

# 量子场论

## 标准模型简介

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 10 月 1 日



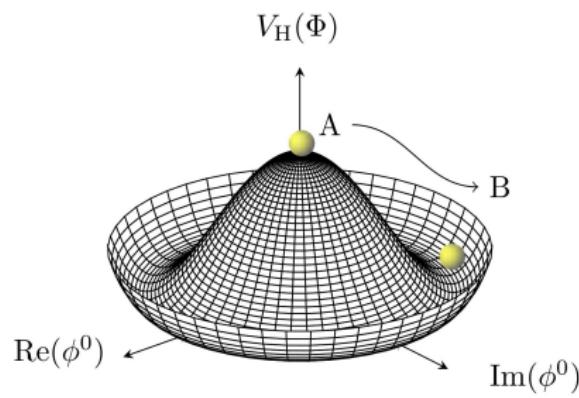
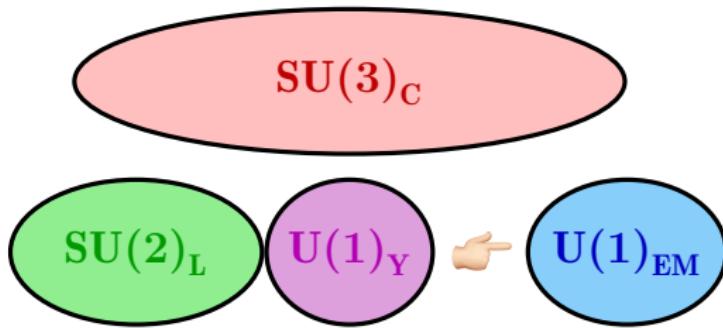
## 粒子物理标准模型

粒子物理标准模型是一个  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范场论

 模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用

 SU(3)<sub>C</sub> 部分描述强相互作用，称为量子色动力学，规范玻色子是胶子

  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  部分描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱规范理论**，在这个理论中引入一个 **Higgs** 标量二重态，从而引起规范群的**对称性自发破缺**，使得  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  群破缺为  **$U(1)_{EM}$**  群  $V_U(\Phi)$

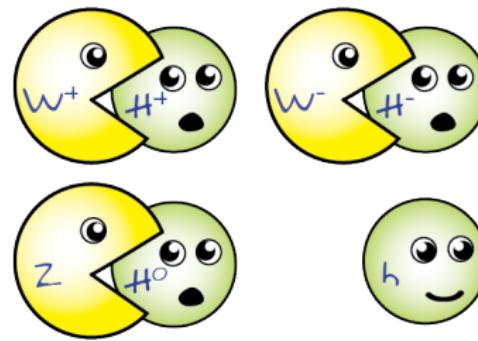


基本粒子质量起源

 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

 破缺后，3个规范玻色子与3个Higgs自由度结合，从而获得质量，成为  $W^\pm$  玻色子和  $Z^0$  玻色子，传递弱相互作用

剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递电磁相互作用



Higgs 玻色子



# 基本粒子质量起源

🍔 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都**没有质量**，具有不同量子数

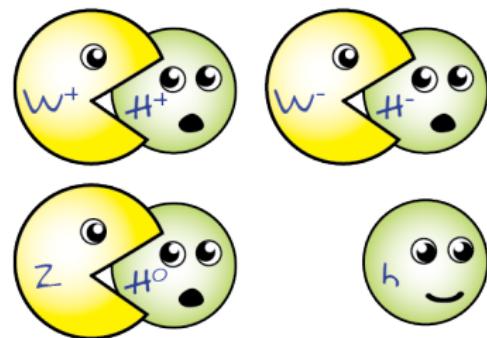
🍕 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得**质量**，成为  $W^\pm$  玻色子和  $Z^0$  玻色子，传递**弱相互作用**

🍰 剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，传递**电磁相互作用**

🍒 与 Higgs 场的 Yukawa 耦合导致左手和右手费米子组合成 Dirac 费米子，并获得**质量**

🥨 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

🥐 1998 年实验发现中微子振荡，证明**中微子具有质量**，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理



Higgs 玻色子

非 Abel 规范理论

非 Abel 群的生成元彼此不对易，因而规范变换形式与 U(1) 群（Abel 群）不同

1954 年，杨振宁和 Robert Mills 提出非 Abel 规范理论，也称为 Yang-Mills 理论，其规范场称为 Yang-Mills 场

对于非 Abel 的 Lie 群，生成元  $t^a$  满足  $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$ ，依赖时空坐标的群么正变换为  $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ ，旋量场多重态  $\psi(x)$  和规范场  $A_\mu^a(x)$  的规范变换是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^aU^\dagger(x) - \frac{i}{q}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

饼干 定义协变导数  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a t^a$ , 就可以利用  $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$  推出

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[ \partial_\mu + ig \left( U A_\mu^a t^a U^\dagger - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \right) \right] U \psi \\ &= \cancel{U} U^\dagger (\partial_\mu U) \psi + U \partial_\mu \psi + ig U A_\mu^a t^a \psi + U (\partial_\mu U^\dagger) U \psi \\ &= U (\partial_\mu + ig A_\mu^a t^a) \psi + U \partial_\mu (\cancel{U}^\dagger U) \psi = U(x) \cancel{D}_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

 具有**非 Abel** 规范对称性的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$$

规范场的场强张量  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

# 量子色动力学



**量子色动力学** (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是 **SU(3)<sub>C</sub>** 非 Abel 规范理论, 规范场  $G_\mu^a(x)$  对应于 8 种胶子, 夸克旋量场  $q(x)$  是 **SU(3)<sub>C</sub>** 三重态, 拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q} (\text{i} \gamma^\mu D_\mu - m_q) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

◆ 协变导数  $D_\mu = \partial_\mu + \text{i} g_s G_\mu^a t^a$ , 场强张量  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

◆  $g_s$  称为强耦合常数, 结构常数  $f^{abc}$  对 3 个指标全反对称, 独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

◆  $t^a = \lambda^a/2$  是 **SU(3)<sub>C</sub>** 基础表示的生成元, 其中  $\lambda^a$  是 8 个 **Gell-Mann** 矩阵

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{i} & 0 \\ \text{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{i} \\ 0 & \text{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

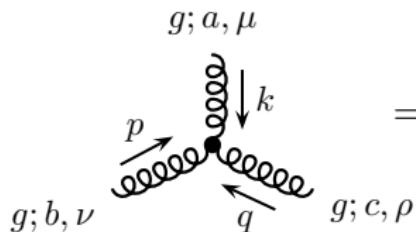
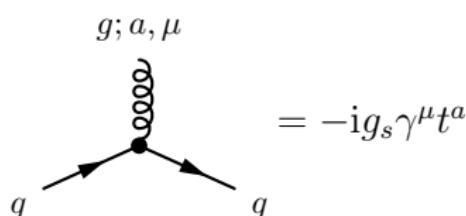
## QCD 相互作用顶点



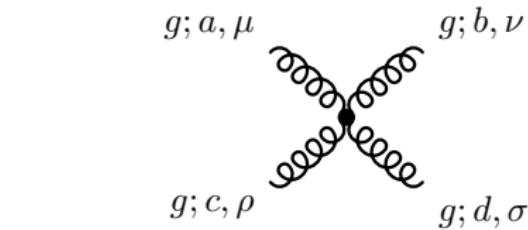
$\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  中  $-g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$  项的相互作用顶点如右图



  $-G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}/4$  项带来非 Abel 规范理论特有的以下规范玻色子自相互作用顶点——胶子  $g$  的三线性和四线性自相互作用顶点



$$= -g_s f^{abc} \left[ g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu \right]$$



$$g; b, \nu \\ = -ig_s^2 [ f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) ]$$

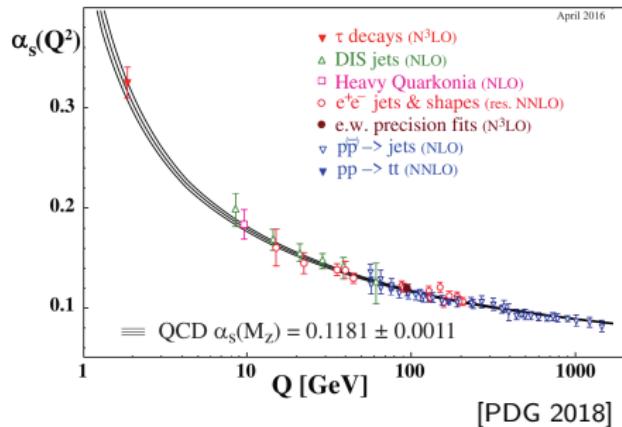
渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标  $Q$

在 QED 中，电磁耦合常数  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$  随能标升高而减小

这个特性称为 QCD 的渐近自由，而高能标意味着短距离



渐近自由和夸克禁闭

 受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标  $Q$

在 QED 中，电磁耦合常数  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$  随能标升高而减小

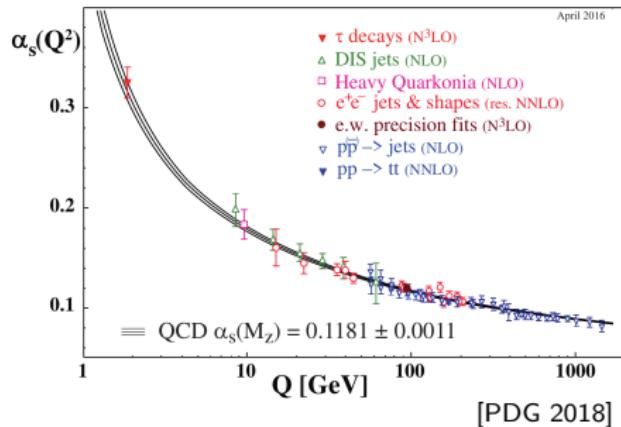
这个特性称为 QCD 的渐近自由，而高能标意味着短距离

 随着能标下降， $\alpha_s$  越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

👉 夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中



旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影矩阵  $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  和右手投影矩阵  $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场  $\psi(x)$  分解为左手旋量场  $\psi_L \equiv P_L \psi$  和右手旋量场  $\psi_R \equiv P_R \psi$

对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

 <span style="color: blue;">左手场</span>	$\psi_L(x)$	<span style="color: blue;">左旋正费米子</span> <span style="color: red;">右旋反费米子</span>	<span style="color: red;">右手场</span>	$\psi_R(x)$	<span style="color: red;">右旋正费米子</span> <span style="color: blue;">左旋反费米子</span>
---	-------------	---	--------------------------------------	-------------	---

 **质量项**  $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  相当于左右手旋量场的耦合项

旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影矩阵  $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  和右手投影矩阵  $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场  $\psi(x)$  分解为左手旋量场  $\psi_L \equiv P_L \psi$  和右手旋量场  $\psi_R \equiv P_R \psi$

 对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

	<b>左手场</b> $\psi_L(x)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{左旋正费米子} \\ \text{右旋反费米子} \end{array} \right.$		<b>右手场</b> $\psi_R(x)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{右旋正费米子} \\ \text{左旋反费米子} \end{array} \right.$
---	------------------------	---	---	------------------------	---

 **质量项**  $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  相当于左右手旋量场的耦合项

 在空间反射变换下，螺旋度符号翻转，**左手旋量场**和**右手旋量场**相互转换

对于宇称守恒的理论，如量子电动力学和量子色动力学，左右手旋量场具有相同的相互作用，因而存在空间反射对称性

在弱相互作用中，宇称不守恒，不存在空间反射对称性，其根源在于左右手旋量场参与不同的规范相互作用

## 电弱规范理论



电弱规范理论的规范群是  $SU(2)_L \times U(1)_Y$



鱼 每一代左手旋量场构成 2 个  $SU(2)_L$  二重态,  $u'_i$  和  $d'_i$  标记夸克场的规范本征态

$$L_{i\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{L}}\nu_i \\ P_{\mathbf{L}}\ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathbf{L}} \\ \ell_{i\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad Q_{i\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{L}}u'_i \\ P_{\mathbf{L}}d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{i\mathbf{L}} \\ d'_{i\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$



# 电弱规范理论



电弱规范理论的规范群是  $SU(2)_L \times U(1)_Y$

每一代左手旋量场构成 2 个  $SU(2)_L$  二重态,  $u'_i$  和  $d'_{iL}$  标记夸克场的规范本征态

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} P_L \nu_i \\ P_L \ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}, \quad Q_{iL} = \begin{pmatrix} P_L u'_i \\ P_L d'_{iL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

它们的协变导数是  $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig'B_\mu Y$

$W_\mu^a(x)$  ( $a = 1, 2, 3$ ) 是  $SU(2)_L$  规范场,  $B_\mu(x)$  是  $U(1)_Y$  规范场

$g$  和  $g'$  分别是  $SU(2)_L$  和  $U(1)_Y$  的规范耦合常数

$\tau^a = \sigma^a/2$  是  $SU(2)_L$  群基础表示的生成元, 对应于弱同位旋

生成元  $\tau^3$  的本征值是弱同位旋第 3 分量, 记为  $T^3$ ;  $Y$  是弱超荷

# 电弱规范理论



电弱规范理论的规范群是  $SU(2)_L \times U(1)_Y$

每一代左手旋量场构成 2 个  $SU(2)_L$  二重态,  $u'_i$  和  $d'_{iL}$  标记夸克场的规范本征态

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} P_L \nu_i \\ P_L \ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}, \quad Q_{iL} = \begin{pmatrix} P_L u'_i \\ P_L d'_{iL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

它们的协变导数是  $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig'B_\mu Y$

$W_\mu^a(x)$  ( $a = 1, 2, 3$ ) 是  $SU(2)_L$  规范场,  $B_\mu(x)$  是  $U(1)_Y$  规范场

$g$  和  $g'$  分别是  $SU(2)_L$  和  $U(1)_Y$  的规范耦合常数

$\tau^a = \sigma^a/2$  是  $SU(2)_L$  群基础表示的生成元, 对应于弱同位旋

生成元  $\tau^3$  的本征值是弱同位旋第 3 分量, 记为  $T^3$ ;  $Y$  是弱超荷

各代右手旋量场  $\ell_{iR} = P_R \ell_i, \quad u'_{iR} = P_R u'_i, \quad d'_{iR} = P_R d'_{iL}$  是  $SU(2)_L$  单态

它们的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu + ig'B_\mu Y$

## 旋量场的电弱量子数

 电荷 定义为  $Q \equiv T^3 + Y$  , 而  $\tau^3 = \frac{\sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$



下表列出三代旋量场的弱同位旋第3分量  $T^3$ 、弱超荷  $Y$  和电荷  $Q$

统一记号	第1代	第2代	第3代	$T^3$	$Y$	$Q$
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1/2	-1/2	0
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	1/2	1/6	2/3
$\ell_{iR}$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	0	-1	-1
$u'_{iR}$	$u'_R$	$c'_R$	$t'_R$	0	2/3	2/3
$d'_{iR}$	$d'_R$	$s'_R$	$b'_R$	0	-1/3	-1/3

## Brout–Englert–Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 $Z^0$  和  $W^\pm$  都具有质量，但现在  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范不变的拉氏量不能具有任何质量项

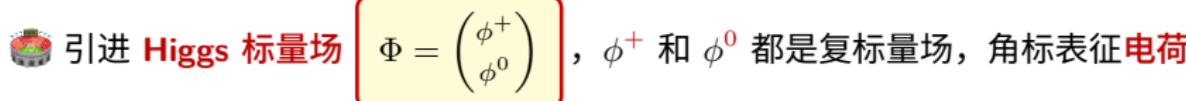
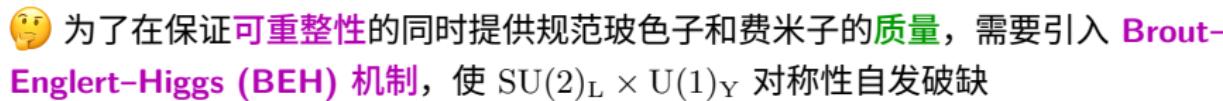
😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

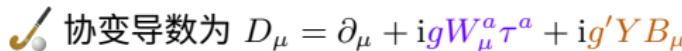
 左右手旋量场参与不同的规范相互作用，直接引入质量项也会破坏规范对称性

## Brout-Englert-Higgs 机制

**！夸克、带电轻子、 $Z^0$  和  $W^\pm$  都具有质量，但现在  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范不变的拉氏量不能具有任何质量项**



$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$



自发对称性破缺

 势能的行为由  $V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$  中参数  $\mu^2$  和  $\lambda$  决定；假设  $\lambda > 0$

如果  $\mu^2 < 0$ ，势能项  $V_H(\Phi)$  的最小值对应于  $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为  $\langle \Phi \rangle \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏

自发对称性破缺

势能的行为由  $V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$  中参数  $\mu^2$  和  $\lambda$  决定；假设  $\lambda > 0$

如果  $\mu^2 < 0$ ，势能项  $V_H(\Phi)$  的最小值对应于  $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为  $\langle \Phi \rangle \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏

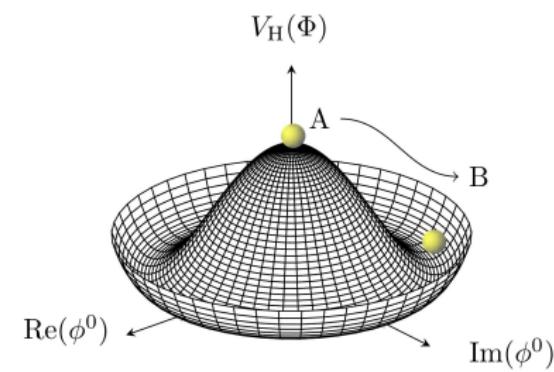
如果  $\mu^2 > 0$ ,  $\Phi^\dagger \Phi = 0$  处变成  $V_H(\Phi)$  的极大值, 而最小值位于  $\Phi^\dagger \Phi = v^2/2$  对应的 3 维球面上, 其中  $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

若压缩掉  $\phi^+$  的实部和虚部两个维度，则  $V_H(\Phi)$  在  $\phi^0$  的实部和虚部坐标上呈现右图所示墨西哥草帽状的形式

 Higgs 场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点，可取为  $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

电弱规范变换会改变这个期待值，故真空态不满足电弱规范对称性

这种拉氏量满足对称性、真空态却不能满足的现象称为对称性自发破缺



乡正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空期待值取为  $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$  之后，其它真空期待值可以通过  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  整体变换  $\langle \Phi \rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle \Phi \rangle$  得到

这是因为  $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$  在这样的变换下保持不变

乡正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空期待值取为  $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$  之后，其它真空期待值可以通过  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  整体变换  $\langle \Phi \rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle \Phi \rangle$  得到

这是因为  $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$  在这样的变换下保持不变

 若  $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$  且  $\alpha^3 = \alpha^Y$ ，则  $\alpha^3 \tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + 1)/2 = \text{diag}(\alpha^3, 0)$ ，  
 $\exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) = \text{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$ ，而  $\langle \Phi \rangle$  在此变换下不变

因此，有 1 个方向的对称性没有受到破坏，只有 3 个方向的对称性发生自发破缺

根据 Goldstone 定理，破缺后存在 3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子

有 3 个规范玻色子结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 BEH 机制获得质量

乡正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空期待值取为  $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$  之后，其它真空期待值可以通过  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  整体变换  $\langle \Phi \rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle \Phi \rangle$  得到

这是因为  $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$  在这样的变换下保持不变

 若  $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$  且  $\alpha^3 = \alpha^Y$ ，则  $\alpha^3 \tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + 1)/2 = \text{diag}(\alpha^3, 0)$ ，  
 $\exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) = \text{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$ ，而  $\langle \Phi \rangle$  在此变换下不变

因此，有 1 个方向的对称性没有受到破坏，只有 3 个方向的对称性发生自发破缺

根据 Goldstone 定理，破缺后存在 3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子

有 3 个规范玻色子结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 BEH 机制获得质量

以  $\langle \Phi \rangle$  为基础，将 Higgs 场参数化为  $\Phi(x) = \exp \left[ -i \frac{\chi^a(x)}{v} \tau^a \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$

  $\chi^a$  和  $H$  都是实标量场，而  $\exp(-i\chi^a \tau^a/v)$  因子能够通过  $SU(2)_L$  规范变换消去

因而可以直接取  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ，这种取法称为正规范

## Higgs 玻色子

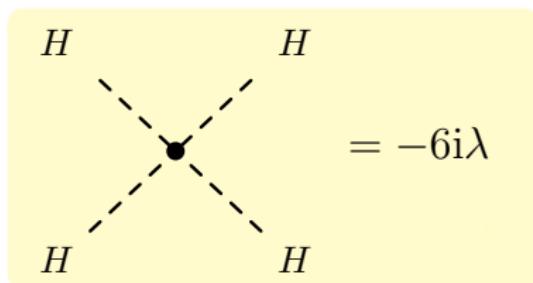
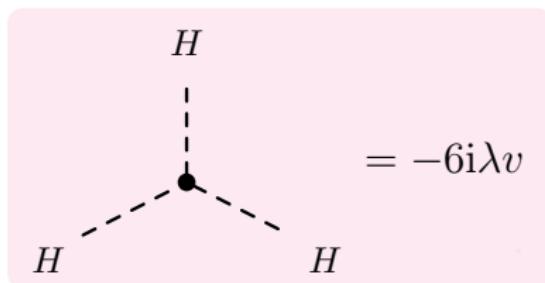
 在**幺正规范**下， $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$ ， $\Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2}(v + H)^2$

此时 Higgs 场只剩下一个物理自由度  $H(x)$ ，势能项化为

$$-V_H(\Phi) = \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4$$

实标量场  $H(x)$  对应于一个电中性标量玻色子  $H$ ，称为 **Higgs 玻色子**

 Higgs 玻色子的质量为  $m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ ，具有三线性和四线性自相互作用



电弱规范玻色子的质量项

由于  $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$ ,  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

有  $g'B_\mu Y_H + gW_\mu^a \tau^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g'B_\mu + gW_\mu^3 & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & g'B_\mu - gW_\mu^3 \end{pmatrix}$

 真空期待值  $v$  对协变导数  $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)]\Phi$  的贡献为

$$D_\mu \Phi \supset i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \supset \frac{i v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

协变动能项  $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$  中正比于  $v^2$  的项是

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \supset \frac{v^2}{8} [g^2 |W_\mu^1 - iW_\mu^2|^2 + (g' B_\mu - g W_\mu^3)^2] \\ = \frac{v^2}{8} [g^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2 + W^{3\mu} W_\mu^3) + g'^2 B^\mu B_\mu - 2gg' B^\mu W_\mu^3]$$

这些项是规范玻色子的质量项

Weinberg 转动



将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = \frac{1}{2} \cancel{\textcolor{red}{m_W^2}} (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \cancel{\textcolor{red}{M_W^2}} \cancel{\textcolor{blue}{W^3}} \cancel{\textcolor{blue}{B}} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$



$W_{\mu}^1$  和  $W_{\mu}^2$  获得的**质量**

$$m_W \equiv \frac{1}{2} g v$$



$W^{3\mu}$  和  $B^\mu$  的质量平方矩阵为  $M_{W^3 B}^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$

Weinberg 转动



将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = \frac{1}{2} \cancel{\textcolor{red}{m_W^2}} (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \cancel{\textcolor{red}{M_W^2}} \cancel{\textcolor{blue}{W^3}} \cancel{\textcolor{red}{B}} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$



$W_\mu^1$  和  $W_\mu^2$  获得的**质量**

$$m_W \equiv \frac{1}{2} g v$$



$W^{3\mu}$  和  $B^\mu$  的质量平方矩阵为  $M_{W^3 B}^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$



为了使  $M_{W^3B}^2$  矩阵对角化，定义

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$



其中

$$s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_W \equiv \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$



$\theta_W$  称为 Weinberg 角，也称为弱混合角



从后面的讨论可以看出  $A_\mu$  就是电磁场，对应于光子； $Z_\mu$  对应于矢量玻色子  $Z$

Z 玻色子的质量

 反过来，有  $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$

利用  $M_{W^3B}^2 = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \begin{pmatrix} c_W^2 & -s_Wc_W \\ -s_Wc_W & s_W^2 \end{pmatrix}$ , 推出

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( W^{3\mu} \ B^\mu \right) M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W^2 & -s_W c_W \\ -s_W c_W & s_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \textcolor{magenta}{m_Z^2} Z^\mu Z_\mu
\end{aligned}$$

  $Z$  玻色子的质量是  $m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{gv}{2c_W} = \frac{m_W}{c_W}$  , 而光子没有质量

实验测得  $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$  和  $m_W = 80.4 \text{ GeV}$ ，故  $\theta_W = \cos^{-1} \frac{m_W}{m_Z} = 28.2^\circ$

# $W^\pm$ 玻色子的质量

另一方面，用质量相同的实矢量场  $W_\mu^1$  和  $W_\mu^2$  线性组合出复矢量场

$$W_\mu^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)$$

它的厄米共轭为  $W_\mu^- \equiv (W_\mu^+)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)$

则  $W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-)$ ,  $W_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-)$

从而  $\frac{1}{2}(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) = W^{+\mu}W_\mu^-$ , 于是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GBM}} &= \frac{1}{2}m_W^2(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) + \frac{1}{2}\left(W^{3\mu} B^\mu\right) M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= m_W^2 W^{+\mu}W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu\end{aligned}$$

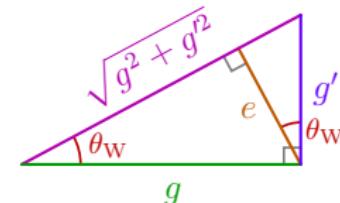
复矢量场  $W_\mu^+$  描述一对正反矢量玻色子  $W^\pm$ , 质量为  $m_W$

可见，BEH 机制使传递弱相互作用的规范玻色子  $W^\pm$  和  $Z$  获得了质量，有 3 个 Higgs 场自由度变成它们的纵向极化分量

# 用规范场质量本征态表达

接下来用质量本征态  $W_\mu^\pm$ 、 $A_\mu$  和  $Z_\mu$  表达  $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$

由  $B_\mu = c_W A_\mu - s_W Z_\mu$  和  $W_\mu^3 = s_W A_\mu + c_W Z_\mu$  得



$$\begin{aligned} g' B_\mu + g W_\mu^3 &= g'(c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g(s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= \frac{2gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu + \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu = 2eA_\mu + \frac{g}{c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu \end{aligned}$$

其中  $e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = gs_W = g'c_W$ ，后面讨论将表明  $e$  就是单位电荷量

协变导数  $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)]\Phi$  中的相关因子化为

$$\begin{aligned} g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g W_\mu^3 & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} eA_\mu + \frac{g}{2c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu & \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{g}{2c_W}Z_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Higgs 场协变动能项

于是，么正规范下的 Higgs 场协变动能项化为

$$\begin{aligned}
& (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \\
&= |[\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)] \Phi|^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{ig}{2c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{ig}{2c_W}Z_\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^-(v + H) & \partial_\mu H + \frac{ig}{2c_W}Z_\mu(v + H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+(v + H) \\ \partial_\mu H - \frac{ig}{2c_W}Z_\mu(v + H) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + (v + H)^2 \left( \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2}{8c_W^2} Z_\mu Z^\mu \right)
\end{aligned}$$

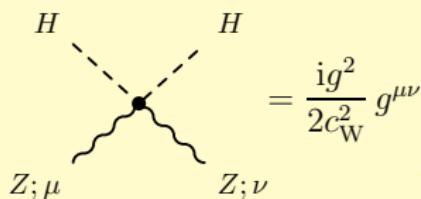
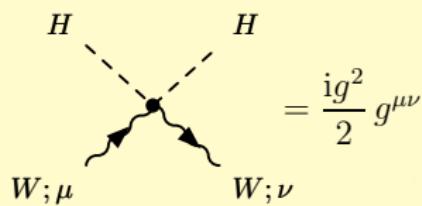
## Higgs 玻色子与 $W^\pm$ 、 $Z$ 玻色子的耦合

 将上述 Higgs 场协变动能项表达为

$$\begin{aligned}
(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) \\
&+ m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
&+ g m_W H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g m_Z}{2 c_W} H Z_\mu Z^\mu \\
&+ \frac{g^2}{4} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g^2}{8 c_W^2} H^2 Z_\mu Z^\mu
\end{aligned}$$

除了  $W^\pm$  和  $Z$  玻色子的质量项之外

还出现了 Higgs 玻色子  $H$  与  $W^\pm$ 、 $Z$  玻色子的三线性和四线性耦合项



Yukawa 相互作用

 Higgs 场  $\Phi(x)$  的弱超荷为  $+1/2$ ，记  $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$ ，引入  $\Phi(x)$  的共轭态

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma^2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

则  $\tilde{\Phi}(x)$  是弱超荷为  $-1/2$  的  $SU(2)_L$  二重态

在幺正规范下， $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

## Yukawa 相互作用

 Higgs 场  $\Phi(x)$  的弱超荷为  $+1/2$ ，记  $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$ ，引入  $\Phi(x)$  的共轭态

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma^2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

则  $\tilde{\Phi}(x)$  是弱超荷为  $-1/2$  的  $SU(2)_L$  二重态

在幺正规范下， $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

与费米子场组成满足  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范对称性的 Yukawa 相互作用拉氏量

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_{d,ij}\bar{Q}_{iL}d'_{jR}\Phi - \tilde{y}_{u,ij}\bar{Q}_{iL}u'_{jR}\tilde{\Phi} - \textcolor{red}{y_{\ell i}}\bar{L}_{iL}\ell_{iR}\Phi + \text{H.c.}$$

$$Y : \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{3} \quad +\frac{1}{2} \quad \quad \quad -\frac{1}{6} \quad +\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad \quad +\frac{1}{2} \quad -1 \quad +\frac{1}{2}$$

其中 H.c. 表示厄米共轭

 Yukawa 耦合常数  $\tilde{y}_{d,ij}$  和  $\tilde{y}_{u,ij}$  联系着不同代的夸克场

**Yukawa 耦合常数  $y_{le_i}$  只联系同一代的轻子场**

么正规范下的 Yukawa 相互作用



在么正规范下，利用

$$\bar{Q}_{iL}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u}'_{iL} & \bar{d}'_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{d}'_{iL}$$

$$\bar{Q}_{iL} \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u}'_{iL} & \bar{d}'_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H) \bar{u}'_{iL}$$

$$\bar{L}_{i\text{L}}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{i\text{L}} & \bar{\ell}_{i\text{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{\ell}_{i\text{L}}$$



$$\text{推出 } \mathcal{L}_Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(\tilde{y}_{d,ij}\bar{d}'_{iL}d'_{jR} + \tilde{y}_{u,ij}\bar{u}'_{iL}u'_{jR} + y_{\ell_i}\bar{\ell}_{iL}\ell_{iR} + \text{H.c.})$$



$\tilde{y}_{d,i,j}$  和  $\tilde{y}_{u,i,j}$  可看作  $3 \times 3$  矩阵  $\tilde{y}_d$  和  $\tilde{y}_u$  的元素



图  $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger$  和  $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger$  是厄米矩阵，必定可以分别通过幺正矩阵  $U_d$  和  $U_u$  对角化成  $y_D^2$  和  $y_U^2$  两个对角元为实数的对角矩阵，满足  $U_d^\dagger \tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger U_d = y_D^2$  和  $U_u^\dagger \tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger U_u = y_U^2$ ，即

$$\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_{\text{D}}^2 U_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_{\text{U}}^2 U_u^\dagger$$

# Yukawa 耦合矩阵的对角化

 符合  $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger$  和  $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$  的  $\tilde{y}_d$  和  $\tilde{y}_u$  可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_D K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_U K_u^\dagger$$

 对角矩阵  $y_D$  和  $y_U$  满足  $y_D y_D = y_D^2$  和  $y_U y_U = y_U^2$ ,  $K_d^\dagger$  和  $K_u^\dagger$  是两个~~么~~正矩阵

 将  $y_D$  和  $y_U$  表示成

$$y_D = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_U = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

# Yukawa 耦合矩阵的对角化

 符合  $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger$  和  $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$  的  $\tilde{y}_d$  和  $\tilde{y}_u$  可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_D K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_U K_u^\dagger$$

 对角矩阵  $y_D$  和  $y_U$  满足  $y_D y_D = y_D^2$  和  $y_U y_U = y_U^2$ ， $K_d^\dagger$  和  $K_u^\dagger$  是两个么正矩阵

 将  $y_D$  和  $y_U$  表示成

$$y_D = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_U = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

 定义  $d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$ ， $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$ ， $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$  和  $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$

 从而， $\bar{d}_{iL} = \bar{d}'_{jL} U_{d,jj}$ ， $\bar{u}_{iL} = \bar{u}'_{jL} U_{u,ji}$ ，则

$$\tilde{y}_{d,ij} \bar{d}'_{iL} d'_{jR} = \bar{d}'_{iL} (U_d y_d K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR} = \bar{d}'_{iL} U_{d,ik} y_{d_k} (K_d^\dagger)_{kj} d'_{jR} = y_{d_k} \bar{d}_{kL} d_{kR} = y_d \bar{d}_{iL} d_{iR}$$

$$\tilde{y}_{u,ij} \bar{u}'_{iL} u'_{jR} = \bar{u}'_{iL} (U_u y_u K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR} = y_u \bar{u}_{iL} u_{iR}$$



# 费米子质量和 Yukawa 耦合



于是得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(y_{d_i} \bar{d}_{iL} d_{iR} + y_{u_i} \bar{u}_{iL} u_{iR} + y_{\ell_i} \bar{\ell}_{iL} \ell_{iR} + \text{H.c.}) \\ &= -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i\end{aligned}$$

其中前三项是费米子质量项，后三项是 Higgs 玻色子与费米子的 Yukawa 耦合项

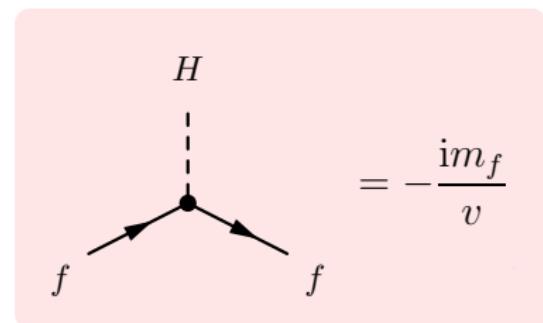
于是，三代夸克和带电轻子获得了质量

$$m_{d_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{d_i} v, \quad m_{u_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{u_i} v$$

$$m_{\ell_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{\ell_i} v$$

$d'_{iL}$ 、 $d'_{iR}$ 、 $u'_{iL}$  和  $u'_{iR}$  是夸克规范本征态

$d_{iL}$ 、 $d_{iR}$ 、 $u_{iL}$  和  $u_{iR}$  是夸克质量本征态



# Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵



$d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$ ,  $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$ ,  $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$  和  $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$  表明

$$d'_{iL} = U_{d,ij} d_{jL}, \quad d'_{iR} = K_{d,ij} d_{jR}, \quad u'_{iL} = U_{u,ij} u_{jL}, \quad u'_{iR} = K_{u,ij} u_{jR}$$



从而

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{kL} = \bar{d}_{jL} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{kL} = \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL}$$



同理有

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}, \quad \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} = \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR}, \quad \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} = \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}$$

# Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵



$d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$ ,  $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$ ,  $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$  和  $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$  表明

$$d'_{iL} = U_{d,ij} d_{jL}, \quad d'_{iR} = K_{d,ij} d_{jR}, \quad u'_{iL} = U_{u,ij} u_{jL}, \quad u'_{iR} = K_{u,ij} u_{jR}$$



从而

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{kL} = \bar{d}_{jL} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{kL} = \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL}$$



同理有

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}, \quad \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} = \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR}, \quad \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} = \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}$$



另一方面,

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{u}_{jL} (U_u^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{u,ik} d_{kL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL}$$

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} u_{kL} = \bar{d}_{jL} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{iL}$$



其中  $V \equiv U_u^\dagger U_d$  称为 **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵**



其厄米共轭矩阵为  $V^\dagger = U_d^\dagger U_u$

# 费米子协变动能项

  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范不变的费米子协变动能项为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{Q}_{iL} iD Q_{iL} + \bar{u}'_{iR} iD u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} iD d'_{iR} + \bar{L}_{iL} iD L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} iD \ell_{iR}$$

 根据  $Q = T^3 + Y$  和  $e = g_{SW} = g' c_W$ , 有

$$\begin{aligned} g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 &= g' Y (c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g T^3 (s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= e(Y + T^3) A_\mu + \left( g c_W T^3 - \frac{g s_W}{c_W} s_W Y \right) Z_\mu = Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 c_W^2 - Y s_W^2) Z_\mu \\ &= Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \end{aligned}$$

 故  $D_\mu Q_{iL} = (\partial_\mu + ig' B_\mu Y + ig W_\mu^a \tau^a) Q_{iL}$

$$\begin{aligned} &= \partial_\mu Q_{iL} + i \begin{pmatrix} g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 & \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu Q_{iL} + i \begin{pmatrix} \left[ Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \right] u'_{iL} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ d'_{iL} \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- u'_{iL} + \left[ Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \right] d'_{iL} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# $\bar{Q}_{iL} iD\bar{Q}_{iL}$ 中的电弱规范相互作用项



于是,  $\bar{Q}_{iL} iD\bar{Q}_{iL}$  包含的电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{iL} iD\bar{Q}_{iL} &\supset - \left[ QeA_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Qs_W^2) Z_\mu \right] \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} \\
 &\quad - \left[ QeA_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Qs_W^2) Z_\mu \right] \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} \\
 &= - \left( QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} u_i \\
 &\quad - \left( QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu \right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} d_i \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i
 \end{aligned}$$



其中左手耦合系数为

$$g_L \equiv T^3 - Qs_W^2$$

# $\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR}$ 中的电弱规范相互作用项

另一方面，

$$\begin{aligned} D_\mu d'_{iR} &= (\partial_\mu + ig' B_\mu Y) d'_{iR} = \partial_\mu d'_{iR} + ig' Q(c_W A_\mu - s_W Z_\mu) d'_{iR} \\ &= \partial_\mu d'_{iR} + iQeA_\mu d'_{iR} - \frac{ig}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu d'_{iR} \end{aligned}$$

则  $\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR}$  包含的电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned} &\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR} \\ &\supset - \left( QeA_\mu - \frac{g}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu \right) \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} - \left( QeA_\mu - \frac{g}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu \right) \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} \\ &= - \left( QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_R Z_\mu \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} u_i - \left( QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_R Z_\mu \right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} d_i \end{aligned}$$

其中右手耦合系数为

$$g_R \equiv -Q s_W^2$$

# 费米子的电弱规范相互作用



引入矢量流和轴矢量流耦合系数

$$g_V \equiv g_L + g_R = T^3 - 2Q s_W^2, \quad g_A \equiv g_L - g_R = T^3$$

将以上夸克电弱规范相互作用项改写为

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL} + \bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR} \\ \supset & -Qe\bar{u}_i \gamma^\mu u_i A_\mu - Qe\bar{d}_i \gamma^\mu d_i A_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{u}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) u_i Z_\mu \\ & - \frac{g}{2c_W} \bar{d}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) d_i Z_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i \end{aligned}$$

同理， $\bar{L}_{iL} i\not{D} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{D} \ell_{iR}$  包含的轻子电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned} & \bar{L}_{iL} i\not{D} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{D} \ell_{iR} \\ \supset & -Qe\bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \ell_i Z_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{\nu}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \nu_i Z_\mu \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \ell_i - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{\ell}_i \gamma^\mu P_L \nu_i \end{aligned}$$

费米子的电弱流耦合

 将这些电弱规范相互作用项写成流耦合的形式，得

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu - Z_\mu J_Z^\mu - W_\mu^+ J_W^{+, \mu} - W_\mu^- J_W^{-, \mu}$$



**电磁流**  $J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum Q_f e \bar{f} \gamma^\mu f$ ，其中  $f$  代表任意费米子场（质量本征态）



$$\text{弱中性流} \quad J_Z^\mu \equiv \frac{g}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f, \quad g_V^f = T_f^3 - 2Q_f s_W^2, \quad g_A^f = T_f^3$$



$$\text{弱带电流} \quad J_W^{+, \mu} \equiv \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_i \gamma^\mu \textcolor{red}{V}_{ij} P_L d_j + \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \ell_i)$$



$$J_W^{+,\mu} \equiv (J_W^{-,\mu})^\dagger = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i + \bar{\ell}_i \gamma^\mu P_L \nu_i)$$



可以看到，电磁流耦合与 QED 耦合完全相同



由此辨认出  $A_\mu$  是电磁场,  $e$  是单位电荷量,  $Q \equiv T^3 + Y$  确实是电荷



为了保持电荷守恒，指定复矢量场  $W_\mu^+(x)$  携带  $Q = +1$  的电荷

 不同代夸克间相互作用  
只发生在弱带电流耦合中,

## 源自 CKM 矩阵 $V$ 的非对角元

# 费米子电弱规范相互作用的顶点规则

$\gamma; \mu$

$$= -iQ_f e \gamma^\mu$$

$Z; \mu$

$$= -\frac{ig}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5)$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

# 电弱规范玻色子的自相互作用

电弱规范场自身的  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{EWG} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

场强张量  $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ ,  $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

$$W; \mu \quad \gamma; \rho \quad W; \nu = i e S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho}$$

$$W; \mu \quad Z; \rho \quad W; \nu = i g c_W S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho}$$

$$W; \mu \quad \gamma; \rho \quad \gamma; \sigma \quad W; \nu = i e^2 T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$W; \mu \quad \gamma; \rho \quad Z; \sigma \quad W; \nu = i e g c_W T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$W; \mu \quad Z; \rho \quad Z; \sigma \quad W; \nu = i g^2 c_W^2 T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$W; \mu \quad W; \rho \quad W; \sigma \quad W; \nu = -i g^2 T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

图中  $S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho} \equiv g^{\mu\nu}(p-q)^\rho + g^{\nu\rho}(q-k)^\mu + g^{\rho\mu}(k-p)^\nu$

$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$

CKM 矩阵

 概率守恒要求 CKM 矩阵  $V$  是么正矩阵，标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ & 1 \\ -s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

其中  $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ , 拟合实验数据得到

$$s_{12} = 0.22501 \pm 0.00068, \quad s_{23} = 0.04183^{+0.00079}_{-0.00069}$$

$$s_{13} = 0.003732^{+0.000090}_{-0.000085}, \quad \delta = 1.147 \pm 0.026$$

  $V$  包含 3 个转动角  $\theta_{12} \simeq 13^\circ$ ,  $\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$ ,  $\theta_{13} \simeq 0.21^\circ$ ,

1 个引起  $CP$  破坏的相角  $\delta \simeq 66^\circ$

夸克味混合

 如果只讨论第一、二代夸克的混合，CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$\theta_C$  称为 Cabibbo 角，满足  $\sin \theta_C = s_{12} = 0.225$

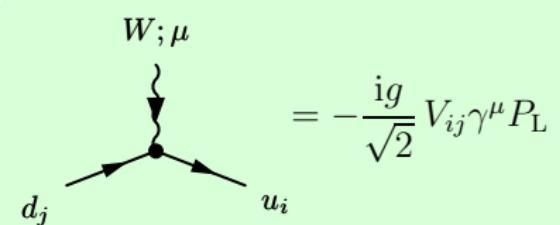
 CKM 矩阵的非对角元非零意味着弱带电流可以耦合不同代的夸克，这是夸克味混合现象

  $W^+ \rightarrow u' \bar{d}'$  过程在质量态上表现为

$$W^+ \rightarrow u\bar{d} \text{ (} V_{11} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{s} \text{ (} V_{12} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{b} \text{ (} V_{13} \text{ 引起)}$$



# 超出标准模型：中微子味混合

中微子振荡实验表明，中微子具有微小质量，而且存在味混合

Dirac 中微子的味本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵  $U$  联系：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$

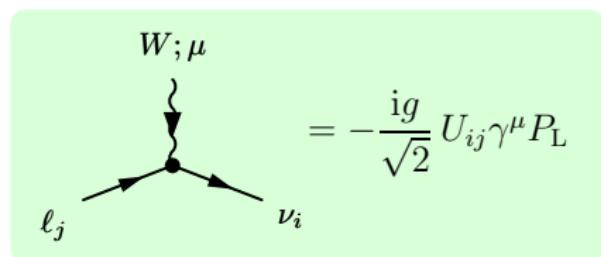
$\bar{\theta}_{12} \sim 33^\circ$ ,  $\bar{\theta}_{23} \sim 41^\circ$  (质量正序) 或  $\bar{\theta}_{23} \sim 50^\circ$  (质量逆序),  $\bar{\theta}_{13} \sim 8.4^\circ$

如果中微子是 Majorana 费米子，则额外存在 2 个  $CP$  破坏相角  $\rho$  和  $\sigma$ ，PMNS 矩阵应该再右乘  $\text{diag}(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$

太阳中微子振荡  $\bar{\theta}_{12}$

大气中微子振荡  $\bar{\theta}_{23}$

反应堆中微子振荡  $\bar{\theta}_{13}$



# $e^+e^-$ 湮灭

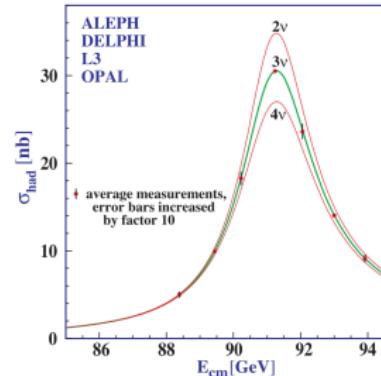
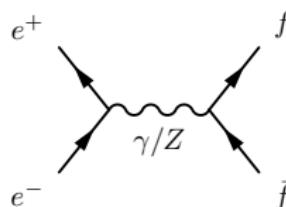


通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

$e^+e^-$  可湮灭成一对正反费米子  $f\bar{f}$



$\sqrt{s} \sim m_Z$  处出现  $Z$  的**共振峰**



# $e^+e^-$ 湮灭

通过电磁流和弱中性流相互作用，

$e^+e^-$  可湮灭成一对正反费米子  $f\bar{f}$

在  $\sqrt{s} \sim m_Z$  处出现  $Z$  的共振峰

受共振态和弱中性流影响较小时，

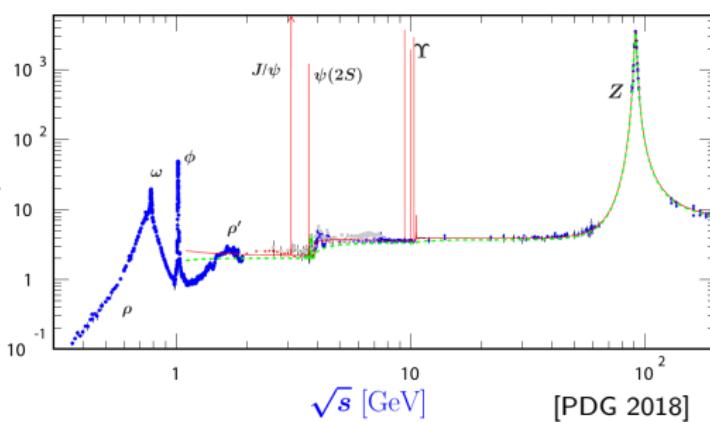
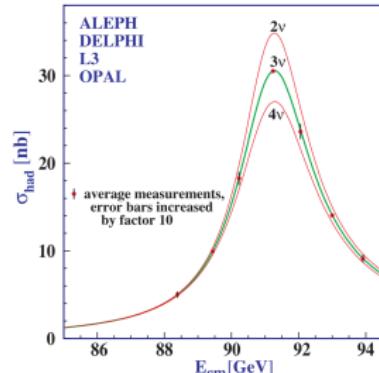
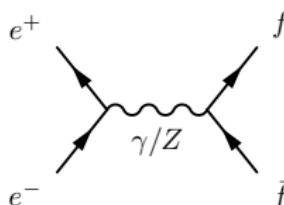
截面比  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$  体现夸克味数、电荷跟  $\mu$  子的相对差异

在  $1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.6 \text{ GeV}$  处，

$$R \simeq 3 \left[ 2 \left( -\frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad R$$

在  $3.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ GeV}$  处，

$$R \simeq 3 \left[ 2 \left( -\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$



# $\beta$ 衰变

弱相互作用引起原子核  $\beta$  衰变

质量数为  $A = Z + N$  的原子核具有  $Z$  个质子和  $N$  个中子，通过  $\beta$  衰变会变成具有  $Z + 1$  个质子和  $N - 1$  个中子的原子核  $A'$ ，即

$$A(Z, N) \rightarrow A'(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

在核子层次，以上过程体现为中子  $\beta$  衰变，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

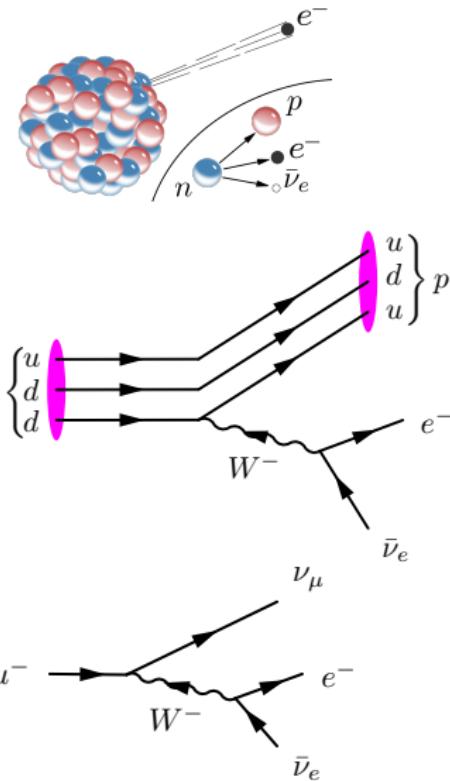
在夸克层次，以上过程体现为  $d$  夸克  $\beta$  衰变

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

此过程来自  $W^-$  玻色子传递的弱带电流相互作用

在轻子方面，类似的过程有  $\mu$  子衰变

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



$\mu$  子衰变

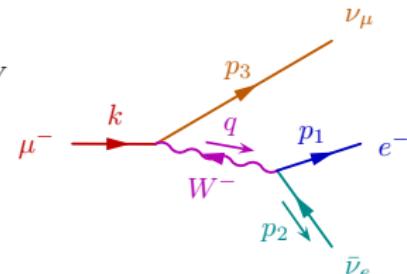
考虑  $\mu$  子衰变过程  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ，相应的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p_3)\gamma^\mu P_L u(k) \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}(p_1)\gamma^\nu P_L v(p_2) \\ &= \frac{ig^2(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{8(q^2 - m_W^2)} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)v(p_2) \end{aligned}$$

由于  $m_u \ll m_W$ ,  $W$  传播子的四维动量满足  $q^2 \ll m_W^2$

因此，可在低能近似下忽略  $q^\mu$  和  $q^2$ ，将振幅化为

$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{ig^2}{8m_W^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2)$$



$\mu$  子衰变

 考虑  $\mu$  子衰变过程  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ，相应的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p_3)\gamma^\mu P_L u(k) \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}(p_1)\gamma^\nu P_L v(p_2) \\ &= \frac{ig^2(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{8(q^2 - m_W^2)} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)v(p_2) \end{aligned}$$

由于  $m_u \ll m_W$ ,  $W$  传播子的四维动量满足  $q^2 \ll m_W^2$

因此，可在低能近似下忽略  $q^\mu$  和  $q^2$ ，将振幅化为

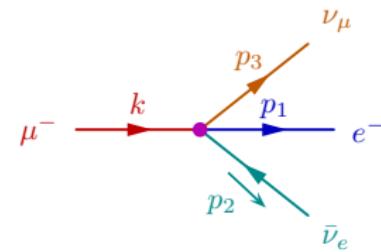
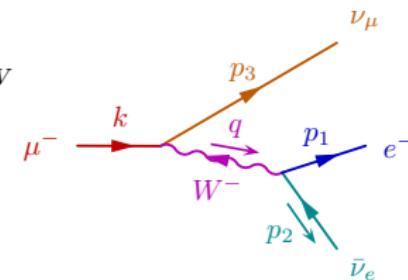
$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{i g^2}{8m_W^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(p_1)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2)$$

可以将这样的振幅看作**有效拉氏量**

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{H.c.}$$

的结果，其中 Fermi 常数  $G_F$  定义为

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \equiv \frac{g^2}{8m_W^2}$$



## 四费米子相互作用理论



可进一步将  $\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{H.c.}$

推广到其它参与弱相互作用的标准模型费米子



耦合常数  $G_F$  是普适的，对所有费米子都适用



这样得到的理论称为四费米子相互作用理论



为了解释  $\beta$  衰变, Enrico Fermi 于 1933 年首次提出这个理论。



现在认为它是**标准模型弱相互作用的低能有效理论**



Enrico Fermi  
(1901–1954)

# 四费米子相互作用理论

 可进一步将  $\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{\mu} e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{H.c.}$

推广到其它参与弱相互作用的标准模型费米子

 耦合常数  $G_F$  是普适的，对所有费米子都适用

 这样得到的理论称为四费米子相互作用理论

 为了解释  $\beta$  衰变，Enrico Fermi 于 1933 年首次提出这个理论

 现在认为它是标准模型弱相互作用的低能有效理论

 忽略电子质量，通过以上振幅计算出  $\mu$  子寿命为  $\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} \simeq \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}$

 根据更精确的结果，由  $\tau_\mu = 2.197 \times 10^{-6} \text{ s}$  推出  $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

 注意到  $m_W = gv/2$ ，Fermi 常数  $G_F$  与 Higgs 场真值  $v$  的关系为

$$G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2} = \frac{\sqrt{2}g^2}{2g^2v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}, \quad v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV}$$



Enrico Fermi  
(1901–1954)

介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变

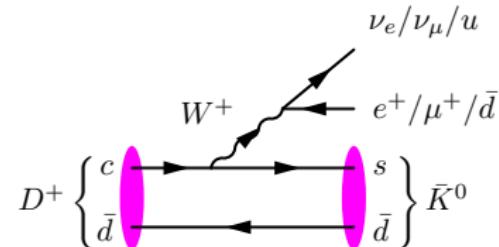


$D^+(cd)$  衰变到  $\bar{K}^0$  和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/d$$



$D^+$  中  $\bar{d}$  夸克实际没参与衰变，称为旁观者



# 介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变



$D^+(cd)$  衰变到  $\bar{K}^0$  和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



$D^+$  中  $\bar{d}$  夸克实际没参与衰变, 称为旁观者

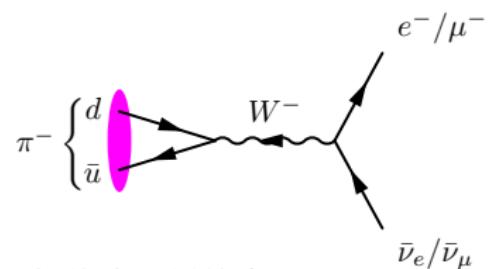
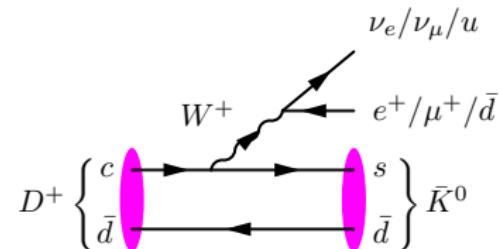


$\pi^- (\bar{u}d)$  衰变到带电轻子和反中微子

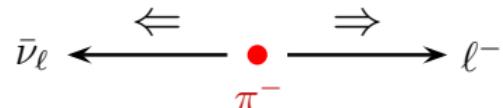
$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



$\pi^-$  静止系中, 角动量守恒要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同, 但弱带电流只耦合左旋费米子和右旋反费米子, 需要由质量翻转螺旋度



$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$



$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  分支比为 99.9877%,  $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$  分支比为 0.0123%