

# 量子场论

第 5 章 量子场的相互作用

5.1 节和 5.2 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 7 月 11 日



第 5 章 量子场的相互作用

 第 2、3、4 章分别讨论了标量场、矢量场、旋量场的正则量子化

这些讨论只涉及自由量子场，没有考虑到量子场的相互作用

 自由实标量场的拉氏量  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

 自由有质量实矢量场的拉氏量  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$

自由 Dirac 旋量场的拉氏量  $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$

这些自由场拉氏量包含动能项和质量项

 它们都是二次型，即每一项均包含 2 个场算符

第5章 量子场的相互作用



第2、3、4章分别讨论了标量场、矢量场、旋量场的正则量子化



这些讨论只涉及**自由量子场**，没有考虑到量子场的相互作用



$$\text{自由实标量场的拉氏量 } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$



$$\text{自由有质量实矢量场的拉氏量 } \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$



自由 Dirac 旋量场的拉氏量  $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$



这些自由场拉氏量包含动能项和质量项



它们都是二次型，即每一项均包含 2 个场算符



如果考虑包含多于 2 个场算符的项，则这些项将描述场的相互作用 (interaction)



在局域场论中，拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  中的相互作用项只能包含同一个时空点处的几个场，例如  $[\phi(x)]^3$ ；不能包含处于不同时空点上的场，例如  $[\phi(x)]^2\phi(y)$



这样可以保持理论的因果性 (causality)

场的量纲

在自然单位制中，时空坐标  $x^\mu$  的量纲是能量量纲的倒数，即  $[x^\mu] = [E]^{-1}$

 时空导数的量纲是  $[\partial_\mu] = [E]$ ，时空体积元的量纲是  $[d^4x] = [E]^{-4}$

由于作用量  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  没有量纲，**拉氏量**的量纲是  $[\mathcal{L}] = [E]^4$

场的量纲

 在自然单位制中，时空坐标  $x^\mu$  的量纲是能量量纲的倒数，即  $[x^\mu] = [E]^{-1}$

 时空导数的量纲是  $[\partial_\mu] = [E]$ ，时空体积元的量纲是  $[d^4x] = [E]^{-4}$

由于作用量  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  没有量纲，**拉氏量**的量纲是  $[\mathcal{L}] = [E]^4$

从动能项  $\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi$  可以看出，**标量场**的量纲是

$$[\phi] = [E]$$

 观察动能项  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ，发现**矢量场**的量纲是

$$[A^\mu] = [E]$$

根据动能项  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ , 旋量场的量纲是

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = [E]^{3/2}$$

## 实标量场的 $\phi^4$ 理论

相互作用项可以只包含同一个场，从而描述场的自相互作用 (self-interaction)

例如，用实标量场  $\phi(x)$  构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

前两项是动能项和质量项，第三项描述四个实标量场的自相互作用

  $\lambda$  是一个实耦合常数 (coupling constant)，它的大小决定耦合的强度。

  $[\mathcal{L}] = [\phi^4] = [E]^4$  意味着  $[\lambda] = 1$ ，即耦合常数  $\lambda$  是无量纲的

## 实标量场的 $\phi^4$ 理论

相互作用项可以只包含同一个场，从而描述场的自相互作用 (self-interaction)

例如，用实标量场  $\phi(x)$  构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

 前两项是动能项和质量项，第三项描述四个**实标量场**的自相互作用

  $\lambda$  是一个实耦合常数 (coupling constant)，它的大小决定耦合的强度

**[ $\mathcal{L}$ ] = [ $\phi^4$ ] = [ $E$ ]<sup>4</sup> 意味着  $[\lambda] = 1$ ，即耦合常数  $\lambda$  是无量纲的**

  $\mathcal{L}_{\phi^4}$  描述实标量场的  $\phi^4$  理论

根据 Euler-Lagrange 方程  $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ ， $\phi^4$  理论的经典运动方程是

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

存在相互作用时，场的经典运动方程是**非线性的**

## 实标量场和 Dirac 旋量场的 Yukawa 理论



· 相互作用项也可以涉及不同的场



例如，用实标量场  $\phi(x)$  和 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \equiv \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_Y$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$$



$\mathcal{L}_S$  包含  $\phi$  的动能项和质量项,  $\mathcal{L}_D$  包含  $\psi$  的动能项和质量项



相互作用项  $\mathcal{L}_{\text{Y}}$  描述  $\phi$  与  $\psi$  之间的 Yukawa 相互作用，其中  $\kappa$  是实耦合常数。



$[\mathcal{L}] = [\phi\bar{\psi}\psi] = [E]^4$  表明 Yukawa 耦合常数  $\kappa$  没有量纲

## 实标量场和 Dirac 旋量场的 Yukawa 理论



相互作用项也可以涉及不同的场



例如，用实标量场  $\phi(x)$  和 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_Y$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$$



湯川秀樹  
(1907-1981)



$\mathcal{L}_S$  包含  $\phi$  的动能项和质量项,  $\mathcal{L}_D$  包含  $\psi$  的动能项和质量项



相互作用项  $\mathcal{L}_Y$  描述  $\phi$  与  $\psi$  之间的 Yukawa 相互作用，其中  $\kappa$  是实耦合常数



$[\mathcal{L}] = [\phi\bar{\psi}\psi] = [E]^4$  表明 Yukawa 耦合常数  $\kappa$  没有量纲



这类相互作用最先由汤川秀树 (Hideki Yukawa) 于 1935 年提出，当时引入  $\pi$  介子 (对应于  $\phi$ ) 来传递核子 (对应于  $\psi$ ) 之间的强相互作用



$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  描述 Yukawa 理论，由于  $\mathcal{L}_Y$  包含不同类型的场，经典运动方程是多个互耦合的运动方程

微扰论

非线性和耦合的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中更加困难

所幸的是，当耦合常数（如  $\lambda$ 、 $\kappa$ ）比较小时，在微扰论（perturbation theory）中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。

本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路

微扰论

非线性和耦合的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中更加困难

所幸的是，当耦合常数（如  $\lambda$ 、 $\kappa$ ）比较小时，在微扰论（perturbation theory）中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。

本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路

 如果拉氏量中相互作用项  $\mathcal{L}_1$  不包含场的时空导数  $\partial_\mu \Phi_a$ ，则  $\partial \mathcal{L}_1 / \partial \dot{\Phi}_a = 0$

👉  $\mathcal{L}_1$  不影响场的共轭动量密度  $\pi_a = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ ，故  $\pi_a$  保持没有相互作用时的形式

将哈密顿量密度分解成  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$

  $\mathcal{H}_0$  是自由部分，与没有相互作用时的哈密顿量密度相同； $\mathcal{H}_1$  是相互作用部分

由定义式  $\mathcal{H} \equiv \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$  得到  $\mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\mathcal{L}_1(\Phi_a)$

从而，相互作用哈密顿量是  $H_1 = \int d^3x \mathcal{H}_1(\Phi_a) = - \int d^3x \mathcal{L}_1(\Phi_a)$

微扰论

非线性和耦合的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中更加困难

所幸的是，当耦合常数（如  $\lambda$ 、 $\kappa$ ）比较小时，在微扰论（perturbation theory）中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。

本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路

 如果拉氏量中相互作用项  $\mathcal{L}_1$  不包含场的时空导数  $\partial_\mu \Phi_a$ ，则  $\partial \mathcal{L}_1 / \partial \dot{\Phi}_a = 0$

👉  $\mathcal{L}_1$  不影响场的共轭动量密度  $\pi_a = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ ，故  $\pi_a$  保持没有相互作用时的形式

将哈密顿量密度分解成  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$

  $\mathcal{H}_0$  是自由部分，与没有相互作用时的哈密顿量密度相同； $\mathcal{H}_1$  是相互作用部分

由定义式  $\mathcal{H} \equiv \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$  得到  $\mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\mathcal{L}_1(\Phi_a)$

从而，相互作用哈密顿量是  $H_1 = \int d^3x \mathcal{H}_1(\Phi_a) = - \int d^3x \mathcal{L}_1(\Phi_a)$

如果  $\mathcal{L}_1$  包含场的时空导数  $\partial_\mu \Phi_a$ ，则共轭动量密度  $\pi_a = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}_a$  与没有相互作用的情况不同， $\mathcal{H}_1$  的形式会复杂一些

## 5.1 节 相互作用绘景



2.2 节介绍过哈密顿量不含时情况下 Schrödinger 与 Heisenberg 绘景之间的关系



在 Schrödinger 绘景中，态矢  $|\Psi(t)\rangle^S$  依赖于时间，算符  $O^S$  不依赖于时间



在 Heisenberg 绘景中，态矢  $|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$  不依赖于时间，算符  $(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$  依赖于时间



由于 Heisenberg 绘景能够明确地处理场算符的时间依赖性，前面章节中自由场正则量子化程序都是在这个绘景中进行的



实际上，在 Schrödinger 绘景中也可以等价地讨论正则量子化。

## 5.1 节 相互作用绘景



2.2 节介绍过哈密顿量不含时情况下 Schrödinger 与 Heisenberg 绘景之间的关系



在 Schrödinger 绘景中，态矢  $|\Psi(t)\rangle^S$  依赖于时间，算符  $O^S$  不依赖于时间



在 Heisenberg 绘景中，态矢  $|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$  不依赖于时间，算符  $(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$  依赖于时间



由于 Heisenberg 绘景能够明确地处理场算符的时间依赖性，前面章节中自由场正则量子化程序都是在这个绘景中进行的



实际上，在 Schrödinger 绘景中也可以等价地讨论正则量子化。



接下来以实标量场为例进行表述



根据 2.3.3 小节, 自由实标量场  $\phi(x)$  的哈密顿量表达成  $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$



$H$  是不含时的，即不依赖于时间  $t$ ，前面的推导表明  $[a_p, H] = E_p a_p$



这里省略了零点能，因为零点能是  $c$  数，只决定总能量的零点，不影响下面的讨论。



湮灭算符  $a_p$  和产生算符  $a_p^\dagger$  不依赖于时间，实际上是 Schrödinger 绘景中的算符

# Heisenberg 绘景中的产生湮灭算符



利用  $[a_p, H] = E_p a_p$  得到多重对易子

$$[a_p, (-iHt)^{(1)}] = [a_p, -iHt] = -it[a_p, H] = -iE_p t a_p,$$

$$[a_p, (-iHt)^{(2)}] = [[a_p, (-iHt)^{(1)}], -iHt] = -iE_p t [a_p, H] = (-iE_p t)^2 a_p, \quad \dots$$

$$[a_p, (-iHt)^{(n)}] = (-iE_p t)^n a_p$$



由  $O^H(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$  和  $e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$  推出 Heisenberg 绘景中的湮灭算符

$$a_p^H(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [a_p, (-iHt)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iE_p t)^n a_p = e^{-iE_p t} a_p$$



对上式取厄米共轭，得到相应的产生算符

$$a_p^{H\dagger}(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$$

Schrödinger 绘景中的场算符

根据上述  $a_p^H(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt} = e^{-iE_p t} a_p$  和  $a_p^{H\dagger}(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$

将 Heisenberg 绘景中自由实标量场的平面波展开式化为

$$\begin{aligned}\phi^H(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ a_p^H(t) e^{ip \cdot x} + a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

 第二个表达式里**场算符的时间依赖性**只包含在 Heisenberg 绘景的产生湮灭算符中

## Schrödinger 绘景中的场算符

根据上述  $a_p^H(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt} = e^{-iE_p t} a_p$  和  $a_p^{H\dagger}(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$

将 Heisenberg 绘景中自由实标量场的平面波展开式化为

$$\begin{aligned}\phi^H(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ a_p^H(t) e^{ip \cdot x} + a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

 第二个表达式里**场算符的时间依赖性**只包含在 Heisenberg 绘景的产生湮灭算符中

反过来，在 Schrödinger 绘景中，实标量场的平面波展开式为

$$\begin{aligned}\phi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \phi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ e^{-iHt} a_p^H(t) e^{iHt} e^{ip \cdot x} + e^{-iHt} a_p^{H\dagger}(t) e^{iHt} e^{-ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$

可见，场算符在 Schrödinger 绘景中确实不依赖于时间

# Schrödinger 绘景中的正则对易关系



将**共轭动量密度**的展开式变换到 **Schrödinger 绘景**中，那么它也不依赖于时间：

$$\begin{aligned}\pi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \pi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} e^{-iHt} \left[ a_p^H(t) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - a_p^{H\dagger}(t) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] e^{iHt} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right)\end{aligned}$$

 2.2 节提到，**正则对易关系**的形式与**绘景无关**，这一点很容易验证

## Schrödinger 绘景中的正则对易关系

A small icon representing night or darkness, showing a crescent moon and stars.

将共轭动量密度的展开式变换到 Schrödinger 绘景中，那么它也不依赖于时间：

$$\begin{aligned}\pi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \pi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} e^{-iHt} \left[ a_p^H(t) e^{ip \cdot x} - a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right] e^{iHt} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$



2.2 节提到，正则对易关系的形式与绘景无关，这一点很容易验证。



比如，实标量场在 Heisenberg 绘景中的等时对易关系

$$[\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^H(\mathbf{x}, t), \phi^H(\mathbf{y}, t)] = [\pi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] = 0$$

在 Schrödinger 绘景中化为正则对易关系

$$[\phi^S(x), \pi^S(y)] = i\delta^{(3)}(x - y), \quad [\phi^S(x), \phi^S(y)] = [\pi^S(x), \pi^S(y)] = 0$$



在 Schrödinger 绘景中，从这些正则对易关系和平面波展开式出发，可以推出产生湮灭算符的对易关系，结果必定与在 Heisenberg 绘景中导出的对易关系相同



从而推出  $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$ ，这说明在 Schrödinger 绘景中也可以自然地讨论

### 相互作用绘景



存在相互作用时，在 Schrödinger 绘景中将系统哈密顿量  $H$  分解为两个部分，

$$H^S(t) = H_0^S + H_1^S(t)$$



主要部分  $H_0^S$  是不含时的自由（没有相互作用）的哈密顿量



微扰部分  $H_1^S(t)$  描述相互作用，只给出较小的影响



$H_1^S$  可能含时，也可能不含时，这里讨论一般情况

### 相互作用绘景



存在相互作用时，在 Schrödinger 绘景中将系统哈密顿量  $H$  分解为两个部分：

$$H^S(t) = H_0^S + H_1^S(t)$$



主要部分  $H_0^S$  是**不含时的自由**（没有相互作用）的哈密顿量



微扰部分  $H_1^S(t)$  描述相互作用，只给出较小的影响



$H_1^S$  可能含时，也可能不含时，这里讨论一般情况



此时可以建立相互作用绘景 (interaction picture)，它也称为 Dirac 绘景



建立方式是把主要部分  $H_0^S$  的影响塞进态矢里面，将态矢定义为

$$|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S$$



**算符**定义为

$$O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$$

# 相互作用绘景中的哈密顿量

 根据相互作用绘景中的算符定义  $O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$

 相互作用绘景中哈密顿量的**自由部分**与 Schrödinger 绘景中的**相同**,

$$H_0^I = e^{iH_0^S t} H_0^S e^{-iH_0^S t} = H_0^S$$

 但**总哈密顿量不同**,

$$H^I(t) = e^{iH_0^S t} H^S(t) e^{-iH_0^S t}$$

 **微扰部分**则满足

$$H_1^I = e^{iH_0^S t} H_1^S e^{-iH_0^S t} = e^{iH_0^S t} (H^S - H_0^S) e^{-iH_0^S t} = H^I - H_0^S = H^I - H_0^I$$

# 含时哈密顿量与绘景变换



此时，Heisenberg 绘景与 Schrödinger 绘景的一般变换关系可表示为

$$|\Psi\rangle^H = W^\dagger(t) |\Psi(t)\rangle^S, \quad O^H(t) = W^\dagger(t) O^S W(t)$$

其中含时幺正变换算符  $W(t)$  满足条件

$$i\partial_0 W(t) = H^S(t)W(t), \quad W(0) = 1$$

对于总哈密顿量  $H^S$  不含时的情况，有  $W(t) = \exp(-iH^S t)$ ，与 2.2 节一致

# 含时哈密顿量与绘景变换



此时，Heisenberg 绘景与 Schrödinger 绘景的一般变换关系可表示为

$$|\Psi\rangle^H = W^\dagger(t) |\Psi(t)\rangle^S, \quad O^H(t) = W^\dagger(t) O^S W(t)$$

其中含时幺正变换算符  $W(t)$  满足条件

$$i\partial_0 W(t) = H^S(t)W(t), \quad W(0) = 1$$

对于总哈密顿量  $H^S$  不含时的情况，有  $W(t) = \exp(-iH^S t)$ ，与 2.2 节一致

现在，Heisenberg 绘景的哈密顿量  $H^H(t)$  与  $H^S(t)$  的关系为

$$H^H(t) \equiv W^\dagger(t) H^S(t) W(t), \quad H^S(t) = W(t) H^H(t) W^\dagger(t)$$

故  $i\partial_0 W(t) = H^S(t)W(t) = W(t)H^H(t)W^\dagger(t)W(t) = W(t)H^H(t)$ ，取厄米共轭，得  $-i\partial_0 W^\dagger(t) = H^H(t)W^\dagger(t)$ ，从而推出 Heisenberg 运动方程

$$\begin{aligned} i\partial_0 O^H(t) &= [i\partial_0 W^\dagger(t)] O^S W(t) + W^\dagger(t) O^S [i\partial_0 W(t)] \\ &= -H^H(t) W^\dagger(t) O^S W(t) + W^\dagger(t) O^S W(t) H^H(t) \\ &= [W^\dagger(t) O^S W(t), H^H(t)] = [O^H(t), H^H(t)] \end{aligned}$$

这是要求  $W(t)$  满足以上条件的理由

# 三种绘景



以 **Schrödinger 绘景** 为中介，得到 **相互作用绘景** 与 **Heisenberg 绘景** 之间的关系

$$|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} W(t) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = e^{iH_0^S t} W(t) O^H(t) W^\dagger(t) e^{-iH_0^S t}$$

引入 **幺正变换算符**  $V(t) \equiv e^{iH_0^S t} W(t)$ ，满足  $V(0) = 1$ ，将以上关系简化为

$$|\Psi(t)\rangle^I = V(t) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = V(t) O^H(t) V^\dagger(t)$$

于是，相互作用绘景中 **等时对易关系** 的形式不变，如

$$\begin{aligned} [\phi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] &= [V(t) \phi^H(\mathbf{x}, t) V^\dagger(t), V(t) \pi^H(\mathbf{y}, t) V^\dagger(t)] \\ &= V(t) [\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] V^\dagger(t) = V(t) i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) V^\dagger(t) = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

三种绘景



以 Schrödinger 绘量为中介，得到相互作用绘量与 Heisenberg 绘量之间的关系

$$|\Psi(t)\rangle^I \equiv e^{iH_0^S t} W(t) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) \equiv e^{iH_0^S t} W(t) O^H(t) W^\dagger(t) e^{-iH_0^S t}$$



引入幺正变换算符  $V(t) \equiv e^{iH_0^S t} W(t)$ , 满足  $V(0) = 1$ , 将以上关系简化为

$$|\Psi(t)\rangle^I = V(t) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = V(t) O^H(t) V^\dagger(t)$$



于是，相互作用绘景中等时对易关系的形式不变，如

$$[\phi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] = [V(t)\phi^H(\mathbf{x}, t)V^\dagger(t), V(t)\pi^H(\mathbf{y}, t)V^\dagger(t)]$$

$$= V(t)[\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)]V^\dagger(t) = V(t)i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})V^\dagger(t) = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$



**$t = 0$  时刻**三种绘景是一致的,  $|\Psi(0)\rangle^I = |\Psi(0)\rangle^S = |\Psi\rangle^H$ ,  $O^I(0) = O^S = O^H(0)$



 在任意  $t$  时刻有  ${}^I\langle \Psi(t) | O^I(t) | \Psi(t) \rangle^I = {}^S\langle \Psi(t) | O^S | \Psi(t) \rangle^S = {}^H\langle \Psi | O^H(t) | \Psi \rangle^H$ ，

因而三种绘景描述相同的物理



 这里以  $t = 0$  作为参考时刻，作替换  $t \rightarrow t - t_0$  即可讨论任意参考时刻  $t_0$



如果没有相互作用,  $H^S = H_0^S$ , 则相互作用绘景与 Heisenberg 绘景相同

# 相互作用绘景中态矢的演化方程

 在 Schrödinger 绘景中，Schrödinger 方程是

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = H^S |\Psi(t)\rangle^S$$

 由定义  $|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S$  推出

$$\begin{aligned} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^I &= \left( i\partial_0 e^{iH_0^S t} \right) |\Psi(t)\rangle^S + e^{iH_0^S t} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^S = \left( -H_0^S e^{iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} H^S \right) |\Psi(t)\rangle^S \\ &= \left( -H_0^S + e^{iH_0^S t} H^S e^{-iH_0^S t} \right) e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S = \left( -H_0^I + H^I \right) e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I |\Psi(t)\rangle^I$$

# 相互作用绘景中态矢的演化方程

 在 Schrödinger 绘景中，Schrödinger 方程是

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = H^S |\Psi(t)\rangle^S$$

 由定义  $|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S$  推出

$$\begin{aligned} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^I &= \left( i\partial_0 e^{iH_0^S t} \right) |\Psi(t)\rangle^S + e^{iH_0^S t} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^S = \left( -H_0^S e^{iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} H^S \right) |\Psi(t)\rangle^S \\ &= \left( -H_0^S + e^{iH_0^S t} H^S e^{-iH_0^S t} \right) e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S = \left( -H_0^I + H^I \right) e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I |\Psi(t)\rangle^I$$

 这是态矢  $|\Psi(t)\rangle^I$  的演化方程，它只由相互作用哈密顿量  $H_1^I$  决定

 可见，在相互作用绘景中，态矢的演化规律与 Schrödinger 绘景中的运动方程相同，但必须将其中的总哈密顿量  $H^S$  换成相互作用哈密顿量  $H_1^I$

 这部分演化属于动力学 (dynamics) 演化

# 相互作用绘景中算符的演化方程

 另一方面，由定义  $O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$  有

$$\begin{aligned} i\partial_0 O^I(t) &= (i\partial_0 e^{iH_0^S t}) O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S (i\partial_0 e^{-iH_0^S t}) \\ &= -H_0^S e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} H_0^S = [e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}, H_0^S] \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} O^I(t) = [O^I(t), H_0^S]$$

# 相互作用绘景中算符的演化方程

 另一方面，由定义  $O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$  有

$$\begin{aligned} i\partial_0 O^I(t) &= (i\partial_0 e^{iH_0^S t}) O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S (i\partial_0 e^{-iH_0^S t}) \\ &= -H_0^S e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} H_0^S = [e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}, H_0^S] \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} O^I(t) = [O^I(t), H_0^S]$$

 这个方程表明算符  $O^I(t)$  的演化只由自由哈密顿量  $H_0^S = H_0^I$  决定

 可见，在相互作用绘景中，算符的演化规律与 Heisenberg 绘景中的 Heisenberg 运动方程  $i \frac{\partial}{\partial t} O^H(t) = [O^H(t), H^H(t)]$  相同，但必须将其中的总哈密顿量  $H^H$  换成自由哈密顿量  $H_0^I$

 这部分演化属于运动学 (kinematics) 演化

# 相互作用绘景的好处

 在 **Heisenberg 绘景** 中，对未加微扰的系统求出各个算符间的关系之后，**加入微扰**有可能**改变**这些关系

 不过，**加入微扰之后**各个算符在**相互作用绘景**中的许多关系仍然与**加入微扰之前**它们在 **Heisenberg 绘景**中的关系**相同**，可以直接套用原来的公式

 这就是相互作用绘景的好处

# 相互作用绘景的好处

 在 **Heisenberg 绘景** 中，对未加微扰的系统求出各个算符间的关系之后，**加入微扰**有可能**改变**这些关系

 不过，**加入微扰之后**各个算符在**相互作用绘景**中的许多关系仍然与**加入微扰之前**它们在 **Heisenberg 绘景**中的关系**相同**，可以直接套用原来的公式

 这就是相互作用绘景的好处

 在**相互作用绘景**中，**具有相互作用**的场算符的平面波展开式将与**没有相互作用**的场算符在 **Heisenberg 绘景**中的展开式**相同**

 因此，在**存在相互作用**的情况下，我们仍然可以沿用第 2、3、4 章中导出的**自由量子场平面波展开式**，其中的**产生湮灭算符**满足原来的**对易或反对易关系**

 这一点对接下来的讨论**至关重要**

### 5.1.1 小节 例 1：实标量场



下面以实标量场的  $\phi^4$  理论为例讨论相互作用绘景



根据拉氏量  $\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi^H) \partial_\mu \phi^H - \frac{1}{2}m^2 (\phi^H)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\phi^H)^4$  和定义式  $\pi_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}$ ，实标量场  $\phi(x)$  的共轭动量密度为  $\pi^H = \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^4}}{\partial(\partial_0 \phi^H)} = \partial_0 \phi^H$ ，与**自由场**形式相同



这里将 Heisenberg 绘量的标记 H 明确写出来



依照  $\mathcal{H}^H \equiv \pi^H \dot{\Phi}^H - \mathcal{L}^H$ , 哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}^H = \pi^H \partial_0 \phi^H - \mathcal{L}_{\phi^4}^H = \frac{1}{2} [(\pi^H)^2 + (\nabla \phi^H)^2 + m^2 (\phi^H)^2] + \frac{\lambda}{4!} (\phi^H)^4$$



将哈密顿量分解为  $H^H = \int d^3x \mathcal{H}^H = H_0^H + H_1^H$



  $H_0^H = \frac{1}{2} \int d^3x [(\pi^H)^2 + (\nabla\phi^H)^2 + m^2(\phi^H)^2]$  与自由哈密顿量的形式相同



  $H_1^H = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x (\phi^H)^4$  描述相互作用

### 相互作用绘景中的产生湮灭算符



假设  $t = 0$  时，实标量场  $\phi(x)$  的平面波展开式与自由场展开式一样，

$$\phi^I(\mathbf{x}, 0) = \phi^H(\mathbf{x}, 0) = \phi^S(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)$$

$$\pi^I(\mathbf{x}, 0) = \pi^H(\mathbf{x}, 0) = \pi^S(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right)$$



其中产生湮灭算符  $a_p^\dagger$  和  $a_p$  满足**自由**情况下的**对易关系**



在  $t = 0$  时刻，绘景变换关系  $O^H(t) = W^\dagger(t)O^S W(t)$  意味着  $H_0^H(0) = H_0^S$



将以上  $\phi^H(x, 0)$  和  $\pi^H(x, 0)$  的平面波展开式代入前面  $H_0^H$  的表达式，仿照 2.3.3

小节的推导过程，略去零点能，得到  $H_0^S = H_0^H(0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$



即哈密顿量的自由部分  $H_0^S$  与自由情况下的形式相同。



由此推出  $[a_p, (-iH_0^S t)^{(n)}] = (-iE_p t)^n a_p$ ，得到相互作用绘景中的产生湮灭算符

$$a_p^I(t) = e^{iH_0^S t} a_p e^{-iH_0^S t} = e^{-iE_p t} a_p, \quad a_p^{I\dagger}(t) = e^{iH_0^S t} a_p^\dagger e^{-iH_0^S t} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$$

# 相互作用绘景中的平面波展开式

于是，相互作用绘景中任意  $t$  时刻的场算符展开式为

$$\begin{aligned}\phi^I(\mathbf{x}, t) &= e^{iH_0^S t} \phi^S(\mathbf{x}) e^{-iH_0^S t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ a_p^I(t) e^{ip \cdot x} + a_p^{I\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{-iE_p t} e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{iE_p t} e^{-ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$

共轭动量密度的展开式为

$$\pi^I(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0^S t} \pi^S(\mathbf{x}) e^{-iH_0^S t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

正如所期望的，这两个式子与自由实标量场在 Heisenberg 绘景中的展开式一致

## 相互作用绘景中的等时对易关系



因此，根据产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$



可以证明  $\phi^I(x)$  和  $\pi^I(x)$  满足与自由场形式相同的等时对易关系 (参考习题 2.2)

$$[\phi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^I(\mathbf{x}, t), \phi^I(\mathbf{y}, t)] = [\pi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] = 0$$



如同**自由场**的情况，推出  $[a_p, H_0^S] = E_p a_p$  和  $[a_p^\dagger, H_0^S] = -E_p a_p^\dagger$



就可以验证场算符展开式符合**运动学演化方程**

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi^I(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( E_p a_p e^{-ip \cdot x} - E_p a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( [a_p, H_0^S] e^{-ip \cdot x} + [a_p^\dagger, H_0^S] e^{ip \cdot x} \right) = [\phi^I(\mathbf{x}, t), H_0^S] \end{aligned}$$

### 5.1.2 小节 例 2：有质量矢量场

 不难将上述讨论推广到复标量场、无质量矢量场和 Dirac 旋量场

但是，推广到**有质量矢量场**  $A^\mu(x)$  却会得到**不同寻常**的结果

 原因在于  $A^0(x)$  不是一个独立的场分量，不具备相应的共轭动量密度和正则对易关系，因而在绘景变换中具有特殊的性质

### 5.1.2 小节 例 2：有质量矢量场

 不难将上述讨论推广到复标量场、无质量矢量场和 Dirac 旋量场

但是，推广到**有质量矢量场**  $A^\mu(x)$  却会得到**不同寻常**的结果

 原因在于  $A^0(x)$  不是一个独立的场分量，不具备相应的共轭动量密度和正则对易关系，因而在绘景变换中具有特殊的性质

假设参与相互作用的有质量矢量场具有拉氏量  $\mathcal{L}^H = \mathcal{L}_0^H + \mathcal{L}_1^H$

自由项为  $\mathcal{L}_0^H = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^H F^{H,\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^H A^{H,\mu}$

相互作用项为  $\mathcal{L}_1^H = g J_\mu^H A^{H,\mu}$ ，其中  $g$  是一个无量纲耦合常数

**J<sub>μ</sub><sup>H</sup>(x)** 是由**其它场**组成的**流**，如  $J_\mu^H(x) = \bar{\psi}^H(x)\gamma_\mu\psi^H(x)$

根据 Euler-Lagrange 方程  $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial (\partial_\mu A_\nu^H)} - \frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial A_\nu^H} = 0$  和

$$\frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial (\partial_\mu A_\nu^H)} = -F^{H,\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial A_\nu^H} = m^2 A^{H,\nu} + g J^{H,\nu}$$

$A^\mu(x)$  的经典运动方程为  $\partial_\mu F^{H,\mu\nu} + m^2 A^{H,\nu} = -g J^{H,\nu}$

$A^{H,0}$  的依赖关系

由于  $J_\mu^H(x)$  不包含  $A^{H,\mu}$  的时间导数，共轭动量密度与自由场形式相同：

$$\pi_i^H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^{H,i})} = -F_{0i}^H, \quad \pi^{H,i} = F^{H,i0} = -\partial^0 A^{H,i} + \partial^i A^{H,0}$$

写成空间矢量的形式，得

$$\boldsymbol{\pi}^H = -\dot{\mathbf{A}}^H - \nabla A^{H,0}, \quad \dot{\mathbf{A}}^H = -\boldsymbol{\pi}^H - \nabla A^{H,0}$$

当  $\nu = 0$  时, 运动方程变成

$$\partial_i F^{\text{H},i0} + m^2 A^{\text{H},0} = -g J^{\text{H},0}$$

故

$$A^{\text{H},0} = -\frac{1}{m^2}(\partial_i F^{\text{H},i0} + g J^{\text{H},0}) = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} + g J^{\text{H},0})$$

与自由情况  $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \pi^H$  不同，此处  $A^{H,0}$  还依赖于  $J^{H,0}$

哈密顿量密度

▲ 根据 3.4.1 小节推出的

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^H F^{H,\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}^H)^2, \quad -\frac{1}{2} m^2 A_\mu^H A^{H,\mu} = -\frac{1}{2} m^2 [(A_0^H)^2 - (\mathbf{A}^H)^2]$$



哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^H &= \pi_i^H \partial_0 A^{H,i} - \mathcal{L}^H = -\boldsymbol{\pi}^H \cdot \dot{\mathbf{A}}^H - \mathcal{L}^H \\ &= -\boldsymbol{\pi}^H \cdot \dot{\mathbf{A}}^H - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}^H)^2 - \frac{1}{2}m^2[(A^{H,0})^2 - (\mathbf{A}^H)^2] \\ &\quad - g J^{H,0} A^{H,0} + g \mathbf{J}^H \cdot \mathbf{A}^H\end{aligned}$$

## 哈密顿量密度

▲ 根据 3.4.1 小节推出的

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^H F^{H,\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}^H)^2, \quad -\frac{1}{2} m^2 A_\mu^H A^{H,\mu} = -\frac{1}{2} m^2 [(A_0^H)^2 - (\mathbf{A}^H)^2]$$

## 哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^H &= \pi_i^H \partial_0 A^{H,i} - \mathcal{L}^H = -\boldsymbol{\pi}^H \cdot \dot{\mathbf{A}}^H - \mathcal{L}^H \\ &= -\boldsymbol{\pi}^H \cdot \dot{\mathbf{A}}^H - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}^H)^2 - \frac{1}{2}m^2[(A^{H,0})^2 - (\mathbf{A}^H)^2] \\ &\quad - qJ^{H,0}A^{H,0} + q\mathbf{J}^H \cdot \mathbf{A}^H\end{aligned}$$

**我们需要知道它比自由哈密顿量密度多了什么**

利用  $\dot{\mathbf{A}}^H = -\boldsymbol{\pi}^H - \nabla A^{H,0}$  和  $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + gJ^{H,0})$  将  $\mathcal{H}^H$  的**第一项**化为

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\pi}^H \cdot \dot{\boldsymbol{A}}^H &= \boldsymbol{\pi}^H \cdot (\boldsymbol{\pi}^H + \nabla A^{H,0}) = (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \nabla \cdot (A^{H,0} \boldsymbol{\pi}^H) - A^{H,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H \\ &= (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \nabla \cdot (A^{H,0} \boldsymbol{\pi}^H) + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{g}{m^2} J^{H,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H \end{aligned}$$

**+** 最后一行第二项是全散度，不会影响哈密顿量

分解哈密顿量

由于  $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + gJ^{H,0})$ ,  $\mathcal{H}^H$  的第四项中包括

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} m^2 (A^{H,0})^2 &= -\frac{m^2}{2} \frac{1}{m^4} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + g J^{H,0})^2 \\ &= -\frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 - \frac{g^2}{2m^2} (J^{H,0})^2 - \frac{g}{m^2} J^{H,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H \end{aligned}$$

## 💡 $\mathcal{H}^H$ 的第五项为

$$-gJ^{\text{H},0}A^{\text{H},0} = \frac{g}{m^2} J^{\text{H},0}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} + gJ^{\text{H},0}) = \frac{g}{m^2} J^{\text{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} + \frac{g^2}{m^2} (J^{\text{H},0})^2$$

分解哈密顿量

由于  $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + gJ^{H,0})$ ,  $\mathcal{H}^H$  的第四项中包括

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} m^2 (A^{\text{H},0})^2 &= -\frac{m^2}{2} \frac{1}{m^4} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} + g J^{\text{H},0})^2 \\ &= -\frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}})^2 - \frac{g^2}{2m^2} (J^{\text{H},0})^2 - \frac{g}{m^2} J^{\text{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} \end{aligned}$$

💡  $\mathcal{H}^H$  的第五项为

$$-gJ^{\text{H},0}A^{\text{H},0} = \frac{g}{m^2} J^{\text{H},0}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} + gJ^{\text{H},0}) = \frac{g}{m^2} J^{\text{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} + \frac{g^2}{m^2} (J^{\text{H},0})^2$$



这里包含  $J^\mu$  的项都是自由场不具备的，应该归为相互作用项。



于是将哈密顿量分解为  $H^H = \int d^3x \mathcal{H}^H = H_0^H + H_1^H$



其中  $H_0^H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 + (\nabla \times \mathbf{A}^H)^2 + m^2 (\mathbf{A}^H)^2 \right]$  与自由哈密顿量形式相同



  $H_1^H = \int d^3x \left[ g \mathbf{J}^H \cdot \mathbf{A}^H + \frac{g}{m^2} J^{H,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + \frac{g^2}{2m^2} (J^{H,0})^2 \right]$  描述相互作用

### $A^H(x)$ 与 $H_0^H$ 的对易子

根据等时对易关系，有

$$\begin{aligned} [A^{\text{H},i}(x), (\boldsymbol{\pi}^{\text{H}}(y))^2] &= [A^{\text{H},i}(x), \pi_j^{\text{H}}(y)]\pi_j^{\text{H}}(y) + \pi_j^{\text{H}}(y)[A^{\text{H},i}(x), \pi_j^{\text{H}}(y)] \\ &= 2i\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\pi_j^{\text{H}}(y) = -2i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\pi^{\text{H},i}(y) \end{aligned}$$

 写成空间矢量的形式是  $[\mathbf{A}^H(x), (\boldsymbol{\pi}^H(y))^2] = -2i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^H(y)$

 另一方面，用  $\nabla_y$  表示对空间矢量  $y$  的梯度算符，得到

$$[A^{\text{H},i}(x), \nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}}(y)] = -\frac{\partial}{\partial y^j} [A^{\text{H},i}(x), \pi_j^{\text{H}}(y)] = -i \frac{\partial}{\partial y^i} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$[\mathbf{A}^{\text{H}}(x), \nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}}(y)] = -i \nabla_y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$\begin{aligned}
\text{👉 } [\mathbf{A}^H(x), H_0^H] &= \frac{1}{2} \int d^3y \left\{ [\mathbf{A}^H(x), (\boldsymbol{\pi}^H(y))^2] + \frac{1}{m^2} [\mathbf{A}^H(x), (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y))^2] \right\} \\
&= \int d^3y \left\{ -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\pi}^H(y) - \frac{i}{m^2} [\nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y)] \nabla_y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\
&= -i\boldsymbol{\pi}^H(x) + \frac{i}{m^2} \int d^3y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_y [\nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y)] \quad \text{分部积分} \\
&= -i\boldsymbol{\pi}^H(x) + \frac{i}{m^2} \nabla_x [\nabla_x \cdot \boldsymbol{\pi}^H(x)]
\end{aligned}$$

# 相互作用绘景



接下来转换到相互作用绘景，

$$\mathbf{A}^I = V(t) \mathbf{A}^H V^\dagger(t), \quad \boldsymbol{\pi}^I = V(t) \boldsymbol{\pi}^H V^\dagger(t)$$

$$H_0^S = \mathbf{H}_0^I = V(t) H_0^H V^\dagger(t) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (\boldsymbol{\pi}^I)^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I)^2 + (\nabla \times \mathbf{A}^I)^2 + m^2 (\mathbf{A}^I)^2 \right]$$

将算符演化方程  $i\partial_0 O^I(t) = [O^I(t), H_0^S]$  应用到  $\mathbf{A}^I$  上

利用上一页推出的  $[\mathbf{A}^H, H_0^H] = -i\boldsymbol{\pi}^H(x) + \frac{i}{m^2} \nabla_x [\nabla_x \cdot \boldsymbol{\pi}^H]$ ，得到

$$\begin{aligned} i\dot{\mathbf{A}}^I &= [\mathbf{A}^I, H_0^S] = V(t) [\mathbf{A}^H, H_0^H] V^\dagger(t) \\ &= V(t) \left[ -i\boldsymbol{\pi}^H + \frac{i}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H) \right] V^\dagger(t) = -i\boldsymbol{\pi}^I + \frac{i}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I) \end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I + \frac{1}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I)$$

与 3.4 节中的式子比较，发现这个等式与自由场情况具有相同形式

# $t = 0$ 时刻的平面波展开式

 现在，假设  $t = 0$  时  $A^\mu(x)$  和  $\pi_i(x)$  的平面波展开式与自由场展开式相同，

$$\begin{aligned} A^{I,\mu}(x, 0) &= A^{H,\mu}(x, 0) = A^{S,\mu}(x) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[ \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_i^I(x, 0) &= \pi_i^H(x, 0) = \pi_i^S(x) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i p_0}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[ \tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \end{aligned}$$

 其中产生湮灭算符  $a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$  和  $a_{\mathbf{p}, \lambda}$  满足**自由**情况下的**对易关系**

 在  $t = 0$  时刻，将以上  $A^{H,\mu}(x, 0)$  和  $\pi_i^H(x, 0)$  的平面波展开式代入前面  $H_0^H$  的表达式，仿照 3.4.3 小节的推导过程，略去零点能，得到

$$H_0^S = H_0^H(0) = \sum_{\lambda=\pm,0} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{p}, \lambda}$$

 即哈密顿量的**自由部分**  $H_0^S$  与**自由**情况下的形式相同

## 相互作用绘景中的平面波展开式

进而推出  $[a_{p,\lambda}, (-iH_0^S t)^{(n)}] = (-iE_p t)^n a_{p,\lambda}$  和相互作用绘景中的产生湮灭算符

$$a_{\mathbf{p},\lambda}^I(t) = e^{iH_0^S t} a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-iH_0^S t} = e^{-iE_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p},\lambda}, \quad a_{\mathbf{p},\lambda}^{I\dagger}(t) = e^{iH_0^S t} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{-iH_0^S t} = e^{iE_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger.$$

于是，相互作用绘景中任意  $t$  时刻的场算符展开式为

$$\begin{aligned} A^{\text{I},\mu}(\mathbf{x},t) &= e^{iH_0^S t} A^{\text{S},\mu}(\mathbf{x}) e^{-iH_0^S t} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[ \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_i^{\text{I}}(\mathbf{x}, t) &= e^{iH_0^{\text{S}}t} \pi_i^{\text{S}}(\mathbf{x}) e^{-iH_0^{\text{S}}t} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ip_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[ \tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

也就是说，对于任意  $t$  时刻， $A^{I,\mu}(x)$  和  $\pi_i^I(x)$  的展开式与 Heisenberg 绘景中的自由场展开式一致，这是我们期望的结果

$A^{I,0}$  与  $A^{H,0}$

 因此,  $\pi_i^I(x)$  和  $A^{I,\mu}(x)$  的关系也与自由场情况一样,

$$\pi_i^I = -\partial_0 A_i^I + \partial_i A_0^I, \quad \boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I - \nabla A^{I,0}$$

与前面推出的  $\pi^I = -\dot{A}^I + \frac{1}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \pi^I)$  比较, 得到相互作用绘景中  $A^{I,0}$  为

$$A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I$$

$A^{I,0}$  与  $A^{H,0}$

因此,  $\pi_i^I(x)$  和  $A^{I,\mu}(x)$  的关系也与自由场情况一样,

$$\pi_i^I = -\partial_0 A_i^I + \partial_i A_0^I, \quad \boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I - \nabla A^{I,0}$$

 与前面推出的  $\pi^I = -\dot{A}^I + \frac{1}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \pi^I)$  比较, 得到相互作用绘景中  $A^{I,0}$  为

$$A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I$$

 这个式子不同于 Heisenberg 绘景中的关系式  $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \pi^H + gJ^{H,0})$ ，  
反而与自由场的关系式一致

由于  $A^{H,0}$  不是独立的场分量，在 Heisenberg 绘景中可以利用 Euler-Lagrange 方程导出关系式来确定它

但我们无法保证这个关系式在相互作用绘景中成立，因而不能直接通过相似变换定义  $A^{H,0}$  在相互作用绘景中对应的量

## 非协变项

⚠ 根据以上表达式  $A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \pi^I$ , 相互作用哈密顿量在相互作用绘景中化为

$$\begin{aligned} H_1^{\text{I}} &= V(t)H_1^{\text{H}}V^\dagger(t) = \int d^3x \left[ g\mathbf{J}^{\text{I}} \cdot \mathbf{A}^{\text{I}} + \frac{g}{m^2} J^{\text{I},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{I}} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{\text{I},0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[ g\mathbf{J}^{\text{I}} \cdot \mathbf{A}^{\text{I}} - gJ^{\text{I},0} A^{\text{I},0} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{\text{I},0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[ -gJ_\mu^{\text{I}} A^{\text{I},\mu} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{\text{I},0})^2 \right] = \int d^3x \left[ -\mathcal{L}_1^{\text{I}} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{\text{I},0})^2 \right] \end{aligned}$$

最后一行方括号中第一项  $-\mathcal{L}_1^I = -J_\mu^I A^{I,\mu}$  是期望的结果，具有 Lorentz 不变性

## 非协变项

⚠ 根据以上表达式  $A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \pi^I$ , 相互作用哈密顿量在相互作用绘景中化为

$$\begin{aligned} H_1^I &= V(t)H_1^H V^\dagger(t) = \int d^3x \left[ g \mathbf{J}^I \cdot \mathbf{A}^I + \frac{g}{m^2} J^{I,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[ g \mathbf{J}^I \cdot \mathbf{A}^I - g J^{I,0} A^{I,0} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[ -g J_\mu^I A^{I,\mu} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] = \int d^3x \left[ -\mathcal{L}_1^I + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \end{aligned}$$

最后一行方括号中第一项  $-\mathcal{L}_1^I = -J_\mu^I A^{I,\mu}$  是期望的结果，具有 Lorentz 不变性

但第二项异乎寻常，不具有 Lorentz 不变性，我们将这个**非协变项**记为

$$\mathcal{H}_{J^0}^I = \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2$$

  $\mathcal{H}_{J^0}^I$  看起来会破坏理论的 Lorentz 协变性，不过，后续**微扰论**分析将看到它的贡献恰好抵消了**有质量矢量场传播子**中的**非协变项**（见 5.4.3 小节和 6.4 节）

最终，理论仍然是 Lorentz 协变的

## 5.2 节 时间演化算符和 $S$ 矩阵

如前所述，在相互作用绘景中，态矢  $|\Psi(t)\rangle^I$  承载着动力学演化，它的演化方程

$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I |\Psi(t)\rangle^I$  是**微扰论**处理量子场相互作用的一个出发点

 引入时间演化算符 (time-evolution operator)  $U(t, t_0)$ ，用于联系  $t_0$  和  $t$  两个时刻的态矢，

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

由于  $|\Psi(t)\rangle^I = V(t)|\Psi\rangle^H = V(t)V^\dagger(t_0)|\Psi(t_0)\rangle^I$ ，可以将时间演化算符表示为

$$U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$$

## 5.2 节 时间演化算符和 $S$ 矩阵

如前所述，在相互作用绘景中，态矢  $|\Psi(t)\rangle^I$  承载着动力学演化，它的演化方程

$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I |\Psi(t)\rangle^I$  是**微扰论**处理**量子场相互作用**的一个出发点

 引入时间演化算符 (time-evolution operator)  $U(t, t_0)$ ，用于联系  $t_0$  和  $t$  两个时刻的态矢，

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

由于  $|\Psi(t)\rangle^I = V(t)|\Psi\rangle^H = V(t)V^\dagger(t_0)|\Psi(t_0)\rangle^I$ ，可以将时间演化算符表示为

$$U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$$

 容易看出，时间演化算符满足

$$U(t_0, t_0) = 1$$

根据  $V(t)$  的幺正性，两个时间演化算符相继作用对应的乘法规则为

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = V(t_2)V^\dagger(t_1)V(t_1)V^\dagger(t_0) = V(t_2)V^\dagger(t_0) = U(t_2, t_0)$$

时间演化算符的性质

二 对  $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$  取  $t_2 = t_0$ ，即得

$$U(t_0, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_0, t_0) = 1$$

故时间演化算符的逆算符为

$$U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$$

由  $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$  和  $V(t)$  的幺正性推出

$$U^\dagger(t, t_0) = V(t_0)V^\dagger(t) = U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0)$$

这表明时间演化算符是么正算符

时间演化算符的性质

**证** 对  $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$  取  $t_2 = t_0$ ，即得

$$U(t_0, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_0, t_0) = 1$$

E 故时间演化算符的逆算符为

$$U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$$

由  $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$  和  $V(t)$  的幺正性推出

$$U^\dagger(t, t_0) = V(t_0)V^\dagger(t) = U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0)$$

这表明时间演化算符是么正算符

由于  $V(0) = 1$ ，取  $t_0 = 0$ ，有

$$U(t, 0) = V(t), \quad U^{-1}(t, 0) = V^\dagger(t)$$

 因而  $U(t, 0)$  就是联系 Heisenberg 绘景和相互作用绘景的幺正变换算符，即

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t,0) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = U(t,0) O^H(t) U^{-1}(t,0)$$

时间演化算符的微分方程

 从  $|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$  和态矢演化方程  $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I |\Psi(t)\rangle^I$  推出

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I = i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t) U(t, t_0)$$

这是时间演化算符满足的微分方程，结合边值条件  $U(t_0, t_0) = 1$ ，将解表达为

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) U(t_1, t_0)$$

时间演化算符的微分方程



 从  $|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$  和态矢演化方程  $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I |\Psi(t)\rangle^I$  推出

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I = i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t) U(t, t_0)$$



这是时间演化算符满足的微分方程，结合边值条件  $U(t_0, t_0) = 1$ ，将解表达为

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) U(t_1, t_0)$$



上式左右两边均包含时间演化算符，**重复迭代**，得到**级数**

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \\ + \dots + \left[ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \right] + \dots$$



这个级数用起来不够方便，需要进一步化简

时序乘积

 从现在起省略表示相互作用绘景的上标 I，本章余下内容均在此绘景中讨论

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t_1}} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) \\ + \dots + \left[ (-i)^n \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \dots \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t_{n-1}}} dt_n H_1(t_1) \dots H_1(t_n) \right] + \dots$$

里面，作为积分上限的时刻是降序排列的，即  $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq \dots \geq t_0$

由于积分上限相互依赖，这样的多重积分很难处理

时序乘积

从现在起省略表示相互作用绘景的上标 I，本章余下内容均在此绘景中讨论

在级数

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t_1}} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) \\ + \cdots + \left[ (-i)^n \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t_{n-1}}} dt_n H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) \right] + \cdots$$

里面，作为积分上限的时刻是降序排列的，即  $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq \dots \geq t_0$

 由于积分上限相互依赖，这样的多重积分很难处理

为了将每个积分上限都扩展到  $t$ ，引入**时序乘积** (time-ordered product) 的概念

 时序乘积使若干个含时算符的乘积强行按照它们相应的**时刻**从左到右**降序**排列

以  $n$  个  $H_1(t)$  算符为例，用  $T$  表示这种时间排序，有

$$\textbf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)\cdots H_1(t_n)] = H_1(t_{i_1})H_1(t_{i_2})\cdots H_1(t_{i_n}), \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n}$$

这里  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}$  是由  $t_1, t_2, \dots, t_n$  按照数值降序排列得到的

# 场算符的时序乘积

 利用阶跃函数  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  将标量场算符  $\phi(x)$  和  $\phi(y)$  的时序乘积表示为

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0 - y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0 - x^0) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$$

场算符的时序乘积

 利用阶跃函数  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  将标量场算符  $\phi(x)$  和  $\phi(y)$  的时序乘积表示为

$$\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0 - y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0 - x^0) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$$

如果一个算符包含一个费米子产生或湮灭算符，可称它为**费米子算符**

旋量场算符  $\psi(x)$  和它的 Dirac 共轭  $\bar{\psi}(x)$  都是费米子算符

对费米子算符作时序乘积时，需要顾及它们的反对易性质

因此，如果时间排序交换了两个相邻的费米子算符，则应该额外加上一个负号

比如，两个旋量场算符  $\psi_a(x)$  和  $\bar{\psi}_b(y)$  的时序乘积是

$$\begin{aligned} \mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] &= \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\theta(x^0 - y^0) - \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\theta(y^0 - x^0) \\ &= \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y), & x^0 \geq y^0 \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \end{aligned}$$

# 类空间隔与因果性

 在**狭义相对论**中， $(x - y)^2$  描述两个时空点  $x$  和  $y$  之间的时空间隔

 若  $(x - y)^2 < 0$ ，则称  $x$  和  $y$  具有**类空间隔**

 类似地， $(x - y)^2 > 0$  和  $(x - y)^2 = 0$  分别对应于**类时间隔**和**类光间隔**

类空间隔与因果性

 在狭义相对论中， $(x - y)^2$  描述两个时空点  $x$  和  $y$  之间的时空间隔

 若  $(x - y)^2 < 0$ , 则称  $x$  和  $y$  具有类空间隔

类似地,  $(x - y)^2 > 0$  和  $(x - y)^2 = 0$  分别对应于类时间隔和类光间隔

 如果  $x$  和  $y$  具有类时或类光间隔，那么，在任意惯性参考系中， $x^0$  和  $y^0$  的大小关系是确定的，即不能通过 Lorentz 变换改变时序

 假如两个事件具有因果联系，则它们发生的两个时空点必定具有类时或类光间隔，从而两个事件发生的先后次序是确定的

类空间隔与因果性

 在狭义相对论中， $(x - y)^2$  描述两个时空点  $x$  和  $y$  之间的时空间隔

 若  $(x - y)^2 < 0$ , 则称  $x$  和  $y$  具有类空间隔

类似地,  $(x - y)^2 > 0$  和  $(x - y)^2 = 0$  分别对应于类时间隔和类光间隔

 如果  $x$  和  $y$  具有类时或类光间隔，那么，在任意惯性参考系中， $x^0$  和  $y^0$  的大小关系是确定的，即不能通过 Lorentz 变换改变时序

 假如两个事件具有因果联系，则它们发生的两个时空点必定具有类时或类光间隔，从而两个事件发生的先后次序是确定的

**反过来，如果  $x$  和  $y$  具有类空间隔，则  $x^0$  和  $y^0$  的大小关系是不确定的，选取适当的惯性参考系，就可以得到  $x^0 > y^0$ 、 $x^0 = y^0$  和  $x^0 < y^0$  三种情况**

因此，如果两个事件发生的时空点具有类空间隔，它们发生的先后次序是不确定的，必定没有因果联系，否则将破坏因果性

## Pauli-Jordan 传播函数



Lorentz 对称性对时序乘积的定义提出一定的要求



 两个实标量场算符的对易子  $[\phi(x), \phi(y)]$  称为 **Pauli-Jordan 传播函数**, 表达为

$$\begin{aligned}
D_{\text{PJ}}(x - y) &\equiv [\phi(x), \phi(y)] \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ [a_p, a_q^\dagger] e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + [a_p^\dagger, a_q] e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \right\} \\
&= \int \frac{d^3 p \textcolor{brown}{d^3 q}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) [e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} - e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right] \\
&= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \sin[p \cdot (x - y)]
\end{aligned}$$



## Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958)



Pascual Jordan  
(1902–1980)



第三、四步用到产生湮灭算符的对易关系



 最后一步用到关系式  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{i}{2}(e^{-iz} - e^{iz})$

### **T[φ(x)φ(y)] 的 Lorentz 不变性**

 当  $x^0 - y^0 = 0$  时,  $\sin[p \cdot (x - y)] = \sin[p \cdot (x - y)]$ , 则被积函数是 p 的奇函数, 故对 p 积分的结果为零, 即

$$D_{\text{PJ}}(x - y) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \sin[p \cdot (x - y)] = 0$$

另一方面，由于体积元  $d^3p/E_p$  是 Lorentz 不变的， $D_{PJ}(x - y)$  是 Lorentz 不变量

 如前所述，如果  $x$  和  $y$  具有类空间隔，就一定能通过 Lorentz 变换使  $x^0 - y^0 = 0$

于是,  $D_{\text{PJ}}(x - y) = 0$  对所有类空间隔成立, 即

$$[\phi(x), \phi(y)] = D_{\text{PJ}}(x - y) = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$

### **T[φ(x)φ(y)] 的 Lorentz 不变性**

 当  $x^0 - y^0 = 0$  时,  $\sin[p \cdot (x - y)] = \sin[p \cdot (x - y)]$ , 则被积函数是 p 的奇函数, 故对 p 积分的结果为零, 即

$$D_{\text{PJ}}(x - y) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \sin[p \cdot (x - y)] = 0$$

另一方面，由于体积元  $d^3p/E_p$  是 Lorentz 不变的， $D_{PJ}(x-y)$  是 Lorentz 不变量

如前所述，如果  $x$  和  $y$  具有类空间隔，就一定能通过 Lorentz 变换使  $x^0 - y^0 = 0$

于是,  $D_{\text{PJ}}(x - y) = 0$  对所有类空间隔成立, 即

$$[\phi(x), \phi(y)] = D_{\text{PJ}}(x - y) = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$

也就是说，当  $(x - y)^2 < 0$  时，虽然两个实标量场算符  $\phi(x)$  与  $\phi(y)$  可能在不同惯性参考系中具有不同的时序，但一定满足  $\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x)$

因此，前面定义的时序乘积  $T[\phi(x)\phi(y)] = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$  在所有惯性系中相同，不会违背 Lorentz 对称性

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}$$



Dirac 旋量场的平面波展开式得

$$\begin{aligned}
& \{\psi_a(\mathbf{x}), \bar{\psi}_b(\mathbf{y})\} \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \sum_{\lambda \lambda'} \left\{ u_a(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v_a(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}, \right. \\
&\quad \left. \bar{u}_b(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger e^{iq \cdot y} + \bar{v}_b(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{q}, \lambda'} e^{-iq \cdot y} \right\} \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \sum_{\lambda \lambda'} \left[ u_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{u}_b(\mathbf{q}, \lambda') \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} \right. \\
&\quad \left. + v_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{v}_b(\mathbf{q}, \lambda') \{b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q}, \lambda'}\} e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \sum_{\lambda \lambda'} (2\pi)^3 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \text{ 产生湮灭算符的反对易关系} \\
&\quad \times [u_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{u}_b(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + v_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{v}_b(\mathbf{q}, \lambda') e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda} \left[ u_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{u}_b(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{v}_b(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot (x-y)} \right] \text{ 自旋求和关系} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}]
\end{aligned}$$

### Τ[ $\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)$ ] 的 Lorentz 不变性

记  $\partial_x^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ ，有

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} D_{\text{PJ}}(x-y)\end{aligned}$$

由于  $D_{PJ}(x - y) = 0$  对  $(x - y)^2 < 0$  成立，有

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (x-y)^2 < 0$$

**T**[ $\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)$ ] 的 Lorentz 不变性

记  $\partial_x^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ ，有

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} D_{PJ}(x-y)\end{aligned}$$

由于  $D_{PJ}(x - y) = 0$  对  $(x - y)^2 < 0$  成立，有

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$

**对于所有类空间隔，旋量场算符  $\psi_a(x)$  和  $\bar{\psi}_b(y)$  满足  $\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) = -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)$**

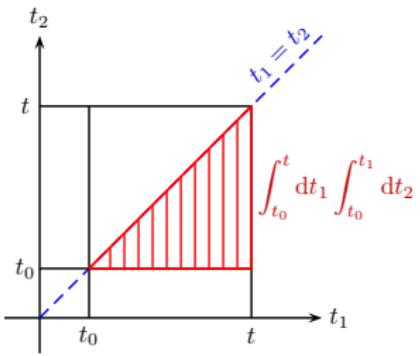
从而时序乘积  $T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] = \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y), & x^0 \geq y^0 \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$  在所有惯性系中相同

 可见，当时间排序交换了两个相邻的费米子算符时，必须额外加上一个负号才不会让时序乘积违背 Lorentz 对称性

# $U(t, t_0)$ 级数第 3 项

现在考虑  $U(t, t_0)$  级数的第 3 项  $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$

它包含一个二重积分，积分区域如左下图所示，先对  $t_2$  积分，再对  $t_1$  积分



# $U(t, t_0)$ 级数第 3 项

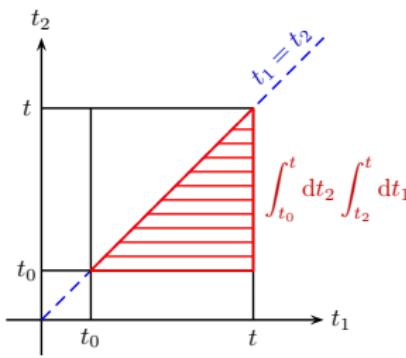
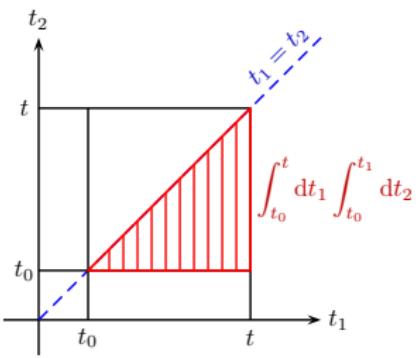
现在考虑  $U(t, t_0)$  级数的第 3 项  $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$

它包含一个二重积分，积分区域如左下图所示，先对  $t_2$  积分，再对  $t_1$  积分

这个二重积分可以重新表达为

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H_1(t_1)H_1(t_2)$$

第一步等价地改成先对  $t_1$  积分，再对  $t_2$  积分，积分区域不变，如中下图所示



# $U(t, t_0)$ 级数第 3 项

现在考虑  $U(t, t_0)$  级数的第 3 项  $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$

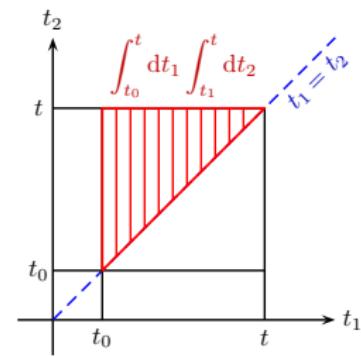
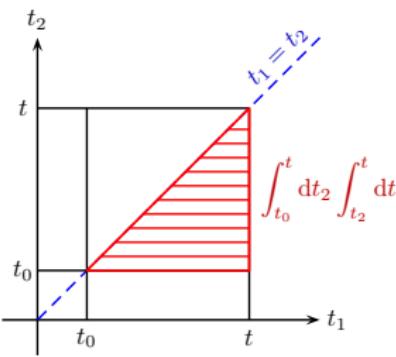
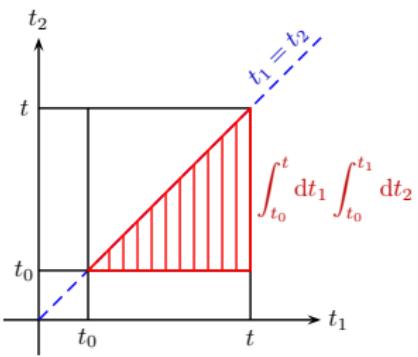
它包含一个二重积分，积分区域如左下图所示，先对  $t_2$  积分，再对  $t_1$  积分

这个二重积分可以重新表达为

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_1(t_2)H_1(t_1)$$

第一步等价地改成先对  $t_1$  积分，再对  $t_2$  积分，积分区域不变，如中下图所示

第二步交换了积分变量  $t_1$  和  $t_2$ ，对应的积分区域如右下图所示



# 扩展时间积分区间

利用上面的  $\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_1(t_2)H_1(t_1)$  推出

$$2! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$$

$$= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_1(t_2)H_1(t_1)$$

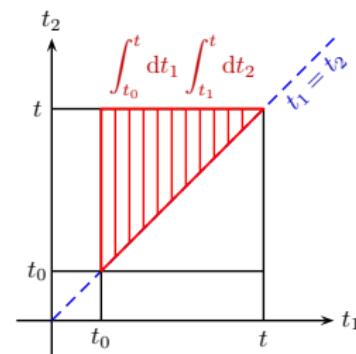
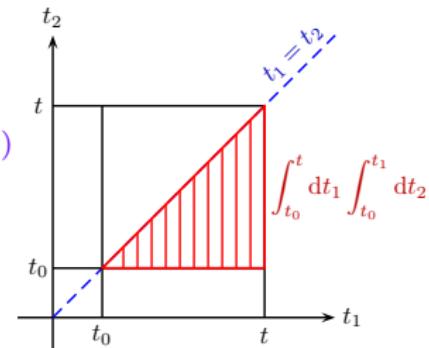
$$= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$$

这里利用时序乘积将  $t_1$  和  $t_2$  的积分范围都扩展到整个  $[t_0, t]$  区间，右上图与右下图的积分区域拼成一个正方形

第一步第一项中  $t_1$  是  $t_2$  的积分上限，显然  $t_1 \geq t_2$ ，因而  $H_1(t_1)H_1(t_2) = \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$

第一步第二项中  $t_1$  是  $t_2$  的积分下限，故  $t_2 \geq t_1$ ，此时  $H_1(t_2)H_1(t_1) = \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$

两项相加，就得到第二步的结果



# Dyson 级数



将上述讨论推广到  $U(t, t_0)$  级数的第  $n+1$  项，得

$$n! \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) = \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)]$$

 这里出现  $n!$  是因为此时对  $n$  个时间积分变量有  $n!$  种排列方式

Dyson 级数

 将上述讨论推广到  $U(t, t_0)$  级数的第  $n+1$  项，得

$$n! \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) = \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathsf{T}[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)]$$

**D** 这里出现  $n!$  是因为此时对  $n$  个时间积分变量有  $n!$  种排列方式

于是,  $U(t, t_0)$  级数可以用时序乘积表达为

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \\
&\quad + \cdots + \left[ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \cdots H_1^I(t_n) \right] + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \\
&\equiv T \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \right]
\end{aligned}$$



Freeman Dyson  
(1923–2020)

这个级数称为 **Dyson 级数**，它具有**指数函数的级数展开形式**，可用**指数记号**表示

S 矩阵

 **S 矩阵**，也称为**散射矩阵** (scattering matrix)，是量子散射理论的核心概念，它描述系统**从初态跃迁到末态**的概率振幅

 在相互作用绘景中， $S$  矩阵可以用时间演化算符来构造

假设系统的初态  $|i\rangle$  和末态  $|f\rangle$  均处于自由状态，而相互作用只发生在有限的时间间隔里，那么相对地，初始时刻处于遥远过去，终末时刻处于遥远未来

 这样的初末态称为渐近态 (asymptotic state)

S 矩阵

 **S 矩阵**，也称为**散射矩阵** (scattering matrix)，是量子散射理论的核心概念，它描述系统**从初态跃迁到末态**的概率振幅

 在相互作用绘景中， $S$  矩阵可以用时间演化算符来构造

假设系统的初态  $|i\rangle$  和末态  $|f\rangle$  均处于自由状态，而相互作用只发生在有限的时间间隔里，那么相对地，初始时刻处于遥远过去，终末时刻处于遥远未来

这样的初末态称为渐近态 (asymptotic state)

 将  $t$  时刻处描述系统的态矢记为  $|\Psi(t)\rangle$ ，它从遥远过去 ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ) 的初态  $|i\rangle$  演化而来，用时间演化算符  $U(t, t_0)$  表达为

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) |i\rangle$$

**S 矩阵元**  $S_{fi}$  定义为  $|\Psi(t)\rangle$  演化到遥远未来 ( $t \rightarrow +\infty$ ) 处与末态  $|f\rangle$  的内积,

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle f | \Psi(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle$$

# $S$ 算符



引入  $\textcolor{red}{S}$  算符，它在初态与末态之间的期待值就是  $S$  矩阵元  $S_{fi}$ ，即  $S_{fi} = \langle f | \textcolor{red}{S} | i \rangle$

与  $S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle$  比较，得  $S = U(+\infty, -\infty)$

由时间演化算符的幺正性可知， $S$  算符也是 $\textcolor{brown}{\text{么正}}$ 的， $S^\dagger S = 1$

# $S$ 算符



引入  **$S$  算符**，它在初态与末态之间的期待值就是  $S$  矩阵元  $S_{fi}$ ，即  $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$

与  $S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle$  比较，得  $S = U(+\infty, -\infty)$

由时间演化算符的幺正性可知， $S$  算符也是**幺正的**， $S^\dagger S = 1$

从而将  $S$  算符表达为**相互作用哈密顿量**  $H_1(t)$  的积分级数，

$$\begin{aligned} S &= U(+\infty, -\infty) = \mathcal{T} \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_1(t') \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \mathcal{T}[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \end{aligned}$$

在**局域场论**中， $H_1(t) = \int d^3x \mathcal{H}_1(x)$ ， $\mathcal{H}_1(x)$  是**相互作用哈密顿量密度**，故

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$$