

量子场论

第6章 量子场的相互作用

6.5节 散射截面和衰变宽度

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024年1月22日



6.5 节 散射截面和衰变宽度

没有相互作用时, S 算符就是恒等算符 \mathbb{I} , S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle$

存在相互作用时, $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符, 因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$

其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项  S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | iT | i \rangle$

右边第一项意味着, 即使理论中存在相互作用, 初态也有一定概率自由地演化, 也就是说, 初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见, S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $iT_{fi} \equiv \langle f | iT | i \rangle$

6.5 节 散射截面和衰变宽度

没有相互作用时， S 算符就是恒等算符 \mathbb{I} ， S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle$

存在相互作用时， $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$

其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项  S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | iT | i \rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见， S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $iT_{fi} \equiv \langle f | iT | i \rangle$

由于能动量守恒定律，初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 必定等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ ，这意味着 T 矩阵元的形式为

$$iT_{fi} = \langle f | iT | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$$

 四维 δ 函数体现了能动量守恒定律； \mathcal{M} 是 Lorentz 不变的，称为不变矩阵元，或不变散射振幅 (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数

6.5.1 小节 跃迁概率

发生相互作用时， $i \rightarrow f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$ ，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式

$$\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$$

6.5.1 小节 跃迁概率

发生相互作用时， $i \rightarrow f$ 的**跃迁概率**可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$ ，**分子**为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$

故 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \tilde{V}\tilde{T}$ ， \tilde{V} 是**空间区域的体积**， \tilde{T} 是**时间范围的长度**

对于**全空间全时间积分**， \tilde{V} 和 \tilde{T} 趋于无穷大

于是推出 $|T_{fi}|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$

对于时空坐标的函数 $f(x)$ ，将 Fourier 变换约定为

$$\tilde{f}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x)$$

Fourier 逆变换为 $f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{f}(p)$

初态和末态

 现在讨论 **2 体初态** 到 **n 体末态** 的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} ，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n 个粒子** 的末态 $|f\rangle$

 设**初态**中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

 此处省略了产生算符的螺旋度指标（或者说，**自旋指标**）

 $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到零

初态和末态

 现在讨论 **2 体初态** 到 **n 体末态** 的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} ，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n 个粒子** 的末态 $|f\rangle$

 设**初态**中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

 此处省略了产生算符的螺旋度指标（或者说，**自旋指标**）

 $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**

 类似地，**末态**可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2E_j} a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \right) |0\rangle, \quad E_j = p_j^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}$$

 其中 \mathbf{p}_j ($j = 1, \dots, n$) 是 **n 个末态粒子**的动量

 此时，初态和末态的**四维总动量**分别是 $p_i^\mu = p_{\mathcal{A}}^\mu + p_{\mathcal{B}}^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=1}^n p_j^\mu$

初末态内积



当 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$



这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 的两个量子场所对应的**真空态**



参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$



利用 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} | \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$



于是得到 $\langle i | i \rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} | \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

初末态内积



当 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$



这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 的两个量子场所对应的真空态



参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$



利用 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} | \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$



于是得到 $\langle i | i \rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} | \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$



当 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是由同一量子场描述的全同粒子时，若 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \neq \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ ，也能推出这个结果



$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6 [\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)]$$



如果末态不包含全同粒子，同理可得 $\langle f | f \rangle = \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

 从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

 系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

 从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

 系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

 此处**四维 δ 函数**可以分解为

$$\delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) = \delta^{(3)} \left(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right) \delta \left(E_A + E_B - \sum_{j=1}^n E_j \right)$$

 在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取**任意满足运动学要求**的值，而**能动量守恒定律**对应的**运动学条件** $p_A^\mu + p_B^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu = 0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

 考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

 为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

一维动量相空间

 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

 考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

 为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

 作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

 结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ ，故 $\exp(ipL) = 1$

 这意味着 $pL = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)，因此动量本征值是 $p_k = 2k\pi/L$ ($k \in \mathbb{Z}$)

一维动量相空间

 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

 考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

 为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

 作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

 结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ ，故 $\exp(ipL) = 1$

 这意味着 $pL = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)，因此动量本征值是 $p_k = 2k\pi/L$ ($k \in \mathbb{Z}$)

 当 $L \rightarrow \infty$ 时，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \rightarrow dp, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$



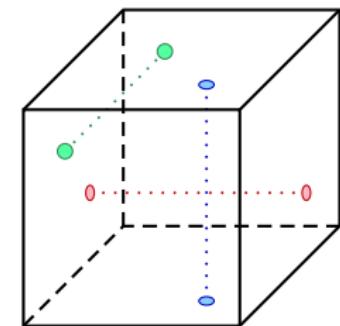
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

单位时间内跃迁概率

 推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

 满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

 当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$



单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

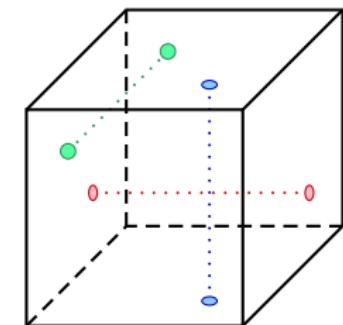
满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$

考虑 n 个末态粒子**所有动量取值**，对 $R_{\{p_j\}}$ 作**末态相空间积分**，得到**单位时间内** $2 \rightarrow n$ 散射过程的**跃迁概率**

$$\begin{aligned} R &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

2.3.4 小节的讨论表明，上式中**相空间体积元** $\frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 **Lorentz 不变**的，而且相应积分正好囊括了满足**质壳条件且能量为正**的所有物理动量



末态对称性因子

 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立

 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以相应的末态对称性因子 S** ，从而**避免量子态的重复计算**

 如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$S = \prod_k n_k!$$

 单位时间跃迁概率变成

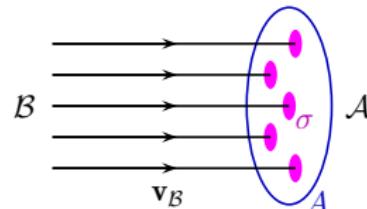
$$R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

6.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，固定靶 (fixed target) 由静止的 A 粒子组成，束流 (beam) 由 B 粒子组成

设束流中每个 B 粒子的运动速度相同，记为 v_B ，按照狭义相对论， $v_B \equiv p_B/E_B$



6.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，固定靶 (fixed target) 由静止的 A 粒子组成，束流 (beam) 由 B 粒子组成

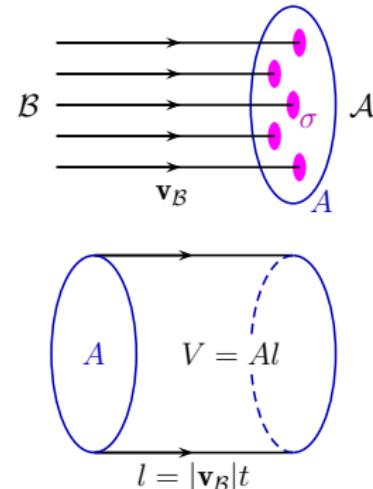
设束流中每个 B 粒子的运动速度相同，记为 v_B ，按照狭义相对论， $v_B \equiv p_B/E_B$

记束流的横截面积为 A ，则 t 时间内束流的一个横截面经过的体积为 $V = A|v_B|t$

再设束流中 B 粒子的数密度为 n_B ，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_B = n_B V = n_B A|v_B|t$

在单位时间内穿过单位面积的 B 粒子数称为流密度，记作 j_B ，通过下式计算，

$$j_B = \frac{N_B}{At} = \frac{n_B A |v_B| t}{At} = n_B |v_B|$$

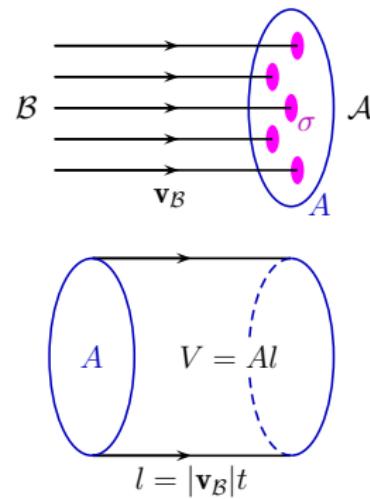


散射截面

考慮流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定



散射截面

考慮流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

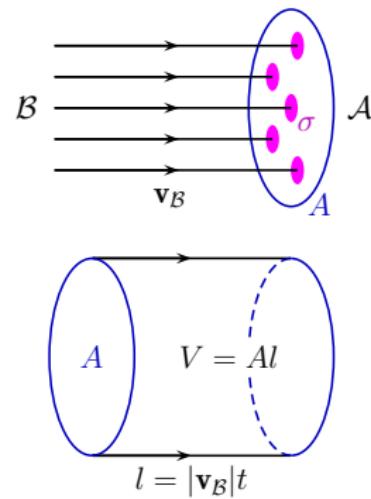
散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

带词头的小单位满足 $1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb}$

从而 $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb} = 3.894 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$



散射截面

摩托车 考虑流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

葡萄 这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

西红柿 散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

樱桃 截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

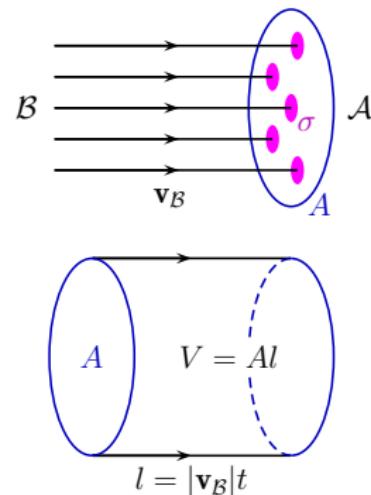
花生 带词头的小单位满足 $1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb}$

土豆 从而 $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb} = 3.894 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$

梨 单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_A j_B \sigma}{V} = \frac{N_A n_B |\mathbf{v}_B| \sigma}{V} = n_A n_B \sigma |\mathbf{v}_B|$$

猕猴桃 $n_A = N_A/V$ 相当于 A 粒子在体积 V 中的数密度



A 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子，因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

 单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

 将 $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 代入

 得到 $2 \rightarrow n$ 散射过程的截面表达式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_A n_B |\mathbf{v}_B|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_B|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_B|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

A 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上，那么，可以看作在全空间体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子，因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

将 $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 代入

得到 $2 \rightarrow n$ 散射过程的截面表达式

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_A n_B |\mathbf{v}_B|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_B|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_B|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

上式对 A 粒子静止的参考系成立

需要将上式推广到任意惯性系，以适用于 A 和 B 处在任意运动状态的情况

为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量

上式最后一行中除第二个因子 $(4E_A E_B |\mathbf{v}_B|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的

Lorentz 不变的散射截面

在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 的相对速度

 $v_{\mathcal{A}} \equiv \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$

 然而, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 的相对速度

🥑 $v_{\mathcal{A}} \equiv \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$

🌰 然而, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

🍆 引入 Møller 速度 $v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

🌶 则入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

🍄 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$



Christian Møller
(1904–1980)

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 的相对速度

🥑 $v_{\mathcal{A}} \equiv \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$

🌰 然而, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

🍆 引入 Møller 速度 $v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

🌶 则入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

🍄 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$



Christian Møller
(1904–1980)

⌚ 相应的单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v_{\text{Møl}}$ 也是 Lorentz 不变的

🍋 当 \mathcal{A} 粒子静止时, $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$, 故 $v_{\text{Møl}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{m_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$
 $= \frac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$, 此时散射截面恢复到上一页表达式

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\oslash l}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

👉 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right)$$

👉 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\oslash l}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\oslash l}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

👉 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j)$$

🐠 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\oslash l}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

🐠 如果在**散射截面表达式**中不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$d\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\oslash l}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$$

🐠 注意，计算微分截面时**不需要考虑末态对称性因子** \mathcal{S} ，因而 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \int d\sigma$

🐠 如果**末态不包含全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 1$

Møller 速度与相对速度

讲义中推出了 Møller 速度与 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 粒子运动速度的关系式

$$v_{M\ddot{o}l} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ ，则 $v_{M\ddot{o}l} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{rel}$ ，即 Møller 速度与相对速度相同

入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{rel}$

满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 \mathcal{A} 粒子或 \mathcal{B} 粒子静止

另一种情况是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到

在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

 讲义中推出了 Møller 速度与 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

 如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ ，则 $v_{\text{Møl}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}$ ，即 Møller 速度与相对速度相同

 入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$

 满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 \mathcal{A} 粒子或 \mathcal{B} 粒子静止

 另一种情况是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到

 在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

 当 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$

 在非相对论近似下， $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 确实是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的相对速度

 但是，对于极端相对论极限下的束流对撞， $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 1$ 且 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$

 故 $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 2$ ，它是真空光速的 2 倍，显然不是真正意义的相对速度

质心系

对粒子能动量的实验测量是在实验室参考系中进行的

不过，对于多个粒子组成的系统，在质量中心参考系（简称质心系，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系容易得多

质心系定义为使系统总动量为零的参考系，满足

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

质心系中系统的总能量称为质性能（center-of-mass energy） E_{CM} ，满足

$$E_{CM} = E_A + E_B = \sum_{j=1}^n E_j$$

它是 Lorentz 不变量，因为在质心系中有

$$(p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = E_{CM}^2$$

$2 \rightarrow n$ 散射的运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**, 物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生, 则在其它惯性系中也能发生
- 因此, 利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中, 当末态粒子动量 p_j 都为零时, **质心能最低**, 为 $\sum_j m_j$

$2 \rightarrow n$ 散射的运动学条件

- 1 根据**狭义相对性原理**, 物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 2 如果某个过程能够在**质心系**中发生, 则在其它惯性系中也能发生
- 3 因此, 利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 4 在质心系中, 当末态粒子动量 p_j 都为零时, **质心能最低**, 为 $\sum_j m_j$
- 5 所以, 发生 $2 \rightarrow n$ 散射过程的**运动学条件**是

$$E_{\text{CM}} > \sum_{j=1}^n m_j$$

- 6 即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**
- 7 若 $E_{\text{CM}} = \sum_j m_j$, 则末态相空间体积为零, 散射过程**不能发生**
- 8 可以认为, **质心能** E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

6.5.3 小节 两体散射运动学



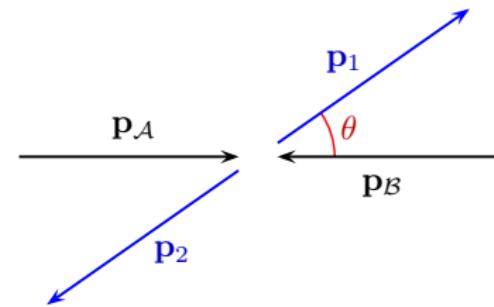
接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子

💡 在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

🕯 可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$

🏮 末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反

🔦 这些动量在质心系中的关系如右图所示



6.5.3 小节 两体散射运动学



接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子



在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$



末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反



这些动量在质心系中的关系如右图所示



θ 是 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_A 之间的夹角，称为散射角

(scattering angle)



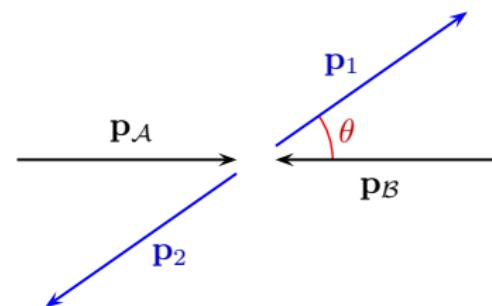
质心能满足 $E_{CM} = E_A + E_B = E_1 + E_2$



发生这个过程的运动学条件是 $E_{CM} > m_1 + m_2$



$2 \rightarrow 2$ 散射截面写成 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B} \frac{1}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2$



2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \end{aligned}$$

第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$ 作出 p_2 的积分

此积分看起来没有效果，但实际上要求 p_2 满足动量守恒条件 $p_A + p_B = p_1 + p_2$

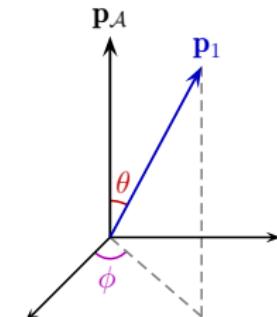
这个条件在质心系中体现为 $p_2 = -p_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|p_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|p_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{CM} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \end{aligned}$$



第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 \mathbf{p}_2 的积分

此积分看起来没有效果，但实际上要求 \mathbf{p}_2 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

这个条件在质心系中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

第三步建立球坐标系，以 \mathbf{p}_A 方向为极轴方向，以散射角 θ 为极角 (polar angle)

将 \mathbf{p}_1 投影在垂直于 \mathbf{p}_A 的平面上以定义方位角 (azimuthal angle) ϕ

将 \mathbf{p}_1 动量体积元分解为 $d^3 p_1 = |\mathbf{p}_1|^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega$ ，立体角微分 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

极角 θ 的取值范围为 $[0, \pi]$ ，方位角 ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

2 → 2 散射截面



现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} \right) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \end{aligned}$$

2 → 2 散射截面



现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} (E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \end{aligned}$$



$2 \rightarrow 2$ 散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$



质心系中的微分散射截面是 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系能动量



利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|p_1| = |p_2|$ ，得

$$E_{CM} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{CM} - E_1)^2 = E_{CM}^2 - 2E_{CM}E_1 + E_1^2$

即 $2E_{CM}E_1 = E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{CM}} (E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{CM}} (E_{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

可见，质量较大的末态粒子在质心系中分得的能量较多

质心系能动量



利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$



$$\text{故 } E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$$



即 $2E_{\text{CM}}E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$



可见，质量较大的末态粒子在质心系中分得的能量较多；根据质壳条件，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} [E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\text{CM}}^2m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2 - 4E_{\text{CM}}^2m_1^2] \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\text{CM}}^2m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2) \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} \lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) \end{aligned}$$

质心系微分散射截面



上式中的 λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$



质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$

质心系微分散射截面



上式中的 λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$



质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$



将类似分析应用到初态上，同理得到质心系中初态粒子能量是

$$E_A = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_A^2 - m_B^2), \quad E_B = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_B^2 - m_A^2)$$



动量大小是

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_A^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_B^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

特殊情况

下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴具有旋转对称性**, 则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

卡车 下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴具有旋转对称性**, 则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

 散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

(2) 如果初态粒子质量相同, $m_A = m_B = m_i$, 末态粒子质量相同, $m_1 = m_2 = m_f$, 则 $E_1 = (E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{CM})$ 和 $E_2 = (E_{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{CM})$ 意味着

$$E_A = E_B = E_1 = E_2 = \frac{E_{CM}}{2}$$

即初末态粒子分别**平分质心能**

 此时, 如果末态 2 个粒子是**全同的**, 那么末态对称性因子 $S = 2$, 否则 $S = 1$

特殊情况

 另一方面，由 $\lambda(x, y, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = \textcolor{blue}{x}(x - 4y)$ 得

$$\lambda^{1/2} \left(1, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}}$$

 故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_f}{2}$$

 其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

 根据狭义相对论中运动速度的定义， β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况

 从而, 由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$

 于是, 微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

特殊情况

 从而, 由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$

 于是, 微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同, $m_A = m_B = m_1 = m_2$, 则 $\beta_i = \beta_f$, 有

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

6.5.4 小节 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

不稳定粒子 A 自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

假设 t 时刻有 $N(t)$ 个静止的 A 粒子，每个 A 粒子在单位时间内发生衰变的概率是常数 Γ ，那么 $t + dt$ 时刻衰变引起的 A 粒子数量变化为 $dN = -\Gamma N dt$

以此求得 $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即 A 粒子数量随时间按指数规律下降

6.5.4 小节 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

不稳定粒子 \mathcal{A} 自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

假设 t 时刻有 $N(t)$ 个静止的 \mathcal{A} 粒子，每个 \mathcal{A} 粒子在单位时间内发生衰变的概率是常数 Γ ，那么 $t + dt$ 时刻衰变引起的 \mathcal{A} 粒子数量变化为 $dN = -\Gamma N dt$

以此求得 $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即 \mathcal{A} 粒子数量随时间按指数规律下降

于是一个静止 \mathcal{A} 粒子在衰变前存活的时间 t 服从指数分布，归一化概率密度为

$$P(t) = \Gamma \exp(-\Gamma t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

其中 $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$ 称为粒子的寿命 (lifetime)

t 的期待值为 $\langle t \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t e^{-t/\tau} dt = \tau$ ，可见寿命是静止粒子存活的平均时间

在自然单位制中， Γ 具有质量的量纲，称为衰变宽度 (decay width)，简称宽度

分支比和分宽度

\mathcal{A} 粒子可能有**多种**衰变过程

在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

Γ_f 是 \mathcal{A} 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 在单位时间内发生的概率

分支比和分宽度

A 粒子可能有**多种**衰变过程

在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

Γ_f 是 A 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 在单位时间内发生的概率

所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

总宽度 Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

接下来通过跃迁概率计算衰变过程 $i \rightarrow f$ 的分宽度

现在, 初态 $|i\rangle$ 只包含 1 个粒子 \mathcal{A} , 末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子

因此, $|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$

类似于散射的情况, 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的跃迁概率是

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j V)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$, 单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) |\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式



将末态动量的**所有取值**考虑进来，可得**单位时间**内衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**发生概率**为

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$



其中 \mathcal{S} 是末态对称性因子

在 \mathcal{A} 粒子静止系中， $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$ ，而 R_f 的值就是**分宽度** Γ_f ，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$



可见，**衰变分宽度和总宽度是 Lorentz 不变的**，因而**寿命也是 Lorentz 不变量**

衰变末态分布和运动学条件

若 A 粒子是标量玻色子，自旋为 0，则 A 粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

若 A 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 A 粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 A 粒子自旋方向为轴

在实际情况中， A 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同

那么，可对 A 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

衰变末态分布和运动学条件

若 \mathcal{A} 粒子是标量玻色子，自旋为 0，则 \mathcal{A} 粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

若 \mathcal{A} 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 \mathcal{A} 粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 \mathcal{A} 粒子自旋方向为轴

在实际情况中， \mathcal{A} 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同

那么，可对 \mathcal{A} 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

由于 \mathcal{A} 粒子静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{CM} = m_{\mathcal{A}}$

因此，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^n m_j$$

即 \mathcal{A} 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变