量 子 场 论

第 2 章　量子标量场

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2026 年 1 月 19 日

第 2 章　量子标量场　　2.1 节　简谐振子的正则量子化

- 本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法
- 标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广
- **一维简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

- 其中 m 是质量，ω 是角频率，第一项是动能，第二项是势能

- 本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法
- 标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广
- **一维简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

- 其中 m 是质量，ω 是角频率，第一项是动能，第二项是势能
- 在**量子力学**中，把**位置坐标** x 和**动量** p 这两个**正则变量**看作**厄米算符**，要求它们满足**正则对易关系** $\boxed{[x,p] \equiv xp - px = \mathrm{i}}$
- 构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + \mathrm{i}p), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - \mathrm{i}p)$$

- a 称为**湮灭算符** (annihilation operator)，$a^\dagger$ 称为**产生算符** (creation operator)
- 两者互为**厄米共轭** (Hermitian conjugate)

Charles Hermite
(1822–1901)

产生湮灭算符的对易关系

湮灭算符和产生算符的**对易关系**为

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x + \mathrm{i}p, m\omega x - \mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x, -\mathrm{i}p] + [\mathrm{i}p, m\omega x]) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x, p] + \mathrm{i}[p, x]) = -\mathrm{i}[x, p] = -\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

即 $\boxed{[a, a^\dagger] = 1}$，同理推出 $\boxed{[a, a] = 0}$ 和 $\boxed{[a^\dagger, a^\dagger] = 0}$

产生湮灭算符的对易关系

湮灭算符和产生算符的**对易关系**为

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x + \mathrm{i}p, m\omega x - \mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x, -\mathrm{i}p] + [\mathrm{i}p, m\omega x]) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x,p] + \mathrm{i}[p,x]) = -\mathrm{i}[x,p] = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

即 $\boxed{[a, a^\dagger] = 1}$ ，同理推出 $\boxed{[a, a] = 0}$ 和 $\boxed{[a^\dagger, a^\dagger] = 0}$

反过来用 a 和 $a^\dagger$ 表示 x 和 p，有 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger)$，$p = -\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{m\omega}{2}}(a - a^\dagger)$

对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 意味着 $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$，于是将**哈密顿量**表达成

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2m}\frac{m\omega}{2}(a - a^\dagger)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{2m\omega}(a + a^\dagger)^2 \\
&= -\frac{\omega}{4}(aa - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) + \frac{\omega}{4}(aa + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) = \frac{\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \\
&= \frac{\omega}{2}(2a^\dagger a + 1) = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $N \equiv a^\dagger a$ 是个**厄米算符**，称为**粒子数算符**

粒子数算符的本征态

- N 是个**半正定**算符，对于**任意**态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) **非负**：

$$\boxed{\langle\Psi| N |\Psi\rangle = \langle\Psi| a^\dagger a |\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0,} \quad \text{其中} \ |a\Psi\rangle \equiv a|\Psi\rangle$$

- 因此，**哈密顿量** $H = \omega(N + 1/2)$ 是**正定**算符，满足 $\langle\Psi| H |\Psi\rangle > 0$
- 设 $|n\rangle$ 是 N 的**本征态**，满足**本征方程** $N|n\rangle = n|n\rangle$ 和**归一化条件** $\langle n|n\rangle = 1$
- 由 $n = \langle n| n |n\rangle = \langle n| N |n\rangle \geq 0$ 可知，**本征值** n 是一个**非负实数**

粒子数算符的本征态

- N 是个**半正定**算符，对于**任意**态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) **非负**：

$$\boxed{\langle\Psi|\,N\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,a^\dagger a\,|\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0,} \quad \text{其中}\ \ |a\Psi\rangle \equiv a\,|\Psi\rangle$$

- 因此，**哈密顿量** $H = \omega(N + 1/2)$ 是**正定**算符，满足 $\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle > 0$
- 设 $|n\rangle$ 是 N 的**本征态**，满足**本征方程** $N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ 和**归一化条件** $\langle n|n\rangle = 1$
- 由 $n = \langle n|\,n\,|n\rangle = \langle n|\,N\,|n\rangle \geq 0$ 可知，**本征值** n 是一个**非负实数**
- 利用**对易子公式**

$$[AB, C] = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]$$

- 推出 $[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] = a^\dagger$ 和 $[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a$
- 故 $Na^\dagger = a^\dagger N + a^\dagger$，$Na = aN - a$，从而

$$Na^\dagger\,|n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger)\,|n\rangle = (n+1)a^\dagger\,|n\rangle$$

$$Na\,|n\rangle = (aN - a)\,|n\rangle = (n-1)a\,|n\rangle$$

升算符和降算符

- 可见，$a^\dagger\,|n\rangle$ 和 $a\,|n\rangle$ 都是 N 的**本征态**，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，因此

$$a^\dagger\,|n\rangle = c_1|n+1\rangle,\quad a\,|n\rangle = c_2|n-1\rangle$$

- 其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**
- **产生算符** $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符**
- **湮灭算符** a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符**

升算符和降算符

可见，$a^\dagger|n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 都是 N 的**本征态**，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，因此

$$a^\dagger|n\rangle = c_1|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = c_2|n-1\rangle$$

其中 c_1 和 c_2 是两个**归一化常数**

产生算符 $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为**升算符**

湮灭算符 a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为**降算符**

为确定归一化常数的值，进行以下计算，

对易关系

$$n+1 = \langle n|(N+1)|n\rangle = \langle n|(a^\dagger a+1)|n\rangle = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = |c_1|^2\langle n+1|n+1\rangle = |c_1|^2$$

$$n = \langle n|N|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c_2|^2\langle n-1|n-1\rangle = |c_2|^2$$

将 c_1 和 c_2 都取为**正实数**，得 $c_1 = \sqrt{n+1}$ 和 $c_2 = \sqrt{n}$，故

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用**降算符** a 逐步操作
- 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a\,|n\rangle$, $a^2\,|n\rangle$, $a^3\,|n\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $\cdots$
- 由于 $n \geq 0$，必定存在一个**最小本征值** n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a\,|n_0\rangle = 0$
- 注意，$a\,|n_0\rangle = 0$ 是使**本征值停止减小**的**条件**
- 于是 $N\,|n_0\rangle = a^\dagger a\,|n_0\rangle = 0 = 0\,|n_0\rangle$，可见 $n_0 = 0$，即 $|n_0\rangle = |0\rangle$

粒子数算符的本征值

- 从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用**降算符** a 逐步操作
- 得到本征值逐次减小的一系列本征态 $a|n\rangle$, $a^2|n\rangle$, $a^3|n\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $\cdots$
- 由于 $n\geq 0$，必定存在一个**最小本征值** n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足 $a|n_0\rangle=0$
- 注意，$a|n_0\rangle=0$ 是使**本征值停止减小**的**条件**
- 于是 $N|n_0\rangle=a^\dagger a|n_0\rangle=0=0|n_0\rangle$，可见 $n_0=0$，即 $|n_0\rangle=|0\rangle$
- 反过来，从 $|0\rangle$ 出发，用**升算符** $a^\dagger$ 逐步操作
- 得到本征值逐次增加的一系列本征态 $a^\dagger|0\rangle$, $(a^\dagger)^2|0\rangle$, $(a^\dagger)^3|0\rangle$, $\cdots$
- 对应的本征值分别为 1, 2, 3, $\cdots$
- 综上，**本征值** n 的取值是**非负整数**，是**量子化**的
- 可以用 $a^\dagger$ 和 $|0\rangle$ 将本征态 $|n\rangle$ 表示为 $|n\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$

能量本征值

显然，$|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H|n\rangle = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$\boxed{E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**。非零的真空能是**量子力学**的**特有**结果

能量本征值

显然，$|n\rangle$ 也是 H 的**本征态**，

$$H|n\rangle = \omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$\boxed{E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0 = \omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**。非零的真空能是**量子力学**的**特有**结果

可以将 $|0\rangle$ 看作**真空态**，将 $n > 0$ 的 $|n\rangle$ 看作包含 n **个声子** (phonon) 的激发态，每个声子具有**一份能量** ω

这样一来，n 表示声子的数目，故**粒子数算符** N 描述**声子数**

$a^\dagger$ 的作用是**产生**一个声子，从而**增加**一份能量

a 的作用是**湮灭**一个声子，从而**减少**一份能量

这是将 $a^\dagger$ 和 a 称为**产生算符**和**湮灭算符**的原因

2.2 节 量子场论中的正则对易关系

对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统的广义坐标 x 和 广义动量 p 提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系

接下来将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化

这需要涉及到绘景变换，在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

2.2 节　量子场论中的正则对易关系

对**简谐振子**进行**正则量子化**的关键在于将系统的**广义坐标** x 和 **广义动量** p 提升为 **Hilbert 空间**上的**算符**，要求它们满足**正则对易关系**

接下来将这种方法推广到**场论**里，从而对**场**进行**正则量子化**

这需要涉及到**绘景变换**，在**量子力学**中，**Schrödinger 绘景**和 **Heisenberg 绘景**提供了两种**等价**的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

在 **Schrödinger 绘景**中，**态矢** $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 代表**随时间演化**的物理态，而 Hilbert 空间上的**力学量算符** O^{S} **不依赖于时间**

Erwin Schrödinger
(1887–1961)

系统**哈密顿量算符** H **不含时间**，则 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 与 $|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 通过**幺正变换**联系起来：$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$

这里用到的**指数函数**对任意算符 A 定义为 $\boxed{\mathrm{e}^{A} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}}$

于是 $$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}} = \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = \boxed{H|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}}$$

这就是 **Schrödinger 方程**，而 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 其实是方程的**解**

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢为 $\boxed{|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} \equiv e^{iHt}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}}$

它不随时间演化，$\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0$

而力学量算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，$\boxed{O^{\mathrm{H}}(t) \equiv e^{iHt}O^{\mathrm{S}}e^{-iHt}}$

由于 $[H,H]=0$，有 $e^{iHt}He^{-iHt} = He^{iHt}e^{-iHt} = H$

Werner Heisenberg
(1901–1976)

Heisenberg 绘景

Heisenberg 绘景的态矢为 $\boxed{|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}}$

它不随时间演化，$\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = 0$

而力学量算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，$\boxed{O^{\mathrm{H}}(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}$

由于 $[H,H]=0$，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H$

故哈密顿量 H 在这两种绘景中是相同的，$\boxed{H^{\mathrm{H}} = H^{\mathrm{S}} = H}$

$${}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,O^{\mathrm{H}}(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = {}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$$

表明，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理

Werner Heisenberg
(1901–1976)

含时力学量算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 满足 Heisenberg 运动方程

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O^{\mathrm{H}}(t)} = \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}}{\partial t}\,O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t} = -H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}H$$
$$= -HO^{\mathrm{H}}(t) + O^{\mathrm{H}}(t)H = \boxed{[O^{\mathrm{H}}(t), H]}$$

等时对易关系

- 上一节对**简谐振子**的**量子化**是在 **Schrödinger 绘景**中进行的，因为没有考虑位置算符 x 和动量算符 p 的**时间依赖性**
- 将正则对易关系改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 **Heisenberg 绘景**中的形式是

$$
\begin{aligned}
[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] &= [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

- 可见，正则对易关系的形式**不依赖于绘景**
- 上式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) **对易关系**

等时对易关系

⌛ 上一节对**简谐振子**的**量子化**是在 **Schrödinger 绘景**中进行的，因为没有考虑位置算符 x 和动量算符 p 的**时间依赖性**

🛋 将正则对易关系改记为 $[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}] = \mathrm{i}$，它在 **Heisenberg 绘景**中的形式是

$$\begin{aligned}[x^{\mathrm{H}}(t), p^{\mathrm{H}}(t)] &= [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[x^{\mathrm{S}}, p^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{i}\end{aligned}$$

🪑 可见，正则对易关系的形式**不依赖于绘景**

⏰ 上式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) **对易关系**

🛏 接下来的讨论在 **Heisenberg 绘景**中进行，**省略**绘景的标志性上标 H

👨‍🔬 将讨论推广到具有 $\boldsymbol{n}$ **个自由度**的系统，记 $q_i(t)$ 为系统在 Heisenberg 绘景中的**广义坐标算符**，$p_i(t)$ 为相应的**广义动量算符**，它们是系统的**正则变量**

🕰 由于**不同自由度不应该相互影响**，这些算符需要满足的**等时对易关系**为

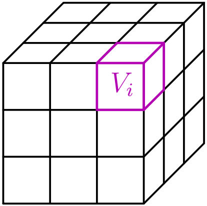
$$[q_i(t), p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

空间离散化

♎ 1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，空间坐标 $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的参数

⚛ 场论讨论的是具有无穷多个连续自由度的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个广义坐标

💠 为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间离散化，划分成无穷多个体积元 V_i，再取 $V_i \to 0$ 的极限来得到连续空间的结果



空间离散化

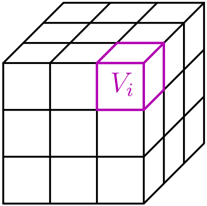
1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，**空间坐标** $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的**参数**

场论讨论的是具有**无穷多个连续自由度**的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个**广义坐标**

为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间**离散化**，划分成无穷多个**体积元** V_i，再取 $V_i \to 0$ **的极限**来得到**连续空间**的结果

在**体积元** V_i 中，定义相应的**广义坐标**

$$\Phi_i(t) \equiv \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\, \Phi(\mathbf{x},t)$$



这是场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 在 V_i 中的**平均值**

记 $\partial_\mu\Phi$ 和**拉格朗日量密度** $\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi)$ 在 V_i 中的**平均值**为

$$\partial_\mu\Phi_i \equiv \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\, \partial_\mu\Phi, \quad \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi)$$

离散化后的等时对易关系

当 $V_i \to 0$ 时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu \Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$，**拉格朗日量**表达为

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i\, \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义，在**体积元** V_i 中与**广义坐标** $\Phi_i(t)$ 相对应的**广义动量**是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)}$$

离散化后的等时对易关系

当 $V_i \to 0$ 时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu \Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$，**拉格朗日量**表达为

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i V_i\, \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义，在**体积元** V_i 中与**广义坐标** $\Phi_i(t)$ 相对应的**广义动量**是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)}$$

相应的**等时对易关系**为

$$[\Phi_i(t), \Pi_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [\Phi_i(t), \Phi_j(t)] = 0, \quad [\Pi_i(t), \Pi_j(t)] = 0$$

引入 $\pi_i(t) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \dfrac{\Pi_i(t)}{V_i}$，则第一、三条等时对易关系可用 $\pi_i(t)$ 表达为

$$[\Phi_i(t), \pi_j(t)] = \mathrm{i}\,\frac{\delta_{ij}}{V_j}, \quad [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0$$

δ 函数

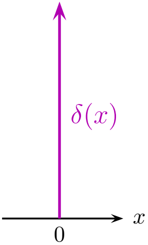
从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) = 1$

对任意连续函数 $f(x)$ 有 $\boxed{f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\delta(x-y)}$ (挑选性)

$\delta(x)$ 是偶函数，$\delta(x) = \delta(-x)$，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{\pm ipx} = 2\pi\,\delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \quad x\,\delta(x) = 0$$

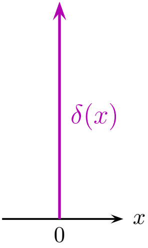


δ 函数

从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数

Dirac δ 函数定义为 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$ 而且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1$

对任意连续函数 $f(x)$ 有 $\boxed{f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-y)}$ （挑选性）



$\delta(x)$ 是偶函数，$\delta(x) = \delta(-x)$，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\pm ipx} = 2\pi\, \delta(p)$ 和

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \quad x\,\delta(x) = 0$$

这里约定，函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ipx} f(x)$

Fourier 逆变换 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, \mathrm{e}^{ipx} \tilde{f}(p)$，$2\pi\, \delta(p)$ 是 $f(x) = 1$ 的 Fourier 变换

若方程 $f(x) = 0$ 具有若干个分立的单根 x_i，则 $\boxed{\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}}$

三维 δ 函数

用 3 个一维 δ 函数定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$, $\quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$

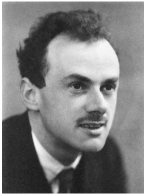
那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$， $\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$，有 $f(\mathbf{y}) = \int d^3x\, f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的**偶函数**，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$，满足 $\boxed{\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})}$

Joseph Fourier
(1768–1830)



Paul Dirac
(1902–1984)

三维 δ 函数

用 3 个一维 δ 函数定义**三维 δ 函数** $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$, $\quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$

那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$，$\int d^3x\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数** $f(\mathbf{x})$，有 $f(\mathbf{y}) = \int d^3x\, f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的**偶函数**，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$，满足 $\boxed{\int d^3x\, e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})}$

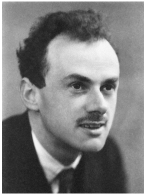
在三维空间中，**函数 $f(\mathbf{x})$** 的 **Fourier 变换**是

$$\boxed{\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

Fourier 逆变换是 $\boxed{f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\tilde{f}(\mathbf{p})}$

$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 是 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的 Fourier 变换

Joseph Fourier
(1768–1830)



Paul Dirac
(1902–1984)

量子场论中的正则对易关系

- $f(\mathbf{x})$ 在 V_i **上的平均值** f_i 满足 $f_i = \sum_j f_j\,\delta_{ij} = \sum_j V_j\, f_j\, \dfrac{\delta_{ij}}{V_j}$
- $f(\mathbf{x}) = \int d^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \to 0$ **极限**形式
- 也就是说，在**连续极限**下，$\dfrac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
- $\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$
- $\pi_i(t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t)$ **（共轭动量密度）**
- 因此，**等时对易关系**化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0$$

量子场论中的正则对易关系

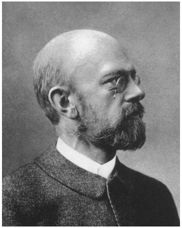
- $f(\mathbf{x})$ 在 V_i **上的平均值** f_i 满足 $f_i = \sum_j f_j\,\delta_{ij} = \sum_j V_j\, f_j\, \dfrac{\delta_{ij}}{V_j}$
- $f(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是上式的 $V_i \to 0$ **极限**形式
- 也就是说，在**连续极限**下，$\dfrac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
- $\Phi_i(t) \to \Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i \to \partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}(\mathbf{x},t)$
- $\pi_i(t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t)$ **（共轭动量密度）**
- 因此，**等时对易关系**化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0$$

- 推广到包含若干个场 Φ_a 的系统，**假设不同的场相互独立**，则

$$\boxed{[\Phi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi_a(\mathbf{x},t),\Phi_b(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=0}$$

- 这就是**量子场论中的正则对易关系**，它是场的正则量子化的出发点
- 此时，系统的**正则变量** $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_a(\mathbf{x},t)$ 都是 **Hilbert 空间**上的**算符**



David Hilbert
(1862–1943)

2.3 节　实标量场的正则量子化

- 如果场 $\phi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，就称它为**标量场**
- 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$
- 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\boxed{\phi'(x') = \phi(x)}$$

- 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) **条件**

$$\boxed{\phi^\dagger(x) = \phi(x)}$$

- 量子化之后，$\phi(x)$ 是一个**厄米算符**

2.3 节　实标量场的正则量子化

- 如果场 $\phi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，就称它为**标量场**
- 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$
- 则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\boxed{\phi'(x') = \phi(x)}$$

- 本节讨论**实**标量场 $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) **条件**

$$\boxed{\phi^\dagger(x) = \phi(x)}$$

- 量子化之后，$\phi(x)$ 是一个**厄米算符**
- 假设 $\phi(x)$ 是**不参与相互作用**的**自由**实标量场，相应的 **Lorentz 不变拉氏量**是

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2}$$

- 其中 $m > 0$ 是实标量场的**质量**，第一项是动能项，第二项是质量项

Klein-Gordon 方程

注意到 $\dfrac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi = \dfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi = \dfrac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2]$

有 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi$，$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi$

归纳起来得 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi$，$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$

因此，**Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi$$

也就是说，$\phi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程**

$$\boxed{(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0}$$

这是自由实标量场的**经典运动方程**

Oskar Benjamin Klein
(1894–1977)

Walter Gordon
(1893–1939)

等时对易关系

实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x)$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ **的时间导数**，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ **因子**，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0 \phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也要引入 $1/2$ **因子**，否则 **Klein-Gordon 方程**中质量**不是** m，而是 $\sqrt{2}\, m$

等时对易关系

实标量场 $\phi(x)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x)$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ **的时间导数**，由自共轭条件 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$ 得 $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

如果在拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ 的**动能项**中不引入 $1/2$ **因子**，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0 \phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也要引入 $1/2$ **因子**，否则 **Klein-Gordon 方程**中质量**不是** m，而是 $\sqrt{2}\, m$

现在，把**正则变量** $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 看作 **Hilbert 空间**上的**算符**

要求它们满足**等时对易关系**

$$\boxed{[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] = 0}$$

这种做法称为**正则量子化**

2.3.1 小节　平面波展开

在量子力学中，无界空间里单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$$

有 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=E\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=E\Psi$， $-\mathrm{i}\nabla\Psi=\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=\mathbf{p}\Psi$

可见，$\hat{E}=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符，$\hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是 $\boxed{\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=\mathrm{i}\partial^\mu}$

2.3.1 小节 平面波展开

在量子力学中，无界空间里单粒子波函数 Ψ 的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$$

有 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=E\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=E\Psi$，$-\mathrm{i}\nabla\Psi=\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=\mathbf{p}\Psi$

可见，$\hat{E}=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是能量微分算符，$\hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是 $\boxed{\hat{p}^{\mu}=\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=\mathrm{i}\partial^{\mu}}$

将平面波解改写成 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$，其中 $p^{\mu}=(E,\mathbf{p})$，$x^{\mu}=(t,\mathbf{x})$，则

$$\mathrm{i}\partial^{\mu}\Psi=\mathrm{i}\partial^{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^{\mu}\Psi$$

因此，p^{μ} 是四维动量微分算符 $\hat{p}^{\mu}=\mathrm{i}\partial^{\mu}$ 的本征值

平面波解 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 描述四维动量为 p^{μ} 的粒子

正能解和负能解

- 现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x) = \exp(-\mathrm{i}k\cdot x)$，其中四维动量 $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$
- 那么，$\partial^2\varphi = \partial^\mu\partial_\mu\varphi = \partial^\mu(-\mathrm{i}k_\mu\varphi) = (-\mathrm{i})^2 k_\mu k^\mu\varphi = -k^2\varphi$
- 从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(k^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

- 这就要求 $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$，即 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$，其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

正能解和负能解

🌊 现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解** $\varphi(x)=\exp(-\mathrm{i}k\cdot x)$，其中四维动量 $k^\mu=(k^0,\mathbf{k})$

🐳 那么，$\partial^2\varphi=\partial^\mu\partial_\mu\varphi=\partial^\mu(-\mathrm{i}k_\mu\varphi)=(-\mathrm{i})^2k_\mu k^\mu\varphi=-k^2\varphi$

🦈 从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0=(\partial^2+m^2)\varphi=-(k^2-m^2)\varphi=-[(k^0)^2-|\mathbf{k}|^2-m^2]\varphi$$

🦐 这就要求 $(k^0)^2=|\mathbf{k}|^2+m^2$，即 $k^0=\pm E_{\mathbf{k}}$，其中 $E_{\mathbf{k}}\equiv\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}>0$

🌳 因此，对于**固定的 $\mathbf{k}$**，有两个线性独立的平面波解

🍎 $k^0=E_{\mathbf{k}}$ 对应于**正能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x)=\exp[-\mathrm{i}(k^0x^0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]=\exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]$$

🍏 $k^0=-E_{\mathbf{k}}$ 对应于**负能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)=\exp[-\mathrm{i}(k^0x^0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]=\exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]$$

一般解

于是，满足 **Klein-Gordon 方程**的**场算符** $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x)+\tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的**算符**，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是**归一化因子**

这是一个形式为 **Fourier 积分**的**平面波展开式**，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维动量空间中无穷多个**动量模式**的叠加

一般解

于是，满足 **Klein-Gordon 方程**的**场算符** $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x)+\tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x)\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的**算符**，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是**归一化因子**

这是一个形式为 **Fourier 积分**的**平面波展开式**，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维动量空间中无穷多个**动量模式**的叠加

取上式的**厄米共轭**，得

$$\begin{aligned}\phi^{\dagger}(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}e^{i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{-\mathbf{k}}^{\dagger}e^{i(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的 $\mathbf{k}$ **替换成** $-\mathbf{k}$ **不会改变**积分的结果，而 $E_{-\mathbf{k}}=E_{\mathbf{k}}$

自共轭条件

观察

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a_\mathbf{k} e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}_\mathbf{k} e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right] \\
\phi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a^\dagger_{-\mathbf{k}} e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]
\end{aligned}
$$

可知，**自共轭条件** $\phi^\dagger(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t)$ 意味着 $\tilde{a}_\mathbf{k} = a^\dagger_{-\mathbf{k}}$

注意，由 $\tilde{a}_\mathbf{k} = a^\dagger_{-\mathbf{k}}$ 可以推出 $\tilde{a}^\dagger_\mathbf{k} = a_{-\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} = a_\mathbf{k}$。因而

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a_\mathbf{k} e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^\dagger_{-\mathbf{k}} e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a_\mathbf{k} e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^\dagger_{\mathbf{k}} e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]
\end{aligned}
$$

第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$

平面波展开式

- 对于

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

- 把动量记号 **k** **替换成** **p**，将 $\phi(\mathbf{x},t)$ **的平面波展开式**整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)}$$

- 其中 $p\cdot x=p^0t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$，且 $p^0>0$，满足**质壳条件** $\boxed{p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}$

- $a_\mathbf{p}$ 是**湮灭算符**，对应于**正能解** $e^{-ip\cdot x}$

- $a_\mathbf{p}^\dagger$ 是**产生算符**，对应于**负能解** $e^{ip\cdot x}$

- **共轭动量密度算符**的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x},t)=\partial_0\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

2.3.2 小节 产生湮灭算符的对易关系

在三维空间中对 $\phi(\mathbf{x},t)$ 作 **Fourier 变换**，有

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p-q)\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right]$$

这里比 Fourier 变换公式 $\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 多乘了一个 e^{iq^0t} **因子**，其中 $q^0 = E_\mathbf{q}$，使指数因子变成 $e^{iq^0t}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = e^{iq\cdot x}$。利用

$$\int d^3x\, e^{\pm i(p-q)\cdot x} = \int d^3x\, e^{\pm i(p^0-q^0)t}e^{\mp i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$\int d^3x\, e^{\pm i(p+q)\cdot x} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$$

得

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0t}\right)$$

在第一步中，$p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，$q^0 = \sqrt{|\mathbf{q}|^2+m^2}$，两个三维 δ 函数分别要求 $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$，都导致 $p^0=q^0$，**对 d^3p 积分**即得第二步结果

产生湮灭算符的表达式

类似地，$\pi(\mathbf{x},t)$ 的 **Fourier 变换**为

$$\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p-q)\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right]$$

$$= \int d^3p\,\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}e^{-i(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a_\mathbf{p}^\dagger e^{i(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]$$

$$= \frac{-iq_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0t}\right)$$

从而 $\int d^3x\, e^{iq\cdot x}[\pi(x) - iq_0\phi(x)] = \int d^3x\, e^{iq\cdot x}\pi(x) - iq_0\int d^3x\, e^{iq\cdot x}\phi(x)$

$$= \frac{-2iq_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}a_\mathbf{q} = -i\sqrt{2E_\mathbf{q}}\,a_\mathbf{q}$$

即

$$a_\mathbf{p} = \frac{i}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\, e^{ip\cdot x}\left[\pi(x) - ip_0\phi(x)\right]$$

取**厄米共轭**，并使用**自共轭条件** $\phi^\dagger = \phi$ 和 $\pi^\dagger = \pi$，得

$$a_\mathbf{p}^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int d^3x\, e^{-ip\cdot x}\left[\pi(x) + ip_0\phi(x)\right]$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

☘ 令 $x^0 = y^0 = t$，利用**等时对易关系**推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, [e^{ip\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ e^{-iq\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)\}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x - q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0+q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

产生算符与湮灭算符的对易关系

令 $x^0 = y^0 = t$，利用**等时对易关系**推出

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, [e^{ip\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ e^{-iq\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)\}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x - q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0 - q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0 - q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0 + q_0) i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
\end{aligned}
$$

根据 δ 函数的性质 $f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$，有

$$
\frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

两个产生算符的对易关系

类似地，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - ip_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - iq_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x\, d^3y\, e^{i(p^0+q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 只在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处非零，取值 $+\infty$，而 $E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处取值为零

由于 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处奇性比较弱，有

$$(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0$$

故

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0$$

产生湮灭算符的对易关系

此外，

$$[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger - a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger = (a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}})^\dagger = [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}]^\dagger = 0$$

因此，可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的**乘积次序**，即

$$a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}, \quad a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

综上，**产生湮灭算符**满足**对易关系**

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

这是**简谐振子对易关系** $[a, a^\dagger] = 1$ 和 $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$ 在**量子场论**中的推广

2.3.3 小节　哈密顿量和总动量

- 注意到 $\pi = \partial_0\phi$，自由实标量场的**哈密顿量密度**表达为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 从而**哈密顿量算符**是

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 根据 **Noether 定理**，实标量场的**总动量算符**是 $P^i = \int d^3x\,\pi\partial^i\phi$

2.3.3 小节　哈密顿量和总动量

- 注意到 $\pi = \partial_0\phi$，自由实标量场的**哈密顿量密度**表达为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 从而**哈密顿量算符**是

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

- 根据 **Noether 定理**，实标量场的**总动量算符**是 $P^i = \int d^3x\,\pi\partial^i\phi$

- 利用**等时对易关系**，推出对易关系

$$\begin{aligned}
[\phi(x), H] &= \frac{1}{2}\int d^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi^2(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{2}\int d^3y\,\{\pi(\mathbf{y},t)[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] + [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\pi(\mathbf{y},t)\} \\
&= i\int d^3y\,\pi(\mathbf{y},t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = i\pi(\mathbf{x},t) = i\partial^0\phi(x)
\end{aligned}$$

四维动量算符

再推出对易关系

$$[\phi(x), P^i] = \int \mathrm{d}^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\,\frac{\partial}{\partial y_i}\,\phi(\mathbf{y},t)] = \int \mathrm{d}^3y\,[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\,\frac{\partial}{\partial y_i}\,\phi(\mathbf{y},t)$$

$$= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\frac{\partial}{\partial y_i}\,\phi(\mathbf{y},t) = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\phi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^i\phi(x)$$

四维动量算符

再推出对易关系

$$[\phi(x), P^i] = \int d^3y\, [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t)] = \int d^3y\, [\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t)$$

$$= \mathrm{i} \int d^3y\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \frac{\partial}{\partial y_i}\, \phi(\mathbf{y},t) = \mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, \phi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\partial^i \phi(x)$$

引入**四维动量算符**

$$\boxed{P^\mu = (H, \mathbf{P})}$$

将这两个对易关系合起来写成

$$\boxed{[\phi(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu \phi(x)}$$

可见，**场算符** $\phi(x)$ 与**四维动量算符** P^μ 的**对易子**相当于用**四维动量微分算符** $\mathrm{i}\partial^\mu$ 对 $\phi(x)$ 进行求导

哈密顿量算符

将 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的**平面波展开式**代入，**哈密顿量算符**化为

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{ [(-\mathrm{i}p_0)(-\mathrm{i}q_0) + (\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})] \\
&\qquad \times \left(a_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}q\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad + m^2\left(a_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}q\cdot x} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{ (p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\right] \\
&\qquad + (-p_0q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p\, d^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \\
&\qquad \times \Big\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})(p_0q_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})(-p_0q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right] \Big\}
\end{aligned}
$$

哈密顿量算符的表达式

- 对 $\mathbf{q}$ 积分，得

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}} \Big[(E_\mathbf{p}^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2)\left(a_\mathbf{p} a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}\right) + (-E_\mathbf{p}^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2)\left(a_\mathbf{p} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_\mathbf{p} t} + a_\mathbf{p}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_\mathbf{p} t}\right) \Big]$$

- 根据**质壳条件** $E_\mathbf{p}^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$，第二步方括号中第二项**没有贡献**，从而

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_\mathbf{p} \left(a_\mathbf{p} a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_\mathbf{p} \left[2a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p})\right]$$

- 第二步用到**产生湮灭算符的对易关系** $[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{q}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$，于是

$$\boxed{H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_\mathbf{p}\, a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_\mathbf{p}}{2}}$$

- 上式不依赖于时间 t，这是**能量守恒定律**的体现

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H=\omega a^\dagger a+\dfrac{\omega}{2}$ 向无穷多个连续自由度的推广
- 半正定算符 $N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和

哈密顿量的正定性

自由实标量场的哈密顿量 $H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H=\omega a^\dagger a+\frac{\omega}{2}$ 向无穷多个连续自由度的推广

半正定算符 $N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符

每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和

由 $\int d^3x\,e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $\boxed{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})=\int d^3x=\tilde{V}}$

$\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的

H 的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，它是实标量场的零点能 (即真空能)，是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和

哈密顿量的正定性

- 自由实标量场的哈密顿量 $H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$ 可看作一维简谐振子哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$ 向无穷多个连续自由度的推广
- 半正定算符 $N_{\mathbf{p}} \equiv a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$ 是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的粒子数密度算符
- 每个粒子的能量是 $E_{\mathbf{p}}$，H 的第一项是所有动量模式所有粒子贡献的能量之和
- 由 $\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 得 $\boxed{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int \mathrm{d}^3x = \tilde{V}}$
- $\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的
- H 的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，它是实标量场的零点能 (即真空能)，是所有动量模式在全空间贡献的零点能之和
- 一维简谐振子的零点能为 $E_0 = \omega/2$，这是自由度为 1 时的结果
- 推广到无穷多自由度自然会得到正无穷大的零点能
- 如果不讨论引力现象，零点能通常并不重要，因为实验上只能测量两个能量之差
- 经过正则量子化之后，实标量场的哈密顿量 H 是正定算符，不存在负能量困难

哈密顿量本征态

哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的**对易子**分别为

$$[H, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} [a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left(a_{\mathbf{q}}^{\dagger} [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] + [a_{\mathbf{q}}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] a_{\mathbf{q}} \right)$$

$$= \int \mathrm{d}^3 q \, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$

$$[H, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} [a_{\mathbf{q}}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int \mathrm{d}^3 q \, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$$

哈密顿量本征态

哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的**对易子**分别为

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}} \left(a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] + [a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger] a_{\mathbf{q}}\right)$$

$$= \int d^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[H, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int d^3q\, E_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$$

故 $H a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$， $H a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$

设 $|E\rangle$ 是 H 的**本征态**，**本征值**为 E，本征方程表达为 $H|E\rangle = E|E\rangle$

从而，

$$H a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle = (a_{\mathbf{p}}^\dagger H + E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger)|E\rangle = (E + E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle$$

$$H a_{\mathbf{p}} |E\rangle = (a_{\mathbf{p}} H - E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}})|E\rangle = (E - E_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}} |E\rangle$$

可见，当 $a_{\mathbf{p}}^\dagger |E\rangle \neq 0$ 时，**产生算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 的作用是使能量本征值**增加** $E_{\mathbf{p}}$

当 $a_{\mathbf{p}} |E\rangle \neq 0$ 时，**湮灭算符** $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是使能量本征值**减少** $E_{\mathbf{p}}$

总动量

将 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的平面波展开式代入，**总动量算符**化为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int d^3x\, \pi\nabla\phi \\
&= -\int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}(-ip_0)\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)(i\mathbf{q})\left(a_\mathbf{q}e^{-iq\cdot x}-a_\mathbf{q}^\dagger e^{iq\cdot x}\right) \\
&= \int \frac{d^3x\, d^3p\, d^3q\, p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} \\
&\qquad \times \left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}^\dagger e^{-i(p-q)\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}e^{i(p-q)\cdot x}-a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}e^{-i(p+q)\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \frac{d^3p\, d^3q\, p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}\left\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}^\dagger e^{-i(p_0-q_0)t}+a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}e^{i(p_0-q_0)t}\right]\right. \\
&\qquad \left. -\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{q}e^{-i(p_0+q_0)t}+a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{q}^\dagger e^{i(p_0+q_0)t}\right]\right\} \\
&= \int \frac{d^3p\, E_\mathbf{p}\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\left(a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger+a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}+a_\mathbf{p}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_\mathbf{p}t}+a_\mathbf{p}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_\mathbf{p}t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger+a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}+a_\mathbf{p}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_\mathbf{p}t}+a_\mathbf{p}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_\mathbf{p}t}\right)
\end{aligned}
$$

化简总动量

作变量替换 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,(-\mathbf{p})\left(a_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a^\dagger_{-\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)
\end{aligned}$$

这个积分等于自身的相反数，因此积分结果为零，从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left[2a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right]\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int d^3p\,\mathbf{p}
\end{aligned}$$

总动量表达式

- 由 $\int d^3p\,\mathbf{p} = \int d^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int d^3p\,\mathbf{p}$ 得 $\int d^3p\,\mathbf{p} = 0$
- 于是，自由实标量场的总动量为

$$\boxed{\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}}$$

- 即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和
- 上式不依赖于时间 t，这是动量守恒定律的体现

总动量表达式

- 由 $\int d^3p\,\mathbf{p} = \int d^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int d^3p\,\mathbf{p}$ 得 $\int d^3p\,\mathbf{p} = 0$
- 于是，自由实标量场的总动量为

$$\boxed{\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}}$$

- 即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和
- 上式不依赖于时间 t，这是动量守恒定律的体现
- $\mathbf{P}$ 与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int d^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = -\int d^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}$$

- 即

$$\mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad \mathbf{P} a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}$$

2.3.4 小节　粒子态

引入**真空态** $|0\rangle$，要求它满足

$$\boxed{a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = 0}$$

其中**湮灭算符** $a_{\mathbf{p}}$ 的**动量** $\mathbf{p}$ 是**任意**的；**归一化条件**为 $\boxed{\langle 0|0\rangle = 1}$

将**哈密顿量** $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + E_{\text{vac}}$ 作用到真空态上，得

$$H\,|0\rangle = E_{\text{vac}}\,|0\rangle, \quad E_{\text{vac}} \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3p\, \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}$$

可见 $|0\rangle$ 的能量本征值是**零点能** E_{vac}，这意味着真空态是**能量最低**的态

真空态**不具有动量**，即 $|0\rangle$ 的 $\mathbf{P}$ 本征值是零矢量：

$$\mathbf{P}\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = \mathbf{0} = \mathbf{0}\,|0\rangle$$

单粒子态

- 接着，定义**单粒子态**

$$\boxed{|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\, |0\rangle}$$

- 其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是**归一化因子**
- 根据 $Ha_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle$，有 $H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_{\mathrm{vac}}+E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}\rangle$
- 由 $\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 和 $\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle$ 得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger})\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle$$

单粒子态

接着，定义**单粒子态**

$$\boxed{|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\, |0\rangle}$$

其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是**归一化因子**

根据 $Ha_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|E\rangle$，有 $H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_{\mathrm{vac}}+E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}\rangle$

由 $\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 和 $\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle$ 得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger})\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle$$

相比于真空态 $|0\rangle$，单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ **多了一份能量** $E_{\mathbf{p}}$，也**多了一份动量** $\mathbf{p}$

因此，$|\mathbf{p}\rangle$ 描述的是一个**动量为** $\mathbf{p}$ 的**粒子**，这个粒子的**能量**为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$

这满足**狭义相对论**中的**色散关系**

而**拉氏量** $\mathcal{L}$ 中实标量场的质量 m 就是粒子的**质量**

可以看到，**产生算符** $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 的作用是**产生一个动量为** $\mathbf{p}$ **的粒子**

单粒子态的内积

- 将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$a_{\mathbf{p}}\,|\mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle$$
$$= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle$$

- 如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零
- 如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态
- 可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}\,|\mathbf{q}\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle \end{aligned}$$

如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零

如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态

可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子

单粒子态的内积为

$$\begin{aligned} \boxed{\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle} &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle \\ &= \boxed{2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})} \end{aligned}$$

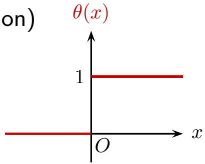
上式是 Lorentz 不变的，这是单粒子态归一化因子取成 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的原因，证明见下

内积 $\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 是发散的，原因在于产生算符 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 是在无界空间中讨论量子场平面波解时定义的，内积有限的粒子态可通过构造波包得到，见习题 2.3

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

- 接下来**证明** $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是 **Lorentz 不变**的
- 引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\boxed{\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$



- 对于满足**质壳条件**的四维动量 p^μ，p^0 **的符号**在任意惯性系中**不会改变**（见习题 1.3）
- 即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下**不变**

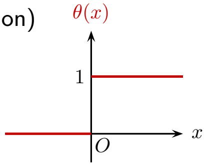
Oliver Heaviside
(1850–1925)

物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

接下来**证明** $2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是 **Lorentz 不变**的

引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\boxed{\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$



Oliver Heaviside
(1850–1925)

对于满足**质壳条件**的四维动量 p^μ，p^0 **的符号**在任意惯性系中**不会改变**（见习题 1.3）

即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下**不变**

一个**物理粒子**的四维动量 p^μ 满足**质壳条件** $p^2 - m^2 = 0$ 且**能量为正** ($p^0 > 0$)

任意 **Lorentz 标量函数** $F(p)$ 在**物理动量区域**上的 **Lorentz 不变积分**表达为

$$\int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)F(p)$$

单粒子态的内积

利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p) = \int d^3p\int_{-\infty}^{+\infty} dp^0\,\delta[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p})$$

$$= \int d^3p\int_0^{+\infty} dp^0\,\frac{\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}F(p^0,\mathbf{p}) = \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})$$

$\theta(p^0)$ 挑选出**方程** $(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2=0$ 的**正根** $p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}=E_{\mathbf{p}}$ 的贡献

而 $\left.\frac{\partial[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = 2p^0\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = 2E_{\mathbf{p}}$

可见，$\boxed{\dfrac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}}$ 是 **Lorentz 不变的动量空间体积元**

单粒子态的内积

利用 $\delta[f(x)]=\sum_i \dfrac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p)=\int \mathrm{d}^3p\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p^0\,\delta[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p})$$

$$=\int \mathrm{d}^3p\int_0^{+\infty}\mathrm{d}p^0\,\frac{\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}F(p^0,\mathbf{p})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})$$

$\theta(p^0)$ 挑选出**方程** $(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2=0$ 的**正根** $p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}=E_{\mathbf{p}}$ 的贡献

而 $\left.\dfrac{\partial[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}=2p^0\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}=2E_{\mathbf{p}}$

可见，$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}}$ 是 **Lorentz 不变的动量空间体积元**

对任意 **Lorentz 标量函数** $g(\mathbf{q})$，根据 δ 函数的挑选性，有

$$g(\mathbf{q})=\int \mathrm{d}^3p\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p})$$

最左和最右都是 **Lorentz 不变**的，则 $\boxed{2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$ 是 **Lorentz 不变**的，**证毕**

单粒子位置本征态

- 将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,(a_{\mathbf{q}}e^{-iq\cdot x} + a_{\mathbf{q}}^{\dagger}e^{iq\cdot x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{iq\cdot x}}{2E_{\mathbf{q}}}\,|\mathbf{q}\rangle$$

- 可见，$\phi(x)\,|0\rangle$ 是**所有动量模式**对应的**单粒子态**的**叠加态**

- $\phi(x)\,|0\rangle$ 与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{iq\cdot x}}{2E_{\mathbf{q}}}\,\langle\mathbf{p}\,|\,\mathbf{q}\rangle = \int d^3q\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,e^{iq\cdot x} = e^{ip\cdot x}$$

单粒子位置本征态

将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到**态矢**

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} (a_{\mathbf{q}} e^{-iq\cdot x} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq\cdot x})|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{iq\cdot x}}{2E_{\mathbf{q}}} |\mathbf{q}\rangle$$

可见，$\phi(x)|0\rangle$ 是**所有动量模式**对应的**单粒子态**的**叠加态**

$\phi(x)|0\rangle$ 与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\langle\mathbf{p}|\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{iq\cdot x}}{2E_{\mathbf{q}}} \langle\mathbf{p}\,|\,\mathbf{q}\rangle = \int d^3q\, \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\, e^{iq\cdot x} = e^{ip\cdot x}$$

量子力学单粒子位置本征态 $|\mathbf{x}\rangle$ 与动量本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ **内积为** $\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$，其中 $(2\pi)^{-3/2}$ 是归一化因子

两个内积的**形式相似**，因此 $\phi(x)|0\rangle$ 类似于 $t = x^0$ 时刻的**单粒子位置本征态**，$\phi(x)$ 作用在 $|0\rangle$ 上相当于**在时空点 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 处产生一个粒子**

平面波展开式中的**归一化因子** $\dfrac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}$ 使内积 $\langle\mathbf{p}|\phi(x)|0\rangle$ 成为 **Lorentz 不变量**

n 粒子态

定义动量分别为 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ 的 n 个粒子对应的多粒子态为

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle, \quad C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$$

根据 $Ha^\dagger_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\mathbf{p}} H + E_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}$，$H$ 对它的作用给出

$$\begin{aligned}
H|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= C_1 H a^\dagger_{\mathbf{p}_1} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle = C_1 (a^\dagger_{\mathbf{p}_1} H + E_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_1}) \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle \\
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} H a^\dagger_{\mathbf{p}_2} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle + E_{\mathbf{p}_1} |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} H \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= \cdots = C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} H |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

同理，$\mathbf{P}$ 对它的作用给出

$$\mathbf{P}|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$$

多粒子态 $|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$ 的能量和动量直接由各个粒子的能量和动量叠加贡献

标量玻色子

🐯 由**对易关系** $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

🐃 可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于**全同粒子交换**是**对称**的

标量玻色子

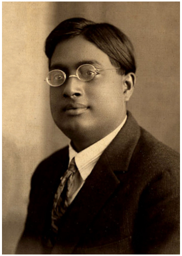
🐯 由**对易关系** $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$ 得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger\, |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}
$$

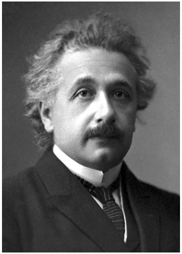
🐃 可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态矢与原来相等，即多粒子态对于**全同粒子交换**是**对称**的

🐎 因此**实标量场**描述的粒子是一种**玻色子**，称之为**标量玻色子** (scalar boson)，它服从 **Bose-Einstein 统计**

🐒 得到这个结论的关键在于**两个产生算符相互对易**



Satyendra Nath Bose
(1894–1974)



Albert Einstein
(1879–1955)

双粒子态的内积

双粒子态的内积为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}\, \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \right] \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \Big[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} | 0 \rangle \\
&\qquad + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} | 0 \rangle \Big] \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \Big[(2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) \\
&\qquad + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \Big] \\
&= 4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \right]
\end{aligned}
$$

此内积仅在两种条件下**非零**

一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2$，另一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$

粒子数密度算符

定义动量均为 $\mathbf{q}$ 的 $n_{\mathbf{q}}$ 个粒子对应的多粒子态

$$|n_{\mathbf{q}}\rangle \equiv C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle , \quad C_2 = (2E_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}/2}$$

粒子数密度算符 $N_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 对它的作用为

$$\begin{aligned}
N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger \left[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \right] (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^2 a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-2} |0\rangle + 2(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= \cdots = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle + n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle
\end{aligned}$$

粒子数算符

🐗 在**动量空间**对粒子数密度算符进行**积分**，得到**粒子数算符**

$$N \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

🦎 由 $N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle$ 得

$$\begin{aligned} N|n_{\mathbf{q}}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = n_{\mathbf{q}} |n_{\mathbf{q}}\rangle \end{aligned}$$

🐢 因此，$|n_{\mathbf{q}}\rangle$ 是 N 的**本征态**，**本征值**为**粒子数** $n_{\mathbf{q}}$

一般多粒子态

更一般地，定义多粒子态

$$|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle \equiv C_3(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\,,\quad C_3=\prod_{i=1}^{m}(2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}$$

它描述动量为 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_m$ 的粒子分别有 $n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}$ 个的状态，则

$$\begin{aligned}
&N\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3 a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\\
&\qquad+n_{\mathbf{p}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}-1}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\Big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}a_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_2})^{n_{\mathbf{p}2}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}\,|0\rangle\Big]+n_{\mathbf{p}_1}\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=\cdots=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,C_3\Big[a^\dagger_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p}_1})^{n_{\mathbf{p}1}}\cdots(a^\dagger_{\mathbf{p}_m})^{n_{\mathbf{p}m}}a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\Big]+(n_{\mathbf{p}_1}+\cdots+n_{\mathbf{p}_m})\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle\\
&=(n_{\mathbf{p}_1}+\cdots+n_{\mathbf{p}_m})\,|n_{\mathbf{p}_1},\cdots,n_{\mathbf{p}_m}\rangle
\end{aligned}$$

可见，N 确实是描述总粒子数的算符

2.4 节　复标量场的正则量子化

- 本节讨论**复标量场** $\phi(x)$，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$
- **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭符号** $*$ 改成**厄米共轭符号** $\dagger$
- 故自由复标量场的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi}$$

- 其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**

2.4 节 复标量场的正则量子化

本节讨论**复标量场** $\phi(x)$，它**不满足自共轭条件**，即 $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$

自由复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把**复共轭符号** $*$ 改成**厄米共轭符号** $\dagger$

故自由复标量场的 **Lorentz 不变拉氏量**为

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi}$$

其中 $m > 0$ 是复标量场的**质量**

$\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(x)$ **线性独立**，它们是两个**独立**的正则变量，注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} = \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^\dagger$$

由 **Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$ 推出**经典运动方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi^\dagger(x) = 0$$

也就是说，$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 均满足 **Klein-Gordon 方程**

复标量场的分解

可以将**复标量场** ϕ **分解**为两个**实标量场** ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合，

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)$$

从而拉氏量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= \frac{1}{2}[\partial^\mu(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)]\partial_\mu(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2)(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_1)\partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_2)\partial_\mu \phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2\end{aligned}$$

对比**实标量场拉氏量**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

可知复标量场的拉氏量相当于两个**质量相同**的实标量场的拉氏量

2.4.1 小节 平面波展开

- 接下来遵循 2.3.1 小节中的方法讨论**复标量场**的**平面波展开式**
- 区别在于**不能够应用自共轭条件**
- 从而，场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的**一般解**为

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}e^{i(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned}$$

- 第二步对方括号中第二项作**变量替换** $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$
- 由于复标量场不满足自共轭条件，**算符 $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$ 与 $a_\mathbf{k}$ 没有关系**，改记为 $b_\mathbf{k}^\dagger \equiv \tilde{a}_{-\mathbf{k}}$
- 展开式变成

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$$

复标量场的平面波展开式

对 $\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}e^{-i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$ **替换动量记号**

把**复标量场**的**平面波展开式**整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)}$$

其中 p^0 满足**质壳条件** $p^0=E_{\mathbf{p}}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0$

复标量场的平面波展开式

对 $\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}e^{-i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger e^{i(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]$ 替换动量记号

把复标量场的平面波展开式整理成

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)}$$

其中 p^0 满足质壳条件 $p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0$

取厄米共轭，就得到 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$a_\mathbf{p}$ 和 $b_\mathbf{p}$ 是两个相互独立的湮灭算符

$a_\mathbf{p}^\dagger$ 和 $b_\mathbf{p}^\dagger$ 是两个相互独立的产生算符

等时对易关系

$\phi(\mathbf{x}, t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \left(b_\mathbf{p} e^{-ip\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x} \right)$$

$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \left(a_\mathbf{p} e^{-ip\cdot x} - b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x} \right)$$

$\pi(\mathbf{x}, t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 互为**厄米共轭**

等时对易关系

🔍 $\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

🔬 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的**共轭动量密度**是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-ip_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

👣 $\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为**厄米共轭**

🕵️ 依照 $[\Phi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$、$[\Phi_a(\mathbf{x},t),\Phi_b(\mathbf{y},t)]=0$ 和 $[\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=0$，复标量场的**等时对易关系**为

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0\\
[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0\\
[\phi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)] &= [\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=[\phi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0
\end{aligned}$$

产生湮灭算符的对易关系

利用**等时对易关系**推出以下**产生湮灭算符的对易关系**

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \\
[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \\
[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= [b_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0
\end{aligned}
$$

具体推导过程见 **2.4.2 小节选读内容**

这些对易关系说明 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 与 $(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 是两套**相互独立**的产生湮灭算符，描述**两种不同的玻色子**

2.4.3 小节 U(1) 整体对称性

类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 **U(1) 整体变换**

$$\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x)$$

其中实常数 q 是 **U(1) 荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**

则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$ 不变，系统具有 **U(1) 整体对称性**

2.4.3 小节　U(1) 整体对称性

类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 **U(1) 整体变换**

$$\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x)$$

其中实常数 q 是 **U(1) 荷**，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的**变换参数**

则拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$ 不变，系统具有 **U(1) 整体对称性**

相应的 **U(1) 守恒流**为 $\boxed{J^\mu = iq\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi}$，满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$，它是一个**厄米算符**，

$$(J^\mu)^\dagger = \{iq[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi]\}^\dagger = -iq[(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi] = iq\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi = J^\mu$$

U(1) 守恒荷算符是

$$Q = iq\int d^3x\,\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^0}\phi = iq\int d^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi] = iq\int d^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi)$$

U(1) 守恒荷算符

- 利用**平面波展开式**，将 **U(1) 守恒荷算符**化为

$$
\begin{aligned}
Q &= \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi) \\
&= \mathrm{i}q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}}\Big[\left(b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-\mathrm{i}E_\mathbf{k})\left(a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} - b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right) \\
&\qquad - (-\mathrm{i}E_\mathbf{p})\left(b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right)\Big] \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}}\Big\{(E_\mathbf{k}+E_\mathbf{p})\big[a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x} - b_\mathbf{p}b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\big] \\
&\qquad + (E_\mathbf{k}-E_\mathbf{p})\big[b_\mathbf{p}a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x} - a_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\big]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}}\Big\{(E_\mathbf{k}+E_\mathbf{p})\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\Big[a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}-E_\mathbf{k})t} - b_\mathbf{p}b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p}-E_\mathbf{k})t}\Big] \\
&\qquad + (E_\mathbf{k}-E_\mathbf{p})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})\Big[b_\mathbf{p}a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{k})t} - a_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{k})t}\Big]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} - b_\mathbf{p}b_\mathbf{p}^\dagger\right)
\end{aligned}
$$

正粒子和反粒子

由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$

$$= \boxed{\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,q}$$

上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$

正粒子和反粒子

- 由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$

$$= \boxed{\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,q}$$

- 上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$
- 可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 **U(1) 荷**为 q，称为**正粒子**
- $(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有**相反的 U(1) 荷** $-q$，称为**反粒子**
- 因此，复标量场描述一对**正反标量玻色子**
- 除去零点荷，总荷 Q 是**所有动量模式所有正反粒子**贡献的 **U(1) 荷**之和

正粒子和反粒子

- 由**对易关系** $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$

$$= \boxed{\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,q}$$

- 上式第二项是**零点荷**；在第一项的圆括号中，**粒子数密度算符** $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而**粒子数密度算符** $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$
- 可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 **U(1) 荷**为 q，称为**正粒子**
- $(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有**相反的 U(1) 荷** $-q$，称为**反粒子**
- 因此，复标量场描述一对**正反标量玻色子**
- 除去零点荷，总荷 Q 是**所有动量模式所有正反粒子**贡献的 **U(1) 荷**之和
- 这里单个粒子的荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是**相加性**的，并且来自于一种**内部对称性**，因而是一种**内部相加性量子数** (internal additive quantum number)
- 实际上，任何**反粒子**的**所有内部相加性量子数**都与相应的**正粒子相反**

正粒子和反粒子

由对易关系 $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 推出

$$\boxed{Q} = q\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$

$$= \boxed{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(q\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\, b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, q}$$

Q 不依赖于时间 t，这是 U(1) 荷守恒定律的体现

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而粒子数密度算符 $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$

可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 U(1) 荷为 q，称为正粒子

$(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有相反的 U(1) 荷 $-q$，称为反粒子

因此，复标量场描述一对正反标量玻色子

除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和

这里单个粒子的荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是相加性的，并且来自于一种内部对称性，因而是一种内部相加性量子数 (internal additive quantum number)

实际上，任何反粒子的所有内部相加性量子数都与相应的正粒子相反

不存在负概率困难

如果将**复标量场** $\phi(x)$ 替换成**量子力学**的**单粒子波函数** $\Psi(x)$，则

$$\frac{Q}{q} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi]$$

与**单粒子概率密度** $\rho = \dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} - \dfrac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi\right)$ 的全空间积分类似

但是，这里 $\dfrac{Q}{q}$ **的本征值**被解释为**正粒子数**与**反粒子数**之**差**，显然是**可正可负**的

也就是说，在**量子场论**中 $\dfrac{Q}{q}$ 与**单粒子在空间中的概率没有关系**

因而**不像量子力学**那样存在**负概率困难**

纯中性粒子

- 如果对**实标量场**作类似的 **U(1) 整体变换**，则**自共轭条件**使得

$$e^{iq\theta}\phi(x) = \phi'(x) = [\phi'(x)]^\dagger = [e^{iq\theta}\phi(x)]^\dagger = e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x) = e^{-iq\theta}\phi(x)$$

- 上式要求 $q = 0$

- 因此，对实标量场**不能**进行非平庸的 U(1) 整体变换

- **自共轭条件**使实标量场描述的粒子**不能**具有任何非零的内部相加性量子数

- 也就是说，**正粒子**与**反粒子**是**相同**的

- 这样的粒子称为**纯中性粒子** (truly neutral particle)

哈密顿量和总动量

经过进一步计算，得到自由复标量场的**哈密顿量算符**

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}$$

除了**零点能**，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子贡献的能量之和

动量为 $\mathbf{p}$ 的**正粒子**和**反粒子**的**能量**均为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$，可见，正反粒子具有**相同的质量** m

另一方面，复标量场的**总动量算符**为

$$\mathbf{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right)$$

总动量是所有动量模式所有正反粒子贡献的动量之和

具体推导过程见 **2.4.4 小节选读**内容