

# 量子场论

## 第 5 章 量子旋量场

### 5.1 节至 5.3 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 7 月 10 日



第5章 量子旋量场

 本章讨论**旋量场** (spinor field) 的**正则量子化**, 旋量场对应于**旋量表示** (spinor representation)

旋量表示是固有保时向 Lorentz 群  $SO^{\uparrow}(1, 3)$  的一个投影表示，也是相应覆盖群  $SL(2, \mathbb{C})$  的一个线性表示

 Paul Dirac 在 1928 年首次将旋量表示引入到描述电子的理论中，建立了 **Dirac 方程**

  $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$  和  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  的 Lie 代数都是 Lorentz 代数，它们的表示可以通过构造满足 Lorentz 代数关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

的生成元矩阵来得到

 下面就以这样的方式建立旋量表示



Paul Dirac  
(1902–1984)

## 5.1 节 Lorentz 群的旋量表示

假设能够找到一组满足如下反对易关系的  $N \times N$  矩阵  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

最后一步是一种简写，省略了  $N \times N$  单位矩阵 1

这样的  $\gamma^\mu$  称为 **Dirac 矩阵**, 也称为  $\gamma$  矩阵

 这个反对易关系意味着  $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$

## 5.1 节 Lorentz 群的旋量表示

假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的  $N \times N$  矩阵  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

 最后一步是一种简写，省略了  $N \times N$  单位矩阵 1

 这样的  $\gamma^\mu$  称为 Dirac 矩阵，也称为  $\gamma$  矩阵

这个反对易关系意味着  $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$

 当  $\mu \neq \nu$  时,  $g^{\mu\nu} = 0$ , 而  $\gamma^\mu$  与  $\gamma^\nu$  是反对易的, 即

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \quad \mu \neq \nu$$

 当  $\mu = \nu$  时，有

$$(\gamma^0)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^0, \gamma^0\} = g^{00} = \textcolor{brown}{1}, \quad (\gamma^i)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^i, \gamma^i\} = g^{ii} = \textcolor{teal}{-1}$$

## Dirac 矩阵的性质

**♍**  $(\gamma^0)^2 = 1$  表明  $(\gamma^0)^2$  的本征值都是 1,  $(\gamma^i)^2 = -1$  表明  $(\gamma^i)^2$  的本征值都是 -1

 这意味着  $\gamma^0$  的本征值为实数  $\pm 1$ ,  $\gamma^i$  的本征值为虚数  $\pm i$

将它们对角化，则对角元是这些本征值：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm i \end{pmatrix}$$

Dirac 矩阵的性质

**♍**  $(\gamma^0)^2 = 1$  表明  $(\gamma^0)^2$  的本征值都是 1,  $(\gamma^i)^2 = -1$  表明  $(\gamma^i)^2$  的本征值都是 -1

 这意味着  $\gamma^0$  的本征值为实数  $\pm 1$ ,  $\gamma^i$  的本征值为虚数  $\pm i$

将它们对角化，则对角元是这些本征值：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm i & & & \\ & \pm i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm i \end{pmatrix}$$

这些性质告诉我们， $\gamma^0$  是厄米矩阵， $\gamma^i$  是反厄米矩阵，即

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

于是  $(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ ,  $(\gamma^i)^\dagger \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = \mathbf{1}$

可见  $\gamma^0$  和  $\gamma^i$  都是么正矩阵

矩阵  $S^{\mu\nu}$

Ⅱ 以 Dirac 矩阵的对易子定义另一组  $N \times N$  矩阵

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

显然,  $S^{\mu\nu}$  关于  $\mu$  和  $\nu$  反对称,  $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$

因而  $\{S^{\mu\nu}\}$  中一共有 6 个独立矩阵

## 利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

以及反对易关系  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ，推出

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu, \gamma^\rho] = \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu), \gamma^\rho] = \frac{i}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\rho] \\
&= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\nu) = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})
\end{aligned}$$

## 旋量表示的生成元矩阵

⑨ 根据对易子公式  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  和  $[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$ ，

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{i}{4} [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho] = \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \gamma^\sigma + \gamma^\rho [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \gamma^\rho - \gamma^\sigma [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} [i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \gamma^\sigma + i\gamma^\rho (\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\quad - i(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \gamma^\rho - i\gamma^\sigma (\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})]
\end{aligned}$$

## 旋量表示的生成元矩阵

⑨ 根据对易子公式  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  和  $[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$ ,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{i}{4} [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho] = \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} ([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \gamma^\sigma + \gamma^\rho [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \gamma^\rho - \gamma^\sigma [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{i}{4} [i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \gamma^\sigma + i\gamma^\rho (\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\quad - i(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \gamma^\rho - i\gamma^\sigma (\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})] \\
&= \frac{i^2}{4} [g^{\nu\rho} (\gamma^\mu \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\mu) - g^{\mu\rho} (\gamma^\nu \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\nu) \\
&\quad - g^{\nu\sigma} (\gamma^\mu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\mu) + g^{\mu\sigma} (\gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu)] \\
&= i(g^{\nu\rho} \mathcal{S}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \mathcal{S}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \mathcal{S}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} \mathcal{S}^{\nu\rho})
\end{aligned}$$

  $S^{\mu\nu}$  满足 Lorentz 代数关系  $[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

因而  $S^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$  必定是 Lorentz 群某个表示的生成元矩阵

以  $S^{\mu\nu}$  生成的表示就是**旋量表示**

# 旋量表示中的固有保时向 Lorentz 变换矩阵

 根据 4.1 节的讨论，一组变换参数  $\omega_{\mu\nu}$  在 Lorentz 群的矢量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = e^X, \quad X \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}$$

 类似地，这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = e^Y, \quad Y \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}$$

 这样定义的  $D(\Lambda)$  是旋量表示中的 Lorentz 变换矩阵

 由于  $e^{-Y} e^Y = e^{-Y+Y} = e^0 = 1$ ， $D(\Lambda)$  的逆矩阵为

$$D^{-1}(\Lambda) = e^{-Y} = \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$$

# 多重对易子

 对于**算符**或**同阶方阵**  $B$  与  $A$ , 以如下方式定义**多重对易子**  $[B, A^{(n)}]$ :

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \dots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

 可以用**数学归纳法**证明  $BA^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$

 由于负整数  $m$  的阶乘为  $m! \rightarrow \infty$ , 可将上式右边化为**无穷级数**,

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$$

# 多重对易子

ℳ 对于算符或同阶方阵  $B$  与  $A$ , 以如下方式定义**多重对易子**  $[B, A^{(n)}]$ :

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \dots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

🏫 可以用**数学归纳法**证明  $BA^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$

🔔 由于负整数  $m$  的阶乘为  $m! \rightarrow \infty$ , 可将上式右边化为**无穷级数**,

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$$

กระเป๋า推出  $e^{-A}Be^A = e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k = e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$

$$= e^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-n)!} A^{k-n} [B, A^{(n)}]$$

$$= e^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^A [B, A^{(n)}] = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]}$$

# Dirac 矩阵的 Lorentz 变换

 由于

$$[\gamma^\mu, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -[\mathcal{S}^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = [\mathcal{S}^{\sigma\rho}, \gamma^\mu] = i(\gamma^\sigma g^{\rho\mu} - \gamma^\rho g^{\sigma\mu}) \\ = i(g^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu - g^{\sigma\mu} \delta^\rho_\nu) \gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu$$



有  $[\gamma^\mu, Y^{(1)}] = [\gamma^\mu, Y] = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} [\gamma^\mu, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu = X^\mu_\nu \gamma^\nu$

 $[\gamma^\mu, Y^{(2)}] = [[\gamma^\mu, Y^{(1)}], Y] = X^\mu_\nu [\gamma^\nu, Y] = X^\mu_\nu X^\nu_\rho \gamma^\rho = (X^2)^\mu_\nu \gamma^\nu, \dots$ 
 $[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)^\mu_\nu \gamma^\nu$



利用  $e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$  推出

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) = e^{-Y} \gamma^\mu e^Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\gamma^\mu, Y^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X^n)^\mu_\nu \gamma^\nu = (e^X)^\mu_\nu \gamma^\nu$$

即

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

类比四维动量算符  $P^\mu$  的 Lorentz 变换  $U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$ ，把上式看作旋量表示中 Dirac 矩阵  $\gamma^\mu$  的 Lorentz 变换规则，那么  $\gamma^\mu$  是一个 Lorentz 矢量

# 单位矩阵和生成元矩阵的 Lorentz 变换

 与  $\gamma^\mu$  对应的协变矢量为  $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ ，从而

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3$$

  $N \times N$  单位矩阵  $\mathbf{1}$  满足

$$D^{-1}(\Lambda) \mathbf{1} D(\Lambda) = \mathbf{1}$$

 因而  $\mathbf{1}$  是一个 Lorentz 标量

 生成元矩阵  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda) \mathcal{S}^{\mu\nu} D(\Lambda) &= \frac{i}{4} [D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda), D^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu D(\Lambda)] \\ &= \frac{i}{4} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \mathcal{S}^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

 可见， $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量

# $\gamma^5$ 矩阵



引入一个新的  $N \times N$  矩阵

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$



由于  $\mu \neq \nu$  时  $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ , 有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

# $\gamma^5$ 矩阵

引入一个新的  $N \times N$  矩阵  $\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

由于  $\mu \neq \nu$  时  $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ , 有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

这种置换性质与四维 Levi-Civita 符号类似:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

因而置换操作带来的正负号在  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  与  $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$  的缩并中相互抵消, 如

$$\varepsilon_{1023}\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon_{0123}(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

由此得到  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

# $\gamma^5$ 的 Lorentz 变换



1.5 节曾推出等式

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

 从而,  $\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$  的固有保时向 Lorentz 变换是

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda) \gamma^5 D(\Lambda) &= -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu D(\Lambda) \\ &\quad \times D^{-1}(\Lambda) \gamma^\rho D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda) \gamma^\sigma D(\Lambda) \\ &= -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \\ &= -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta = \gamma^5 \end{aligned}$$



可见,  $\gamma^5$  是一个 Lorentz 标量

# $\gamma^5$ 的性质



$\gamma^5$  的平方为

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 = -(-1)^3 = 1$$

第二步利用偶置换将后面的  $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$  转化为  $\gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0$

根据  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  和  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ ， $\gamma^5$  是厄米矩阵，

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(\gamma^3)^\dagger (\gamma^2)^\dagger (\gamma^1)^\dagger (\gamma^0)^\dagger = i\gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5$$

此外， $\gamma^5$  与  $\gamma^\mu$  反对易，

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu - \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) = 0$$

即

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$$

# $\gamma^\mu \gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换

ℳ  $\gamma^\mu \gamma^5$  的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda) \gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$

⛪ 因而它是一个 Lorentz 矢量

👨 再引入

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathcal{S}^{\mu\nu}$$

👩 它正比于  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ ，所以也是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量，

$$D^{-1}(\Lambda) \sigma^{\mu\nu} D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

ଓ 当  $\mu \neq \nu$  时， $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^\mu \gamma^\nu$ ，故  $\sigma^{\mu\nu}$  的 6 个独立分量为

$$\sigma^{01} = i\gamma^0 \gamma^1, \quad \sigma^{02} = i\gamma^0 \gamma^2, \quad \sigma^{03} = i\gamma^0 \gamma^3$$

$$\sigma^{12} = i\gamma^1 \gamma^2, \quad \sigma^{13} = i\gamma^1 \gamma^3, \quad \sigma^{23} = i\gamma^2 \gamma^3$$

# 变换矩阵 $D(\mathcal{P})$



现在拥有一组矩阵

$$\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$$

它们的独立分量个数之和为  $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$

上面讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换，下面研究宇称变换

# 变换矩阵 $D(\mathcal{P})$



现在拥有一组矩阵

$$\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$$

它们的独立分量个数之和为  $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$

上面讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换，下面研究宇称变换

用  $\gamma^0$  定义幺正变换矩阵

$$D(\mathcal{P}) = \gamma^0$$

它的幺正性意味着

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$$

用  $D(\mathcal{P})$  对  $\gamma^0$  和  $\gamma^i$  作相似变换，得

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = +\gamma^0$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma^i$$

# $\gamma^\mu$ 、1 和 $\gamma^5$ 的宇称变换

利用宇称变换矩阵  $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

将  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$  和  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$  归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

可见， $D(\mathcal{P})$  就是旋量表示中的宇称变换矩阵，它是非固有保时向的

上式是  $\gamma^\mu$  的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义， $\gamma^\mu$  是极矢量

# $\gamma^\mu$ 、1 和 $\gamma^5$ 的宇称变换

利用宇称变换矩阵  $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

将  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$  和  $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$  归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

可见， $D(\mathcal{P})$  就是旋量表示中的宇称变换矩阵，它是非固有保时向的

上式是  $\gamma^\mu$  的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义， $\gamma^\mu$  是极矢量

$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$  说明  $\gamma^0$  是宇称本征态，本征值为 +，即具有偶宇称

$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$  说明  $\gamma^i$  是宇称本征态，本征值为 -，即具有奇宇称

虽然单位矩阵 1 与  $\gamma^5$  都是 Lorentz 标量，但它们的宇称变换性质不同，

$$D^{-1}(\mathcal{P})1 D(\mathcal{P}) = +1, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma^5$$

1 是狭义的标量，具有偶宇称； $\gamma^5$  是赝标量，具有奇宇称

# $\gamma^\mu \gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换



$\gamma^\mu \gamma^5$  的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$



即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0 \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i \gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i \gamma^5$$



根据 1.4 节的定义,  $\gamma^\mu \gamma^5$  是轴矢量, 其分量的宇称性质与  $\gamma^\mu$  相反

# $\gamma^\mu \gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换



$\gamma^\mu \gamma^5$  的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$



即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0 \gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i \gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i \gamma^5$$



根据 1.4 节的定义,  $\gamma^\mu \gamma^5$  是轴矢量, 其分量的宇称性质与  $\gamma^\mu$  相反



$\sigma^{\mu\nu}$  的宇称变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) &= \frac{i}{2}[D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}), D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\nu D(\mathcal{P})] \\ &= \frac{i}{2}\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \sigma^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{0i} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0{}_\alpha \mathcal{P}^i{}_\beta \sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{0i}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{ij} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^i{}_\alpha \mathcal{P}^j{}_\beta \sigma^{\alpha\beta} = +\sigma^{ij}$$

# 旋量表示的维数

可见, 集合  $\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$  是由**标量 1**、**赝标量  $\gamma^5$** 、**极矢量  $\gamma^\mu$** 、**轴矢量  $\gamma^\mu\gamma^5$**  和 **2 阶反对称张量  $\sigma^{\mu\nu}$**  组成的

综合考虑**固有保时向 Lorentz 变换**和**宇称变换**, 则这些矩阵的变换性质**各不相同**

因而彼此之间是**线性独立**的, 总共有 **16 个**线性独立的矩阵

线性独立的  $N \times N$  矩阵至多有  $N^2$  个, 需要  $N \geq 4$  才能得到 16 个这样的矩阵

# 旋量表示的维数

可见，集合  $\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$  是由标量 1、赝标量  $\gamma^5$ 、极矢量  $\gamma^\mu$ 、轴矢量  $\gamma^\mu\gamma^5$  和 2 阶反对称张量  $\sigma^{\mu\nu}$  组成的

综合考虑固有保时向 Lorentz 变换和宇称变换，则这些矩阵的变换性质各不相同

因而彼此之间是线性独立的，总共有 16 个线性独立的矩阵

线性独立的  $N \times N$  矩阵至多有  $N^2$  个，需要  $N \geq 4$  才能得到 16 个这样的矩阵

取  $N = 4$ ，就可以用这 16 个矩阵展开一个任意的  $4 \times 4$  矩阵（展开系数为复数）

也就是说，它们构成一组完备的基底

可以证明，满足反对易关系  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  的 4 个 Dirac 矩阵至少是 4 阶方阵

对于 2 阶方阵，可以尝试用 Pauli 矩阵来构造 Dirac 矩阵，由  $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$  得  $\{i\sigma^i, i\sigma^j\} = 2g^{ij}$ ，可取  $\gamma^i = i\sigma^i$ ，但我们找不到另一个 2 阶方阵能够同时与  $i\sigma^1$ 、 $i\sigma^2$  和  $i\sigma^3$  反对易

因此，将 Dirac 矩阵  $\gamma^\mu$  取为  $4 \times 4$  矩阵，而旋量表示是 Lorentz 群的 4 维表示

## 5.2 节 Dirac 旋量场

 在 Lorentz 群的旋量表示空间中，被变换矩阵  $D(\Lambda)$  作用的列矢量称为 Dirac 旋量 (spinor)

 由于  $D(\Lambda)$  是  $4 \times 4$  矩阵，Dirac 旋量  $\psi_a$  应当具有 4 个分量 ( $a = 1, 2, 3, 4$ )

 相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda) \psi_b$$

 隐去旋量指标  $a$  和  $b$ ，上式化为  $\psi' = D(\Lambda) \psi$

## 5.2 节 Dirac 旋量场

■ 在 Lorentz 群的旋量表示空间中，被变换矩阵  $D(\Lambda)$  作用的列矢量称为 Dirac 旋量 (spinor)

pineapple 由于  $D(\Lambda)$  是  $4 \times 4$  矩阵，Dirac 旋量  $\psi_a$  应当具有 4 个分量 ( $a = 1, 2, 3, 4$ )

apple 相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda) \psi_b$$

knife 隐去旋量指标  $a$  和  $b$ ，上式化为  $\psi' = D(\Lambda) \psi$

watermelon 注意上式右边是矩阵与列矢量的乘积：

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}(\Lambda) & D_{12}(\Lambda) & D_{13}(\Lambda) & D_{14}(\Lambda) \\ D_{21}(\Lambda) & D_{22}(\Lambda) & D_{23}(\Lambda) & D_{24}(\Lambda) \\ D_{31}(\Lambda) & D_{32}(\Lambda) & D_{33}(\Lambda) & D_{34}(\Lambda) \\ D_{41}(\Lambda) & D_{42}(\Lambda) & D_{43}(\Lambda) & D_{44}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

# 量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

如果  $\psi_a$  依赖于时空坐标  $x^\mu$ ，它就成为 Dirac 旋量场  $\psi_a(x)$

类比量子矢量场的 Lorentz 变换  $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

# 量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

如果  $\psi_a$  依赖于时空坐标  $x^\mu$ ，它就成为 Dirac 旋量场  $\psi_a(x)$

类比量子矢量场的 Lorentz 变换  $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

对于固有保时向 Lorentz 变换  $\Lambda$ ， $D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$  的无穷小形式为

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}$$

于是， $\psi'_a(x')$  的无穷小形式是  $\psi'_a(x') = \psi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x)$

1.7.3 小节一般场的无穷小 Lorentz 变换为  $\Phi'_a(x') = \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)$

比较可知，生成元  $I^{\mu\nu}$  在旋量表示中对应于  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

# 无穷小展开

■ 作变换  $x' \rightarrow x$ 、 $x \rightarrow \Lambda^{-1}x$ ,  $\psi_a'(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$  化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

⌚ 对于无穷小 Lorentz 变换,  $(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

🥛 在  $x$  处将  $\psi(\Lambda^{-1}x)$  展开到  $\omega$  的一阶项, 得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{L}^{\mu\nu} \psi(x)\end{aligned}$$

# 无穷小展开

■ 作变换  $x' \rightarrow x$ 、 $x \rightarrow \Lambda^{-1}x$ ,  $\psi_a'(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$  化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

对于无穷小 Lorentz 变换,  $(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

在  $x$  处将  $\psi(\Lambda^{-1}x)$  展开到  $\omega$  的一阶项, 得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{L}^{\mu\nu} \psi(x)\end{aligned}$$

从而,  $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$  右边展开到  $\omega$  一阶项的形式为

$$\begin{aligned}D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) &= \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}\right) \left[\psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{L}^{\mu\nu} \psi(x)\right] \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} [\hat{L}^{\mu\nu} \psi(x) + \mathcal{S}^{\mu\nu} \psi(x)]\end{aligned}$$

# 自旋角动量

  $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)]$  最左

边展开为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

 两相比较，得到

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)$$

# 自旋角动量

$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)]$  最左

边展开为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

两相比较，得到

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)$$

$S^{\mu\nu}$  纯空间分量的对偶三维矢量为  $S^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}S^{jk}$ ,  $S = (S^{23}, S^{31}, S^{12})$

可以从  $S^{\mu\nu}$  满足的 Lorentz 代数关系推出 SU(2) 代数关系  $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk}S^k$

因而  $S^i$  是 SU(2) 群某个线性表示的生成元

# 自旋角动量

■  $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)]$  最左

边展开为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

两相比较，得到

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = \hat{L}^{\mu\nu}\psi(x) + S^{\mu\nu}\psi(x)$$

纯空间分量的对偶三维矢量为  $S^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}S^{jk}$ ,  $S = (S^{23}, S^{31}, S^{12})$

可以从  $S^{\mu\nu}$  满足的 Lorentz 代数关系推出 SU(2) 代数关系  $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk}S^k$

因而  $S^i$  是 SU(2) 群某个线性表示的生成元

再根据  $J^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk}$  和  $\hat{L}^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{L}^{jk}$  推出

$$[\psi(x), J] = \hat{L}\psi(x) + S\psi(x)$$

上式表明，除了轨道角动量  $\hat{L}$ ，总角动量算符  $J$  还给出了由  $S$  描述的自旋角动量

# 与 Lorentz 变换相关的线性空间

线性空间名称	矢量表示空间	旋量表示空间
维度	4 维	4 维
空间中元素	Lorentz 矢量 $A^\mu$	Dirac 旋量 $\psi_a$
Lorentz 群生成元	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$	$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
固有保时向 Lorentz 变换	$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$	$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$
线性空间名称	Hilbert 空间	场空间
维度	无限维	无限维
空间中元素	态矢 $ \Psi\rangle$	场 $\phi(x)$ 、 $A^\mu(x)$ 、 $\psi(x)$
Lorentz 群生成元	算符 $J^{\mu\nu}$	$\hat{L}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$
固有保时向 Lorentz 变换	$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$	$\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\right)$

# Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

以 1 表示  $2 \times 2$  单位矩阵, 将 Dirac 矩阵表示成  $2 \times 2$  分块形式:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

容易验证, 这样表示的 Dirac 矩阵既符合反对易关系  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , 也满足厄米性  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  和反厄米性  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

# Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

以 1 表示  $2 \times 2$  单位矩阵, 将 Dirac 矩阵表示成  $2 \times 2$  分块形式:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

容易验证, 这样表示的 Dirac 矩阵既符合反对易关系  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , 也满足厄米性  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  和反厄米性  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Dirac 矩阵有多种表示方式, 以上表示方式称为 Weyl 表象, 也称为手征表象

Dirac 矩阵的所有表示方式都是等价的, 彼此通过相似变换联系起来

如果  $\gamma^\mu$  满足反对易关系  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , 那么作相似变换后,  $\gamma'^\mu \equiv U^{-1}\gamma^\mu U$  也满足这个反对易关系:

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = U^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U = 2g^{\mu\nu}U^{-1}U = 2g^{\mu\nu}$$

# Weyl 表象中的 $\gamma^5$ 和 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

根据 Pauli 矩阵的乘积关系  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$

Weyl 表象中  $\gamma^5$  的具体形式为

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ -\sigma^1 \end{pmatrix} \gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} -\sigma^1 \\ \sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ -\sigma^2 \end{pmatrix} \gamma^3 \\ &= i \begin{pmatrix} & -i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3 \\ -\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Weyl 表象中的 $\gamma^5$ 和 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

根据 Pauli 矩阵的乘积关系  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$

Weyl 表象中  $\gamma^5$  的具体形式为

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ -\sigma^1 \end{pmatrix} \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} -\sigma^1 \\ \sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ -\sigma^2 \end{pmatrix} \gamma^3 \\ &= i \begin{pmatrix} -i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3 \\ -\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

用  $2 \times 2$  单位矩阵  $1$  和 Pauli 矩阵定义  $\sigma^\mu \equiv (1, \sigma)$  和  $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma)$

将 Dirac 矩阵  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  和  $\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i \\ -\sigma^i \end{pmatrix}$  归纳成

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix}$$

生成元矩阵表达为  $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

# Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

利用  $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k$  将  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  的空间分量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{ij} &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i & \\ & -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -2i\epsilon^{ijk} \sigma^k & \\ & -2i\epsilon^{ijk} \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 Pauli 矩阵的厄米性可知,  $\mathcal{S}^{ij}$  是厄米矩阵,  $(\mathcal{S}^{ij})^\dagger = \mathcal{S}^{ij}$

# Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

利用  $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k$  将  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  的空间分量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{ij} &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i & \\ & -\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -2i\epsilon^{ijk} \sigma^k & \\ & -2i\epsilon^{ijk} \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 Pauli 矩阵的厄米性可知,  $\mathcal{S}^{ij}$  是厄米矩阵,  $(\mathcal{S}^{ij})^\dagger = \mathcal{S}^{ij}$

自旋角动量矩阵为

$$\mathcal{S}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \mathcal{S}^{jk} = \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon^{jkl} \begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{4} 2\delta^{il} \begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$$

即  $\mathcal{S}^i$  是两个  $SU(2)$  群基础表示生成元  $\tau^i = \frac{\sigma^i}{2}$  的直和

因此  $\mathcal{S}^i$  所属  $SU(2)$  群线性表示是两个  $SU(2)$  基础表示的直和

# Dirac 旋量场自旋为 1/2

用自旋角动量矩阵  $\mathcal{S}$  构造的二阶 Casimir 算符为

$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^i \mathcal{S}^i = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^i & \\ & \sigma^i \sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = s(s+1)$$

上式最后两步省略了  $4 \times 4$  单位矩阵

可见，Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的自旋量子数是

$$s = \frac{1}{2}$$

量子化之后， $\psi(x)$  描述自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子

## 5.3 节 Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量，需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量

在 Weyl 表象中， $S^{\mu\nu}$  的  $0i$  分量为  $S^{0i} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i \\ \sigma^i \end{pmatrix}$

其厄米共轭为  $(S^{0i})^\dagger = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i \\ \sigma^i \end{pmatrix} = -S^{0i}$

可见， $S^{0i}$  不是厄米矩阵，而是反厄米矩阵

## 5.3 节 Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量，需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量

💡 在 Weyl 表象中， $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  的  $0i$  分量为  $\mathcal{S}^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$

💡 其厄米共轭为  $(\mathcal{S}^{0i})^\dagger = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -\mathcal{S}^{0i}$

⚠ 可见， $\mathcal{S}^{0i}$  不是厄米矩阵，而是反厄米矩阵

骆驼 当  $\omega_{0i} \neq 0$  时， $D^\dagger(\Lambda) = \left[ \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) \right]^\dagger = \exp \left[ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right]$   
 $\neq \exp \left( \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) = D^{-1}(\Lambda)$

🔥 即  $D(\Lambda)$  不是么正矩阵，因此  $\psi^\dagger(x)\psi(x)$  不是 Lorentz 标量：

$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) \neq \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

根据  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  和  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ , 有

$$(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i$$

将这两条式子合起来写成一条常用的公式

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$$

$$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$$

根据  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  和  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ , 有

$$(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i$$

将这两条式子合起来写成一条常用的公式

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$$

从而

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 &= -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{4} [(\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger] \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{4} \gamma^0 (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) = \gamma^0 \mathcal{S}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} D^\dagger(\Lambda) \gamma^0 &= \exp \left[ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right] \gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right]^n \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right)^n = \gamma^0 \exp \left( \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda) \end{aligned}$$

# Dirac 共轭和旋量双线性型

● 定义  $\psi(x)$  的 Dirac 共轭

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

根据  $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  的 Lorentz 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

这样一来,  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  就是一个 Lorentz 标量:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

# Dirac 共轭和旋量双线性型



定义  $\psi(x)$  的 Dirac 共轭

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

根据  $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  的 Lorentz 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$



这样一来,  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  就是一个 Lorentz 标量:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

像  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  这样同时包含  $\psi$  和  $\bar{\psi}$  的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)

利用  $\bar{\psi}(x)$  还能构造 Lorentz 协变的其它旋量双线性型

$\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$  是一个 Lorentz 标量,

$$\bar{\psi}'(x')i\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)i\gamma^5D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

# 更多旋量双线性型

●  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  和  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$  都是 Lorentz 矢量,

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)$$



$\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$  是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量,

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu} D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

# 更多旋量双线性型

●  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  和  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$  都是 Lorentz 矢量,

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)$$

  $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$  是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量,

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu} D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

如果将  $\psi(x)$  看作旋量(表示)空间中的列矢量, 则  $\psi^\dagger(x)$  和  $\bar{\psi}(x)$  都是行矢量

 因而这些旋量双线性型都只是旋量空间中的  $1 \times 1$  矩阵, 也就是数, 如

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \bar{\psi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^\mu & \gamma_{12}^\mu & \gamma_{13}^\mu & \gamma_{14}^\mu \\ \gamma_{21}^\mu & \gamma_{22}^\mu & \gamma_{23}^\mu & \gamma_{24}^\mu \\ \gamma_{31}^\mu & \gamma_{32}^\mu & \gamma_{33}^\mu & \gamma_{34}^\mu \\ \gamma_{41}^\mu & \gamma_{42}^\mu & \gamma_{43}^\mu & \gamma_{44}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

# 旋量双线性型的厄米性

 由  $\gamma^0$  和  $\gamma^5$  的厄米性、 $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$  及  $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$  可知

 这些旋量双线性型都是厄米的，也就是说，都是实数：

$$(\bar{\psi}\psi)^\dagger = (\psi^\dagger \gamma^0 \psi)^\dagger = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi$$

$$(\bar{\psi} i \gamma^5 \psi)^\dagger = -i \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi = i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi = \bar{\psi} i \gamma^5 \psi$$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^\dagger = \psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi)^\dagger &= \psi^\dagger \gamma^5 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu \psi = -\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)^\dagger &= -\frac{i}{2} \psi^\dagger [(\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger] \gamma^0 \psi \\ &= -\frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) \psi = \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \end{aligned}$$

 量子化之后，这五个旋量双线性型成为厄米算符

# 自由 Dirac 旋量场的拉氏量

此外，包含时空导数的旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$  是 Lorentz 标量，

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

# 自由 Dirac 旋量场的拉氏量

此外，包含时空导数的旋量双线性型  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$  是 Lorentz 标量，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)\end{aligned}$$

利用  $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  和  $\bar{\psi}\psi$  写下自由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的 Lorentz 不变拉氏量

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

其中  $m > 0$  是 Dirac 旋量场的质量，于是

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}$$

Euler-Lagrange 方程  $\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$  给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

# Dirac 方程

对  $0 = i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$  取厄米共轭，得到

$$0 = -i(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -i(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

故  $\psi(x)$  的经典运动方程为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

上式就是 Dirac 方程，标明旋量指标的形式为  $[i(\gamma^\mu)_{ab} \partial_\mu - m\delta_{ab}] \psi_b(x) = 0$

# Dirac 方程

♥ 对  $0 = i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$  取厄米共轭，得到

$$0 = -i(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -i(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

故  $\psi(x)$  的经典运动方程为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

上式就是 Dirac 方程，标明旋量指标的形式为  $[i(\gamma^\mu)_{ab} \partial_\mu - m\delta_{ab}] \psi_b(x) = 0$

容易验证，Dirac 方程具有 Lorentz 协变性：

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= [i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m] D(\Lambda) \psi(x) \\ &= D(\Lambda) [iD^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m] \psi(x) \\ &= D(\Lambda) [i\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m] \psi(x) \\ &= D(\Lambda) (i\delta^\nu_\rho \gamma^\rho \partial_\nu - m) \psi(x) = D(\Lambda) (i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \end{aligned}$$

# Klein-Gordon 方程

对 Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  左边乘以  $(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$

利用反对易关系  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ，得

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi \\ &= \left[ \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\nu \partial_\mu) + m^2 \right] \psi = \left[ \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \psi \\ &= (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi \end{aligned}$$

也就是说，自由的 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  满足 Klein-Gordon 方程

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0$$

# Weyl 旋量

❤ 在 Weyl 表象中，旋量表示生成元矩阵  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和

🌊 把四分量 Dirac 旋量场  $\psi$  分解为两个二分量旋量场  $\eta_L$  和  $\eta_R$ ： $\psi = \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix}$

🦐 这样的二分量旋量称为 Weyl 旋量

🐠  $\eta_L$  称为左手 (left-handed) Weyl 旋量， $\eta_R$  称为右手 (right-handed) Weyl 旋量

# Weyl 旋量

❤ 在 Weyl 表象中，旋量表示生成元矩阵  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和

🌊 把四分量 Dirac 旋量场  $\psi$  分解为两个二分量旋量场  $\eta_L$  和  $\eta_R$ ： $\psi = \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix}$

🦐 这样的二分量旋量称为 Weyl 旋量

🐠  $\eta_L$  称为左手 (left-handed) Weyl 旋量， $\eta_R$  称为右手 (right-handed) Weyl 旋量

🐠 利用  $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix}$  将 Dirac 方程化为

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R - m\eta_L \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L - m\eta_R \end{pmatrix}$$

🐠 即得两个相互耦合的方程  $\begin{cases} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L - m\eta_R = 0 \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R - m\eta_L = 0 \end{cases}$

# Weyl 方程

如果  $m = 0$ ，两个方程就各自独立了：

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R = 0$$

这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

可见，非零质量  $m$  的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来



Hermann Weyl  
(1885–1955)

# Weyl 方程

如果  $m = 0$ ，两个方程就各自独立了：

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R = 0$$

这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

可见，非零质量  $m$  的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来

自旋角动量矩阵的直和分解  $\mathcal{S}^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$  表明

左手和右手 Weyl 旋量各对应于一个  $SU(2)$  群基础表示

当  $m = 0$  时，量子化之后的  $\eta_L(x)$  和  $\eta_R(x)$  各自描述自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子



Hermann Weyl  
(1885–1955)