

量子场论

第6章 量子场的相互作用

6.5节 散射截面和衰变宽度

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024年5月16日



6.5 节 散射截面和衰变宽度

没有相互作用时, S 算符就是恒等算符 \mathbb{I} , S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle$

■ 存在相互作用时, $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$

其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项  S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | i T | i \rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见, S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $iT_{fi} \equiv \langle f | iT | i \rangle$

6.5 节 散射截面和衰变宽度

没有相互作用时, S 算符就是恒等算符 \mathbb{I} , S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle$

■ 存在相互作用时, $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + iT$

其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项  S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | i T | i \rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见, S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $iT_{fi} \equiv \langle f | iT | i \rangle$

由于能动量守恒定律, 初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 必定等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ , 这意味着 T 矩阵元的形式为

$$iT_{fi} = \langle f | iT | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$$

四维 δ 函数体现了能动量守恒定律； M 是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元**，或**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数

6.5.1 小节 跃迁概率

发生相互作用时, $i \rightarrow f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$ ，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

💡 由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式

$$\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$$

6.5.1 小节 跃迁概率

发生相互作用时, $i \rightarrow f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$ ，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式

$$\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$$

故 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \tilde{V}\tilde{T}$ ， \tilde{V} 是空间区域的体积， \tilde{T} 是时间范围的长度

对于全空间全时间积分, \tilde{V} 和 \tilde{T} 趋于无穷大

于是推出 $|\mathcal{T}_{fi}|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$

对于时空坐标的函数 $f(x)$ ，将 Fourier 变换约定为

$$\tilde{f}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x)$$

Fourier 逆变换为

$$f(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{f}(p)$$

初态和末态

现在讨论 **2** 体初态到 **n** 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2** 个粒子 **A** 和 **B**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n** 个粒子的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 p_A 和 p_B ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

此处省略了产生算符的螺旋度指标(或者说,自旋指标)

$|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到零

初态和末态

现在讨论 **2** 体初态到 **n** 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2** 个粒子 **A** 和 **B**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n** 个粒子的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 p_A 和 p_B ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

此处省略了产生算符的螺旋度指标(或者说,自旋指标)

|0>是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到零

类似地，末态可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2E_j} a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \right) |0\rangle, \quad E_j = p_j^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}$$

其中 p_j ($j = 1, \dots, n$) 是 n 个末态粒子的动量

此时，初态和末态的**四维总动量**分别是 $p_i^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=1}^n p_j^\mu$

初末态内积

当 A 和 B 粒子由两个不同的量子场描述时, 可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积,

$$|i\rangle = \sqrt{2E_A} a_{\mathbf{p}_A}^\dagger |0\rangle_A \otimes \sqrt{2E_B} a_{\mathbf{p}_B}^\dagger |0\rangle_B = |\mathbf{p}_A\rangle_A \otimes |\mathbf{p}_B\rangle_B$$

这里 $|0\rangle_A$ 和 $|0\rangle_B$ 分别是描述 A 和 B 的两个量子场所对应的**真空态**

参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

利用 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_A\rangle_A$ 和 $|\mathbf{p}_B\rangle_B$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} | \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

于是得到 $\langle i|i \rangle = \langle p_A | p_A \rangle_A \langle p_B | p_B \rangle_B = 4E_A E_B \tilde{V}^2$

初末态内积

当 A 和 B 粒子由两个不同的量子场描述时, 可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积,

$$|i\rangle = \sqrt{2E_A} a_{\mathbf{p}_A}^\dagger |0\rangle_A \otimes \sqrt{2E_B} a_{\mathbf{p}_B}^\dagger |0\rangle_B = |\mathbf{p}_A\rangle_A \otimes |\mathbf{p}_B\rangle_B$$

这里 $|0\rangle_A$ 和 $|0\rangle_B$ 分别是描述 A 和 B 的两个量子场所对应的**真空态**

参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = 2E_p(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

利用 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_A\rangle_A$ 和 $|\mathbf{p}_B\rangle_B$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} | \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

于是得到 $\langle i|i \rangle = \langle p_A | p_A \rangle_A \langle p_B | p_B \rangle_B = 4E_A E_B \tilde{V}^2$

当 A 和 B 是由同一量子场描述的全同粒子时, 若 $p_A \neq p_B$, 也能推出这个结果

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)]$$

如果末态不包含全同粒子, 同理可得 $\langle f|f \rangle = \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i \rangle \langle f|f \rangle} = \frac{\tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i \rangle \langle f|f \rangle} = \frac{\tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

此处四维 δ 函数可以分解为

$$\delta^{(4)} \left(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right) = \delta^{(3)} \left(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right) \delta \left(E_A + E_B - \sum_{j=1}^n E_j \right)$$

在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取任意满足运动学要求的值，而能动量守恒定律对应的运动学条件 $p_A^\mu + p_B^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu = 0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

 为了计算总的跃迁率, 需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来, 也就是说, 需要对末态的动量相空间积分

 考察一维动量相空间, 先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动, 再让 $L \rightarrow \infty$

 为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符, 必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

一维动量相空间

为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷Ⅰ(第四版) §4.4.3]

作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

结合周期性边界条件, 有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$, 故 $\exp(ipL) = 1$

这意味着 $pL = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), 因此动量本征值是 $p_k = 2k\pi/L$ ($k \in \mathbb{Z}$)

一维动量相空间

为了计算总的跃迁率, 需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来, 也就是说, 需要对末态的动量相空间积分

考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

为了确保动量微分算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷Ⅰ(第四版) §4.4.3]

作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

结合周期性边界条件, 有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$, 故 $\exp(ipL) = 1$

这意味着 $pL = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), 因此动量本征值是 $p_k = 2k\pi/L$ ($k \in \mathbb{Z}$)

 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 相邻动量本征值之差变成动量的微分,

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \rightarrow dp, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

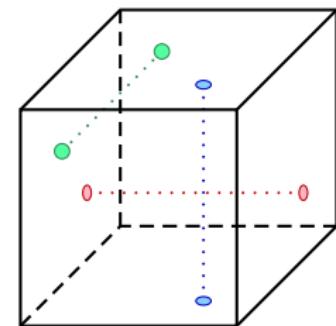
$$\text{👉} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$



单位时间内跃迁概率

推广到三维情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，周期性边界条件相当于将立方体表面上任意一点视作与位于相对的面上的对应点等同

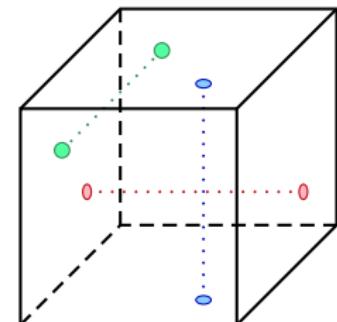
满足此条件的动量本征值为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时, 有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$

考虑 n 个末态粒子所有动量取值, 对 $R_{\{p_j\}}$ 作末态相空间积分, 得到单位时间内 $2 \rightarrow n$ 散射过程的跃迁概率

$$\begin{aligned}
R &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\
&= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}$$

2.3.4 小节的讨论表明, 上式中相空间体积元 $\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 Lorentz 不变的, 而且相应积分正好囊括了满足质壳条件且能量为正的所有物理动量



末态对称性因子

以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立

假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以**相应的**末态对称性因子 S** ，从而**避免**量子态的**重复计算**

如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$S = \prod_k n_k!$$

 单位时间跃迁概率变成

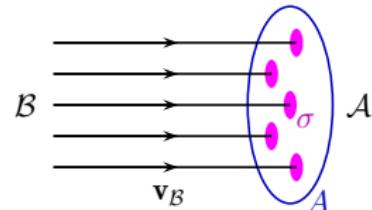
$$R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

6.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，固定靶 (fixed target) 由静止的 A 粒子组成，束流 (beam) 由 B 粒子组成

设束流中每个 B 粒子的运动速度相同，记为 v_B ，按照狭义相对论， $v_B \equiv p_B/E_B$



6.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，固定靶 (fixed target) 由静止的 A 粒子组成，束流 (beam) 由 B 粒子组成

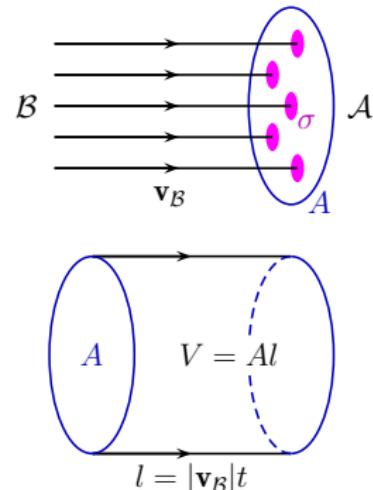
设束流中每个 B 粒子的运动速度相同，记为 v_B ，按照狭义相对论， $v_B \equiv p_B/E_B$

记束流的横截面积为 A ，则 t 时间内束流的一个横截面经过的体积为 $V = A|v_B|t$

再设束流中 B 粒子的数密度为 n_B ，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_B = n_B V = n_B A|v_B|t$

在单位时间内穿过单位面积的 B 粒子数称为流密度，记作 j_B ，通过下式计算，

$$j_B = \frac{N_B}{At} = \frac{n_B A|v_B|t}{At} = n_B |v_B|$$

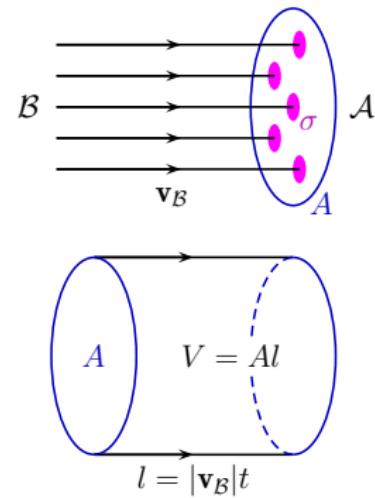


散射截面

考慮流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上, 则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ , 由量纲分析知道它具有面积量纲, 称为散射截面 (scattering cross section), 简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积, 表征散射过程的强度, 由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定



散射截面

虑流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

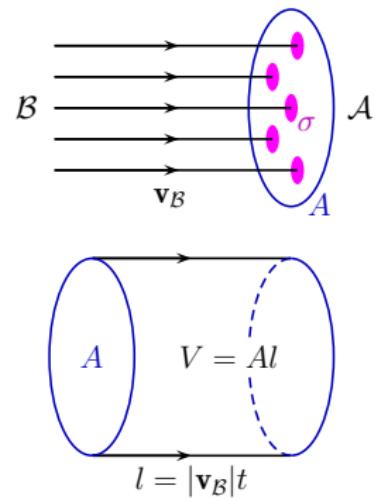
散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

带词头的小单位满足 $1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb}$

从而 $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb} = 3.894 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$



散射截面

摩托车 考虑流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上, 则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

葡萄 这里引入物理量 σ , 由量纲分析知道它具有面积量纲, 称为散射截面 (scattering cross section), 简称为截面 (cross section)

西红柿 散射截面相当于发生散射的有效面积, 表征散射过程的强度, 由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

樱桃 截面的常用单位是靶 (barn), 记作 b,

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

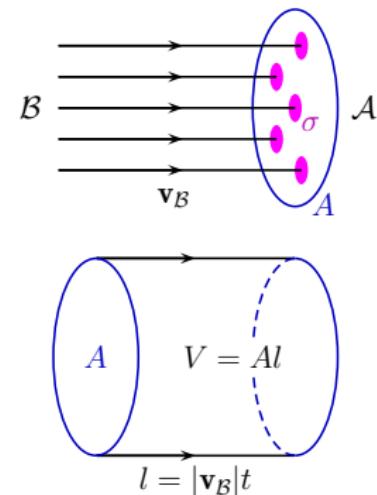
花生 带词头的小单位满足 $1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb}$

土豆 从而 $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb} = 3.894 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$

梨 单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_A j_B \sigma}{V} = \frac{N_A n_B |\mathbf{v}_B| \sigma}{V} = n_A n_B \sigma |\mathbf{v}_B|$$

猕猴桃 $n_A = N_A/V$ 相当于 A 粒子在体积 V 中的数密度



A 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上, 那么, 可以看作在全空间体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子, 因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

将 $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 代入

得到 $2 \rightarrow n$ 散射过程的截面表达式

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_A n_B |\mathbf{v}_B|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_B|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_B|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

4 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上, 那么, 可以看作在全空间体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子, 因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

将 $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 代入

得到 $2 \rightarrow n$ 散射过程的截面表达式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

上式对 A 粒子静止的参考系成立

pineapple 需要将上式推广到任意惯性系, 以适用于 A 和 B 处在任意运动状态的情况

为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量

🍉 上式最后一行中除第二个因子 $(4E_A E_B |\mathbf{v}_B|)^{-1}$ 之外, 其余部分是 **Lorentz 不变的**

Lorentz 不变的散射截面

在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 的相对速度

 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$

 然而, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 的相对速度

ocado $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$

berry 然而, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

eggplant 引入 Møller 速度 $v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

chili 则入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

mushroom 用 $v_{\text{Møl}}$ 取代 $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$, 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$



Christian Møller
(1904–1980)

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 的相对速度

🥑 $v_{\mathcal{A}} \equiv \frac{p_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 \mathcal{A} 的运动速度, 相对速度为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$

🌰 然而, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

🍆 引入 Møller 速度 $v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

🌶 则入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

🍄 用 $v_{\text{Møl}}$ 取代 $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$, 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

⌚ 相应的单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v_{\text{Møl}}$ 也是 Lorentz 不变的

🍋 当 \mathcal{A} 粒子静止时, $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$, 故 $v_{\text{Møl}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{m_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$
 $= \frac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$, 此时散射截面恢复到上一页表达式



Christian Møller
(1904–1980)

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\ddot{\text{o}}\text{l}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 中, 不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素, 而其它部分都属于**运动学**因素

👉 在**运动学**因素中, 对末态动量的积分具有如下形式,

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j)$$

👉 这个积分称为 **n 体不变相空间**, 用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些,

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\ddot{\text{o}}\text{l}}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Mol}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 中, 不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素, 而其它部分都属于**运动学**因素

👉 在**运动学**因素中, 对末态动量的积分具有如下形式,

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j)$$

🐠 这个积分称为 **n 体不变相空间**, 用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些,

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Mol}}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

👉 如果在**散射截面表达式**中不作积分, 则对应于**微分散射截面**

$$d\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Mol}}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$$

🐠 注意, 计算微分截面时**不需要考虑末态对称性因子** \mathcal{S} , 因而 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \int d\sigma$

👉 如果**末态不包含全同粒子**, 则 $\mathcal{S} = 1$

Møller 速度与相对速度

讲义中推出了 Møller 速度与 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 粒子运动速度的关系式

$$v_{Møl} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ ，则 $v_{Møl} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{rel}$ ，即 Møller 速度与相对速度相同

入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{rel}$

满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 \mathcal{A} 粒子或 \mathcal{B} 粒子静止

另一种情况是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到

在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

讲义中推出了 **Møller 速度** 与 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 粒子运动速度的关系式

$$v_{Møl} = \sqrt{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|^2 - |\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B|^2}$$

如果 $\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ ，则 $v_{Møl} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = v_{rel}$ ，即 Møller 速度与 **相对速度** 相同

入射流因子化为 $E_A E_B v_{rel}$

满足 **这个条件** 的一种情况是 \mathbf{v}_A 或 \mathbf{v}_B 为零，即 \mathcal{A} 粒子或 \mathcal{B} 粒子 **静止**

另一种情况是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 运动方向 **相同或相反**，后者在 **对撞机** (collider) 上经常遇到

在束流 **迎头对撞** 时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

当 $v_{Møl} = v_{rel}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$

在 **非相对论近似下**， $v_{rel} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ 确实是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的相对速度

但是，对于 **极端相对论极限** 下的束流对撞， $|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = 1$ 且 $\mathbf{v}_B = -\mathbf{v}_A$

故 $v_{rel} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = 2$ ，它是真空光速的 2 倍，显然 **不是** 真正意义的相对速度

质心系

对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的

不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系** (center-of-mass system，简称**质心系**) 中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多

质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy) E_{CM} ，满足

$$E_{CM} = E_A + E_B = \sum_{j=1}^n E_j$$

它是 **Lorentz 不变量**，因为在质心系中有

$$(p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = E_{CM}^2$$

在**任意参考系**中，可采用 $E_{CM} = \sqrt{(p_A + p_B)^2} = \sqrt{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2}$ 来计算质心能

$2 \rightarrow n$ 散射的运动学条件

 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式

 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生

 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件

 在质心系中，当所有末态粒子的动量 \mathbf{p}_j 都为零时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$

$2 \rightarrow n$ 散射的运动学条件

根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式

如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生

因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件

在质心系中，当所有末态粒子的动量 p_j 都为零时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$

所以，发生 $2 \rightarrow n$ 散射过程的**运动学条件**是

$$E_{CM} > \sum_{j=1}^n m_j$$

即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**

若 $E_{CM} = \sum_j m_j$ ，则末态相空间体积为零，散射过程**不能发生**

可以认为，**质心能** E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

6.5.3 小节 两体散射运动学



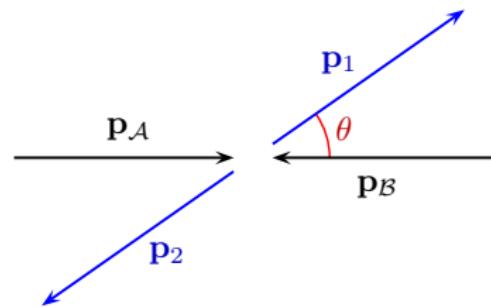
接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子

💡 在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

🕯 可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$

🕯 末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反

🔦 这些动量在质心系中的关系如右图所示



6.5.3 小节 两体散射运动学



接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子



在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$



可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$



末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反



这些动量在质心系中的关系如右图所示



θ 是 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_A 之间的夹角，称为散射角

(scattering angle)



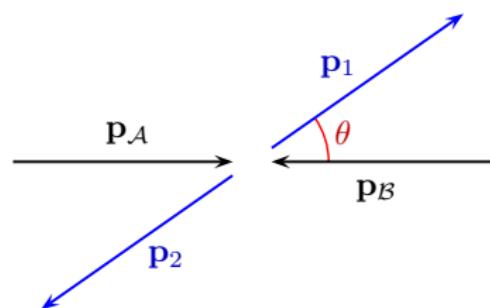
质心能满足 $E_{CM} = E_A + E_B = E_1 + E_2$



发生这个过程的运动学条件是 $E_{CM} > m_1 + m_2$



$2 \rightarrow 2$ 散射截面写成 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B} \frac{1}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2$



2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \end{aligned}$$

第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$ 作出 p_2 的积分

此积分看起来没有效果，但实际上要求 p_2 满足动量守恒条件 $p_A + p_B = p_1 + p_2$

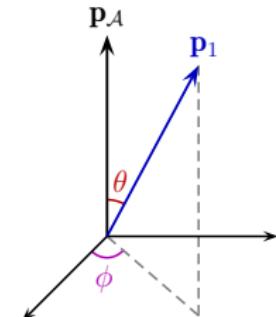
这个条件在质心系中体现为 $p_2 = -p_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分, 得到

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2) \\
&= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - E_1 - \cancel{E_2}) \\
&= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right)
\end{aligned}$$



第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 \mathbf{p}_2 的积分



此积分看起来没有效果，但实际上要求 p_2 满足动量守恒条件 $p_A + p_B = p_1 + p_2$



这个条件在质心系中体现为 $p_2 = -p_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|p_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|p_1|^2 + m_2^2}$



第三步建立球坐标系, 以 p_A 方向为极轴方向, 以散射角 θ 为极角 (polar angle)



将 p_1 投影在垂直于 p_A 的平面上以定义方位角 (azimuthal angle) ϕ



将 p_1 动量体积元分解为 $d^3p_1 = |\mathbf{p}_1|^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega$ ，立体角微分 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$



极角 θ 的取值范围为 $[0, \pi]$ ，方位角 ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

2 → 2 散射截面



现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数, 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, 得到

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} \right) \right|^{-1} \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}}
 \end{aligned}$$

2 → 2 散射截面

 现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数, 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, 得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} \right) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \end{aligned}$$

 2 → 2 散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

 质心系中的微分散射截面是 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系能动量与质心能的关系



利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{CM} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{CM} - E_1)^2 = E_{CM}^2 - 2E_{CM}E_1 + E_1^2$

即 $2E_{CM}E_1 = E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{CM}} (E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{CM}} (E_{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

可见，质量较大的末态粒子在质心系中分得的能量较多

质心系能动量与质心能的关系



利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

 即 $2E_{\text{CM}}E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 可见，质量较大的末态粒子在质心系中分得的能量较多；根据质壳条件，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} [E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\text{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4E_{\text{CM}}^2 m_1^2] \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\text{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2) \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} \lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) \end{aligned}$$

质心系微分散射截面



上式中的 λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$



质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$

质心系微分散射截面



上式中的 λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$



质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$

将类似分析应用到初态上，同理得到质心系中初态粒子能量是

$$E_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2), \quad E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2)$$



动量大小是

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

特殊情况

🚗 下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴具有旋转对称性**, 则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

➤ **散射截面** 为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

🚗 下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴具有旋转对称性**, 则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

💡 **散射截面** 为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

(2) 如果初态粒子质量相同, $m_A = m_B = m_i$, 末态粒子质量相同, $m_1 = m_2 = m_f$, 则 $E_1 = (E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{CM})$ 和 $E_2 = (E_{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{CM})$ 意味着

$$E_A = E_B = E_1 = E_2 = \frac{E_{CM}}{2}$$

📦 即初末态粒子分别**平分质心能**

📅 此时, 如果末态 2 个粒子是**全同**的, 那么末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$, 否则 $\mathcal{S} = 1$

特殊情况

另一方面, 由 $\lambda(x, y, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = x(x - 4y)$ 得

$$\lambda^{1/2} \left(1, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_f}{2}$$

其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义, β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率, 而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况



从而, 由 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}} = E_{\text{CM}}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \left| \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}} - \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}{E_{\mathcal{B}}} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = 2\beta_i$$

入射流因子 变成

$$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}^2 \beta_i}{2}$$



于是, **微分散射截面** 化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2 \beta_i}$$

特殊情况



从而, 由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$



于是, 微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同, $m_A = m_B = m_1 = m_2$, 则 $\beta_i = \beta_f$, 有

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

6.5.4 小节 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

不稳定粒子 A 自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

假设 t 时刻有 $N(t)$ 个静止的 A 粒子，每个 A 粒子在单位时间内发生衰变的概率是常数 Γ ，那么 $t + dt$ 时刻衰变引起的 A 粒子数量变化为 $dN = -\Gamma N dt$

以此求得 $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即 A 粒子数量随时间按指数规律下降

6.5.4 小节 衰变宽度

🚂 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

🎪 不稳定粒子 \mathcal{A} 自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

🎡 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个静止的 \mathcal{A} 粒子，每个 \mathcal{A} 粒子在单位时间内发生衰变的概率是常数 Γ ，那么 $t + dt$ 时刻衰变引起的 \mathcal{A} 粒子数量变化为 $dN = -\Gamma N dt$

💈 以此求得 $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即 \mathcal{A} 粒子数量随时间按指数规律下降

🎭 于是一个静止 \mathcal{A} 粒子在衰变前存活的时间 t 服从指数分布，归一化概率密度为

$$P(t) = \Gamma \exp(-\Gamma t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

🎢 其中 $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$ 称为粒子的寿命 (lifetime)

🎠 t 的期待值为 $\langle t \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t e^{-t/\tau} dt = \tau$ ，可见寿命是静止粒子存活的平均时间

🔮 在自然单位制中， Γ 具有质量的量纲，称为衰变宽度 (decay width)，简称宽度

分支比和分宽度

■ \mathcal{A} 粒子可能有**多种**衰变过程

■ 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

■ 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

■ Γ_f 是 \mathcal{A} 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 在单位时间内发生的概率

分支比和分宽度

🚂 A 粒子可能有**多种**衰变过程

⌚ 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

⭐ 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

⚡ Γ_f 是 A 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 在单位时间内发生的概率

🎲 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

♣ **总宽度** Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

接下来通过跃迁概率计算衰变过程 $i \rightarrow f$ 的分宽度

现在, 初态 $|i\rangle$ 只包含 1 个粒子 \mathcal{A} , 末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子

因此, $|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$

类似于散射的情况, 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的跃迁概率是

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j V)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$, 单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) |\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式



将末态动量的所有取值考虑进来，可得单位时间内衰变过程 $i \rightarrow f$ 的发生概率为

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$



其中 \mathcal{S} 是末态对称性因子

在 \mathcal{A} 粒子静止系中， $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$ ，而 R_f 的值就是分宽度 Γ_f ，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$



可见，衰变分宽度和总宽度是 Lorentz 不变的，因而寿命也是 Lorentz 不变量

衰变末态分布和运动学条件

若 A 粒子是标量玻色子, 自旋为 0, 则 A 粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

若 A 粒子具有非零自旋, 则自旋方向是 A 粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈轴对称分布, 以 A 粒子自旋方向为轴

在实际情况中, A 粒子自旋取向往往是不确定的, 但它取不同方向的概率相同

那么, 可对 A 粒子自旋方向取平均, 从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

衰变末态分布和运动学条件

若 \mathcal{A} 粒子是标量玻色子，自旋为 0，则 \mathcal{A} 粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

若 \mathcal{A} 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 \mathcal{A} 粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 \mathcal{A} 粒子自旋方向为轴

在实际情况中， \mathcal{A} 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同

那么，可对 \mathcal{A} 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

由于 \mathcal{A} 粒子静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{CM} = m_{\mathcal{A}}$

因此，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^n m_j$$

即 \mathcal{A} 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变

6.5.5 小节 衰变运动学

■ 下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**, $n = 2$, 在 \mathcal{A} 粒子静止系中, 由于 $E_{\text{CM}} = m_{\mathcal{A}}$, 末态能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} (m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} (m_{\mathcal{A}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

■ 末态动量为 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$

■ 2 体不变相空间变成 $\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$

⑧ $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, 其中 θ 和 ϕ 分别是 \mathbf{p}_1 在球坐标系中的极角和方位角

6.5.5 小节 衰变运动学

下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于两体衰变, $n = 2$, 在 \mathcal{A} 粒子静止系中, 由于 $E_{\text{CM}} = m_{\mathcal{A}}$, 末态能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_A} (m_A^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_A} (m_A^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

末态动量为 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_A}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_A^2}, \frac{m_2^2}{m_A^2}\right)$

中 2 体不变相空间变成 $\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_A}$

⑧ $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, 其中 θ 和 ϕ 分别是 p_1 在球坐标系中的极角和方位角

两体衰变分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) \int d\Omega |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

如果 $m_1 \neq m_2$ ，则两个末态粒子必定不是全同粒子，而 $S = 1$

两体衰变运动学

如果 \mathcal{A} 粒子的自旋为 0, 或者对它的自旋方向取平均, 按照前述讨论, 末态粒子在动量方向上呈球对称分布

此时, $|\mathcal{M}|^2$ 与 θ 、 ϕ 无关, 对立体角积分只给出一个 4π 因子, 分宽度变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$$

两体衰变运动学

如果 \mathcal{A} 粒子的自旋为 0, 或者对它的自旋方向取平均, 按照前述讨论, 末态粒子在动量方向上呈球对称分布

此时, $|\mathcal{M}|^2$ 与 θ 、 ϕ 无关, 对立体角积分只给出一个 4π 因子, 分宽度变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$$

进一步, 如果末态 2 个粒子质量相同, $m_1 = m_2 = m$, 则

$$\lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) = \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

如果两个末态粒子是全同粒子, 则 $\mathcal{S} = 2$

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**, $n = 3$, 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_3 |\mathcal{M}|^2$$

 3 体不变相空间为

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3)$$

 这里只在 \mathcal{A} 粒子静止系中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**, $|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

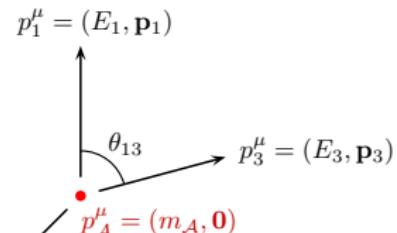
三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**, $n = 3$, 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_3 |\mathcal{M}|^2$$

3 体不变相空间为

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3)$$



这里只在 \mathcal{A} 粒子静止系中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**, $|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

动量守恒定律给出 $0 = p_A = p_1 + p_2 + p_3$, 即末态 3 个粒子的三维动量之和为零

因而这 3 个三维动量矢量处在**同一个平面**内, 如**右上图**所示

对于**确定**的 p_1 和 p_3 , 第 2 个粒子的动量 $p_2 = -p_1 - p_3$ 由动量守恒定律决定

三体相空间

对 \mathbf{p}_2 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ ，得到

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{d^3p_1 d^3p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_3 d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\end{aligned}$$

🐻 Ω_1 和 Ω_3 分别是 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_3 对应的立体角

三体相空间

 对 \mathbf{p}_2 积分, 消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$, 得到

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{d^3p_1 d^3p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_3 d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\end{aligned}$$

 Ω_1 和 Ω_3 分别是 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_3 对应的立体角

 对粒子 1 的质壳条件 $|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 = E_1^2$ 两边求微分, 得 $2|\mathbf{p}_1| d|\mathbf{p}_1| = 2E_1 dE_1$, 对粒子 3 也可以得到类似的式子, 故 $|\mathbf{p}_1| d|\mathbf{p}_1| = E_1 dE_1$, $|\mathbf{p}_3| d|\mathbf{p}_3| = E_3 dE_3$

 从而

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d\Omega_3 dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int d\Omega_3 dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\end{aligned}$$

 第二步作 Ω_1 积分, 由于粒子 1 动量呈球对称分布, 此积分只给出一个 4π 因子

关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数

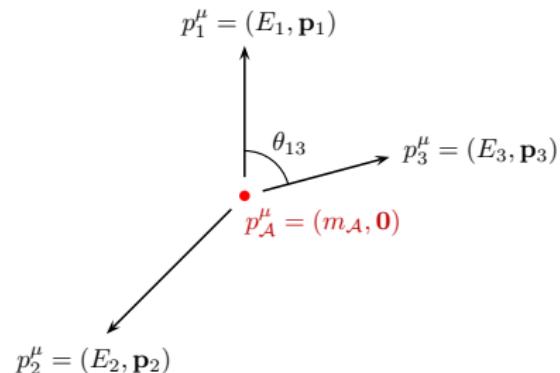
将 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_3 方向之间的夹角记为 θ_{13} ，则
粒子 3 的立体角微分表示为

$$d\Omega_3 = \sin \theta_{13} d\theta_{13} d\phi_3 = d \cos \theta_{13} d\phi_3$$

是粒子 3 的方位角

这样的话，对 Ω_3 积分不是平庸的，因为

E_2 依赖于 $\cos \theta_{13}$ ，



$$p_2^\mu = (E_2, \mathbf{p}_2)$$

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos \theta_{13}}$$

因此 $\delta(m_A - E_1 - E_2 - E_3)$ 的宗量也依赖于 $\cos \theta_{13}$ ，有

$$\frac{\partial E_2}{\partial \cos \theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos \theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

$$\left| \frac{\partial(m_A - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos \theta_{13}} \right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

相空间积分

再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^1 d\cos\theta_{13} \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\
 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\
 &= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int dE_1 dE_3
 \end{aligned}$$

相空间积分

再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^1 d\cos\theta_{13} \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int dE_1 dE_3 \end{aligned}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_{\mathcal{A}}} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅 \mathcal{M} 表达为 E_1 和 E_3 的函数，而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的积分上下限

变量替换

在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便, 可以将它们替换成更加便利的变量

引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2m_A E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1$$

可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**, 四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于 $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$, $\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量, 称为**粒子 1 和 2 的不变质量** (invariant mass), 它也是**粒子 1 和 2 的质心能**

变量替换

在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便, 可以将它们替换成更加便利的变量

引入两个 Lorentz 不变量

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2m_A E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1$$

可以把粒子 1 和 2 组成的系统看成一个等效粒子, 四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于 $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$, $\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量, 称为粒子 1 和 2 的不变质量 (invariant mass), 它也是粒子 1 和 2 的质心能

类似地, $\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的不变质量

s_{12} 和 s_{23} 的微分分别正比于 E_3 和 E_1 的微分,

$$ds_{12} = -2m_A dE_3, \quad ds_{23} = -2m_A dE_1$$

关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数

利用 $ds_{12} = -2m_{\mathcal{A}} dE_3$ 和 $ds_{23} = -2m_{\mathcal{A}} dE_1$ 将分宽度积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_{\mathcal{A}}} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3} \int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23} |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2\end{aligned}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅 \mathcal{M} 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数

对 s_{23} 的积分放在内层，积分上下限依赖于 s_{12}

关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数

利用 $ds_{12} = -2m_A dE_3$ 和 $ds_{23} = -2m_A dE_1$ 将分宽度积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_A} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{256\pi^3 m_A^3} \int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23} |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2\end{aligned}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅 \mathcal{M} 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数

对 s_{23} 的积分放在内层，积分上下限依赖于 s_{12}

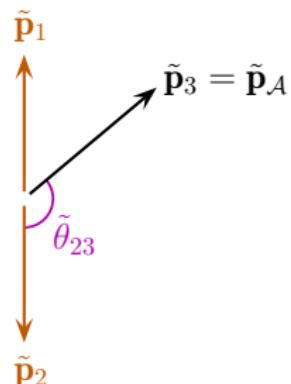
接下来讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限

考虑粒子 1 和 2 的质心系，有 $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$

这里用波浪线标记此参考系中的物理量

在这个参考系中，质心能 $\tilde{E}_{CM} = \sqrt{s_{12}}$

粒子 2 的能量为 $\tilde{E}_2 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}} (s_{12} + m_2^2 - m_1^2)$



\tilde{E}_3 与 s_{12} 的关系

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$ ，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned}s_{12} &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_3)^2 = \tilde{p}_{\mathcal{A}}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 \\&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\&= m_{\mathcal{A}}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2\end{aligned}$$

tilde{E}_3 与 s_{12} 的关系

警车图标 动量守恒定律给出 $\tilde{p}_3 = \tilde{p}_A - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 = \tilde{p}_A$ ，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_A - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_A^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\tilde{p}_A \cdot \tilde{p}_3 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_A \tilde{E}_3 + 2\tilde{p}_A \cdot \tilde{p}_3 = m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{p}_3|^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2|\tilde{p}_3|^2 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\ &= m_A^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2 \end{aligned}$$

螺丝刀图标 整理得 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 = m_A^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2$ ，两边平方，推出

$$\begin{aligned} 4(\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2) \tilde{E}_3^2 &= (m_A^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2)^2 \\ &= (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)^2 + 4\tilde{E}_3^4 + 4(m_A^2 - s_{12} - m_3^2) \tilde{E}_3^2 \end{aligned}$$

扳手图标 再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2 = (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)^2$ ，故粒子 3 的能量为

$$\tilde{E}_3 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}} (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)$$

螺丝图标 对于确定的 s_{12} ， \tilde{E}_2 和 \tilde{E}_3 是确定的，而且是 Lorentz 不变的

s_{23} 的积分上下限

出租车 另一方面, 由 s_{23} 的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$, $\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

铅笔 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时, $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$, 而 s_{23} 取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

s_{23} 的积分上下限

出租车 另一方面, 由 s_{23} 的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$, $\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

铅笔 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时, $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$, 而 s_{23} 取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

剪刀 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$ 时, $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$, 而 s_{23} 取得最大值

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

盾牌 对于确定的 s_{12} , 以上两式分别给出 s_{23} 的积分下限和上限

注意, s_{23}^{\min} 和 s_{23}^{\max} 是 Lorentz 不变的

s_{12} 的积分上下限

 在粒子 1 和 2 的质心系中, $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$, 有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时, s_{12} 取得最小值 $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

 在 \mathcal{A} 粒子静止系中, 前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

 当 $E_3 = m_3$ 时, s_{12} 取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

 注意, s_{12}^{\min} 和 s_{12}^{\max} 也是 Lorentz 不变的

s_{12} 的积分上下限

在粒子 1 和 2 的质心系中, $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$, 有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时, s_{12} 取得最小值 $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

在 \mathcal{A} 粒子静止系中, 前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

当 $E_3 = m_3$ 时, s_{12} 取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

注意, s_{12}^{\min} 和 s_{12}^{\max} 也是 Lorentz 不变的

