

# 数 学 物 理 方 法

## 第四章 解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 9 月 15 日



## 第四章 解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点

 本章研究解析函数的 Taylor 展开式的推广，即 Laurent 展开式

 它是研究解析函数的奇点的重要工具

# §1 解析函数的 Laurent 展开

## §1.1 双边幂级数

考虑幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  和另一个级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$

它们之和  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  称为双边幂级数

假设幂级数的收敛半径为  $R$  ( $0 < R \leq +\infty$ )，则它在圆  $|z-a| < R$  上绝对收敛且内闭一致收敛，并具有解析的和函数，记作  $f_1(x)$

# §1 解析函数的 Laurent 展开

## §1.1 双边幂级数

考虑幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  和另一个级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$

它们之和  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  称为**双边幂级数**

假设幂级数的收敛半径为  $R$  ( $0 < R \leq +\infty$ )，则它在圆  $|z-a| < R$  上**绝对收敛**且**内闭一致收敛**，并具有**解析的和函数**，记作  $f_1(x)$

令  $\zeta = \frac{1}{z-a}$ ，那么第二个级数可改写为  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n$ ，假设它的收敛半径为  $\frac{1}{r}$

( $0 < \frac{1}{r} \leq +\infty$ )，则它在圆  $|\zeta| < \frac{1}{r}$  上**绝对收敛**且**内闭一致收敛**，具有解析的和函数

换句话说，级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$  当  $|z-a| > r$  ( $0 \leq r < +\infty$ ) 时**绝对收敛**且**内闭一**

**致收敛**，并具有**解析的和函数**，记作  $f_2(z)$

## 例 1

🏀 若  $r > R$ , 则级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  和  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$  没有公共收敛区域, 因而**双边**

**幂级数**  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  处处发散

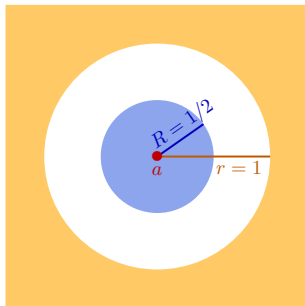
🍏 例 1 双边幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$$

🏈 正幂部分在圆  $|z| < 1/2$  内**绝对收敛**

🏈 负幂部分在单位圆外  $|z| > 1$  **绝对收敛**


⚽ 所以**原双边幂级数处处发散**



## 例 2

 若  $r = R$ , 则级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  和  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$  也没有公共收敛区域, 但圆周

$|z-a| = R = r$  上可能存在收敛点


 例 2 双边幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 z^n}$

 对于正幂部分, 根据收敛半径的 d'Alembert 计算公式, 有

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = 1, \quad R = \frac{1}{l} = 1$$

 因此正幂部分在单位圆内  $|z| < 1$  绝对收敛

 而负幂部分在单位圆外  $|z| > 1$  绝对收敛, 所以原双边幂级数没有公共收敛区域

 在单位圆周  $|z| = 1$  上, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$  收

敛 (参考第三章选读的 §2.4), 故原双边幂级数在单位圆周上绝对收敛

# 关于双边幂级数的定理

🎯 若  $r < R$ ，则级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  和  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$  有公共的收敛区域，即环域

$$H: r < |z-a| < R \quad (0 \leq r < R \leq +\infty)$$

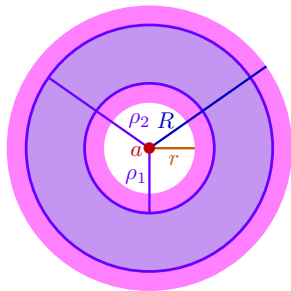
🎯 这时，根据上章的 Weierstrass 定理，有如下定理

❤️ 定理 双边幂级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  具有下列性质

① 在收敛环  $H$  内绝对收敛于  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ ，  
且在闭环  $r < \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2 < R$  上一致收敛  
(即在  $H$  上内闭一致收敛)

② 和函数  $f(z)$  在收敛环  $H$  内解析

③  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  在收敛环  $H$  内可以逐项求导和逐项积分



## 例 3

例 3 双边幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$

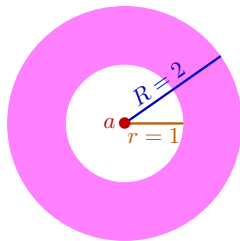
正幂部分在圆  $|z| < 2$  内绝对收敛于函数  $\frac{1}{1 - z/2} = \frac{2}{2 - z}$

负幂部分在单位圆外  $|z| > 1$  绝对收敛于函数  $\frac{1/z}{1 - 1/z} = \frac{1}{z - 1}$

所以原双边幂级数在环域  $H : 1 < |z| < 2$  中绝对收敛于函数

$$\frac{2}{2 - z} + \frac{1}{z - 1} = -\frac{z}{(z - 1)(z - 2)}$$

容易看出，该和函数在环域  $H$  中解析





## §1.2 解析函数的 Laurent 展开

 由上面的分析，**双边幂级数**在**收敛环**内具有**解析的和函数**，换句话说，它在**收敛环**内代表一个**解析函数**

**?** 反过来，在**环域**内**解析的函数**是否可以展开为**双边幂级数**呢？

**!** 下面的定理给出了肯定的答案

## §1.2 解析函数的 Laurent 展开

📍 由上面的分析，**双边幂级数**在**收敛环**内具有**解析**的**和函数**，换句话说，它在**收敛环**内代表一个**解析函数**

❓ 反过来，在**环域**内**解析**的**函数**是否可以展开为**双边幂级数**呢？

❗ 下面的定理给出了肯定的答案

💖 **Laurent 定理** 设函数  $f(z)$  在**环域**  $H: r < |z - a| < R$  ( $0 \leq r < R \leq +\infty$ ) 内**解析**，则在  $H$  内可以展开为**双边幂级数**：

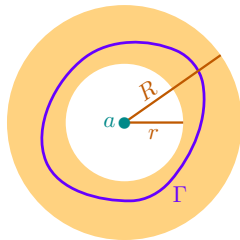
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n,$$

其中  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}),$

而  $\Gamma$  是**环内包围内圆**的**任一围线**，且**展开式**是**唯一**的



Pierre Alphonse Laurent  
(1813–1854)

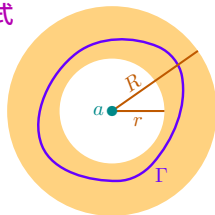


# Laurent 展开式

🎮  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$  称为  $f(z)$  在  $a$  点的 Laurent 展开式

🚂 右边称为 Laurent 级数,  $c_n$  称为 Laurent 系数

🔄 注 Laurent 定理在形式上与 Taylor 定理非常相似, 证明 (见选读内容) 的方法也相似, 了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的



# Laurent 展开式

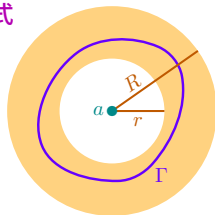
🎮  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  称为  $f(z)$  在  $a$  点的 **Laurent 展开式**

🚂 右边称为 **Laurent 级数**,  $c_n$  称为 **Laurent 系数**

🔄 **注** **Laurent 定理**在形式上与 **Taylor 定理**非常相似, **证明** (见**选读内容**) 的方法也相似, 了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的

🎉 一般来说, 即使**正幂项**的**系数**  $c_n$  也不能表示为**高阶导数**  $f^{(n)}(a)/n!$  的形式

💣 这是因为一般的  $f(z)$  在**闭圆**  $|z-a| \leq r$  上有**奇点**, 所以在  $\Gamma$  上的**积分**不满足应用 **Cauchy 高阶导数公式**的条件



# Laurent 展开式

🎮  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  称为  $f(z)$  在  $a$  点的 **Laurent 展开式**

🚂 右边称为 **Laurent 级数**,  $c_n$  称为 **Laurent 系数**

🔄 **注** **Laurent 定理**在形式上与 **Taylor 定理**非常相似, **证明** (见**选读内容**) 的方法也相似, 了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的

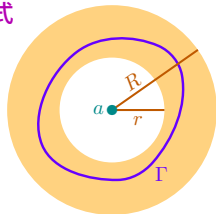
🎉 一般来说, 即使**正幂项**的**系数**  $c_n$  也不能表示为**高阶导数**  $f^{(n)}(a)/n!$  的形式

💣 这是因为一般的  $f(z)$  在**闭圆**  $|z-a| \leq r$  上有**奇点**, 所以在  $\Gamma$  上的**积分**不满足应用 **Cauchy 高阶导数公式**的条件

📍 如果  $f(z)$  在**闭圆**  $|z-a| \leq r$  上确实**没有奇点**, 那么就它就在**圆**  $|z-a| \leq R$  上**解析**, 这时 **Laurent 级数**应该退化为 **Taylor 级数**, **后者**是**前者**的特殊情况

👤 事实上, 这时有  $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = 0$

( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 这里用了 **Cauchy 积分定理**, 因为**被积函数**中在  $\Gamma$  所**包围的闭域**上**解析**



# 讨论

- ♟ 一般情况下，**Laurent 展开式**中有**负幂项**，因为  $f(z)$  在**闭圆**  $|z - a| \leq r$  上有**奇点**
- 8 但是， $f(z)$  的**奇点**不一定在  $a$
- 🎲 所以，**不要因为展开式**中有  $z - a$  的**负幂项**就**误以为**  $a$  是  $f(z)$  的**奇点**

# 讨论

👤 一般情况下，Laurent 展开式中有负幂项，因为  $f(z)$  在闭圆  $|z - a| \leq r$  上有奇点

8 但是， $f(z)$  的奇点不一定在  $a$

🎲 所以，不要因为展开式中有  $z - a$  的负幂项就误以为  $a$  是  $f(z)$  的奇点

🟢 例如，当  $1 < |z| < +\infty$  时，有

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$$

🦋 这个展开式中全是  $z$  的负幂项，但  $z = 0$  并不是被展开函数的奇点

🎪 这是因为展开式在  $z = 0$  附近并不成立

# 讨论

👤 一般情况下，**Laurent 展开式**中有**负幂项**，因为  $f(z)$  在**闭圆**  $|z - a| \leq r$  上有**奇点**

🎱 但是， $f(z)$  的**奇点**不一定在  $a$

🎲 所以，**不要因为展开式**中有  $z - a$  的**负幂项**就**误以为**  $a$  是  $f(z)$  的**奇点**

🟢 例如，当  $1 < |z| < +\infty$  时，有

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$$

🦋 这个**展开式**中全是  $z$  的**负幂项**，但  $z = 0$  **并不是被展开函数的奇点**

💜 这是因为**展开式**在  $z = 0$  **附近并不成立**

🎨 知道了 **Laurent 展开式**的**唯一性**，就可以用**任何方法**来求展开式，而不一定要用

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \text{ 来计算系数}$$

🖋️ 最常用的方法是利用**已知**的 **Taylor 级数展开式**，参见下面的展开实例



## §1.3 展开实例

例 4 在  $a = 0$  处展开  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  为 **Laurent 级数**

解  $f(z)$  有奇点  $z = 0$  和  $z = 1$

故  $f(z)$  分别在  $H_1 : 0 < |z| < 1$  和  $H_2 : 1 < |z| < +\infty$  上解析

在  $H_1$  上,

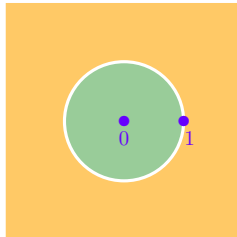
$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty} z^n$$

最后一步作替换  $n \rightarrow n+1$

在  $H_2$  上, 有  $0 < |1/z| < 1$ , 则


$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$$


最后一步作替换  $n \rightarrow n-2$



## §2 解析函数的零点与孤立奇点


### §2.1 解析函数的零点

 为了后面讨论的需要，这里简单介绍一下解析函数的零点的概念

  **$m$  阶零点定义** 若函数  $f(z)$  在  $a$  点解析，且


$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0$$


则  $a$  称为  $f(z)$  的  $m$  阶零点

 **一阶零点**亦称为**单零点**，满足  $f(a) = 0$  和  $f'(a) \neq 0$

## §2 解析函数的零点与孤立奇点


### §2.1 解析函数的零点


 为了后面讨论的需要，这里简单介绍一下**解析函数**的**零点**的概念

  **$m$  阶零点定义** 若函数  $f(z)$  在  $a$  点**解析**，且

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0$$

则  $a$  称为  $f(z)$  的  $m$  阶**零点**

 **一阶零点**亦称为**单零点**，满足  $f(a) = 0$  和  $f'(a) \neq 0$


 **注**  $f(z)$  在  $a$  点**解析**，即在**某圆**  $K: |z - a| < R$  内**解析**


 在**该圆**内， $f(z)$  可展开为 **Taylor 级数**  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ ，其中  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

 如果**所有的系数均为零**，则  $f(z)$  在  $K$  内**恒为零**


 若  $f(z)$  在  $K$  内**不恒为零**，则上述定义中的  $m$  值总是**存在的**


# 零点举例

 **例 1**  $f(z) = \sin z$  的零点为  $z_n = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )


 由于  $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ ，故所有的  $z_n$  都是单零点


# 零点举例

 **例 1**  $f(z) = \sin z$  的零点为  $z_n = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )


 由于  $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ , 故所有的  $z_n$  都是单零点


 **例 2** 显然  $z = 0$  是函数  $f(z) = z - \sin z$  的零点

 由于  $f'(z_n) = (1 - \cos z)|_{z=0} = 0$ ,  $f''(0) = \sin z|_{z=0} = 0$


 而  $f'''(0) = \cos z|_{z=0} = 1 \neq 0$ , 故  $z = 0$  是  $f(z)$  的三阶零点


# 零点举例


 **例 1**  $f(z) = \sin z$  的零点为  $z_n = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

 由于  $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ , 故**所有的**  $z_n$  都是**单零点**

 **例 2** 显然  $z = 0$  是**函数**  $f(z) = z - \sin z$  的**零点**


 由于  $f'(z_n) = (1 - \cos z)|_{z=0} = 0$ ,  $f''(0) = \sin z|_{z=0} = 0$

 而  $f'''(0) = \cos z|_{z=0} = 1 \neq 0$ , 故  $z = 0$  是  $f(z)$  的**三阶零点**

 **例 3**  $f(z) = (z - a)^m$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1}, \quad f''(z) = m(m-1)(z - a)^{m-2}, \quad \dots$$

$$f^{(n)}(z) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(z - a)^{m-n} = \frac{m! (z - a)^{m-n}}{(m-n)!}, \quad n \leq m$$

 有  $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$  和  $f^{(m)}(a) = m! \neq 0$

 故  $a$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点

## 例 4

🍊 例 4  $f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ), 其中  $\varphi(z)$  在  $a$  点解析且  $\varphi(a) \neq 0$

🔧 由  $f'(z) = m(z - a)^{m-1} \varphi(z) + (z - a)^m \varphi'(z)$  得  $f'(a) = 0$


🍇 类似可得  $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$

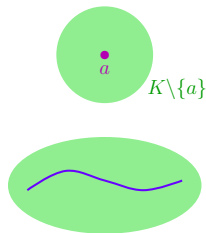
👉 但  $f^{(m)}(a) = m! \varphi(a) \neq 0$

🍷 故  $a$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点

## §2.2 解析函数的孤立奇点及其分类


**孤立奇点定义** 如果函数  $f(z)$  以  $a$  为奇点，但在  $a$  的某去心邻域  $K \setminus \{a\}$ ：  
 $0 < |z - a| < R$  中解析，则  $a$  称为  $f(z)$  的孤立奇点 (isolated singularity)


 粗略地说，如果函数  $f(z)$  以  $a$  为奇点，但在  $a$  附近没有别的奇点，则  $a$  就是  $f(z)$  的孤立奇点，所以这一定义是非常直观的






## §2.2 解析函数的孤立奇点及其分类


 **孤立奇点定义** 如果函数  $f(z)$  以  $a$  为奇点, 但在  $a$  的某去心邻域  $K \setminus \{a\}$  :  $0 < |z - a| < R$  中解析, 则  $a$  称为  $f(z)$  的孤立奇点 (isolated singularity)


 粗略地说, 如果函数  $f(z)$  以  $a$  为奇点, 但在  $a$  附近没有别的奇点, 则  $a$  就是  $f(z)$  的孤立奇点, 所以这一定义是非常直观的

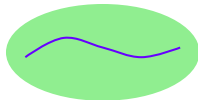
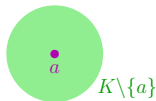
 **去心邻域  $K \setminus \{a\}$  :**  $0 < |z - a| < R$  是内半径为零的环境,  $f(z)$  在其中解析, 则

可以展开为 **Laurent 级数** 
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

 展开式中的**正幂部分**  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$  称为**正则部分**

 而**负幂部分**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$  称为**主要部分**

 由于现在展开式在  $a$  点附近成立, 故其中**负幂项的多少**可以刻画  $f(z)$  在  $a$  点的**奇性的大小**, **Laurent 展开式的主要用途**正在于此



# 孤立奇点的分类



根据**主要部分**的不同情况，可以为**孤立奇点分类**



## 孤立奇点分类的定义



1 如果**主要部分**为零，则  $a$  称为  $f(z)$  的**可去奇点** (removable singularity)



2 如果**主要部分**为  $\sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ ，其中  $c_{-m} \neq 0$ ，则  $a$  称为  $f(z)$  的  $m$  **阶极点**

(pole)， $m = 1$  时亦称为**单极点**



3 如果**主要部分**有**无穷多项**，则  $a$  称为  $f(z)$  的**本性奇点** (essential singularity)

## §3 各种孤立奇点的判断

### §3.1 可去奇点

🍌 例 1 函数  $\frac{\sin z}{z}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析, 故可以展开为 Laurent 级数


$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

👑 由于展开式的主要部分为零, 按定义,  $z = 0$  是可去奇点

🎡 如果只看右边幂级数, 其收敛半径为  $+\infty$ , 故它在复平面上解析, 包括  $z = 0$  点

## §3 各种孤立奇点的判断


### §3.1 可去奇点


 **例 1** 函数  $\frac{\sin z}{z}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析, 故可以展开为 **Laurent 级数**


$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

 由于展开式的**主要部分**为零, 按定义,  $z = 0$  是**可去奇点**

 如果只看右边**幂级数**, 其**收敛半径**为  $+\infty$ , 故它在**复平面**上解析, 包括  $z = 0$  点

 由于函数  $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$  在**复平面**上与以上**幂级数**相等, 故  $f(z)$  在**复平面**上解析, 包括  $z = 0$  点

 可见, 只要对**原来的函数**  $\frac{\sin z}{z}$  适当补上  $z = 0$  处的**定义**, 即可构造出一个**解析函数**  $f(z)$ , 所以  $z = 0$  称为**可去奇点**是非常适当的

 一般情况下, 只要令  $f(a) = c_0$  即可将**可去奇点**  $a$  变为**解析点**

# 判断可去奇点的定理

🧢 下面的定理用于判断可去奇点

💙 可去奇点定理 函数  $f(z)$  的孤立奇点  $a$  为可去奇点的充要条件是


$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$$

其中  $b \neq \infty$

## §3.2 极点

 **例 2** 函数  $\frac{e^z}{z}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内**解析**，故可以展开为 **Laurent 级数**


$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$


 由于展开式的**主要部分**有**一项**，按定义， $z = 0$  是**单极点**


## §3.2 极点

 **例 2** 函数  $\frac{e^z}{z}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析, 故可以展开为 **Laurent 级数**

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

 由于展开式的**主要部分**有一项, 按定义,  $z = 0$  是**单极点**

 下面的定理用于判断**极点**

  **$m$  阶极点定理** 若  $a$  是  $f(z)$  的**孤立奇点**, 则下列**三条命题等价**

①  $f(z)$  在  $a$  的**主要部分**为  $\sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$  ( $c_{-m} \neq 0$ ), 即  $a$  为  **$m$  阶极点**

②  $f(z)$  在  $a$  的**某去心领域**内可表达为  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ , 其中  $\varphi(z)$  在  $a$  **解析**, 且  $\varphi(a) \neq 0$

③  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  以  $a$  为  **$m$  阶零点**


 **注** 其中**第一条**是  **$m$  阶极点**的定义, 其它两条也很直观, **证明**见**选读内容**


# 极点举例


 **例 3** 再回头看**例 2** 的函数  $\frac{e^z}{z}$ ，由于  $e^z$  解析，且  $e^0 = 1 \neq 0$ ，根据**定理的第二条**， $z = 0$  是该函数的**单极点**



# 极点举例


 **例 3** 再回头看**例 2** 的函数  $\frac{e^z}{z}$ ，由于  $e^z$  解析，且  $e^0 = 1 \neq 0$ ，根据**定理的第二条**， $z = 0$  是该函数的**单极点**


 **例 4** 考虑函数  $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ ，易知  $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 都是其**孤立奇点**


 而且它们都是  $\frac{1}{\cot z} = \frac{\sin z}{\cos z}$  的**单零点**

 根据**定理的第三条**， $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 都是  $\cot z$  的**单极点**


## 极点举例


 **例 3** 再回头看**例 2** 的函数  $\frac{e^z}{z}$ ，由于  $e^z$  解析，且  $e^0 = 1 \neq 0$ ，根据**定理的第二条**， $z = 0$  是该函数的**单极点**

 **例 4** 考虑函数  $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ ，易知  $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 都是其**孤立奇点**


 而且它们都是  $\frac{1}{\cot z} = \frac{\sin z}{\cos z}$  的**单零点**


 根据**定理的第三条**， $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 都是  $\cot z$  的**单极点**


 **例 5** 考虑函数  $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ ，由 **§2 例 2** 知  $z = 0$  是  $z - \sin z$  的**三阶零点**

 根据**定理的第三条**， $z = 0$  是  $f(z)$  的**三阶极点**


# 极点举例


 **例 3** 再回头看**例 2** 的函数  $\frac{e^z}{z}$ ，由于  $e^z$  解析，且  $e^0 = 1 \neq 0$ ，根据**定理的第二条**， $z = 0$  是该函数的**单极点**


 **例 4** 考虑函数  $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ ，易知  $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 都是其**孤立奇点**

 而且它们都是  $\frac{1}{\cot z} = \frac{\sin z}{\cos z}$  的**单零点**

 根据**定理的第三条**， $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 都是  $\cot z$  的**单极点**


 **例 5** 考虑函数  $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ ，由 §2 例 2 知  $z = 0$  是  $z - \sin z$  的**三阶零点**

 根据**定理的第三条**， $z = 0$  是  $f(z)$  的**三阶极点**

 由**上述定理**，容易得到以下关于**极点判定**的推论

 **推论** 函数  $f(z)$  的**孤立奇点**  $a$  为**极点**的**充要条件**是

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

 **这一推论**主要用来判定一个**孤立奇点**是否**极点**

 若要进一步判定其**阶数**，就需要用**上面的定理**

## §3.3 本性奇点

👗 由前面关于可去奇点和极点的讨论，容易得到以下判定本性奇点的定理

💛 本性奇点定理 函数  $f(z)$  的孤立奇点  $a$  为本性奇点的充要条件是

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \text{ 不存在}$$

👚 即  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  不为有限值，亦不为  $\infty$

👔 这说明在本性奇点处极限  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  与  $z \rightarrow a$  的方式有关

## §3.3 本性奇点

👗 由前面关于可去奇点和极点的讨论，容易得到以下判定本性奇点的定理

💛 本性奇点定理 函数  $f(z)$  的孤立奇点  $a$  为本性奇点的充要条件是

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \text{ 不存在}$$

👕 即  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  不为有限值，亦不为  $\infty$

👕 这说明在本性奇点处极限  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  与  $z \rightarrow a$  的方式有关

🥑 例 6 函数  $e^{1/z}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析，故可以展开为 Laurent 级数

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

👤 展开式的主要部分有无穷多项，按定义， $z=0$  是本性奇点

👤 当  $z = x \in \mathbb{R}$  时，有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$  和  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

👤 可见，极限  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$  不存在