1}(\Lambda) = e^{-Y} = \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$$

多重对易子

ℳ 对于**算符**或**同阶方阵** B 与 A , 以如下方式定义**多重对易子** $[B, A^{(n)}]$:

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \dots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

🏫 可以用**数学归纳法**证明 $BA^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$

🔔 由于负整数 m 的阶乘为 $m! \rightarrow \infty$, 可将上式右边化为**无穷级数**,

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$$

多重对易子

对于算符或同阶方阵 B 与 A , 以下方式定义**多重对易子** $[B, A^{(n)}]$:

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \dots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

 可以用数学归纳法证明 $BA^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$

由于负整数 m 的阶乘为 $m! \rightarrow \infty$ ，可将上式右边化为无穷级数：

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$$

推出
$$\begin{aligned} e^{-A}Be^A &= e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k = e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}] \\ &= e^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-n)!} A^{k-n} [B, A^{(n)}] \\ &= e^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^A [B, A^{(n)}] = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]} \end{aligned}$$

Dirac 矩阵的 Lorentz 变换

Ω 由于

$$[\gamma^\mu, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -[\mathcal{S}^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = [\mathcal{S}^{\sigma\rho}, \gamma^\mu] = i(\gamma^\sigma g^{\rho\mu} - \gamma^\rho g^{\sigma\mu})$$

$$= i(g^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu - g^{\sigma\mu} \delta^\rho_\nu) \gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu$$



有 $[\gamma^\mu, Y^{(1)}] = [\gamma^\mu, Y] = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} [\gamma^\mu, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu = X^\mu_\nu \gamma^\nu$

 $[\gamma^\mu, Y^{(2)}] = [[\gamma^\mu, Y^{(1)}], Y] = X^\mu_\nu [\gamma^\nu, Y] = X^\mu_\nu X^\nu_\rho \gamma^\rho = (X^2)^\mu_\nu \gamma^\nu, \dots$
 $[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)^\mu_\nu \gamma^\nu$



利用 $e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$ 推出

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) = e^{-Y} \gamma^\mu e^Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\gamma^\mu, Y^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X^n)^\mu_\nu \gamma^\nu = (e^X)^\mu_\nu \gamma^\nu$$

即

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

类比四维动量算符 P^μ 的 Lorentz 变换 $U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$ ，把上式看作旋量表示中 Dirac 矩阵 γ^μ 的 Lorentz 变换规则，那么 γ^μ 是一个 Lorentz 矢量

单位矩阵和生成元矩阵的 Lorentz 变换

ℳ 与 γ^μ 对应的协变矢量为 $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ ，从而

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3$$

🏛️ $N \times N$ 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 满足

$$D^{-1}(\Lambda) \mathbf{1} D(\Lambda) = \mathbf{1}$$

💡 因而 $\mathbf{1}$ 是一个 Lorentz 标量

💡 生成元矩阵 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda) \mathcal{S}^{\mu\nu} D(\Lambda) &= \frac{i}{4} [D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda), D^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu D(\Lambda)] \\ &= \frac{i}{4} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \mathcal{S}^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

💡 可见， $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量

γ^5 矩阵



引入一个新的 $N \times N$ 矩阵

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$



由于 $\mu \neq \nu$ 时 $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ ，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

γ^5 矩阵

引入一个新的 $N \times N$ 矩阵 $\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

由于 $\mu \neq \nu$ 时 $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ ，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

这种置换性质与四维 Levi-Civita 符号类似：

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

因而置换操作带来的正负号在 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 与 $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ 的缩并中相互抵消，如

$$\varepsilon_{1023}\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon_{0123}(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

由此得到 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

γ^5 的 Lorentz 变换

1.5 节曾推出等式

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

从而, $\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$ 的固有保时向 Lorentz 变换是

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda) \gamma^5 D(\Lambda) &= -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu D(\Lambda) \\ &\quad \times D^{-1}(\Lambda) \gamma^\rho D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda) \gamma^\sigma D(\Lambda) \\ &= -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \\ &= -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta = \gamma^5 \end{aligned}$$

可见, γ^5 是一个 Lorentz 标量

γ^5 的性质



γ^5 的平方为

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 = -(-1)^3 = 1$$

 第二步利用偶置换将后面的 $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ 转化为 $\gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0$

 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ ， γ^5 是厄米矩阵，

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(\gamma^3)^\dagger (\gamma^2)^\dagger (\gamma^1)^\dagger (\gamma^0)^\dagger = i\gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5$$

 此外， γ^5 与 γ^μ 反对易，

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu - \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) = 0$$

 即

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$$

$\gamma^\mu \gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换

ℳ $\gamma^\mu \gamma^5$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda) \gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$

⛪ 因而它是一个 Lorentz 矢量

ℳ 再引入

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathcal{S}^{\mu\nu}$$

ℳ 它正比于 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ ，所以也是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量，

$$D^{-1}(\Lambda) \sigma^{\mu\nu} D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

ℳ 当 $\mu \neq \nu$ 时， $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^\mu \gamma^\nu$ ，故 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量为

$$\sigma^{01} = i\gamma^0 \gamma^1, \quad \sigma^{02} = i\gamma^0 \gamma^2, \quad \sigma^{03} = i\gamma^0 \gamma^3$$

$$\sigma^{12} = i\gamma^1 \gamma^2, \quad \sigma^{13} = i\gamma^1 \gamma^3, \quad \sigma^{23} = i\gamma^2 \gamma^3$$

变换矩阵 $D(\mathcal{P})$



现在拥有一组矩阵

$$\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$$

它们的独立分量个数之和为 $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$

上面讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换，下面研究宇称变换

变换矩阵 $D(\mathcal{P})$



现在拥有一组矩阵

$$\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$$

它们的独立分量个数之和为 $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$

上面讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换，下面研究宇称变换

用 γ^0 定义幺正变换矩阵

$$D(\mathcal{P}) = \gamma^0$$

它的幺正性意味着

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$$

用 $D(\mathcal{P})$ 对 γ^0 和 γ^i 作相似变换，得

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = +\gamma^0$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma^i$$

γ^μ 、1 和 γ^5 的宇称变换

利用宇称变换矩阵 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

将 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 和 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

可见, $D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的宇称变换矩阵, 它是**非固有保时向的**

上式是 γ^μ 的**宇称变换形式**, 按照 1.4 节的定义, γ^μ 是**极矢量**

γ^μ 、1 和 γ^5 的宇称变换

利用宇称变换矩阵 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

将 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 和 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

可见, $D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的宇称变换矩阵, 它是**非固有保时向的**

上式是 γ^μ 的**宇称变换形式**, 按照 1.4 节的定义, γ^μ 是**极矢量**

 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 说明 γ^0 是**宇称本征态**, **本征值为 +**, 即具有**偶宇称**

 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 说明 γ^i 是**宇称本征态**, **本征值为 -**, 即具有**奇宇称**

 虽然**单位矩阵 1** 与 γ^5 都是**Lorentz 标量**, 但它们的**宇称变换性质不同**,

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1} D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma^5$$

 1 是**狭义的标量**, 具有**偶宇称**; γ^5 是**赝标量**, 具有**奇宇称**

$\gamma^\mu \gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换



$\gamma^\mu \gamma^5$ 的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu D(\mathcal{P}) D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$



即

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^0 \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0 \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^i \gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i \gamma^5$$



根据 1.4 节的定义, $\gamma^\mu \gamma^5$ 是轴矢量, 其分量的宇称性质与 γ^μ 相反

$\gamma^\mu \gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换



$\gamma^\mu \gamma^5$ 的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$



即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5$$



根据 1.4 节的定义, $\gamma^\mu \gamma^5$ 是轴矢量, 其分量的宇称性质与 γ^μ 相反



$\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu}D(\mathcal{P}) &= \frac{i}{2}[D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}), D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\nu D(\mathcal{P})] \\ &= \frac{i}{2}\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} \end{aligned}$$



$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{0i}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0{}_\alpha \mathcal{P}^i{}_\beta \sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{0i}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{ij}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^i{}_\alpha \mathcal{P}^j{}_\beta \sigma^{\alpha\beta} = +\sigma^{ij}$$

旋量表示的维数

可见, 集合 $\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由标量 1、赝标量 γ^5 、极矢量 γ^μ 、轴矢量 $\gamma^\mu \gamma^5$ 和 2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的

综合考虑固有保时向 Lorentz 变换和宇称变换, 则这些矩阵的变换性质各不相同

因而彼此之间是线性独立的, 总共有 16 个线性独立的矩阵

线性独立的 $N \times N$ 矩阵至多有 N^2 个, 需要 $N \geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵

旋量表示的维数

可见, 集合 $\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由标量 1、赝标量 γ^5 、极矢量 γ^μ 、轴矢量 $\gamma^\mu \gamma^5$ 和 2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的

综合考虑固有保时向 Lorentz 变换和宇称变换, 则这些矩阵的变换性质各不相同

因而彼此之间是线性独立的, 总共有 16 个线性独立的矩阵

线性独立的 $N \times N$ 矩阵至多有 N^2 个, 需要 $N \geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵

取 $N = 4$, 就可以用这 16 个矩阵展开一个任意的 4×4 矩阵 (展开系数为复数)

也就是说, 它们构成一组完备的基底

可以证明, 满足反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ 的 4 个 Dirac 矩阵至少是 4 阶方阵

对于 2 阶方阵, 可以尝试用 Pauli 矩阵来构造 Dirac 矩阵, 由 $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ 得 $\{i\sigma^i, i\sigma^j\} = 2g^{ij}$, 可取 $\gamma^i = i\sigma^i$, 但我们找不到另一个 2 阶方阵能够同时与 $i\sigma^1$ 、 $i\sigma^2$ 和 $i\sigma^3$ 反对易

因此, 将 Dirac 矩阵 γ^μ 取为 4×4 矩阵, 而旋量表示是 Lorentz 群的 4 维表示

5.2 节 Dirac 旋量场

■ 在 Lorentz 群的旋量表示空间中，被变换矩阵 $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 Dirac 旋量 (spinor)

pineapple 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 矩阵，Dirac 旋量 ψ_a 应当具有 4 个分量 ($a = 1, 2, 3, 4$)

apple 相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda) \psi_b$$

knife 隐去旋量指标 a 和 b ，上式化为 $\psi' = D(\Lambda) \psi$

5.2 节 Dirac 旋量场

■ 在 Lorentz 群的旋量表示空间中，被变换矩阵 $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 Dirac 旋量 (spinor)

pineapple 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 矩阵，Dirac 旋量 ψ_a 应当具有 4 个分量 ($a = 1, 2, 3, 4$)

apple 相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda) \psi_b$$

knife 隐去旋量指标 a 和 b ，上式化为 $\psi' = D(\Lambda) \psi$

watermelon 注意上式右边是矩阵与列矢量的乘积：

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}(\Lambda) & D_{12}(\Lambda) & D_{13}(\Lambda) & D_{14}(\Lambda) \\ D_{21}(\Lambda) & D_{22}(\Lambda) & D_{23}(\Lambda) & D_{24}(\Lambda) \\ D_{31}(\Lambda) & D_{32}(\Lambda) & D_{33}(\Lambda) & D_{34}(\Lambda) \\ D_{41}(\Lambda) & D_{42}(\Lambda) & D_{43}(\Lambda) & D_{44}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ ，它就成为 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$

类比量子矢量场的 Lorentz 变换 $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ ，它就成为 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$

类比量子矢量场的 Lorentz 变换 $A^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

对于固有保时向 Lorentz 变换 Λ ， $D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$ 的无穷小形式为

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}$$

于是， $\psi'_a(x')$ 的无穷小形式是 $\psi'_a(x') = \psi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x)$

1.7.3 小节一般场的无穷小 Lorentz 变换为 $\Phi'_a(x') = \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)$

比较可知，生成元 $I^{\mu\nu}$ 在旋量表示中对应于 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

无穷小展开

作变换 $x' \rightarrow x$ 、 $x \rightarrow \Lambda^{-1}x$ ， $\psi_a'(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$ 化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(\textcolor{red}{x})U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\textcolor{violet}{\Lambda}^{-1}x)$$

对于无穷小 Lorentz 变换, $(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

在 x 处将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ 展开到 ω 的一阶项, 得

$$\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x)$$

$$= \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{L}^{\mu\nu} \psi(x)$$

无穷小展开

作变换 $x' \rightarrow x$ 、 $x \rightarrow \Lambda^{-1}x$ ， $\psi_a'(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$ 化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(\textcolor{red}{x})U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\textcolor{violet}{\Lambda}^{-1}x)$$

对于无穷小 Lorentz 变换, $(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

在 x 处将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ 展开到 ω 的一阶项, 得

$$\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x)$$

$$= \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{L}^{\mu\nu} \psi(x)$$

从而, $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$ 右边展开到 ω 一阶项的形式为

$$\begin{aligned} D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) &= \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) \left[\psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x)\right] \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x)] \end{aligned}$$

自旋角动量

■ $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)]$ 最左

边展开为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

两相比较, 得到

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)$$

自旋角动量

■ $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x)]$ **最左**

边展开为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), \mathcal{J}^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

两相比较, 得到

$$[\psi(x), \mathcal{J}^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x)$$

纯空间分量的对偶三维矢量为 $\mathcal{S}^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk}$, $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^{23}, \mathcal{S}^{31}, \mathcal{S}^{12})$

可以从 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 满足的 Lorentz 代数关系推出 $SU(2)$ 代数关系 $[\mathcal{S}^i, \mathcal{S}^j] = i\epsilon^{ijk}\mathcal{S}^k$

因而 \mathcal{S}^i 是 $SU(2)$ 群某个线性表示的生成元

自旋角动量

■ $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x)]$ 最左

边展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$

$$= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

两相比较, 得到

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu}\psi(x)$$

纯空间分量的对偶三维矢量为 $\mathcal{S}^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{S}^{jk}$, $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^{23}, \mathcal{S}^{31}, \mathcal{S}^{12})$

从 $S^{\mu\nu}$ 满足的 Lorentz 代数关系推出 $SU(2)$ 代数关系 $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk} S^k$

因而 S^i 是 $SU(2)$ 群某个线性表示的生成元

再根据 $J^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}$ 和 $\hat{L}^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \hat{L}^{jk}$ 推出

$$[\psi(x), \mathbf{J}] = \hat{\mathbf{L}}\psi(x) + \mathcal{S}\psi(x)$$

上式表明,除了轨道角动量 $\hat{\mathbf{L}}$, 总角动量算符 $\hat{\mathbf{J}}$ 还给出了由 $\hat{\mathbf{S}}$ 描述的自旋角动量

与 Lorentz 变换相关的线性空间

线性空间名称	矢量表示空间	旋量表示空间
维度	4 维	4 维
空间中元素	Lorentz 矢量 A^μ	Dirac 旋量 ψ_a
Lorentz 群生成元	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$	$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
固有保时向 Lorentz 变换	$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$	$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$
线性空间名称	Hilbert 空间	场空间
维度	无限维	无限维
空间中元素	态矢 $ \Psi\rangle$	场 $\phi(x)$ 、 $A^\mu(x)$ 、 $\psi_a(x)$
Lorentz 群生成元	算符 $J^{\mu\nu}$	$\hat{L}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$
固有保时向 Lorentz 变换	$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$	$\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\right)$

Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

以 1 表示 2×2 单位矩阵, 将 Dirac 矩阵表示成 2×2 分块形式:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

容易验证, 这样表示的 Dirac 矩阵既符合反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, 也满足厄米性 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和反厄米性 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

以 1 表示 2×2 单位矩阵, 将 Dirac 矩阵表示成 2×2 分块形式:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

容易验证, 这样表示的 Dirac 矩阵既符合反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, 也满足厄米性 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和反厄米性 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Dirac 矩阵有多种表示方式, 以上表示方式称为 Weyl 表象, 也称为手征表象

Dirac 矩阵的所有表示方式都是等价的, 彼此通过相似变换联系起来

如果 γ^μ 满足反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, 那么利用么正矩阵 U 作相似变换后, $\gamma'^\mu \equiv U^\dagger \gamma^\mu U$ 也满足这个反对易关系:

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = U^\dagger \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} U = 2g^{\mu\nu} U^\dagger U = 2g^{\mu\nu}$$

Weyl 表象中的 γ^5 和 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

根据 Pauli 矩阵的乘积关系 $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$

Weyl 表象中 γ^5 的具体形式为

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ -\sigma^1 \end{pmatrix} \gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} -\sigma^1 \\ \sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ -\sigma^2 \end{pmatrix} \gamma^3 \\ &= i \begin{pmatrix} & -i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3 \\ -\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Weyl 表象中的 γ^5 和 $S^{\mu\nu}$

根据 Pauli 矩阵的乘积关系 $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$

Weyl 表象中 γ^5 的具体形式为

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix} \gamma^2\gamma^3 = i\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} \gamma^3 \\ &= i\begin{pmatrix} & -i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

用 2×2 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 和 Pauli 矩阵定义 $\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$ 和 $\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$

将 Dirac 矩阵 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ 归纳成

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$$

生成元矩阵表达为 $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

利用 $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$ 将 $S^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{ij} &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i & \\ & -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k & \\ & -2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 Pauli 矩阵的厄米性可知, S^{ij} 是厄米矩阵, $(S^{ij})^\dagger = S^{ij}$

Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

利用 $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$ 将 $S^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{ij} &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i & \\ & -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k & \\ & -2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 Pauli 矩阵的厄米性可知, \mathcal{S}^{ij} 是厄米矩阵, $(\mathcal{S}^{ij})^\dagger = \mathcal{S}^{ij}$

自旋角动量矩阵为

$$\mathcal{S}^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{S}^{jk} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{jkl} \begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{4} 2\delta^{il} \begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$$

即 S^i 是两个 $SU(2)$ 群基础表示生成元 $\tau^i = \frac{\sigma^i}{2}$ 的直和

因此 S^i 所属 $SU(2)$ 群线性表示是两个 $SU(2)$ 基础表示的直和

Dirac 旋量场自旋为 1/2

用自旋角动量矩阵 S 构造的二阶 Casimir 算符为

$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^i \mathcal{S}^i = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^i & \\ & \sigma^i \sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \mathbf{s}(\mathbf{s} + 1)$$

上式最后两步省略了 4×4 单位矩阵

可见, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的自旋量子数是

$$s = \frac{1}{2}$$

量子化之后, $\psi(x)$ 描述**自旋为 $\frac{1}{2}$** 的粒子

5.3 节 Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量，需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量

在 Weyl 表象中, $S^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$

其厄米共轭为 $(\mathcal{S}^{0i})^\dagger = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -\mathcal{S}^{0i}$

可见, \mathcal{S}^{0i} 不是厄米矩阵, 而是反厄米矩阵

5.3 节 Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量, 需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量

在 Weyl 表象中, $S^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$

其厄米共轭为 $(\mathcal{S}^{0i})^\dagger = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -\mathcal{S}^{0i}$

可见, S^{0i} 不是厄米矩阵, 而是反厄米矩阵

骆驼 当 $\omega_{0i} \neq 0$ 时, $D^\dagger(\Lambda) = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) \right]^\dagger = \exp \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right]$
 $\neq \exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) = D^{-1}(\Lambda)$

即 $D(\Lambda)$ 不是么正矩阵，因此 $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ 不是 Lorentz 标量：

$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) \neq \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ ，有

$$(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i$$

 将这两条式子合起来写成一条常用的公式

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$$

$$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$$

根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ ，有

$$(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i$$

将这两条式子合起来写成一条常用的公式

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$$

从而

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 &= -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{4} [(\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger] \gamma^0 \\
 &= -\frac{i}{4} \gamma^0 (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) = \gamma^0 \mathcal{S}^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
D^\dagger(\Lambda) \gamma^0 &= \exp \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right] \gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right]^n \gamma^0 \\
&= \gamma^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right)^n = \gamma^0 \exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)
\end{aligned}$$

Dirac 共轭和旋量双线性型

● 定义 $\psi(x)$ 的 Dirac 共轭

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0$$

根据 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$ ， $\bar{\psi}(x)$ 的 Lorentz 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

这样一来, $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 Lorentz 标量:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

Dirac 共轭和旋量双线性型

● 定义 $\psi(x)$ 的 Dirac 共轭

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0$$

根据 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$ ， $\bar{\psi}(x)$ 的 Lorentz 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

这样一来, $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 Lorentz 标量:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

像 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 这样同时包含 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)

利用 $\bar{\psi}(x)$ 还能构造 Lorentz 协变的其它旋量双线性型

鹿 $\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$ 是一个 Lorentz 标量,

$$\bar{\psi}'(x')i\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)i\gamma^5D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

更多旋量双线性型

紫色 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 Lorentz 矢量,

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \bar{\psi}(x) D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 D(\Lambda) \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x)$$



 $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量,

$$\bar{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') = \bar{\psi}(x) D^{-1}(\Lambda) \sigma^{\mu\nu} D(\Lambda) \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(x) \sigma^{\rho\sigma} \psi(x)$$

更多旋量双线性型

紫色 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 Lorentz 矢量,

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \textcolor{blue}{D^{-1}}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 D(\Lambda) \psi(x) = \textcolor{teal}{\Lambda^\mu}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x)$$



$\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量,

$$\bar{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') = \bar{\psi}(x) D^{-1}(\Lambda) \sigma^{\mu\nu} D(\Lambda) \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(x) \sigma^{\rho\sigma} \psi(x)$$



如果将 $\psi(x)$ 看作旋量(表示)空间中的列矢量, 则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 都是行矢量



因而这些旋量双线性型都只是旋量空间中的 1×1 矩阵，也就是数，如

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \bar{\psi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^\mu & \gamma_{12}^\mu & \gamma_{13}^\mu & \gamma_{14}^\mu \\ \gamma_{21}^\mu & \gamma_{22}^\mu & \gamma_{23}^\mu & \gamma_{24}^\mu \\ \gamma_{31}^\mu & \gamma_{32}^\mu & \gamma_{33}^\mu & \gamma_{34}^\mu \\ \gamma_{41}^\mu & \gamma_{42}^\mu & \gamma_{43}^\mu & \gamma_{44}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

旋量双线性型的厄米性

由 γ^0 和 γ^5 的厄米性、 $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$ 及 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$ 可知

这些旋量双线性型都是厄米的，也就是说，都是实数

$$(\bar{\psi}\psi)^\dagger = (\psi^\dagger \gamma^0 \psi)^\dagger = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi$$

$$(\bar{\psi} i\gamma^5 \psi)^\dagger = -i\psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi = \bar{\psi} i\gamma^5 \psi$$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^\dagger = \psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi)^\dagger &= \psi^\dagger \gamma^5 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu \psi = -\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \psi \\
 &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)^\dagger &= -\frac{i}{2} \psi^\dagger [(\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger] \gamma^0 \psi \\
 &= -\frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) \psi = \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi
 \end{aligned}$$

量子化之后，这五个旋量双线性型成为厄米算符

自由 Dirac 旋量场的拉氏量

此外，包含时空导数的旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 Lorentz 标量，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\textcolor{blue}{D}^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu\psi(x)$$

$$= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu_\rho\textcolor{violet}{\gamma}^\rho(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\textcolor{blue}{\delta}^\nu_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

自由 Dirac 旋量场的拉氏量

此外, 包含时空导数的旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 Lorentz 标量,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)\end{aligned}$$

利用 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\psi$ 写下自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

其中 $m > 0$ 是 Dirac 旋量场的质量, 于是

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}$$

Euler-Lagrange 方程 $\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

Dirac 方程

♥ 对 $0 = i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$ 取厄米共轭，得到

$$0 = -i(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -i(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为 $[i(\gamma^\mu)_{ab} \partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$

Dirac 方程

♥ 对 $0 = i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$ 取厄米共轭，得到

$$0 = -i(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -i(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为 $[i(\gamma^\mu)_{ab} \partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$

容易验证，Dirac 方程具有 **Lorentz 协变性**：

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= [i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m]D(\Lambda)\psi(x) \\ &= D(\Lambda)[iD^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= D(\Lambda)[i\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= D(\Lambda)(i\delta^\nu_\rho \gamma^\rho \partial_\nu - m)\psi(x) = D(\Lambda)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

Klein-Gordon 方程

对 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 左边乘以 $(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$

利用反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ，得

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi \\ &= \left[\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\nu \partial_\mu) + m^2 \right] \psi = \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \psi \\ &= (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi \end{aligned}$$

也就是说，自由的 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 满足 Klein-Gordon 方程

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0$$

Weyl 旋量

❤ 在 Weyl 表象中，旋量表示生成元矩阵 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和

🌊 把四分量 Dirac 旋量场 ψ 分解为两个二分量旋量场 η_L 和 η_R ： $\psi = \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix}$

🦐 这样的二分量旋量称为 Weyl 旋量

🐠 η_L 称为左手 (left-handed) Weyl 旋量， η_R 称为右手 (right-handed) Weyl 旋量

Weyl 旋量

❤ 在 Weyl 表象中, 旋量表示生成元矩阵 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

是分块对角的, 因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和

🌊 把四分量 Dirac 旋量场 ψ 分解为两个二分量旋量场 η_L 和 η_R : $\psi = \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix}$

🦐 这样的二分量旋量称为 Weyl 旋量

🐠 η_L 称为左手 (left-handed) Weyl 旋量, η_R 称为右手 (right-handed) Weyl 旋量

🐠 利用 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix}$ 将 Dirac 方程化为

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R - m\eta_L \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L - m\eta_R \end{pmatrix}$$

🐠 即得两个相互耦合的方程 $\begin{cases} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L - m\eta_R = 0 \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R - m\eta_L = 0 \end{cases}$

Weyl 方程

如果 $m = 0$ ，两个方程就各自独立了：

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R = 0$$

这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

可见，非零质量 m 的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来



Hermann Weyl
(1885–1955)

Weyl 方程

如果 $m = 0$ ，两个方程就各自独立了：

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R = 0$$

这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

可见，非零质量 m 的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来

自旋角动量矩阵的直和分解 $\mathcal{S}^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$ 表明

左手和右手 Weyl 旋量各对应于一个 $SU(2)$ 群基础表示

当 $m = 0$ 时，量子化之后的 $\eta_L(x)$ 和 $\eta_R(x)$ 各自描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子



Hermann Weyl
(1885–1955)