

量子场论

第 2 章 量子标量场

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 10 月 9 日



本章讲述标量场 (scalar field) 的正则量子化 (canonical quantization) 方法

 标量场的量子化可以看作简谐振子量子化的推广

 一维简谐振子 (simple harmonic oscillator) 的哈密顿量表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

其中 m 是质量, ω 是角频率, 第一项是动能, 第二项是势能

第 2 章 量子标量场

2.1 节 简谐振子的正则量子化

 本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法

 标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广

 **一维简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

 其中 m 是质量, ω 是角频率, 第一项是动能, 第二项是势能

 在**量子力学**中, 把**坐标 x** 和**动量 p** 两个**正则变量**看作**厄米算符**, 要求它们满足**正则对易关系**

$$[x, p] \equiv xp - px = i$$

 构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - ip)$$

 a 称为**湮灭算符** (annihilation operator), a^\dagger 称为**产生算符** (creation operator)

 两者互为**厄米共轭** (Hermitian conjugate)



Charles Hermite
(1822–1901)

产生湮灭算符的对易关系

 涅灭算符和产生算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega} [m\omega x + ip, m\omega x - ip] = \frac{1}{2m\omega} ([m\omega x, -ip] + [ip, m\omega x]) \\ &= \frac{1}{2} (-i[x, p] + i[p, x]) = -i[x, p] = -i \cdot i \end{aligned}$$

即

[a, a^\dagger] = 1, 同理推出 $[a, a] = 0$ 和 $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$

产生湮灭算符的对易关系

 湮灭算符和产生算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega} [m\omega x + ip, m\omega x - ip] = \frac{1}{2m\omega} ([m\omega x, -ip] + [ip, m\omega x]) \\ &= \frac{1}{2} (-i[x, p] + i[p, x]) = -i[x, p] = -i \cdot i \end{aligned}$$

即 $[a, a^\dagger] = 1$ ，同理推出 $[a, a] = 0$ 和 $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$

反过来用 a 和 a^\dagger 表示 x 和 p ，有 $x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger)$, $p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a - a^\dagger)$

对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 意味着 $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ ，于是将哈密顿量表达成

$$\begin{aligned}
 \textcolor{blue}{H} &= -\frac{1}{2m} \frac{m\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{m\omega^2}{2} \frac{1}{2m\omega} (a + a^\dagger)^2 \\
 &= -\frac{\omega}{4} (aa - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) + \frac{\omega}{4} (aa + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) = \frac{\omega}{2} (\textcolor{brown}{aa^\dagger} + \textcolor{brown}{a^\dagger a}) \\
 &= \frac{\omega}{2} (2a^\dagger a + 1) = \omega \left(\textcolor{red}{a^\dagger a} + \frac{1}{2} \right) = \omega \left(\textcolor{red}{N} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

其中 $N \equiv a^\dagger a$ 是个厄米算符，称为粒子数算符

粒子数算符的本征态

 N 是个半正定算符，对于任意态矢 $|\Psi\rangle$ ， N 的期待值 (expectation value) 非负：

$$\langle \Psi | N | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \langle a\Psi | a\Psi \rangle \geq 0, \quad \text{其中 } |a\Psi\rangle \equiv a|\Psi\rangle$$

因此，哈密顿量 $H = \omega(N + 1/2)$ 是正定算符， $\langle \Psi | H | \Psi \rangle > 0$

设 $|n\rangle$ 是 N 的本征态，满足本征方程 $N|n\rangle = n|n\rangle$ 和归一化条件 $\langle n|n\rangle = 1$

 由 $n \equiv \langle n | n | n \rangle \equiv \langle n | N | n \rangle > 0$ 可知, 本征值 n 是一个非负实数

粒子数算符的本征态

 N 是个半正定算符，对于任意态矢 $|\Psi\rangle$ ， N 的期待值 (expectation value) 非负：

$$\langle \Psi | N | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \langle a\Psi | a\Psi \rangle \geq 0, \quad \text{其中 } |a\Psi\rangle \equiv a|\Psi\rangle$$

因此，哈密顿量 $H = \omega(N + 1/2)$ 是正定算符， $\langle \Psi | H | \Psi \rangle > 0$

 设 $|n\rangle$ 是 N 的本征态，满足本征方程 $N|n\rangle = n|n\rangle$ 和归一化条件 $\langle n|n\rangle = 1$

 由 $n \equiv \langle n | n | n \rangle \equiv \langle n | N | n \rangle > 0$ 可知, 本征值 n 是一个非负实数

利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]$$

推出 $[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] = a^\dagger$ 和 $[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a$

故 $Na^\dagger = a^\dagger N + a^\dagger$, $Na = aN - a$, 从而

$$Na^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle = (n+1)a^\dagger |n\rangle$$

$$Na|n\rangle = (aN - a)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

升算符和降算符

 可见, $a^\dagger |n\rangle$ 和 $a |n\rangle$ 都是 N 的**本征态**, 本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$, 因此

$$a^\dagger |n\rangle = c_1 |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = c_2 |n-1\rangle$$

 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**

 **产生算符** a^\dagger 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态, 因而也称为**升算符**

 **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态, 因而也称为**降算符**

升算符和降算符

 可见, $a^\dagger |n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 都是 N 的**本征态**, 本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$, 因此

$$a^\dagger |n\rangle = c_1 |n+1\rangle, \quad a|n\rangle = c_2 |n-1\rangle$$

 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**

 **产生算符** a^\dagger 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态, 因而也称为**升算符**

 **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态, 因而也称为**降算符**

 为确定归一化常数的值, 进行以下计算,

对易关系

$$n+1 = \langle n | (N+1) | n \rangle = \langle n | (a^\dagger a + 1) | n \rangle = \langle n | a a^\dagger | n \rangle = |c_1|^2 \langle n+1 | n+1 \rangle = |c_1|^2$$

$$n = \langle n | N | n \rangle = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = |c_2|^2 \langle n-1 | n-1 \rangle = |c_2|^2$$

 将 c_1 和 c_2 都取为**正实数**, 得 $c_1 = \sqrt{n+1}$ 和 $c_2 = \sqrt{n}$, 故

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发, 用降算符 a 逐步操作
 - 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a|n\rangle, a^2|n\rangle, a^3|n\rangle, \dots$
 - 对应的本征值分别为 $n - 1, n - 2, n - 3, \dots$
 - 由于 $n \geq 0$, 必定存在一个**最小本征值** n_0 , 它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a|n_0\rangle = 0$
 - 注意, $a|n_0\rangle = 0$ 是使**本征值停止减小的条件****
 - 于是 $N|n_0\rangle = a^\dagger a|n_0\rangle = 0 = 0|n_0\rangle$, 可见 $n_0 = 0$, 即 $|n_0\rangle = |0\rangle$

粒子数算符的本征值

从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用降算符 a 逐步操作

得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a|n\rangle$, $a^2|n\rangle$, $a^3|n\rangle$, ...

对应的本征值分别为 $n-1, n-2, n-3, \dots$

由于 $n \geq 0$ ，必定存在一个**最小本征值** n_0 ，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a|n_0\rangle = 0$

⚠ 注意， $a|n_0\rangle = 0$ 是使本征值停止减小的条件

于是 $N|n_0\rangle = a^\dagger a|n_0\rangle = 0 = 0|n_0\rangle$, 可见 $n_0 = 0$, 即 $|n_0\rangle = |0\rangle$

反过来，从 $|0\rangle$ 出发，用升算符 a^\dagger 逐步操作

得到本征值逐次增加的一系列本征态 $a^\dagger |0\rangle$, $(a^\dagger)^2 |0\rangle$, $(a^\dagger)^3 |0\rangle$, ...

 对应的本征值分别为 1, 2, 3, ...

 综上，本征值 n 的取值是非负整数，是量子化的

 可以用 a^\dagger 和 $|0\rangle$ 将本征态 $|n\rangle$ 表示为 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$

能量本征值

显而易见， $|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H|n\rangle = \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

 基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$ ，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**，这是**量子力学的特有结果**

能量本征值

显然, $|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**,

$$H|n\rangle = \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零, 而是 $E_0 = \omega/2$, 称为**零点能** (zero-point energy), 也称为**真空能**, 这是**量子力学的特有结果**

可以将 $|0\rangle$ 看作**真空态**, 将 $n > 0$ 的 $|n\rangle$ 看作包含 n 个**声子** (phonon) 的激发态, 每个声子具有一份**能量** ω

这样一来, n 表示声子的数目, 故**粒子数算符** N 描述**声子数**

a^\dagger 的作用是**产生**一个声子, 从而**增加**一份能量

a 的作用是**湮灭**一个声子, 从而**减少**一份能量

这是将 a^\dagger 和 a 称为**产生算符**和**湮灭算符**的原因

2.2 节 量子场论中的正则对易关系

对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统中的广义坐标 x 和 广义动量 p 提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系

接下来将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化

🎭 这需要涉及到绘景变换，在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

2.2 节 量子场论中的正则对易关系

对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统中的广义坐标 x 和 广义动量 p 提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系

 接下来将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化

🎭 这需要涉及到 **绘景变换**，在量子力学中，**Schrödinger 绘景** 和 **Heisenberg 绘景** 提供了两种**等价**的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

 在 Schrödinger 绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^S$ 代表随时间演化的物理态，而 Hilbert 空间上的算符 O^S 不依赖于时间

系统哈密顿量算符 H 不含时间，则 $|\Psi(t)\rangle^S$ 与 $|\Psi(0)\rangle^S$ 通过么正变换联系起来： $|\Psi(t)\rangle^S = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle^S$

这里用到的**指数函数**对任意算符 A 定义为

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$



Erwin Schrödinger (1887–1961)

于是 $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = i \frac{\partial e^{-iHt}}{\partial t} |\Psi(0)\rangle^S = H e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle^S =$

这就是 Schrödinger 方程，而 $|\Psi(t)\rangle^S = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle^S$ 其实是方程的解

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢为

$$|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$$

它不随时间演化， $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle^H = 0$

而算符 $O^H(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^S

联系起来,

由于 $[H, H] = 0$ ，有 $e^{iHt} H e^{-iHt} = H e^{iHt} e^{-iHt} = H$



Werner Heisenberg
(1901–1976)

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢为

$$|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$$



Werner Heisenberg (1901–1976)

它不随时间演化， $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle^H = 0$

而算符 $O^H(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^S

联系起来， $O^H(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$

由于 $[H, H] = 0$ ，有 $e^{iHt} H e^{-iHt} = H e^{iHt} e^{-iHt} = H$

 故哈密顿量 H 在这两种绘景中是相同的, $H^H = H^S = H$

$$H^{\mathrm{H}} \equiv H^{\mathrm{S}} \equiv H$$

$${}^H\langle\Psi|O^H(t)|\Psi\rangle^H={}^H\langle\Psi|e^{iHt}O^S e^{-iHt}|\Psi\rangle^H={}^S\langle\Psi(t)|O^S|\Psi(t)\rangle^S$$

表明，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理

含时算符 $O^H(t)$ 满足 Heisenberg 运动方程

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} O^H(t) &= i \frac{\partial e^{iHt}}{\partial t} O^S e^{-iHt} + e^{iHt} O^S i \frac{\partial e^{-iHt}}{\partial t} = -H e^{iHt} O^S e^{-iHt} + e^{iHt} O^S e^{-iHt} H \\ &= -H O^H(t) + O^H(t) H = [O^H(t), H] \end{aligned}$$

等时对易关系

上一节对简谐振子的量子化是在 Schrödinger 绘景中进行的，因为没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的时间依赖性

将正则对易关系改记为 $[x^S, p^S] = i$ ，它在 Heisenberg 绘景中的形式是

$$\begin{aligned} [x^H(t), p^H(t)] &= [e^{iHt} x^S e^{-iHt}, e^{iHt} p^S e^{-iHt}] = e^{iHt} x^S p^S e^{-iHt} - e^{iHt} p^S x^S e^{-iHt} \\ &= e^{iHt} [x^S, p^S] e^{-iHt} = e^{iHt} i e^{-iHt} = i \end{aligned}$$

可见，正则对易关系的形式不依赖于绘景

上式是在同一时刻 t 成立的，称为等时 (equal time) 对易关系

等时对易关系

上一节对简谐振子的量子化是在 Schrödinger 绘景中进行的，因为没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的时间依赖性

将正则对易关系改记为 $[x^S, p^S] = i$ ，它在 Heisenberg 绘景中的形式是

$$\begin{aligned} [x^H(t), p^H(t)] &= [e^{iHt} x^S e^{-iHt}, e^{iHt} p^S e^{-iHt}] = e^{iHt} x^S p^S e^{-iHt} - e^{iHt} p^S x^S e^{-iHt} \\ &= e^{iHt} [x^S, p^S] e^{-iHt} = e^{iHt} i e^{-iHt} = i \end{aligned}$$

可见，正则对易关系的形式不依赖于绘景

上式是在同一时刻 t 成立的，称为等时 (equal time) 对易关系

接下来的讨论在 Heisenberg 绘景中进行，省略绘景的标志性上标 H

将讨论推广到具有 n 个自由度的系统，记 $q_i(t)$ 为系统在 Heisenberg 绘景中的广义坐标算符， $p_i(t)$ 为相应的广义动量算符，它们是系统的正则变量

由于不同自由度不应该相互影响，这些算符需要满足的等时对易关系为

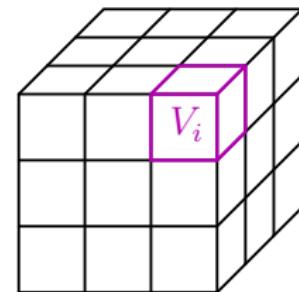
$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

空间离散化

Ω 1.1 节提到，在**量子场论**中，为了平等地处理时间和空间，**空间坐标 x** 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(x, t)$ 的**参数**

\diamond 场论讨论的是具有**无穷多个连续自由度**的系统，每一个空间点 x 上的 $\Phi(x, t)$ 都是一个**广义坐标**

\diamond 为了从有限个分立自由度过过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间**离散化**，划分成无穷多个**小体积元 V_i** ，再取 $V_i \rightarrow 0$ 的**极限**来得到**连续空间**的结果



空间离散化

Ω 1.1 节提到，在**量子场论**中，为了平等地处理时间和空间，**空间坐标 x** 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(x, t)$ 的**参数**

✿ 场论讨论的是具有**无穷多个连续自由度**的系统，每一个空间点 x 上的 $\Phi(x, t)$ 都是一个**广义坐标**

◆ 为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间**离散化**，划分成无穷多个**小体积元 V_i** ，再取 $V_i \rightarrow 0$ 的**极限**来得到**连续空间**的结果

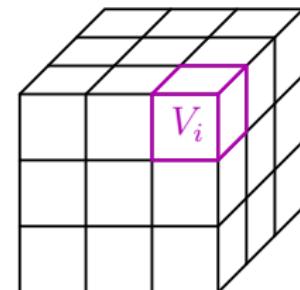
体温计 在**体积元 V_i** 中，定义相应的**广义坐标**

$$\Phi_i(t) \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \Phi(x, t)$$

体温计 这是场 $\Phi(x, t)$ 在 V_i 中的**平均值**

体温计 记 $\partial_\mu \Phi$ 和**拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$** 在 V_i 中的**平均值**为

$$\partial_\mu \Phi_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \partial_\mu \Phi, \quad \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$



离散化后的等时对易关系

当 $V_i \rightarrow 0$ 时, \mathcal{L}_i 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu \Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$, 拉格朗日量表达为

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义，在体积元 V_i 中与广义坐标 $\Phi_i(t)$ 相对应的广义动量是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}$$

离散化的等时对易关系

当 $V_i \rightarrow 0$ 时, \mathcal{L}_i 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu \Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$, 拉格朗日量表达为

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义, 在体积元 V_i 中与广义坐标 $\Phi_i(t)$ 相对应的广义动量是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)}$$

相应的等时对易关系为

$$[\Phi_i(t), \Pi_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [\Phi_i(t), \Phi_j(t)] = 0, \quad [\Pi_i(t), \Pi_j(t)] = 0$$

引入 $\pi_i(t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \frac{\Pi_i(t)}{V_i}$, 则第一、三条等时对易关系可用 $\pi_i(t)$ 表达为

$$[\Phi_i(t), \pi_j(t)] = i \frac{\delta_{ij}}{V_j}, \quad [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0$$

δ 函数

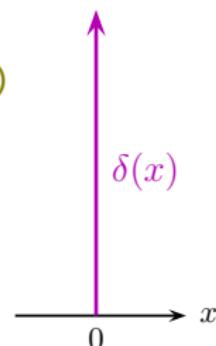
从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1$

对任意连续函数 $f(x)$ 有 $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - y)$ (挑选性)

$\delta(x)$ 是偶函数， $\delta(x) = \delta(-x)$ ，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ipx} = 2\pi \delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y), \quad \text{x } \delta(x) = 0$$



δ 函数

从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1$

对任意连续函数 $f(x)$ 有
$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - y) \quad (\text{挑选性})$$

 $\delta(x)$ 是偶函数， $\delta(x) = \delta(-x)$ ，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ipx} = 2\pi \delta(p)$ 和

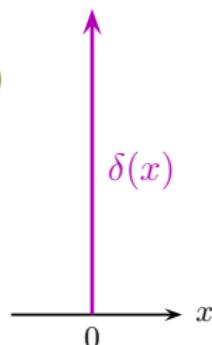
$$f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y), \quad \text{x } \delta(x) = 0$$

 这里约定，函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} f(x)$

 Fourier 逆变换 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \tilde{f}(p)$ ， $2\pi \delta(p)$ 是 $f(x) = 1$ 的 Fourier 变换

 若方程 $f(x) = 0$ 具有若干个分立的单根 x_i ，则

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$



三维 δ 函数

用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$

那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$ ， $\int d^3x \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$ ，有 $f(\mathbf{y}) = \int d^3x f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{x} 的偶函数， $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$ ，满足

$$\int d^3x e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$$



Joseph Fourier
(1768–1830)



Paul Dirac
(1902–1984)

三维 δ 函数

用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$

那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$ ， $\int d^3x \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$ ，有 $f(\mathbf{y}) = \int d^3x f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{x} 的偶函数， $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$ ，满足

$$\int d^3x e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$$

 在三维空间中，函数 $f(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**是

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

 Fourier 逆变换是

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{p})$$

 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 是 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的 Fourier 变换



Joseph Fourier
(1768–1830)



Paul Dirac
(1902–1984)

量子场论中的正则对易关系

$f(\mathbf{x})$ 在 V_i 上的平均值 $f_i = \sum_j f_j \delta_{ij} = \sum_j V_j f_j \frac{\delta_{ij}}{V_j}$

$f(\mathbf{x}) = \int d^3y f(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \rightarrow 0$ 极限形式

也就是说，在连续极限下， $\frac{\delta_{ij}}{V_j} \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$\Phi_i(t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t)$, $\partial_\mu \Phi_i \rightarrow \partial_\mu \Phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$

$\pi_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial (\partial_0 \Phi_i)} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} = \pi(\mathbf{x}, t)$ (共轭动量密度)

因此，等时对易关系化为

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

量子场论中的正则对易关系

$f(\mathbf{x})$ 在 V_i 上的平均值 $f_i = \sum_j f_j \delta_{ij} = \sum_j V_j f_j \frac{\delta_{ij}}{V_j}$

$f(\mathbf{x}) = \int d^3y f(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \rightarrow 0$ 极限形式

也就是说，在连续极限下， $\frac{\delta_{ij}}{V_j} \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$\Phi_i(t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t)$, $\partial_\mu \Phi_i \rightarrow \partial_\mu \Phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$

$\pi_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial (\partial_0 \Phi_i)} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} = \pi(\mathbf{x}, t)$ (共轭动量密度)

因此，等时对易关系化为

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

推广到包含若干个场 Φ_a 的系统，假设不同的场相互独立，则

$$[\Phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi_a(\mathbf{x}, t), \Phi_b(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = 0$$

这就是量子场论中的正则对易关系，它是场的正则量子化的出发点

此时，系统的正则变量 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$ 和 $\pi_a(\mathbf{x}, t)$ 都是 Hilbert 空间上的算符



David Hilbert
(1862–1943)

2.3 节 实标量场的正则量子化

 如果场 $\phi(x)$ 是 Lorentz 标量，就称它为**标量场**

 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$

 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$ ，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x)$$

 量子化之后， $\phi(x)$ 是一个**厄米算符**

2.3 节 实标量场的正则量子化

 如果场 $\phi(x)$ 是 Lorentz 标量，就称它为**标量场**

 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$

 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$ ，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x)$$

 量子化之后， $\phi(x)$ 是一个**厄米算符**

 假设 $\phi(x)$ 是**不参与相互作用的自由**实标量场，相应的**Lorentz 不变拉氏量**是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

 其中 $m > 0$ 是实标量场的**质量**，第一项是动能项，第二项是质量项

Klein-Gordon 方程

💡 注意到 $\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)\partial_\nu \phi = \frac{1}{2}[(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2 - (\partial_2 \phi)^2 - (\partial_3 \phi)^2]$

🌵 有 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} = -\partial_i \phi = \partial^i \phi$

🐙 归纳起来得 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$

🦅 因此, Euler-Lagrange 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi$$

🐫 也就是说, $\phi(x)$ 满足 Klein-Gordon 方程

$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0$



Oskar Benjamin Klein
(1894–1977)

Walter Gordon
(1893–1939)

🦙 这是实标量场的经典运动方程

等时对易关系



实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi(x)$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的时间导数，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ 因子，就会得到

$\pi(x) = 2\partial_0\phi(x)$ ，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也要引入 $1/2$ 因子，否则 **Klein-Gordon** 方程中质量不是 m ，而是 $\sqrt{2}m$

等时对易关系

 实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi(x)$$

 即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的时间导数，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

 如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ 因子，就会得到

$\pi(x) = 2\partial_0\phi(x)$ ，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

 质量项也要引入 $1/2$ 因子，否则 Klein-Gordon 方程中质量不是 m ，而是 $\sqrt{2}m$

 现在，把**正则变量** $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 看作 Hilbert 空间上的**算符**

 要求它们满足**等时对易关系**

$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$

 这种做法称为**正则量子化**

2.3.1 小节 平面波展开

🌴 在量子力学中，无界空间里单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$$

🐠 有 $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \exp(-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = E\Psi$ ， $-i\nabla\Psi = \mathbf{p} \exp(-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{p}\Psi$

🦀 可见， $\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符， $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ 是动量微分算符

☀️ 组合起来，四维动量微分算符是 $\hat{p}^\mu = i \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = i\partial^\mu$

🔔 将平面波解改写成 $\Psi(x) = \exp(-ip \cdot x)$ ，其中 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ， $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ ，则

$$i\partial^\mu \Psi = i\partial^\mu e^{-ip \cdot x} = p^\mu e^{-ip \cdot x} = p^\mu \Psi$$

🐟 因此， p^μ 是四维动量微分算符 $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu$ 的本征值

🐟 平面波解 $\Psi(x) = \exp(-ip \cdot x)$ 描述四维动量为 p^μ 的粒子



正能解和负能解

现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x) = \exp(-ik \cdot x)$ ，其中四维动量 $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$

那么， $\partial^2 \varphi = \partial^\mu \partial_\mu \varphi = \partial^\mu (-ik_\mu \varphi) = (-i)^2 k_\mu k^\mu \varphi = -\mathbf{k}^2 \varphi$

从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(\mathbf{k}^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$ ，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$ ，其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

正能解和负能解

现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x) = \exp(-ik \cdot x)$ ，其中四维动量 $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$

那么， $\partial^2 \varphi = \partial^\mu \partial_\mu \varphi = \partial^\mu (-ik_\mu \varphi) = (-i)^2 k_\mu k^\mu \varphi = -\mathbf{k}^2 \varphi$

从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(\mathbf{k}^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$ ，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$ ，其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

因此，对于**固定的 \mathbf{k}** ，有两个线性独立的平面波解

$k^0 = E_{\mathbf{k}}$ 对应于**正能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = \exp[-i(k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = \exp[-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$$

$k^0 = -E_{\mathbf{k}}$ 对应于**负能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) = \exp[-i(k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = \exp[i(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$$

一般解

从而，满足 **Klein-Gordon 方程** 的场算符 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的一般解可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{x}) + \tilde{a}_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{x}) \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 \mathbf{k} 的算符， $1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是归一化因子

这是一个形式为 **Fourier 积分** 的平面波展开式，把 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 展开成三维空间中无穷多个动量模式的叠加

一般解

从而，满足 **Klein-Gordon 方程** 的场算符 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的一般解可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{x}) + \tilde{a}_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{x}) \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 \mathbf{k} 的算符， $1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是归一化因子

这是一个形式为 **Fourier 积分** 的平面波展开式，把 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 展开成三维空间中无穷多个动量模式的叠加

取上式的厄米共轭，得

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的 \mathbf{k} 替换成 $-\mathbf{k}$ 不会改变积分的结果，而 $E_{-\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}$

自共轭条件



观察

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$$

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$$

可知，**自共轭条件** $\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t)$ 意味着 $\tilde{a}_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}^\dagger$

注意，由 $\tilde{a}_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ 可以推出 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = a_{-\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger = a_{\mathbf{k}}$ 。因而

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \end{aligned}$$

第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$

平面波展开式

对于

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$$

把动量记号 \mathbf{k} 替换成 \mathbf{p} ，将 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

其中 $p \cdot x = p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ ，且 $p^0 > 0$ ，满足质壳条件 $p^0 = E_p \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$

$a_{\mathbf{p}}$ 是湮灭算符，对应于正能解 $e^{-ip \cdot x}$

$a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 是产生算符，对应于负能解 $e^{ip \cdot x}$

共轭动量密度算符的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \partial_0 \phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

2.3.2 小节 产生湮灭算符的对易关系

 在三维空间中对 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 作 Fourier 变换，有

$$\int d^3x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(p-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(p+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \right]$$

 这里比 Fourier 变换公式 $\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 多乘了一个 $e^{iq^0 t}$ 因子，其中 $q^0 = E_{\mathbf{q}}$ ，使指数因子变成 $e^{iq^0 t} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ 。利用

$$\int d^3x e^{\pm i(p-q)\cdot\mathbf{x}} = \int d^3x e^{\pm i(p^0 - q^0)t} e^{\mp i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0 - q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

$$\int d^3x e^{\pm i(p+q)\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0 + q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$$

得

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(p^0 - q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(p^0 + q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0 t} \right) \end{aligned}$$

 在第一步中， $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ ， $q^0 = \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + m^2}$ ，两个三维 δ 函数分别要求 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ ，都导致 $p^0 = q^0$ ，对 d^3p 积分即得第二步结果

产生湮灭算符的表达式

类似地, $\pi(x, t)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{iq \cdot x} \pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(p-q) \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(p+q) \cdot x} \right] \\ &= \int d^3p \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(p^0 - q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(p^0 + q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \right] \\ &= \frac{-iq_0}{\sqrt{2E_q}} \left(a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0t} \right) \end{aligned}$$

从而 $\int d^3x e^{iq \cdot x} [\pi(x) - iq_0 \phi(x)] = \int d^3x e^{iq \cdot x} \pi(x) - iq_0 \int d^3x e^{iq \cdot x} \phi(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2iq_0}{\sqrt{2E_q}} a_{\mathbf{q}} = -i\sqrt{2E_q} a_{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

即

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ip \cdot x} [\pi(x) - ip_0 \phi(x)]$$

取厄米共轭, 并使用自共轭条件 $\phi^\dagger = \phi$ 和 $\pi^\dagger = \pi$, 得

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} [\pi(x) + ip_0 \phi(x)]$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

令 $x^0 = y^0 = t$ ，利用等时对易关系推出

$$\begin{aligned}
 [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y [e^{ip \cdot x} \{\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t)\}, e^{-iq \cdot y} \{\pi(\mathbf{y}, t) + iq_0\phi(\mathbf{y}, t)\}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) + iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 - q^0)t} e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} \{iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 - q^0)t} e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} [-i(p_0 + q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \\
 &= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(p - q) \cdot x} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

令 $x^0 = y^0 = t$, 利用等时对易关系推出

$$\begin{aligned}
 [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \{\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t)\}, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \{\pi(\mathbf{y}, t) + iq_0\phi(\mathbf{y}, t)\}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) + iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0 + q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \\
 &= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

根据 δ 函数的性质 $f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, 有

$$\frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

故

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$



两个产生算符的对易关系

类似地,

$$\begin{aligned}
 & [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) - iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} (p_0 - q_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$\begin{aligned}
 & [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) - iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ 只在 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ 处非零，取值 $+\infty$ ，而 $E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}$ 在 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ 处取值为零

由于 $\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ 在 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ 处奇性比较弱，有

$$(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 0$$

故

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0$$

产生湮灭算符的对易关系

此外，

$$[a_p^\dagger, a_q^\dagger] = a_p^\dagger a_q^\dagger - a_q^\dagger a_p^\dagger = (a_q a_p - a_p a_q)^\dagger = [a_q, a_p]^\dagger = 0$$

因此，可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的乘积次序，即

$$a_p a_q = a_q a_p, \quad a_p^\dagger a_q^\dagger = a_q^\dagger a_p^\dagger$$

综上，产生湮灭算符满足对易关系

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0$$

这是简谐振子对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 和 $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$ 在量子场论中的推广

2.3.3 小节 哈密顿量和总动量

 注意到 $\pi = \partial_0 \phi$ ，自由实标量场的哈密顿量密度表达为

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

 从而哈密顿量算符是

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

 根据 Noether 定理，实标量场的总动量算符是 $P^i = \int d^3x \pi \partial^i \phi$

2.3.3 小节 哈密顿量和总动量

 注意到 $\pi = \partial_0 \phi$ ，自由实标量场的哈密顿量密度表达为

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

 从而哈密顿量算符是

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

 根据 Noether 定理，实标量场的总动量算符是 $P^i = \int d^3x \pi \partial^i \phi$

 利用等时对易关系，推出对易关系

$$\begin{aligned} [\phi(x), H] &= \frac{1}{2} \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi^2(\mathbf{y}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y \{ \pi(\mathbf{y}, t) [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] + [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] \pi(\mathbf{y}, t) \} \\ &= i \int d^3y \pi(\mathbf{y}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\pi(\mathbf{x}, t) = i\partial^0 \phi(x) \end{aligned}$$

四维动量算符

 再推出对易关系

$$\begin{aligned}
 [\phi(\mathbf{x}), P^i] &= \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t)] = \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) \\
 &= i \int d^3y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) = i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\mathbf{x}, t) = i \partial^i \phi(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

四维动量算符

🍑 再推出对易关系

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \mathbf{P}^i] &= \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t)] = \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) \\ &= i \int d^3y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) = i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\mathbf{x}, t) = i \partial^i \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

🍉 引入四维动量算符

$$P^\mu = (H, \mathbf{P})$$

🍒 将这两个对易关系合起来写成

$$[\phi(\mathbf{x}), P^\mu] = i \partial^\mu \phi(\mathbf{x})$$

🍅 可见，场算符 $\phi(\mathbf{x})$ 与四维动量算符 P^μ 的对易子相当于将四维动量微分算符 $i \partial^\mu$ 作用在 $\phi(\mathbf{x})$ 上

哈密顿量算符

 将 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的平面波展开式代入，哈密顿量算符化为

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ [(-ip_0)(-iq_0) + (\mathbf{ip}) \cdot (\mathbf{iq})] \right. \\
 &\quad \times \left(a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left(a_q e^{-iq \cdot x} - a_q^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \\
 &\quad + \left. m^2 \left(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left(a_q e^{-iq \cdot x} + a_q^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ (p_0 q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[a_p a_q^\dagger e^{-i(p-q) \cdot x} + a_p^\dagger a_q e^{i(p-q) \cdot x} \right] \right. \\
 &\quad + (-p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[a_p a_q e^{-i(p+q) \cdot x} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{i(p+q) \cdot x} \right] \left. \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_p E_q}} \\
 &\quad \times \left\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})(p_0 q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[a_p a_q^\dagger e^{-i(p_0 - q_0)t} + a_p^\dagger a_q e^{i(p_0 - q_0)t} \right] \right. \\
 &\quad + \left. \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})(-p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[a_p a_q e^{-i(p_0 + q_0)t} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{i(p_0 + q_0)t} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

哈密顿量算符的表达式

对 \mathbf{q} 积分，得

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[(E_p^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2) (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) \right. \\ & \left. + (-E_p^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2) (a_p a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_p t} + a_p^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_p t}) \right] \end{aligned}$$

根据质壳条件 $E_p^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ ，第二步方括号中第二项没有贡献，从而

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \left[2a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \right]$$

第二步用到产生湮灭算符的对易关系 $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ ，于是

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$$

哈密顿量的正定性

 **自由实标量场的哈密顿量** $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$ 可看

作一维简谐振子哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$ 向**无穷多自由度**的推广

 **半正定算符** $N_p \equiv a_p^\dagger a_p$ 是三维动量空间中动量为 p 处的**粒子数密度算符**

 每个粒子的能量是 E_p ， H 的**第一项是所有动量模式所有粒子**贡献的能量之和

哈密顿量的正定性

自由实标量场的哈密顿量 $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$ 可看

作一维简谐振子哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$ 向**无穷多自由度**的推广

半正定算符 $N_p \equiv a_p^\dagger a_p$ 是三维动量空间中动量为 p 处的**粒子数密度算符**

每个粒子的能量是 E_p , H 的**第一项是所有动量模式所有粒子**贡献的能量之和

由 $\int d^3 x e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3 x = \tilde{V}$

\tilde{V} 是进行积分的**空间体积**, 对于全空间而言是**无穷大的**

H 的**第二项是一个正无穷大 c 数** (*c-number*, 即经典的数, 不是算符), 是**真空的零点能** (**真空能**), 是**所有动量模式在全空间**贡献的零点能之和

哈密顿量的正定性

自由实标量场的哈密顿量 $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$ 可看

作一维简谐振子哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$ 向**无穷多自由度**的推广

半正定算符 $N_p \equiv a_p^\dagger a_p$ 是三维动量空间中动量为 p 处的**粒子数密度算符**

每个粒子的能量是 E_p , H 的**第一项**是**所有动量模式所有粒子**贡献的能量之和

由 $\int d^3 x e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3 x = \tilde{V}$

\tilde{V} 是进行积分的**空间体积**, 对于全空间而言是**无穷大**的

H 的**第二项**是一个**正无穷大 c 数** (c-number, 即经典的数, 不是算符), 是**真空的零点能** (真空能), 是**所有动量模式在全空间**贡献的零点能之和

一维简谐振子的零点能为 $E_0 = \omega/2$, 这是**自由度为 1**时的结果

推广到**无穷多自由度**自然会得到**正无穷大的零点能**

如果不讨论引力现象, 零点能通常并不重要, 因为实验上只能测量两个**能量之差**

经过正则量子化之后, 实标量场的哈密顿量 H 是**正定算符**, **不存在负能量困难**

哈密顿量本征态

 哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$\begin{aligned}[H, a_p^\dagger] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger a_q, a_p^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_q \left(a_q^\dagger [a_q, a_p^\dagger] + [a_q^\dagger, a_p^\dagger] a_q \right) \\ &= \int d^3q E_q a_q^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_p a_p^\dagger \\ [H, a_p] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger, a_p] a_q = - \int d^3q E_q a_q \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_p a_p\end{aligned}$$

哈密顿量本征态



哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$\begin{aligned}[H, a_p^\dagger] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger a_q, a_p^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_q \left(a_q^\dagger [a_q, a_p^\dagger] + [a_q^\dagger, a_p^\dagger] a_q \right) \\ &= \int d^3q E_q a_q^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_p a_p^\dagger \\ [H, a_p] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger, a_p] a_q = - \int d^3q E_q a_q \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_p a_p\end{aligned}$$

故 $Ha_p^\dagger = a_p^\dagger H + E_p a_p^\dagger$, $Ha_p = a_p H - E_p a_p$

设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态, 本征值为 E , 则 $H|E\rangle = E|E\rangle$

从而,

$$Ha_p^\dagger |E\rangle = (a_p^\dagger H + E_p a_p^\dagger) |E\rangle = (E + E_p) a_p^\dagger |E\rangle$$

$$Ha_p |E\rangle = (a_p H - E_p a_p) |E\rangle = (E - E_p) a_p |E\rangle$$

可见, 当 $a_p^\dagger |E\rangle \neq 0$ 时, 产生算符 a_p^\dagger 的作用是使能量本征值增加 E_p

当 $a_p |E\rangle \neq 0$ 时, 湮灭算符 a_p 的作用是使能量本征值减少 E_p

总动量

将 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的平面波展开式代入，**总动量算符化为**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= - \int d^3x \pi \nabla \phi \\
 &= - \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} (-ip_0) (a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) (iq) (a_q e^{-iq \cdot x} - a_q^\dagger e^{iq \cdot x}) \\
 &= \int \frac{d^3x d^3p d^3q p_0 \mathbf{q}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \\
 &\quad \times \left[a_p a_q^\dagger e^{-i(p-q) \cdot x} + a_p^\dagger a_q e^{i(p-q) \cdot x} - a_p a_q e^{-i(p+q) \cdot x} - a_p^\dagger a_q^\dagger e^{i(p+q) \cdot x} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p d^3q p_0 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left[a_p a_q^\dagger e^{-i(p_0 - q_0)t} + a_p^\dagger a_q e^{i(p_0 - q_0)t} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \left[a_p a_q e^{-i(p_0 + q_0)t} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{i(p_0 + q_0)t} \right] \right\} \\
 &= \int \frac{d^3p \textcolor{purple}{E_p} \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \textcolor{purple}{2E_p}} \left(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p - a_{-\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_p t} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_p t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p - a_{-\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_p t} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_p t} \right)
 \end{aligned}$$

化简总动量

 作变量替换 $p \rightarrow -p$ ，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \left(a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger e^{2iE_p t} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-p) \left(a_{-p} a_p e^{-2iE_p t} + a_{-p}^\dagger a_p^\dagger e^{2iE_p t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \left(a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger e^{2iE_p t} \right) \end{aligned}$$

 因此这个积分为零，从而

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \left(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p - a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} - a_p^\dagger a_{-p}^\dagger e^{2iE_p t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \left(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p \right) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \left[2a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3 p p \end{aligned}$$

总动量表达式

由 $\int d^3 p \mathbf{p} = \int d^3 p (-\mathbf{p}) = - \int d^3 p \mathbf{p}$ 得 $\int d^3 p \mathbf{p} = 0$

于是，自由实标量场的总动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和

总动量表达式

由 $\int d^3 p \mathbf{p} = \int d^3 p (-\mathbf{p}) = - \int d^3 p \mathbf{p}$ 得 $\int d^3 p \mathbf{p} = 0$

于是，自由实标量场的总动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和

与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \mathbf{q} a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int d^3 q \mathbf{q} a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \mathbf{q} [a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = - \int d^3 q \mathbf{q} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -\mathbf{p} a_{\mathbf{p}}$$

即

$$\mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad \mathbf{P} a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}$$

单粒子态



接着, 定义**单粒子态**

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是**归一化因子**

根据 $H a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle = (E + E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle$, 有 **H** $|\mathbf{p}\rangle = (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}}) |\mathbf{p}\rangle$

由 $\mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 和 $\mathbf{P} |0\rangle = \mathbf{0} |0\rangle$ 得

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger) |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle$$

单粒子态



接着, 定义**单粒子态**

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是**归一化因子**

根据 $H a_{\mathbf{p}}^\dagger |\mathbf{E}\rangle = (E + E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger |\mathbf{E}\rangle$, 有 **H** $|\mathbf{p}\rangle = (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}}) |\mathbf{p}\rangle$

由 $\mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 和 $\mathbf{P} |0\rangle = \mathbf{0} |0\rangle$ 得

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger) |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle$$

相比于真空态 $|0\rangle$, 单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ **多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$** , 也**多了一份动量 \mathbf{p}**

因此, $|\mathbf{p}\rangle$ 描述的是一个**动量为 \mathbf{p} 的粒子**, 这个粒子的**能量**为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$

这满足**狭义相对论中的色散关系**

而**拉氏量 \mathcal{L}** 中实标量场的质量 m 就是粒子的**质量**

可以看到, **产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$** 的作用是**产生一个动量为 \mathbf{p} 的粒子**

单粒子态的内积

🦆 将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$\begin{aligned} a_p |\mathbf{q}\rangle &= \sqrt{2E_q} a_p a_q^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_q} [a_q^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})] |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

🐱 如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ，则上式为零

🐰 如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ ，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 a_p 的作用下变成真空态 $|0\rangle$

🐭 可见，湮灭算符 a_p 的作用是减少一个动量为 \mathbf{p} 的粒子

单粒子态的内积

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} |\mathbf{q}\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} [a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})] |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ，则上式为零

如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ ，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态 $|0\rangle$

可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 \mathbf{p} 的粒子

单粒子态的内积为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} \langle 0 | [a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})] | 0 \rangle \\ &= 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned}$$

上式是 Lorentz 不变的，这是单粒子态归一化因子取成 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的原因，证明见下

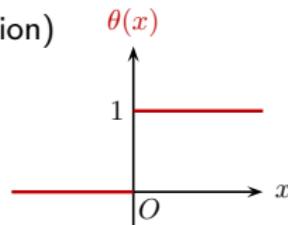
内积 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 是发散的，原因在于产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 是在无界空间中讨论量子场平面波解时定义的，内积有限的粒子态可通过构造波包得到，见习题 2.3

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

 接下来证明 $2E_p\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 是 Lorentz 不变的

 引入 Heaviside 阶跃函数 (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



 对于满足质壳条件的四维动量 p^μ , p^0 的符号在任意惯性系中不会改变 (见习题 1.3)

 即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变



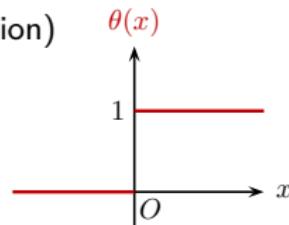
Oliver Heaviside
(1850–1925)

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

 接下来证明 $2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 是 Lorentz 不变的

 引入 Heaviside 阶跃函数 (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



 对于满足质壳条件的四维动量 p^μ , p^0 的符号在任意惯性系中不会改变 (见习题 1.3)

 即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变

 一个物理粒子的四维动量 p^μ 满足质壳条件 $p^2 - m^2 = 0$ 且能量为正 ($p^0 > 0$)

 任意 Lorentz 标量函数 $F(p)$ 在物理动量区域上的 Lorentz 不变积分表达为

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) F(p)$$



Oliver Heaviside
(1850–1925)

单粒子态的内积

利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) F(p) = \int d^3 p \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2] \theta(p^0) F(p^0, \mathbf{p}) \\ = \int d^3 p \int_0^{+\infty} dp^0 \frac{\delta(p^0 - E_p)}{2E_p} F(p^0, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p}{2E_p} F(E_p, \mathbf{p})$$

$\theta(p^0)$ 挑选出方程 $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$ 的正根 $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_p$ 的贡献

而 $\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0} \Big|_{p^0=E_p} = 2p^0 \Big|_{p^0=E_p} = 2E_p$

可见, $\frac{d^3 p}{2E_p}$ 是 Lorentz 不变的动量空间体积元

单粒子态的内积

利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) F(p) = \int d^3 p \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2] \theta(p^0) F(p^0, \mathbf{p}) \\ = \int d^3 p \int_0^{+\infty} dp^0 \frac{\delta(p^0 - E_p)}{2E_p} F(p^0, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p}{2E_p} F(E_p, \mathbf{p})$$

$\theta(p^0)$ 挑选出方程 $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$ 的正根 $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_p$ 的贡献

而 $\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0} \Big|_{p^0=E_p} = 2p^0 \Big|_{p^0=E_p} = 2E_p$

可见, $\frac{d^3 p}{2E_p}$ 是 Lorentz 不变的动量空间体积元

对任意 Lorentz 标量函数 $g(\mathbf{q})$, 根据 δ 函数的挑选性, 有

$$g(\mathbf{q}) = \int d^3 p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) g(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p}{2E_p} 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) g(\mathbf{p})$$

最左和最右都是 Lorentz 不变的, 则 $2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 是 Lorentz 不变的, 证毕

单粒子位置本征态

 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上, 得到**态矢**

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x} |0\rangle$$

 它与单粒子态 $|p\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned} \langle p | \phi(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_p}{2E_q}} \langle 0 | a_p a_q^\dagger e^{iq \cdot x} | 0 \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] e^{iq \cdot x} | 0 \rangle \\ &= \int d^3 q \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \delta^{(3)}(p - q) e^{iq \cdot x} \langle 0 | 0 \rangle = e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

单粒子位置本征态

 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x} |0\rangle$$

 它与单粒子态 $|p\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned} \langle p | \phi(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_p}{2E_q}} \langle 0 | a_p a_q^\dagger e^{iq \cdot x} | 0 \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] e^{iq \cdot x} | 0 \rangle \\ &= \int d^3 q \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \delta^{(3)}(p - q) e^{iq \cdot x} \langle 0 | 0 \rangle = e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

 **量子力学**单粒子位置本征态 $|x\rangle$ 与动量本征态 $|p\rangle$ **内积**为 $\langle p | x \rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x}$ ，其中 $(2\pi)^{-3/2}$ 是归一化因子

 两个内积的**形式相似**，因此 $\phi(x)|0\rangle$ 类似于 $t = x^0$ 时刻的**单粒子位置本征态**， $\phi(x)$ 作用在 $|0\rangle$ 上相当于**在时空点 $x^\mu = (t, x)$ 处产生一个粒子**

 平面波展开式的**归一化因子** $1/\sqrt{2E_p}$ 使内积 $\langle p | \phi(x) | 0 \rangle$ 成为 **Lorentz 不变量**

n 粒子态



定义动量分别为 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 的 n 个粒子对应的多粒子态为

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle, \quad C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$$



根据 $H a_p^\dagger = a_p^\dagger H + E_p a_p^\dagger$, H 对它的作用给出

$$\begin{aligned} H |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= C_1 H a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle = C_1 (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger H + E_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger) \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger H a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle + E_{\mathbf{p}_1} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\ &= C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger H \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\ &= \cdots = C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger H |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\ &= (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$



同理, \mathbf{P} 对它的作用给出

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$$



多粒子态 $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ 的能量和动量直接由各个粒子的能量和动量叠加贡献

标量玻色子

由对易关系 $[a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0$ 得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的

标量玻色子

由对易关系 $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

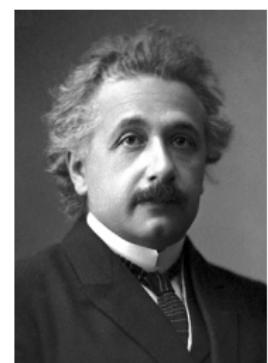
可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的

因此实标量场描述的粒子是一种玻色子，称之为标量玻色子 (scalar boson)，它服从 Bose-Einstein 统计

得到这个结论的关键在于两个产生算符相互对易



Satyendra Nath Bose
(1894–1974)



Albert Einstein
(1879–1955)

双粒子态的内积

 双粒子态的内积为

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \right] \\
 &= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger | 0 \rangle \right] \\
 &= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) \right. \\
 &\quad \left. + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \right] \\
 &= 4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \right]
 \end{aligned}$$

 此内积仅在两种条件下**非零**

 一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2$ ，另一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$

粒子数密度算符

🐼 定义动量均为 \mathbf{q} 的 $n_{\mathbf{q}}$ 个粒子对应的多粒子态

$$|n_{\mathbf{q}}\rangle \equiv C_2(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle, \quad C_2 = (2E_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}/2}$$

🐘 粒子数密度算符 $N_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 对它的作用为

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger \left[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right] (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^2 a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-2} |0\rangle + 2(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= \dots = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle + n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \end{aligned}$$

粒子数算符

hog 在动量空间对粒子数密度算符进行积分，得到的是粒子数算符

$$N \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} N_p = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a_p^\dagger a_p$$

由 $N_p |n_q\rangle = n_q (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_p^\dagger (a_q^\dagger)^{n_q-1} |0\rangle$ 得

$$\begin{aligned} N |n_q\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} N_p |n_q\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n_q (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_p^\dagger (a_q^\dagger)^{n_q-1} |0\rangle \\ &= n_q C_2 (a_q^\dagger)^{n_q} |0\rangle = n_q |n_q\rangle \end{aligned}$$

turtle 因此， $|n_q\rangle$ 是 N 的本征态，本征值为粒子数 n_q

一般多粒子态

更一般地，定义多粒子态

$$|n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \equiv C_3 (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle, \quad C_3 = \prod_{i=1}^m (2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}$$

它描述动量为 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ 的粒子分别有 $n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}$ 个的状态，则

$$\begin{aligned} & N |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \right. \\ &\quad \left. + n_{\mathbf{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}-1} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \right] + n_{\mathbf{p}_1} |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \\ &= \dots = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle \right] + (n_{\mathbf{p}_1} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m}) |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \\ &= (n_{\mathbf{p}_1} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m}) |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \end{aligned}$$

可见， N 确实是描述总粒子数的算符

2.4 节 复标量场的正则量子化

本节讨论复标量场 $\phi(x)$ ，它不满足自共轭条件，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$

自由复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节经典场论中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把复共轭符号 $*$ 改成厄米共轭符号 \dagger

故自由复标量场的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

其中 $m > 0$ 是复标量场的质量

2.4 节 复标量场的正则量子化

 本节讨论**复标量场** $\phi(x)$ ，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$

 **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

 不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭符号** $*$ 改成**厄米共轭符号** \dagger

 故**自由复标量场的 Lorentz 不变拉氏量**为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

 其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**

 $\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(x)$ **线性独立**，是两个**独立的正则变量**，注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} = \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^\dagger$$

 由 **Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$ 推出**经典运动方程**

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0, \quad (\partial^2 + m^2) \phi^\dagger(x) = 0$$

 也就是说， $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 均满足 **Klein-Gordon 方程**

复标量场的分解

 可以将复标量场 ϕ 分解为两个实标量场 ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

 从而拉氏量化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu (\phi_1 - i\phi_2)] \partial_\mu (\phi_1 + i\phi_2) - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_1) \partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_2) \partial_\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 \end{aligned}$$

 对比实标量场拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

 可知复标量场的拉氏量相当于两个**质量相同**的实标量场的拉氏量

2.4.1 小节 平面波展开

 接下来遵循 2.3.1 小节中的方法讨论复标量场的平面波展开式

 区别在于不能够应用自共轭条件

 从而，场算符 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的一般解为

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

 第二步对方括号中第二项作变量替换 $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$

 由于复标量场不满足自共轭条件，算符 $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$ 与 $a_{\mathbf{k}}$ 没有关系，改记为 $b_{\mathbf{k}}^\dagger = \tilde{a}_{-\mathbf{k}}$

 展开式变成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$$

复标量场的平面波展开式

 对 $\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$ 替换动量记号

 把复标量场的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

 其中 p^0 满足质壳条件 $p^0 = E_p \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0$

复标量场的平面波展开式

 对 $\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$ 替换动量记号

 把复标量场的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

 其中 p^0 满足质壳条件 $p^0 = E_p \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0$

 取厄米共轭，就得到 $\phi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

 $a_{\mathbf{p}}$ 和 $b_{\mathbf{p}}$ 是两个相互独立的湮灭算符

 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 和 $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ 是两个相互独立的产生算符

等时对易关系

 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(b_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

 $\phi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip \cdot x} - b_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

 $\pi(\mathbf{x}, t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 互为**厄米共轭**

等时对易关系

$\phi(\mathbf{x}, t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(b_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip \cdot x} - b_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

$\pi(\mathbf{x}, t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 互为**厄米共轭**

依照 $[\Phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 、 $[\Phi_a(\mathbf{x}, t), \Phi_b(\mathbf{y}, t)] = 0$ 和 $[\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = 0$ ，复标量场的**等时对易关系**为

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

$$[\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0$$

产生湮灭算符的对易关系



利用等时对易关系推出以下产生湮灭算符的对易关系

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - q), \quad [a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0$$

$$[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - q), \quad [b_p, b_q] = [b_p^\dagger, b_q^\dagger] = 0$$

$$[a_p, b_q^\dagger] = [b_p, a_q^\dagger] = [a_p, b_q] = [a_p^\dagger, b_q^\dagger] = 0$$

具体推导过程见 2.4.2 小节选读内容

这说明 (a_p, a_p^\dagger) 与 (b_p, b_p^\dagger) 是两套不同的产生湮灭算符，描述两种不同的玻色子

2.4.3 小节 U(1) 整体对称性

 类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 **U(1)** 整体变换

$$\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta} \phi^\dagger(x)$$

 其中实常数 q 是 **U(1)** 荷，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的变换参数

 则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$ 不变，系统具有 **U(1)** 整体对称性

2.4.3 小节 U(1) 整体对称性

 类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 **U(1) 整体变换**

$$\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta} \phi^\dagger(x)$$

 其中实常数 q 是 **U(1) 荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**

 则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$ 不变，系统具有 **U(1) 整体对称性**

 相应的 **U(1) 守恒流** 为 $J^\mu = iq\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$ ，满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，它是一个**厄米算符**，

$$(J^\mu)^\dagger = \{iq[\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi]\}^\dagger = -iq[(\partial^\mu \phi^\dagger) \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi] = iq\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi = J^\mu$$

 **U(1) 守恒荷算符** 是

$$Q = iq \int d^3x \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^0} \phi = iq \int d^3x [\phi^\dagger \partial^0 \phi - (\partial^0 \phi^\dagger) \phi] = iq \int d^3x (\phi^\dagger \pi^\dagger - \pi \phi)$$

U(1) 守恒荷算符

利用平面波展开式，将 U(1) 守恒荷算符化为

$$\begin{aligned}
 Q &= iq \int d^3x (\phi^\dagger \pi^\dagger - \pi \phi) \\
 &= iq \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_k}} \left[(b_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) (-iE_k) (a_k e^{-ik \cdot x} - b_k^\dagger e^{ik \cdot x}) \right. \\
 &\quad \left. - (-iE_p) (b_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) (a_k e^{-ik \cdot x} + b_k^\dagger e^{ik \cdot x}) \right] \\
 &= q \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_k}} \left\{ (E_k + E_p) [a_p^\dagger a_k e^{i(p-k) \cdot x} - b_p b_k^\dagger e^{-i(p-k) \cdot x}] \right. \\
 &\quad \left. + (E_k - E_p) [b_p a_k e^{-i(p+k) \cdot x} - a_p^\dagger b_k^\dagger e^{i(p+k) \cdot x}] \right\} \\
 &= q \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_p E_k}} \left\{ (E_k + E_p) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[a_p^\dagger a_k e^{i(E_p - E_k)t} - b_p b_k^\dagger e^{-i(E_p - E_k)t} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (E_k - E_p) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \left[b_p a_k e^{-i(E_p + E_k)t} - a_p^\dagger b_k^\dagger e^{i(E_p + E_k)t} \right] \right\} \\
 &= q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_p^\dagger a_p - b_p b_p^\dagger)
 \end{aligned}$$

正粒子和反粒子

由对易关系 $[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 推出

$$\begin{aligned} Q &= q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(q a_p^\dagger a_p - q b_p^\dagger b_p \right) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q \end{aligned}$$

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_p^\dagger a_p$ 的系数是 q ，而粒子数密度算符 $b_p^\dagger b_p$ 的系数是 $-q$

正粒子和反粒子

由对易关系 $[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 推出

$$\begin{aligned} Q &= q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(a_p^\dagger a_p - b_p b_p^\dagger \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(q a_p^\dagger a_p - q b_p^\dagger b_p \right) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q \end{aligned}$$

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_p^\dagger a_p$ 的系数是 q ，而粒子数密度算符 $b_p^\dagger b_p$ 的系数是 $-q$

可见， (a_p, a_p^\dagger) 描述的粒子具有的 U(1) 荷为 q ，称为正粒子

另一方面， (b_p, b_p^\dagger) 描述的粒子具有相反的 U(1) 荷 $-q$ ，称为反粒子

因此，复标量场描述一对正反标量玻色子

除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和

正粒子和反粒子

由对易关系 $[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 推出

$$\begin{aligned} Q &= q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(a_p^\dagger a_p - b_p b_p^\dagger \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(q a_p^\dagger a_p - q b_p^\dagger b_p \right) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q \end{aligned}$$

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_p^\dagger a_p$ 的系数是 q ，而粒子数密度算符 $b_p^\dagger b_p$ 的系数是 $-q$

可见， (a_p, a_p^\dagger) 描述的粒子具有的 U(1) 荷为 q ，称为正粒子

另一方面， (b_p, b_p^\dagger) 描述的粒子具有相反的 U(1) 荷 $-q$ ，称为反粒子

因此，复标量场描述一对正反标量玻色子

除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和

这里单个粒子的荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是相加性的，并且来自于一种内部对称性，因而是一种内部相加性量子数 (internal additive quantum number)

实际上，任何反粒子的所有内部相加性量子数都与相应的正粒子相反



不存在负概率困难

如果将复标量场 $\phi(x)$ 替换成量子力学的单粒子波函数 $\Psi(x)$ ，则

$$\frac{Q}{q} = i \int d^3x [\phi^\dagger \partial^0 \phi - (\partial^0 \phi^\dagger) \phi]$$

与单粒子概率密度 $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \right)$ 的全空间积分分类似

但是，这里 $\frac{Q}{q}$ 的本征值被解释为正粒子数与反粒子数之差，显然是可正可负的

也就是说，在量子场论中 $\frac{Q}{q}$ 与单粒子在空间中的概率没有关系

因而不像量子力学那样存在负概率困难

纯中性粒子

 如果对**实标量场**作类似的 **$U(1)$ 整体变换**, 则**自共轭条件**使得

$$e^{iq\theta} \phi(x) = \phi'(x) = [\phi'(x)]^\dagger = [e^{iq\theta} \phi(x)]^\dagger = e^{-iq\theta} \phi^\dagger(x) = e^{-iq\theta} \phi(x)$$

 上式要求 $q = 0$

 因此, 对**实标量场****不能**进行非平庸的 $U(1)$ 整体变换

 **自共轭条件**使**实标量场**描述的粒子**不能**具有任何非零的内部相加性量子数

 也就是说, **正粒子与反粒子是相同的**

 **实标量场**描述的粒子是一种**纯中性粒子** (truly neutral particle)

哈密顿量和总动量

经过进一步计算，得到复标量场的哈密顿量算符

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \left(a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p \right) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p$$

除了零点能，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子的能量之和

动量为 \mathbf{p} 的正粒子和反粒子的能量均为 $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ ，可见它们具有相同的质量 m

另一方面，复标量场的总动量算符为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p)$$

总动量是所有动量模式所有正反粒子的动量之和

具体推导过程见 2.4.4 小节选读内容