

Majorana 旋量场专题

第一节 Majorana 旋量场基础

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



B 站账号：行星状星云



第二届江门中微子暑期学校
中国科学院大学杭州高等研究院
2025 年 8 月 17 日至 24 日



旋量表示

紫色图标 **V** Dirac 矩阵是一组满足如下反对易关系的 4×4 矩阵 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

木屋图标 最后一步是一种简写，省略了 4×4 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 。这些矩阵满足

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \quad \mu \neq \nu$$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

紫色图标 **II** 以 Dirac 矩阵的对易子定义一组 4×4 矩阵

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

红色图标 它们满足 Lorentz 代数关系

$$[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(g^{\nu\rho} \mathcal{S}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \mathcal{S}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \mathcal{S}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} \mathcal{S}^{\nu\rho})$$

信封图标 因而 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 必定是 Lorentz 群某个表示的生成元矩阵

相机图标 以 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 生成的表示称为旋量表示，它是固有保时向 Lorentz 群 $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$ 的一个投影表示，也是相应覆盖群 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 的一个线性表示

旋量表示中的固有保时向 Lorentz 变换

一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 在 Lorentz 群的矢量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\Lambda = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu} \right), \quad (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$$

这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$D(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right)$$

从而推出 $D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ ，将此式看作旋量表示中 Dirac 矩阵 γ^μ

的固有保时向 Lorentz 变换规则，那么 γ^μ 是一个 Lorentz 矢量

进一步引入 4×4 矩阵 $\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ，它满足

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

旋量表示的基底

 在固有保时向 Lorentz 变换 $D(\Lambda)$ 的作用下，有

$$D^{-1}(\Lambda) \mathbf{1} D(\Lambda) = \mathbf{1},$$

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^5 D(\Lambda) = \gamma^5$$

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

$$D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$

$$D^{-1}(\Lambda) \sigma^{\mu\nu} D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}, \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathcal{S}^{\mu\nu}$$

 矢量表示中的宇称变换矩阵是 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

 旋量空间中相应的宇称变换矩阵可定义为 $D(\mathcal{P}) = \gamma^0$ ，从而

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \mathbf{1} D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1},$$

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^5,$$

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu \gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{P}) \sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \sigma^{\alpha\beta}$$

 可见，集合 $\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由标量 $\mathbf{1}$ 、赝标量 γ^5 、极矢量 γ^μ 、轴矢量 $\gamma^\mu \gamma^5$ 和 2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的，这些矩阵的变换性质各不相同

 总共有 16 个线性独立的矩阵，可作为基底展开旋量空间中任意一个 4×4 矩阵

Dirac 旋量场

■ 在 Lorentz 群旋量表示空间中，被变换矩阵 $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 Dirac 旋量

🍍 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 矩阵，Dirac 旋量 ψ_a 应当具有 4 个分量 ($a = 1, 2, 3, 4$)

● 相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b$$

🔪 隐去旋量指标 a 和 b ，上式简化为 $\psi' = D(\Lambda)\psi$

■ 如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ ，它就成为 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$

● 设固有保时向 Lorentz 变换 Λ 在 Hilbert 空间中诱导出来的线性么正变换为 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ ，则矢量场算符 $A^\mu(x)$ 的 Lorentz 变换是

$$A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

🍒 类比于上式，Dirac 旋量场算符 $\psi_a(x)$ 的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

与 Lorentz 变换相关的线性空间

线性空间名称	矢量表示空间	旋量表示空间
维度	4 维	4 维
空间中元素	Lorentz 矢量 A^μ	Dirac 旋量 ψ_a
Lorentz 群生成元	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$	$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
固有保时向 Lorentz 变换	$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$	$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$
线性空间名称	Hilbert 空间	场空间
维度	无限维	无限维
空间中元素	态矢 $ \Psi\rangle$	场 $\phi(x)$ 、 $A^\mu(x)$ 、 $\psi_a(x)$
Lorentz 群生成元	算符 $J^{\mu\nu}$	$\hat{L}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$
固有保时向 Lorentz 变换	$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$	$\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\right)$

Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

以 1 表示 2×2 单位矩阵, 将 Dirac 矩阵表示成 2×2 分块形式:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$$

Dirac 矩阵有多种表示方式, 以上表示方式称为 Weyl 表象, 也称为手征表象

用单位矩阵 1 和 Pauli 矩阵定义 $\sigma^\mu \equiv (1, \sigma)$ 和 $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma)$, 从而

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

生成元矩阵表达为 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu & \end{pmatrix}$

自旋角动量

 旋量表示中的**自旋角动量矩阵**为

$$\mathcal{S}^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{S}^{jk} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$$

 即 \mathcal{S}^i 是两个 $SU(2)$ 群基础表示生成元 $\tau^i = \frac{\sigma^i}{2}$ 的直和

 因此 \mathcal{S}^i 所属 $SU(2)$ 群线性表示是两个 $SU(2)$ 基础表示的直和

 用自旋角动量矩阵构造的**二阶 Casimir 算符**为

$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^i \mathcal{S}^i = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^i & \\ & \sigma^i \sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \mathbf{1}_{4 \times 4} = s(s+1) \mathbf{1}_{4 \times 4}$$

 可见， Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的**自旋量子数**是

$$s = \frac{1}{2}$$

 量子化之后， $\psi(x)$ 描述**自旋为 $\frac{1}{2}$** 的粒子

Dirac 共轭和旋量双线性型

● 定义 $\psi(x)$ 的 Dirac 共轭

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

由于 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$, $\bar{\psi}(x)$ 的 Lorentz 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

这样一来, $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 Lorentz 标量:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

像 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 这样同时包含 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的量称为旋量双线性型 (spinor bilinear)

利用 $\bar{\psi}(x)$ 还能构造 Lorentz 协变的其它旋量双线性型:

- $\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$ 是 Lorentz 质标量
- $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 是 Lorentz 极矢量, $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 是 Lorentz 轴矢量
- $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是 2 阶反对称 Lorentz 张量

Dirac 方程

此外，包含**时空导数**的**旋量双线性型** $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)\end{aligned}$$

利用 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\psi$ 写下**自由 Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

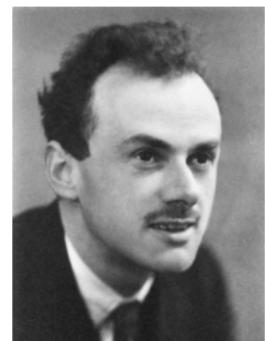
其中 $m > 0$ 是 Dirac 旋量场的**质量**

根据 **Euler-Lagrange 方程**推出 $\psi(x)$ 的经典运动方程

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为

$$[i(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$$



Paul Dirac

(1902–1984)

Weyl 旋量

❤ 在 Weyl 表象中，旋量表示生成元矩阵 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$

是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和

🌊 把四分量 Dirac 旋量场 ψ 分解为两个二分量旋量场 η_L 和 η_R ： $\psi = \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix}$

🦐 这样的二分量旋量称为 Weyl 旋量

🐠 η_L 称为左手 (left-handed) Weyl 旋量， η_R 称为右手 (right-handed) Weyl 旋量

🐠 利用 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix}$ 将 Dirac 方程化为

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R - m\eta_L \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L - m\eta_R \end{pmatrix}$$

🐠 即得两个相互耦合的方程 $\begin{cases} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L - m\eta_R = 0 \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R - m\eta_L = 0 \end{cases}$

Weyl 方程

♥ 如果 $m = 0$ ，两个方程就各自独立了：

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_L = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \eta_R = 0$$

🌴 这两个独立方程称为 Weyl 方程

🌴 可见，非零质量 m 的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来

👉 自旋角动量矩阵的直和分解 $\mathcal{S}^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$ 表明

👉 左手和右手 Weyl 旋量各对应于一个 $SU(2)$ 群基础表示

👉 当 $m = 0$ 时，量子化之后的 $\eta_L(x)$ 和 $\eta_R(x)$ 各自描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子



Hermann Weyl
(1885–1955)

平面波展开式

在 Weyl 表象中，满足 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 的 Dirac 旋量场平面波展开式可以表达为

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

\mathbf{p} 是动量， $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ 是相应的能量， $\lambda = \pm$ 是归一化的螺旋度 (helicity)

$a_{\mathbf{p}, \lambda}$ 是湮灭算符， $b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$ 是产生算符，而且 $a_{\mathbf{p}, \lambda} \neq b_{\mathbf{p}, \lambda}$

平面波旋量系数 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 取为

$$u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

其中 $\omega_\lambda(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{E_p + \lambda |\mathbf{p}|}$ ，二分量螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 满足 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$

从而， $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 分别是本征值为 λ 和 $-\lambda$ 的螺旋度本征态

于是，可以用 $a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$ 和 $b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$ 分别产生螺旋度为 λ 的 Dirac 正费米子和反费米子

Jordan-Wigner 量子化

为得到正定的哈密顿量算符，需采用等时反对易关系进行 Jordan-Wigner 量子化：

$$\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b(\mathbf{y}, t)\} = \{\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)\} = 0$$

相应的产生湮灭算符反对易关系为

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), & \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}\} &= \{a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = 0 \\ \{b_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), & \{b_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \lambda'}\} &= \{b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = 0 \\ \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} &= \{b_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = 0 \end{aligned}$$

自由拉氏量 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$ 在 U(1) 整体变换 $\psi'(x) = e^{iq\theta}\psi(x)$ 的作用下保持不变，即理论具有 U(1) 整体对称性，其中 q 是 Dirac 旋量场携带的 U(1) 荷

由 Noether 定理给出的 U(1) 守恒流算符是 $J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ，满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$

正费米子态 (U(1) 荷为 $+q$) 和反费米子态 (U(1) 荷为 $-q$) 分别定义为

$$|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle, \quad |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_p} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$$

手征性

- 🔧 下面探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系
- 📒 在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

 它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, **正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$ ，由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

手征性

- 🔧 下面探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系
- 📒 在 Weyl 表象中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, **正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$ ，由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

- 📄 将 Dirac 旋量场 ψ 分解为**左手 Weyl 旋量场** η_L 和**右手 Weyl 旋量场** η_R

左手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_L \equiv P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_L \\ 0 \end{pmatrix}$

右手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_R \equiv P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_R \end{pmatrix}$

- 🔧 我们称**左手旋量场**和**右手旋量场**具有**相反的手征性**，而**左右手投影矩阵**正好挑选出具有**相应手征性**的 Weyl 旋量场分量

左右手投影分解

 将 $\mathbf{1} \pm \gamma^5$ 的 **简化** 地写成 $\mathbf{1} \pm \gamma^5$ ，**左手** 旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

 同理得**右手** 旋量场 ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

左右手投影分解

将 $\mathbf{1} \pm \gamma^5$ 的 **简化** 地写成 $\mathbf{1} \pm \gamma^5$ ，**左手旋量场** ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5)\psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

同理得**右手旋量场** ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

对包含若干个 Dirac 矩阵的**旋量场双线性型**进行**左右手投影分解**，得

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(P_L + P_R)\psi = \bar{\psi}(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi + \bar{\psi}P_L\gamma^\mu P_R\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_L + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(P_L^2 + P_R^2)\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_R$$

包含**偶数 (奇数)** 个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型**耦合手征性相反 (相同)** 的旋量场

拉氏量中的 Dirac 旋量场**质量项**分解为 $-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$

把上式看作**微扰**，那么 **质量** m 将**左手旋量场** ψ_L 与**右手旋量场** ψ_R **耦合**起来

高能极限

↖ 在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

↗ 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$ ， $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

↖ 按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

高能极限

↗ 在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

↗ 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$, $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

↖ 按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

此时，螺旋度不同的 u 和 v 显示出不同手征性

↙ $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的， $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的

↙ 可见，高能极限下手征性等价于螺旋度

↙ 注意， $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与螺旋度为 λ 的正费米子相关

↙ $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与螺旋度为 λ 的反费米子相关

旋量系数的左右手投影



由于高能极限下 $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的, $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的



用投影矩阵作用, 得

$$u_L(\mathbf{p}, -) = P_L u(\mathbf{p}, -) \simeq u(\mathbf{p}, -), \quad u_R(\mathbf{p}, +) = P_R u(\mathbf{p}, +) \simeq u(\mathbf{p}, +)$$

$$u_L(\mathbf{p}, +) = P_L u(\mathbf{p}, +) \simeq 0, \quad u_R(\mathbf{p}, -) = P_R u(\mathbf{p}, -) \simeq 0$$

$$v_L(\mathbf{p}, +) = P_L v(\mathbf{p}, +) \simeq v(\mathbf{p}, +), \quad v_R(\mathbf{p}, -) = P_R v(\mathbf{p}, -) \simeq v(\mathbf{p}, -)$$

$$v_L(\mathbf{p}, -) = P_L v(\mathbf{p}, -) \simeq 0, \quad v_R(\mathbf{p}, +) = P_R v(\mathbf{p}, +) \simeq 0$$



相应的 Dirac 共轭满足

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, -), \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, +)$$

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq 0, \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq 0$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq \bar{v}(\mathbf{p}, +), \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq \bar{v}(\mathbf{p}, -)$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq 0, \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq 0$$

高能极限下的手征旋量场

将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 上，得到高能极限下手征旋量场的平面波展开式

$$\psi_L(x) = P_L \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

$$\psi_R(x) = P_R \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [u(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$



相应的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L(x) = [\psi_L(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [\bar{u}(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x}]$$

$$\bar{\psi}_R(x) = [\psi_R(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [\bar{u}(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x}]$$



在高能极限下，忽略质量，那么，



左手旋量场 $\psi_L(x)$ 描述左旋极化的正费米子和右旋极化的反费米子



右手旋量场 $\psi_R(x)$ 描述右旋极化的正费米子和左旋极化的反费米子



$\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 成为两个相互独立的场

标准模型中的中微子

作为对高能极限的微扰，质量项 $-m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$ 耦合着左旋极化 ($\lambda = -$) 与右旋极化 ($\lambda = +$) 的正费米子，也耦合着左旋极化与右旋极化的反费米子

因此，可以利用质量来翻转螺旋度

在标准模型中，每一种无质量中微子由一个左手旋量场

$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

描述

相应地，以 $a_{\mathbf{p}, -}^\dagger$ 算符产生的粒子是左旋正中微子，以 $b_{\mathbf{p}, +}^\dagger$ 算符产生的粒子是右旋反中微子，它们互为正反粒子

标准模型中没有由右手旋量场描述的中微子

旋量系数的左右手投影

 在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

 此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

旋量系数的左右手投影

 在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

 此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

 一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反
 $U(1)$ 荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反 U(1) 荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

在具有**电荷共轭对称性**的**量子理论**中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的**线性幺正变换**

$$|\Psi'\rangle = C |\Psi\rangle$$

这个变换称为 **C 变换**

C 是**自身的逆变换算符**，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C$$

因而 C 算符是**厄米**的

Dirac 旋量场的 C 变换

 现在讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换

 C 变换在互换正反粒子的同时，不改变动量 p 和螺旋度 $\lambda = \pm$ ，因此将正费米子态 $|p^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ 转化成反费米子态 $|p^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ ，

$$C |p^+, \lambda\rangle = \zeta_C |p^-, \lambda\rangle$$

 其中 ζ_C 是复的相位因子，满足 $|\zeta_C| = 1$

 出现 ζ_C 的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理。由此推出

$$C^{-1} a_{p,\lambda}^\dagger C = \zeta_C b_{p,\lambda}^\dagger, \quad C^{-1} a_{p,\lambda} C = \zeta_C^* b_{p,\lambda}, \quad C^{-1} b_{p,\lambda}^\dagger C = \zeta_C^* a_{p,\lambda}^\dagger, \quad C^{-1} b_{p,\lambda} C = \zeta_C a_{p,\lambda}$$

 $\psi(x)$ 平面波展开式的 C 变换为

$$C^{-1} \psi(x) C = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[u(p, \lambda) C^{-1} a_{p,\lambda} C e^{-ip \cdot x} + v(p, \lambda) C^{-1} b_{p,\lambda}^\dagger C e^{ip \cdot x} \right]$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_C^* u(p, \lambda) b_{p,\lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* v(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

螺旋态关系式

 为了得到 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**, 需要探讨 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 之间**相互转换**的关系

 在 **Weyl 表象**中, 对 $\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$ 进行**转置**, 得

$$\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

 将**螺旋态** $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的具体形式取为

$$\xi_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} -p^1 + ip^2 \\ |\mathbf{p}| + p^3 \end{pmatrix}$$

 $i\sigma^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ 对 $\xi_\lambda^*(\mathbf{p})$ 的作用为 $i\sigma^2\xi_+^*(\mathbf{p}) = -\xi_-(\mathbf{p})$ 和 $i\sigma^2\xi_-^*(\mathbf{p}) = +\xi_+(\mathbf{p})$

 归纳得到

$$i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \quad i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = \lambda\xi_\lambda(\mathbf{p})$$

电荷共轭场

🐷 引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

🎺 就可以导出平面波旋量系数 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 之间的转换关系式：

$$\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$

电荷共轭场

🐷 引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

🎺 就可以导出平面波旋量系数 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 之间的转换关系式：

$$\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$

🎹 于是， $\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$\begin{aligned} C^{-1}\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda \left[\zeta_C^* \mathcal{U}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* \mathcal{V}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda \left[\zeta_C^* \mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* \mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] = \zeta_C^* \psi^C(x) \end{aligned}$$

🥁 这里 $\psi^C(x) \equiv \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$ 便是 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**

电荷共轭矩阵的性质



现在研究**电荷共轭矩阵 \mathcal{C}** 的性质

利用 $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 γ^0 的厄米性、 γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ ，有

$$\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = \mathbf{1}$$



可见， \mathcal{C} 是**幺正矩阵**，满足

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$$

电荷共轭矩阵的性质



现在研究**电荷共轭矩阵 \mathcal{C}** 的性质

利用 $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 γ^0 的厄米性、 γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ ，有

$$\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = 1$$



可见， \mathcal{C} 是**幺正矩阵**，满足

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$$

Pauli 矩阵满足 $\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = i\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^1 = -(\sigma^1)^T$ 、 $\sigma^2\sigma^2\sigma^2 = \sigma^2 = -(\sigma^2)^T$ 和 $\sigma^2\sigma^3\sigma^2 = i\sigma^1\sigma^2 = -\sigma^3 = -(\sigma^3)^T$ ，归纳得到 $\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2 = \mathbf{1}^T$ 和 $\sigma^2\sigma\sigma^2 = -\sigma^T$ ，因此

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T, \quad \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$$

Dirac 矩阵的电荷共轭变换

利用 $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$ 和 $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$ 推出

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} & \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \\ \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 & \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} & (\bar{\sigma}^\mu)^T \\ (\sigma^\mu)^T & \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma^5 \mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

即得 γ^μ 和 γ^5 关于 \mathcal{C} 的相似变换性质

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T, \quad \mathcal{C}^{-1} \gamma^5 \mathcal{C} = \gamma^5$$

由于 $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ ，这两个式子等价于

$$\mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad \mathcal{C}^{-1} (\gamma^5)^T \mathcal{C} = \gamma^5$$

$\psi^c(x)$ 的运动方程

如果 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带电荷 Q ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0 ，得

$$0 = \psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger(-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar{\psi}[-\gamma^\mu(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置，推出 $[-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$

$\psi^c(x)$ 的运动方程

如果 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带电荷 Q ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0 ，得

$$0 = \psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger(-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar{\psi}[-\gamma^\mu(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置，推出 $-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$

利用 $\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T$ ，将上式化为

$$0 = [\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}^T = \mathcal{C}^{-1}[\gamma^\mu(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\mathcal{C}\bar{\psi}^T$$

从而得到电荷共轭场 $\psi^c(x)$ 的运动方程

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^c = 0$$

对比 $\psi(x)$ 的运动方程，可以看出 $\psi^c(x)$ 确实携带相反的电荷 $-Q$

$\psi^C(x)$ 携带的 U(1) 荷



实际上， $\psi^C(x)$ 携带的任何 U(1) 荷都与 $\psi(x)$ 相反

如果 $\psi(x)$ 携带某种 U(1) 荷 q ，在相应 U(1) 整体变换的作用下，有

$$\psi'(x) = e^{iq\theta} \psi(x)$$

那么， $\psi^C(x)$ 的变换为

$$(\psi^C)' = (\psi')^C = \left(e^{iq\theta} \psi\right)^C = \mathcal{C}(\overline{e^{iq\theta} \psi})^T = \mathcal{C}[(e^{iq\theta} \psi)^\dagger \gamma^0]^T = e^{-iq\theta} \mathcal{C} \bar{\psi}^T = e^{-iq\theta} \psi^C$$

可见， $\psi^C(x)$ 携带的相应 U(1) 荷是 $-q$

$\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换

猴 根据 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

幕 电荷共轭场 $\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$ 的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C}\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} \mathcal{C}^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T \\ &= [\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T = -(\mathcal{C} \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (\mathcal{C}^T \psi)^T\end{aligned}$$

相机 即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$$

$\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换

猴 根据 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

电影院 电荷共轭场 $\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$ 的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C}\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} \mathcal{C}^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T \\ &= [\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T = -(\mathcal{C} \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (\mathcal{C}^T \psi)^T\end{aligned}$$

电影院 即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$$

电影院 于是 $C^{-1}\bar{\psi}C = C^\dagger \psi^\dagger C \gamma^0 = (C^{-1}\psi C)^\dagger \gamma^0 = (\zeta_C^* \psi^C)^\dagger \gamma^0 = \zeta_C \bar{\psi}^C = \zeta_C \psi^T \mathcal{C}$

电影院 也就是说, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 及其 Dirac 共轭场 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换是

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \zeta_C^* \mathcal{C} \bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C \bar{\psi}^C(x) = \zeta_C \psi^T(x) \mathcal{C}$$

电影院 仿照 $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$ 的推导, 由 $\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = v(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = u(\mathbf{p}, \lambda)$ 得

$$\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) = u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) = v^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C}$$

一般旋量双线性型的 C 变换

 考虑一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}\textcolor{violet}{C}\Gamma\textcolor{purple}{C}^{-1}\psi\textcolor{violet}{C} = |\zeta_C|^2 \psi^T \textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{purple}{C}\bar{\psi}^T = \psi^T \mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^T = -\bar{\psi} \mathcal{C}^T \Gamma^T \mathcal{C}^T \psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为

了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号

一般旋量双线性型的 C 变换

 考虑一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}\textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{purple}{C}^{-1}\psi\textcolor{purple}{C} = |\zeta_C|^2\psi^T\textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{purple}{C}\bar{\psi}^T = \psi^T\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\mathcal{C}^T\Gamma^T\mathcal{C}^T\psi$$

 最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为

了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号

 从而，由 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\textcolor{blue}{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\textcolor{violet}{C}}\psi(x)$$

 其中 $\Gamma^C \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}$ 可视为矩阵 Γ 的电荷共轭变换

一般旋量双线性型的 C 变换

考虑一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma\textcolor{violet}{C}^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^T\textcolor{red}{C}\Gamma\textcolor{violet}{C}\bar{\psi}^T = \psi^T\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\mathcal{C}^T\Gamma^T\mathcal{C}^T\psi$$

最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为

了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号

从而，由 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\textcolor{blue}{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^C\psi(x)$$

其中 $\Gamma^C \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}$ 可视为矩阵 Γ 的电荷共轭变换

根据 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C} = -\gamma^\mu$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T\mathcal{C} = \gamma^5$ ，有

$$\mathbf{1}^C = \mathcal{C}^{-1}\mathbf{1}^T\mathcal{C} = +\mathbf{1}, \quad (\mathrm{i}\gamma^5)^C = \mathcal{C}^{-1}(\mathrm{i}\gamma^5)^T\mathcal{C} = +\mathrm{i}\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad (\gamma^\mu\gamma^5)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^T\mathcal{C} = +\gamma^\mu\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^T\mathcal{C} = +\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad (\sigma^{\mu\nu})^C = \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^T\mathcal{C} = -\sigma^{\mu\nu}$$

旋量双线性型的 C 变换



于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

旋量双线性型的 C 变换

于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

拉氏量中的动能项算符 $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 在 C 变换下化为

$$\begin{aligned} C^{-1}i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= i\psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C} \partial_\mu \bar{\psi}^T = -i\psi^T \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} \partial_\mu \bar{\psi}^T = i\psi^T (\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\psi}^T \\ &= -i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi = -i\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \end{aligned}$$

最后的表达式中第一项是全散度，全时空积分后对作用量没有贡献，可以丢弃

因而上式表明动能项算符在 C 变换下不变

自由 Dirac 旋量场的拉氏量 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ 具有电荷共轭不变性

手征旋量场算符的 C 变换



由 $\mathcal{C}^{-1}P_{L/R}^T\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[\mathbf{1}^T \mp (\gamma^5)^T]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp \gamma^5) = +P_{L/R}$

$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu P_{L/R})^T\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[(\gamma^\mu)^T \mp (\gamma^\mu\gamma^5)^T]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(-\gamma^\mu \mp \gamma^\mu\gamma^5) = -P_{R/L}$$

可知, 手征旋量场 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 构造的算符 $\bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}P_L\psi$ 和 $\bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}P_R\psi$ 在 C 变换下不变, 满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)C = +\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)$$

手征旋量场算符的 C 变换

 由 $\mathcal{C}^{-1}P_{L/R}^T\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[\mathbf{1}^T \mp (\gamma^5)^T]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp \gamma^5) = +P_{L/R}$

$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu P_{L/R})^T\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[(\gamma^\mu)^T \mp (\gamma^\mu \gamma^5)^T]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(-\gamma^\mu \mp \gamma^\mu \gamma^5) = -P_{R/L}$$

可知, 手征旋量场 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 构造的算符 $\bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}P_L\psi$ 和 $\bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}P_R\psi$ 在 C 变换下不变, 满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)C = +\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)$$

 左手流算符 $\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L = \bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R = \bar{\psi}\gamma^\mu P_R\psi$ 的 C 变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\psi_L(x)C = -\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\psi_R(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\psi_R(x)C = -\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\psi_L(x)$$

 两者在 C 变换下相互转化, 并出现一个负号

 在弱相互作用中, 轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用, 因而电荷共轭对称性遭到破坏

$\psi^C(x)$ 的固有变时向 Lorentz 变换

熊猫 旋量表示生成元 $S^{\mu\nu} = \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$ 满足 $\mathcal{C}(S^{\mu\nu})^T \mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{2} \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^T \mathcal{C} = -S^{\mu\nu}$

鼠标 对于旋量表示中的 Lorentz 逆变换矩阵 $D^{-1}(\Lambda) = \exp(i\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}/2)$ ，有

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[D^{-1}(\Lambda)]^T \mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C} \left[\exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) \right]^T \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C} \exp \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})^T \right] \mathcal{C}^{-1} \\ &= \exp \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{C}(S^{\mu\nu})^T \mathcal{C}^{-1} \right] = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) = D(\Lambda)\end{aligned}$$

鼠标 在固有保时向 Lorentz 变换下，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 变换为 $\psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x)$

键盘 相应的电荷共轭场变换为

$$\begin{aligned}\psi^{C'}(x') &= \mathcal{C}[\bar{\psi}'(x')]^T = \mathcal{C}\{[D(\Lambda)\psi(x)]^\dagger \gamma^0\}^T = \mathcal{C}[\psi^\dagger(x) D^\dagger(\Lambda) \gamma^0]^T \\ &= \mathcal{C}[\bar{\psi}(x) \gamma^0 D^\dagger(\Lambda) \gamma^0]^T = \mathcal{C}[\gamma^0 D^\dagger(\Lambda) \gamma^0]^T \bar{\psi}^T(x) = \mathcal{C}[\gamma^0 \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)]^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \bar{\psi}^T(x) \\ &= \mathcal{C}[D^{-1}(\Lambda)]^T \mathcal{C}^{-1} \psi^C(x) = D(\Lambda) \psi^C(x)\end{aligned}$$

电脑 可见， $\psi^C(x)$ 与 $\psi(x)$ 的变换形式相同，因而它也是一个 Dirac 旋量场

Majorana 旋量场

如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同, $\psi(x) = \bar{\psi}^C(x)$, 即满足**自共轭条件**

$$\psi(x) = C\bar{\psi}^T(x)$$

那么, $\psi(x)$ 就是一种**纯中性的**场, **不能携带任何 U(1) 荷**, 称为 **Majorana 旋量场**, 上式称为 **Majorana 条件**

于是, Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$



Ettore Majorana
(1906–?)

Majorana 旋量场

如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同, $\psi(x) = \bar{\psi}^C(x)$, 即满足**自共轭条件**

$$\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$$

那么, $\psi(x)$ 就是一种**纯中性的**场, **不能携带任何** $U(1)$ 荷, 称为 **Majorana 旋量场**, 上式称为 **Majorana 条件**



Ettore Majorana
(1906–?)

于是, Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$

根据 $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x)\mathcal{C}$, Majorana 条件等价于 $\bar{\psi}(x) = \psi^T(x)\mathcal{C}$

这里没出现 $\psi^\dagger(x)$, 而出现 $\psi^T(x)$, 表明 $\bar{\psi}_a(x) = \psi_b(x)\mathcal{C}_{ba}$ 与 $\psi_a(x)$ **线性相关**

因此, $\bar{\psi}_a(x)$ **并不是独立于** $\psi_a(x)$ 的场变量, 这一点与 Dirac 旋量场**不同**

根据前面的讨论, $\psi^C(x)$ 的平面波展开式为

$$\psi^C(x) = \zeta_C C^{-1} \psi(x) C = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

Majorana 费米子

 将上式与 $\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$ 比较

 可知 Majorana 条件 $\psi(x) = \psi^C(x)$ 意味着 $b_{\mathbf{p}, \lambda} = a_{\mathbf{p}, \lambda}$

 因此, Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

 产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = 0$$

Majorana 费米子

将上式与 $\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$ 比较

可知 Majorana 条件 $\psi(x) = \psi^C(x)$ 意味着 $b_{\mathbf{p}, \lambda} = a_{\mathbf{p}, \lambda}$

因此, Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}\} = \{a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} = 0$$

类似于实标量场, Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子

即正费米子与反费米子相同, 称为 Majorana 费米子

$C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C = \zeta_C^* b_{\mathbf{p}, \lambda}$ 、 $C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda} C = \zeta_C a_{\mathbf{p}, \lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p}, \lambda} = a_{\mathbf{p}, \lambda}$ 表明 $\zeta_C = \zeta_C^*$

故 $\zeta_C = \pm 1$, 也就是说, Majorana 旋量场的 C 宇称要么为偶, 要么为奇

Majorana 旋量场双线性型的 C 变换



对于 Majorana 旋量场, $C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x)$ 和 $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x)$ 化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}(x)$$



在 C 变换下, 由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2 \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$



即非平庸的 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 算符的 C 宇称必须为偶

Majorana 旋量场双线性型的 C 变换



对于 Majorana 旋量场, $C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x)$ 和 $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x)$ 化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}(x)$$



在 C 变换下, 由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2 \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$



即非平庸的 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 算符的 C 宇称必须为偶



这表明 Majorana 旋量场不能构成 C 宇称为奇的算符 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$, 即

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = 0$$



由 Majorana 旋量场构成的非平庸双线性型则具有与 Dirac 旋量场相同的 C 变换规则

自由 Majorana 旋量场拉氏量

 自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T \mathcal{C} \psi$$

 应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中 ψ^T 扮演的角色跟 ψ 相同

 如果将前后两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2 ，动能项算符可化为

$$\begin{aligned} \psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T) (\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu \psi_1 \end{aligned}$$

自由 Majorana 旋量场拉氏量

 自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T \mathcal{C} \psi$$

 应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中 ψ^T 扮演的角色跟 ψ 相同

 如果将前后两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2 ，动能项算符可化为

$$\begin{aligned} \psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T) (\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu \psi_1 \end{aligned}$$

 质量项算符可化为 $\psi_1^T \mathcal{C} \psi_2 = (\psi_1^T \mathcal{C} \psi_2)^T = -\psi_2^T \mathcal{C}^T \psi_1 = \psi_2^T \mathcal{C} \psi_1$ ，则

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - \frac{1}{2} m \psi_2^T \mathcal{C}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{1}{2} m \psi_1^T \mathcal{C}$$

 ψ_1 和 ψ_2 都是 ψ ，因而

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

 根据 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu$ 和 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$

 Euler-Lagrange 方程给出 $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu + m \psi^T \mathcal{C}$

 对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = \mathcal{C} \gamma^\mu = -\mathcal{C}^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \partial_\mu \psi + m \mathcal{C}^T \psi = \mathcal{C}^T (-i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi)$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

根据 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu$ 和 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$

Euler-Lagrange 方程给出 $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu + m \psi^T \mathcal{C}$

对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = \mathcal{C} \gamma^\mu = -\mathcal{C}^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \partial_\mu \psi + m \mathcal{C}^T \psi = \mathcal{C}^T (-i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi)$$

可见，自由的 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 也满足 Dirac 方程

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$$

这与上述平面波展开式

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

相容