

# 量子场论

## 第8章 分立对称性和 Majorana 旋量场

### 8.1 节至 8.3 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 9 月 2 日



第 8 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

 相对于连续变换，不能用连续变化的参数描述的对称变换称为分立 (discrete) 变换，也称为离散变换

 如果系统作用量在一种分立变换下不变，则系统具有相应的**分立对称性** (discrete symmetry)

 1.3 节末提到的**宇称变换**和**时间反演变换**是两种重要的分立变换

本章讨论量子场的分立变换和分立对称性，顺便介绍 Majorana 旋量

## 8.1 节 标量场的分立变换

### 8.1.1 小节 标量场的 $P$ 变换



1.3 节提到，时空坐标  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  的**宇称变换**为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



这是一种**非固有保时向** Lorentz 变换



将  $x^\mu$  变换为  $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$ , 将  $\partial_\mu$  变换为  $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$



将四维动量  $p^\mu \equiv (E, \mathbf{p})$  变换为  $p'^\mu \equiv (\mathcal{P}p)^\mu \equiv (E, -\mathbf{p})$



但同时保持时空体积元不变， $d^4x' = |\det(\mathcal{P})| d^4x = d^4x$

## 8.1 节 标量场的分立变换

### 8.1.1 小节 标量场的 $P$ 变换



1.3 节提到，时空坐标  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  的宇称变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



这是一种**非固有保时向** Lorentz 变换



将  $x^\mu$  变换为  $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$ , 将  $\partial_\mu$  变换为  $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$



将四维动量  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  变换为  $p'^\mu = (\mathcal{P}p)^\mu = (E, -\mathbf{p})$



但同时保持时空体积元不变， $d^4x' = |\det(\mathcal{P})| d^4x = d^4x$



如果系统的**作用量**  $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  在宇称变换下**不变**，则**运动方程**的形式也在宇称变换下**不变**，此时称系统是**宇称守恒**的，即具有**空间反射对称性**



在宇称守恒的理论中，拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  的宇称变换应当满足  $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ ，从而使  $S' = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int d^4x \mathcal{L}(x) = S$

P 变换

类似于 3.1.1 小节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的线性幺正变换  $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})|\Psi\rangle = \mathcal{P}|\Psi\rangle$ ，称为  $\mathcal{P}$  变换

  $P \equiv U(\mathcal{P})$  是一个线性么正算符，根据同态关系和  $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$ ，有

$$P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P$$

即  $P$  是自身的逆变换算符

 从而  $P^2 = P^{-1}P = 1$ ，故相继两次  $P$  变换的作用等同于恒等变换

由  $P$  的幺正性得  $P^\dagger = P^{-1} = P$ ，因而  $P$  是厄米算符

P 变换

类似于 3.1.1 小节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的线性幺正变换  $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})|\Psi\rangle = \mathcal{P}|\Psi\rangle$ ，称为  $\mathcal{P}$  变换

  $P \equiv U(\mathcal{P})$  是一个线性么正算符，根据同态关系和  $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$ ，有

$$P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P$$

即  $P$  是自身的逆变换算符

 从而  $P^2 = P^{-1}P = 1$ ，故相继两次  $P$  变换的作用等同于恒等变换

由  $P$  的幺正性得  $P^\dagger = P^{-1} = P$ ，因而  $P$  是厄米算符

由量子场构成的拉氏量在宇称变换下不变意味着  $\mathcal{L}'(x') = P^{-1}\mathcal{L}(x')P = \mathcal{L}(x)$

 作替换  $x' \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow \mathcal{P}^{-1}x = \mathcal{P}x$ , 将这个式子等价地写成

$$P^{-1}\mathcal{L}(\textcolor{blue}{x})P = \textcolor{purple}{+}\mathcal{L}(\textcolor{brown}{P}x)$$

使拉氏量满足上式，也就是说，让拉氏量具有**偶宇称**（指上式右边的 $+$ 号），就能得到**宇称守恒的量子场论**

Poincaré 生成元算符的  $P$  变换

 现在讨论量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  的生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  在宇称守恒理论中的  $P$  变换

 将同态关系  $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$  用于宇称变换  $\mathcal{P}$ ，得

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a)$$

相应的无穷小变换为  $P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon)$ , 类似于 3.1.1 小节得到的  $U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)$

○○○●○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○

5

○○○○○○○○○○○○○○○○

oooooooooooo

Poincaré 生成元算符的  $P$  变换



 现在讨论量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  的生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  在宇称守恒理论中的  $P$  变换



将**同态关系**  $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$  用于宇称变换  $\mathcal{P}$ ，得

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a)$$



相应的无穷小变换为  $P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon)$ , 类似于 3.1.1 小节得到的  $U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)$



由此推出类似于  $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$  的 **P 变换规则**

$$P^{-1} J^{\mu\nu} P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P^{-1} P^\mu P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu P^\nu$$



从而,  $J^i \equiv \varepsilon^{ijk} J^{jk}/2$  和  $K^i \equiv J^{0i}$  在  $P$  变换下变成

$$P^{-1}J^i P = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}P^{-1}J^{jk}P = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{P}^j{}_l\mathcal{P}^k{}_m J^{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-\delta^j{}_l)(-\delta^k{}_m)J^{lm} = +J^i$$

$$P^{-1}K^i P = P^{-1}J^{0i}P = \mathcal{P}^0{}_0 \mathcal{P}^i{}_j J^{0j} = -\delta^i{}_j J^{0j} = -K^i$$

总角动量、动量和哈密顿量的  $P$  变换



写成三维矢量的形式，得

$$P^{-1}\mathbf{J}P = +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P = -\mathbf{K}$$



总角动量算符  $\mathbf{J}$  具有偶宇称，体现了它作为三维轴矢量的变换性质



因此角动量在宇称变换下不变



宇称守恒和宇称破坏

通常希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质

为了得到一个宇称守恒的量子场论，首先，需要让拉氏量中的自由部分在宇称变换下不变，这是容易做到的

其次，还得要求拉氏量中的相互作用部分也在宇称变换下不变，这一点并不平庸

尽管宇称在电磁相互作用和强相互作用中守恒，在弱相互作用中却遭到极大破坏

宇称守恒和宇称破坏

通常希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质

为了得到一个宇称守恒的量子场论，首先，需要让拉氏量中的自由部分在宇称变换下不变，这是容易做到的

其次，还得要求拉氏量中的相互作用部分也在宇称变换下不变，这一点并不平庸

尽管宇称在电磁相互作用和强相互作用中守恒，在弱相互作用中却遭到极大破坏

这个出乎意料的**现象**是 1956 年李政道和杨振宁对实验结果作理论分析时发现的

随后由吴健雄在实验中确证

 李政道和杨振宁因此获得

1957 年诺贝尔物理学奖

为了分析量子场论中的宇称守恒情况，我们需要知道各种量子场在  $P$  变换下的性质



李政道 (1926-)



杨振宁 (1922-)



吴健雄 (1912–1997)

oooooooooooo

oooooooooooo

○○○○

○○○○○○○○○○○○○○○○

oooooooooooo

## 复标量场产生湮灭算符的 $P$ 变换

下面先讨论**自由的复标量场**  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

  $\phi(x)$  的运动方程是 Klein-Gordon 方程  $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

宇称变换翻转动量方向,  $P$  变换对正标量玻色子  $\phi$  单粒子态  $|p^+\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$  的作用为  $P|p^+\rangle = \eta_P |-p^+\rangle$

$\eta_P$  是一个复的相位因子，满足  $|\eta_P| = 1$

出现  $\eta_P$  的原因是相差一个相位因子的态矢描述相同的物理

00

### 复标量场产生湮灭算符的 $P$ 变换

 下面先讨论**自由的复标量场**  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

  $\phi(x)$  的运动方程是 Klein-Gordon 方程  $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

宇称变换翻转动量方向,  $P$  变换对正标量玻色子  $\phi$  单粒子态  $|p^+\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$  的作用为  $P|p^+\rangle = \eta_P |-p^+\rangle$

$\eta_P$  是一个复的相位因子，满足  $|\eta_P| = 1$

 出现  $\eta_P$  的原因是相差一个相位因子的态矢描述相同的物理

 真空态在  $P$  变换下不变，故  $P|0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$P |\mathbf{p}^+\rangle = P^{-1} |\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_p} P^{-1} a_p^\dagger P |0\rangle$$

与  $P|\mathbf{p}^+\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  比较，推出产生湮灭算符的  $P$  变换

$$P^{-1}a_p^\dagger P = \eta_P a_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}a_p P = \eta_P^* a_{-p}$$

 第二式由第一式取厄米共轭得到:  $(P^{-1}a_p^\dagger P)^\dagger = (P^\dagger a_p^\dagger P)^\dagger = P^\dagger a_p P = P^{-1}a_p^\dagger P$

复标量场平面波展开式的  $P$  变换



另一方面， $P$  变换对反标量玻色子  $\bar{\phi}$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  的作用为  $P|\mathbf{p}^-\rangle = \tilde{\eta}_P |-\mathbf{p}^-\rangle$ ，出现另一个相位因子  $\tilde{\eta}_P$ ，同理推出

$$P^{-1}b_p^\dagger P = \tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}b_p P = \tilde{\eta}_P^* b_{-p}$$



复标量场  $\phi(x)$  的平面波展开式在  $P$  变换下化为

$$\begin{aligned} P^{-1}\phi(x)P &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \color{red}P^{-1}a_p P e^{-ip \cdot x} + \color{blue}P^{-1}b_p^\dagger P e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \color{red}\eta_P^* a_{-p} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \eta_P^* a_{\textcolor{brown}{p}} e^{-ip \cdot (\textcolor{violet}{p}x)} + \tilde{\eta}_P b_{\textcolor{brown}{p}}^\dagger e^{ip \cdot (\textcolor{violet}{p}x)} \right] \end{aligned}$$



 最后一步作了变量替换  $p \rightarrow -p$ ，并利用  $(\mathcal{P}p) \cdot x = p \cdot (\mathcal{P}x)$

复标量场的  $P$  变换

为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变，必须要求  $\eta_P$  和  $\tilde{\eta}_P$  满足关系式

$$\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$$

使得  $P^{-1}\phi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \eta_P^* a_p e^{-ip \cdot (\textcolor{red}{P}x)} + \tilde{\eta}_P b_p^\dagger e^{ip \cdot (\textcolor{red}{P}x)} \right] = \eta_P^* \phi(\textcolor{red}{P}x)$

故  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P = \eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)$$

即  $P^{-1}\phi(x)P$  与  $\phi(\mathcal{P}x)$  只相差一个常数因子  $\eta_P^*$

## 复标量场的 $P$ 变换

为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变，必须要求  $\eta_P$  和  $\tilde{\eta}_P$  满足关系式

$$\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$$

使得  $P^{-1}\phi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \eta_P^* a_p e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\eta}_P b_p^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] = \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x)$

故  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P = \eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)$$

即  $P^{-1}\phi(x)P$  与  $\phi(\mathcal{P}x)$  只相差一个常数因子  $\eta_P^*$

从而，作宇称变换之后的场  $\phi'(x') = P^{-1}\phi(x')P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x') = \eta_P^*\phi(x)$  也满足 **Klein-Gordon 方程**:  $(\partial'^2 + m^2)\phi'(x') = \eta_P^*(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

这样的话,  $b_p^\dagger$  和  $b_p$  的  $P$  变换  $P^{-1}b_p^\dagger P = \tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger$  和  $P^{-1}b_p P = \tilde{\eta}_P^* b_{-p}$  变成

$$P^{-1}b_p^\dagger P = \eta_P^* b_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}b_p P = \eta_P b_{-p}$$

### 拉氏量的 $P$ 变换

⚡ 现在讨论自由复标量场的拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$  的宇称变换性质

 这会涉及时空导数的宇称变换  $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$

 为便于表述，我们在形式上以时空导数的宇称变换定义  $P$  变换，

$$P^{-1} \partial_\mu P \equiv \partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad P^{-1} \partial^\mu P = \partial'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

于是，拉氏量中动能项算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P^{-1}\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)P &= P^{-1}\partial^\mu PP^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\partial_\mu PP^{-1}\phi(x)P \\ &= |\eta_P|^2 \mathcal{P}^\mu{}_\nu (\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \partial^\nu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_\rho\phi(\mathcal{P}x) = +\partial^\mu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_\mu\phi(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

### 拉氏量的 $P$ 变换

 现在讨论自由复标量场的拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$  的宇称变换性质

 这会涉及时空导数的宇称变换  $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

为了便于表述，我们在形式上以时空导数的宇称变换定义  $P$  变换，

$$P^{-1} \partial_\mu P \equiv \partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad P^{-1} \partial^\mu P = \partial'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

于是，拉氏量中动能项算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P^{-1}\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)P &= P^{-1}\partial^\mu PP^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\partial_\mu PP^{-1}\phi(x)P \\ &= |\eta_P|^2 \mathcal{P}^\mu{}_\nu (\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \partial^\nu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_\rho\phi(\mathcal{P}x) = +\partial^\mu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_\mu\phi(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

质量项算符  $\phi^\dagger \phi$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)P = P^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\phi(x)P = |\eta_P|^2\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x) = +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)$$

以上两式最右边表达式中的 + 号表明算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$  和  $\phi^\dagger \phi$  都具有偶宇称

因此，拉氏量满足  $P^{-1}\mathcal{L}(x)P = +\mathcal{L}(\mathcal{P}x)$ ，即在宇称变换下不变

# 守恒流算符的 $P$ 变换

在  $P$  变换下,  $U(1)$  守恒流算符  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$  变成

$$P^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi(x) P = iP^{-1} \phi^\dagger(x) P P^{-1} \overleftrightarrow{\partial^\mu} P P^{-1} \phi(x) P = \mathcal{P}^\mu \nu i\phi^\dagger(\mathcal{P}x) \overleftrightarrow{\partial^\nu} \phi(\mathcal{P}x)$$

符合  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$  作为**极矢量**的变换规则

# 守恒流算符的 $P$ 变换

在  $P$  变换下,  $U(1)$  守恒流算符  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$  变成

$$P^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi(x) P = iP^{-1} \phi^\dagger(x) PP^{-1} \overleftrightarrow{\partial^\mu} PP^{-1} \phi(x) P = \mathcal{P}^\mu \nu i\phi^\dagger(\mathcal{P}x) \overleftrightarrow{\partial^\nu} \phi(\mathcal{P}x)$$

符合  $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$  作为**极矢量**的变换规则

在**质心系**中考虑一对正反标量玻色子  $\phi \bar{\phi}$  组成的态

$$|\phi \bar{\phi}\rangle = \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$\Phi(\mathbf{p})$  是**动量空间中的波函数**

当**轨道角动量**的量子数为  $L$  时,  $\Phi(\mathbf{p})$  正比于**球谐函数**  $Y_{LM}(\theta, \phi)$ , 其中  $\theta$  和  $\phi$  分别是球坐标系中动量  $\mathbf{p}$  的**极角**和**方位角**

$-\mathbf{p}$  的极角为  $\pi - \theta$ , 方位角为  $\pi + \phi$

由  $Y_{LM}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-)^L Y_{LM}(\theta, \phi)$  得  $\Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p})$

# 轨道宇称和内禀宇称



于是,  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P |\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) P^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger P P^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger P |0\rangle = |\eta_P|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$



第三步作了变量替换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$



这表明  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  是  $P$  算符的本征态, 本征值  $(-)^L$  是可观测量, 称作  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的宇称

○○○○○○○○○○●○○○

○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○

00000

A horizontal row of 15 small circles, evenly spaced, used as a decorative element.

○○○○○○○○○○○○

## 轨道宇称和内禀宇称



于是,  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P |\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) P^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger P P^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger P |0\rangle = |\eta_P|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$



第三步作了变量替换  $p \rightarrow -p$



这表明  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  是  $P$  算符的本征态，本征值  $(-)^L$  是可观测量，称作  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  的宇称



宇称是一种相乘性量子数 (multiplicative quantum number)



杰矢的总宝称是各部分贡献的宝之称之积



波函数  $\Phi(\mathbf{p})$  对  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  宇称的贡献为  $(-)^L$ ，这部分称为**轨道宇称** (orbital parity)



扣除轨道宇称之后，剩下的部分称为内禀宇称 (intrinsic parity)



$|\phi\bar{\phi}\rangle$  的内禀宇称为 **+**，即一对正反标量玻色子的内禀宇称为**偶**

## 实标量场的 $P$ 变换

接下来讨论自由的实标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

 比较实标量场与复标量场的平面波展开式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在  $b_p = a_p$  的条件下进行，由此推出  $\eta_P = \tilde{\eta}_P = \eta_P^*$

于是，相位因子  $\eta_P$  是实数，满足  $\eta_P^2 = |\eta_P|^2 = 1$ ，故  $\eta_P = \pm 1$

## 实标量场的 $P$ 变换

接下来讨论自由的实标量场  $\phi(x)$ ，拉氏量为  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

 比较实标量场与复标量场的平面波展开式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在  $b_p = a_p$  的条件下进行，由此推出  $\eta_P = \tilde{\eta}_P = \eta_P^*$

于是，相位因子  $\eta_P$  是实数，满足  $\eta_P^2 = |\eta_P|^2 = 1$ ，故  $\eta_P = \pm 1$

若  $\eta_P = +1$ ，则实标量场  $\phi(x)$  是狭义的标量场，称为偶， $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = +\phi(\mathcal{P}x).$$

 若  $\eta_P = -1$ ，则称它是赝标量场，字称为奇， $P$  变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = -\phi(\mathcal{P}x)$$

 无论实标量场  $\phi(x)$  具有哪种宇称，拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  都在宇称变换下不变

 不过，与旋量场发生宇称守恒的相互作用时，宇称不同的实标量场  $\phi(x)$  具有不同的性质，可以通过实验来分辨

U(1) 整体对称性与宇称变换

 对于复标量场  $\phi(x)$ ，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的

如 2.4.3 小节所述, 自由的复标量场具有  $U(1)$  整体对称性  $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

相应的守恒荷算符  $Q$  满足  $[Q, \phi] = -q\phi$  (习题 2.4)，由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \dots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi$$

再利用  $e^{-A}Be^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[B, A^{(n)}]$ , 推出

$$e^{i\theta Q} \phi e^{-i\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\phi, (-i\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} [\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iq\theta)^n}{n!} \phi = e^{-iq\theta} \phi$$

U(1) 整体对称性与宇称变换

 对于复标量场  $\phi(x)$ ，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的

如 2.4.3 小节所述, 自由的复标量场具有  $U(1)$  整体对称性  $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

相应的守恒荷算符  $Q$  满足  $[Q, \phi] = -q\phi$  (习题 2.4)，由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \dots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi$$

再利用  $e^{-A}Be^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$ ，推出

$$e^{i\theta Q} \phi e^{-i\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\phi, (-i\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} [\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iq\theta)^n}{n!} \phi = e^{-iq\theta} \phi$$

 用  $Q$  和  $P$  定义一个新的幺正算符  $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$

 它满足  $P'^{-1} = P'^{\dagger} = P^{\dagger} e^{i\theta Q} = P^{-1} e^{i\theta Q}$ ，则复标量场  $\phi(x)$  的  $P'$  变换为

$$P'^{-1}\phi(x)P' = P^{-1}e^{i\theta Q}\phi(x)e^{-i\theta Q}P = e^{-iq\theta}P^{-1}\phi(x)P = e^{-iq\theta}\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x) = \eta_P'^*\phi(\mathcal{P}x)$$

其中  $\eta'_P \equiv e^{iq\theta} \eta_P$  是  $P'$  算符的相位因子

### 分立变换相位因子的任意性

尽管  $P'$  算符不是厄米的，它的作用与  $P$  算符的作用在实质上是相同的，能够将  $\phi(x)$  变换成  $\phi(Px)$ ，只相差一个相位因子  $\eta'_P$

因此可以用  $P'$  取代  $P$  作为宇称变换算符，而相位因子  $\eta'_P$  将取代原来的  $\eta_P$

由于  $U(1)$  变换参数  $\theta$  是任意的,  $\eta'_P = e^{iq\theta} \eta_P$  的取值也是任意的

### 分立变换相位因子的任意性

尽管  $P'$  算符不是厄米的，它的作用与  $P$  算符的作用在实质上是相同的，能够将  $\phi(x)$  变换成  $\phi(Px)$ ，只相差一个相位因子  $\eta'_P$

因此可以用  $P'$  取代  $P$  作为宇称变换算符，而相位因子  $\eta'_P$  将取代原来的  $\eta_P$

由于  $U(1)$  变换参数  $\theta$  是任意的,  $\eta'_P = e^{iq\theta} \eta_P$  的取值也是任意的

 另一方面，实标量场  $\phi(x)$  不具备 U(1) 整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性

 实标量场的  $U(1)$  荷  $q = 0$ ，守恒荷算符  $Q = 0$ ，因而  $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$  与  $P$  相同

### 分立变换相位因子的任意性

尽管  $P'$  算符不是厄米的，它的作用与  $P$  算符的作用在实质上是相同的，能够将  $\phi(x)$  变换成  $\phi(Px)$ ，只相差一个相位因子  $\eta'_P$

因此可以用  $P'$  取代  $P$  作为宇称变换算符，而相位因子  $\eta'_P$  将取代原来的  $\eta_P$

由于  $U(1)$  变换参数  $\theta$  是任意的,  $\eta'_P = e^{iq\theta} \eta_P$  的取值也是任意的

另一方面，实标量场  $\phi(x)$  不具备 U(1) 整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性

 实标量场的 U(1) 荷  $q = 0$ ，守恒荷算符  $Q = 0$ ，因而  $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$  与  $P$  相同

这个结论可以推广到其它分立对称性和其它量子场：

 分立变换的相位因子对于像复标量场这样的复场是任意的，对于像实标量场这样的自共轭场则是确定的

### 8.1.2 小节 标量场的 $T$ 变换

时空坐标的  $x^\mu$  的时间反演变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

这是一种**非固有反时向** Lorentz 变换

 将  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  变换为  $x'^\mu = (\mathcal{T}x)^\mu = (-t, \mathbf{x})$

 将  $\partial_\mu$  变换为  $\partial'_\mu \equiv (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

 将  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  变换为  $p'^\mu = (\mathcal{T}p)^\mu = (-E, \mathbf{p})$

 同时保持时空体积元不变， $d^4x' = |\det(\mathcal{T})| d^4x = d^4x$

 于是，只要拉氏量在时间反演下不变，满足  $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ ，系统就具有**时间反演对称性**

T 变换

在具有时间反演对称性的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的  $T$  变换  $|\Psi'\rangle = U(T)|\Psi\rangle = T|\Psi\rangle$ ，其中  $T \equiv U(T)$



  $T$  是自身的逆变换算符,  $T^{-1} \equiv T$



仿照上面关于  $P$  变换的讨论，根据同态关系，量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  满足

$$T^{-1}U(\Lambda, a)T = U^{-1}(\mathcal{T})U(\Lambda, a)U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}a)$$



由此推出  $T$  变换规则  $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = i\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}iP^\mu T = i\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$



 这里保留了推导过程中的虚数  $i$

# $T$ 变换

伞 在具有**时间反演对称性**的**量子理论**中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的  **$T$  变换**  $|\Psi'\rangle = U(T)|\Psi\rangle = \textcolor{red}{T}|\Psi\rangle$ ，其中  $\textcolor{red}{T} \equiv U(T)$

拖车  $T$  是**自身的逆变换算符**， $T^{-1} = T$

货车 仿照上面关于  $P$  变换的讨论，根据**同态关系**，量子 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$  满足

$$T^{-1}U(\Lambda, a)T = U^{-1}(T)U(\Lambda, a)U(T) = U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}a)$$

卡车 由此推出  **$T$  变换规则**  $\textcolor{magenta}{T}^{-1}\mathbf{i}J^{\mu\nu}T = \mathbf{i}\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $\textcolor{magenta}{T}^{-1}\mathbf{i}P^\mu T = \mathbf{i}\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$

货车 这里保留了推导过程中的**虚数  $i$**

⚠ 如果时间反演算符  $T$  与宇称算符  $P$  一样是**线性么正算符**，那么，

$$T^{-1}HT = T^{-1}P^0T = \mathcal{T}^0{}_0P^0 = -H$$

🚫 这意味着哈密顿量算符  $H$  在  $T$  变换下**发生改变**，导致理论**不具有**时间反演对称性，与我们的假设**矛盾**

🚫 因此， **$T$  不可能是线性么正算符**

反线性反幺正算符

 不过，对称变换在量子力学中不一定要用线性幺正算符表述，也可以用反线性 (antilinear) 反幺正 (antiunitary) 算符描述

一般地，在反线性反么正算符  $U$  的作用下，态矢  $|\Psi_1\rangle$  和  $|\Psi_2\rangle$  满足

$$U(\textcolor{brown}{a}|\Psi_1\rangle + \textcolor{blue}{b}|\Psi_2\rangle) = \textcolor{brown}{a}^* U |\Psi_1\rangle + \textcolor{blue}{b}^* U |\Psi_2\rangle, \quad \langle \textcolor{red}{U}\Psi_1 | \textcolor{red}{U}\Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^*$$

其中  $a$  和  $b$  是任意复数，第一个等式代表反线性，第二个等式代表反么正

 反线性意味着  $-i|\Psi_1\rangle = U^{-1}U(-i|\Psi_1\rangle) = U^{-1}iU|\Psi_1\rangle$ , 即

$$U^{-1} \mathbf{i} U = -\mathbf{i}$$

 对任意复数  $a$ ，则有  $U^{-1}aU = a^*$

### 反线性反幺正算符

不过，对称变换在量子力学中不一定要用线性幺正算符表述，也可以用反线性(antilinear)反幺正(antiunitary)算符描述

一般地，在反线性反幺正算符  $U$  的作用下，态矢  $|\Psi_1\rangle$  和  $|\Psi_2\rangle$  满足

$$U(\textcolor{brown}{a}|\Psi_1\rangle + \textcolor{blue}{b}|\Psi_2\rangle) = \textcolor{brown}{a}^*U|\Psi_1\rangle + \textcolor{blue}{b}^*U|\Psi_2\rangle, \quad \langle \textcolor{red}{U}\Psi_1 | \textcolor{red}{U}\Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^*$$

其中  $a$  和  $b$  是任意复数，第一个等式代表反线性，第二个等式代表反么正

 反线性意味着  $-i|\Psi_1\rangle = U^{-1}U(-i|\Psi_1\rangle) = U^{-1}iU|\Psi_1\rangle$ , 即

$$U^{-1} \mathbf{i} U = -\mathbf{i}$$

对任意复数  $a$ ，则有  $U^{-1}aU = a^*$

 反线性反幺正算符  $U$  的厄米共轭算符  $U^\dagger$  通过下式定义,

$$\langle \Psi_1 | \textcolor{blue}{U}^\dagger \Psi_2 \rangle \equiv \langle \textcolor{violet}{U} \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^* = \langle \Psi_2 | \textcolor{violet}{U} \Psi_1 \rangle$$

因而反幺正意味着  $\langle \Psi_1 | U^{-1} U \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \langle U \Psi_1 | U \Psi_2 \rangle^* = \langle \Psi_1 | U^\dagger U \Psi_2 \rangle$

故  $U^{-1} = U^\dagger$ ，这个等式与线性么正算符满足的等式相同



现在将  $T$  算符定义为反线性反么正算符，满足

$$T^{-1}\mathbf{i}T = -\mathbf{i}, \quad T^{-1} = T^\dagger$$



那么,  $T^{-1}J^{\mu\nu}T = i\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}P^\mu T = i\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$  表明生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  的  $T$  变换为

$$T^{-1} J^{\mu\nu} T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1} P^\mu T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$$



即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}\mathbf{H}T = +\mathbf{H}, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}$$



现在将  $T$  算符定义为反线性反幺正算符，满足

$$T^{-1}\mathbf{i}T = -\mathbf{i}, \quad T^{-1} = T^\dagger$$



那么,  $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = iT^\mu_\rho T^\nu_\sigma J^{\rho\sigma}$  和  $T^{-1}iP^\mu T = iT^\mu_\nu P^\nu$  表明生成元算符  $J^{\mu\nu}$  和  $P^\mu$  的  $T$  变换为

$$T^{-1} J^{\mu\nu} T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1} P^\mu T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$$



即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}\mathbf{H}T = +\mathbf{H}, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}$$



从而，哈密顿量算符  $H$  在时间反演下不变，满足  $[H, T] = 0$ ，符合理论具有时间反演对称性的假设



动量算符  $\mathbf{P}$  和总角动量算符  $\mathbf{J}$  在  $T$  变换下分别反转成  $-\mathbf{P}$  和  $-\mathbf{J}$



时间反演变换相当于逆着时间方向进行观察，因而动量和角动量的方向都会反转。

复标量场平面波展开式的  $T$  变换



下面讨论**自由复标量场**  $\phi(x)$



$T$  变换会翻转粒子态对应的动量方向，因而产生湮灭算符的  $T$  变换为

$$T^{-1}a_{\mathbf{p}}^\dagger T = \eta_T a_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p}} T = \eta_T^* a_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger T = \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}} T = \tilde{\eta}_T^* b_{-\mathbf{p}}$$



$\eta_T$  和  $\tilde{\eta}_T$  是两个模为 1 的相位因子

### 复标量场平面波展开式的 $T$ 变换



下面讨论**自由复标量场**  $\phi(x)$



$T$  变换会翻转粒子态对应的动量方向，因而产生湮灭算符的  $T$  变换为

$$T^{-1}a_{\mathbf{p}}^\dagger T = \eta_T a_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p}} T = \eta_T^* a_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger T = \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}} T = \tilde{\eta}_T^* b_{-\mathbf{p}}$$



$\eta_T$  和  $\tilde{\eta}_T$  是两个模为 1 的相位因子



复标量场平面波展开式的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}\phi(x)T &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \textcolor{brown}{T}^{-1} a_{\mathbf{p}} \textcolor{blue}{T} T^{-1} e^{-ip \cdot x} T + \textcolor{teal}{T}^{-1} b_{\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{red}{T} T^{-1} e^{ip \cdot x} T \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \eta_T^* \textcolor{brown}{a}_{-\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} + \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \eta_T^* a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot (\textcolor{brown}{T}x)} + \tilde{\eta}_T b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot (\textcolor{brown}{T}x)} \right] \end{aligned}$$



最后一步作了变量替换  $p \rightarrow -p$ ，并利用  $(\mathcal{P}p) \cdot x = p \cdot (\mathcal{P}x) = -p \cdot (\mathcal{T}x)$

## 复标量场的 $T$ 变换

为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变,  $T^{-1}\phi(x)T$  与  $\phi(\mathcal{T}x)$  最多只能相差一个常数因子, 因此必须要求

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T$$

使得  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^*\phi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T\phi^\dagger(\mathcal{T}x)$$

8888888888888888

www.wiley.com

000000000000

00000

888888888888888888

00000000000000

复标量场的  $T$  变换

为了保持  $\phi(x)$  的运动方程形式不变,  $T^{-1}\phi(x)T$  与  $\phi(\mathcal{T}x)$  最多只能相差一个常数因子, 因此必须要求

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T$$

 使得  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^*\phi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T\phi^\dagger(\mathcal{T}x)$$

为方便表述，在形式上以时空导数的时间反演变换定义  $T$  变换，

$$T^{-1}\partial_\mu T \equiv \partial'_\mu = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad T^{-1}\partial^\mu T = \partial'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

那么算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $T$  变换是

$$T^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) T = |\eta_T|^2 \mathcal{T}^\mu{}_\nu (\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \partial^\nu \phi^\dagger(\mathcal{T}x) \partial_\rho \phi(\mathcal{T}x) = +\partial^\mu \phi^\dagger(\mathcal{T}x) \partial_\mu \phi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)T = |\eta_T|^2\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\phi(\mathcal{T}x) = +\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\phi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1} i \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) T = -|\eta_T|^2 \mathcal{T}^\mu{}_\nu i \phi^\dagger(\mathcal{T}x) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi(\mathcal{T}x) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu i \phi^\dagger(\mathcal{T}x) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi(\mathcal{T}x)$$

★ 自由复标量场的拉氏量在时间反演变换下不变，满足  $T^{-1}\mathcal{L}(x)T = +\mathcal{L}(\mathcal{T}x)$

实标量场的  $T$  变换

令  $b_p = a_p$ ，就得到**自由实标量场**  $\phi(x)$  的情况，此时  $\eta_T = \tilde{\eta}_T = \eta_T^*$

故  $\eta_T^2 = |\eta_T|^2 = 1$ ，有

$$\eta_T = \pm 1$$

因此，存在两类实标量场

一类实标量场具有  $\eta_T = +1$ ，相应的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = +\phi(\mathcal{T}x)$$

另一类实标量场具有  $\eta_T = -1$ ，相应的  $T$  变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = -\phi(\mathcal{T}x)$$

无论哪一类实标量场  $\phi(x)$ , 自由拉氏量都具有时间反演不变性



## 8.1.3 小节 标量场的 $C$ 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反  
 $U(1)$  守恒荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

### 8.1.3 小节 标量场的 $C$ 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换将正反粒子互相转换，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反U(1)守恒荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度没有影响

4 在具有电荷共轭对称性的量子理论中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢  $|\Psi\rangle$  的线性幺正变换

$$|\Psi'\rangle = \textcolor{red}{C} |\Psi\rangle$$

 2 称为  $C$  变换

③  $C$  是自身的逆变换算符，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C$$

因而  $C$  算符是厄米的



# 复标量场的 $C$ 变换

对于自由复标量场  $\phi(x)$ ， $C$  变换将正粒子态转化成反粒子态， $C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle$

$\eta_C$  是相位因子，真空态在  $C$  变换下不变，满足  $C |0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$\sqrt{2E_p} \textcolor{brown}{C}^{-1} a_p^\dagger \textcolor{brown}{C} |0\rangle = C \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle = C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_C b_p^\dagger |0\rangle$$

$$\textcolor{brown}{C}^{-1} a_p^\dagger C = \eta_C b_p^\dagger, \quad \textcolor{teal}{C}^{-1} a_p C = \eta_C^* b_p$$

第一个等式等价于  $a_p^\dagger = \eta_C C b_p^\dagger C^{-1}$ ，因而  $\eta_C^* a_p^\dagger = |\eta_C|^2 C b_p^\dagger C^{-1} = C b_p^\dagger C^{-1}$ ，即

$$\textcolor{brown}{C}^{-1} b_p^\dagger C = \eta_C^* a_p^\dagger, \quad \textcolor{teal}{C}^{-1} b_p C = \eta_C a_p$$

复标量场的  $C$  变换

对于自由复标量场  $\phi(x)$ ,  $C$  变换将正粒子态转化成反粒子态,  $C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle$

■  $\eta_C$  是相位因子，真空态在  $C$  变换下不变，满足  $C|0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$\sqrt{2E_p} C^{-1} a_p^\dagger C |0\rangle = C \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle = C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_C b_p^\dagger |0\rangle$$

$$C^{-1}a_p^\dagger C = \eta_C b_p^\dagger, \quad C^{-1}a_p C = \eta_C^* b_p$$

第一个等式等价于  $a_p^\dagger = \eta_C C b_p^\dagger C^{-1}$ ，因而  $\eta_C^* a_p^\dagger = |\eta_C|^2 C b_p^\dagger C^{-1} = C b_p^\dagger C^{-1}$ ，即

$$C^{-1}b_p^\dagger C = \eta_C^* a_p^\dagger, \quad C^{-1}b_p C = \eta_C a_p$$

于是，复标量场  $\phi(x)$  的  $C$  变换为

$$\begin{aligned} C^{-1}\phi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\textcolor{teal}{C^{-1}a_p C e^{-ip \cdot x}} + \textcolor{brown}{C^{-1}b_p^\dagger C e^{ip \cdot x}}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\eta_C^* \textcolor{teal}{b_p} e^{-ip \cdot x} + \eta_C^* \textcolor{brown}{a_p^\dagger} e^{ip \cdot x}) = \eta_C^* \phi^\dagger(x) \end{aligned}$$

可见,  $C$  变换使  $\phi(x)$  与其厄米共轭场  $\phi^\dagger(x)$  相互转换:

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\phi^\dagger(x)C = \eta_C\phi(x)$$

注意到等时对易关系，算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $C$  变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = + \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x),$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x)$$

$$C^{-1}i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2 i\phi(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi(x)$$

因此，自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下不变，满足  $C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x)$

内禀 C 宇称

注意到等时对易关系，算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $C$  变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = +\partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x),$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x)$$

$$C^{-1}i\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2 i\phi(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)$$

因此，自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下不变，满足  $C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x)$

对正反标量玻色子态  $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  作  $C$  变换，得

$$C |\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) C^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger C C^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger C |0\rangle = |\eta_C|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$$[a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \rightarrow = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \leftarrow \text{变量替换 } \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$$

$$\Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p}) \rightarrow = (-)^L \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle$$

内禀 C 宇称

注意到等时对易关系，算符  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$  和  $i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $C$  变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = +\partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x),$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x).$$

$$C^{-1}i\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2 i\phi(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)$$

因此，自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下不变，满足  $C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x)$

对正反标量玻色子态  $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$  作  $C$  变换，得

$$\begin{aligned}
C|\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) C^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{brown}{C} C^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{teal}{C} |0\rangle = |\eta_C|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \textcolor{brown}{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{teal}{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\
&= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \textcolor{teal}{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{brown}{b}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\
&= (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle
\end{aligned}$$

  $|\phi\bar{\phi}\rangle$  是  $C$  算符的本征态, 本征值  $(-)^L$  是可观测量, 称为  $C$  宇称 ( $C$ -parity)

■ 扣除波函数  $\Phi(p)$  贡献的  $(-)^L$  因子之后，剩下的  $C$  宇称为  $+$

即一对正反标量玻色子的内禀  $C$  宇称为偶

实标量场的  $C$  变换

对于自由实标量场， $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$

💡  $C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x)$  和  $C^{-1}\phi^\dagger(x)C = \eta_C\phi(x)$  表明  $\eta_C = \eta_C^*$

故  $\eta_C^2 = |\eta_C|^2 = 1$ , 有  $\eta_C = \pm 1$

这是  $C$  宇称的两种取值，也就是说，存在两类实标量场

一类实标量场具有偶的  $C$  宇称,  $\eta_C = +1$ , 相应的  $C$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = +\phi(x)$$

另一类实标量场具有奇的  $C$  宇称,  $\eta_C = -1$ , 相应的  $C$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = -\phi(x)$$

无论实标量场  $\phi(x)$  具有哪种  $C$  宇称，自由拉氏量都具有电荷共轭不变性

## 8.2 节 旋量场的分立变换

### 8.2.1 小节 旋量场的 $C$ 变换



现在讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $C$  变换

$\Rightarrow$   $C$  变换在互换正反粒子的同时，不改变动量  $p$  和螺旋度  $\lambda = \pm$ ，因此将正费米子态  $|p^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$  转化成反费米子态  $|p^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ ，

$$C |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_C |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$$

$\zeta_C$  是相位因子

## 8.2 节 旋量场的分立变换

### 8.2.1 小节 旋量场的 $C$ 变换



现在讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $C$  变换

$C$  变换在互换正反粒子的同时，不改变动量  $p$  和螺旋度  $\lambda = \pm$ ，因此将正费米子态  $|p^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$  转化成反费米子态  $|p^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ ，

$$C |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_C |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$$

$\zeta_C$  是相位因子，由此推出

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger C = \zeta_C b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} C = \zeta_C^* b_{\mathbf{p},\lambda}, \quad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger C = \zeta_C^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} C = \zeta_C a_{\mathbf{p},\lambda}$$

$\psi(x)$  平面波展开式的  $C$  变换为

$$\begin{aligned} C^{-1}\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{teal}{C}^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{brown}{C}^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger \textcolor{brown}{C} e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_{\textcolor{teal}{C}}^* u(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{teal}{b}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_{\textcolor{brown}{C}}^* v(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{brown}{a}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$

### 螺旋态关系式

为了得到  $\psi(x)$  的电荷共轭场，需要探讨旋量系数  $u(p, \lambda)$  和  $v(p, \lambda)$  之间的关系

 在 Weyl 表象中，对  $\bar{u}(p, \lambda)$  和  $\bar{v}(p, \lambda)$  进行转置，得

$$\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

 另一方面，按照螺旋态的具体形式， $i\sigma^2$  对  $\xi_\lambda^*(p)$  的作用为

$$i\sigma^2 \xi_+^*(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 - ip^2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ -(|\mathbf{p}| + p^3) \end{pmatrix} = -\xi_-(\mathbf{p}) \quad (1)$$

$$\textcolor{red}{i\sigma^2}\xi_-^*(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| + p^3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} = +\xi_+(\mathbf{p}) \quad (2)$$

其中归一化因子  $N \equiv [2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)]^{-1/2}$ ，归纳起来，得

$$i\sigma^2 \xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \quad i\sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$$

## 电荷共轭场



引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$



就可以导出平面波旋量系数的关系式

$$\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$

电荷共轭场



### 引入旋量空间中的电荷共轭矩阵

$$\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$



就可以导出平面波旋量系数的关系式

$$\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$



于是,  $\psi(x)$  的  $C$  变换化为

$$\begin{aligned} C^{-1}\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_C^* u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_C^* \mathcal{C} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] = \zeta_C^* \psi^{\mathcal{C}}(x) \end{aligned}$$



这里  $\psi^C(x) \equiv \mathcal{C}\bar{\psi}^\text{T}(x)$  便是  $\psi(x)$  的电荷共轭场

## 电荷共轭矩阵的性质



现在研究电荷共轭矩阵  $C$  的性质



利用  $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 $\gamma^0$  的厄米性、 $\gamma^2$  的反厄米性和  $\gamma^2 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^2$ ，有

$$\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C},$$

$$c^\dagger c = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 = -(\gamma^0)^2 (\gamma^2)^2 = 1$$



可见， $C$  是正矩阵，满足

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$$

## 电荷共轭矩阵的性质



现在研究电荷共轭矩阵  $C$  的性质



利用  $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 $\gamma^0$  的厄米性、 $\gamma^2$  的反厄米性和  $\gamma^2 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^2$ ，有

$$\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C},$$

$$c^\dagger c = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 = -(\gamma^0)^2 (\gamma^2)^2 = 1$$



可见， $C$  是么正矩阵，满足

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$$



 Pauli 矩阵满足  $\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = i\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^1 = -(\sigma^1)^T$ 、 $\sigma^2\sigma^2\sigma^2 = \sigma^2 = -(\sigma^2)^T$  和  $\sigma^2\sigma^3\sigma^2 = i\sigma^1\sigma^2 = -\sigma^3 = -(\sigma^3)^T$ ，归纳得到  $\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2 = \mathbf{1}^T$  和  $\sigma^2\sigma\sigma^2 = -\sigma^T$ ，因此

$$\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T, \quad \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$$

oooooooooooooooooooo      oooo

○○○○○○○○○○

○○○○●○○○○○○

5

○○○○○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○○○

Dirac 矩阵的电荷共轭变换

利用  $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$  和  $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$  推出

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} & \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \\ \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 & \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} & (\bar{\sigma}^\mu)^T \\ (\sigma^\mu)^T & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

即得  $\gamma^\mu$  和  $\gamma^5$  关于  $C$  的相似变换性质

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T, \quad \mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \gamma^5$$

 由于  $c^{-1} = -c$ ，这两个式子等价于

$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad \mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T \mathcal{C} = \gamma^5$$

## $\psi^c(x)$ 的运动方程

如果 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  携带电荷  $Q$ ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

对上式取厄米共轭，再右乘  $\gamma^0$ ，得

$$0 = \psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger (-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m] \gamma^0 = \bar{\psi} [-\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置，推出  $[-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$

## $\psi^c(x)$ 的运动方程



如果 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  携带电荷  $Q$ ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$



对上式取厄米共轭，再右乘  $\gamma^0$ ，得

$$0 = \psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger (-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m] \gamma^0 = \bar{\psi} [-\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$



转置，推出  $[-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T \equiv 0$



利用  $C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$ ，将上式化为

$$0 = [\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} (\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}] \bar{\psi}^T = \mathcal{C}^{-1} [\gamma^\mu (\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m] \bar{\psi}^T$$



从而得到电荷共轭场  $\psi^C(x)$  的运动方程

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^C = 0$$



对比  $\psi(x)$  的运动方程，可以看出  $\psi^C(x)$  确实携带相反的电荷  $-Q$



同理,  $\psi^C(x)$  携带的任何 U(1) 守恒荷都与  $\psi(x)$  相反

$\psi(x)$  和  $\bar{\psi}(x)$  的  $C$  变换



根据  $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$  和  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$



电荷共轭场  $\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^\text{T}(x)$  的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C} \bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} \mathcal{C}^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T \\ &= [\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T = -(\mathcal{C} \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (\mathcal{C}^T \psi)^T\end{aligned}$$



即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) C$$

$\psi(x)$  和  $\bar{\psi}(x)$  的  $C$  变换

根据  $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$  和  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

电荷共轭场  $\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$  的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C} \bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} C^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 C^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T C \gamma^0 \psi]^T \\ &= [C C^{-1} (\gamma^0)^T C \gamma^0 \psi]^T = - (C \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (C^T \psi)^T\end{aligned}$$

A small icon of a movie camera, indicating a video recording or film-related context.

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) C$$

于是  $C^{-1}\bar{\psi}C = C^\dagger \psi^\dagger C \gamma^0 = (\textcolor{violet}{C^{-1}\psi C})^\dagger \gamma^0 = (\zeta_C^* \textcolor{violet}{\psi}^C)^\dagger \gamma^0 = \zeta_C \bar{\psi}^C = \zeta_C \psi^T C$

也就是说, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  及其 Dirac 共轭场  $\bar{\psi}(x)$  的  $C$  变换是

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x) = \zeta_C^*\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x) = \zeta_C\psi^T(x)\mathcal{C}$$

仿照  $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) C$  的推导, 由  $C\bar{u}^T(p, \lambda) = v(p, \lambda)$  和  $C\bar{v}^T(p, \lambda) = u(p, \lambda)$  得

$$\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) = u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) = v^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C}$$

### 一般旋量双线性型的 $C$ 变换

 考虑一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中  $\Gamma$  是旋量空间中的任意  $4 \times 4$  矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma\textcolor{violet}{C}^{-1}\psi\textcolor{violet}{C} = |\zeta_C|^2\psi^T\textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{violet}{C}\bar{\psi}^T = \psi^T\textcolor{brown}{C}\Gamma\textcolor{brown}{C}\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\textcolor{teal}{C}^T\Gamma^T\textcolor{teal}{C}^T\psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号

一般旋量双线性型的  $C$  变换

 考虑一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中  $\Gamma$  是旋量空间中的任意  $4 \times 4$  矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma\textcolor{violet}{C}^{-1}\psi\textcolor{violet}{C} = |\zeta_C|^2\psi^T\textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{violet}{C}\bar{\psi}^T = \psi^T\textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{violet}{C}\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\textcolor{teal}{C}^T\Gamma^T\textcolor{teal}{C}^T\psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号

从而, 由  $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$  得到  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  的  $C$  变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\mathcal{C}}\psi(x)$$

其中  $\Gamma^C \equiv C^{-1}\Gamma^T C$  可视为矩阵  $\Gamma$  的电荷共轭变换

# 一般旋量双线性型的 $C$ 变换

考虑一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ , 其中  $\Gamma$  是旋量空间中的任意  $4 \times 4$  矩阵, 则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma\textcolor{violet}{C}^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2 \psi^T \textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{violet}{C}\bar{\psi}^T = \psi^T C\Gamma C \bar{\psi}^T = -\bar{\psi} \textcolor{teal}{C}^T \Gamma^T \textcolor{teal}{C}^T \psi$$

最后一步进行了转置, 需要注意的是, 转置两个旋量场会交换两者的位置, 为了与反对易关系相匹配, 必须引进一个额外的负号

从而, 由  $\textcolor{teal}{C}^T = C^{-1} = -C$  得到  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  的  $C$  变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\textcolor{blue}{C}^{-1}\Gamma^T\textcolor{violet}{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\textcolor{blue}{C}}\psi(x)$$

其中  $\Gamma^{\textcolor{blue}{C}} \equiv \textcolor{violet}{C}^{-1}\Gamma^T\textcolor{violet}{C}$  可视为矩阵  $\Gamma$  的电荷共轭变换

根据  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C} = -\gamma^\mu$  和  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T\mathcal{C} = \gamma^5$ , 有

$$\mathbf{1}^{\textcolor{blue}{C}} = \mathcal{C}^{-1}\mathbf{1}^T\mathcal{C} = +1, \quad (\text{i}\gamma^5)^{\textcolor{blue}{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\text{i}\gamma^5)^T\mathcal{C} = +\text{i}\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu)^{\textcolor{blue}{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad (\gamma^\mu\gamma^5)^{\textcolor{blue}{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^T\mathcal{C} = +\gamma^\mu\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\textcolor{blue}{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^T\mathcal{C} = +\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad (\sigma^{\mu\nu})^{\textcolor{blue}{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^T\mathcal{C} = -\sigma^{\mu\nu}$$



于是，各种旋量双线性型的  $C$  变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x),$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1} \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) C = -\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x)$$



# 旋量双线性型的 $C$ 变换



于是，各种旋量双线性型的  $C$  变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x),$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$



拉氏量中的动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  在  $C$  变换下化为

$$\begin{aligned} C^{-1}i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= i\psi^T C \gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T = -i\psi^T C^{-1} \gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T = i\psi^T (\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\psi}^T \\ &= -i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi = -i\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$



最后的表达式中第一项是全散度，全时空积分后对作用量没有贡献，可以丢弃



因而上式表明动能项算符在  $C$  变换下不变



自由 Dirac 旋量场的拉氏量  $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$  具有电荷共轭不变性



对于 7.3 节的手征旋量场  $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$ ，算符  $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} P_L \psi = \bar{\psi}(1 - \gamma^5)\psi/2$  和  $\bar{\psi}_L \psi_R = \bar{\psi} P_R \psi = \bar{\psi}(1 + \gamma^5)\psi/2$  在  $C$  变换下不变，满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x),$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)C = +\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)$$

手征旋量场算符的  $C$  变换

对于 7.3 节的手征旋量场  $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$ ，算符  $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} P_L \psi = \bar{\psi}(1 - \gamma^5)\psi/2$  和  $\bar{\psi}_L \psi_R = \bar{\psi} P_R \psi = \bar{\psi}(1 + \gamma^5)\psi/2$  在  $C$  变换下不变，满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x),$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)C = +\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)$$

另一方面，左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi$  和

右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = \bar{\psi} \gamma^\mu P_R \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi$  的  $C$  变换为

$$C^{-1} \bar{\psi}_{\text{L}}(x) \gamma^\mu \psi_{\text{L}}(x) C = -\bar{\psi}_{\text{R}}(x) \gamma^\mu \psi_{\text{R}}(x)$$

$$C^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) C = -\bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x)$$

两者在  $C$  变换下相互转化，并出现一个负号

 在弱相互作用中，左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而电荷共轭对称性遭到破坏

正反费米子系统的  $C$  变换



 在质心系中考虑一对正反费米子  $\psi\bar{\psi}$  组成的系统，当轨道角动量和总自旋角动量的量子数分别为  $L$  和  $S$  时，态矢表达为

$$|\psi\bar{\psi}\rangle_{\textcolor{teal}{L},\textcolor{brown}{S}} = \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},\lambda'}^\dagger |0\rangle$$



 波函数  $\Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda')$  满足  $\Phi(-\mathbf{p}, \lambda', \lambda) = (-)^L (-)^{S+1} \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda')$



  $(-)^{S+1}$  因子来自交换  $\lambda$  和  $\lambda'$  时 Clebsch-Gordan 系数的性质

正反费米子系统的  $C$  变换

在质心系中考虑一对正反费米子  $\psi\bar{\psi}$  组成的系统，当轨道角动量和总自旋角动量的量子数分别为  $L$  和  $S$  时，态矢表达为

$$|\psi\bar{\psi}\rangle_{\textcolor{teal}{L},\textcolor{brown}{S}} = \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},\lambda'}^\dagger |0\rangle$$



波函数  $\Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda')$  满足  $\Phi(-\mathbf{p}, \lambda', \lambda) = (-)^L (-)^{S+1} \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda')$



$(-)^{s+1}$  因子来自交换  $\lambda$  和  $\lambda'$  时 Clebsch-Gordan 系数的性质



$|\psi\bar{\psi}\rangle_{L,S}$  的  $C$  变换为

$$\begin{aligned}
C |\psi \bar{\psi}\rangle_{L,S} &= \sum_{\lambda \lambda'} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') \textcolor{brown}{C}^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger C C^{-1} b_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger \textcolor{blue}{C} |0\rangle \\
&= |\zeta_C|^2 \sum_{\lambda \lambda'} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') \textcolor{brown}{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger \textcolor{blue}{a}_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger |0\rangle \\
&= - \sum_{\lambda \lambda'} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') a_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle
\end{aligned}$$



最后一步利用反对易关系  $\{a_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = 0$  交换了两个产生算符

# 正反费米子系统的内禀 $C$ 宇称

作变量替换  $p \rightarrow -p$  和  $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ ，利用  $\Phi(-p, \lambda', \lambda) = (-)^{L+S+1} \Phi(p, \lambda, \lambda')$ ，得

$$\begin{aligned}
C |\psi\bar{\psi}\rangle_{L,S} &= - \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') a_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= - \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}, \lambda', \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger |0\rangle \\
&= (-)^{L+S} \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger |0\rangle \\
&= (-)^{L+S} |\psi\bar{\psi}\rangle_{L,S}
\end{aligned}$$

正反费米子系统的内禀  $C$  宇称

作变量替换  $p \rightarrow -p$  和  $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ ，利用  $\Phi(-p, \lambda', \lambda) = (-)^{L+S+1} \Phi(p, \lambda, \lambda')$ ，得

$$\begin{aligned}
C |\psi \bar{\psi}\rangle_{L,S} &= - \sum_{\lambda \lambda'} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') a_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= - \sum_{\lambda \lambda'} \int d^3 p \Phi(-\mathbf{p}, \lambda', \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger |0\rangle \\
&= (-)^{L+S} \sum_{\lambda \lambda'} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}, \lambda, \lambda') a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p}, \lambda'}^\dagger |0\rangle \\
&= (-)^{L+S} |\psi \bar{\psi}\rangle_{L,S}
\end{aligned}$$

可见,  $|\psi\bar{\psi}\rangle_{L,S}$  的 **C** 宇称为  $(-)^{L+S}$

 扣除波函数  $\Phi(p, \lambda, \lambda')$  对  $C$  宇称的贡献  $(-)^{L+S+1}$  之后

发现一对正反费米子的内禀  $C$  宇称为奇

### 8.2.2 小节 Majorana 旋量场

 如果  $\psi(x)$  与它的电荷共轭场相同,  $\psi(x) = \psi^C(x)$ , 即满足  
**自共轭条件**

$$\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$$

那么,  $\psi(x)$  就是一种纯中性的场, 不携带任何  $U(1)$  守恒荷, 称为 Majorana 旋量场, 上式称为 Majorana 条件

于是, Majorana 旋量场满足  $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$



# Ettore Majorana (1906–?)

### 8.2.2 小节 Majorana 旋量场

如果  $\psi(x)$  与它的电荷共轭场相同,  $\psi(x) = \psi^C(x)$ , 即满足自共轭条件

$$\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$$

那么,  $\psi(x)$  就是一种纯中性的场, 不携带任何  $U(1)$  守恒荷, 称为 Majorana 旋量场, 上式称为 Majorana 条件

于是, Majorana 旋量场满足  $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$

根据  $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$ , Majorana 条件等价于  $\bar{\psi}(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$  (1906-?)

这个等式右边没有出现  $\psi^\dagger(x)$ ，而出现  $\psi^T(x)$ ，表明  $\bar{\psi}(x)$  与  $\psi(x)$  线性相关

因此,  $\bar{\psi}(x)$  并不是独立于  $\psi(x)$  的场变量, 这一点与 Dirac 旋量场不同

根据前面的讨论,  $\psi^C(x)$  的平面波展开式为



Ettore Majorana

$$\psi^C(x) = \zeta_C C^{-1} \psi(x) C = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

## Majorana 费米子

将上式与  $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$  比较

可知 Majorana 条件  $\psi(x) = \psi^C(x)$  意味着  $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$

因此，Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0$$

Majorana 费米子

将上式与  $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$  比较

可知 Majorana 条件  $\psi(x) = \psi^C(x)$  意味着  $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$

因此，Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0$$

类似于实标量场，Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子

因而正费米子与反费米子相同，称为 Majorana 费米子

  $C^{-1}a_{p,\lambda}C = \zeta_C^*b_{p,\lambda}$ 、 $C^{-1}b_{p,\lambda}C = \zeta_C a_{p,\lambda}$  和  $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$  表明  $\zeta_C = \zeta_C^*$

故  $\zeta_C = \pm 1$ ，也就是说，Majorana 旋量场的  $C$  宇称要么为偶，要么为奇。

## Majorana 旋量场双线性型的 $C$ 变换

对于 Majorana 旋量场,  $C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x)$  和  $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x)$  化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}(x)$$

 在  $C$  变换下，由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2 \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$

即非平庸的  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  算符的  $C$  守恒必须为偶

## Majorana 旋量场双线性型的 $C$ 变换

对于 Majorana 旋量场,  $C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x)$  和  $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x)$  化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}(x)$$

在  $C$  变换下，由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2 \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$

即非平庸的  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  算符的  $C$  宇称必须为偶

 这表明 Majorana 旋量场不能构成  $C$  宇称为奇的算符  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  和  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ ，即

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = 0$$

由 Majorana 旋量场构成的**非平庸**双线性型则具有与 Dirac 旋量场**相同的**  $C$  变换规则

## 自由 Majorana 旋量场拉氏量

自由 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T \mathcal{C} \psi$$

应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中  $\psi^T$  扮演的角色跟  $\psi$  相同

如果将前后两个旋量场分别标记为  $\psi_1$  和  $\psi_2$ ，动量项算符可化为

$$\begin{aligned}\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T)(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu \psi_1\end{aligned}$$

# 自由 Majorana 旋量场拉氏量

自由 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T \mathcal{C} \psi$$

应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中  $\psi^T$  扮演的角色跟  $\psi$  相同

如果将前后两个旋量场分别标记为  $\psi_1$  和  $\psi_2$ ，动量项算符可化为

$$\begin{aligned}\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T)(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu \psi_1\end{aligned}$$

质量项算符可化为  $\psi_1^T \mathcal{C} \psi_2 = (\psi_1^T \mathcal{C} \psi_2)^T = -\psi_2^T \mathcal{C}^T \psi_1 = \psi_2^T \mathcal{C} \psi_1$ ，则

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} = -\frac{i}{2}(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - \frac{1}{2} m \psi_2^T \mathcal{C}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{1}{2} m \psi_1^T \mathcal{C}$$

  $\psi_1$  和  $\psi_2$  都是  $\psi$ ，因而

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

 根据  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu$  和  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$

💡 Euler-Lagrange 方程给出  $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu + m \psi^T \mathcal{C}$

对上式转置，并利用  $(\gamma^\mu)^T C^T = -C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C = C \gamma^\mu = -C^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \partial_\mu \psi + m \mathcal{C}^T \psi = \mathcal{C}^T (-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi)$$

## 自由 Majorana 旋量场运动方程

根据  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu$  和  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$

💡 Euler-Lagrange 方程给出  $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu + m \psi^T \mathcal{C}$

对上式转置，并利用  $(\gamma^\mu)^T C^T = -C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C = C \gamma^\mu = -C^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \partial_\mu \psi + m \mathcal{C}^T \psi = \mathcal{C}^T (-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi)$$

可见，自由的 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  也满足 Dirac 方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

这与上述平面波展开式

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

相容

## 8.2.3 小节 旋量场的 $P$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $P$  变换

 宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度  $\lambda$  的符号

 平面波旋量系数  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  都是用螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  表达出来的

 而宇称变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$

### 8.2.3 小节 旋量场的 $P$ 变换

下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $P$  变换

宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度  $\lambda$  的符号

平面波旋量系数  $u(p, \lambda)$  和  $v(p, \lambda)$  都是用螺旋态  $\xi_\lambda(p)$  表达出来的

而宇称变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$

4.4.2 小节推出的  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$  表明,  $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$  和  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  都是本征值方程  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$  的归一化解, 因而两者至多相差一个相位因子

这个相位因子的具体形式与螺旋态  $\xi_\lambda(p)$  的约定有关

 将螺旋态  $\xi_+(p)$  化为

$$\begin{aligned}\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}| + p^3}{p^1 - ip^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{(|\mathbf{p}| + p^3)(p^1 + ip^2)}{(p^1)^2 + (p^2)^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

oooooooooooo

○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○

5

oooooooooooo

## 螺旋态的宇称变换相位因子

利用  $(|\mathbf{p}| + p^3)(|\mathbf{p}| - p^3) = |\mathbf{p}|^2 - (p^3)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2$ ，推出

$$\begin{aligned}\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1+ip^2)}{(p^1)^2+(p^2)^2} (p^1-ip^2) \\ \frac{p^1+ip^2}{|\mathbf{p}|-p^3} (|\mathbf{p}|-p^3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \frac{p^1+ip^2}{|\mathbf{p}|-p^3} \begin{pmatrix} p^1-ip^2 \\ |\mathbf{p}|-p^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|-p^3)}} \frac{p^1+ip^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} \begin{pmatrix} p^1-ip^2 \\ |\mathbf{p}|-p^3 \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},+} \xi_-(-\mathbf{p})\end{aligned}$$

8888888888888888

0000000000

000000000000

00000

8888888888888888

000000000000

螺旋态的宇称变换相位因子

 利用  $(|\mathbf{p}| + p^3)(|\mathbf{p}| - p^3) = |\mathbf{p}|^2 - (p^3)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2$ ，推出

$$\begin{aligned}\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1+ip^2)}{(p^1)^2+(p^2)^2}(p^1-ip^2) \\ \frac{p^1+ip^2}{|\mathbf{p}|-p^3}(|\mathbf{p}|-p^3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \frac{p^1+ip^2}{|\mathbf{p}|-p^3} \begin{pmatrix} p^1-ip^2 \\ |\mathbf{p}|-p^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|-p^3)}} \frac{p^1+ip^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} \begin{pmatrix} p^1-ip^2 \\ |\mathbf{p}|-p^3 \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},+} \xi_-(-\mathbf{p})\end{aligned}$$

其中  $\kappa_{p,+}$  是相位因子  $\kappa_{p,\lambda} \equiv \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}}$  在  $\lambda = +$  时的特例

再由  $|\kappa_{\mathbf{p},\lambda}|^2 = \kappa_{\mathbf{p},+}^* \kappa_{\mathbf{p},+} = 1$  推出  $\xi_-(-\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},+}^* \xi_+(\mathbf{p})$ ，故

$$\xi_-(\mathbf{p}) = \kappa_{-\mathbf{p}, +}^* \xi_+(-\mathbf{p}) = \frac{-p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \xi_+(-\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p}, -} \xi_+(-\mathbf{p})$$

归纳起来，有  $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ ，可见  $\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}$  就是想要得到的相位因子

$\gamma^0 u(p, \lambda)$  和  $\gamma^0 v(p, \lambda)$

由于  $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ ，Weyl 表象中的  $u(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $v(\mathbf{p}, \lambda)$  满足

$$\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_\lambda(\mathbf{p}) \color{red}{\xi_\lambda(\mathbf{p})} \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \color{red}{\xi_\lambda(\mathbf{p})} \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} \begin{pmatrix} \omega_\lambda(-\mathbf{p}) \color{red}{\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})} \\ \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \color{red}{\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ \lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$= \kappa_{\mathbf{p}, -\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_\lambda(-\mathbf{p}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

## 注意到

$$\kappa_{\mathbf{p}, -\lambda} = \frac{-\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = -\frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = -\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^*$$

有

$$\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda), \quad \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = -\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda)$$

### 产生湮灭算符的 $P$ 变换



为得到自洽的宇称变换结果，将正反费米子态  $|p^+, \lambda\rangle$  和  $|p^-, \lambda\rangle$  的  $P$  变换设为

$$P|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^+, -\lambda\rangle, \quad P|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^-, -\lambda\rangle$$



其中  $\zeta_P$  和  $\tilde{\zeta}_P$  是两个相位因子，从而推出  $a_{p,\lambda}^\dagger$  和  $a_{p,\lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger, \quad P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} P = \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} a_{-\mathbf{p},-\lambda}$$



以及  $b_{p,\lambda}^\dagger$  和  $b_{p,\lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger, \quad P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} P = \tilde{\zeta}_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} b_{-\mathbf{p},-\lambda}$$

### 产生湮灭算符的 $P$ 变换

 为得到自治的宇称变换结果，将正反费米子态  $|p^+, \lambda\rangle$  和  $|p^-, \lambda\rangle$  的  $P$  变换设为

$$P|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^+, -\lambda\rangle, \quad P|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* |-\mathbf{p}^-, -\lambda\rangle$$

其中  $\zeta_P$  和  $\tilde{\zeta}_P$  是两个相位因子，从而推出  $a_{p,\lambda}^\dagger$  和  $a_{p,\lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \zeta_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger, \quad P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} P = \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} a_{-\mathbf{p},-\lambda}$$

以及  $b_{p,\lambda}^\dagger$  和  $b_{p,\lambda}$  的  $P$  变换

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger, \quad P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} P = \tilde{\zeta}_P^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} b_{-\mathbf{p},-\lambda}$$

 Dirac 旋量场平面波展开式的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P^{-1}\psi(x)P &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{brown}{P}^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} P e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_{\textcolor{brown}{P}}^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{brown}{a}_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{teal}{b}_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$

### $\psi(x)$ 的 $P$ 变换

作变量替换  $p \rightarrow -p$  和  $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，得

$$\begin{aligned}
& P^{-1} \psi(x) P \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right]
\end{aligned}$$

最后一步用到  $\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda)$  和  $\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = -\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda)$

### $\psi(x)$ 的 $P$ 变换

作变量替换  $p \rightarrow -p$  和  $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，得

$$\begin{aligned}
& P^{-1} \psi(x) P \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_P^* \gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right]
\end{aligned}$$

最后一步用到  $\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda)$  和  $\gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) = -\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda)$

为了保持  $\psi(x)$  的运动方程形式不变，必须要求  $\zeta_P^* = -\tilde{\zeta}_P$ ，使  $b_{p,\lambda}^\dagger$  和  $b_{p,\lambda}$  的  $P$  变换化为  $P^{-1}b_{p,\lambda}^\dagger P = -\zeta_P^* \kappa_{-p,-\lambda}^* b_{-p,-\lambda}^\dagger$  和  $P^{-1}b_{p,\lambda} P = -\zeta_P \kappa_{-p,-\lambda} b_{-p,-\lambda}$

从而  $\psi(x)$  的  $P$  变换为  $P^{-1}\psi(x)P = D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x)$

其中  $D(\mathcal{P}) \equiv \zeta_P^* \gamma^0$  是旋量空间中的宇称变换矩阵

### $\bar{\psi}(x)$ 的 $P$ 变换

 宇称变换矩阵  $D(\mathcal{P}) = \zeta_P^* \gamma^0$  在 4.1 节中写作  $D(\mathcal{P}) = \zeta \gamma^0$ ，比较得  $\zeta_P^* = \zeta$

现在，作宇称变换后， $\psi'(x') = P^{-1}\psi(x')P = D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x') = D(\mathcal{P})\psi(x)$  也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = [\mathrm{i}\gamma^\mu (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]D(\mathcal{P})\psi(x) \\
&= D(\mathcal{P})[\mathrm{i}\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\
&= D(\mathcal{P})[\mathrm{i}\mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) = D(\mathcal{P})(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

第三步用到  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

### $\bar{\psi}(x)$ 的 $P$ 变换

 宇称变换矩阵  $D(\mathcal{P}) = \zeta_P^* \gamma^0$  在 4.1 节中写作  $D(\mathcal{P}) = \zeta \gamma^0$ ，比较得  $\zeta_P^* = \zeta$

现在，作宇称变换后， $\psi'(x') = P^{-1}\psi(x')P = D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x') = D(\mathcal{P})\psi(x)$  也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = [\mathrm{i} \gamma^\mu (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] D(\mathcal{P}) \psi(x) \\
&= D(\mathcal{P}) [\mathrm{i} \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu D(\mathcal{P}) (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \psi(x) \\
&= D(\mathcal{P}) [\mathrm{i} \mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \psi(x) = D(\mathcal{P}) (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

第三步用到  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

餅乾 宇称变换矩阵  $D(\mathcal{P})$  是幺正的，满足  $D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = \zeta_P \gamma^0$

由  $P^{-1}\psi^\dagger(x)P = [P^{-1}\psi(x)P]^\dagger = [\zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x)]^\dagger = \zeta_P\psi^\dagger(\mathcal{P}x)\gamma^0$  得

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P = P^{-1}\psi^\dagger(x)P\gamma^0 = \zeta_P\psi^\dagger(\mathcal{P}x)\gamma^0\gamma^0 = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\zeta_P\gamma^0$$

即  $\bar{\psi}(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})$$

oooooooooooooooooooo

从而，一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)P = P^{-1}\bar{\psi}(x)P\Gamma P^{-1}\psi(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\textcolor{blue}{D^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})}\psi(\mathcal{P}x)$$

利用在 4.1 节推导出来的结果,  $D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}$

$$D^{-1}(\mathcal{P})i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -i\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

### 旋量双线性型的 $P$ 变换

从而，一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  的  $P$  变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)P = P^{-1}\bar{\psi}(x)P\Gamma P^{-1}\psi(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\textcolor{blue}{D}^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x)$$

利用在 4.1 节推导出来的结果,  $D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}$

$$D^{-1}(\mathcal{P})i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -i\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

得到

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)P = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)P = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)i\gamma^5\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) P = \cancel{P^\mu}_\rho \cancel{P^\nu}_\sigma \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \sigma^{\rho\sigma} \psi(\mathcal{P}x)$$

因此,  $\bar{\psi}\psi$  是狭义的标量算符,  $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$  是赝标量算符

  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  是极矢量算符,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$  是轴矢量算符

# 手征旋量双线性型的 $P$ 变换



## 进一步推出

$$P^{-1}\bar{\psi}_{\text{R}}(x)\psi_{\text{L}}(x)P = \bar{\psi}_{\text{L}}(\mathcal{P}x)\psi_{\text{R}}(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1}\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)P = \bar{\psi}_{\text{R}}(\mathcal{P}x)\psi_{\text{L}}(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$



左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$  和右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$  在  $P$  变换下相互转化



在弱相互作用中，左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏

# 手征旋量双线性型的 $P$ 变换

进一步推出

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) P = \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) P = \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$

左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$  和右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$  在  $P$  变换下相互转化

在弱相互作用中，左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏

动能项算符  $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$  的  $P$  变换为

$$\begin{aligned} P^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) P &= i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu D(\mathcal{P}) (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{P}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{P}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在宇称变换下不变

正反费米子态的  $P$  变换



在质心系中考虑一对正反费米子  $\psi\bar{\psi}$  组成的系统



设两个粒子的螺旋度相反，轨道角动量量子数为  $L$  的态矢为

$$|\psi\bar{\psi}\rangle = \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle, \quad \Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p})$$



相应的  $P$  变换是

$$\begin{aligned}
P |\psi \bar{\psi}\rangle &= \sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}) \textcolor{brown}{P^{-1}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P P^{-1} b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger P |0\rangle \\
&= -|\zeta_P|^2 \sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}) \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* a_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= -\sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger |0\rangle
\end{aligned}$$



最后一步作了变量替换  $p \rightarrow -p$  和  $\lambda \rightarrow -\lambda$

内禀字称

 利用  $\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* = \frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = 1$ , 推出

$$\begin{aligned} P |\psi\bar{\psi}\rangle &= - \sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle \\ &= -(-)^L \sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle = (-)^{L+1} |\psi\bar{\psi}\rangle \end{aligned}$$

可见,  $|\psi\bar{\psi}\rangle$  的总宇称为  $(-)^{L+1}$ , 包含轨道宇称  $(-)^L$  和内禀宇称  $-$

也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇

内禀宇称

利用  $\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* = \frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = 1$ , 推出

$$\begin{aligned} P |\psi\bar{\psi}\rangle &= - \sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle \\ &= -(-)^L \sum_{\lambda} \int d^3 p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle = (-)^{L+1} |\psi\bar{\psi}\rangle \end{aligned}$$

可见,  $|\psi\bar{\psi}\rangle$  的总宇称为  $(-)^{L+1}$ , 包含轨道宇称  $(-)^L$  和内禀宇称  $-$

也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇

对于自由的 Majorana 旋量场  $\psi(x)$ ,  $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$ , 则  $\tilde{\zeta}_P = \zeta_P$

从而  $\zeta_P^* = -\tilde{\zeta}_P = -\zeta_P$ ，因此

$$\zeta_P = \pm i$$

故 Majorana 旋量场的宇称是虚数

### 8.2.4 小节 旋量场的 $T$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $T$  变换

 时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度  $\lambda$  不变

 另一方面， $T$  变换是反幺正的，将一个复数变成它的复共轭

因此  $T$  变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$ ，它们存在 8.2.1 小节推出的关系

$$i\sigma^2 \xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \quad i\sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$$

### 8.2.4 小节 旋量场的 $T$ 变换

 下面讨论自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $T$  变换

 时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度  $\lambda$  不变

 另一方面,  $T$  变换是反幺正的, 将一个复数变换成它的复共轭

因此  $T$  变换联系着螺旋态  $\xi_\lambda(\mathbf{p})$  和  $\xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$ ，它们存在 8.2.1 小节推出的关系

$$i\sigma^2 \xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \quad i\sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$$

对第一式取复共轭，利用  $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ ，得

$$i\sigma^2 \xi_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = -\lambda \kappa_{\mathbf{p}, -\lambda}^* \xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$$

故

$$i\sigma^2 \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p})$$

  $i\sigma^2$  出现在矩阵  $C\gamma^5 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$  中

### 产生湮灭算符的 $T$ 变换

  $c\gamma^5$  对平面波旋量系数的作用是

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = -\lambda \kappa_{\mathbf{p}, -\lambda}^* \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_\lambda^*(-\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(-\mathbf{p}) \xi_\lambda^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

由  $\kappa_{p,-\lambda} = -\kappa_{p,\lambda}^*$  得  $\kappa_{p,-\lambda}^* = -\kappa_{p,\lambda}$ ，从而推出

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda), \quad \mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$$

### 产生湮灭算符的 $T$ 变换

### $c\gamma^5$ 对平面波旋量系数的作用是

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = -\lambda \kappa_{\mathbf{p}, -\lambda}^* \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_\lambda^*(-\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(-\mathbf{p}) \xi_\lambda^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

由  $\kappa_{p,-\lambda} = -\kappa_{p,\lambda}^*$  得  $\kappa_{p,-\lambda}^* = -\kappa_{p,\lambda}$ ，从而推出

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda), \quad \mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$$

为得到**自治时间反演变换**结果，设正反费米子态  $|p^+, \lambda\rangle$  和  $|p^-, \lambda\rangle$  的  $T$  变换为

$$T|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* |-\mathbf{p}^+, -\lambda\rangle, \quad T|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* |-\mathbf{p}^-, -\lambda\rangle$$

其中  $\zeta_T$  和  $\tilde{\zeta}_T$  是两个相位因子，由此得到  $a_{p,\lambda}^\dagger$ 、 $a_{p,\lambda}$ 、 $b_{p,\lambda}^\dagger$  和  $b_{p,\lambda}$  的  $T$  变换

$$T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* a_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} T = \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}$$

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* b_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} T = \tilde{\zeta}_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}$$

### 平面波展开式的 $T$ 变换



注意到  $T^{-1}iT = -i$ ，Dirac 旋量场平面波展开式的  $T$  变换是

$$\begin{aligned}
& T^{-1} \psi(x) T \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} T^{-1} \left[ u(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{brown}{a}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{teal}{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] T \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} u^*(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{brown}{a}_{-\mathbf{p}, \lambda} e^{ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(\mathbf{p}, \lambda) \textcolor{teal}{b}_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right]
\end{aligned}$$



第三步作了变量替换  $p \rightarrow -p$



第四步用到  $\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda)$  和  $\mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$

### $\psi(x)$ 的 $T$ 变换

为了让  $\psi(x)$  的运动方程具有时间反演对称性，

$$T^{-1}\psi(x)T = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right]$$

与  $\psi(Tx)$  最多只能相差一个常数矩阵，因而必须要求

$$\zeta_T^* = \tilde{\zeta}_T$$

使得  $T^{-1}b_{p,\lambda}^\dagger T = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-p,\lambda}^* b_{-p,\lambda}^\dagger$  和  $T^{-1}b_{p,\lambda} T = \tilde{\zeta}_T^* \lambda \kappa_{-p,\lambda} b_{-p,\lambda}$  化为

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* b_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} T = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p},\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}$$

从而  $\psi(x)$  的  $T$  变换为

$$T^{-1}\psi(x)T = D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$$

其中  $D(\mathcal{T}) \equiv \zeta_T^* C \gamma^5$  是旋量空间中的**时间反演矩阵**

### $\bar{\psi}(x)$ 的 $T$ 变换

由  $D^\dagger(\mathcal{T})D(\mathcal{T}) = \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^\dagger \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 = |\zeta_T|^2 \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^5 = 1$  可知

时间反演矩阵  $D(\mathcal{T})$  是么正的，满足  $D^{-1}(\mathcal{T}) = D^\dagger(\mathcal{T}) = \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$

对  $T^{-1}\psi(x)T = D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$  取厄米共轭，得

$$T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\textcolor{blue}{D}^\dagger(\mathcal{T}) = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\textcolor{blue}{\zeta}_{\mathcal{T}}\gamma^5\mathcal{C}^{-1}$$

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $T$ 变换

由  $D^\dagger(\mathcal{T})D(\mathcal{T}) = \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^\dagger \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 = |\zeta_T|^2 \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^5 = 1$  可知

时间反演矩阵  $D(\mathcal{T})$  是么正的，满足  $D^{-1}(\mathcal{T}) = D^\dagger(\mathcal{T}) = \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$

对  $T^{-1}\psi(x)T = D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$  取厄米共轭，得

$$T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)D^\dagger(\mathcal{T}) = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$$

由  $\gamma^0$  的厄米性有  $(\gamma^0)^* = (\gamma^0)^T$ ，由  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$  得  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T = -\gamma^0 \mathcal{C}^{-1}$

再利用  $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$  推出

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T = T^{-1}\psi^\dagger(x)T(\gamma^0)^* = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^0 \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$$

即  $\bar{\psi}(x)$  的  $T$  变换为  $T^{-1}\bar{\psi}(x)T = \bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})$

# $\bar{\psi}(x)$ 的 $T$ 变换

由  $D^\dagger(\mathcal{T})D(\mathcal{T}) = \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^\dagger \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 = |\zeta_T|^2 \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^5 = 1$  可知

时间反演矩阵  $D(\mathcal{T})$  是么正的，满足  $D^{-1}(\mathcal{T}) = D^\dagger(\mathcal{T}) = \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$

对  $T^{-1}\psi(x)T = D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$  取厄米共轭，得

$$T^{-1}\psi^\dagger(x)T = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)D^\dagger(\mathcal{T}) = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$$

由  $\gamma^0$  的厄米性有  $(\gamma^0)^* = (\gamma^0)^T$ ，由  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$  得  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T = -\gamma^0 \mathcal{C}^{-1}$

再利用  $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$  推出

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T = T^{-1}\psi^\dagger(x)T(\gamma^0)^* = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T = \psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^0 \zeta_T \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}$$

即  $\bar{\psi}(x)$  的  $T$  变换为  $T^{-1}\bar{\psi}(x)T = \bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})$

据此，一般旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$  的  $T$  变换是

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)T = T^{-1}\bar{\psi}(x)TT^{-1}\Gamma TT^{-1}\psi(x)T = \bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})\Gamma^* D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x)$$

即问题归结为计算  $D^{-1}(\mathcal{T})\Gamma^* D(\mathcal{T})$

旋量空间中矩阵的  $T$  变换



根据  $\gamma^5$  的厄米性、 $\gamma^i$  的反厄米性、 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$  和  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T \mathcal{C} = \gamma^5$ ，有

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^5)^{\text{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = (\gamma^5)^3 = \gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^0)^* D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\text{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^5 = \gamma^0$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^i)^* D(\mathcal{T}) = -\gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^i)^{\text{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^i \gamma^5 = -\gamma^i$$

## 旋量空间中矩阵的 $T$ 变换



根据  $\gamma^5$  的厄米性、 $\gamma^i$  的反厄米性、 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$  和  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T \mathcal{C} = \gamma^5$ ，有

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^5)^{\text{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = (\gamma^5)^3 = \gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^0)^* D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^0)^{\text{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^5 = \gamma^0$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^i)^* D(\mathcal{T}) = -\gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^i)^{\textcolor{teal}{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^i \gamma^5 = -\gamma^i$$



进而得到

$$D^{-1}(\mathcal{T})\mathbf{1}^*D(\mathcal{T}) = +\mathbf{1}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(i\gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = -i\gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu \gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T}) D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\sigma^{\mu\nu})^* D(\mathcal{T}) = -\frac{i}{2} D^{-1}(\mathcal{T})[(\gamma^\mu)^*(\gamma^\nu)^* - (\gamma^\nu)^*(\gamma^\mu)^*] D(\mathcal{T})$$

$$= -\frac{i}{2} \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\mu) = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

### 旋量双线性型的 $T$ 变换



于是，各种旋量双线性型的  $T$  变换为

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)T = +\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\psi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)T = -\bar{\psi}(\mathcal{T}x)i\gamma^5\psi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(\mathcal{T}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)T = +\bar{\psi}_R(\mathcal{T}x)\psi_L(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)T = +\bar{\psi}_{\text{L}}(\mathcal{T}x)\psi_{\text{R}}(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{T}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{T}x)$$

$$T^{-1} \bar{\psi}_{\text{R}}(x) \gamma^\mu \psi_{\text{R}}(x) T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_{\text{R}}(\mathcal{T}x) \gamma^\nu \psi_{\text{R}}(\mathcal{T}x)$$

### 拉氏量和运动方程的时间反演对称性

 动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演下不变

## 拉氏量和运动方程的时间反演对称性



动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$



因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演变换下不变



由于  $T$  变换是反线性的，Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  的时间反演对称性意味着运动方程  $[-i(\gamma^\mu)^* \partial'_\mu - m]\psi'(x') = 0$  成立，这一点在下面的推导中得到验证：

$$\begin{aligned}
[-i(\gamma^\mu)^*\partial'_\mu - m]\psi'(x') &= [-i(\gamma^\mu)^*(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]T^{-1}\psi(x')T \\
&= D(\mathcal{T})[-iD^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(\mathcal{T}x') \\
&= D(\mathcal{T})[i\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\
&= D(\mathcal{T})(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0
\end{aligned}$$

0000000000

000000000000

00000

www.english-test.net

00000000000000

## 拉氏量和运动方程的时间反演对称性



动能项算符  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  的  $T$  变换为

$$\begin{aligned} T^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$



因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演变换下不变



由于  $T$  变换是反线性的，Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  的时间反演对称性意味着运动方程  $[-i(\gamma^\mu)^* \partial'_\mu - m]\psi'(x') = 0$  成立，这一点在下面的推导中得到验证：

$$\begin{aligned}
[-i(\gamma^\mu)^*\partial'_\mu - m]\psi'(x') &= [-i(\gamma^\mu)^*(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]T^{-1}\psi(x')T \\
&= D(\mathcal{T})[-iD^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(\mathcal{T}x') \\
&= D(\mathcal{T})[i\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\
&= D(\mathcal{T})(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0
\end{aligned}$$



对于自由的 Majorana 旋量场  $\psi(x)$ ,  $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$ , 则  $\zeta_T = \tilde{\zeta}_T = \zeta_T^*$ , 故

$$\zeta_T = \pm 1$$

oooooooooooo

○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○

5

○○○○○○○○○○○○○○○○

●○○○○○○○○○○○○

### 8.3 节 矢量场的分立变换

### 8.3.1 节 有质量矢量场的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 变换



接下来讨论自由有质量复矢量场  $A^\mu(x)$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换



$$\text{拉氏量为 } \mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu$$



用极化矢量  $\varepsilon^\mu(p, \lambda)$  ( $\lambda = \pm, 0$ ) 表达的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[ \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

### 8.3 节 矢量场的分立变换

### 8.3.1 节 有质量矢量场的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 变换



接下来讨论自由有质量复矢量场  $A^\mu(x)$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换



$$\text{拉氏量为 } \mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu$$



用**极化矢量**  $\varepsilon^\mu(p, \lambda)$  ( $\lambda = \pm, 0$ ) 表达的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[ \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$



宇称变换联系着  $\varepsilon^\mu(p, \lambda)$  和  $\varepsilon^\mu(-p, -\lambda)$ ，根据极化矢量的具体形式，有

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, +) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ -p^1 p^3 - i p^2 |\mathbf{p}| \\ -p^2 p^3 + i p^1 |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} \\ &= -\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -) = \mathcal{P}^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, -)\end{aligned}$$

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-) = -\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p},+)$$



宇称变换与极化矢量



此外还有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, \mathbf{0}) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0 p^1 \\ -p^0 p^2 \\ -p^0 p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{0})$$



因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda)$$



此外还有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, \mathbf{0}) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0 p^1 \\ -p^0 p^2 \\ -p^0 p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{0})$$



因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda)$$



时间反演变换联系着  $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$  和  $\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, \lambda)$ ，有

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}| |\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ -p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ -p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, +)$$

时间反演变换与极化矢量



还有

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^{\mu}_{\nu} \varepsilon^{\nu}(\mathbf{p}, -)$$

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0 p^1 \\ -p^0 p^2 \\ -p^0 p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix} = -\mathcal{T}^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, 0)$$



以此推出时间反演变换与极化矢量的关系

$$(-)^{1+\lambda} \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, \lambda) = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda)$$

## 产生湮灭算符的分立变换

类似于标量场和旋量场的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换规律,  $C^{-1}A^\mu(x)C$ 、 $P^{-1}A^\mu(x)P$  和  $T^{-1}A^\mu(x)T$  应当分别正比于  $A^{\mu\dagger}(x)$ 、 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$  和  $\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$

为此，将产生湮灭算符的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换表达成

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger C = \xi_C b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,$$

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C = \xi_C^* b_{\mathbf{p},\lambda}$$

$$C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger C = \xi_C^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,$$

$$C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C = \xi_C a_{\mathbf{p},\lambda}$$

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \xi_P a_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger,$$

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P = \xi_P^*a_{-\mathbf{p},-\lambda}$$

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \xi_P^* b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger,$$

$$P^{-1}b_{p,\lambda}P = \xi_P b_{-p,-\lambda}$$

$$T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \xi_T(-)^{1+\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T = \xi_T^*(-)^{1+\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}$$

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \xi_T^*(-)^{1+\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} T = \xi_T(-)^{1+\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}$$

其中  $\xi_C$ 、 $\xi_P$  和  $\xi_T$  是相位因子



从而推出平面波展开式的分立变换

$$\begin{aligned}
& C^{-1} A^\mu(x) C \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger C e^{ip \cdot x}] \\
&= \xi_C^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}] \\
& P^{-1} A^\mu(x) P \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} P e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P e^{ip \cdot x}] \\
&= \xi_P^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}] \\
&= \xi_P^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)}] \\
&= \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)}]
\end{aligned}$$

## $A^\mu(x)$ 的分立变换



以及

$$\begin{aligned}
& T^{-1} A^\mu(x) T \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} T^{-1} [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}] T \\
&= \xi_T^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [(-)^{1+\lambda} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, \lambda} e^{ip \cdot x} + (-)^{1+\lambda} \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-ip \cdot x}] \\
&= \xi_T^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [(-)^{1+\lambda} \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + (-)^{1+\lambda} \varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)}] \\
&= \xi_T^* \mathcal{T}^\mu_\nu \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)}]
\end{aligned}$$



$$C^{-1}A^\mu(x)C = \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), \quad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C = \xi_C A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P = \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T = \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)$$

场强张量的分立变换

根据形式上的表达式  $P^{-1}\partial^\mu P = \partial'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial^\nu$  和  $T^{-1}\partial^\mu T = \partial'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu$

场强张量  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x) - \partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)] = \xi_C^*F^{\mu\nu\dagger}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)] = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

0000000000000000 00

0000000000

000000000000

00000

888888888888888888

000000000000

场强张量的分立变换

根据形式上的表达式  $P^{-1}\partial^\mu P = \partial'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial^\nu$  和  $T^{-1}\partial^\mu T = \partial'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu$

场强张量  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x) - \partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)] = \xi_C^* F^{\mu\nu\dagger}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)] = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

**动能项算符**  $F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu}$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换为

$$C^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)C = |\xi_C|^2 F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu\dagger}(x) = +F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)$$

$$\begin{aligned} P^{-1} F_{\mu\nu}^\dagger(x) F^{\mu\nu}(x) P &= |\xi_P|^2 F_{\alpha\beta}^\dagger(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\nu \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\ &= +F_{\mu\nu}^\dagger(\mathcal{P}x) F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1} F_{\mu\nu}^\dagger(x) F^{\mu\nu}(x) T &= |\xi_T|^2 F_{\alpha\beta}^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\nu \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) \\ &= +F_{\mu\nu}^\dagger(\mathcal{T}x) F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

# 对偶场强张量的分立变换

由  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  得

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \mathcal{P}^\rho{}_\tau \mathcal{P}^\sigma{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \delta^\alpha{}_\tau \delta^\beta{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \end{aligned}$$

同理有  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$

对偶场强张量的分立变换

由  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  得

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \mathcal{P}^\rho{}_\tau \mathcal{P}^\sigma{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \delta^\alpha{}_\tau \delta^\beta{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \end{aligned}$$

同理有  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$

从而，对偶场强张量  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}/2$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换是

$$C^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) C = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C^{-1} F_{\rho\sigma}(x) C = \xi_C^* \tilde{F}^{\mu\nu\dagger}(x)$$

$$\begin{aligned} P^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) P &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P^{-1} F_{\rho\sigma}(x) P = \frac{1}{2} \xi_P^* \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\frac{1}{2} \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) = -\xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T^{-1}F_{\rho\sigma}(x)T = \frac{1}{2}\xi_T^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\frac{1}{2}\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x) = -\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

可见,  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $P$ 、 $T$  变换性质与  $F^{\mu\nu}$  不同, 相差一个负号



有质量实矢量场的分立变换



质量项算符  $A_\mu^\dagger A^\mu$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换是

$$C^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) C = |\xi_C|^2 A_\mu(x) A^{\mu\dagger}(x) = + A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)P = |\xi_P|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = + A_\mu^\dagger(\mathcal{P}x)A^\mu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A_u^\dagger(x)A^\mu(x)T = |\xi_T|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = \textcolor{blue}{+} A_u^\dagger(\mathcal{T}x)A^\mu(\mathcal{T}x)$$



因此，由动能项和质量项组成的自由有质量复矢量场拉氏量在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下都是不变的

000000000000

00000

888888888888888888

000000000000

有质量实矢量场的分立变换



质量项算符  $A_\mu^\dagger A^\mu$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换是

$$C^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) C = |\xi_C|^2 A_\mu(x) A^{\mu\dagger}(x) = + A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A^\dagger_\mu(x) A^\mu(x) P = |\xi_P|^2 A^\dagger_\rho(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = + A^\dagger_\mu(\mathcal{P}x) A^\mu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A_\mu^\dagger(x)A^\mu(x)T = |\xi_T|^2 A_o^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = + A_u^\dagger(\mathcal{T}x)A^\mu(\mathcal{T}x)$$



因此，由动能项和质量项组成的自由有质量复矢量场拉氏量在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下都是不变的



对于自由有质量实矢量场,  $A^{\mu\dagger}(x) \equiv A^\mu(x)$ , 故  $\xi_C \equiv \xi_C^*$ 、 $\xi_P \equiv \xi_P^*$ 、 $\xi_T \equiv \xi_T^*$ ,

$$\xi_C \equiv \pm 1, \quad \xi_P \equiv \pm 1, \quad \xi_T \equiv \pm 1$$



当  $\xi_P = +1$  时,  $A^\mu(x)$  是极矢量场, 满足  $P^{-1}A^\mu(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$



 当  $\xi_P = -1$  时,  $A^\mu(x)$  是轴矢量场, 满足  $P^{-1}A^\mu(x)P = -\mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$



无论  $\xi_C$ 、 $\xi_P$  和  $\xi_T$  取  $\pm 1$  中的哪些值，自由有质量实矢量场的拉氏量在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下也都是不变的

### 8.3.2 节 电磁场的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 变换

 相比于有质量矢量场，无质量矢量场的物理极化矢量只有  $\varepsilon^\mu(p, +)$  和  $\varepsilon^\mu(p, -)$  两个，但  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质是类似的

自由无质量复矢量场  $A^\mu(x)$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换为 (习题 8.3)

$$C^{-1}A^\mu(x)C = \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), \quad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C = \xi_C A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P = \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T = \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)$$

 对于自由无质量实矢量场,  $\xi_C$ 、 $\xi_P$  和  $\xi_T$  的取值只能是  $\pm 1$

### 8.3.2 节 电磁场的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 变换

 相比于有质量矢量场，无质量矢量场的物理极化矢量只有  $\varepsilon^\mu(p, +)$  和  $\varepsilon^\mu(p, -)$  两个，但  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质是类似的

自由无质量复矢量场  $A^\mu(x)$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换为 (习题 8.3)

$$C^{-1}A^\mu(x)C = \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), \quad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C = \xi_C A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P = \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T = \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)$$



对于**自由无质量实矢量场**,  $\xi_C$ 、 $\xi_P$  和  $\xi_T$  的取值只能是  $\pm 1$



电磁场是一种无质量实矢量场，可通过 QED 相互作用确定  $\xi_C$ 、 $\xi_P$  和  $\xi_T$  的取值



 在相互作用绘景中，参与相互作用的量子场与自由场具有形式相同的平面波展开式，因此前面推导出来的量子场  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质照样成立



于是，理论的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性由拉氏量中相互作用项的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质决定

电磁场的分立变换

在 QED 理论中，相互作用项的算符形式为  $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

根据  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  算符的  $C$  变换  $C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

$$P \text{ 变换 } P^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) P = \cancel{\mathcal{P}}^\mu_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$$

$$T \text{ 变换 } T^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{T}x)$$

电磁场  $A^\mu(x)$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换必须是

$$C^{-1}A^\mu(x)C = -A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A^\mu(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$$

才能使 QED 相互作用项分别在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下不变

电磁场的分立变换

 在 QED 理论中，相互作用项的算符形式为  $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

根据  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  算符的  $C$  变换  $C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

$$P \text{ 变换 } P^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) P = \cancel{\mathcal{P}^\mu}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$$

$$T \text{ 变换 } T^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{T}x)$$

电磁场  $A^\mu(x)$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换必须是

$$C^{-1}A^\mu(x)C = -A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A^\mu(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} A^\mu(x) T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$$

才能使 QED 相互作用项分别在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下不变

也就是说，必须取  $\xi_C = -1$ ,  $\xi_P = +1$ ,  $\xi_T = -1$

 这样的取法是做得到的，因此说 QED 理论同时具有  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性，即具有**电荷共轭对称性**、**空间反射对称性**和**时间反演对称性**

从而，电磁场是  $C$  宇称为奇的极矢量场

电磁场强张量的分立变换



电磁场的场强张量  $F^{\mu\nu}$  和对偶场强张量  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换是

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = -F^{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

$$C^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) C = -\tilde{F}^{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) P = -\cancel{\mathcal{P}}^\mu{}_\rho \cancel{\mathcal{P}}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\cancel{\mathcal{P}} x)$$

$$T^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) T = \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$



$F^{\mu\nu}$  和  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $C$  宇称均为奇



$F^{\mu\nu}$  与  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $P$ 、 $T$  变换都相差一个负号

# $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的分立变换



于是，算符  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  和  $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C = +F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T = +F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)$$

$$C^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) C = + \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) P = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) T = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{T}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)$$



$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  的  $C$  宇称和宇称均为偶



$\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  的 **C** 宇称为偶，宇称为奇