量 子 场 论

第 2 章　量子标量场

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 7 月 11 日

第 2 章 量子标量场 2.1 节 简谐振子的正则量子化

- 本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法
- 标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广
- **一维简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- 其中 m 是质量，ω 是角频率，第一项是动能，第二项是势能

第 2 章 量子标量场 2.1 节 简谐振子的正则量子化

- 本章讲述标量场 (scalar field) 的正则量子化 (canonical quantization) 方法
- 标量场的量子化可以看作简谐振子量子化的推广
- 一维简谐振子 (simple harmonic oscillator) 的哈密顿量表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- 其中 m 是质量，ω 是角频率，第一项是动能，第二项是势能
- 在量子力学中，把坐标 x 和动量 p 两个正则变量看作厄米算符，满足正则对易关系 $[x,p] \equiv xp - px = \mathrm{i}$
- 构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + \mathrm{i}p), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - \mathrm{i}p)$$

- a 称为湮灭算符 (annihilation operator)，$a^\dagger$ 称为产生算符 (creation operator)
- 两者互为厄米共轭 (Hermitian conjugate)

Charles Hermite
(1822–1901)

产生湮灭算符的对易关系

🔗 湮灭算符和产生算符的**对易关系**为

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x + \mathrm{i}p, m\omega x - \mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x, -\mathrm{i}p] + [\mathrm{i}p, m\omega x]) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x, p] + \mathrm{i}[p, x]) = -\mathrm{i}[x, p] = 1
\end{aligned}
$$

⛓ 同理推出 $[a, a] = 0$ 和 $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$

产生湮灭算符的对易关系

湮灭算符和产生算符的**对易关系**为

$$[a,a^\dagger] = \frac{1}{2m\omega}[m\omega x+\mathrm{i}p, m\omega x-\mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x,-\mathrm{i}p]+[\mathrm{i}p,m\omega x])$$
$$= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x,p]+\mathrm{i}[p,x]) = -\mathrm{i}[x,p] = 1$$

同理推出 $[a,a]=0$ 和 $[a^\dagger,a^\dagger]=0$

反过来用 a 和 $a^\dagger$ 表示 x 和 p，有 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a+a^\dagger)$，$p=-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{m\omega}{2}}(a-a^\dagger)$

对易关系 $[a,a^\dagger]=1$ 意味着 $aa^\dagger = a^\dagger a+1$，于是将**哈密顿量**表达成

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{m\omega}{2}(a-a^\dagger)^2+\frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{2m\omega}(a+a^\dagger)^2$$
$$= -\frac{\omega}{4}(aa-aa^\dagger-a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)+\frac{\omega}{4}(aa+aa^\dagger+a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger) = \frac{\omega}{2}(aa^\dagger+a^\dagger a)$$
$$= \frac{\omega}{2}(2a^\dagger a+1) = \omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right) = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)$$

其中 $N\equiv a^\dagger a$ 是个**厄米算符**，称为**粒子数算符**

粒子数算符的本征态

📕 N 是个**半正定**算符，对于**任意**态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) **非负**：

$$\langle\Psi|\, N\, |\Psi\rangle = \langle\Psi|\, a^\dagger a\, |\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0$$

📘 因此，**哈密顿量** $H = \omega(N + 1/2)$ 是**正定**算符，$\langle\Psi|\, H\, |\Psi\rangle > 0$

🏮 设 $|n\rangle$ 是 N 的**本征态**，满足**归一化条件** $\langle n|n\rangle = 1$ 和**本征方程** $N\, |n\rangle = n\, |n\rangle$

🪔 由 $n = \langle n|\, n\, |n\rangle = \langle n|\, N\, |n\rangle \geq 0$ 可知，**本征值** n 是个**非负实数**

粒子数算符的本征态

- N 是个**半正定**算符，对于**任意**态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) **非负**：

$$\langle\Psi| N |\Psi\rangle = \langle\Psi| a^\dagger a |\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0$$

- 因此，**哈密顿量** $H = \omega(N + 1/2)$ 是**正定**算符，$\langle\Psi| H |\Psi\rangle > 0$
- 设 $|n\rangle$ 是 N 的**本征态**，满足**归一化条件** $\langle n|n\rangle = 1$ 和**本征方程** $N |n\rangle = n |n\rangle$
- 由 $n = \langle n| n |n\rangle = \langle n| N |n\rangle \geq 0$ 可知，**本征值** n 是个**非负实数**
- 利用**对易子公式**

$$[AB, C] = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]$$

- 推出 $[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] = a^\dagger$ 和 $[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a$
- 故 $Na^\dagger = a^\dagger N + a^\dagger$，$Na = aN - a$，从而

$$Na^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle = (n + 1)a^\dagger |n\rangle$$

$$Na |n\rangle = (aN - a) |n\rangle = (n - 1)a |n\rangle$$

升算符和降算符

- 可见，$a^\dagger|n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 都是 N 的**本征态**，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，因此

$$a^\dagger|n\rangle = c_1|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = c_2|n-1\rangle$$

- 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**
- **产生算符** $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符**
- **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符**

升算符和降算符

- 可见，$a^\dagger|n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 都是 N 的**本征态**，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，因此

$$a^\dagger|n\rangle = c_1|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = c_2|n-1\rangle$$

- 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**
- **产生算符** $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符**
- **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符**
- 为确定归一化常数的值，进行以下计算，

对易关系

$$n+1 = \langle n|(N+1)|n\rangle = \langle n|(a^\dagger a+1)|n\rangle = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = |c_1|^2\langle n+1|n+1\rangle = |c_1|^2$$

$$n = \langle n|N|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c_2|^2\langle n-1|n-1\rangle = |c_2|^2$$

- 将 c_1 和 c_2 都取为**正实数**，得 $c_1=\sqrt{n+1}$ 和 $c_2=\sqrt{n}$，故

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用**降算符** a 逐步操作
- 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a\,|n\rangle$，$a^2\,|n\rangle$，$a^3\,|n\rangle$，$\cdots$
- 对应的本征值分别为 $n-1$，$n-2$，$n-3$，$\cdots$
- 由于 $n \geq 0$，必定存在一个**最小本征值** n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a\,|n_0\rangle = 0$
- 于是 $N\,|n_0\rangle = a^\dagger a\,|n_0\rangle = 0 = 0\,|n_0\rangle$，可见 $n_0 = 0$，即 $|n_0\rangle = |0\rangle$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用**降算符** a 逐步操作
- 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a\,|n\rangle$, $a^2\,|n\rangle$, $a^3\,|n\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $\cdots$
- 由于 $n \geq 0$，必定存在一个**最小本征值** n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a\,|n_0\rangle = 0$
- 于是 $N\,|n_0\rangle = a^\dagger a\,|n_0\rangle = 0 = 0\,|n_0\rangle$，可见 $n_0 = 0$，即 $|n_0\rangle = |0\rangle$
- 反过来，从 $|0\rangle$ 出发，用**升算符** $a^\dagger$ 逐步操作
- 得到本征值逐次增加的一系列本征态 $a^\dagger\,|0\rangle$, $(a^\dagger)^2\,|0\rangle$, $(a^\dagger)^3\,|0\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 1, 2, 3, $\cdots$
- 综上，**本征值** n 的取值是**非负整数**，是**量子化**的
- 可以用 $a^\dagger$ 和 $|0\rangle$ 将本征态 $|n\rangle$ 表示为 $|n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\,|0\rangle$

能量本征值

🔍 显然，$|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H|n\rangle = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

🔭 相应的**能量本征值**为

$$E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

🔬 **基态** $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**，这是**量子力学**的**特有**结果

能量本征值

显然，$|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H\,|n\rangle = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n\,|n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**，这是**量子力学**的**特有**结果

可以将 $|0\rangle$ 看作**真空态**，将 $n > 0$ 的 $|n\rangle$ 看作包含 n **个声子** (phonon) 的激发态，每个声子具有**一份能量** ω

这样一来，n 表示声子的数目，故**粒子数算符** N 描述**声子数**

$a^\dagger$ 的作用是**产生**一个声子，从而**增加**一份能量

a 的作用是**湮灭**一个声子，从而**减少**一份能量

这是将 $a^\dagger$ 和 a 称为**产生算符**和**湮灭算符**的原因

2.2 节　量子场论中的正则对易关系

在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

Erwin Schrödinger
(1887–1961)

在 Schrödinger 绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 代表随时间演化的物理态，而 Hilbert 空间中的 算符 O^{S} 不依赖于时间

如果系统的哈密顿量 H 不含时间，则 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 与 $t=0$ 时刻态矢 $|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 通过幺正变换 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 联系起来，

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$$

这里用到的指数函数对任意算符 A 定义为 $\mathrm{e}^{A} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

于是 $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = H\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$

这就是 Schrödinger 方程，而 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 其实是方程的解

Heisenberg 绘景

- Heisenberg 绘景的态矢定义为 $|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$
- 它不随时间演化，$\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0$
- 而算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，$O^{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$
- 由于 $[H, H] = 0$，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H$

Werner Heisenberg (1901–1976)

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢定义为 $|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = e^{iHt}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$

它不随时间演化，$\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0$

而算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，$O^{\mathrm{H}}(t) = e^{iHt}O^{\mathrm{S}}e^{-iHt}$

由于 $[H, H] = 0$，有 $e^{iHt}He^{-iHt} = He^{iHt}e^{-iHt} = H$

故哈密顿量 H 在这两种绘景中是相同的，$H^{\mathrm{H}} = H^{\mathrm{S}} = H$

${}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,O^{\mathrm{H}}(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,e^{iHt}O^{\mathrm{S}}e^{-iHt}\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$

表明，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理

Werner Heisenberg
(1901–1976)

含时算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 满足 Heisenberg 运动方程

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}O^{\mathrm{H}}(t) &= i\frac{\partial e^{iHt}}{\partial t}O^{\mathrm{S}}e^{-iHt} + e^{iHt}O^{\mathrm{S}}i\frac{\partial e^{-iHt}}{\partial t} = -He^{iHt}O^{\mathrm{S}}e^{-iHt} + e^{iHt}O^{\mathrm{S}}e^{-iHt}H \\
&= -HO^{\mathrm{H}}(t) + O^{\mathrm{H}}(t)H = [O^{\mathrm{H}}(t), H]
\end{aligned}
$$

等时对易关系

⌛ 上一节对**简谐振子**的**量子化**是在 **Schrödinger 绘景**中进行的，因为没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的**时间依赖性**

🛋 将正则对易关系改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 **Heisenberg 绘景**中的形式是

$$[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}$$

🪑 可见，正则对易关系的形式**不依赖于绘景**

⏰ 上式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) **对易关系**

等时对易关系

⌛ 上一节对**简谐振子**的**量子化**是在 **Schrödinger 绘景**中进行的，因为没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的**时间依赖性**

🛋 将正则对易关系改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 **Heisenberg 绘景**中的形式是

$$[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}$$

🪑 可见，正则对易关系的形式**不依赖于绘景**

⏰ 上式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) **对易关系**

🛏 接下来的讨论在 **Heisenberg 绘景**中进行，**省略**绘景的标志性上标 H

👨‍🔬 将讨论推广到具有 $\boldsymbol{n}$ **个自由度**的系统，记 $q_i(t)$ 为系统在 Heisenberg 绘景中的**广义坐标算符**，$p_i(t)$ 为相应的**广义动量算符**，它们是系统的**正则变量**

🕰 由于不同自由度**不应该相互影响**，这些算符需要满足的**等时对易关系**为

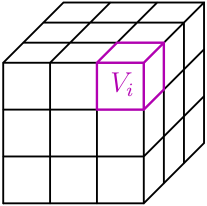
$$[q_i(t), p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

空间离散化

1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，空间坐标 $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的参数

场论讨论的是无穷多个连续自由度的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个广义坐标

为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间离散化，划分成无穷多个小体积元 V_i，再取 $V_i \to 0$ 的极限来得到连续空间的结果



空间离散化

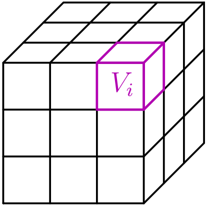
1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，空间坐标 $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 的参数

场论讨论的是无穷多个连续自由度的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 都是一个广义坐标

为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间离散化，划分成无穷多个小体积元 V_i ，再取 $V_i \to 0$ 的极限来得到连续空间的结果

在体积元 V_i 中，定义相应的广义坐标

$$\Phi_i(t) \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \Phi(\mathbf{x}, t)$$



这是场 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 在 V_i 中的平均值

记 $\partial_\mu \Phi$ 和拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$ 在 V_i 中的平均值为

$$\partial_\mu \Phi_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \partial_\mu \Phi, \quad \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

离散化后的等时对易关系

当 V_i **足够小**时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu\Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i)$，**拉格朗日量**表达为

$$L(t) = \int d^3x\,\mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x\,\mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\,\mathcal{L} = \sum_i V_i\,\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i)$$

依照定义，**广义动量**是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial\mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j\delta_{ji}\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = V_i\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}$$

离散化后的等时对易关系

当 V_i **足够小**时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu\Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i)$，**拉格朗日量**表达为

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i\, \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i)$$

依照定义，**广义动量**是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}$$

相应的**等时对易关系**为

$$[\Phi_i(t), \Pi_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [\Phi_i(t), \Phi_j(t)] = 0, \quad [\Pi_i(t), \Pi_j(t)] = 0$$

引入 $\pi_i(t) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \dfrac{\Pi_i(t)}{V_i}$，则第一、三条等时对易关系可用 $\pi_i(t)$ 表达为

$$[\Phi_i(t), \pi_j(t)] = i\, \frac{\delta_{ij}}{V_j}, \quad [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0$$

δ 函数

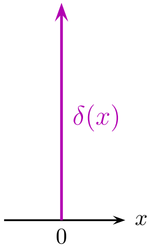
从**离散**到**连续**，**Kronecker 符号** δ_{ij} 将变成 **δ 函数**

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\delta(x)=1$

从而，对于**任意连续函数** $f(x)$，有 $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\,f(y)\delta(x-y)$

$\delta(x)$ 是**偶函数**，$\delta(x)=\delta(-x)$，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}px}=2\pi\,\delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x-y)=f(y)\delta(x-y),\quad x\,\delta(x)=0$$



δ 函数

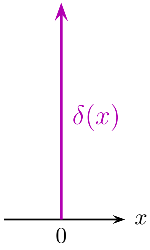
- 从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

- Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1$

- 从而，对于任意连续函数 $f(x)$，有 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, f(y)\delta(x-y)$

- $\delta(x)$ 是偶函数，$\delta(x) = \delta(-x)$，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}px} = 2\pi\, \delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \quad x\,\delta(x) = 0$$



- 这里约定，函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} f(x)$

- Fourier 逆变换 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tilde{f}(p)$，$2\pi\,\delta(p)$ 是 $f(x) = 1$ 的 Fourier 变换

- 若方程 $f(x) = 0$ 具有若干个分立的根 x_i，则 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$

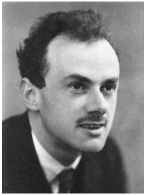
三维 δ 函数

- 用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$
- 那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$，$\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$
- 对于 **任意连续函数** $f(\mathbf{x})$，有 $f(\mathbf{x}) = \int d^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的**偶函数**，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$，满足 $\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$

Joseph Fourier (1768–1830)



Paul Dirac (1902–1984)

三维 δ 函数

- 用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$
- 那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$，$\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$
- 对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$，有 $f(\mathbf{x}) = \int d^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，以及

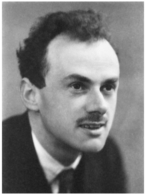
$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的**偶函数**，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$，满足 $\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- 在三维空间中，**函数** $f(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**是

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

- **Fourier 逆变换**是 $f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{p})$
- $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 是 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的 Fourier 变换

Joseph Fourier (1768–1830)



Paul Dirac (1902–1984)

量子场论中的正则对易关系

- $f(\mathbf{x})$ 在 V_i **上的平均值** $f_i = \sum_j f_j\,\delta_{ij} = \sum_j V_j\,f_j\,\dfrac{\delta_{ij}}{V_j}$
- $f(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \to 0$ **极限**形式
- 也就是说，在**连续极限**下，$\dfrac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
- $\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$
- $\pi_i(t) = \dfrac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t)$ **(共轭动量密度)**
- 因此，**等时对易关系**化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)] = 0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0$$

量子场论中的正则对易关系

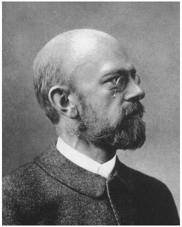
- $f(\mathbf{x})$ 在 V_i **上的平均值** $f_i = \sum_j f_j\,\delta_{ij} = \sum_j V_j\,f_j\,\dfrac{\delta_{ij}}{V_j}$
- $f(\mathbf{x}) = \int d^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \to 0$ **极限**形式
- 也就是说，在**连续极限**下，$\dfrac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
- $\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$
- $\pi_i(t) = \dfrac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t)$ **(共轭动量密度)**
- 因此，**等时对易关系**化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)] = 0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0$$

- 推广到包含若干个场 Φ_a 的系统，**假设不同的场不会相互影响**，则

$$[\Phi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi_a(\mathbf{x},t),\Phi_b(\mathbf{y},t)] = 0,\quad [\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = 0$$

- 这就是**量子场论中的正则对易关系**
- 此时，系统的**正则变量** $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_a(\mathbf{x},t)$ 都是 **Hilbert 空间**中的**算符**



David Hilbert
(1862–1943)

2.3 节 实标量场的正则量子化

- 如果场 $\phi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，就称它为**标量场**
- 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$
- 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

- 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x)$$

- 量子化之后，$\phi(x)$ 是一个**厄米算符**

2.3 节　实标量场的正则量子化

- 如果场 $\phi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，就称它为**标量场**
- 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$
- 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

- 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x)$$

- 量子化之后，$\phi(x)$ 是一个**厄米算符**
- 假设 $\phi(x)$ 是**不参与相互作用**的**自由**实标量场，相应的 **Lorentz 不变拉氏量**是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

- 其中 $m > 0$ 是实标量场的**质量**，第一项是动能项，第二项是质量项

Klein-Gordon 方程

注意到 $\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2]$

有 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi$

归纳起来得 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$

因此，**Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi$$

也就是说，$\phi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$$

这是实标量场的**经典运动方程**

Oskar Benjamin Klein
(1894–1977)

Walter Gordon
(1893–1939)

等时对易关系

实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x)$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的时间导数，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ **因子**，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0 \phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也必须引入 $1/2$ **因子**，否则不会得到 **Klein-Gordon 方程**

等时对易关系

- 实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x)$$

- 即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的时间导数，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$
- 如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ **因子**，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0 \phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)
- **质量项**也必须引入 $1/2$ **因子**，否则不会得到 **Klein-Gordon 方程**
- 现在，把**正则变量** $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 看作 **Hilbert 空间**中的**算符**
- 要求它们满足**等时对易关系**

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

- 这种做法称为**正则量子化**

2.3.1 小节　平面波展开

在量子力学中，单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$$

有 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=E\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=E\Psi$，$-\mathrm{i}\nabla\Psi=\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=\mathbf{p}\Psi$

可见，$\hat{E}=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符，$\hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是 $\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=\mathrm{i}\partial^\mu$

2.3.1 小节　平面波展开

在量子力学中，单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$$

有 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=E\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=E\Psi$，$-\mathrm{i}\nabla\Psi=\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=\mathbf{p}\Psi$

可见，$\hat{E}=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符，$\hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是 $\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=\mathrm{i}\partial^\mu$

将平面波解改写成 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$，其中 $p^\mu=(E,\mathbf{p})$，$x^\mu=(t,\mathbf{x})$，则

$$\mathrm{i}\partial^\mu\Psi=\mathrm{i}\partial^\mu e^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^\mu e^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^\mu\Psi$$

因此，p^μ 是四维动量微分算符 $\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\partial^\mu$ 的本征值

平面波解 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 描述四维动量为 p^μ 的粒子

正能解和负能解

- 现在讨论**量子场论**的情况
- 设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x)=\exp(-\mathrm{i}k\cdot x)$
- 则 $\partial^2\varphi=\partial^\mu\partial_\mu\varphi=\partial^\mu(-\mathrm{i}k_\mu\varphi)=(-\mathrm{i})^2k_\mu k^\mu\varphi=-k^2\varphi$
- 从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0=(\partial^2+m^2)\varphi=-(k^2-m^2)\varphi=-[(k^0)^2-|\mathbf{k}|^2-m^2]\varphi$$

- 这就要求 $(k^0)^2=|\mathbf{k}|^2+m^2$，即 $k^0=\pm E_\mathbf{k}$，其中 $E_\mathbf{k}\equiv\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}>0$

正能解和负能解

- 现在讨论**量子场论**的情况
- 设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x) = \exp(-ik\cdot x)$
- 则 $\partial^2\varphi = \partial^\mu\partial_\mu\varphi = \partial^\mu(-ik_\mu\varphi) = (-i)^2 k_\mu k^\mu\varphi = -k^2\varphi$
- 从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(k^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

- 这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$，其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$
- 因此有两种平面波解
- $k^0 = E_{\mathbf{k}}$ 对应于**正能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = \exp[-i(k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = \exp[-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]$$

- $k^0 = -E_{\mathbf{k}}$ 对应于**负能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) = \exp[-i(k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = \exp[i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]$$

一般解

🏔 从而，满足 **Klein-Gordon 方程**的**场算符** $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**可写成如下形式，

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) + \tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)\right]$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

🐄 其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的**算符**，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是**归一化因子**

🐂 这是一个 **Fourier 展开式**，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维动量空间中的无穷多个**动量模式**

一般解

从而，满足 **Klein-Gordon 方程**的**场算符** $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}^{(+)}(x)+\tilde{a}_\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}^{(-)}(x)\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

其中 $a_\mathbf{k}$ 和 $\tilde{a}_\mathbf{k}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的**算符**，$1/\sqrt{2E_\mathbf{k}}$ 是**归一化因子**

这是一个 **Fourier 展开式**，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维动量空间中的无穷多个**动量模式**

取上式的**厄米共轭**，得

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}^\dagger e^{-i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的 **$\mathbf{k}$ 换成 $-\mathbf{k}$** **不会改变**积分的结果，而 $E_{-\mathbf{k}}=E_\mathbf{k}$

自共轭条件

观察

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_\mathbf{k}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

$$\phi^\dagger(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

可知，**自共轭条件** $\phi^\dagger(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t)$ 意味着 $\tilde{a}_\mathbf{k} = a^\dagger_{-\mathbf{k}}$

注意，由 $\tilde{a}_\mathbf{k} = a^\dagger_{-\mathbf{k}}$ 可以推出 $\tilde{a}^\dagger_\mathbf{k} = a_{-\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} = a_\mathbf{k}$，因而

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^\dagger_\mathbf{k}e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned}$$

第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$

平面波展开式

对于

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

把动量记号 **k** **替换成** **p**，将 $\phi(\mathbf{x},t)$ **的平面波展开式**整理成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

其中 $p\cdot x=p^0t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$，且 $p^0>0$，满足**质壳条件**$p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$

$a_\mathbf{p}$ 是**湮灭算符**，对应于**正能解** $e^{-ip\cdot x}$

$a_\mathbf{p}^\dagger$ 是**产生算符**，对应于**负能解** $e^{ip\cdot x}$

共轭动量密度算符的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x},t)=\partial_0\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

2.3.2 小节　产生湮灭算符的对易关系

在三维空间中对 $\phi(\mathbf{x},t)$ 作 **Fourier 变换**，有

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p-q)\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right]$$

这里比 Fourier 变换公式 $\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{x})$ 多乘了一个 e^{iq^0t} **因子**，使指数因子变成 $e^{iq^0t}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = e^{iq\cdot x}$。利用

$$\int d^3x\, e^{\pm i(p-q)\cdot x} = \int d^3x\, e^{\pm i(p^0-q^0)t}e^{\mp i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3e^{\pm i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$\int d^3x\, e^{\pm i(p+q)\cdot x} = \int d^3x\, e^{\pm i(p^0+q^0)t}e^{\mp i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3e^{\pm i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$$

得

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})+a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q}+a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0t}\right)$$

在第一步中，$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，$q^0=\sqrt{|\mathbf{q}|^2+m^2}$，两个三维 δ 函数分别要求 $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$，都导致 $p^0=q^0$，**对 d^3p 积分**即得第二步结果

产生湮灭算符的表达式

类似地，$\pi(\mathbf{x},t)$ 的 **Fourier 变换**为

$$\begin{aligned}\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p-q)\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right]\\ &= \int d^3p\,\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\ &= \frac{-iq_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0t}\right)\end{aligned}$$

从而 $$\begin{aligned}\int d^3x\, e^{iq\cdot x}[\pi(x) - iq_0\phi(x)] &= \int d^3x\, e^{iq\cdot x}\pi(x) - iq_0\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x)\\ &= \frac{-2iq_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}a_\mathbf{q} = -i\sqrt{2E_\mathbf{q}}\,a_\mathbf{q}\end{aligned}$$

即 $$a_\mathbf{p} = \frac{i}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\, e^{ip\cdot x}\,[\pi(x) - ip_0\phi(x)]$$

取**厄米共轭**，并使用**自共轭条件** $\phi^\dagger = \phi$ 和 $\pi^\dagger = \pi$，得

$$a_\mathbf{p}^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\, e^{-ip\cdot x}\,[\pi(x) + ip_0\phi(x)]$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

☘ 令 $x^0 = y^0 = t$，利用**等时对易关系**推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, \left[e^{ip\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ e^{-iq\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)\}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x - q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0+q_0) i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

令 $x^0 = y^0 = t$，利用等时对易关系推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, [e^{ip\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ e^{-iq\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)\}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x - q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0+q_0) i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

根据 δ 函数的性质 $f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，有

$$
\frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 只在 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ 处非零，取值 $+\infty$，而 $E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}$ 在 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ 处取值为零

由于 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 在 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ 处奇性比较弱，有

$$(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0$$

故
$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0$$

产生湮灭算符的对易关系

此外，

$$[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger - a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger = (a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}})^\dagger = [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}]^\dagger = 0$$

因此，可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的**乘积次序**，即

$$a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}, \quad a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

综上，**产生湮灭算符**满足**对易关系**

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

这是**简谐振子对易关系** $[a, a^\dagger] = 1$ 和 $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$ 在**量子场论**中的推广

2.3.3 小节　哈密顿量和总动量

实标量场的**哈密顿量密度**为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

对全空间积分，就得到**哈密顿量算符**

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{[(-\mathrm{i}p_0)(-\mathrm{i}q_0) + (\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})] \\
&\qquad\times\left(a_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}q\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad + m^2\left(a_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}q\cdot x} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{(p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}e^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (-p_0q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\Big\}
\end{aligned}$$

哈密顿量表达式

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \\
&\times\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(p_0-q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}e^{i(p_0-q_0)t}\right] \\
&\quad+\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})(-p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}e^{-i(p_0+q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i(p_0+q_0)t}\right]\Big\} \\
=& \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[(E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right) \\
&\quad+(-E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\Big]
\end{aligned}
$$

根据质壳条件 $E_{\mathbf{p}}^2=|\mathbf{p}|^2+m^2$，上一行方括号中第二项没有贡献，从而

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left[2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p})\right] \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}
\end{aligned}
$$

第二步用到产生湮灭算符的对易关系 $[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}^\dagger]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H=\omega a^\dagger a+\dfrac{\omega}{2}$ 向无穷多自由度的推广
- 半正定算符 $N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_\mathbf{p}\, a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_\mathbf{p}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$ 向无穷多自由度的推广
- 半正定算符 $N_\mathbf{p} \equiv a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_\mathbf{p}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和
- 由 $\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$
- $\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的
- H 的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，是真空的零点能，是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H=\omega a^\dagger a+\frac{\omega}{2}$ 向无穷多自由度的推广
- 半正定算符 $N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和
- 由 $\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})=\int d^3x=\tilde{V}$
- $\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的
- H 的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，是真空的零点能，是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和
- 一维简谐振子的零点能为 $E_0=\omega/2$，这是自由度为 1 时的结果
- 推广到无穷多自由度自然会得到正无穷大的零点能
- 如果不讨论引力现象，零点能通常并不重要，因为实验上只能测量两个能量之差
- 经过正则量子化之后，实标量场的哈密顿量 H 是正定算符，不存在负能量困难

哈密顿量本征态

哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的**对易子**分别为

$$[H, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger}[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}]$$
$$= \int \mathrm{d}^3 q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$

$$[H, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int \mathrm{d}^3 q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$$

哈密顿量本征态

哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$
\begin{aligned}
[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \\
&= \int d^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \\
[H, a_{\mathbf{p}}] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int d^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}
\end{aligned}
$$

故 $H a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$， $H a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$

设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E，则 $H|E\rangle = E|E\rangle$

从而，

$$
\begin{aligned}
H a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle &= (a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger)|E\rangle = (E + E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle, \\
H a_{\mathbf{p}} |E\rangle &= (a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}})|E\rangle = (E - E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}} |E\rangle
\end{aligned}
$$

可见，当 $a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle \neq 0$ 时，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 的作用是使能量本征值增加 $E_{\mathbf{p}}$

当 $a_{\mathbf{p}} |E\rangle \neq 0$ 时，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是使能量本征值减少 $E_{\mathbf{p}}$

总动量

实标量场的**总动量算符**表达为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int d^3x\, \pi \nabla\phi \\
&= -\int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} (-ip_0)\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)(i\mathbf{q})\left(a_\mathbf{q}e^{-iq\cdot x} - a_\mathbf{q}^\dagger e^{iq\cdot x}\right) \\
&= -\int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q\, p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} \\
&\qquad \times \left[-a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}^\dagger e^{-i(p-q)\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q} e^{i(p-q)\cdot x} + a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}e^{-i(p+q)\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right] \\
&= -\int \frac{d^3p\, d^3q\, p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\left\{-\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}^\dagger e^{-i(p_0-q_0)t} + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}e^{i(p_0-q_0)t}\right]\right. \\
&\qquad \left. + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}e^{-i(p^0+q^0)t} + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\right]\right\} \\
&= -\int \frac{d^3p\,(-E_\mathbf{p}\mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\left(a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + a_\mathbf{p}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_\mathbf{p}t} + a_\mathbf{p}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_\mathbf{p}t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + a_\mathbf{p}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_\mathbf{p}t} + a_\mathbf{p}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_\mathbf{p}t}\right)
\end{aligned}
$$

化简总动量

作 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ 的替换，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,(-\mathbf{p})\left(a_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a^\dagger_{-\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)
\end{aligned}$$

因此这个积分为零，从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}}+a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}}+a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left[2a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right]\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}\,\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}
\end{aligned}$$

总动量表达式

- 由 $\int d^3p\,\mathbf{p} = \int d^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int d^3p\,\mathbf{p}$ 得 $\int d^3p\,\mathbf{p} = 0$
- 于是，自由实标量场的总动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

- 即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和

总动量表达式

- 由 $\int d^3p\,\mathbf{p} = \int d^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int d^3p\,\mathbf{p}$ 得 $\int d^3p\,\mathbf{p} = 0$
- 于是，自由实标量场的总动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

- 即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和
- $\mathbf{P}$ 与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int d^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int d^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}$$

- 即

$$\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad \mathbf{P}a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}\mathbf{P} - \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}$$

2.3.4 小节　粒子态

对于**任意动量** $\mathbf{p}$ 对应的**湮灭算符** $a_{\mathbf{p}}$，假设**真空态** $|0\rangle$ 满足

$$a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = 0$$

归一化为 $\langle 0|0\rangle = 1$

将**哈密顿量** $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + E_{\text{vac}}$ 作用到真空态上，得

$$H\,|0\rangle = E_{\text{vac}}\,|0\rangle, \quad E_{\text{vac}} \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3p\, \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$$

可见 $|0\rangle$ 的能量本征值是**零点能** E_{vac}，真空态是**能量最低**的态

真空态**不具有动量**，即 $|0\rangle$ 的 $\mathbf{P}$ 本征值是零，

$$\mathbf{P}\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle$$

单粒子态

接着，定义**单粒子态**

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\, |0\rangle$$

其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是**归一化因子**

根据 $Ha_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle$，有 $H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_{\mathrm{vac}}+E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}\rangle$

由 $\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger})\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle$$

单粒子态

- 接着，定义单粒子态

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$$

- 其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是归一化因子
- 根据 $Ha_{\mathbf{p}}^{\dagger}|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|E\rangle$，有 $H|\mathbf{p}\rangle = (E_{\text{vac}}+E_{\mathbf{p}})|\mathbf{p}\rangle$
- 由 $\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathbf{P} + \mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 得

$$\mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger})|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle$$

- 相比于真空态 $|0\rangle$，单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$，也多了一份动量 $\mathbf{p}$
- 因此，$|\mathbf{p}\rangle$ 描述的是一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子，这个粒子的能量为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$
- 这满足狭义相对论中的色散关系
- 而拉氏量 $\mathcal{L}$ 中实标量场的质量 m 就是粒子的质量
- 可以看到，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积

- 将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$
\begin{aligned}
a_{\mathbf{p}}\left|\mathbf{q}\right\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\left|0\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^{3}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\left|0\right\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^{3}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

- 如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零
- 如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态 $|0\rangle$
- 可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$a_{\mathbf{p}}\,|\mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle$$
$$= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle$$

如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零

如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态 $|0\rangle$

可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积为

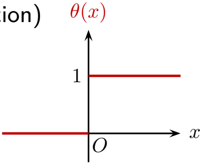
$$\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle$$
$$= 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

上式是 Lorentz 不变的，这是单粒子态归一化因子取成 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的原因，证明见下

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

- 接下来**证明** $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是 **Lorentz 不变**的
- 引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



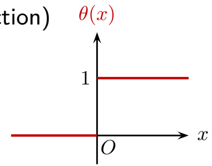
- 对于四维动量 p^μ，p^0 **的符号**在任意惯性系中**不会改变**
- 即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下**不变**

Oliver Heaviside
(1850–1925)

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

- 接下来**证明** $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是 **Lorentz 不变**的
- 引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



- 对于四维动量 p^μ，p^0 **的符号**在任意惯性系中**不会改变**
- 即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下**不变**
- 一个**物理粒子**的四维动量 p^μ 满足**质壳条件** $p^2-m^2=0$ 且**能量**为**正** ($p^0>0$)

Oliver Heaviside
(1850–1925)

- 任意 **Lorentz 标量函数** $F(p)$ 在**物理动量区域**上的 **Lorentz 不变积分**表达为

$$\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p)$$

单粒子态的内积

- 利用 $\delta[f(x)]=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p)=\int d^3p\,dp^0\,\delta[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p})$$

$$=\int d^3p\,dp^0\,\frac{\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}F(p^0,\mathbf{p})=\int\frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})$$

- 第二步中 $\theta(p^0)$ 挑出**方程** $(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2=0$ 的**正根** $p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}=E_{\mathbf{p}}$
- 而 $\left.\frac{\partial[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}=2p^0\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}=2E_{\mathbf{p}}$
- 可见，$\frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}$ 是相应的 **Lorentz 不变动量空间体积元**

单粒子态的内积

- 利用 $\delta[f(x)]=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p)=\int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\delta[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p})$$

$$=\int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\frac{\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}F(p^0,\mathbf{p})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})$$

- 第二步中 $\theta(p^0)$ 挑出**方程** $(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2=0$ 的**正根** $p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}=E_{\mathbf{p}}$

- 而 $\left.\frac{\partial[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}=\left.2p^0\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}=2E_{\mathbf{p}}$

- 可见，$\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}$ 是相应的 **Lorentz 不变动量空间体积元**

- 对任意 **Lorentz 标量函数** $g(\mathbf{q})$，按照 δ 函数定义，有

$$g(\mathbf{q})=\int \mathrm{d}^3p\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p})$$

- 最左和最右都是 **Lorentz 不变**的，则 $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 也是 **Lorentz 不变**的，**证毕**

单粒子位置本征态

- 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\,|0\rangle$$

- 它与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq\cdot x}\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]e^{iq\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int d^3q\,\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})e^{iq\cdot x}\,\langle 0|0\rangle = e^{ip\cdot x}\end{aligned}$$

单粒子位置本征态

- 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\,|0\rangle$$

- 它与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq\cdot x}\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]e^{iq\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int d^3q\,\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})e^{iq\cdot x}\,\langle 0|0\rangle = e^{ip\cdot x}\end{aligned}$$

- **量子力学**单粒子位置本征态 $|\mathbf{x}\rangle$ 与动量本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ **内积为** $\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle = (2\pi)^{-3/2}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$，其中 $(2\pi)^{-3/2}$ 是归一化因子

- 两个内积的**形式相似**，可将 $\phi(x)\,|0\rangle$ 视为 $t = x^0$ 时刻的**单粒子位置本征态**，$\phi(x)$ 作用在 $|0\rangle$ 上相当于**在时空点** $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ **处产生一个粒子**

- 平面波展开式的**归一化因子** $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 使内积 $\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle$ 成为 **Lorentz 不变量**

n 粒子态

定义动量分别为 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ 的 n 个粒子对应的多粒子态为

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle, \quad C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$$

根据 $H a^\dagger_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\mathbf{p}} H + E_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}$，$H$ 对它的作用给出

$$\begin{aligned}
H |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= C_1 H a^\dagger_{\mathbf{p}_1} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle = C_1 (a^\dagger_{\mathbf{p}_1} H + E_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_1}) \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} H a^\dagger_{\mathbf{p}_2} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle + E_{\mathbf{p}_1} |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} H \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= \cdots = C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} H |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

同理，$\mathbf{P}$ 对它的作用给出

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$$

多粒子态 $|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$ 的能量和动量直接由各个粒子的能量和动量叠加贡献

标量玻色子

🐯 由对易关系 $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\ &= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

🐃 可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态相同，即多粒子态对于**全同粒子交换**是**对称**的

标量玻色子

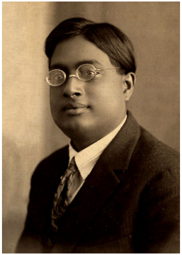
由**对易关系** $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}
$$

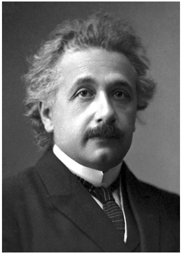
可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态相同，即多粒子态对于**全同粒子交换**是**对称**的

因此**实标量场**描述的粒子是一种**玻色子**，被称为**标量玻色子** (scalar boson)，它服从 **Bose-Einstein 统计**

得到这个结论的关键在于**两个产生算符相互对易**



Satyendra Nath Bose (1894–1974)



Albert Einstein (1879–1955)

双粒子态的内积

双粒子态的内积为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \right] \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \right. \\
&\qquad \left. + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} | 0 \rangle \right] \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) \right. \\
&\qquad \left. + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \right] \\
&= 4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \right]
\end{aligned}
$$

此内积仅在两种条件下**非零**

一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2$，另一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$

粒子数密度算符

定义动量均为 $\mathbf{q}$ 的 $n_{\mathbf{q}}$ 个粒子对应的多粒子态

$$|n_{\mathbf{q}}\rangle \equiv C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle , \quad C_2 = (2E_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}/2}$$

粒子数密度算符 $N_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 对它的作用为

$$\begin{aligned}
N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger \left[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \right] (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^2 a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-2} |0\rangle + 2(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= \cdots = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle + n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle
\end{aligned}$$

粒子数算符

在动量空间对粒子数密度算符进行积分，得到的是粒子数算符

$$N \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

由 $N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle$ 得

$$\begin{aligned} N |n_{\mathbf{q}}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = n_{\mathbf{q}} |n_{\mathbf{q}}\rangle \end{aligned}$$

因此，$|n_{\mathbf{q}}\rangle$ 是 N 的本征态，本征值为粒子数 $n_{\mathbf{q}}$

一般多粒子态

更一般地，定义多粒子态

$$|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle \equiv C_3(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}_1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}_m}}|0\rangle, \quad C_3=\prod_{i=1}^{m}(2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}$$

它描述动量为 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_m$ 的粒子分别有 $n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}$ 个的状态，则

$$\begin{aligned}
&N|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}C_3a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}_1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}_m}}|0\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}_1}}a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}_2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}_m}}|0\rangle\\
&\qquad+n_{\mathbf{p}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}_1}-1}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}_2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}_m}}|0\rangle\Big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}C_3\left[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}_1}}a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}_2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}_m}}|0\rangle\right]+n_{\mathbf{p}_1}|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=\cdots=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}C_3\left[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}_1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}_m}}a_{\mathbf{p}}|0\rangle\right]+(n_{\mathbf{p}_1}+\cdots+n_{\mathbf{p}_m})|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=(n_{\mathbf{p}_1}+\cdots+n_{\mathbf{p}_m})|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle
\end{aligned}$$

可见，N 确实是描述总粒子数的算符

2.4 节　复标量场的正则量子化

- 本节讨论**复标量场** $\phi(x)$，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$
- **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭记号** $*$ 改成**厄米共轭记号** $\dagger$
- 故自由复标量场的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

- 其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**

2.4 节　复标量场的正则量子化

本节讨论**复标量场** $\phi(x)$，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$

自由复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭记号** $*$ 改成**厄米共轭记号** $\dagger$

故自由复标量场的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**

$\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(x)$ **线性独立**，是两个**独立**的正则变量，注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} = \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^\dagger$$

由 **Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$ 推出**经典运动方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi^\dagger(x) = 0$$

也就是说，$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 均满足 **Klein-Gordon 方程**

复标量场的分解

可以将**复标量场** ϕ **分解**为两个**实标量场** ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合，

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)$$

从而拉氏量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= \frac{1}{2}[\partial^\mu(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)]\partial_\mu(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1)\partial_\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2)\partial_\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2\end{aligned}$$

对比**实标量场拉氏量**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

可知复标量场的拉氏量相当于两个**质量相同**的实标量场的拉氏量

2.4.1 小节 平面波展开

接下来遵循 2.3.1 小节中的方法讨论**复标量场**的**平面波展开式**

区别在于**不能够应用自共轭条件**

从而，场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**为

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned}$$

第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$

由于复标量场不满足自共轭条件，**算符** $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$ **与** $a_{\mathbf{k}}$ **没有关系**，改记为 $b^\dagger_{\mathbf{k}}=\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$

展开式变成

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

复标量场的平面波展开式

对 $\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$ 替换动量记号

把复标量场的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

其中 p^0 满足质壳条件 $p^0=E_{\mathbf{p}}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0$

复标量场的平面波展开式

对 $\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$ 替换动量记号

把复标量场的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

其中 p^0 满足质壳条件 $p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0$

取厄米共轭，就得到 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$a_\mathbf{p}$ 和 $b_\mathbf{p}$ 是两个相互独立的湮灭算符

$a_\mathbf{p}^\dagger$ 和 $b_\mathbf{p}^\dagger$ 是两个相互独立的产生算符

等时对易关系

- $\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)$$

- $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)$$

- $\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为**厄米共轭**

等时对易关系

$\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为**厄米共轭**

等时对易关系为

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0$$

$$[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0$$

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=[\phi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0$$

产生湮灭算符的对易关系

利用**等时对易关系**推出以下**产生湮灭算符的对易关系**

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \\
[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \\
[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= [b_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0
\end{aligned}
$$

具体推导过程见 **2.4.2 小节选读内容**

这说明 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 与 $(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 是两套**不同**的产生湮灭算符，描述**两种不同的玻色子**

2.4.3 小节　U(1) 整体对称性

- 类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 $\mathrm{U}(1)$ **整体变换**

$$\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x)$$

- 其中实常数 q 是 $\mathrm{U}(1)$ **荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**
- 则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$ 不变，系统具有 $\mathrm{U}(1)$ **整体对称性**
- 由于 θ 的取值是**任意**的，复标量场的取值具有一定的**任意性**
- 相差一个**任意整体相位因子** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的复标量场描述**相同**的物理

2.4.3 小节 U(1) 整体对称性

- 类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 U(1) **整体变换**

$$\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x)$$

- 其中实常数 q 是 U(1) **荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**
- 则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$ 不变，系统具有 U(1) **整体对称性**
- 由于 θ 的取值是**任意**的，复标量场的取值具有一定的**任意性**
- 相差一个**任意整体相位因子** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的复标量场描述**相同**的物理
- 相应的 U(1) **守恒流**为 $J^\mu = q\phi^\dagger\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$，它是一个**厄米算符**，

$$(J^\mu)^\dagger = \{\mathrm{i}q[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi]\}^\dagger = -\mathrm{i}q[(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi] = q\phi^\dagger\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi = J^\mu$$

- U(1) **守恒荷算符**是

$$Q = q\int \mathrm{d}^3x\,\phi^\dagger\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial^0}\phi = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi] = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi)$$

U(1) 守恒荷算符

利用**平面波展开式**，将 U(1) **守恒荷算符**化为

$$
\begin{aligned}
Q &= \mathrm{i}q \int \mathrm{d}^3x\, (\phi^\dagger \pi^\dagger - \pi\phi) \\
&= \mathrm{i}q \int \frac{\mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3p\, \mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}} \Big[\left(b_\mathbf{p} e^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right) (-\mathrm{i}E_\mathbf{k}) \left(a_\mathbf{k} e^{-\mathrm{i}k\cdot x} - b_\mathbf{k}^\dagger e^{\mathrm{i}k\cdot x}\right) \\
&\qquad - (-\mathrm{i}E_\mathbf{p}) \left(b_\mathbf{p} e^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right) \left(a_\mathbf{k} e^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b_\mathbf{k}^\dagger e^{\mathrm{i}k\cdot x}\right) \Big] \\
&= q \int \frac{\mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3p\, \mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}} \Big\{ (E_\mathbf{k} + E_\mathbf{p}) \left[a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{k} e^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x} - b_\mathbf{p} b_\mathbf{k}^\dagger e^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (E_\mathbf{k} - E_\mathbf{p}) \left[b_\mathbf{p} a_\mathbf{k} e^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{k}^\dagger e^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\right] \Big\} \\
&= q \int \frac{\mathrm{d}^3p\, \mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}} \Big\{ (E_\mathbf{k} + E_\mathbf{p}) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{k} e^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}-E_\mathbf{k})t} - b_\mathbf{p} b_\mathbf{k}^\dagger e^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p}-E_\mathbf{k})t}\right] \\
&\qquad + (E_\mathbf{k} - E_\mathbf{p}) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \left[b_\mathbf{p} a_\mathbf{k} e^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{k})t} - a_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{k}^\dagger e^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{k})t}\right] \Big\} \\
&= q \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} - b_\mathbf{p} b_\mathbf{p}^\dagger\right)
\end{aligned}
$$

正粒子和反粒子

- 由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$
\begin{aligned}
Q &= q\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,q
\end{aligned}
$$

- 上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$

正粒子和反粒子

- 由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$
\begin{aligned}
Q &= q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger\right) \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,q
\end{aligned}
$$

- 上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$
- 可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的**荷**为 q，称为**正粒子**
- 另一方面，$(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有**相反的荷** $-q$，称为**反粒子**
- 因此，复标量场描述一对**正反标量玻色子**
- 除去零点荷，总荷 Q 是**所有动量模式所有正反粒子**贡献的**荷**之和

正粒子和反粒子

- 由对易关系 $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$
\begin{aligned}
Q &= q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger\right) \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,q
\end{aligned}
$$

- 上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而粒子数密度算符 $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$
- 可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的荷为 q，称为正粒子
- 另一方面，$(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有相反的荷 $-q$，称为反粒子
- 因此，复标量场描述一对正反标量玻色子
- 除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的荷之和
- Q/q 与 1.1 节粒子概率密度 $\rho = \dfrac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \dfrac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)$ 的全空间积分类似
- 但 Q/q 被解释为正粒子数与反粒子数之差，可正可负，因而不存在负概率困难

纯中性粒子

🤵 这里单个粒子的荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是**相加性**的，并且来自于一种**内部对称性**，因而是一种**内部相加性量子数** (internal additive quantum number)

🍽️ 实际上，**反粒子**的**所有内部相加性量子数**都与**正粒子相反**

纯中性粒子

- 这里单个粒子的荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是**相加性**的，并且来自于一种**内部对称性**，因而是一种**内部相加性量子数** (internal additive quantum number)
- 实际上，**反粒子**的**所有内部相加性量子数**都与**正粒子相反**
- 如果对**实标量场**作类似的 $\mathrm{U}(1)$ **整体变换**，则**自共轭条件**使得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x) = \phi'(x) = [\phi'(x)]^\dagger = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)]^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi(x)$$

- 上式要求 $q = 0$
- 因此，对实标量场**不能**进行非平庸的 $\mathrm{U}(1)$ 整体变换
- **自共轭条件**使实标量场描述的粒子**不能**具有任何非零的内部相加性量子数
- 也就是说，**正粒子**与**反粒子**是**相同**的
- **实标量场**描述的是一种**纯中性粒子** (truly neutral particle)

哈密顿量和总动量

经过进一步计算，得到复标量场的**哈密顿量算符**

$$H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}$$

除了**零点能**，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子的能量之和

正粒子与**反粒子**具有**相同的质量** m，因而动量为 $\mathbf{p}$ 时能量均为 $E_{\mathbf{p}}$

另一方面，复标量场的**总动量算符**为

$$\mathbf{P}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}})$$

总动量是所有动量模式所有正反粒子的动量之和

具体推导过程见 **2.4.4 小节选读**内容