

量子场论

第 8 章 量子电动力学

8.3 节至 8.5 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2025 年 12 月 21 日



8.3 节 手征性与螺旋度

 本节探讨旋量场的手征性 (chirality) 与自旋 $1/2$ 费米子的螺旋度之间的关系

在 Weyl 表象中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入左手投影矩阵 P_L 和右手投影矩阵 P_R ，

$$\textcolor{blue}{P_L} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \textcolor{brown}{P_R} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

它们是厄米的，而且具有投影性 $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$ ，正交性 $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和完备性 $P_L + P_R = 1$ ，由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

8.3 节 手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

在 Weyl 表象中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ，

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$ ，**正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$ ，由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

将 Dirac 旋量场 ψ 分解为**左手 Weyl 旋量场** η_L 和**右手 Weyl 旋量场** η_R

左手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_L \equiv P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_L \\ 0 \end{pmatrix}$

右手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_R \equiv P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_R \end{pmatrix}$

我们称**左手旋量场**和**右手旋量场**具有**相反的手征性**，而**左右手投影矩阵**正好挑选出具有**相应手征性**的 Weyl 旋量场分量

左右手投影分解

将 $1 \pm \gamma^5$ 的简化地写成 $1 \pm \gamma^5$, 左手旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\overline{\psi_L} = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

同理得右手旋量场 ψ_B 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_B = \bar{\psi} P_L$

左右手投影分解

将 $1 \pm \gamma^5$ 的简化地写成 $1 \pm \gamma^5$, 左手旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\overline{\psi_L} = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

同理得右手旋量场 ψ_B 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_B = \bar{\psi} P_L$

 对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解，得

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(P_L + P_R)\psi = \bar{\psi}(P_L^2 + P_R^2)\psi = \overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi + \bar{\psi} P_L \gamma^\mu P_R \psi = \overline{\psi_L} \gamma^\mu \psi_L + \overline{\psi_R} \gamma^\mu \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi_R$$

包含偶数(奇数)个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反(相同)的旋量场

拉氏量中的 Dirac 旋量场质量项分解为 $-m\bar{\psi}\psi = -m(\overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_R)$

把上式看作微扰，那么质量 m 将左手旋量场 ψ_L 与右手旋量场 ψ_R 耦合起来

高能极限

在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$, $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

高能极限

在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$, $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

此时，螺旋度不同的 u 和 v 显示出不同手征性

 $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的, $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的

可见，高能极限下手征性等价于螺旋度

注意, $u(p, \lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态, 与螺旋度为 λ 的正费米子相关

$v(p, \lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与螺旋度为 λ 的反费米子相关

旋量系数的左右手投影

 由于高能极限下 $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的, $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的

JUL 17 用投影矩阵作用，得

$$u_L(\mathbf{p}, -) = P_L u(\mathbf{p}, -) \simeq \textcolor{blue}{u}(\mathbf{p}, -), \quad u_R(\mathbf{p}, +) = P_R u(\mathbf{p}, +) \simeq \textcolor{brown}{u}(\mathbf{p}, +)$$

$$u_L(\mathbf{p},+) = P_L u(\mathbf{p},+) \simeq 0, \quad u_R(\mathbf{p},-) = P_R u(\mathbf{p},-) \simeq 0$$

$$v_L(\mathbf{p},+) = P_L v(\mathbf{p},+) \simeq \textcolor{blue}{v}(\mathbf{p},+), \quad v_R(\mathbf{p},-) = P_R v(\mathbf{p},-) \simeq \textcolor{brown}{v}(\mathbf{p},-)$$

$$v_L(\mathbf{p}, -) \equiv P_L v(\mathbf{p}, -) \simeq 0, \quad v_R(\mathbf{p}, +) \equiv P_R v(\mathbf{p}, +) \simeq 0$$

 相应的 Dirac 共轭满足

$$\overline{u_L}(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -)P_R \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, -), \quad \overline{u_R}(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +)P_L \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, +)$$

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +)P_R \simeq 0, \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -)P_L \simeq 0$$

$$\bar{v}_L(p,+) = \bar{v}(p,+)P_R \cong \bar{v}(p,+), \quad \bar{v}_R(p,-) = \bar{v}(p,-)P_L \cong \bar{v}(p,-)$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -)P_R \simeq 0, \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +)P_L \simeq 0$$

高能极限下的手征旋量场

 将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 上，得到高能极限下手征旋量场的平面波展开式

$$\begin{aligned}\psi_L(x) &= P_L \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\color{purple}{u(\mathbf{p}, -)} a_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} + \color{blue}{v(\mathbf{p}, +)} b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ \psi_R(x) &= P_R \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\color{teal}{u(\mathbf{p}, +)} a_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} + \color{red}{v(\mathbf{p}, -)} b_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

相应的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\overline{\psi_L}(x) &= [\psi_L(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right] \\ \overline{\psi_R}(x) &= [\psi_R(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

 在高能极限下，忽略质量，那么，

 左手旋量场 $\psi_L(x)$ 描述左旋极化的正费米子和右旋极化的反费米子

右手旋量场 $\psi_R(x)$ 描述右旋极化的正费米子和左旋极化的反费米子

$\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 成为两个相互独立的场

标准模型中的中微子

作为对高能极限的微扰，质量项 $-m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$ 耦合着左旋极化 ($\lambda = -$) 与右旋极化 ($\lambda = +$) 的正费米子，也耦合着左旋极化与右旋极化的反费米子

所以我们在 8.2.4 小节说 “质量可以翻转螺旋度”

 在标准模型中，每一代费米子中的无质量中微子由一个左手旋量场

$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[u(\mathbf{p},-) a_{\mathbf{p},-} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p},+) b_{\mathbf{p},+}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

描述

相应地，以 $a_{p,-}^\dagger$ 算符产生的粒子是左旋正中微子，以 $b_{p,+}^\dagger$ 算符产生的粒子是右旋反中微子，它们互为正反粒子

 标准模型中没有由右手旋量场描述的中微子

旋量系数的左右手投影

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

旋量系数的左右手投影

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},+)u(\mathbf{p},+) \cong \bar{u}(\mathbf{q},+)P_L P_R u(\mathbf{p},+) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -) v(\mathbf{p}, -) \cong \bar{v}(\mathbf{q}, -) P_{\text{L}} P_{\text{R}} v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q},+)v(\mathbf{p},+) \cong \bar{v}(\mathbf{q},+)P_R P_L v(\mathbf{p},+) = 0$$

此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

 一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda) \gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda) \gamma^\mu \gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda) \gamma^\mu \gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

容易看出，在高能极限下，忽略质量，只有 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 且 $\lambda'_1 = -\lambda'_2$ 的螺旋度构型对 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 极化振幅

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = \frac{e^2}{E_{CM}^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$$

的贡献非零，与上一小节的计算结果一致

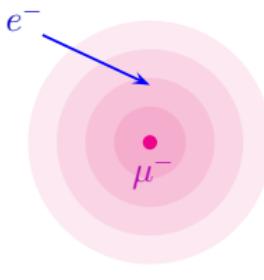
如果忽略质量，则其它螺旋度构型的贡献正比于质量，表现出螺旋度压低效应

8.4 节 Coulomb 散射

8.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

现在讨论与 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程

这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射



Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

8.4 节 Coulomb 散射

8.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

现在讨论与 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 散射过程

这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射。

 它的领头阶费曼图与 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 类似，但线的方向不同，相应的不变振幅为



Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806)

这里将旋量系数 u 和 \bar{u} 简写成在壳四维动量的函数，且没有写出对螺旋度的依赖

 虚光子的四维动量 $q'^{\mu} = k_1'^{\mu} - p_1'^{\mu} = p_2'^{\mu} - k_2'^{\mu}$

非极化振幅模方

 $i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2)$ 的复共轭是

$$(i\mathcal{M})^* = -\frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2)$$



非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1) \gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2) \gamma_\nu u(p'_2) \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \text{tr}[u(p'_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1) \gamma^\nu] \text{tr}[u(p'_2) \bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2) \gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu) \gamma_\nu]
\end{aligned}$$



\sum_{spins} 表示对自旋求和，即对螺旋度求和

交叉对称性

1 比较 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭与 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 散射的非极化振幅模方:

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2}{4(\textcolor{violet}{q}^2)^2} = \frac{e^4}{4(\textcolor{violet}{q}^2)^2} \text{tr}[(\cancel{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\cancel{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\cancel{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\cancel{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2}{(\cancel{q'}^2)^2} = \frac{e^4}{4(\cancel{q'}^2)^2} \text{tr}[(\cancel{p}_1' + m_e) \gamma^\mu (\cancel{k}_1' + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\cancel{p}_2' + m_\mu) \gamma_\mu (\cancel{k}_2' + m_\mu) \gamma_\nu]$$

容易看出, $|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2$ 相当于对 $|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2$ 作动量替换

$$k_1^\mu \rightarrow k_1^{\prime\mu}, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1^{\prime\mu}, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2^{\prime\mu}, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2^{\prime\mu}$$

 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow k_1'^\mu - p_1'^\mu = q'^\mu$ ，这种关系称为交叉对称性 (crossing symmetry)

交叉对称性

比较 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 湮灭与 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 散射的非极化振幅模方:

$$\overline{|\mathcal{M}_{e+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(\textcolor{violet}{q}^2)^2} \text{tr}[(\cancel{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\cancel{k}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\cancel{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\cancel{p}_2 - m_\mu) \gamma_\nu]$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{e-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}|^2}{4(\textcolor{blue}{q'}^2)^2} = \frac{e^4}{4(\textcolor{blue}{q'}^2)^2} \text{tr}[(\not{\textcolor{blue}{p}}_1' + m_e) \gamma^\mu (\not{\textcolor{blue}{k}}_1' + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{\textcolor{blue}{p}}_2' + m_\mu) \gamma_\mu (\not{\textcolor{brown}{k}}_2' + m_\mu) \gamma_\nu]$$

容易看出, $|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2$ 相当于对 $|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2$ 作动量替换

$$k_1^\mu \rightarrow k_1^{\prime\mu}, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1^{\prime\mu}, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2^{\prime\mu}, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2^{\prime\mu}$$

 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow k_1'^\mu - p_1'^\mu = q'^\mu$ ，这种关系称为交叉对称性 (crossing symmetry)

通过这样的动量替换，从 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的计算结果

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(\textcolor{blue}{q}^2)^2} [(\textcolor{blue}{k}_1 \cdot \textcolor{brown}{p}_1)(\textcolor{blue}{k}_2 \cdot \textcolor{brown}{p}_2) + (\textcolor{blue}{k}_1 \cdot \textcolor{violet}{p}_2)(\textcolor{blue}{k}_2 \cdot \textcolor{brown}{p}_1) + m_e^2(\textcolor{brown}{p}_1 \cdot \textcolor{brown}{p}_2) + m_\mu^2(\textcolor{blue}{k}_1 \cdot \textcolor{blue}{k}_2) + 2m_e^2m_\mu^2]$$

直接得到 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 非极化振幅模方的表达式

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(\textcolor{violet}{q}^{\prime 2})^2} [(\textcolor{blue}{k}'_1 \cdot \textcolor{brown}{p}'_2)(\textcolor{blue}{p}'_1 \cdot k'_2) + (\textcolor{blue}{k}'_1 \cdot k'_2)(\textcolor{blue}{p}'_1 \cdot \textcolor{brown}{p}'_2) - m_e^2(\textcolor{brown}{p}'_2 \cdot k'_2) - m_\mu^2(k'_1 \cdot \textcolor{blue}{p}'_1) + 2m_e^2m_\mu^2]$$

质心系

 在质心系中，根据 6.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子动量满足

$$|\mathbf{k}'_1| = |\mathbf{k}'_2| = |\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_e^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \equiv Q$$

 也就是说，初末态四个粒子的动量大小都是 Q ，相应的能量是

$$k_1'^0 = p_1'^0 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_e, \quad k_2'^0 = p_2'^0 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_\mu$$

E_e 是初末态电子能量, E_μ 是初末态 μ 子能量

设散射角 θ 为 k'_1 与 p'_1 方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$k'_1 \cdot p'_1 = k'^0_1 p'^0_1 - |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e^2 - Q^2 \cos \theta$$

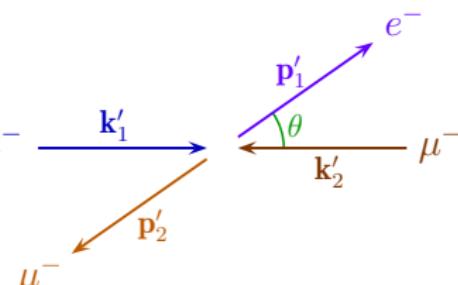
$$k'_1 \cdot p'_2 \equiv k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta \equiv E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$k'_2 \cdot p'_2 \equiv k'^0_2 p'^0_2 = |\mathbf{k}'_2| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta \equiv E^2_u - Q^2 \cos$$

$$k'_3 \cdot p'_1 \equiv k'^0_3 p'^0_1 + |\mathbf{k}'_3| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta \equiv E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$k'_1 \cdot k'_2 \equiv k'^0_1 k'^0_2 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{k}'_2| \equiv E_\phi E_\psi + Q^2$$

$$p'_1 \cdot p'_2 \equiv p'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{p}'_1| |\mathbf{p}'_2| \equiv E_1 E_2 + Q^2$$



质心系中的非极化振幅模方

 虚光子的四维动量 q^μ 满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

 对任意 $\theta > 0$ ，有 $q'^2 < 0$ ，即虚光子是类空的

质心系中的非极化振幅模方

 虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

 对任意 $\theta > 0$ ，有 $q'^2 < 0$ ，即虚光子是类空的

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} \left[(E_e E_\mu + Q^2 \cos\theta)^2 + (E_e E_\mu + Q^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - m_e^2(E_\mu^2 - Q^2 \cos\theta) - m_\mu^2(E_e^2 - Q^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_\mu^2 \right] \\ &= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} \left\{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 + Q^4(1+\cos^2\theta) \right. \\ &\quad \left. + Q^2[2E_e E_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2 + m_\mu^2)\cos\theta] \right\} \end{aligned}$$

微分截面的入射流因子是

$$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = E_e E_\mu \left(\frac{Q}{E_e} + \frac{Q}{E_\mu} \right) = E_e E_\mu \frac{Q(E_\mu + E_e)}{E_e E_\mu} = Q E_{\text{CM}}$$

质心系中的微分截面

于是, $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{QE_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos\theta)^2} \left\{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \right. \\ &\quad \left. + Q^4 (1 + \cos^2\theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos\theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos\theta] \right\}\end{aligned}$$

由于分母上的 $(1 - \cos \theta)^2$ 因子，微分截面对于向前散射 ($\theta \rightarrow 0$) 具有奇性

这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

 当散射角 θ 很小时, $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \mathcal{O}(\theta^4)$, 有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta \rightarrow 0$$

 $(1 - \cos \theta)^2$ 因子来源于光子传播子贡献的 $q'^2 = -2Q^2(1 - \cos \theta)$

故奇性来自接近质壳的虚光子 ($q'^2 \rightarrow 0$)

微分截面的近似

当 $E_{\text{CM}} \gg m_e$ 时, 忽略电子质量, 有 $E_e \simeq Q = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$, 微分截面化为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 Q^2 (1 - \cos \theta)^2} [2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2 \cos^2 \theta + 2QE_\mu \\ &\quad + 2QE_\mu \cos \theta + m_\mu^2 \cos \theta] \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 Q^2 (1 - \cos \theta)^2} [(E_\mu + Q)^2 + (E_\mu + Q \cos \theta)^2 - m_\mu^2 (1 - \cos \theta)] \end{aligned}$$

在高能极限 ($E_{\text{CM}} \gg m_\mu > m_e$) 下, $Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{\text{CM}}/2$, 则微分截面变成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2 [4 + (1 + \cos \theta)^2]}{2E_{CM}^2 (1 - \cos \theta)^2} = \frac{\alpha^2 [1 + \cos^4(\theta/2)]}{2E_{CM}^2 \sin^4(\theta/2)}$$

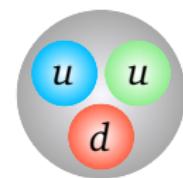
 第二步用到三角函数倍角公式 $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$ 和 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$

8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

鼓 质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV

它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

环 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$



8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

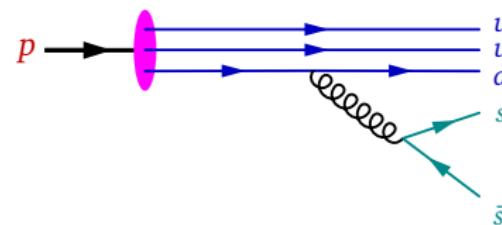
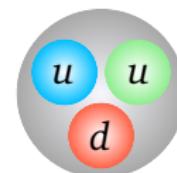
鼓 质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV

靶 它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

鼠标 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

像这样贡献到质子的相加性量子数 (如电荷) 的夸克称为价夸克 (valence quark)

打印机 由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$ ， q 与 \bar{q} 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)

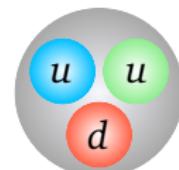


8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV

它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

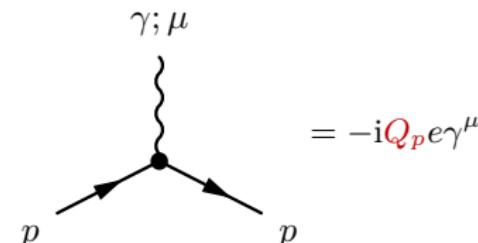


像这样贡献到质子的相加性量子数 (如电荷) 的夸克称为价夸克 (valence quark)

由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$ ， q 与 \bar{q} 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)

一个相互作用过程通常涉及一个典型的能量或动量大小，比如质心能 E_{CM} 或上一小节用到的动量 Q ，这样的量称为能标 (energy scale)

当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的点粒子一样



此时可以用 Dirac 旋量场 来描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点

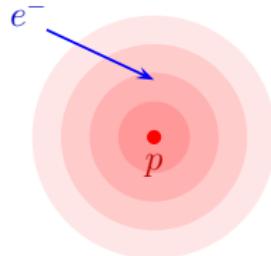
Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 Coulomb 散射 $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p

从而可取 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的

初末态电子运动速率相同，记为 v ，运动方向相差散射角 θ



Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 Coulomb 散射 $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p

从而可取 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的

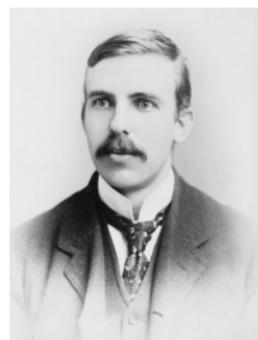
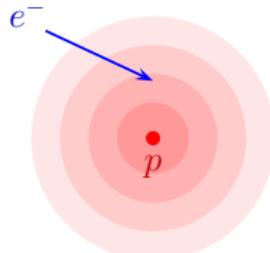
初末态电子运动速率相同，记为 v ，运动方向相差散射角 θ

那么，Coulomb 力引起的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

这个式子就是 Rutherford 公式

可见， $\theta \rightarrow 0$ 时 $d\sigma/d\Omega \propto \theta^{-4}$ 的奇性在经典物理层面就已经出现了



Ernest Rutherford
(1871–1937)

奇性问题



$\theta \rightarrow 0$ 处的奇性表明 Coulomb 力是一种长程力，它的作用范围是无穷大的

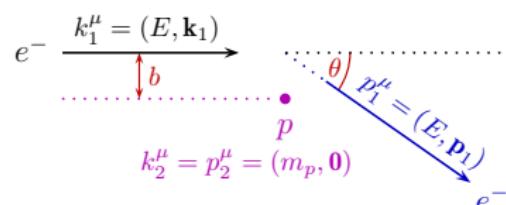
⌚ 在没有相互作用的情况下，入射电子的直线

运动轨迹与质子之间的最小距离称为碰撞参数 b

⌚ 在 Coulomb 散射中，利用 Newton 第二定律和角动量守恒定律，可以推出 $b \propto \cot(\theta/2)$

[杨福家《原子物理学》(第四版) 第一章 §3]

⌚ 从而 $\theta \rightarrow 0$ 意味着无穷大的 b ，即质子的 Coulomb 力作用于无穷远处的电子

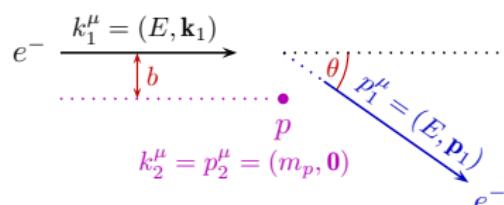


奇性问题

 $\theta \rightarrow 0$ 处的奇性表明 Coulomb 力是一种长程力，它的作用范围是无穷大的。

- ⌚ 在没有相互作用的情况下，入射电子的直线运动轨迹与质子之间的最小距离称为碰撞参数 b
 - ⌚ 在 Coulomb 散射中，利用 Newton 第二定律和角动量守恒定律，可以推出 $b \propto \cot(\theta/2)$

[杨福家《原子物理学》(第四版) 第一章 §3]



- 从而 $\theta \rightarrow 0$ 意味着无穷大的 b ，即质子的 Coulomb 力作用于无穷远处的电子
 - 当然，碰撞参数 b 在实际情况中不可能无限地大；当 b 大到一定程度时，质子携带的正电荷会被外部负电荷所屏蔽，导致 Rutherford 公式不再成立
 - 因此，现实问题中的散射角 θ 通常存在一个下限 $\theta_0 > 0$
 - 这个下限可能由电荷屏蔽效应决定，也可能由探测器的有效覆盖范围决定
 - Coulomb 散射截面在 $\theta > \theta_0$ 的区间上具有有限的数值

$e^- p$ Coulomb 散射

现在转到 QED 中进行讨论, $e^- p \rightarrow e^- p$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{Feynman diagram} = \bar{u}(p_1) (ie\gamma^\mu) u(k_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2) (-ie\gamma^\nu) u(k_2) \\
 &= -\frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(k_2)
 \end{aligned}$$

相比于 $e^- \mu^-$ 散射, 这个结果多出一个负号, 这是因为 $Q_p = -Q_\mu = +1$

由于这里只有一幅 Feynman 图, 这个符号差异不会影响振幅模方

类比于 $e^- \mu^-$ 散射, $e^- p \rightarrow e^- p$ 非极化振幅模方为

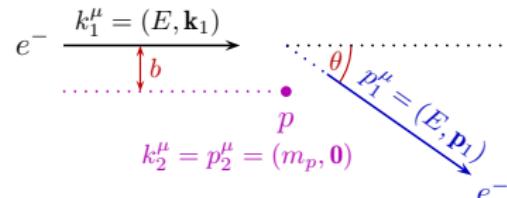
$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2) - m_e^2(p_2 \cdot k_2) - m_p^2(k_1 \cdot p_1) + 2m_e^2m_p^2]$$

运动学

 下面在 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限下推导 Rutherford 公式的 QED 相对论修正

 如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，初末态电子的能量都是 E ，四维动量分解为

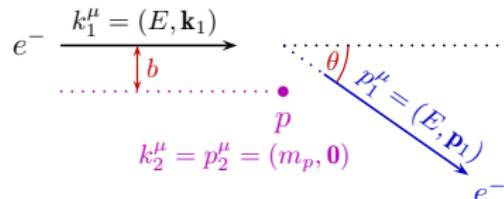
$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$



运动学

💡 下面在 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限下推导 Rutherford 公式的 QED 相对论修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，初末态电子的能量都是 E ，四维动量分解为



$$k_1^\mu = (\textcolor{teal}{E}, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (\textcolor{teal}{E}, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

初末态电子的动量大小相等, 记为 $Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$

 根据**狭义相对论**中的关系，初末态电子的运动速率为 $v = \frac{Q}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}$

因而 $m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2)$ ，四维动量的内积可以表达成

$$k_1 \cdot p_1 = E^2 - Q^2 \cos \theta = E^2(1 - v^2 \cos \theta), \quad k_2 \cdot p_2 = m_p^2$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E$$

$$q^2 = (k_1 - p_1)^2 = \cancel{2m_e^2} - \cancel{2E^2} + 2Q^2 \cos \theta = \cancel{-2Q^2}(1 - \cos \theta)$$

非极化振幅模方

 从而，非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1-v^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + \textcolor{red}{m_e^2} m_p^2) \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_p^2 \textcolor{red}{E^2}(1-v^2)] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2(1-\cos\theta)^2} [2 - v^2(1-\cos\theta)] = \frac{16\pi^2\alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

非极化振幅模方

从而，非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1-v^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + \cancel{m_e^2} m_p^2) \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_p^2 \cancel{E^2}(1-v^2)] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2(1-\cos\theta)^2} [2 - v^2(1-\cos\theta)] = \frac{16\pi^2\alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

末态两体不变相空间积分是

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(k_1^0 + k_2^0 - p_1^0 - p_2^0) = \int \frac{d\Omega \, dQ \, Q^2}{16\pi^2 E m_p} \delta(E + m_p - \sqrt{Q^2 + m_e^2} - m_p) \\ &= \int \frac{d\Omega \, Q^2}{16\pi^2 E m_p} \left| \frac{d(E - \sqrt{Q^2 + m_e^2})}{dQ} \right|^{-1} = \int \frac{d\Omega \, Q^2}{16\pi^2 E m_p} \frac{\sqrt{Q^2 + m_e^2}}{Q} = \int d\Omega \frac{Q}{16\pi^2 m_p} \end{aligned}$$

Mott 公式



$$\text{入射流因子 } E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = Em_p \frac{Q}{E} = Qm_p$$



此过程末态对称性因子 $S = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p} \int d\Omega \frac{Q\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$

Mott 公式

 **入射流因子** $E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = Em_p \frac{Q}{E} = Qm_p$

 此过程末态对称性因子 $S = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p} \int d\Omega \frac{Q \overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$



Nevill Francis Mott
(1905–1996)

 微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad Q \ll m_p$$

 这是 QED 对 Rutherford 公式的修正，称为 Mott 公式

 Mott 公式跟 Rutherford 公式一样不依赖于 m_p ，因而 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限是存在的

Mott 公式与 Rutherford 公式

在低速近似下, $v \ll 1$, $Q \simeq m_e v$, Mott 公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

退化成 Rutherford 公式 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$



🎃 Mott 公式与 Rutherford 公式的主要

不同在于大圆括号里的**第二项** $-v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$



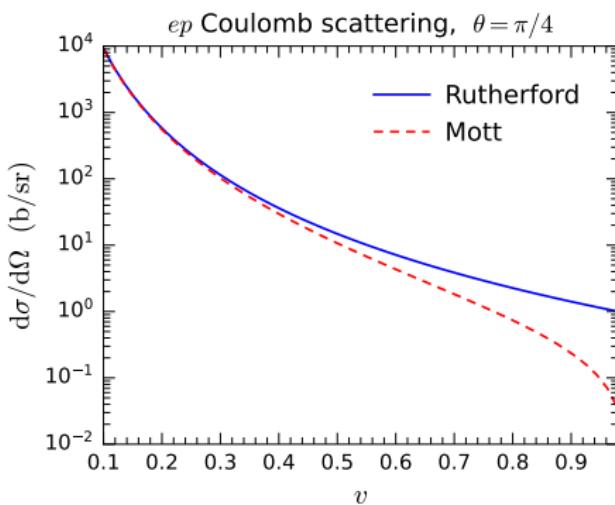
它的起源可以从经典视角来理解



 在电子静止系中，与它相对运动的质子电荷引起一个垂直于运动方向的磁场



 电子自旋所对应的内禀磁偶极矩与该磁场的相互作用贡献出这一项



8.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

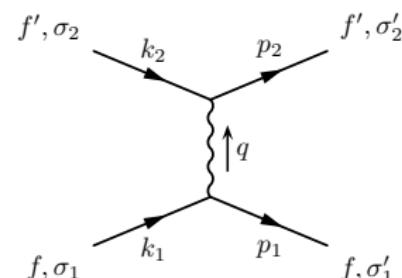
在**非相对论近似**下，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

这是接下来要**论证**的观点

考虑两种带电费米子 f 和 f' ，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$

讨论 **Coulomb 散射过程** $ff' \rightarrow ff'$

初态四维动量为 k_1 和 k_2 ，末态四维动量为 p_1 和 p_2



8.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过交换虚光子发生 Coulomb 散射

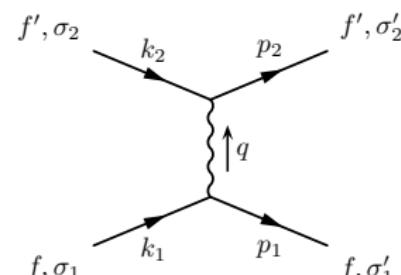
在非相对论近似下，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而光子传播子的效应应该等价于电动力学中的 Coulomb 电势

这是接下来要论证的观点

考虑两种带电费米子 f 和 f' ，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$

讨论 Coulomb 散射过程 $ff' \rightarrow ff'$

初态四维动量为 k_1 和 k_2 ，末态四维动量为 p_1 和 p_2



在非相对论近似下， $|k_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$ ，粒子能量近似为质量，即

$$k_1^\mu \simeq (\mathbf{m}_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (\mathbf{m}_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (\mathbf{m}_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (\mathbf{m}_{f'}, \mathbf{p}_2)$$

在此近似下，可将正费米子的平面波旋量系数表达为 $u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix}$

\mathbf{p} 是动量；不依赖于 \mathbf{p} 的 ζ_σ 是某个固定方向上的二分量自旋本征态， $\sigma = \pm 1/2$ 是磁量子数， $\zeta_\sigma^\dagger, \zeta_\sigma = \delta_{\sigma' \sigma}$ 满足正交归一关系 $\sum_{\sigma=\pm 1/2} \zeta_\sigma \zeta_\sigma^\dagger = 1$

非相对论近似

这样的 $u(p, \sigma)$ 在 $p \rightarrow 0$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

满足正交归一关系, $u^\dagger(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_\sigma^\dagger & \zeta_{\sigma'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_{\sigma'} \end{pmatrix} = 2m \zeta_\sigma^\dagger \zeta_\sigma \simeq 2E_p \delta_{\sigma' \sigma}$

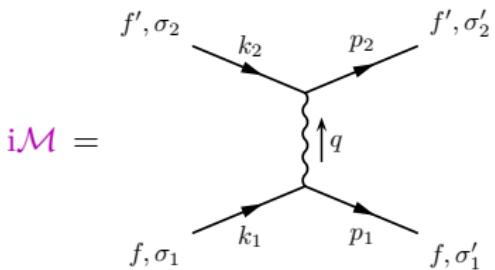
非相对论近似

这样的 $u(p, \sigma)$ 在 $p \rightarrow 0$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_\sigma \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

满足正交归一关系, $u^\dagger(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_\sigma^\dagger & \zeta_{\sigma'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\sigma \\ \zeta_{\sigma'} \end{pmatrix} = 2m \zeta_\sigma^\dagger \zeta_{\sigma'} \simeq 2E_p \delta_{\sigma' \sigma}$

于是, $ff' \rightarrow ff'$ 散射过程的 QED 领头阶不变振幅为



$$= \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) (-iQ_f e \gamma^\mu) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) (-iQ_{f'} e \gamma^\nu) u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \\ = \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_\mu u(\mathbf{k}_2, \sigma_2)$$

非相对论近似下的 Coulomb 散射振幅

由 $u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \end{pmatrix}$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \zeta_{\sigma_1} = 2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 0$$

同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 2m_f \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 0$

因此在非相对论近似下只有时间分量 $\bar{u}\gamma^0 u$ 的贡献

非相对论近似下的 Coulomb 散射振幅

由 $u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \end{pmatrix}$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \zeta_{\sigma_1} = 2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 0$$

同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \simeq 0$

因此在非相对论近似下只有时间分量 $\bar{u}\gamma^0 u$ 的贡献

再注意到 $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$ ，则 $q^2 = (q^0)^2 - |\mathbf{q}|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$

 将**不变振幅化**为 $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$

 $i\mathcal{M}$ 只在 $\sigma'_1 = \sigma_1$ 且 $\sigma'_2 = \sigma_2$ 时非零

也就是说，非相对论性的 Coulomb 散射不改变费米子的自旋极化态

非相对论性归一化

 $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ 因子跟归一化取法有关

 依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法, 正费米子态为 $|\mathbf{p}^+, \sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger |0\rangle$

 $a_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger$ 是相应的产生算符, 有 $\langle \mathbf{k}^+, \sigma' | \mathbf{p}^+, \sigma \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta_{\sigma \sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

非相对论性归一化

$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ 因子跟归一化取法有关

依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法, 正费米子态为 $|\mathbf{p}^+, \sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger |0\rangle$

$a_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger$ 是相应的产生算符, 有 $\langle \mathbf{k}^+, \sigma' | \mathbf{p}^+, \sigma \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta_{\sigma \sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

在非相对论性量子力学中, 通常将正费米子态定义为

$$|\mathbf{p}^+, \sigma\rangle_{\text{NR}} \equiv a_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\mathbf{p}^+, \sigma\rangle$$

满足内积关系 ${}_{\text{NR}} \langle \mathbf{k}^+, \sigma' | \mathbf{p}^+, \sigma \rangle_{\text{NR}} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma \sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$, 相应外线规则变成

$$f, \sigma \xrightarrow[p]{} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} u(\mathbf{p}, \sigma), \quad \bullet \xrightarrow[p]{} f, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)$$

非相对论性归一化不变振幅是 $i\mathcal{M}_{\text{NR}} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$

相应的 T 矩阵元为

$${}_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_2^+, \sigma'_2; \mathbf{p}_1^+, \sigma'_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^+, \sigma_2 \rangle_{\text{NR}} = i\mathcal{M}_{\text{NR}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

Born 近似

另一方面，对于 f 粒子进入势场 $V(x)$ 发生的散射过程，**非相对论性量子力学的 Born 近似**给出 T 矩阵元

$$_{\text{NR}}\langle p_1^+, \sigma_1 | iT | k_1^+, \sigma_1 \rangle_{\text{NR}} = -i \tilde{V}(q) \cdot 2\pi \delta(E_{p_1} - E_{k_1})$$

其中 $\tilde{V}(q)$ 是 $V(x)$ 的 Fourier 变换，即

$$\tilde{V}(q) \equiv \int d^3x V(x) e^{-iq \cdot x}$$

Born 近似

另一方面，对于 f 粒子进入势场 $V(x)$ 发生的散射过程，**非相对论性量子力学的 Born 近似**给出 T 矩阵元

$$_{\text{NR}}\langle p_1^+, \sigma_1 | iT | k_1^+, \sigma_1 \rangle_{\text{NR}} = -i \tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{p_1} - E_{k_1})$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(x)$ 的 Fourier 变换，即

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(x) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

这里相当于对引起势场 $V(x)$ 的 f' 粒子动量作积分

因而没有相关的三维动量 δ 函数因子

与以上 Coulomb 散射的 T 矩阵元 $_{\text{NR}}\langle p_2^+, \sigma'_2; p_1^+, \sigma'_1 | iT | k_1^+, \sigma_1; k_2^+, \sigma_2 \rangle_{\text{NR}}$

$$= -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

比较，得到 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$

Coulomb 势能

对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 Fourier 逆变换，记 $Q \equiv |\mathbf{q}|$ 、 $r \equiv |\mathbf{x}|$ ，Coulomb 势能为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty dQ \frac{e^{iQr}}{Q} - \int_0^\infty dQ \frac{e^{-iQr}}{Q} \right) \end{aligned}$$

Coulomb 势能

🎬 对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 Fourier 逆变换, 记 $Q \equiv |\mathbf{q}|$ 、 $r \equiv |\mathbf{x}|$, Coulomb 势能为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty dQ \frac{e^{iQr}}{Q} - \int_0^\infty dQ \frac{e^{-iQr}}{Q} \right) \end{aligned}$$

⌚ 作变量替换 $Q' = -Q$, 将第二个积分化为

$$-\int_0^\infty dQ \frac{e^{-iQr}}{Q} = \int_0^{-\infty} dQ' \frac{e^{iQ'r}}{-Q'} = \int_{-\infty}^0 dQ' \frac{e^{iQ'r}}{Q'} = \int_{-\infty}^0 dQ \frac{e^{iQ'r}}{Q}$$

⌚ 最后一步作了变量替换 $Q = Q'$

💊 因而可将 $V(\mathbf{x})$ 表达成 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{Q}$

Coulomb 势

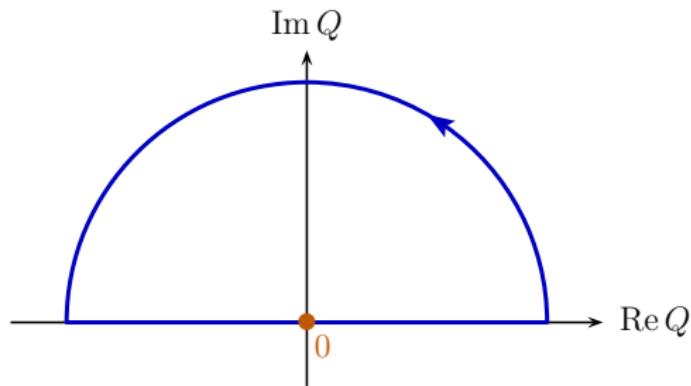
利用留数定理计算积分 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{Q}$

被积函数在 $Q = 0$ 处存在单极点，在 Q 的复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{Q} = i\pi \text{Res}_{Q=0} \frac{e^{iQr}}{Q} = i\pi$$

Coulomb 势能化为

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$$



Coulomb 势

利用留数定理计算积分 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{Q}$

被积函数在 $Q = 0$ 处存在单极点，在 Q 的复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{Q} = i\pi \text{Res}_{Q=0} \frac{e^{iQr}}{Q} = i\pi$$

Coulomb 势能化为

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$$

f' 粒子的 Coulomb 势 $\Phi_{f'}(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}$

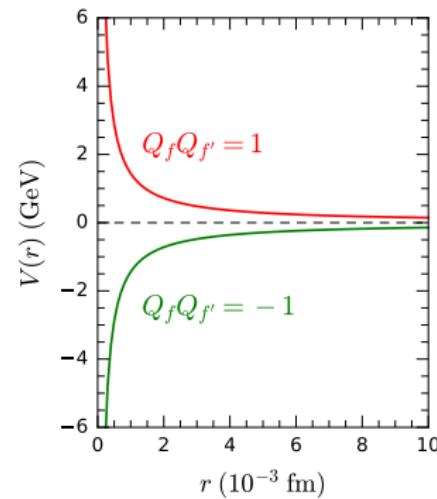
这正是电动力学中点电荷电势的形式

Coulomb 势是长程势，以 r^{-1} 规律衰减

$V(r)$ 的符号由 Q_f 和 $Q_{f'}$ 的符号决定

当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 同号时， $V(r) > 0$ ， r 越大，势能越小，Coulomb 势是排斥势

当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 异号时， $V(r) < 0$ ， r 越小，势能越小，Coulomb 势是吸引势



不变振幅的绝对符号

II 上述推导过程通过比较 $ff' \rightarrow ff'$ 不变振幅 和 Born 近似下的 T 矩阵元 来推导 Coulomb 势能

双手 手是振幅层面上的对比，振幅的绝对符号 会影响最后得到的 Coulomb 势能

单手 因此，严格来说，需要检验 场算符与初末态缩并 的情况来确定这个绝对符号

单手 此时应该对 末态 采取 左矢的严格定义，而不能使用 第 7 章 那样让左矢中 动量排列 次序与湮灭算符相同的约定

不变振幅的绝对符号

II 上述推导过程通过比较 $ff' \rightarrow ff'$ 不变振幅 和 Born 近似下的 T 矩阵元 来推导 Coulomb 势能

👉 这是振幅层面上的对比，振幅的绝对符号 会影响最后得到的 Coulomb 势能

👉 因此，严格来说，需要检验 场算符与初末态缩并 的情况来确定这个绝对符号

👉 此时应该对 末态 采取 左矢的严格定义，而不能使用 第 7 章 那样让左矢中 动量排列 次序与湮灭算符相同的约定

👉 如果用 $a_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger$ 和 $b_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger$ 分别代表 f 和 \bar{f} 费米子的产生算符

用 $c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger$ 和 $d_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger$ 分别代表 f' 和 \bar{f}' 费米子的产生算符

👉 那么， $ff' \rightarrow ff'$ 散射的 初态 是 $|\mathbf{k}_1^+, \sigma_1; \mathbf{k}_2^+, \sigma_2\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} a_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle$

👉 末态 $|\mathbf{p}_1^+, \sigma'_1; \mathbf{p}_2^+, \sigma'_2\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1}^\dagger c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2}^\dagger |0\rangle$ 对应的 左矢依照定义 写成

$$\langle \mathbf{p}_1^+, \sigma'_1; \mathbf{p}_2^+, \sigma'_2 | = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} \langle 0 | c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1}$$

解开缩并线

参考 7.1 节计算方法, $ff' \rightarrow ff'$ 不变振幅对应的缩并形式是

$$\langle 0 | c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1} N [A_\mu(x) \bar{\psi}_{f,a}(x) \gamma^\mu_{ab} \psi_{f,b}(x) A_\nu(y) \bar{\psi}_{f',c}(y) \gamma^\nu_{cd} \psi_{f',d}(y)] a_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | c_{\mathbf{p}_2, \sigma'_2} a_{\mathbf{p}_1, \sigma'_1} N [\bar{\psi}_{f,a}(x) \bar{\psi}_{f',c}(y) \gamma^\mu_{ab} A_\mu(x) A_\nu(y) \gamma^\nu_{cd} \psi_{f',d}(y) \psi_{f,b}(x)] a_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger | 0 \rangle$$

注意这里将**缩并线**连接到**产生湮灭算符**头上

第二步在正规乘积中**调换场算符的位置**, 将纠缠的**缩并线**解开

这涉及到**偶数次**费米子算符之间的交换, 没有给出额外的负号

因此上面得到的 Coulomb 势能是**正确的**

$f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 散射

如果考虑 $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 散射过程，就会出现不一样的情况

此时初态变成 $|k_1^+, \sigma_1; k_2^-, \sigma_2\rangle = \sqrt{4E_{k_1}E_{k_2}} a_{k_1, \sigma_1}^\dagger d_{k_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle$

末态 $|p_1^+, \sigma'_1; p_2^-, \sigma'_2\rangle = \sqrt{4E_{p_1}E_{p_2}} a_{p_1, \sigma'_1}^\dagger d_{p_2, \sigma'_2}^\dagger |0\rangle$ 对应的左矢依照定义写成

$$\langle p_1^+, \sigma'_1; p_2^-, \sigma'_2 | = \sqrt{4E_{p_1}E_{p_2}} \langle 0 | d_{p_2, \sigma'_2} a_{p_1, \sigma'_1}$$

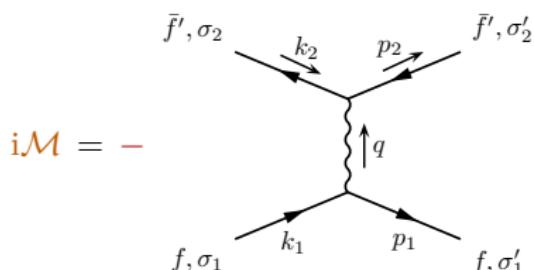
$f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 不变振幅对应的缩并形式是

$$\begin{aligned} & \langle 0 | d_{p_2, \sigma'_2} a_{p_1, \sigma'_1} N [A_\mu(x) \bar{\psi}_{f,a}(x) \gamma_{ab}^\mu \psi_{f,b}(x) A_\nu(y) \bar{\psi}_{f',c}(y) \gamma_{cd}^\nu \psi_{f',d}(y)] a_{k_1, \sigma_1}^\dagger d_{k_2, \sigma_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= - \langle 0 | d_{p_2, \sigma'_2} a_{p_1, \sigma'_1} N [\bar{\psi}_{f,a}(x) \psi_{f',d}(y) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x) A_\nu(y) \gamma_{cd}^\nu \bar{\psi}_{f',c}(y) \psi_{f,b}(x)] a_{k_1, \sigma_1}^\dagger d_{k_2, \sigma_2}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

第二步将缩并线解开时涉及奇数次费米子算符之间的交换，给出一个额外的负号

$f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 不变振幅

应该把这个额外的负号加入到 $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 的领头阶不变振幅中，得到



$$\begin{aligned}
 &= -\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1)(-\mathrm{i}Q_f e \gamma^\mu) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)(-\mathrm{i}Q_{f'} e \gamma^\nu) v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \\
 &= -\frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2)
 \end{aligned}$$

在非相对论近似下，反费米子的平面波旋量系数表达为 $v(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma} \\ -\eta_{-\sigma} \end{pmatrix}$

η_σ 是类似于 ζ_σ 的二分量自旋本征态，满足以下正交归一关系和完备性关系，

$$\eta_{\sigma'}^\dagger \eta_\sigma = \delta_{\sigma' \sigma}, \quad \sum_{\sigma=\pm 1/2} \eta_\sigma \eta_\sigma^\dagger = 1$$

反费米子的平面波旋量系数

▶ II 这样的 $v(\mathbf{p}, \sigma)$ 在 $\mathbf{p} \rightarrow 0$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} + m)v(\mathbf{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & m \end{pmatrix} v(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma} \\ -\eta_{-\sigma} \end{pmatrix} = 0$$

▲ 也满足正交归一关系,

$$v^\dagger(\mathbf{p}, \sigma') v(\mathbf{p}, \sigma) \simeq m \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'}^\dagger & -\eta_{-\sigma'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma} \\ -\eta_{-\sigma} \end{pmatrix} = 2m \eta_{-\sigma'}^\dagger \eta_{-\sigma} \simeq 2E_p \delta_{\sigma' \sigma}$$

从而

$$\begin{aligned} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \gamma^0 v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) &\simeq m_{f'} \begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\eta_{-\sigma'_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'_2} \\ -\eta_{-\sigma'_2} \end{pmatrix} \\ &= 2m_{f'} \eta_{-\sigma_2}^\dagger \eta_{-\sigma'_2} = 2m_{f'} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2} \end{aligned}$$

$$\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2) \gamma^i v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \simeq m_{f'} \begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'_2} \\ -\eta_{-\sigma'_2} \end{pmatrix} = 0$$

反费米子的 Coulomb 势

▲ 再利用 $q^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$, 将 $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 不变振幅化为

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1})(2m_{f'} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2})$$

与 $ff' \rightarrow ff'$ 不变振幅比较, 上式相差一个源于奇数次费米子算符交换的负号

于是, 相应的 Coulomb 势能也多了一个负号, 形式为

$$V(r) = -\frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$$

可见, 反费米子 \bar{f}' 引起的 Coulomb 势为

$$\Phi_{\bar{f}'}(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{-Q_{f'} e}{4\pi r}$$

它与正费米子 f' 引起的 Coulomb 势 $\Phi_{f'}(r) = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}$ 符号相反

这符合我们对反费米子 \bar{f}' 携带 $-Q_{f'}$ 电荷的认知

Yukawa 势

 我们已经看到，光子传播子在非相对论近似下的效应等价于 Coulomb 势

类似地, Yukawa 理论中**标量玻色子** ϕ 的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

与光子不同的是， ϕ 具有质量 m_ϕ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

Yukawa 势

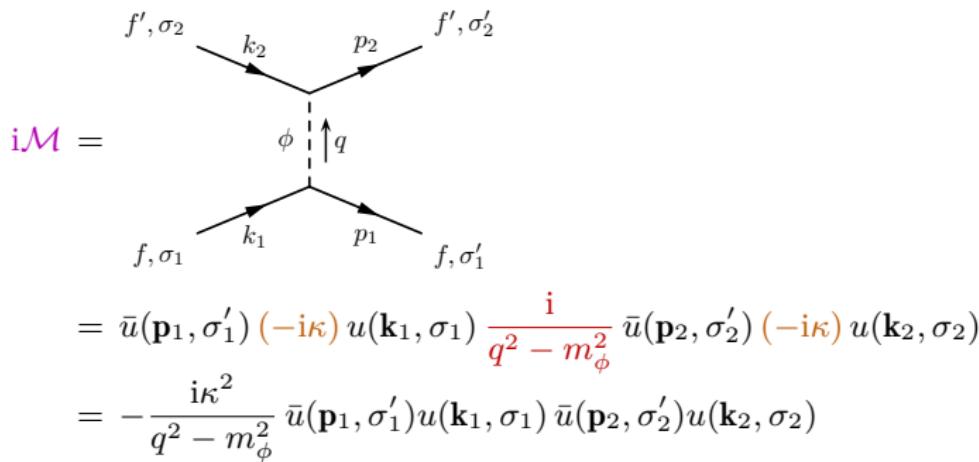
 我们已经看到，光子传播子在非相对论近似下的效应等价于 Coulomb 势

类似地, Yukawa 理论中**标量玻色子** ϕ 的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

与光子不同的是， ϕ 具有质量 m_ϕ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

假设存在两种参与 Yukawa 相互作用的费米子 f 和 f' ，相应的耦合常数均为 κ

根据 7.2 节的 Feynman 规则, $ff' \rightarrow ff'$ 散射过程的领头阶不变振幅为



Yukawa 理论的 $\tilde{V}(q)$



由于

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1) u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) &\simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma'_1}^\dagger & \zeta_{\sigma'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma_1} \\ \zeta_{\sigma_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \\ \bar{u}(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) u(\mathbf{k}_2, \sigma_2) &\simeq 2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \end{aligned}$$



振幅化为

$$i\mathcal{M} = \frac{i\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1}) (2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2})$$



类比前面 Coulomb 散射的计算：

$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{\sigma'_1 \sigma_1}) (2m_{f'} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}) \quad \text{↳} \quad \tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$$



即得 Yukawa 势场 $V(x)$ 的 Fourier 变换

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$

Yukawa 势能

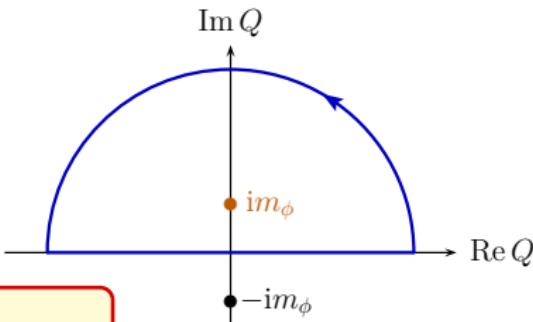
对应的 Yukawa 势能为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{|\mathbf{q}|^2 e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \\ &= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}|r} = -\frac{\kappa^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + m_\phi^2} \end{aligned}$$

 被积函数在上半复平面 $Q = \text{im}_\phi$ 处存在单极点，沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{Q e^{i Q r}}{Q^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \text{Res}_{Q=i m_\phi} \frac{Q e^{i Q r}}{Q^2 + m_\phi^2}$$

$$= 2i\pi \left. \frac{Q e^{iQr}}{Q + im_\phi} \right|_{Q=im_\phi} = i\pi e^{-m_\phi r}$$

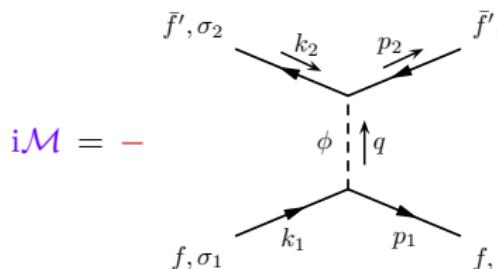


 因此，Yukawa 势能的形式是

$$V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r}$$

$f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 散射

对于 $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 散射，类似于 QED，要在不变振幅中引入一个额外负号，得到



$$\begin{aligned}
&= -\bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1)(-\mathrm{i}\kappa)u(\mathbf{k}_1, \sigma_1) \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\phi^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)(-\mathrm{i}\kappa)v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \\
&= \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \sigma'_1)u(\mathbf{k}_1, \sigma_1)\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2)
\end{aligned}$$

👉 不过, $\bar{v}(\mathbf{k}_2, \sigma_2)v(\mathbf{p}_2, \sigma'_2) \simeq m_{f'} \begin{pmatrix} -\eta_{-\sigma_2}^\dagger & \eta_{-\sigma_2}^\dagger \\ -\eta_{-\sigma'_2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{-\sigma'_2} \\ -\eta_{-\sigma'_2} \end{pmatrix} = -2m_{f'} \eta_{-\sigma_2}^\dagger \eta_{-\sigma'_2} =$

$-2m_{f'}\delta_{\sigma_2\sigma'_2}$ 里面也出现一个负号，导致非相对论近似下不变振幅与 $ff' \rightarrow ff'$ 相同

于是， $f\bar{f}' \rightarrow f\bar{f}'$ 散射过程对应的 Yukawa 势能与 $ff' \rightarrow ff'$ 是一样的。

短程吸引勢

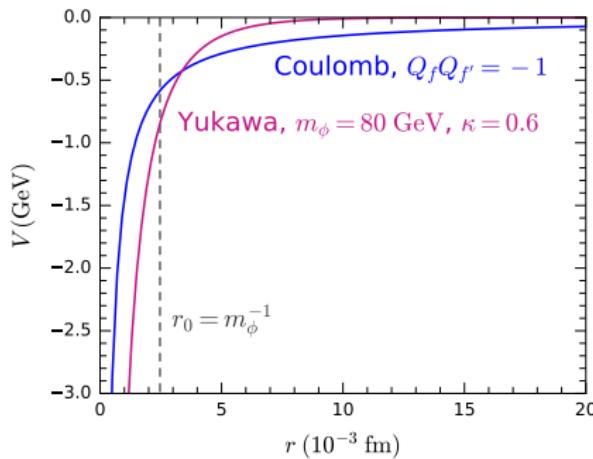
 Yukawa 势能 $V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} < 0$

 r 越小，势能越小；无论对 ff' 散射还是 $f\bar{f}'$ 散射，Yukawa 势都是吸引势

 在长距离处，指数因子 $e^{-m_\phi r}$ 使 Yukawa 势迅速衰减，因而它是短程势

 $r_0 \equiv 1/m_\phi$ 是 Yukawa 势的特征长度，即 Yukawa 相互作用的力程

 若标量玻色子 ϕ 没有质量，则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式类似



8.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

 上一节讨论表明, $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 与 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 过程具有交叉对称性, 利用相应的动量替换规则, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

 交叉对称性的一般表述如下

 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的粒子 Φ

 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的反粒子 $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程

 那么, 这两个过程的不变振幅可以通过动量替换 $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来, 有

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

8.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

 上一节讨论表明, $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 与 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 过程具有交叉对称性, 利用相应的动量替换规则, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

 交叉对称性的一般表述如下

 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的粒子 Φ

 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的反粒子 $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程

 那么, 这两个过程的不变振幅可以通过动量替换 $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来, 有

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

 物理的初末态粒子必须具有正能量, 但 $k^\mu = -p^\mu$ 意味着 Φ 和 $\bar{\Phi}$ 不可能同时具有正能量, 因而看起来有一个过程是**非物理的**

 实际上, 应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的**数学技巧**: 对第一个过程的振幅作**动量替换** $p^\mu \rightarrow -k^\mu$, 再**解析延拓**到**物理区域**就得到第二个过程的振幅

 可以这样**想象**交叉对称性: 一个**粒子沿着时间方向运动**等价于它的**反粒子逆着时间方向运动**, 这样的反粒子具有**负能量和相反动量**

交叉对称性与动量替换

把 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 的过程如下

先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p'_1)，引起动量替换 $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$

再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k'_2)，引起动量替换 $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$

初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

交叉对称性与动量替换

把 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 的过程如下

 先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p'_1)，引起动量替换 $k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu$

 再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k'_2)，引起动量替换 $p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$

初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k_1^{\prime\mu}, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1^{\prime\mu}, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2^{\prime\mu}, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2^{\prime\mu}$$

交叉一个粒子的 Feynman 图如右下图所示，灰色圆形象征一些 Feynman 图结构

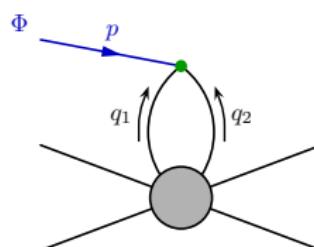
图 (a) 中有一个正粒子 Φ 进入顶点

图 (b) 相应地替换成一个反粒子 $\bar{\Phi}$

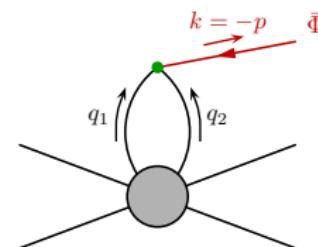
离开顶点，两幅图其余部分完全相同

由于顶点处能动量守恒，图(a)中四维动量满足 $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$

 图 (b) 则满足 $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$



(a) 正粒子 Φ 入射

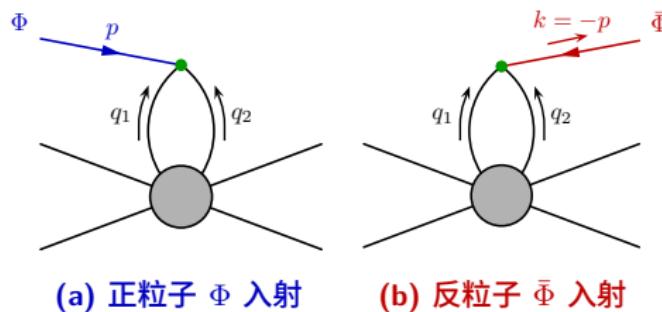


(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 出射

玻色子的交叉对称性

 只要 $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立



玻色子的交叉对称性

 只要 $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

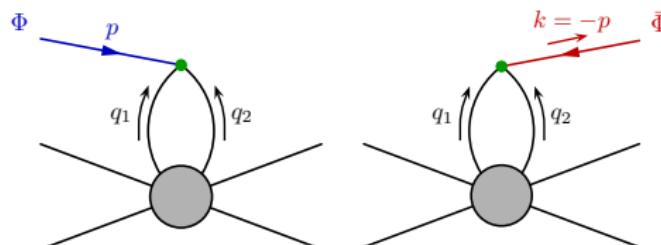
如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立

如果 Φ 是矢量玻色子，则 $\Phi(p)$ 入射时的外线因子为极化矢量 $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ ：

$$\varepsilon^\mu(p, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu(p, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp p^1 p^3 + ip^2 |\mathbf{p}| \\ \mp p^2 p^3 - ip^1 |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix}$$

可见, $\varepsilon_\mu(-p, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$ 对 $\lambda = 0, \pm$ 成立

因此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，有 $\varepsilon_\mu(p, \lambda) = \varepsilon_\mu(-k, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$ ，这恰好是 $\bar{\Phi}(k)$ 出射时的外线因子，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立



(a) 正粒子 Φ 入射

(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 入射

费米子的交叉对称性

(tea) 如果 Φ 是 Dirac 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$

padlock 在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \cancel{p} + m = -(\cancel{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

key 因而两个过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 相差一个整体负号

key 可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的 $|\mathcal{M}|^2$

费米子的交叉对称性

如果 Φ 是 Dirac 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$

在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p) \bar{u}(p) = \cancel{p} + m = -(\cancel{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k) \bar{v}(k)$$

因而两个过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 相差一个整体负号

可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的 $|\mathcal{M}|^2$

将 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 时，交叉了两个费米子，产生了两个整体负号，它们正好相互抵消

交叉一个费米子时，如果想让交叉对称性在振幅层面上成立，则需要对 $v(p, \lambda)$ 采取特殊的定义，而 $u(p, \lambda)$ 可保持原先的定义

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|p|} \xi_\lambda(p) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|p|} \xi_\lambda(p) \end{pmatrix}$$

$v(p, \lambda)$ 的特殊定义

由螺旋态本征方程 $(\hat{p} \cdot \sigma) \xi_\lambda(p) = \lambda \xi_\lambda(p)$ 得 $-(\hat{p} \cdot \sigma) \xi_\lambda(-p) = \lambda \xi_\lambda(-p)$ ，故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即 $\xi_\lambda(-p)$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态，从而可以将 $v(p, \lambda)$ 的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|p|} \xi_\lambda(-p) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|p|} \xi_\lambda(-p) \end{pmatrix}$$

$v(p, \lambda)$ 的特殊定义

由螺旋态本征方程 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$ ，故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即 $\xi_\lambda(-p)$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态，从而可以将 $v(p, \lambda)$ 的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

👉 $v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}), \quad \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$

利用 $m = \sqrt{(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{(p^0 + \lambda|\mathbf{p}|)(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)}$, 推出

$$\begin{aligned} -\frac{p \cdot \bar{\sigma}}{m} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 + \mathbf{p} \cdot \sigma) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 - \lambda|\mathbf{p}|) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -i \sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

因此，这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足运动方程 $(\phi + m)v(p, \lambda) = 0$

振幅的费米子交叉对称性

也可以验证这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足正交归一关系和自旋求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = p - m$$

振幅的费米子交叉对称性

 也可以验证这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足正交归一关系和自旋求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

如此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，可以推出

$$\begin{aligned}
u(p, \lambda) &= u(-k, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|k|} \xi_\lambda(-k) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|k|} \xi_\lambda(-k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\text{e}^{i\pi}(k^0 + \lambda|k|)]^{1/2} \xi_\lambda(-k) \\ [\text{e}^{-i\pi}(k^0 - \lambda|k|)]^{1/2} \xi_\lambda(-k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{e}^{i\pi/2}(k^0 + \lambda|k|)^{1/2} \xi_\lambda(-k) \\ \text{e}^{-i\pi/2}(k^0 - \lambda|k|)^{1/2} \xi_\lambda(-k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{k^0 + \lambda|k|} \xi_\lambda(-k) \\ -i\sqrt{k^0 - \lambda|k|} \xi_\lambda(-k) \end{pmatrix} = v(k, \lambda)
\end{aligned}$$

即 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子相等

故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立

 注意，**平方根函数是多值函数**，在上式推导过程中，利用 $e^{\pm i\pi} = -1$ 对两个平方根函数采用了**不同的取值方式**

Mandelstam 变量

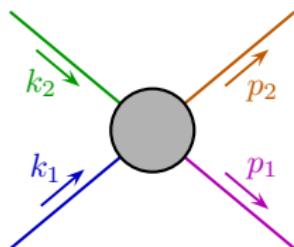
现在定义一些便于应用**交叉关系**的物理量

对于 $2 \rightarrow 2$ 散射，按照右图表示的四维动量，定义三个 Lorentz 不变的 Mandelstam 变量：

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$t \equiv (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2$$



第二步均用到**能动量守恒关系** $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

记这些四维动量对应的**质量**为 m_1 、 m_2 、 m'_1 、 m'_2 ，

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m'_1{}^2, \quad p_2^2 = m'_2{}^2$$



Stanley Mandelstam
(1928–2016)

Mandelstam 变量性质

四维动量的内积可以用 Mandelstam 变量和质量表示为

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}(s - k_1^2 - k_2^2) = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2), \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1'^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - k_1^2 - p_1^2) = -\frac{1}{2}(t - m_1^2 - m_1'^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(t - m_2^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(u - k_1^2 - p_2^2) = -\frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2'^2), \quad k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_2^2 - m_1'^2)$$

因为 $|\mathcal{M}|^2$ 只是这些四维动量内积的函数，所以用 3 个 Mandelstam 变量就足以表达任意 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$

进一步推出

$$\begin{aligned} s + t + u &= (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - p_1)^2 + (k_1 - p_2)^2 \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_1 - p_2) \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2 \end{aligned}$$

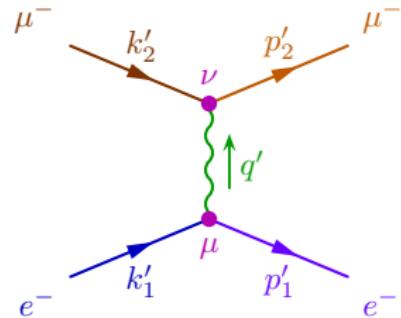
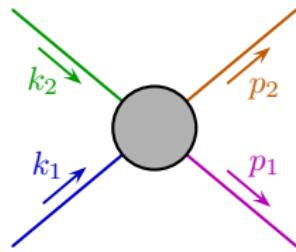
即 Mandelstam 变量之和是初末态粒子质量平方和

Mandelstam 变量的进一步说明

 $t = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1)^2$ 和 $u = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

实际应用通常用初末态中两个性质相近的粒子定义 t

比如，对于 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k'_1 与末态电子动量 p'_1 定义 $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$



Mandelstam 变量的进一步说明

 $t = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1)^2$ 和 $u = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

实际应用通常用初末态中两个性质相近的粒子定义 t

比如，对于 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k'_1 与末态电子动量 p'_1 定义 $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$

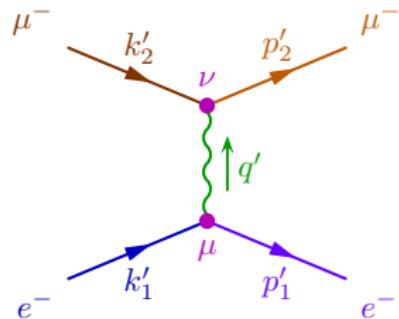
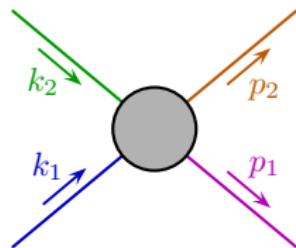
在质心系中， $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ ，有 $s = (k_1 + k_2)^2 = (k_1^0 + k_2^0)^2 = E_{CM}^2$

 故 $\sqrt{s} = E_{CM}$ 就是质心能

对于任意 $2 \rightarrow n$ 散射过程，将 s 定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，即

$$\textcolor{red}{s} = (k_1 + k_2)^2 = \left(\sum_i p_i \right)^2$$

于是， \sqrt{s} 就是这个 $2 \rightarrow n$ 过程的质心能



$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

 可以用 **Mandelstam** 变量表达任意 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的非极化振幅模方

对于 8.2 节的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程，**非极化振幅模方**可化为

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \\
&= \frac{8e^4}{s^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2m_\mu^2] \\
&= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{1}{4}(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{4}(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{2}m_\mu^2(s - 2m_e^2) + \frac{1}{2}m_e^2(s - 2m_\mu^2) \right. \\
&\quad \left. + 2m_e^2m_\mu^2 \right] \\
&= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{t+u}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right]
\end{aligned}$$

由 $s + t + u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$ 得 $t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) - s$ ，故

$$\begin{aligned}
& \overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2} \\
&= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{2(m_e^2 + m_\mu^2) - s}{2} (m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2} (m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2} (m_e^2 + m_\mu^2) \right] \\
&= \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]
\end{aligned}$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

 现在将 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

根据动量替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, 有

$$(\textcolor{blue}{k}_1 + \textcolor{blue}{k}_2)^2 \rightarrow (\textcolor{blue}{k}'_1 - \textcolor{red}{p}'_1)^2, \quad (\textcolor{blue}{k}_1 - \textcolor{brown}{p}_1)^2 \rightarrow (\textcolor{blue}{k}'_1 - \textcolor{brown}{p}'_2)^2, \quad (\textcolor{blue}{k}_1 - p_2)^2 \rightarrow (\textcolor{blue}{k}'_1 + \textcolor{blue}{k}'_2)^2$$

即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

 现在将 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

根据动量替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, 有

$$(\textcolor{blue}{k}_1 + \textcolor{blue}{k}_2)^2 \rightarrow (\textcolor{blue}{k}'_1 - p'_1)^2, \quad (\textcolor{blue}{k}_1 - \textcolor{brown}{p}_1)^2 \rightarrow (\textcolor{blue}{k}'_1 - \textcolor{brown}{p}'_2)^2, \quad (\textcolor{blue}{k}_1 - p_2)^2 \rightarrow (\textcolor{blue}{k}'_1 + \textcolor{blue}{k}'_2)^2$$

即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

可见，交叉对称性对应于 Mandelstam 变量的调换

据此, 从 $\frac{|\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2}{s^2} = \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$

直接得到 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 过程的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)|^2} = \frac{2e^4}{t^2} [u^2 + s^2 + 4t(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$$

容易验证此结果与前面得到的 $|\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{(q'^2)^2} [(k'_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot k'_2)]$

$+ (k'_1 \cdot k'_2)(p'_1 \cdot p'_2) - m_e^2(p'_2 \cdot k'_2) - m_\mu^2(k'_1 \cdot p'_1) + 2m_e^2m_\mu^2]$ 一致

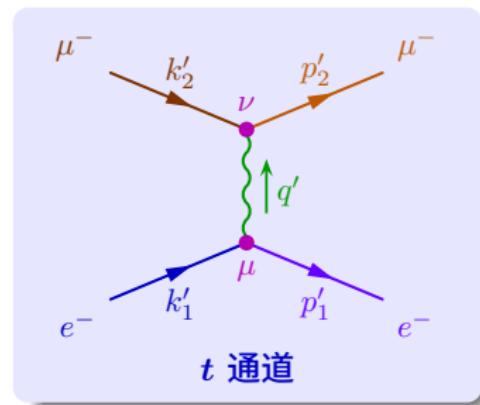
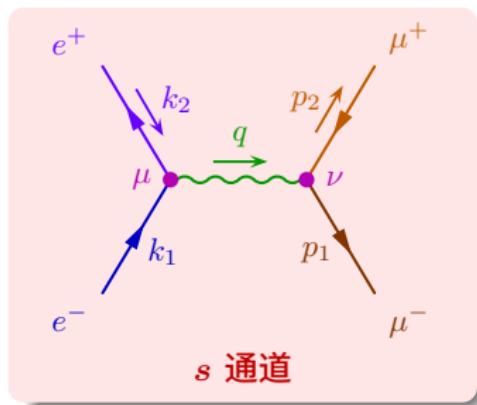
s 、 t 和 u 通道

🥃 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的虚光子动量满足 $q^2 = (k_1 + k_2)^2 = s$ ，交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 之后，虚光子动量满足 $q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = t$

👢 一般来说，当 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的 Feynman 图只包含一条内线时，内线动量的自我内积等于一个 Mandelstam 变量 s 、 t 或 u

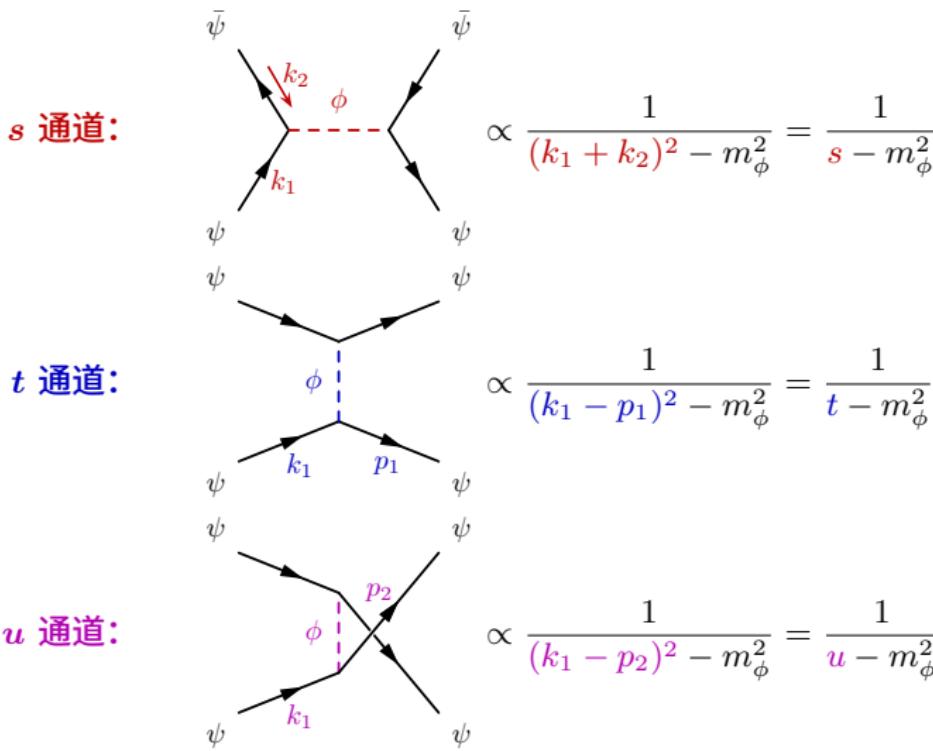
👠 相应地称这种图为 s 通道 (channel)、 t 通道或 u 通道的 Feynman 图

👞 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 和 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ Feynman 图分别对应于 s 通道和 t 通道



三种通道的特点

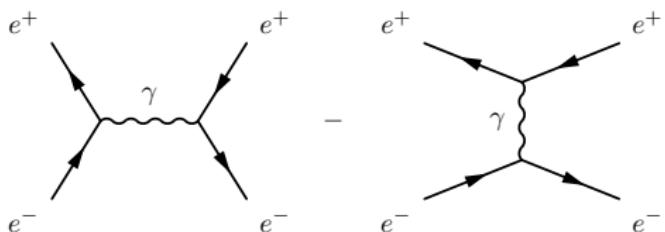
 以 Yukawa 理论为例，三种通道具有如下特点



Bhabha 散射和 Møller 散射

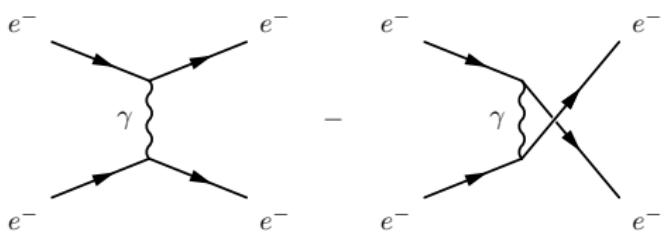
🍺 一个散射过程可以包含多个通道的 Feynman 图

👢 Bhabha 散射 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 具有 1 个 s 通道和 1 个 t 通
道领头阶 Feynman 图



Homi Jehangir Bhabha
(1909–1966)

👢 Møller 散射 $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ 具有 1 个 t 通道和 1 个 u 通
道领头阶 Feynman 图



Christian Møller
(1904–1980)

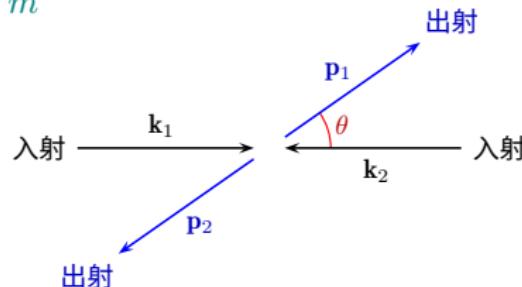
Mandelstam 变量与散射角的关系

在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是 m

动量如右图所示，则有

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\text{CM}}}{2} = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \equiv Q$$



从而得到

$$t = (k_1 - p_1)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_1^0 + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1| \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

$$\textcolor{violet}{u} = (k_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_2^0 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta = -2Q^2(1 + \cos \theta)$$

于是, $\theta \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi$ 时 $u \rightarrow 0$, 而 $s = E_{CM}^2$ 与散射角 θ 无关

三种通道的传播子对散射角 θ 的依赖截然不同