

数学物理方法

第八章 Fourier 变换法

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 10 月 1 日



第八章 Fourier 变换法

- 上一章研究了求解数理方程定解问题的分离变量法
 - 由于所考虑的问题都只涉及两个自变量，所以情况比较简单
 - 如果问题涉及多个自变量，情况就会比较复杂
 - 在曲线坐标系中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
 - 它们的解就是所谓的特殊函数
 - 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法

第八章 Fourier 变换法

- 上一章研究了求解数理方程定解问题的分离变量法
 - 由于所考虑的问题都只涉及两个自变量，所以情况比较简单
 - 如果问题涉及多个自变量，情况就会比较复杂
 - 在曲线坐标系中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
 - 它们的解就是所谓的特殊函数
 - 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法
 - 分离变量法适用于有界区间或有界区域
 - 对于无界区间或无界区域上的数学物理方程定解问题，常常使用 Fourier 变换法
 - Fourier 变换法是积分变换法的一种，另一种常用的积分变换法是 Laplace 变换法
 - 积分变换法的基本精神也是分离变量，只是形式上不甚明显
 - 本章介绍 Fourier 变换法，对于其它积分变换法，本课程不作介绍

§1 Fourier 变换

§1.1 复数形式的 Fourier 级数

 函数族 $\{e^{inx/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 中任意两个函数在区间 $[-l, l]$ 上的内积定义为

$$(e^{im\pi x/l}, e^{in\pi x/l}) \equiv \int_{-l}^l (e^{im\pi x/l})^* e^{in\pi x/l} dx = \int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

 注意内积定义中出现的**复共轭**，这是第七章关于**实函数内积定义**的**推广**

 注 内积是普通三维空间中矢量点积的推广

由于矢量 a 与自身的内积 $a \cdot a = |a|^2$ 是其长度平方，一定是实数。

 作为它的推广，函数与自身的内积（即模方）应该是实数。

所以，复值函数内积定义中出现复共轭是很容易理解的

内积表达式

 当 $m \neq n$ 时, $e^{im\pi x/l}$ 与 $e^{in\pi x/l}$ 的内积为

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx &= \frac{l e^{i(n-m)\pi x/l}}{i(n-m)\pi} \Big|_{-l}^l = \frac{l [e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}]}{i(n-m)\pi} \\ &= \frac{2l \sin[(n-m)\pi]}{(n-m)\pi} = 0 \end{aligned}$$

这说明函数族 $\{e^{in\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上是正交的

 当 $m = n$ 时，内积变成 $\int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx = \int_{-l}^l dx = 2l$

可以将这两种情况合起来，**内积**表达为

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi x/l}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/l}) = \int_{-l}^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi x/l} \mathrm{d}x = 2l\delta_{mn}$$

完备性

 可以证明，函数族 $\{e^{inx/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上还是完备的

因此，区间 $[-l, l]$ 上任何解析性质良好的函数 $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\pi x/l}$$

$$\text{由 } \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi = \int_{-l}^l \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e^{i(m-n)\pi\xi/l} d\xi = 2l \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m \delta_{mn} = 2l f_n$$

得到系数表达式

$$f_n = \frac{1}{2l} \int_{-1}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

完备性

 可以证明，函数族 $\{e^{inx/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上还是完备的

因此，区间 $[-l, l]$ 上任何解析性质良好的函数 $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\pi x/l}$$

$$\text{由 } \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e^{i(m-n)\pi\xi/l} d\xi = 2l \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m \delta_{mn} = 2l f_n$$

得到系数表达式

$$f_n = \frac{1}{2l} \int_{-1}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

如果 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，则 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx/l}$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$

成立，它就是微积分中的复数形式 Fourier 级数

注 函数族 $\{e^{in\phi}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 等价于 $\{\cos n\phi, \sin n\phi\}_{n=0}^{+\infty}$ ，它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是完备的，令 $\phi = \pi x/l$ ，容易知道函数族 $\{e^{in\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上是完备的

§1.2 Fourier 变换

🎬 現在考慮展開式 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx/l}$ 當 $l \rightarrow \infty$ 的極限

 将系数表达式 $f_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi$ 代入这个展开式，得

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-1}^l f(\xi) e^{-i n \pi \xi / l} d\xi \right] e^{i n \pi x / l}$$

 令 $k_n \equiv \frac{n\pi}{l}$, $\Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{l}$, 则 $\frac{\Delta k_n}{2\pi} = \frac{1}{2l}$, 将上式改写为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^l f(\xi) e^{-i\mathbf{k}_n \xi} d\xi \right] e^{i\mathbf{k}_n x} \Delta k_n$$

 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $\Delta k_n \rightarrow 0$, k_n 的取值由分立变为连续, 上式的求和变为积分, 得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk$$

Fourier 变换和反变换

 观察 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk$

 如果定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$ 为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$



Joseph Fourier (1768–1830)

则 $F(k)$ 的 Fourier 反变换 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$



$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$



Joseph Fourier
(1768–1830)



原函数和像函数的关系

可以表示为 $f(x) \leftrightarrow F(k)$



$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)]$$

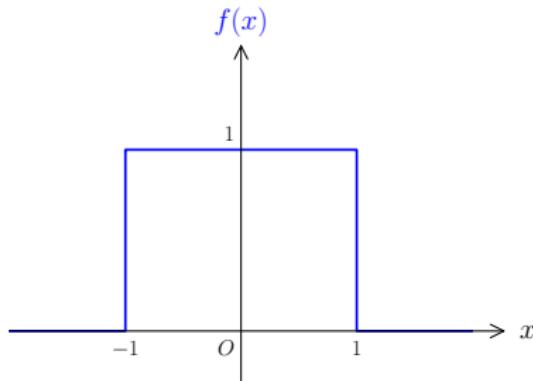
例 1

例 1 计算矩形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

的 Fourier 变换 $F(k)$

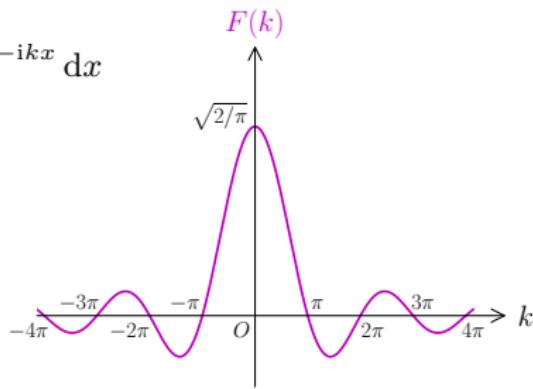
解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为



$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (\cos kx - i \sin kx) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}$$



例 2

例 2 计算函数 $f(x) = e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换 $F(k)$ ，其中 $a > 0$

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

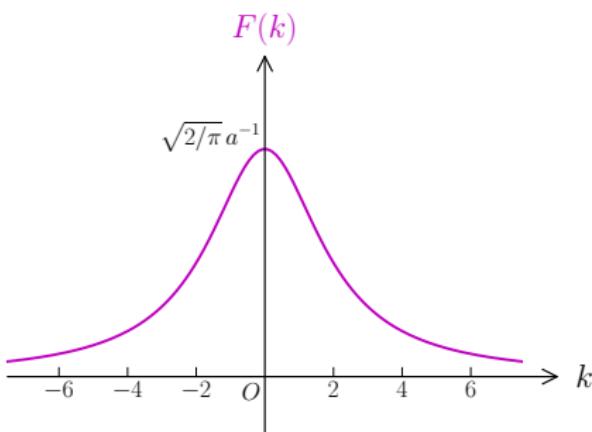
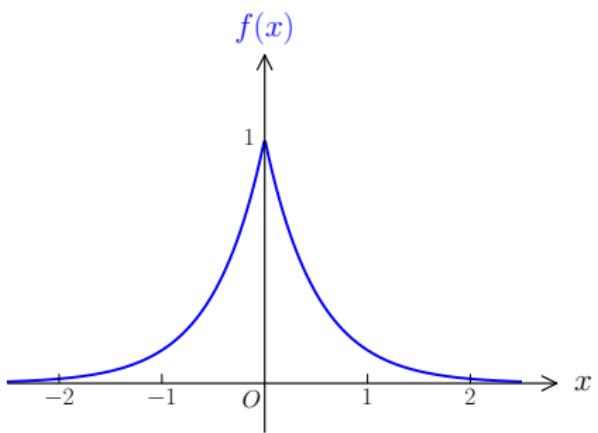
$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I$$

其中积分

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \int_0^\infty e^{-ax} \cos kx \, dx = -\frac{1}{a} \int_0^\infty \cos kx \, de^{-ax} \\
 &= -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos kx \Big|_0^\infty - \frac{k}{a} \int_0^\infty e^{-ax} \sin kx \, dx = \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} \int_0^\infty \sin kx \, de^{-ax} \\
 &= \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} e^{-ax} \sin kx \Big|_0^\infty - \frac{k^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \cos kx \, dx = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2} I
 \end{aligned}$$

故 $I = \frac{a}{a^2 + k^2}$, 从而得到 $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$

例 2 图像



$$f(x) = e^{-ax}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

§1.3 二维与三维 Fourier 变换

考虑二元函数 $f(x, y)$, 先把 y 看作参数, 对 x 作 Fourier 变换

得到像函数 $\tilde{F}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-ikx} dx$

再把 k 当作参数, 对 y 作 Fourier 变换, 得到像函数

$$F(k, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(k, y) e^{-il y} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

§1.3 二维与三维 Fourier 变换

考虑二元函数 $f(x, y)$, 先把 y 看作参数, 对 x 作 Fourier 变换

得到像函数 $\tilde{F}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-ikx} dx$

 再把 k 当作参数, 对 y 作 Fourier 变换, 得到像函数

$$F(k, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(k, y) e^{-ily} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

反过来，把 k 当作参数，对 l 作 Fourier 反变换，有

$$\tilde{F}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, l) e^{ily} dl$$

 再把 y 当作参数, 对 k 作 Fourier 反变换, 得到原函数

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(k, y) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, l) e^{i(kx+ly)} dk dl$$

多维 Fourier 变换关系

这样就建立了**二维 Fourier 变换与反变换关系**

$$F(k, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, l) e^{i(kx+ly)} dk dl$$

类似地，对于**三元函数** $f(x, y, z)$ ，简记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ， $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$

则 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z$ ，有**三维 Fourier 变换与反变换关系**

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

对于一般的 n 元函数，也有类似结果

§1.4 Fourier 变换的性质



接下来介绍 Fourier 变换的性质



在作 Fourier 变换和反变换计算时，可以引用有关性质



也可以直接计算，相当于把有关性质的证明包含在计算过程中



接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$ ， $f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)$ ($i = 1, 2$)，则有以下性质

§1.4 Fourier 变换的性质

接下来介绍 Fourier 变换的性质

在作 Fourier 变换和反变换计算时，可以引用有关性质

也可以直接计算，相当于把有关性质的证明包含在计算过程中

接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$, $f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)$ ($i = 1, 2$)，则有以下性质

1 线性定理： $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \leftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$ ，其中 a_1 和 a_2 是常数

这一性质显而易见，直接来源于积分的线性性质

证：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{-ikx} dx + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{-ikx} dx \\ &= a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)\end{aligned}$$

微分定理

2 微分定理：如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$ ，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (ik)^n F(k)$$

微分定理

2 微分定理：如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$ ，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (ik)^n F(k)$$

注 学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$ ，则意味着它在远处是平坦的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$ ，于是以上条件只需要第一个就可以了

💣 但是，这在数学上并非总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$

💥 它的一阶导数为 $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ ，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

💡 所以同时列出这些条件是必要的

微分定理

2 微分定理：如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$ ，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}k)^n F(k)$$

 **注** 学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$ ，则意味着它在远处是平坦的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$ ，于是以上条件只需要第一个就可以了

 但是，这在数学上并非总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$

 它的一阶导数为 $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ ，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

 所以同时列出这些条件是必要的

 **证：**

$$\begin{aligned} f'(x) &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-\mathrm{i}kx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. f(x) e^{-\mathrm{i}kx} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{-\mathrm{i}k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}kx} dx = \mathrm{i}kF(k) \end{aligned}$$

 第二步用了分部积分，同理可证 $n > 1$ 的情况成立

卷积

若 $f(\pm\infty) = 0$ ，对 Fourier 反变换 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$ 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk &= f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ikF(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \frac{de^{ikx}}{dx} dk\end{aligned}$$

可见，微分定理意味着求导与积分可以交换，但应注意需要满足的条件

卷积

若 $f(\pm\infty) = 0$ ，对 Fourier 反变换 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$ 求导，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk &= f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ikF(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \frac{de^{ikx}}{dx} dk \end{aligned}$$

可见，微分定理意味着求导与积分可以交换，但应注意需要满足的条件

函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积定义为 $f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$

令 $y = x - \xi$ ，则 $d\xi = -dy$ ， $f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(x - y) f_2(y) (-dy)$

将积分变量 y 换成 ξ ，得 $f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi$

这是卷积定义的等价表达式，它表明 $f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$

卷积定理

3 卷积定理: $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注 这一定理主要用于由像函数求原函数

基本前提是像函数 $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的原函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 已经知道或容易求出

卷积定理

3 卷积定理: $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注 这一定理主要用于由像函数求原函数

 基本前提是像函数 $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的原函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 已经知道或容易求出

证：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x - \xi) e^{-ikx} dx \right] d\xi \\ y = x - \xi \quad \rightarrow \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-ik(y+\xi)} dy \right] d\xi \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-iky} dy \right] \\ &= F_1(k) F_2(k)\end{aligned}$$

延迟定理和积分定理

4 延迟定理: $f(x - \xi) \leftrightarrow e^{-ik\xi} F(k)$, 其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证: 作变量替换 $y = x - \xi$, 得

$$\begin{aligned} f(x - \xi) &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\textcolor{blue}{x} - \xi) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\textcolor{blue}{y}) e^{-ik(\textcolor{blue}{y} + \xi)} dy \\ &= e^{-ik\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy = e^{-ik\xi} F(k) \end{aligned}$$

延迟定理和积分定理

4 延迟定理: $f(x - \xi) \leftrightarrow e^{-ik\xi} F(k)$, 其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证：作变量替换 $y = x - \xi$ ，得

$$\begin{aligned} f(x - \xi) &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\textcolor{blue}{x} - \xi) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\textcolor{blue}{y}) e^{-ik(\textcolor{blue}{y} + \xi)} dy \\ &= e^{-ik\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy = e^{-ik\xi} F(k) \end{aligned}$$

5 积分定理: 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$, 则 $g(x) \equiv \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \leftrightarrow \frac{F(k)}{ik}$

证：设 $g(x) \leftrightarrow G(k)$ ，由于 $g(\pm\infty) = 0$ ，应用微分定理得 $\mathcal{F}[g'(x)] = ikG(k)$

 另一方面，有 $g'(x) = f(x)$ ，故 $\mathcal{F}[g'(x)] = \mathcal{F}[f(x)] = F(k)$

 比较两式，得 $ikG(k) = F(k)$ ，即 $G(k) = \frac{F(k)}{ik}$

相似定理

6 相似定理: $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$, 其中常数 $a \neq 0$

 证: 若 $a > 0$, 则

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ikx} dx$$

$$y = ax \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky/a} dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

 若 $a < 0$, 则

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ikx} dx$$

$$y = ax \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y) e^{-iky/a} dy = -\frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

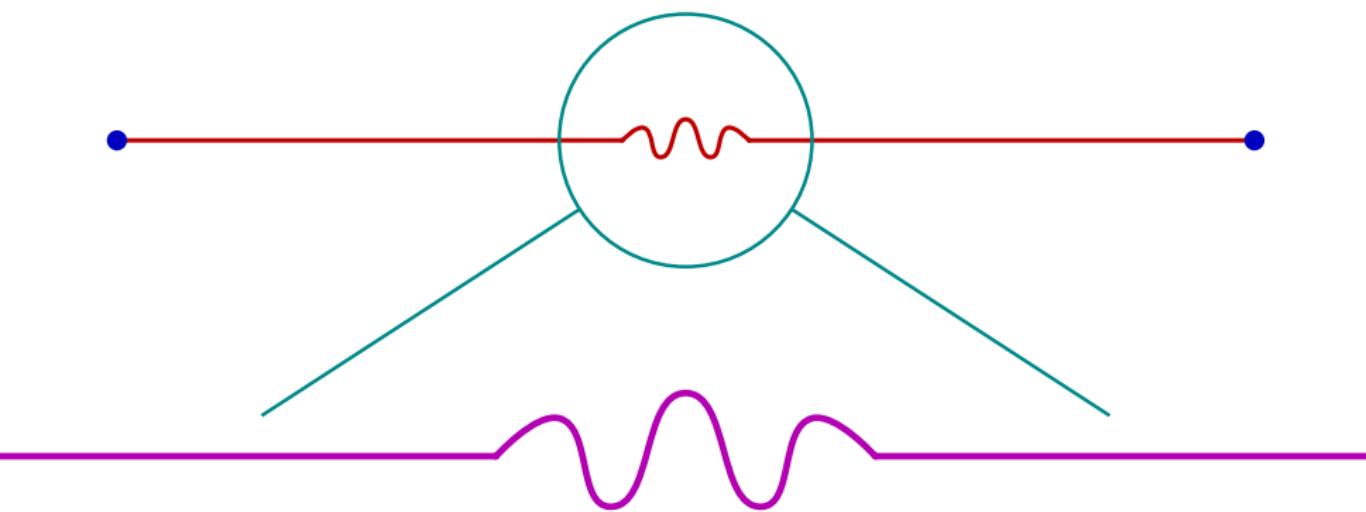
§2 无界弦的自由振动

无界弦指无穷长的弦，实际上并不存在

但是，如果弦较长，而我们所关心的部分离边界较远

在较短时间内，边界对所关心的部分尚未发生作用

就可以忽略边界的存在，从而将有界弦抽象为无界弦



§2.1 Fourier 变换法

 考虑无界弦在初始激励下的振动，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

 注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm\infty} = 0$

§2.1 Fourier 变换法

考虑无界弦在初始激励下的振动，定解问题为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \end{array} \right.$$

 注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pm\infty} = 0$

 下面用 Fourier 变换法求解这个定解问题

由于 t 的变化范围是 $(0, +\infty)$, x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$

因此应该对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x, t) \leftrightarrow U(k, t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

常微分方程初值问题

$$u(x, t) \leftrightarrow U(k, t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

 对一维齐次波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 x 方向上作 Fourier 变换，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-ikx} dx$$

线性定理  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-ikx} dx - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} dx$

微分定理  $= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (ik)^2 U = \frac{d^2 U}{dt^2} + k^2 a^2 U$

常微分方程初值问题

$$u(x, t) \leftrightarrow U(k, t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

对一维齐次波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 x 方向上作 Fourier 变换，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-ikx} dx$$

线性定理 $\rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-ikx} dx - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} dx$

微分定理 $\rightarrow = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (ik)^2 U = \frac{d^2 U}{dt^2} + k^2 a^2 U$

从而得到**常微分方程**的初值问题
$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dt^2} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \frac{dU}{dt} \Big|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$$

初值条件来自**初始条件** $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$ 的 Fourier 变换

解 $U(k, t)$

✿ 常微分方程初值问题
$$\begin{cases} \frac{d^2U}{dt^2} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$$
 的解是

$$U(k, t) = \Phi(k) \cos kat + \Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}$$

$$\frac{dU}{dt} = -ka\Phi(k) \sin kat + \Psi(k) \cos kat$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -k^2 a^2 \Phi(k) \cos kat - ka\Psi(k) \cos kat = -k^2 a^2 U$$

✿ 剩下的问题是将 $U(k, t)$ 作 Fourier 反变换求出原函数 $u(x, t)$ ，有

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] + \mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right]$$

Fourier 反变换计算

 根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$ ，有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat}) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x-at)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x+at)} dk \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]\end{aligned}$$

Fourier 反变换计算

 根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$ ，有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat}) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x-at)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x+at)} dk \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]\end{aligned}$$

 利用 $\int_0^t \cos kat \tau d\tau = \frac{\sin ka\tau}{ka} \Big|_0^t = \frac{\sin kat}{ka}$ 、 $\psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$ 和上式结果，得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^t \Psi(k) \cos kat \tau d\tau \right] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[\Psi(k) \cos kat \tau] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\psi(x-a\tau) + \psi(x+a\tau)] d\tau\end{aligned}$$

 第二步利用了 Fourier 反变换的线性性，即交换了对 τ 积分和对 k 积分的顺序

d'Alembert 公式

 作变量替换 $\xi = x - a\tau$ ，则 $d\tau = -\frac{d\xi}{a}$ ，有

$$\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - a\tau) d\tau = -\frac{1}{2a} \int_x^{x-at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^x \psi(\xi) d\xi$$

 令 $\xi = x + a\tau$ ，则 $d\tau = \frac{d\xi}{a}$ ，有 $\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + a\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

d'Alembert 公式

🌵 作变量替换 $\xi = x - a\tau$ ，则 $d\tau = -\frac{d\xi}{a}$ ，有

$$\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - a\tau) d\tau = -\frac{1}{2a} \int_x^{x-at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^x \psi(\xi) d\xi$$

🌾 令 $\xi = x + a\tau$ ，则 $d\tau = \frac{d\xi}{a}$ ，有 $\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + a\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka} \right] = \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - a\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + a\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

🌽 $u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] + \mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka} \right]$ 化为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$



🌺 这是最终结果，称为 **d'Alembert 公式**

Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

如果初始速度 $\psi(x) = 0$ ，则 **d'Alembert 公式化为**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$$

处的初始位移为 $\varphi(x_0)$

令 $x_0 = x - at$ ，则 $x = x_0 + at$ ， $\varphi(x - at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x - at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形随时间 t 向右移动至 $x = x_0 + at$ 处

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

如果初始速度 $\psi(x) = 0$ ，则 **d'Alembert 公式化为**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$$

● $x = x_0$ 处的**初始位移**为 $\varphi(x_0)$

● 令 $x_0 = x - at$ ，则 $x = x_0 + at$ ， $\varphi(x - at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x - at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 t 向右移动**至 $x = x_0 + at$ 处

● 令 $x_0 = x + at$ ，则 $x = x_0 - at$ ， $\varphi(x + at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x + at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形**随时间 t 向左移动**至 $x = x_0 - at$ 处

因此， $\psi(x) = 0$ 时的物理图像是初始位移的波形**一半向右传播，一半向左传播**

$\psi(x) \neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列**右行波**和一列**左行波**叠加而成

Fourier 变换法的本质

 对无界问题用 Fourier 变换法，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解

 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解

 两者的精神一致

Fourier 变换法的本质

 对无界问题用 Fourier 变换法，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解

 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解

 两者的精神一致

 由 $u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k, t) e^{ikx} dk$ 可以看出

 $u(x, t)$ 是一系列“本征振动”的叠加（即对 k 积分）

 每一本征振动是两个因子的乘积，一个只是 t 的函数，一个只是 x 的函数

 这与用分离变量法求解有界弦的振动所得一般解 $u(x, t) = \sum_n X_n(x) T_n(t)$ 在形式上相同

 可见，Fourier 变换法本质上也是分离变量法

利用延迟定理、线性定理和积分定理

● $\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$ 可通过**延迟定理**和**线性定理**得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{-ikat}] + \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{ikat}]\} \\ &\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]\end{aligned}$$

利用延迟定理、线性定理和积分定理

● $\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$ 可通过**延迟定理**和**线性定理**得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{-ikat}] + \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{ikat}]\} \\ &\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]\end{aligned}$$

● $\mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right] = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$ 可通过**延迟定理**、**线性定理**和**积分定理**

得到：由**延迟定理**和**线性定理**有 $\psi(x + at) - \psi(x - at) \leftrightarrow \Psi(k)(e^{ikat} - e^{-ikat})$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(e^{ikat} - e^{-ikat})}{2ika}\right] \\ &\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2a} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(e^{ikat} - e^{-ikat})}{ik}\right] \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^x [\psi(y + at) - \psi(y - at)] dy\end{aligned}$$

● 这里应用**积分定理的条件**已经满足，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(x + at) - \psi(x - at)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(\xi) - \psi(\xi)] d\xi = 0$$

化简

 令 $\xi = y + at$ ，则 $\int_{-\infty}^x \psi(y + at) dy = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

 令 $\xi = y - at$ ，则 $\int_{-\infty}^x \psi(y - at) dy = \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi$

 故

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka} \right] = \frac{1}{2a} \left[\int_{-\infty}^x \psi(y + at) dy - \int_{-\infty}^x \psi(y - at) dy \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\int_{x-at}^{x+at} + \int_{-\infty}^{x-at} - \int_{-\infty}^{x+at} \right] \psi(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

§2.2 行波法简介

 d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到

 思路是先求出偏微分方程的通解，其中含两个任意函数，再用初始条件确定它们

 对于无界弦的振动，这一方法非常简单

 但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍

§2.2 行波法简介

d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到

思路是先求出偏微分方程的通解，其中含两个任意函数，再用初始条件确定它们

对于无界弦的振动，这一方法非常简单

但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍

令 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ ，推出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

从而将一维齐次波动方程化为 $0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$

一维自由波动方程的通解

🥂 现在，一维齐次波动方程变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ，即 $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$

🍸 所以 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 与 η 无关，即 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ ，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ 的任意函数

🍹 对 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$ ，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f_0(\xi)$

一维自由波动方程的通解

🥂 现在，一维齐次波动方程变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ，即 $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$

🍸 所以 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 与 η 无关，即 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ ，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ 的任意函数

🍺 对 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$ ，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f_0(\xi)$

☕ 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是任意函数

🍵 根据 $\xi = x - at$ 和 $\eta = x + at$ ，重新用变量 x 和 t 写出来，得到

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

🍜 这是一维自由波动方程在未曾考虑任何定解条件时的最一般解，即真正的通解

一维自由波动方程的通解

🥂 现在，一维齐次波动方程变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ，即 $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$

🍸 所以 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 与 η 无关，即 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ ，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ 的任意函数

🍺 对 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$ ，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f_0(\xi)$

☕ 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是任意函数

🍵 根据 $\xi = x - at$ 和 $\eta = x + at$ ，重新用变量 x 和 t 写出来，得到

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

🍜 这是一维自由波动方程在未曾考虑任何定解条件时的最一般解，即真正的通解

🍺 可惜能够这样求出通解的方程甚少

🍻 即使能够求出通解，如果定解条件比较复杂，要决定其中的任意函数也绝非易事

🥤 对于有限区间上的自由振动，由定解条件确定以上 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 就比较困难

推出 d'Alembert 公式

 将通解 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ 代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x)$$

 对 $-f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a} \psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - 2c$

 其中 c 是常数， x_0 可视方便取定

推出 d'Alembert 公式

 将通解 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ 代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x)$$

 对 $-f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a} \psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - 2c$

 其中 c 是常数， x_0 可视方便取定，与 $f(x) + g(x) = \varphi(x)$ 结合，推出

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + c, \quad g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - c$$

 于是，满足初始条件的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - at) + g(x + at) \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

 这样就再次得到 d'Alembert 公式，结果与 x_0 和 c 无关

§3 δ 函数

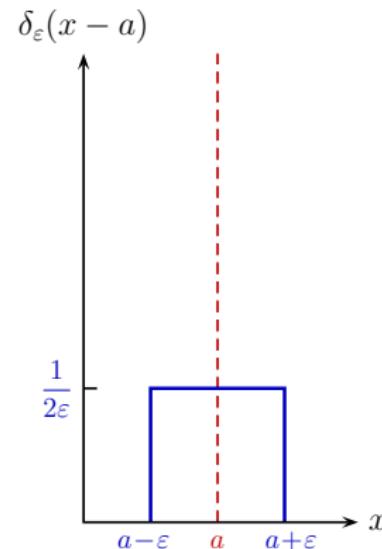
§3.1 定义一

🦄 考虑位于 x 轴上 $x = a$ 处具有单位质量的质点

🐴 为了描述它的质量密度 (这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

🐴 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度



§3 δ 函数

§3.1 定义一

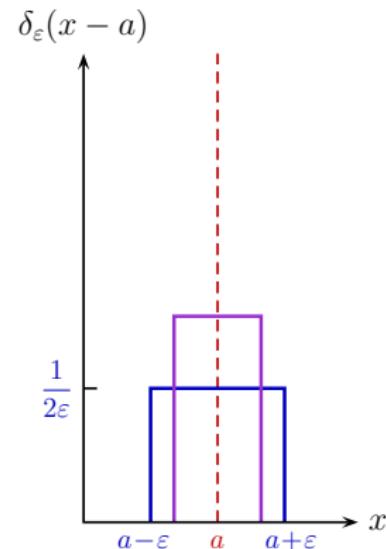
🦄 考虑位于 x 轴上 $x = a$ 处具有单位质量的质点

🐴 为了描述它的质量密度 (这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

🐴 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度

🐉 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时



§3 δ 函数

§3.1 定义一

考慮位于 x 軸上 $x = a$ 处具有单位质量的质点

为了描述它的质量密度(这里指线密度),引入函数

$$\delta_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x-a| < \varepsilon \\ 0, & |x-a| \geq \varepsilon \end{cases}$$

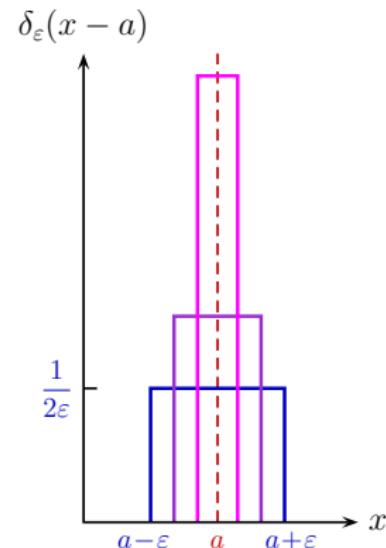
 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，就得到上述**质点的质量密度**

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x - a)$$

 它满足 $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$ ，这是 δ 函数的**定义**—

 若质点的质量为 m ，则质量密度为 $\rho(x) = m\delta(x - a)$



δ 函数的历史和意义



δ 函数是数学物理中的重要概念



一般认为最早由物理学家 P. Dirac 引入



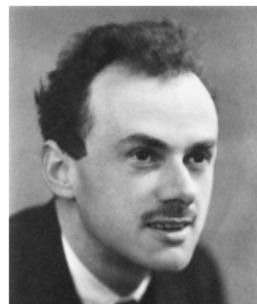
实际上，在 Dirac 之前，O. Heaviside 已经给出明确定义



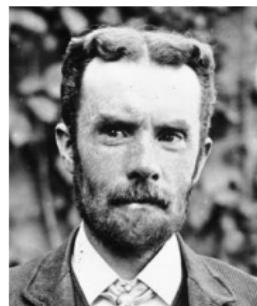
至于这一函数的雏形，则具有更长的历史



不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

δ 函数的历史和意义



δ 函数是数学物理中的重要概念



一般认为最早由物理学家 P. Dirac 引入



实际上，在 Dirac 之前，O. Heaviside 已经给出明确定义



至于这一函数的雏形，则具有更长的历史



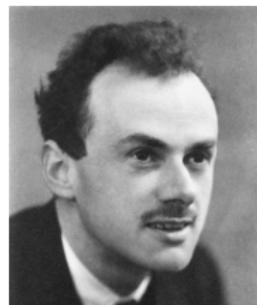
不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



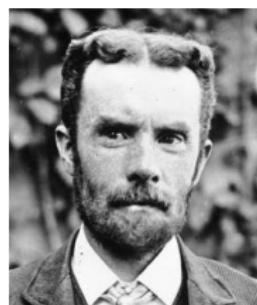
δ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度



比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度



Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

δ 函数的历史和意义



δ 函数是数学物理中的重要概念



一般认为最早由物理学家 P. Dirac 引入



实际上，在 Dirac 之前，O. Heaviside 已经给出明确定义



至于这一函数的雏形，则具有更长的历史



不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



δ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度



比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度



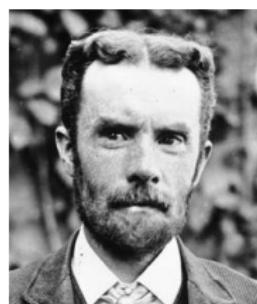
如果自变量是时间 t 而不是位置 x ，那么 δ 函数描述的是存在于瞬时、总量为 1 的物理量的强度



比如，具有单位冲量的瞬时力，具有单位电荷的瞬时电流



Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

广义函数



δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同



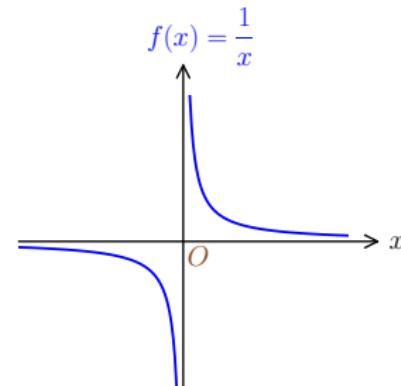
后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值



虽然也可能有奇点，但奇点通常不在定义域内



比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，虽然 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$ ，但 $x = 0$ 并不在定义域内



广义函数

🐰 δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同

🐰 后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值

🐭 虽然也可能有奇点，但奇点通常不在定义域内

🐭 比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，虽然 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$ ，但 $x = 0$ 并不在定义域内

🐹 然而， δ 函数 $\delta(x - a)$ 在 $x = a$ 处的函数值是 ∞

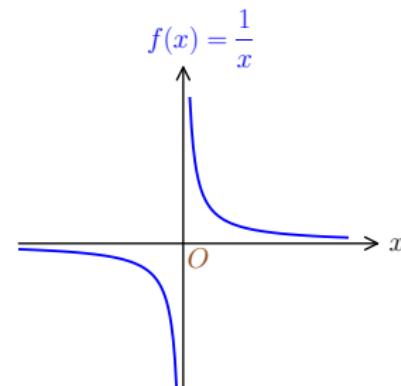
🐿 而且这一点对 δ 函数来说是最重要的

🐿 所以 δ 函数不是一个经典的函数，而是一个广义函数

🐹 严格的广义函数理论超出了本课程的论题

🦔 我们总是从极限的意义上对 δ 函数作直观的理解

🦔 即把 δ 函数当作某种经典函数序列的极限



广义函数

δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同

后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值

虽然也可能有奇点，但奇点通常不在定义域内

比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，虽然 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$ ，但 $x = 0$ 并不在定义域内

然而， δ 函数 $\delta(x - a)$ 在 $x = a$ 处的函数值是 ∞

而且这一点对 δ 函数来说是最重要的

所以 δ 函数不是一个经典的函数，而是一个广义函数

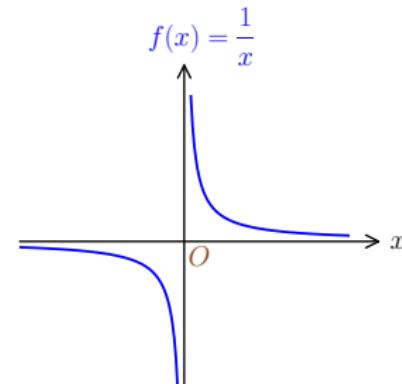
严格的广义函数理论超出了本课程的论题

我们总是从极限的意义上对 δ 函数作直观的理解

即把 δ 函数当作某种经典函数序列的极限

此外，由 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$ 可以看到， δ 函数的量纲是其宗量量纲的倒数

这一点不同于三角函数、指数函数、对数函数等无量纲函数



§3.2 定义二

 根据 δ 函数的定义一 $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$

 对于任何连续函数 $f(x)$ ，有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

 上式可看作 δ 函数的另一种定义（定义二）， $f(x)$ 与 $\delta(x - a)$ 相乘之后，通过积分挑选出了 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的值 $f(a)$ ，这也称为 δ 函数的挑选性

§3.2 定义二

根据 δ 函数的定义— $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$

 对于任何连续函数 $f(x)$ ，有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

 上式可看作 δ 函数的另一种定义(定义二), $f(x)$ 与 $\delta(x - a)$ 相乘之后, 通过积分挑选出了 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的值 $f(a)$, 这也称为 δ 函数的挑选性

证明 由于 $\delta(x - a)$ 只在 a 点不为零，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) \, dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a) \, dx = f(a+\theta\varepsilon) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a) \, dx = f(a+\theta\varepsilon)$$

其中 $\theta \in [-1, 1]$ ，第二步用了积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号，则存在 $c \in [a, b]$ ，使得 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$

由于正实数 ε 的大小可以任意, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就得到 $f(a + \theta\varepsilon) \rightarrow f(a)$, 证毕

严格的证明

熊 **上述证明**实际上是会引起质疑的

象 因为其中引用了**积分中值定理**，而它只适用于**经典的函数**

严格的证明

 上述证明实际上是会引起质疑的

 因为其中引用了积分中值定理，而它只适用于经典的函数

 但是，如果用经典函数 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x - a)$

 那么，每一步都是严格成立的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx = f(a + \theta \varepsilon)$$

 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，就得到要证明的 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

严格的证明

上述证明实际上是会引起质疑的

因为其中引用了积分中值定理，而它只适用于经典的函数

但是，如果用经典函数 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x - a)$

那么，每一步都是严格成立的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx = f(a + \theta \varepsilon)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，就得到要证明的 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

！ 也许有人会问，取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得到的 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx$ 是否真的等于 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx$ ？即取极限与积分是否可以交换次序？

！ 正确的理解是， $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx$ 正是用 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx$ 来定义的

说明和推广

 使用 δ 函数，使我们可以省略用经典函数序列 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 计算然后取极限的过程

 需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 不一定是前面用

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

定义的函数

 只要 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 在 $|x - a| > \varepsilon$ 时为零，在 $|x - a| < \varepsilon$ 时为正，且积分为 1 即可

说明和推广

使用 δ 函数，使我们可以省略用经典函数序列 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 计算然后取极限的过程

需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 不一定是前面用

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

定义的函数

只要 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 在 $|x - a| > \varepsilon$ 时为零，在 $|x - a| < \varepsilon$ 时为正，且积分为 1 即可

很容易将 δ 函数的定义二推广到三维或其它维数的情况

比如，三维 δ 函数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ 可以由下式定义，

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{a})$$

记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ，我们也可以用 3 个一维 δ 函数等价地定义

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_1)\delta(y - a_2)\delta(z - a_3)$$

§3.3 δ 函数的基本性质



δ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)[f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a)] dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\delta(x - a) dx - f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x - a) dx \\&= \varphi(a)f(a) - f(a)\varphi(a) = 0\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a) = 0$

§3.3 δ 函数的基本性质



δ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)[f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\delta(x - a) dx - f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x - a) dx \\ &= \varphi(a)f(a) - f(a)\varphi(a) = 0 \end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a) = 0$

2 $x\delta(x) = 0$

上式可改写成 $\frac{\delta(x)}{x^{-1}} = 0$ ，它说明 $\delta(x)$ 在 $x = 0$ 处的奇性弱于 $\frac{1}{x}$

由此可见， δ 函数的奇性其实并不是很大

偶函数

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x \delta(x) dx = \varphi(0) \cdot 0 = 0$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $x \delta(x) = 0$

偶函数

 证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x \delta(x) dx = \varphi(0) \cdot 0 = 0$$

 由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $x \delta(x) = 0$

3 δ 函数是偶函数，即 $\delta(-x) = \delta(x)$

 证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-x) \delta(x) dx$$

$$y = -x \rightarrow = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(y) \delta(-y) (-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(-x) dx$$

 由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $\delta(-x) = \delta(x)$

$\delta(ax)$

4 $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$, 其中 $a \neq 0$

证: 设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数, 若 $a > 0$, 令 $y = ax$, 由 δ 函数的定义二得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y) \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \varphi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx$$

骆驼 由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$

骆驼 若 $a < 0$, 则 $-a > 0$, 由 δ 函数的偶函数性质得

$$\delta(ax) = \delta(-ax) = \frac{\delta(x)}{-a} = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

§3.4 δ 函数的几种表达式

 $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

 $\delta(x)$ 的 Fourier 变换为 $\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

 由 Fourier 反变换公式即得 $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

§3.4 δ 函数的几种表达式

$$\mathcal{V} \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

熊猫 $\delta(x)$ 的 Fourier 变换为 $\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

由 Fourier 反变换公式即得 $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

！实际上，上式右边的积分并不存在，那么如何理解这个结果呢？

如果用 $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ 代替 $\delta(x)$ ，就可以得到

$$\Delta_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\cos kx}{2\varepsilon} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx}{2k\varepsilon} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k \cos k\varepsilon}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{L'Hospital' 法则})$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

 最后一步实际上是对这个**不存在的积分**的**定义**

第二种表达式

$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}$

根据上述 $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk$, 有

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-K}^K \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon(k) \right] e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K (\cos kx + i \sin kx) dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_0^K \cos kx dk \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow +\infty} \left. \frac{\sin kx}{x} \right|_0^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}\end{aligned}$$

第二步交换了两个极限的顺序，其合理性这里不作深究

随后的积分是普通定积分，只要 $\delta_\varepsilon(x)$ 是 x 和 ε 的连续函数，则 $\Delta_\varepsilon(k)$ 是 k 和 ε 的连续函数，从而取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限与积分可以交换次序（第三步）

$\frac{\sin Kx}{\pi x}$ 的性质和图像

🐸 这里介绍函数 $\frac{\sin Kx}{\pi x}$ ($K > 0$) 的性质

🐢 它的零点位于 $x = \pm \frac{n\pi}{K}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

🐍 当 $x \rightarrow 0$ 时, 由 L'Hospital' 法则得

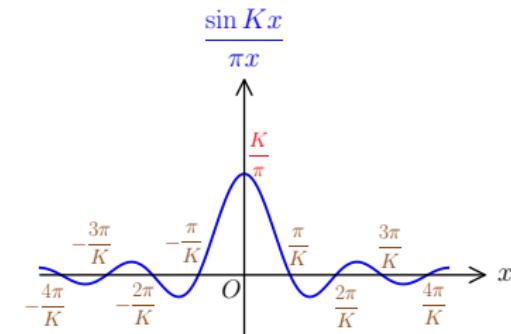
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Kx}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K \cos Kx}{\pi} = \frac{K}{\pi}$$

🦕 根据第五章 §7 例 3, $K > 0$ 时 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin Kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

🦖 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin Kx}{x} dx = 1$

🐍 当 $K \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\sin Kx}{\pi x}$ 整体行为趋近于 $\delta(x)$



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

第三种表达式

Ⅱ $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \rho_\sigma(x)$, 其中 $\rho_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ 是 **Gauss 分布**, $\sigma > 0$

duckie 当 $x \neq 0$ 时, 令 $t = \frac{1}{\sigma}$, 由 **L'Hospital' 法则** 得

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma \rightarrow 0} \rho_\sigma(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi} e^{x^2 t^2/2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} x^2 t e^{x^2 t^2/2}} = 0\end{aligned}$$

egg 当 $x = 0$ 时, 有 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \rho_\sigma(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \infty$

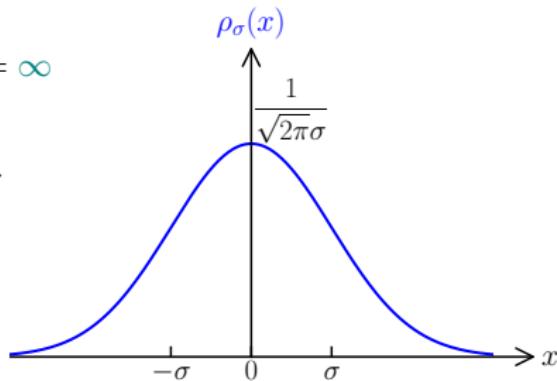
duckie 由于 $\rho_\sigma(x)$ 是概率分布, 已经归一化, 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x) dx = 1$$

duckie 这样就符合 **δ 函数定义一** 中的所有条件



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



第四种表达式

⌚ $\delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \rho_b(x)$, 其中 $\rho_b(x) = \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)}$ 是 Lorentz 分布, $b > 0$

🐓 Lorentz 分布也称为 Cauchy 分布、Breit-Wigner 分布

🐓 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{b \rightarrow 0} \rho_b(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)} = 0$

🦆 当 $x = 0$ 时, $\lim_{b \rightarrow 0} \rho_b(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\pi b} = \infty$

天鹅 作为归一化的概率分布, $\rho_b(x)$ 满足

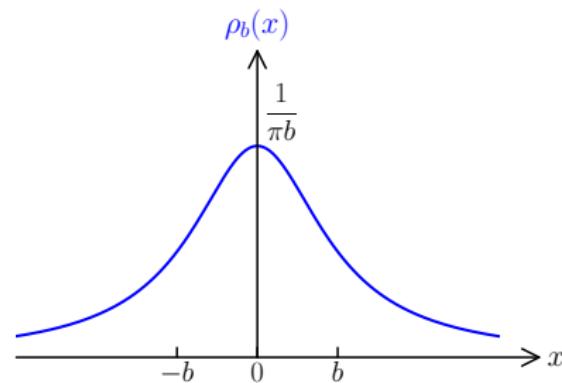
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_b(x) dx = 1$$

🦅 这样就符合 δ 函数定义一中的所有条件

🦉 事实上, 任何概率分布取其宽度趋于零的极限 (从而高度趋于无穷大), 都可以得到 δ 函数



Hendrik Lorentz
(1853–1928)



第五种表达式

 $\delta(x) = \theta'(x)$, 其中 **Heaviside 阶跃函数** 定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

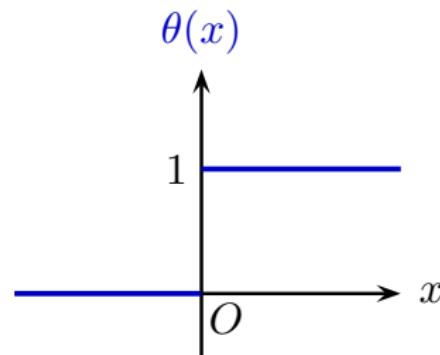
 对于任意连续函数 $f(x)$, 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\theta'(x) dx &= f(x)\theta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\theta(x) dx \\ &= f(+\infty) - \int_0^{+\infty} f'(x) dx \\ &= f(+\infty) - f(x) \Big|_0^{+\infty} = f(0) \end{aligned}$$

 可见 $\theta'(x)$ 符合 δ 函数的**定义二**



Oliver Heaviside
(1850–1925)



§4 无界杆的热传导问题

 考虑无穷长导热细杆在热源和初始温度作用下的热传导问题

 这是一个一维无界问题，定解问题如下

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

 这里忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm\infty} = 0$

§4 无界杆的热传导问题

考虑无穷长导热细杆在热源和初始温度作用下的热传导问题

这是一个**一维无界问题**，定解问题如下

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \mathbf{f} & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

这里忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm\infty} = 0$

令 $u = u_1 + u_2$, 将问题分解为由初始温度引起的热传导问题(无源问题)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

和由**热源**引起的热传导问题 (**有源问题**)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x^2} = f & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ \mathbf{u}_2|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

§4.1 无源问题

 将 u_1 改记为 u ，无源问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

 对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x, t) \leftrightarrow U(k, t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$$

 对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k) \end{cases}$$

 这个常微分方程初值问题的解为 $U(k, t) = \Phi(k) e^{-k^2 a^2 t}$

Fourier 反变换计算

剩下来的问题是对 $U(k, t) = \Phi(k) e^{-k^2 a^2 t}$ 作 Fourier 反变换求出原函数 $u(x, t)$

根据卷积定理 $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$ ，只要求出 $e^{-k^2 a^2 t}$ 的原函数 $E(x)$

再与 $\Phi(k)$ 的原函数 $\varphi(x)$ 作卷积即可得到 $u(x, t)$

Fourier 反变换计算

剩下的问题是将 $\mathcal{U}(k, t) = \Phi(k) e^{-k^2 a^2 t}$ 作 Fourier 反变换求出原函数 $u(x, t)$

 根据卷积定理 $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$ ，只要求出 $e^{-k^2 a^2 t}$ 的原函数 $E(x)$

再与 $\Phi(k)$ 的原函数 $\varphi(x)$ 作卷积即可得到 $u(x, t)$

由反变换公式得

$$\begin{aligned} E(x) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2 a^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} (\cos kx + i \sin kx) dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} \cos kx dk \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \end{aligned}$$

 倒数第二步用到积分公式 ($y \rightarrow k$, $\alpha \rightarrow a^2t$, $\beta \rightarrow x$)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} \cos \beta y \, dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad \alpha > 0$$

无源问题的解



由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-k^2 a^2 t}] = \varphi(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \end{aligned}$$

无源问题的解

由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-k^2a^2t}] = \varphi(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] d\xi \end{aligned}$$

 考虑特例 $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$ ，即初始时刻有~~一定~~的热量集中在 x_0 处

 将 $\varphi(\xi) = \delta(\xi - x_0)$ 代入解的表达式，得到 t 时刻的温度分布为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t} \right]$$

这是 $\sigma = \sqrt{2a^2t}$ 的 Gauss 分布，其宽度随着 t 的增大而增大

高度随着 t 的增大而减小，但对 x 积分始终为 1

物理图像

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} \right]$$

这样的结果表明，热量不断向远处传播，但总能量守恒

但是，不管 t 多么小，只要 $t > 0$ ，杆上各处的温度均不为零。

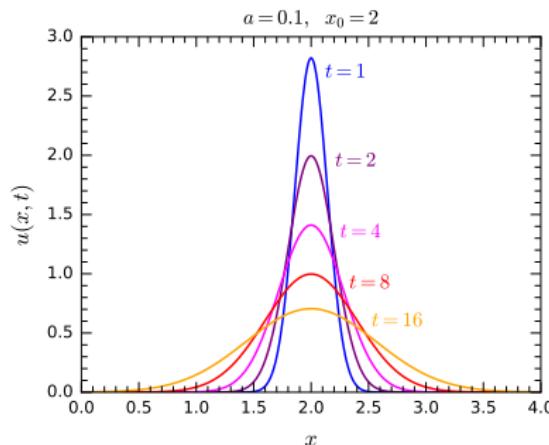
这表明温度的传播速度为无穷大，显然不符合实际情况

引起这一结果的原因是推导热传导方程

时没有考虑热传导过程的微观机制

 即所用模型过于简化

不过，当 t 较大以后，由热传导方程解得的结果还是符合实际情况的



§4.2 有源问题

将 u_2 改记为 u ，**有源问题**为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

对 x 作 Fourier 变换，设 $u(x, t) \leftrightarrow U(k, t)$ ， $f(x, t) \leftrightarrow F(k, t)$

对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到 $\begin{cases} \frac{dU}{dt} + k^2 a^2 U = F \\ U|_{t=0} = 0 \end{cases}$

这个常微分方程初值问题的解为 $U(k, t) = \int_0^t F(k, \tau) e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} d\tau$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(k, t) &= F(k, t) e^{-k^2 a^2 (t-\textcolor{red}{t})} + \int_0^t F(k, \tau) [-k^2 a^2 e^{-k^2 a^2 (t-\tau)}] d\tau \\ &= F(k, t) - k^2 a^2 U(k, t) \end{aligned}$$

有源问题的解

由前面得到的 Fourier 变换关系 $e^{-k^2 a^2 t} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$ 推出

$$e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

应用卷积定理求得有源问题的解为

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[F(k,\tau) e^{-k^2 a^2(t-\tau)}] d\tau$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

第二步利用了 Fourier 反变换的线性性，即交换了对 k 积分和对 τ 积分的次序

有源问题的解

由前面得到的 Fourier 变换关系 $e^{-k^2 a^2 t} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$ 推出

$$e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} \leftrightarrow \frac{1}{a \sqrt{2(t-\tau)}} \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right]$$

应用卷积定理求得有源问题的解为

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[F(k,\tau) e^{-k^2 a^2 (t-\tau)}] d\tau$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{f(\xi, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

第二步利用了 Fourier 反变换的线性性，即交换了对 k 积分和对 τ 积分的次序

 若 $f(x, t) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0)$ ，则 $u(x, t) = \frac{\theta(t - t_0)}{2a\sqrt{\pi(t - t_0)}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2(t - t_0)}\right]$

此时热源只在 t_0 时刻作用于 x_0 点，故 t_0 时刻以前温度一直保持初始温度 0

 t_0 时刻以后热量从 x_0 点向外传播，温度分布为 $\sigma = \sqrt{2a^2(t - t_0)}$ 的 Gauss 分布