数 学 物 理 方 法

第十二章　柱函数初步

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 12 月 29 日

第十二章　柱函数初步

在物理问题具有**圆柱形边界面**时，比如电动力学中的**圆柱形波导**和**同轴传输线**，就应该采用**柱坐标系**求解

在**柱坐标系**中对常见的数理方程分离变量，会遇到 **Bessel 方程**

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

物理上遇到的通常是 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况

数学上 ν 可以是**复数**，但可设 $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$ 而不失一般性

第十二章　柱函数初步

在物理问题具有**圆柱形边界面**时，比如电动力学中的**圆柱形波导**和**同轴传输线**，就应该采用**柱坐标系**求解

在**柱坐标系**中对常见的数理方程分离变量，会遇到 **Bessel 方程**

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

物理上遇到的通常是 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况

数学上 ν 可以是**复数**，但可设 $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$ 而不失一般性

第十章用**级数解法**求解了 **Bessel 方程**，得到两个线性独立解

$$y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)\}$$

$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ 是 ν **阶 Bessel 函数**，也称为**第一类柱函数**

$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$ 是 ν **阶 Neumann 函数**，也称为**第二类柱函数**

第三类柱函数

- 此外，还有**第三类柱函数**，它们指的是下列 **Hankel 函数**

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x), \quad \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x)$$

- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ 分别称为**第一种**和**第二种 Hankel 函数**
- **Bessel 方程**的**线性独立解**可取为

$$\{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x), \mathrm{H}_\nu^{(1)}(x), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)\}$$

中的**任意两个**

- **柱函数**在物理和工程中有广泛的应用
- 本章介绍**柱函数**的基本知识和初步应用

Hermann Hankel
(1839–1873)

§1 柱函数的基本性质

§1.1 原点附近的行为

- 根据定义，在**原点** $x=0$ **附近**，$\nu=0$ 时有

$$\mathrm{J}_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\simeq 1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\to 1$$

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_0(x) &= \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_0(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-)^k\psi(k+1)}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\\ &\simeq \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}-\frac{2\psi(1)}{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)\to\infty\end{aligned}$$

- $\mathrm{Re}\,\nu>0$ 时有

$$\mathrm{J}_\nu(x)\simeq\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mathrm{Re}\,\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\nu}\to 0$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)\simeq\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mathrm{Re}\,\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\nu}\to\infty$$

原点附近 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 的行为

$\mathrm{Re}\,\nu > 0$ 时 **Neumann 函数**在**原点** $x = 0$ **附近**的行为是

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_\nu(x) &= \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\pi}\left[\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)\right] \\
&\simeq \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\pi}\left[\frac{\cos\nu\pi}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\right] \\
&\simeq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \to \infty
\end{aligned}$$

这里用到 Γ 函数的性质 $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \dfrac{\pi}{\sin\nu\pi}$

在 $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$ 的条件下，$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x)$ 在**原点附近**的行为与 $\mathrm{N}_\nu(x)$ **类似**，只是多了系数 $\pm\mathrm{i}$

遇到物理问题中**解的取舍**时，经常用到这些柱函数在**原点附近**的**有限性**或**奇性**

§1.2 递推关系

以 $Z_\nu(x)$ 表示 $\{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x), \mathrm{H}_\nu^{(1)}(x), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)\}$ 中的任一函数

可以证明以下**递推关系**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} Z_\nu(x)] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$$

证明 对于 $Z_\nu(x) = \mathrm{J}_\nu(x)$，有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{(2k+2\nu)x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}} \\
\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \Rightarrow \quad &= x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

证明 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 满足第二条递推关系

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{2kx^{2k-1}}{2^{2k+\nu}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k-1)!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu-1}} \\
k'=k-1 \Rightarrow \quad &= \sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-)^{k'+1}}{k'!\,\Gamma(k'+\nu+2)}\frac{x^{2k'+1}}{2^{2k'+\nu+1}} \\
&= -x^{-\nu}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-)^{k'}}{k'!\,\Gamma(k'+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+\nu+1} \\
&= -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)
\end{aligned}
$$

证明 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 满足第一条递推关系

作**变量替换** $\nu' = -\nu$，由**递推关系** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)] = -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu'}\mathrm{J}_{\nu'}(x)] = -x^{-\nu'}\mathrm{J}_{\nu'+1}(x) = -x^{\nu}\mathrm{J}_{-\nu+1}(x)$$

再利用 $\cos[(\nu-1)\pi] = -\cos\nu\pi$ 和 $\sin[(\nu-1)\pi] = -\sin\nu\pi$，推出

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu}\mathrm{N}_\nu(x)] &= \frac{1}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - x^{\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(x)] \\
&= \frac{x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(x)\cos\nu\pi + x^{\nu}\mathrm{J}_{-\nu+1}(x)}{\sin\nu\pi} \\
&= \frac{x^{\nu}[-\mathrm{J}_{\nu-1}(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu+1}(x)]}{-\sin\nu\pi} \\
&= \frac{x^{\nu}\{\mathrm{J}_{\nu-1}(x)\cos[(\nu-1)\pi] - \mathrm{J}_{-(\nu-1)}(x)\}}{\sin[(\nu-1)\pi]} = x^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

证明 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 满足第二条递推关系

作变量替换 $\nu' = -\nu$，由递推关系 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x)$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu'}\mathrm{J}_{\nu'}(x)] = x^{\nu'}\mathrm{J}_{\nu'-1}(x) = x^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu-1}(x)$$

再利用 $\cos[(\nu+1)\pi] = -\cos\nu\pi$ 和 $\sin[(\nu+1)\pi] = -\sin\nu\pi$，推出

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(x)] &= \frac{1}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - x^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(x)] \\
&= \frac{-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\cos\nu\pi - x^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu-1}(x)}{\sin\nu\pi} \\
&= \frac{-x^{-\nu}[-\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu-1}(x)]}{-\sin\nu\pi} \\
&= \frac{-x^{-\nu}\{\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\cos[(\nu+1)\pi] - \mathrm{J}_{-(\nu+1)}(x)\}}{\sin[(\nu+1)\pi]} = -x^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(x)
\end{aligned}$$

- 以上证明了**两条递推关系**对 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 成立
- 由这些结果可以直接证明**递推关系**对 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ 成立 **证毕** ■

柱函数的定义

以上证明了**两条递推关系**对 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 成立

由这些结果可以直接证明**递推关系**对 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ 成立 **证毕**

同时满足**这两条递推关系**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} Z_\nu(x)] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$$

的函数统称为**柱函数**；$\{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x), \mathrm{H}_\nu^{(1)}(x), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)\}$ 中**任何一个**或者它们的**线性组合**，只要**组合系数与 ν 无关**，都是**柱函数**（反例：$\nu\mathrm{J}_\nu(x)$ **不是**柱函数）

利用递推关系，可以导出一些简单的**积分公式**

令 $\nu = 1$ 或 $\nu = 0$，由**递推关系**有 $[x\mathrm{J}_1(x)]' = x\mathrm{J}_0(x)$ 和 $\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x)$

因此，有**积分公式** $\int x\mathrm{J}_0(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{J}_1(x) + C$ 和 $\int \mathrm{J}_1(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{J}_0(x) + C$

柱函数与 Bessel 方程

- 将**第二条递推关系**改写为 $-\nu x^{-\nu-1}Z_\nu(x)+x^{-\nu}Z'_\nu(x)=-x^{-\nu}Z_{\nu+1}(x)$，则

$$Z_{\nu+1}(x)=\nu x^{-1}Z_\nu(x)-Z'_\nu(x),\quad Z'_{\nu+1}(x)=-\nu x^{-2}Z_\nu(x)+\nu x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)$$

- 将**第一条递推关系**改写成 $\nu x^{\nu-1}Z_\nu(x)+x^{\nu}Z'_\nu(x)=x^{\nu}Z_{\nu-1}(x)$
- 推出 $Z_{\nu-1}(x)=\nu x^{-1}Z_\nu(x)+Z'_\nu(x)$

柱函数与 Bessel 方程

- 将**第二条递推关系**改写为 $-\nu x^{-\nu-1}Z_\nu(x)+x^{-\nu}Z'_\nu(x)=-x^{-\nu}Z_{\nu+1}(x)$，则

$$Z_{\nu+1}(x)=\nu x^{-1}Z_\nu(x)-Z'_\nu(x),\quad Z'_{\nu+1}(x)=-\nu x^{-2}Z_\nu(x)+\nu x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)$$

- 将**第一条递推关系**改写成 $\nu x^{\nu-1}Z_\nu(x)+x^{\nu}Z'_\nu(x)=x^{\nu}Z_{\nu-1}(x)$
- 推出 $Z_{\nu-1}(x)=\nu x^{-1}Z_\nu(x)+Z'_\nu(x)$，作**变量替换** $\nu\to\nu+1$，得

$$\begin{aligned}Z_\nu(x)&=(\nu+1)x^{-1}Z_{\nu+1}(x)+Z'_{\nu+1}(x)\\&=(\nu+1)x^{-1}[\nu x^{-1}Z_\nu(x)-Z'_\nu(x)]-\nu x^{-2}Z_\nu(x)+\nu x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)\\&=\nu^2x^{-2}Z_\nu(x)-x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)\end{aligned}$$

- 从而得到 ν **阶 Bessel 方程** $Z''_\nu(x)+\dfrac{1}{x}Z'_\nu(x)+\left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu(x)=0$

柱函数与 Bessel 方程

- 将**第二条递推关系**改写为 $-\nu x^{-\nu-1}Z_\nu(x)+x^{-\nu}Z'_\nu(x)=-x^{-\nu}Z_{\nu+1}(x)$，则

$$Z_{\nu+1}(x)=\nu x^{-1}Z_\nu(x)-Z'_\nu(x),\quad Z'_{\nu+1}(x)=-\nu x^{-2}Z_\nu(x)+\nu x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)$$

- 将**第一条递推关系**改写成 $\nu x^{\nu-1}Z_\nu(x)+x^{\nu}Z'_\nu(x)=x^{\nu}Z_{\nu-1}(x)$
- 推出 $Z_{\nu-1}(x)=\nu x^{-1}Z_\nu(x)+Z'_\nu(x)$，作**变量替换** $\nu\to\nu+1$，得

$$\begin{aligned}Z_\nu(x)&=(\nu+1)x^{-1}Z_{\nu+1}(x)+Z'_{\nu+1}(x)\\&=(\nu+1)x^{-1}[\nu x^{-1}Z_\nu(x)-Z'_\nu(x)]-\nu x^{-2}Z_\nu(x)+\nu x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)\\&=\nu^2x^{-2}Z_\nu(x)-x^{-1}Z'_\nu(x)-Z''_\nu(x)\end{aligned}$$

- 从而得到 ν **阶 Bessel 方程** $Z''_\nu(x)+\dfrac{1}{x}Z'_\nu(x)+\left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu(x)=0$
- 可见，**柱函数**一定满足 **Bessel 方程**；反过来，**Bessel 方程**的解**不一定**是**柱函数**
- 比如，$\nu\mathrm{J}_\nu(x)$ 是 **Bessel 方程**的解，但**不满足上述递推关系**，因而不是柱函数

递推关系的等价形式

上一页已经得到，**这两条递推关系**等价于

$$Z_{\nu-1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) + Z'_\nu(x), \quad Z_{\nu+1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) - Z'_\nu(x)$$

两式相加减，推出**递推关系的等价形式**

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \quad Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x)$$

显然，任何**柱函数**也都满足**这两条递推关系**

§1.3 渐近形式

人们常常希望知道，当**自变量很大**时，**特殊函数**的行为像哪个**初等函数**，这有助于把握其性质并应用于具体问题

当 $x \to \infty$ 且 $-\pi < \arg x < \pi$ 时，有

$$\mathrm{J}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

可见，$\{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x), \mathrm{H}_\nu^{(1)}(x), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)\}$ 之间的关系类似于 $\{\cos x, \sin x, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\}$

如果 $\nu \in \mathbb{R}$，由**渐近形式**可以看出 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 在**正实轴**上都有**无穷多个零点**

这些柱函数在正实轴上的图象都是**衰减振荡**的，振幅随 x 的增大**按** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **衰减**，所以与**柱面波**有关

§1.4 零点

首先指出，**柱函数** $Z_\nu(x)$ 的**任何零点** x_0 都是**简单零点**，只有 $x_0 = 0$ **可能例外**

事实上，如果 $x_0 \neq 0$ 是**高于一阶的零点**，则 $Z_\nu(x_0) = Z'_\nu(x_0) = 0$

由 **Bessel 方程** $Z''_\nu(x) + \frac{1}{x} Z'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu(x) = 0$ 得

$$
\begin{aligned}
Z''_\nu(x_0) &= -\frac{1}{x_0} Z'_\nu(x_0) - \left(1 - \frac{\nu^2}{x_0^2}\right) Z_\nu(x_0) = 0 \\
Z^{(3)}_\nu(x_0) &= -\frac{1}{x_0} Z''_\nu(x_0) + \frac{1}{x_0^2} Z'_\nu(x_0) - \left(1 - \frac{\nu^2}{x_0^2}\right) Z'_\nu(x_0) - \frac{2\nu^2}{x_0^3} Z_\nu(x_0) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

于是得到 $Z^{(n)}_\nu(x_0) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$

根据 **Taylor 展开式**，x_0 的邻域 $N(x_0, |x_0|)$ 内有 $Z_\nu(x) \equiv 0$，这显然是**错误**的

上述论证**对** $x_0 = 0$ **不成立**，所以 $x_0 = 0$ 可能例外

其次，由于

$$\mathrm{J}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x}{2}\right)^{2k+\nu}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+\nu)\pi}\mathrm{J}_\nu(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{J}_\nu(x)$$

若 $x_0>0$ 是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**零点**，则**负实轴**上与 x_0 对称的点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x_0$ 也是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**零点**

所以，对于 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 在**实轴**上的**零点**，只需要关注**正零点**

$\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正零点

- 其次，由于

$$\mathrm{J}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x}{2}\right)^{2k+\nu}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+\nu)\pi}\mathrm{J}_\nu(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{J}_\nu(x)$$

- 若 $x_0>0$ 是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**零点**，则**负实轴**上与 x_0 对称的点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x_0$ 也是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**零点**
- 所以，对于 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 在**实轴**上的**零点**，只需要关注**正零点**
- 最后，在讨论**零点**时，我们只考虑 $\nu\in\mathbb{R}$ 的情况，下面给出几个结论

1. $\mathrm{J}_\nu(x)$ 有**无穷多正零点**

- 从前面的**渐近形式**大致可以推测这一结果，证明从略
- 这个结论会保证相关物理问题在**第一类边界条件**下具有**无穷多本征值**

$\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正零点

其次，由于

$$\mathrm{J}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x}{2}\right)^{2k+\nu}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+\nu)\pi}\mathrm{J}_\nu(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{J}_\nu(x)$$

若 $x_0>0$ 是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**零点**，则**负实轴**上与 x_0 对称的点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x_0$ 也是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**零点**

所以，对于 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 在**实轴**上的**零点**，只需要关注**正零点**

最后，在讨论**零点**时，我们只考虑 $\nu\in\mathbb{R}$ 的情况，下面给出几个结论

Michel Rolle
(1652–1719)

1. $\mathrm{J}_\nu(x)$ 有**无穷多正零点**

从前面的**渐近形式**大致可以推测这一结果，证明从略

这个结论会保证相关物理问题在**第一类边界条件**下具有**无穷多本征值**

根据 **Rolle 定理**，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一个 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$

于是，在 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**两个正零点之间**必定存在 $\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的一个**正零点**

$\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点

- 因此，$\mathrm{J}'_\nu(x)$ 也具有**无穷多正零点**
- 这保证了相关物理问题在**第二类边界条件**下具有**无穷多本征值**
- 如果 $\nu > -1$，可以证明 $\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点也都是**简单零点**

$\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点

- 因此，$\mathrm{J}'_\nu(x)$ 也具有**无穷多正零点**
- 这保证了相关物理问题在**第二类边界条件**下具有**无穷多本征值**
- 如果 $\nu > -1$，可以证明 $\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点也都是**简单零点**
- 2 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的**正零点**是**两两相间**的；

  如果 $\nu > -1$，则 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**最小正零点更靠近原点**

- 将**递推关系** $[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)]' = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x)$ 改写为 $[x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(x)$
- 设 $f(x) = x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$，则 $\mathrm{J}_{\nu+1}(a) = \mathrm{J}_{\nu+1}(b) = 0$ 意味着 $f(a) = f(b) = 0$
- 根据 **Rolle 定理**，$\exists\, c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(c) = 0$，即 $\mathrm{J}_\nu(c) = 0$
- 因此，在 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的两个相邻正零点 a、b 之间，至少有一个 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正零点 c

$\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点

- 因此，$\mathrm{J}'_\nu(x)$ 也具有**无穷多正零点**
- 这保证了相关物理问题在**第二类边界条件**下具有**无穷多本征值**
- 如果 $\nu > -1$，可以证明 $\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点也都是**简单零点**
- 2 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的**正零点**是**两两相间**的；

  如果 $\nu > -1$，则 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的**最小正零点更靠近原点**

- 将**递推关系** $[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)]' = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x)$ 改写为 $[x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(x)$
- 设 $f(x) = x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$，则 $\mathrm{J}_{\nu+1}(a) = \mathrm{J}_{\nu+1}(b) = 0$ 意味着 $f(a) = f(b) = 0$
- 根据 **Rolle 定理**，$\exists\, c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(c) = 0$，即 $\mathrm{J}_\nu(c) = 0$
- 因此，在 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的两个相邻正零点 a、b 之间，至少有一个 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正零点 c
- 设 $f(x) = x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)$，则 $\mathrm{J}_\nu(a) = \mathrm{J}_\nu(b) = 0$ 意味着 $f(a) = f(b) = 0$
- 由**递推关系** $[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)]' = -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 和 **Rolle 定理**可知，$\exists\, c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = -c^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(c) = 0$，即 $\mathrm{J}_{\nu+1}(c) = 0$

- 因此，在 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的两个相邻正零点 a、b 之间，至少有一个 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的正零点 c
- 于是，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的**正零点**是**两两相间**的

- 因此，在 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的两个相邻正零点 a、b 之间，至少有一个 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的正零点 c
- 于是，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的**正零点**是**两两相间**的
- 如果 $\nu > -1$，则 $\mathrm{J}_{\nu+1}(0) = 0$；记 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点为 b，则 $\mathrm{J}_{\nu+1}(b) = 0$
- 设 $f(x) = x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$，有 $f(0) = f(b) = 0$
- 由**递推关系** $[x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 **Rolle 定理**可知，$\exists\, c \in (0, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(c) = 0$，即 $\mathrm{J}_\nu(c) = 0$
- 故 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正零点 c 比 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点 b 更靠近原点

$A\mathrm{J}_\nu(x)+Bx\mathrm{J}'_\nu(x)$ 的正零点

- 因此，在 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的两个相邻正零点 a、b 之间，至少有一个 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的正零点 c
- 于是，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的**正零点**是**两两相间**的
- 如果 $\nu>-1$，则 $\mathrm{J}_{\nu+1}(0)=0$；记 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点为 b，则 $\mathrm{J}_{\nu+1}(b)=0$
- 设 $f(x)=x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$，有 $f(0)=f(b)=0$
- 由**递推关系** $[x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)]'=x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 **Rolle 定理**可知，$\exists\, c\in(0,b)$ 使得 $f'(c)=c^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(c)=0$，即 $\mathrm{J}_\nu(c)=0$
- 故 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正零点 c 比 $\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点 b 更靠近原点

3. $A\mathrm{J}_\nu(x)+Bx\mathrm{J}'_\nu(x)$ 有**无穷多正零点**，其中 $A,B\in\mathbb{R}$ 且不全为零
   - 证明从略，如果 $A=0$ 或 $B=0$，则结论已经在前面给出
   - 当 $A\neq0$ **且** $B\neq0$ 时，它保证相关物理问题在**第三类边界条件**下有**无穷多本征值**
   - 如果 $\nu>-1$，可以证明这些正零点都是**简单零点**
   - 若 $AD-BC\neq0$，则 $A\mathrm{J}_\nu(x)+Bx\mathrm{J}'_\nu(x)$ 与 $C\mathrm{J}_\nu(x)+Dx\mathrm{J}'_\nu(x)$ 正零点**两两相间**

§2 整数阶柱函数

- 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，**Bessel 函数**的形式为

$$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

- **Neumann 函数**的形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_m(x) = & \frac{2}{\pi} \mathrm{J}_m(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} [\psi(k+m+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}\end{aligned}$$

- 这就是本节将要讨论的**整数阶柱函数**
- 第十章 4.4 小节已推出 $\mathrm{J}_{-m}(x) = (-)^m \mathrm{J}_m(x)$，另有 $\mathrm{N}_{-m}(x) = (-)^m \mathrm{N}_m(x)$
- 因此**负整数阶**的情况不需要过多关注

§2.1–§2.2 对称性和零点

- 由 $(-x)^{2k+m} = (-)^m x^{2k+m}$ 可知，

$$\mathrm{J}_m(-x) = (-)^m \mathrm{J}_m(x)$$

- 即函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的奇偶性与整数 m 的奇偶性相同

§2.1–§2.2 对称性和零点

由 $(-x)^{2k+m} = (-)^m x^{2k+m}$ 可知，

$$\mathrm{J}_m(-x) = (-)^m \mathrm{J}_m(x)$$

即**函数** $\mathrm{J}_m(x)$ 的奇偶性与**整数** m 的**奇偶性相同**

根据 §1.4 的结论，有以下结果

1. $\mathrm{J}_m(x)$ 和 $\mathrm{J}'_m(x)$ 均有**无穷多实数零点**，且**正负成对**

注意 $\mathrm{J}_m(x)$ 是**单值函数**，所以负实轴上**与** $x > 0$ **对称**的点可以直接写成 $-x$，而不必写成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x$

$\mathrm{J}_m(x)$ 的**正零点**从小到大排列，记作 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $0 < x_{m1} < x_{m2} < \cdots$

$\mathrm{J}'_m(x)$ 的**正零点**从小到大排列，记作 $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $0 < \tilde{x}_{m1} < \tilde{x}_{m2} < \cdots$

§2.1–§2.2 对称性和零点

由 $(-x)^{2k+m} = (-)^m x^{2k+m}$ 可知，

$$\mathrm{J}_m(-x) = (-)^m \mathrm{J}_m(x)$$

即**函数** $\mathrm{J}_m(x)$ 的奇偶性与**整数** m 的**奇偶性相同**

根据 §1.4 的结论，有以下结果

1. $\mathrm{J}_m(x)$ 和 $\mathrm{J}'_m(x)$ 均有**无穷多实数零点**，且**正负成对**

注意 $\mathrm{J}_m(x)$ 是**单值函数**，所以负实轴上**与** $x > 0$ **对称**的点可以直接写成 $-x$，而不必写成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x$

$\mathrm{J}_m(x)$ 的**正零点**从小到大排列，记作 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $0 < x_{m1} < x_{m2} < \cdots$

$\mathrm{J}'_m(x)$ 的**正零点**从小到大排列，记作 $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $0 < \tilde{x}_{m1} < \tilde{x}_{m2} < \cdots$

2. $\mathrm{J}_m(x)$ 和 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的**正零点**是**两两相间**的；

   $\mathrm{J}_m(x)$ 的最小正零点比 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的更靠近原点，即 $x_{m1} < x_{m+1,1}$

§2.3 函数图象

- $\mathrm{J}_m(x)$ 和 $\mathrm{N}_m(x)$ 的函数图象都是**衰减振荡**的
- 但是，当 $x \to 0$ 时，它们具有不同的特征，此时 $\mathrm{N}_m(x) \to -\infty$
- 而 $\mathrm{J}_0(0) = 1$， $\mathrm{J}_k(0) = 0$， $k \in \mathbb{N}^+$
- 当 $m \geq 3$ 时，$\mathrm{J}_m(x)$ 的图象与 $\mathrm{J}_1(x)$ 和 $\mathrm{J}_2(x)$ 类似；

  $\mathrm{N}_m(x)$ 的图象与 $\mathrm{N}_1(x)$ 和 $\mathrm{N}_2(x)$ 类似

§2.4 母函数

第四章 §1.3 选读的例 6 求出了

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m(z)t^m,\quad 0<|t|<+\infty$$

左边的函数称为 $\mathrm{J}_m(z)$ 的**母函数**

可见，**母函数**在环域 $0<|t|<+\infty$ 内是 t 的解析函数，可以展开为 t 的 **Laurent 级数**，而**展开系数**正好是 **Bessel 函数** $\mathrm{J}_m(z)$

§2.4 母函数

- 第四章 §1.3 选读的例 6 求出了

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m(z)t^m,\quad 0<|t|<+\infty$$

- 左边的函数称为 $\mathrm{J}_m(z)$ 的**母函数**
- 可见，**母函数**在环域 $0<|t|<+\infty$ 内是 t 的解析函数，可以展开为 t 的 **Laurent 级数**，而**展开系数**正好是 **Bessel 函数** $\mathrm{J}_m(z)$
- 上式两边对 z 求导，得到

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m'(z)t^m=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m(z)t^m$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{J}_m(z)t^{m+1}-\mathrm{J}_m(z)t^{m-1}\right]=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{J}_{m-1}(z)t^m-\mathrm{J}_{m+1}(z)t^m\right]$$

- 从而推出**递推关系** $\mathrm{J}_{m-1}(z)-\mathrm{J}_{m+1}(z)=2\mathrm{J}_m'(z)$，与前面的结果一致

§2.5 加法公式

- 利用指数函数的性质，有

$$\exp\left[\frac{x+y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\exp\left[\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

- 两边均用**母函数公式**展开，得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m(x+y)t^m=\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_k(x)\mathrm{J}_l(y)t^{k+l}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}t^m\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_k(x)\mathrm{J}_{m-k}(y)$$

- 第二步令 $m=k+l$，并将每个 t^m 的系数合并成一个**级数**
- 比较两边 t^m 的系数，就得到 **Bessel 函数**的**加法公式**

$$\mathrm{J}_m(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_k(x)\mathrm{J}_{m-k}(y)$$

§2.6 积分表示

令 $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，则 $\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})=\mathrm{i}\sin\phi$，将**母函数公式**

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m(x)t^m \text{ 化为 } \exp(\mathrm{i}x\sin\phi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

这是 ϕ 的**复形式 Fourier 级数**，利用 $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\phi}\,\mathrm{d}\phi=2\pi\delta_{nm}$ 推出

$$\mathrm{J}_m(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_n(x)\delta_{nm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\mathrm{d}\phi$$

这就是 **Bessel 函数**的**积分表示**

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\phi-\mathrm{i}m\phi}\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(x\sin\phi-m\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

它把 Bessel 函数表示成一个**含参数积分**，被积函数是**初等函数**

这是特殊函数积分表示的一般特点

$|\mathrm{J}_m(x)| \leq 1$

- 利用

$$\left|\int_0^\pi \cos(x\sin\phi - m\phi)\,\mathrm{d}\phi\right| \leq \int_0^\pi |\cos(x\sin\phi - m\phi)|\,\mathrm{d}\phi \leq \int_0^\pi \mathrm{d}\phi = \pi$$

- 由 **Bessel 函数**的**积分表示**推出

$$|\mathrm{J}_m(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \cos(x\sin\phi - m\phi)\mathrm{d}\phi\right| \leq \frac{\pi}{\pi}$$

- 即

$$|\mathrm{J}_m(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- 当 $m = 0$ 且 $x = 0$ 时，有 $\mathrm{J}_0(0) = 1$，这是**等号成立**的唯一情况

§2.7 含 Bessel 函数的积分

- 含 Bessel 函数的积分五花八门，相关计算涉及各种各样的技巧
- 这里计算积分 $I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\,\mathrm{d}x, \quad a, b > 0$
- 将积分表示 $\mathrm{J}_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 代入并交换积分次序，得

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b\sin\phi)x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\,\frac{\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b\sin\phi)x}}{a-\mathrm{i}b\sin\phi}\bigg|_0^\infty \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{a-\mathrm{i}b\sin\phi}
\end{aligned}
$$

§2.7 含 Bessel 函数的积分

- 含 Bessel 函数的积分五花八门，相关计算涉及各种各样的技巧
- 这里计算积分 $I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\,\mathrm{d}x, \quad a, b > 0$
- 将积分表示 $\mathrm{J}_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 代入并交换积分次序，得

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b\sin\phi)x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\,\frac{\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b\sin\phi)x}}{a-\mathrm{i}b\sin\phi}\bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{a-\mathrm{i}b\sin\phi}$$

- 这个积分可以用围线积分和留数定理的方法来计算，令 $z \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$
- 有 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\phi$，$\mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，$\mathrm{i}\sin\phi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = \frac{1}{2}(z - z^{-1})$，故

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{a-\mathrm{i}b\sin\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{1}{a-b(z-z^{-1})/2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}$$

围线积分

- 现在计算**围线积分** $I = \dfrac{1}{\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{\mathrm{d}z}{-bz^2 + 2az + b}, \quad a, b > 0$

- 一元二次方程 $-bz^2 + 2az + b = 0$ 的两个实根为

$$z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} > \frac{a + b}{b} > 1$$

- 由于 $z_1 z_2 = \dfrac{a^2 - (a^2 + b^2)}{b^2} = -1$，有 $|z_1| = \dfrac{1}{|z_2|} < 1$

- 被积函数的两个**一阶极点**中只有 $z = z_1$ 位于**单位圆周** $|z| = 1$ 之内，相应**留数**为

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{1}{-bz^2 + 2az + b}, z_1\right) &= \frac{1}{(-bz^2 + 2az + b)'|_{z=z_1}} = \frac{1}{-2bz_1 + 2a} \\
&= \frac{1}{-2(a - \sqrt{a^2 + b^2}) + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

- 从而得到 $\quad I = \dfrac{1}{\pi \mathrm{i}} 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{-bz^2 + 2az + b}, z_1\right) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

积分结果

现在得到**积分结果**

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a, b > 0$$

如果 $b < 0$，由于 $\mathrm{J}_0(x)$ 是**偶函数**，有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(-bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2+(-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

这个结果仍然成立

如果 $b = 0$，则 $\mathrm{J}_0(0) = 1$，有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(0)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{a}$$

这个结果也成立

因此，$b > 0$ **的条件**实际上可以**去掉**

§2.8 本征值问题

对 **Laplace 方程**或 **Helmholtz 方程**在**柱坐标系**中分离变量，在 ρ 方向会遇到**关于 $R(\rho) \equiv y(x)$ 的方程**

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\lambda - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

改写成 **Strum-Liouville 形式**，结合**边界条件**，典型的**本征值问题**为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \dfrac{m^2}{x}y + \lambda x y = 0 \quad (0 < x < a) \\ y(0) = 0 \ (m \neq 0) \text{ 或 } |y(0)| < \infty \ (m = 0), \quad \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha, \beta \geq 0$，但 α 和 β 不同时为 0；$x = 0$ 处的边界条件是**自然边界条件**

与 Strum-Liouville 方程比较可知，

$$k(x) = x \geq 0, \quad q(x) = \frac{m^2}{x} \geq 0, \quad \text{权函数 } \rho(x) = x \geq 0$$

与 **Strum-Liouville 本征值问题**的一般结论，必有 $\lambda \geq 0$

方程的解

由于 $\lambda \geq 0$，可令 $\lambda = k^2$，其中 $k \geq 0$

如果 $k > 0$，设 $z \equiv kx$，$w(z) \equiv y(x)$，则 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{k}{z}$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$，原方程化为

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(k^2 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = k^2 \left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) w\right]$$

方程的解

由于 $\lambda \geq 0$，可令 $\lambda = k^2$，其中 $k \geq 0$

如果 $k > 0$，设 $z \equiv kx$，$w(z) \equiv y(x)$，则 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{k}{z}$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$，原方程化为

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(k^2 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = k^2 \left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) w\right]$$

故 $w(z)$ 满足 m 阶 Bessel 方程 $w'' + \dfrac{1}{z} w' + \left(1 - \dfrac{m^2}{z^2}\right) w = 0$

于是，原方程的两个线性独立解为

$$y(x) = w(z) = \{\mathrm{J}_m(z), \mathrm{N}_m(z)\} = \{\mathrm{J}_m(kx), \mathrm{N}_m(kx)\}$$

$\mathrm{N}_m(kx)$ 在 $x = 0$ 处发散，不符合该处的自然边界条件，应该舍弃，故

$$y(x) = \mathrm{J}_m(kx)$$

注意，$\mathrm{J}_0(0) = 1$ 和 $\mathrm{J}_m(0) = 0$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 满足 $x = 0$ 处的自然边界条件

本征值和本征函数

- 将 $y(x) = \mathrm{J}_m(kx)$ 代入 $x = a$ 处的**边界条件** $\alpha y'(a) + \beta y(a) = 0$，有

$$0 = \alpha y'(a) + \beta y(a) = \left(\alpha \frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(kx)}{\mathrm{d}x} + \beta \mathrm{J}_m(kx)\right)\Bigg|_{x=a} = \alpha k \mathrm{J}'_m(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka)$$

- 这样得到的 $\alpha k \mathrm{J}'_m(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka) = 0$ 是用于确定**本征值** $\lambda = k^2$ 的**超越方程**
- 根据上节关于**零点**的讨论，这个方程具有**无穷多正根** $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$
- 由于 $\mathrm{J}_m(z)$ 的奇偶性与 m 一致，当 m 是**奇数**（**偶数**）时，**超越方程**左边是 k 的**奇函数**（**偶函数**），这意味着 $\{-k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是**根**，即**实根**是**正负成对**出现的

本征值和本征函数

- 将 $y(x) = \mathrm{J}_m(kx)$ 代入 $x = a$ 处的**边界条件** $\alpha y'(a) + \beta y(a) = 0$，有

$$0 = \alpha y'(a) + \beta y(a) = \left(\alpha \frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(kx)}{\mathrm{d}x} + \beta \mathrm{J}_m(kx)\right)\Bigg|_{x=a} = \alpha k \mathrm{J}'_m(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka)$$

- 这样得到的 $\alpha k \mathrm{J}'_m(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka) = 0$ 是用于确定**本征值** $\lambda = k^2$ 的**超越方程**
- 根据上节关于**零点**的讨论，这个方程具有**无穷多正根** $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$
- 由于 $\mathrm{J}_m(z)$ 的奇偶性与 m 一致，当 m 是**奇数**(**偶数**)时，**超越方程**左边是 k 的**奇函数**(**偶函数**)，这意味着 $\{-k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是**根**，即**实根**是**正负成对**出现的
- 但是，**负根**既不能给出新的本征值，也不能给出独立的本征函数，所以是**多余**的
- 事实上，我们在引入 $\lambda = k^2$ 时，已经限制 $k \geq 0$
- 将**正根** $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 从小到大排列，满足 $0 < k_1 < k_2 < \cdots$
- 相应的**本征值**和**本征函数**为

$$\lambda_n = k_n^2, \quad y_n(x) = \mathrm{J}_m(k_n x), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

说明

本征值 $\lambda_n = k_n^2$, **本征函数** $y_n(x) = \mathrm{J}_m(k_n x)$, $n \in \mathbb{N}^+$

- 以上讨论为了记号方便，认为 m 是**固定**的
- 在实际问题中，常常需要把对应于**不同 m 值**的解叠加
- 从而，必须同时处理对应于**不同 m 值**的**一系列**本征值问题
- 为此，应该将**上述正根**记作 $\{k_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，而相应的**本征值**和**本征函数**记作

$$\lambda_{mn} = k_{mn}^2, \quad y_{mn}(x) = \mathrm{J}_m(k_{mn}x), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

说明

本征值 $\lambda_n = k_n^2$, **本征函数** $y_n(x) = \mathrm{J}_m(k_n x)$, $n \in \mathbb{N}^+$

- 以上讨论为了记号方便，认为 m 是**固定**的
- 在实际问题中，常常需要把对应于**不同 m 值**的解叠加
- 从而，必须同时处理对应于**不同 m 值**的**一系列**本征值问题
- 为此，应该将**上述正根**记作 $\{k_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，而相应的**本征值**和**本征函数**记作

$$\lambda_{mn} = k_{mn}^2, \quad y_{mn}(x) = \mathrm{J}_m(k_{mn}x), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 上述求解**未考虑** $k = 0$（即 $\lambda = 0$）
- 实际上，在**第九章 §3** 讨论过，仅当 $\beta = 0$ 且 $m = 0$ 时，$\lambda = 0$ 才是一个本征值
- 于是，对于**第二类齐次边界条件**，$m = 0$ 时需要增加一个**本征值** $\lambda_{00} = 0$ 和相应的**本征函数** $y_{00}(x) = 1$（另一个线性独立解 $y(x) = \ln x$ 在 $x = 0$ 处有**奇性**，舍弃）
- 注意，$\lambda = 0$ 的方程需要单独求解，虽然形式上 $\mathrm{J}_0(k_{00}x) = 1$ 正好是正确的

§2.9–§2.10 本征函数的正交关系和模

- 为了记号方便，我们仍然考虑 m 固定的情况
- 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，本征函数在区间 $[0, a]$ 上满足正交关系

$$\int_0^a y_{n'}(x) y_n(x)\, x\, \mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{J}_m(k_{n'} x) \mathrm{J}_m(k_n x)\, x\, \mathrm{d}x = 0, \quad n' \neq n$$

- 注意权函数 $\rho(x) = x$，所以上式是带权正交

§2.9–§2.10 本征函数的正交关系和模

- 为了记号方便，我们仍然考虑 m 固定的情况
- 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，本征函数在区间 $[0,a]$ 上满足正交关系

$$\int_0^a y_{n'}(x)y_n(x)\,x\,\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{J}_m(k_{n'}x)\mathrm{J}_m(k_n x)\,x\,\mathrm{d}x = 0, \quad n' \neq n$$

- 注意权函数 $\rho(x) = x$，所以上式是带权正交
- 接下来计算本征函数 $y_n(x) = \mathrm{J}_m(k_n x)$ 的模方
- 对 $y_n(x)$ 满足的方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right) - \dfrac{m^2}{x}y_n + k_n^2 x y_n = 0$ 两边同乘以 $xy_n'(x)$，得

$$-k_n^2 x^2 y_n y_n' = x y_n' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x y_n') - m^2 y_n y_n'$$

- 对 x 从 0 到 a 积分，推出

$$-k_n^2 \int_0^a x^2 y_n y_n'\,\mathrm{d}x = \int_0^a x y_n'(x y_n')'\,\mathrm{d}x - m^2 \int_0^a y_n y_n'\,\mathrm{d}x$$

计算本征函数的模方

由 $\mathrm{J}_0(0)=1$ 和 $\mathrm{J}_m(0)=0\ (m\in\mathbb{N}^+)$ 得 $m^2y_n^2(0)=m^2\mathrm{J}_m^2(0)=0\ (m\in\mathbb{N})$，故

$$m^2\int_0^a y_n y_n'\,\mathrm{d}x=m^2\int_0^a y_n\,\mathrm{d}y_n=\frac{m^2}{2}\,y_n^2(x)\Big|_0^a=\frac{m^2}{2}\,y_n^2(a)$$

$$\int_0^a xy_n'(xy_n)'\,\mathrm{d}x=\int_0^a xy_n'\,\mathrm{d}(xy_n')=\frac{1}{2}[xy_n'(x)]^2\Big|_0^a=\frac{a^2}{2}\,y_n'^2(a)$$

$$-k_n^2\int_0^a x^2y_ny_n'\,\mathrm{d}x=\int_0^a xy_n'(xy_n)'\,\mathrm{d}x-m^2\int_0^a y_ny_n'\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\,y_n'^2(a)-\frac{m^2}{2}\,y_n^2(a)$$

计算本征函数的模方

由 $\mathrm{J}_0(0)=1$ 和 $\mathrm{J}_m(0)=0\ (m\in\mathbb{N}^+)$ 得 $m^2y_n^2(0)=m^2\mathrm{J}_m^2(0)=0\ (m\in\mathbb{N})$，故

$$m^2\int_0^a y_n y_n'\,\mathrm{d}x=m^2\int_0^a y_n\,\mathrm{d}y_n=\frac{m^2}{2}\,y_n^2(x)\Big|_0^a=\frac{m^2}{2}\,y_n^2(a)$$

$$\int_0^a xy_n'(xy_n')'\,\mathrm{d}x=\int_0^a xy_n'\,\mathrm{d}(xy_n')=\frac{1}{2}[xy_n'(x)]^2\Big|_0^a=\frac{a^2}{2}\,y_n'^2(a)$$

$$-k_n^2\int_0^a x^2y_ny_n'\,\mathrm{d}x=\int_0^a xy_n'(xy_n')'\,\mathrm{d}x-m^2\int_0^a y_ny_n'\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\,y_n'^2(a)-\frac{m^2}{2}\,y_n^2(a)$$

于是，**本征函数** $y_n(x)$ 的**模方**为

$$\begin{aligned}\|y_n(x)\|^2&\equiv\int_0^a y_n^2(x)\,x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a y_n^2\,\mathrm{d}x^2=\frac{x^2}{2}\,y_n^2(x)\Big|_0^a-\int_0^a x^2y_ny_n'\,\mathrm{d}x\\&=\frac{a^2}{2}\,y_n^2(a)-\frac{1}{k_n^2}\,k_n^2\int_0^a x^2y_ny_n'\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\,y_n^2(a)+\frac{1}{k_n^2}\left[\frac{a^2}{2}\,y_n'^2(a)-\frac{m^2}{2}\,y_n^2(a)\right]\\&=\frac{a^2}{2k_n^2}\,y_n'^2(a)+\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{m^2}{k_n^2}\right)y_n^2(a)\end{aligned}$$

本征函数的模方

- **本征函数** $y_n(x) = \mathrm{J}_m(k_n x)$ 的**模方**

$$\|y_n(x)\|^2 \equiv \int_0^a y_n^2(x)\, x\, \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2k_n^2}\, y_n'^2(a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2}\right) y_n^2(a)$$

可改写为

$$\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2 \equiv \int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_n x)\, x\, \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\, \mathrm{J}_m'^2(k_n a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2}\right) \mathrm{J}_m^2(k_n a)$$

- 注意，$y_n'(a)$ 中的导数是**对自变量 x 求导**
- 而 $\mathrm{J}_m'^2(k_n a)$ 中的导数是**对宗量 $k_n x$ 求导**，故

$$y_n'(a) = \left.\frac{\mathrm{d}y_n(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(k_n x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = k_n \left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(k_n x)}{\mathrm{d}(k_n x)}\right|_{x=a} = k_n \mathrm{J}_m'(k_n a)$$

- 因此，改写时用到 $\dfrac{y_n'^2(a)}{k_n^2} = \mathrm{J}_m'^2(k_n a)$

第一类齐次边界条件

- 对于**第一类齐次边界条件**，$\alpha = 0$
- **超越方程** $\alpha k \mathrm{J}_m'(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka) = 0$ 简化为 $\mathrm{J}_m(ka) = 0$
- 可以用 $\mathrm{J}_m(x)$ 的**正零点** $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将**方程**的**正根**表达成 $k_n = \dfrac{x_{mn}}{a}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$
- 由于 $\mathrm{J}_m(k_n a) = 0$，**本征函数** $\mathrm{J}_m(k_n x)$ **的模方**化为

$$\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{J}_m'^2(k_n a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2}\right)\mathrm{J}_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2}\mathrm{J}_m'^2(x_{mn})$$

第一类齐次边界条件

- 对于**第一类齐次边界条件**，$\alpha = 0$
- **超越方程** $\alpha k \mathrm{J}_m'(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka) = 0$ 简化为 $\mathrm{J}_m(ka) = 0$
- 可以用 $\mathrm{J}_m(x)$ 的**正零点** $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将**方程**的**正根**表达成 $k_n = \dfrac{x_{mn}}{a}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$
- 由于 $\mathrm{J}_m(k_n a) = 0$，**本征函数** $\mathrm{J}_m(k_n x)$ **的模方**化为

$$\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{J}_m'^2(k_n a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2}\right)\mathrm{J}_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2}\mathrm{J}_m'^2(x_{mn})$$

- 利用 $\mathrm{J}_m(x_{mn}) = 0$ 和**递推关系**

$$\begin{aligned} x^m \mathrm{J}_{m-1}(x) &= [x^m \mathrm{J}_m(x)]' = m x^{m-1}\mathrm{J}_m(x) + x^m \mathrm{J}_m'(x) \\ -x^{-m}\mathrm{J}_{m+1}(x) &= [x^{-m}\mathrm{J}_m(x)]' = -m x^{-m-1}\mathrm{J}_m(x) + x^{-m}\mathrm{J}_m'(x) \end{aligned}$$

- 推出 $x_{mn}^m \mathrm{J}_{m-1}(x_{mn}) = x_{mn}^m \mathrm{J}_m'(x_{mn})$ 和 $-x_{mn}^{-m}\mathrm{J}_{m+1}(x_{mn}) = x_{mn}^{-m}\mathrm{J}_m'(x_{mn})$
- 故 $\mathrm{J}_m'^2(x_{mn}) = \mathrm{J}_{m\pm1}^2(x_{mn})$，而**模方**化为 $\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2 = \dfrac{a^2}{2}\mathrm{J}_{m\pm1}^2(x_{mn})$

第二类齐次边界条件

- 对于**第二类齐次边界条件**，$\beta = 0$
- **超越方程** $\alpha k \mathrm{J}_m'(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka) = 0$ 简化为 $\mathrm{J}_m'(ka) = 0$
- 可以用 $\mathrm{J}_m'(x)$ 的**正零点** $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将**方程**的**正根**表达成 $k_n = \dfrac{\tilde{x}_{mn}}{a}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$
- 由于 $\mathrm{J}_m'(k_n a) = 0$，**本征函数** $\mathrm{J}_m(k_n x)$ **的模方**化为

$$\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{J}_m'^2(k_n a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2}\right)\mathrm{J}_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{m^2}{\tilde{x}_{mn}^2}\right)\mathrm{J}_m^2(\tilde{x}_{mn})$$

第二类齐次边界条件

对于**第二类齐次边界条件**，$\beta = 0$

超越方程 $\alpha k \mathrm{J}'_m(ka) + \beta \mathrm{J}_m(ka) = 0$ 简化为 $\mathrm{J}'_m(ka) = 0$

可以用 $\mathrm{J}'_m(x)$ 的**正零点** $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将**方程**的**正根**表达成 $k_n = \dfrac{\tilde{x}_{mn}}{a}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

由于 $\mathrm{J}'_m(k_n a) = 0$，**本征函数** $\mathrm{J}_m(k_n x)$ **的模方**化为

$$\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{J}'^2_m(k_n a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2}\right)\mathrm{J}_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{m^2}{\tilde{x}_{mn}^2}\right)\mathrm{J}_m^2(\tilde{x}_{mn})$$

注 严格来说，以上记号 k_n 应该记作 k_{mn}，**本征函数** $y_n(x) = \mathrm{J}_m(k_n x)$ 应该记作 $y_{mn}(x) = \mathrm{J}_m(k_{mn} x)$

对于**第二类齐次边界条件**和 $m = 0$ 的情况，需要增加一个**本征值** $\lambda_{00} = 0$ 和相应的**本征函数** $y_{00}(x) = 1$，该本征函数的**模方**为

$$\|y_{00}(x)\|^2 = \int_0^a x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

§2.11 广义 Fourier 级数

作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**本征函数族** $\{\mathrm{J}_m(k_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在**区间** $[0, a]$ 上是**完备**的

也就是说，区间 $[0, a]$ 上任何**解析良好**的**函数** $f(x)$，如果满足与本征值问题**相同**的**边界条件**，就一定可以展开为**广义 Fourier 级数**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{J}_m(k_n x), \quad 0 \le x \le a$$

利用**正交关系**，求得**展开系数**为

$$f_n = \frac{1}{\|\mathrm{J}_m(k_n x)\|^2} \int_0^a f(x) \, \mathrm{J}_m(k_n x) \, x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

注意右边积分包含**权函数** $\rho(x) = x$

§2.12 应用

例 无穷长均匀导热圆柱体，半径为 ρ_0，侧面保持温度为零度，柱内的初始温度分布为已知函数 $f(\rho,\phi)$，求柱内各处的温度变化

采用柱坐标系，以圆柱的对称轴为 z 轴，任取轴上一点为原点

柱内的温度分布 $u(\boldsymbol{r},t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = 0 \quad (\rho < \rho_0,\ t > 0) \\ u\big|_{\rho=\rho_0} = 0 \\ u\big|_{t=0} = f(\rho,\phi) \end{cases}$$

§2.12 应用

例 无穷长均匀导热圆柱体，半径为 ρ_0，侧面保持温度为零度，柱内的初始温度分布为已知函数 $f(\rho,\phi)$，求柱内各处的温度变化

采用柱坐标系，以圆柱的对称轴为 z 轴，任取轴上一点为原点

柱内的温度分布 $u(\boldsymbol{r},t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = 0 \quad (\rho < \rho_0,\ t > 0) \\ u\big|_{\rho=\rho_0} = 0 \\ u\big|_{t=0} = f(\rho,\phi) \end{cases}$$

分离变量，令 $u(\boldsymbol{r},t) = v(\boldsymbol{r})T(t)$，代入热传导方程，得

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = v(\boldsymbol{r})T'(t) - a^2 T(t)\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) = 0$$

即 $\dfrac{\nabla^2 v}{v} = \dfrac{T'}{a^2 T} \equiv -\lambda$，其中 λ 为常数

分离变量

- 得到**常微分方程** $T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$ 和**本征值问题** $\begin{cases}\nabla^2 v+\lambda v=0, & \rho<\rho_0\\ v\big|_{\rho=\rho_0}=0\end{cases}$
- 其中 $\rho=\rho_0$ 处**边界条件**来自 $u\big|_{\rho=\rho_0}=0$
- 由于圆柱**无穷长**，**初始条件**和**边界条件**均**与 z 无关**，所以 u 和 v 也**与 z 无关**
- 进一步分离变量，令 $v(\boldsymbol{r})=R(\rho)\Phi(\phi)$

分离变量

- 得到**常微分方程** $T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$ 和**本征值问题** $\begin{cases}\nabla^2 v+\lambda v=0, & \rho<\rho_0\\ v\big|_{\rho=\rho_0}=0\end{cases}$
- 其中 $\rho=\rho_0$ 处**边界条件**来自 $u\big|_{\rho=\rho_0}=0$
- 由于圆柱**无穷长**，**初始条件**和**边界条件**均**与 z 无关**，所以 u 和 v 也**与 z 无关**
- 进一步分离变量，令 $v(\boldsymbol{r})=R(\rho)\Phi(\phi)$，代入**方程**，得

$$\nabla^2 v+\lambda v=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\lambda v=R''\Phi+\frac{R'\Phi}{\rho}+\frac{R\Phi''}{\rho^2}+\lambda R\Phi=0$$

- 即 $\dfrac{\rho^2}{R}\left(R''+\dfrac{R'}{\rho}+\lambda R\right)=-\dfrac{\Phi''}{\Phi}\equiv\mu$，其中 μ 为**常数**
- 于是得到**方程** $\Phi''+\mu\Phi=0$，结合**周期性边界条件** $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$，解得

$$\mu=m^2,\quad \Phi(\phi)=\{\cos m\phi,\sin m\phi\},\quad m\in\mathbb{N}$$

ρ 方向的本征值问题

另一方面，$R(\rho)$ 满足的**本征值问题**为

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{\rho} R' + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0, \quad 0 < \rho < \rho_0 \\ R(0) = 0 \ (m \neq 0) \text{ 或 } |R(0)| < \infty \ (m = 0) \\ R(\rho_0) = 0 \end{cases}$$

其中，$\rho = 0$ 处的边界条件是**自然边界条件**

$\rho = \rho_0$ 处**第一类齐次边界条件**则来自 $v\big|_{\rho=\rho_0} = 0$

根据前面 **§2.8** 和 **§2.10** 的讨论，对于**给定的 m 值**，**本征值**为

$$\lambda_{mn} = k_{mn}^2, \quad k_{mn} = \frac{x_{mn}}{\rho_0}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathrm{J}_m(x)$ 的**正零点**，相应的**本征函数**为

$$R_{mn}(\rho) = \mathrm{J}_m(k_{mn}\rho), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

一般解

🐯 将**本征值** $\lambda_{mn} = k_{mn}^2$ 代回 $T(t)$ 的方程 $T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0$，解得

$$T_{mn}(t) = \exp(-\lambda_{mn} a^2 t)$$

🦁 将**各本征解**叠加，得到**一般解**为

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \mathrm{J}_0(k_{0n}\rho) \exp(-\lambda_{0n} a^2 t) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)(A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi) \exp(-\lambda_{mn} a^2 t) \end{aligned}$$

🐻 代入**初始条件**，得

$$u\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \mathrm{J}_0(k_{0n}\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)(A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi) = f(\rho, \phi)$$

🦄 这是**双重 Fourier 展开式**

Fourier 展开式的系数公式

$$f(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)(A_{mn}\cos m\phi+B_{mn}\sin m\phi)$$

对于 ϕ 是**普通的 Fourier 展开式**，根据**系数公式**，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\,\mathrm{d}\phi\\ \sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad m\in\mathbb{N}^+\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad m\in\mathbb{N}^+\end{aligned}$$

在以上各式中，右边是 ρ **的函数**，左边是其**广义 Fourier 展开式**

根据 **§2.11** 的**系数公式**，可以得到 A_{0n}、A_{mn} 和 B_{mn} 的积分表示式

系数的积分表达式

- 利用前面推出的 $\|\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)\|^2 = \dfrac{\rho_0^2}{2}\,\mathrm{J}_{m+1}^2(x_{mn})$ 和**权函数**，将系数表达为

$$A_{0n} = \frac{1}{\pi\rho_0^2\mathrm{J}_1^2(x_{0n})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,f(\rho,\phi),\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi\rho_0^2\mathrm{J}_{m+1}^2(x_{mn})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,f(\rho,\phi)\cos m\phi,\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi\rho_0^2\mathrm{J}_{m+1}^2(x_{mn})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,f(\rho,\phi)\sin m\phi,\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

- 如果给定 $f(\rho,\phi)$ 的具体形式，那么原则上可以由以上各式计算系数
- 然后代回**一般解**，就得到最后的结果

系数的积分表达式

- 利用前面推出的 $\|\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)\|^2 = \dfrac{\rho_0^2}{2}\,\mathrm{J}_{m+1}^2(x_{mn})$ 和**权函数**，将系数表达为

$$A_{0n} = \frac{1}{\pi\rho_0^2\mathrm{J}_1^2(x_{0n})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,f(\rho,\phi),\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi\rho_0^2\mathrm{J}_{m+1}^2(x_{mn})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,f(\rho,\phi)\cos m\phi,\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi\rho_0^2\mathrm{J}_{m+1}^2(x_{mn})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{J}_m(k_{mn}\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,f(\rho,\phi)\sin m\phi,\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

- 如果给定 $f(\rho,\phi)$ 的具体形式，那么原则上可以由以上各式计算系数
- 然后代回**一般解**，就得到最后的结果
- 容易看出，当 $t\to\infty$ 时，$T_{mn}(t)=\exp(-\lambda_{mn}a^2t)$ 表明 $u(\rho,\phi,t)\to 0$
- 即**柱内温度分布**达到**侧面保持的温度**，也就是**环境的温度**
- 这一点与**初始温度分布** $f(\rho,\phi)$ 的具体形式**无关**

特例 1

💚 **特例 1** 如果 $f(\rho,\phi)=f(\rho)$ **与** ϕ **无关**，那么，由

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, f(\rho)\cos m\phi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, f(\rho)\sin m\phi=0$$

得

$$A_{mn}=B_{mn}=0\quad(m,n\in\mathbb{N}^+)$$

🐚 结果简化为

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)\exp(-\lambda_{0n}a^2t)$$

🐙 其中

$$A_{0n}=\frac{2}{\rho_0^2\mathrm{J}_1^2(x_{0n})}\int_0^{\rho_0}\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)f(\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

特例 2

💙 **特例 2** 如果在**特例 1** 的条件下，进一步给定 $f(\rho) = u_0$，其中 u_0 是**常数**

🦀 那么，作**变量替换** $x = k_{0n}\rho$，利用**递推关系** $[x\mathrm{J}_1(x)]' = x\mathrm{J}_0(x)$ 推出

$$\int_0^{\rho_0} \rho\,\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{k_{0n}^2}\int_0^{k_{0n}\rho_0} x\,\mathrm{J}_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_{0n}^2}\,x\,\mathrm{J}_1(x)\Big|_0^{k_{0n}\rho_0}$$

$$= \frac{\rho_0}{k_{0n}}\,\mathrm{J}_1(k_{0n}\rho_0) = \frac{\rho_0^2}{x_{0n}}\,\mathrm{J}_1(x_{0n})$$

🦐 其中 $x_{0n} = k_{0n}\rho_0$ 是 $\mathrm{J}_0(x)$ 的**正零点**，故

$$A_{0n} = \frac{2}{\rho_0^2\mathrm{J}_1^2(x_{0n})}\int_0^{\rho_0} u_0\,\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{2u_0}{\rho_0^2\,\mathrm{J}_1^2(x_{0n})}\,\frac{\rho_0^2}{x_{0n}}\,\mathrm{J}_1(x_{0n}) = \frac{2u_0}{x_{0n}\,\mathrm{J}_1(x_{0n})}$$

🦞 结果简化为

$$u(\rho,t) = 2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{J}_0(k_{0n}\rho)}{x_{0n}\,\mathrm{J}_1(x_{0n})}\exp(-\lambda_{0n}a^2t)$$

§3 虚宗量 Bessel 函数

- 在柱坐标系中对常见的数理方程分离变量
- 除了遇到 **Bessel 方程** $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 之外，还会遇到下列方程

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

- 这称为 ν **阶虚宗量 Bessel 方程**，物理上遇到的通常是 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况
- 令 $t = \mathrm{i}x$，则 $\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{i}}{t}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，那么这个方程可以改写为

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\mathrm{i}^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \mathrm{i}^2\left[\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)y\right]$$

- 从而得到**以 t 为自变量的 ν 阶 Bessel 方程** $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)y = 0$
- 所以它的解是柱函数 $y(t) = Z_\nu(t)$，即 ν 阶的虚宗量柱函数 $Z_\nu(\mathrm{i}x)$

虚宗量柱函数

- 应该指出，柱函数的宗量本来就可以是复数，所以 $Z_\nu(\mathrm{i}x)$ 和 $Z_\nu(x)$ 没有本质区别
- 那么人们为什么要专门定义虚宗量柱函数呢？这有两个原因
- 第一，对于物理问题，x 通常是实数，那么 $\mathrm{i}x$ 就是纯虚数
- 宗量为纯虚数时，柱函数的性质与宗量为实数时颇为不同，类似双曲函数与三角函数的区别 [$\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$ ， $\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x$]
- 第二，作为物理问题的解，宗量为纯虚数的柱函数与宗量为实数的柱函数是最常见的两种情况，两者均受到重视
- 为了便于应用，需要对 $Z_\nu(\mathrm{i}x)$ 乘以恰当的系数，使得 x 为实数时方程的解 $y(x)$ 也是实数
- 为此，人们定义了两类虚宗量 **Bessel 函数**，以下分别讨论
- 虚宗量 Bessel 函数也称为变型 **Bessel 函数**

§3.1 虚宗量 Bessel 函数

ν **阶虚宗量 Bessel 函数**定义为

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}\mathrm{J}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}x)$$

它是 ν **阶虚宗量 Bessel 方程** $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 的解，注意 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$

当 $k \in \mathbb{N}$ 时，有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})^{2k+\nu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = \cos k\pi + \mathrm{i}\sin k\pi = (-)^k$

由 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的级数形式推出 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 的级数形式

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

当 x 和 ν 都是**实数**时，$\mathrm{I}_\nu(x)$ 的**函数值**为**实数**，所以上述定义是方便的

$\mathrm{I}_\nu(x)$ 也称为**变型 Bessel 函数**、**第一类虚宗量 Bessel 函数**或**第一类变型 Bessel 函数**

整数阶虚宗量 Bessel 函数

当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，由于 $\Gamma(k+m+1) = (k+m)!$，$\mathrm{I}_\nu(x)$ 的级数简化为

$$\mathrm{I}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

当 $x \geq 0$ 时，$\mathrm{I}_m(x)$ 是**单调递增函数**，这与 $\mathrm{J}_m(x)$ 的**衰减振荡**图像截然不同

粗略地说，$\mathrm{J}_m(x)$ 类似于**三角函数**，而 $\mathrm{I}_m(x)$ 类似于**指数函数**

由 $\mathrm{I}_m(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^{2k+m}}{k!(k+m)!}$ 可见，

$$\mathrm{I}_0(0) = 1, \quad \mathrm{I}_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$\mathrm{I}_0(x)$、$\mathrm{I}_1(x)$ 和 $\mathrm{I}_2(x)$ 的图像见右图

而 $\mathrm{I}_m(x)$ $(m \geq 3)$ 的图像与 $\mathrm{I}_1(x)$ 和 $\mathrm{I}_2(x)$ 类似

对 $\mathrm{I}_{-m}(x)$ 的级数形式作**变量替换** $k \to k+m$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}\end{aligned}$$

可见 $\mathrm{I}_{-m}(x) = \mathrm{I}_m(x)$，即**负整数阶**和**正整数阶**的**虚宗量 Bessel 函数**是**相同**的

递推关系

对 $\mathrm{I}_{-m}(x)$ 的级数形式作**变量替换** $k \to k+m$，得

$$\mathrm{I}_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

可见 $\mathrm{I}_{-m}(x) = \mathrm{I}_m(x)$，即**负整数阶**和**正整数阶**的**虚宗量 Bessel 函数**是**相同**的

利用 $\mathrm{J}_\nu(x)$ **递推关系** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(x)] = -x^{-\nu} \mathrm{J}_{\nu+1}(x)$

可以推出**虚宗量 Bessel 函数** $\mathrm{I}_\nu(x)$ 的**递推关系**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{I}_\nu(x)] = x^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} \mathrm{I}_\nu(x)] = x^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+1}(x)$$

第二个递推关系与**柱函数递推关系**的形式不同，根据定义，$\mathrm{I}_\nu(x)$ **不是**柱函数

令 $\nu = 0$，得到**第二个递推关系**的特例 $\mathrm{I}_0'(x) = \mathrm{I}_1(x)$

§3.2 虚宗量 Hankel 函数

ν 阶虚宗量 Hankel 函数定义为

$$\mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x) - \mathrm{I}_\nu(x)\right]$$

Hector Munro Macdonald
(1865–1935)

它是虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 的另一个解，与 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 线性独立

它也称为第二类虚宗量 Bessel 函数、第二类变形 Bessel 函数或 Macdonald 函数

§3.2 虚宗量 Hankel 函数

ν 阶虚宗量 Hankel 函数定义为

$$\mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x) - \mathrm{I}_\nu(x)\right]$$

Hector Munro Macdonald (1865–1935)

它是虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 的另一个解，与 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 线性独立

它也称为第二类虚宗量 Bessel 函数、第二类变形 Bessel 函数或 Macdonald 函数

可以证明 $\mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}}{2}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}x)$，这是它称为虚宗量 Hankel 函数的原因

由定义易知，$\mathrm{K}_{-\nu}(x) = \mathrm{K}_\nu(x)$。此外，$\mathrm{K}_\nu(x)$ 的递推关系为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{K}_\nu(x)] = -x^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}\mathrm{K}_\nu(x)] = -x^{-\nu}\mathrm{K}_{\nu+1}(x)$$

第一条递推关系与柱函数递推关系的形式不同，因而 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 也**不是**柱函数

整数阶虚宗量 Hankel 函数

当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，$\mathrm{K}_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x) - \mathrm{I}_\nu(x)\right]$ 成为 $\dfrac{0}{0}$ 型，此时定义

$$\mathrm{K}_m(x) = \lim_{\nu\to m} \mathrm{K}_\nu(x)$$

$\mathrm{K}_0(x)$、$\mathrm{K}_1(x)$ 和 $\mathrm{K}_2(x)$ 的图像见右下图，$\mathrm{K}_m(x)$ $(m \geq 3)$ 的图像是类似的

整数阶虚宗量 Hankel 函数

- 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，$\mathrm{K}_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x) - \mathrm{I}_\nu(x)\right]$ 成为 $\dfrac{0}{0}$ 型，此时定义

$$\mathrm{K}_m(x) = \lim_{\nu\to m} \mathrm{K}_\nu(x)$$

- $\mathrm{K}_0(x)$、$\mathrm{K}_1(x)$ 和 $\mathrm{K}_2(x)$ 的图像见右下图，$\mathrm{K}_m(x)$ $(m \geq 3)$ 的图像是类似的
- 现在考虑**虚宗量 Bessel 方程** $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \left(1 + \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 的解
- 可以假设 $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$ 而不失一般性
- 如果 $\nu \notin \mathbb{N}$，则当 $x \to 0$ 时，有

$$\mathrm{I}_\nu(x) \to 0, \quad \mathrm{I}_{-\nu}(x) \to \infty, \quad \mathrm{K}_\nu(x) \to \infty$$

- 若**求解区间包含** $x = 0$，应当**舍弃** $\mathrm{K}_\nu(x)$
- 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，同样可得

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{K}_m(x) = \infty$$

- 所以结论也是**舍弃** $\mathrm{K}_m(x)$

§3.3 渐近形式

🧘 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 的**渐近形式**可以通过 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 的渐近形式导出，结果为

$$\mathrm{I}_\nu(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad x \to \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{K}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \to \infty, \quad -\pi < \arg x < \pi$$

🏃 需要用到的主要是**实轴**上 $x \to +\infty$ 的情况

🕺 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 的定义使得 $x \to +\infty$ 时不出现发散的部分，从而 $\mathrm{K}_\nu(x) \to 0$

💃 这使得 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 成为**柱外问题**的**恰当解**

§3.4 应用

例 均匀导热圆柱体，半径为 a，高为 h，侧面有恒定热流 $q(z)$ 流入，上下底保持常数温度 u_0，求柱内的稳定温度分布

采用柱坐标系，以圆柱对称柱为 z 轴，方向自下底指向上底

边界条件与 ϕ 无关，故柱内的稳定温度分布 $u(\boldsymbol{r}) = u(\rho, z)$ 也与 ϕ 无关，记热导率为 k，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a,\ 0 < z < h) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = \dfrac{q(z)}{k} \\ u\big|_{z=0} = u_0, \quad u\big|_{z=h} = u_0 \end{cases}$$

§3.4 应用

例 均匀导热圆柱体，半径为 a，高为 h，侧面有恒定热流 $q(z)$ 流入，上下底保持常数温度 u_0，求柱内的稳定温度分布

采用柱坐标系，以圆柱对称柱为 z 轴，方向自下底指向上底

边界条件与 ϕ 无关，故柱内的稳定温度分布 $u(\boldsymbol{r}) = u(\rho, z)$ 也与 ϕ 无关，记热导率为 k，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a,\ 0 < z < h) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = \dfrac{q(z)}{k} \\ u\big|_{z=0} = u_0, \quad u\big|_{z=h} = u_0 \end{cases}$$

为了将边界条件齐次化，令 $u(\rho, z) = u_0 + v(\rho, z)$，则

$$\nabla^2 v = \nabla^2(u - u_0) = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = \left.\frac{\partial(u-u_0)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = \frac{q(z)}{k}$$

$$v\big|_{z=0} = u\big|_{z=0} - u_0 = 0, \quad v\big|_{z=h} = u\big|_{z=h} - u_0 = 0$$

分离变量

现在，$v(\rho, z)$ 满足的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 v = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a,\ 0 < z < h) \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = \dfrac{q(z)}{k} \\ v\big|_{z=0} = 0, \quad v\big|_{z=h} = 0 \end{cases}$$

分离变量，令 $v(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$，代入 **Laplace 方程**，得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = R''Z + \frac{R'Z}{\rho} + RZ'' = 0$$

即 $\dfrac{R''}{R} + \dfrac{R'}{\rho R} = -\dfrac{Z''}{Z} \equiv \lambda$，其中 λ 是**常数**

从而，$R(\rho)$ 满足常微分方程 $R'' + \dfrac{1}{\rho}R' - \lambda R = 0$

本征值问题

- 另一方面，$Z(z)$ 满足**本征值问题**

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0 \end{cases}$$

- 其中**边界条件**来自 $v\big|_{z=0} = 0$ 和 $v\big|_{z=h} = 0$
- 这个本征值问题是我们所熟悉的，**本征值**和**本征函数**为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{h}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

本征值问题

另一方面，$Z(z)$ 满足**本征值问题**

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0 \end{cases}$$

其中**边界条件**来自 $v\big|_{z=0} = 0$ 和 $v\big|_{z=h} = 0$

这个本征值问题是我们所熟悉的，**本征值**和**本征函数**为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{h}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

将**本征值** λ_n 代回 $R(\rho)$ 的方程，令 $x \equiv \dfrac{n\pi}{h}\rho$，$y(x) \equiv R(\rho)$，则

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n\pi}{h}\frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{n\pi}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 R = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\right)$$

一般解

- 可见，$y(z)$ 满足 0 **阶虚宗量 Bessel 方程** $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$
- 因此，**两个线性独立解**是

$$R_n(\rho) = y(x) = \{\mathrm{I}_0(x), \mathrm{K}_0(x)\} = \left\{\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right), \mathrm{K}_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)\right\}$$

- 但是，$\mathrm{K}_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)$ 在 $\rho = 0$ 处**有奇性**，应该**舍弃**，故

$$R_n(\rho) = \mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)$$

- 于是，**一般解**可取为

$$v(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\mathrm{I}_0(n\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_1(n\pi a/h)} \sin\frac{n\pi z}{h}$$

- 其中分母引入 $\mathrm{I}_1(n\pi a/h)$ 是为了下面的方便

定解问题的解

- 由**递推关系** $\mathrm{I}_0'(x)=\mathrm{I}_1(x)$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{I}_0\left(\dfrac{n\pi\rho}{h}\right)=\dfrac{n\pi}{h}\mathrm{I}_0'\left(\dfrac{n\pi\rho}{h}\right)=\dfrac{n\pi}{h}\mathrm{I}_1\left(\dfrac{n\pi\rho}{h}\right)$
- 将**一般解**代入 $\rho=a$ 处的**边界条件**，得

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mathrm{I}_1(n\pi a/h)}\left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_0(n\pi\rho/h)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=a}\sin\frac{n\pi z}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi z}{h}=\frac{q(z)}{k}$$

定解问题的解

由**递推关系** $\mathrm{I}_0'(x)=\mathrm{I}_1(x)$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{I}_0\left(\dfrac{n\pi\rho}{h}\right)=\dfrac{n\pi}{h}\mathrm{I}_0'\left(\dfrac{n\pi\rho}{h}\right)=\dfrac{n\pi}{h}\mathrm{I}_1\left(\dfrac{n\pi\rho}{h}\right)$

将**一般解**代入 $\rho=a$ 处的**边界条件**，得

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mathrm{I}_1(n\pi a/h)}\left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_0(n\pi\rho/h)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=a}\sin\frac{n\pi z}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi z}{h}=\frac{q(z)}{k}$$

本征函数模方是 $\left\|\sin\dfrac{n\pi z}{h}\right\|^2=\dfrac{h}{2}$，系数公式为 $A_n\dfrac{n\pi}{h}=\dfrac{2}{h}\displaystyle\int_0^h\frac{q(z)}{k}\sin\frac{n\pi z}{h}\,\mathrm{d}z$

从而，一般解系数表达为 $A_n=\dfrac{2}{n\pi k}\displaystyle\int_0^h q(z)\sin\frac{n\pi z}{h}\,\mathrm{d}z$

如果给出 $q(z)$ 的具体形式，那么原则上可以由上式计算出各个系数，然后再代回

解式 $v(\rho,z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\mathrm{I}_0(n\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_1(n\pi a/h)}\sin\frac{n\pi z}{h}$

最终，**原定解问题的解**为 $u(\rho,z)=u_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\mathrm{I}_0(n\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_1(n\pi a/h)}\sin\frac{n\pi z}{h}$

特例

❤️ **特例** 如果 $q(z) = q_0 \sin \dfrac{\pi z}{h}$，其中 q_0 是**常数**，则 $\rho = a$ 处的**边界条件**化为

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi z}{h} = \frac{q(z)}{k} = \frac{q_0}{k} \sin \frac{\pi z}{h}$$

👩🏻‍🚀 比较两边系数，得 $A_1 \dfrac{\pi}{h} = \dfrac{q_0}{k}$，即

$$A_1 = \frac{q_0 h}{\pi k}, \quad A_n = 0 \ (n \geq 2)$$

⛪ 从而，结果简化为

$$u(\rho, z) = u_0 + \frac{q_0 h}{\pi k} \frac{\mathrm{I}_0(\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_1(\pi a/h)} \sin \frac{\pi z}{h}$$

特例

❤️ **特例** 如果 $q(z) = q_0 \sin \dfrac{\pi z}{h}$，其中 q_0 是**常数**，则 $\rho = a$ 处的**边界条件**化为

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi z}{h} = \frac{q(z)}{k} = \frac{q_0}{k} \sin \frac{\pi z}{h}$$

👩🏻‍🚀 比较两边系数，得 $A_1 \dfrac{\pi}{h} = \dfrac{q_0}{k}$，即

$$A_1 = \frac{q_0 h}{\pi k}, \quad A_n = 0 \ (n \geq 2)$$

⛪ 从而，结果简化为

$$u(\rho, z) = u_0 + \frac{q_0 h}{\pi k} \frac{\mathrm{I}_0(\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_1(\pi a/h)} \sin \frac{\pi z}{h}$$