

粒子物理简介

第五节 量子色动力学

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 12 月 23 日



夸克模型

1964 年，盖尔曼和茨威格分别提出**夸克模型**，
当时认为存在 3 种**味道**的夸克， u 、 d 和 s ，属于
 $SU(3)_F$ 群的基础表示，强子具有 $SU(3)_F$ **味对称性**

 介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**

 重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**

夸克模型

1964 年，盖尔曼和茨威格分别提出**夸克模型**，
当时认为存在 3 种**味道**的夸克， u 、 d 和 s ，属于
 $SU(3)_F$ 群的基础表示，强子具有 $SU(3)_F$ 味对称性

介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**

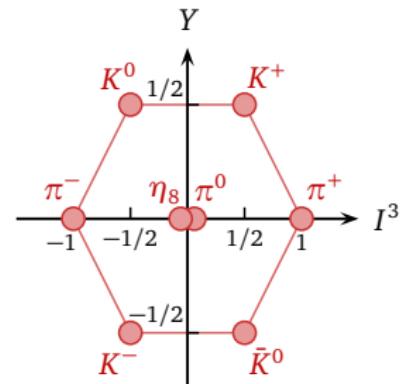
重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**

u 和 d 的味对称性就是 $SU(2)$ 同位旋对称性，
 $SU(3)_F$ 味对称性是进一步的推广；根据**群表示论**，
 $J^P = 0^-$ 的赝标量介子是 $SU(3)_F$ 八重态，成分为

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \pi^- = d\bar{u}, \quad \eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

$$K^+ = u\bar{s}, \quad K^0 = d\bar{s}, \quad \bar{K}^0 = s\bar{d}, \quad K^- = s\bar{u}$$

由于 s 夸克的质量大于 u 和 d 夸克的质量， $SU(3)_F$ 味对称性不是严格成立的，
同个多重态中的粒子存在不小的**质量差异**



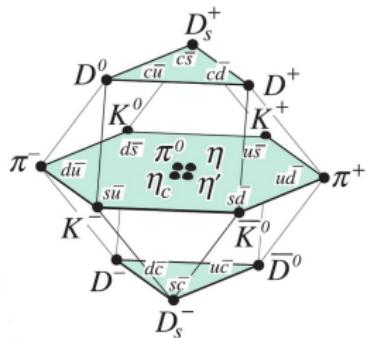
$SU(3)_F$ 八重态的权图

$$\text{超荷 } Y = \frac{1}{2}(B + S)$$

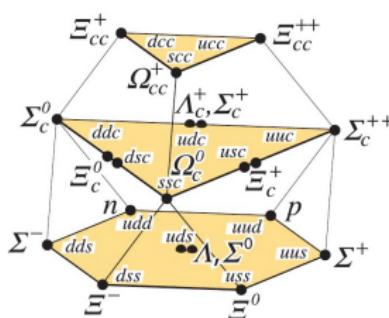
SU(4)_F 味对称性

 把 c 夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为 $SU(4)_F$ 味对称性

由于 c 夸克很重，同个多重态中粒子的**质量差异更大**



$J^P = 0^-$ 介子 15 重态及单态 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 重子 20 重态

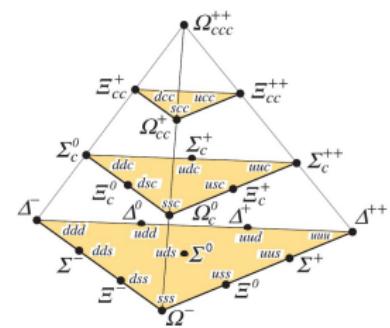
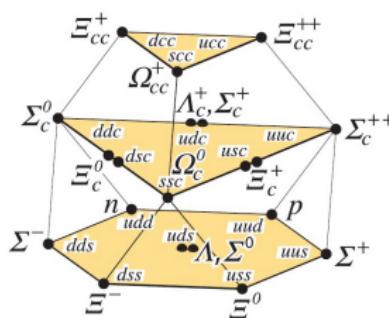
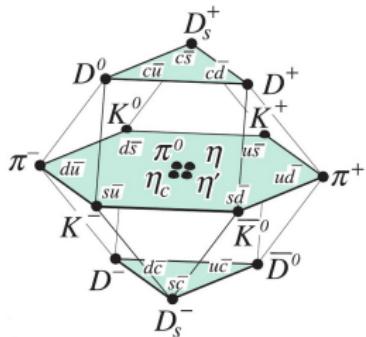


$J^P = \frac{3}{2}^+$ 重子 20 重态

SU(4)_F 味对称性

🦙 把 c 夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为 SU(4)_F 味对称性

⭐ 由于 c 夸克很重，同多个重态中粒子的**质量差异更大**



$J^P = 0^-$ 介子 15 重态及单态

$J^P = \frac{1}{2}^+$ 重子 20 重态

$J^P = \frac{3}{2}^+$ 重子 20 重态

💡 上述自旋为 $3/2$ 的重子多重态中存在 $\Delta^{++} \sim uuu$ 、 $\Delta^- \sim ddd$ 、 $\Omega^- \sim sss$ 和 $\Omega_{ccc}^{++} \sim ccc$ 这样的重子。它们是 3 个同味夸克组成的 $L = 0$ 的态，因而 3 个夸克的自旋取向必须相同才能得到 $J = 3/2$ 。根据**泡利不相容原理**，全同费米子**不能**处于相同的状态，这预示着夸克具有额外的内部自由度——**颜色**。

颜色自由度

从实验上确立的强子态基本都可以用一个正夸克加一个反夸克 (**介子**)、三个正夸克 (**正重子**) 和三个反夸克 (**反重子**) 组成的体系来描述

? 为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态**不存在**呢?

! 颜色自由度的引入解决了这个问题

颜色自由度

从实验上确立的强子态基本都可以用一个正夸克加一个反夸克（**介子**）、三个正夸克（**正重子**）和三个反夸克（**反重子**）组成的体系来描述

? 为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢？

! 颜色自由度的引入解决了这个问题

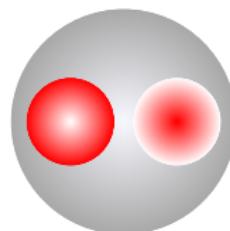
● 夸克具有 $SU(3)_C$ 色对称性，每味夸克具有 3 种颜色，构成 $SU(3)_C$ 群的基础表示，可记为

$$q^i \quad (i = 1, 2, 3; q = d, u, s, c, b, t)$$

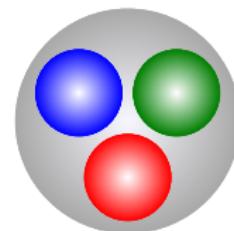
● 强子都是**色单态**；**介子**中两个夸克的颜色必须相反，以组成色单态；**重子**中三个夸克的颜色各不相同，组成**全反对称**的色单态

● 两个正夸克或四个正夸克**不能组成色单态**，因而不能构成强子态

● 用 $SU(3)_C$ 色对称性构建规范理论，得到**量子色动力学**



介子



重子

非阿贝尔规范理论

 SU(3) 群是个非阿贝尔群，它的生成元彼此不对易，因而它的规范变换形式与 U(1) 群（阿贝尔群）不同。**非阿贝尔群的规范理论**由杨振宁和米尔斯于 1954 年提出，也称为**杨—米尔斯理论**，其规范场也称为**杨—米尔斯场**。

非阿贝尔规范理论

 SU(3) 群是个非阿贝尔群，它的生成元彼此不对易，因而它的规范变换形式与 U(1) 群（阿贝尔群）不同。**非阿贝尔群的规范理论**由杨振宁和米尔斯于 1954 年提出，也称为**杨—米尔斯理论**，其规范场也称为**杨—米尔斯场**。

 对于非阿贝尔李群，生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$ ，依赖时空坐标的群变换为 $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ ；旋量场 ψ 和规范场 A_μ^a 的**规范变换**是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^a U^\dagger(x) - \frac{i}{g} U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

 定义**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a t^a$ ，就可以得到 $D_\mu\psi(x) \rightarrow U(x)D_\mu\psi(x)$

 从而，具有**非阿贝尔规范对称性**的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$$

 其中规范场的场强张量 $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

量子色动力学

 **量子色动力学** (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是 $SU(3)_C$ 非阿贝尔规范理论, 规范场记作 G_μ^a , 规范玻色子为 8 种胶子, 拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m_q) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + i g_s G_\mu^a t^a$, $G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

 g_s 称为强耦合常数, 结构常数 f^{abc} 对 3 个指标全反对称, 独立分量为

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = 1/2, \quad f^{458} = f^{678} = \sqrt{3}/2$$

 $t^a = \lambda^a/2$ 是 $SU(3)_C$ 基础表示的生成元, 其中 λ^a 是 8 个盖尔曼矩阵

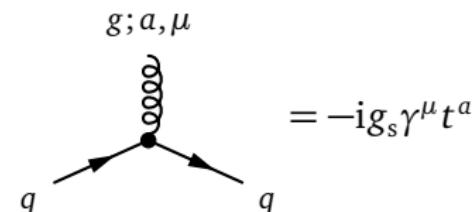
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

QCD 相互作用顶点

🍩 \mathcal{L}_{QCD} 中 $-g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$ 项的相互作用顶点如右图

.– $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ 项带来非阿贝尔规范理论特有的以下规范玻色子自相互作用顶点——胶子的三线性和四线性自相互作用顶点



$$= -g_s f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

$$= -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

$$= -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

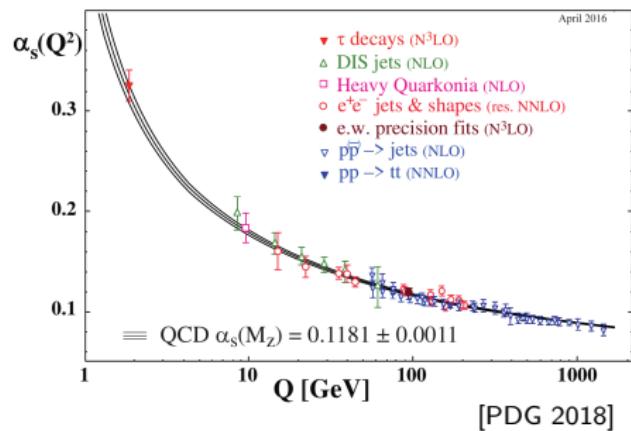
渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

在量子电动力学中，电磁耦合常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ 随能标升高而减小

这个特性称为 QCD 的渐近自由，而高能标意味着短距离



渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

在量子电动力学中，电磁耦合常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ 随能标升高而减小

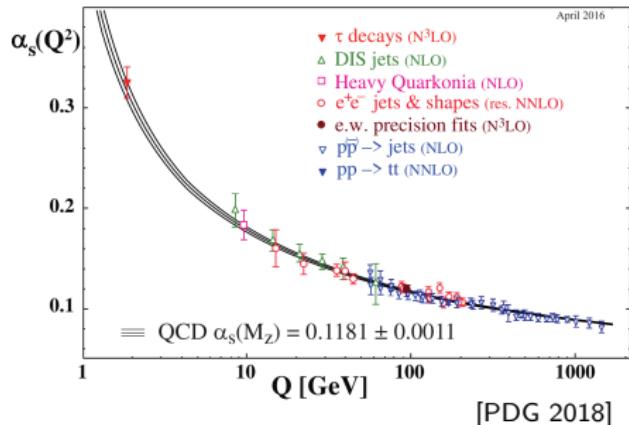
这个特性称为 QCD 的渐近自由，而高能标意味着短距离

随着能标下降， α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为夸克禁闭

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中



深度非弹性散射与部分子模型

1960 年代末，在高能轻子与核子散射的实验中发现，出现大动量转移过程的概率很高，即常常发生**深度非弹性散射**

这意味着核子内部存在**局域的散射中心**，类似于**卢瑟福散射实验**中 α 粒子与原子中局域的原子核发生散射的情况

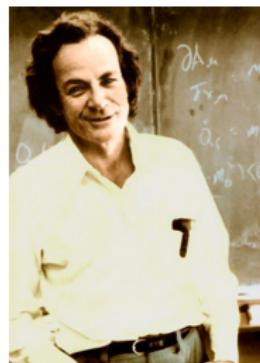
深度非弹性散射与部分子模型

1960 年代末，在高能轻子与核子散射的实验中发现，出现大动量转移过程的概率很高，即常常发生深度非弹性散射

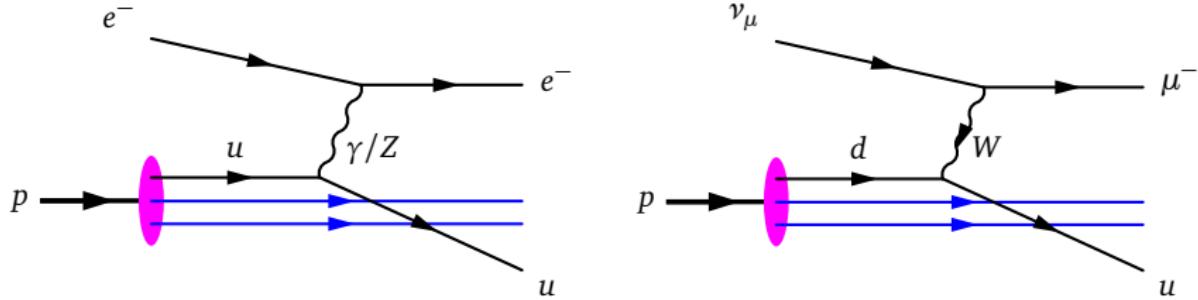
这意味着核子内部存在局域的散射中心，类似于卢瑟福散射实验中 α 粒子与原子中局域的原子核发生散射的情况

据此，费曼于 1969 年提出部分子模型，假设强子由一些在深度非弹性散射中几乎自由的部分子组成

进一步研究表明，有些部分子与夸克具有相同的量子数，它们就是夸克；其它部分子是电中性的，后来证实是胶子



R. Feynman
(1918–1988)



$e^- + p \rightarrow e^- + X$ 深度非弹性散射

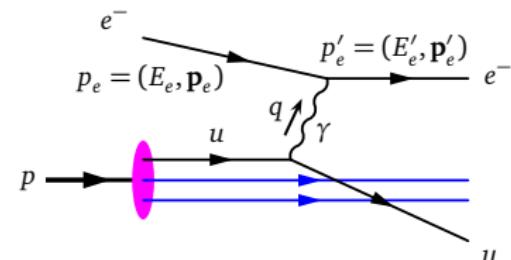
🐘 动量转移很大时，忽略电子质量，有

$$q^2 = (p_e - p'_e)^2 = 2m_e^2 - 2p_e \cdot p'_e$$

$$\simeq -2E_e E'_e + 2|\mathbf{p}_e| |\mathbf{p}'_e| \cos \theta \simeq -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2)$$

🍷 定义 $Q^2 \equiv -q^2 \geq 0$, $Q \equiv \sqrt{Q^2}$ 即**动量转移**

🍸 具有**大动量转移**的散射过程可以探测靶粒子的**微小结构**，尺度 $\Delta x \sim 1/Q$



$e^- + p \rightarrow e^- + X$ 深度非弹性散射

🐘 动量转移很大时，忽略电子质量，有

$$q^2 = (p_e - p'_e)^2 = 2m_e^2 - 2p_e \cdot p'_e$$

$$\simeq -2E_e E'_e + 2|\mathbf{p}_e| |\mathbf{p}'_e| \cos \theta \simeq -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2)$$

🍷 定义 $Q^2 \equiv -q^2 \geq 0$, $Q \equiv \sqrt{Q^2}$ 即**动量转移**

🍸 具有**大动量转移**的散射过程可以探测靶粒子的**微小结构**，尺度 $\Delta x \sim 1/Q$

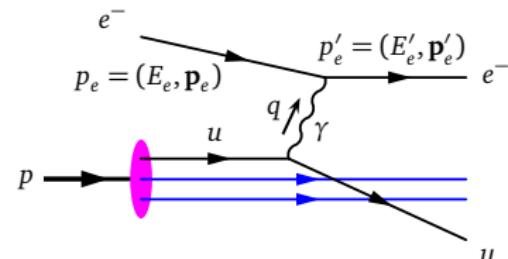
🍹 在**部分子模型**中， $e^- + p \rightarrow e^- + X$ **单举微分截面**表达为

$$\frac{d\sigma}{dy} = \sum_i \int_0^1 \left\{ \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} x s [(1-y)^2 + 1] \right\} Q_i^2 f_{i/p}(x) dx, \quad x = \frac{p_i^\mu}{p_p^\mu}, \quad y = \frac{E_e - E'_e}{E_e}$$

🎵 x 是部分子 i 动量占质子 p 动量的**分数**， y 是电子的**非弹性度**

🎶 花括号内的因子是 QED 领头阶**电子与单位点电荷的散射截面**

🎼 $f_{i/p}(x)$ 称为**部分子分布函数** (parton distribution function, PDF)，描述在质子 p 中找到动量分数为 x 的部分子 i 的数量



比约肯标度律

从上述公式抽取**结构函数** $F_2(x) = \sum_i Q_i^2 x f_{i/p}(x)$ 来描述**质子的夸克结构**

$F_2(x)$ 不依赖于 Q^2 , 这个现象称为**比约肯标度律** (Bjorken scaling)

Bjorken 标度律是**近似的**, 它在 Q^2 变化范围较大时遭到**破坏**

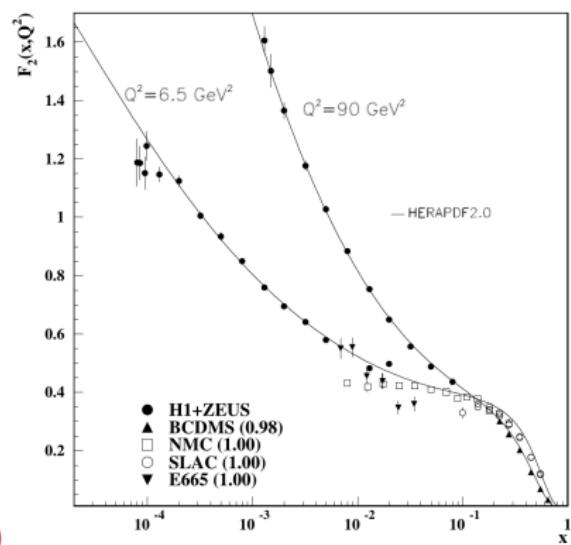
部分子可以通过**QCD 耦合**辐射出更多部分子; Q 越大, 辐射部分子的数量越多

虚度为 $\mu^2 = p^\mu p_\mu > 0$ 的部分子能够**自由地**参与空间尺度 $\Delta x \sim 1/\mu$ 的散射过程

μ 是能够**分辨**自由部分子的**因子化能标**, 受到动量转移 Q 的限制, $\mu < Q$

受 QCD 耦合影响, PDF 实际上依赖于能标 μ , 结构函数依赖于动量转移 Q

$$f_{i/p}(x) \rightarrow f_{i/p}(x, \mu^2), \quad F_2(x) \rightarrow F_2(x, Q^2)$$



[PDG 2018]

部分子分布函数

强子的部分子包括胶子和两种来源的夸克

价夸克：构成强子的组分夸克，贡献各种量子数

海夸克：来自真空极化，即由胶子分裂而来，正反夸克成对出现

质子的价夸克为 uud ，反映为

$$\int_0^1 dx [f_{u/p}(x, \mu^2) - f_{\bar{u}/p}(x, \mu^2)] = 2$$

$$\int_0^1 dx [f_{d/p}(x, \mu^2) - f_{\bar{d}/p}(x, \mu^2)] = 1$$

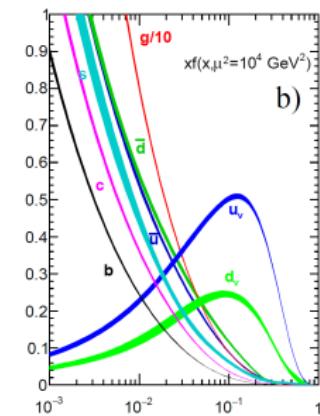
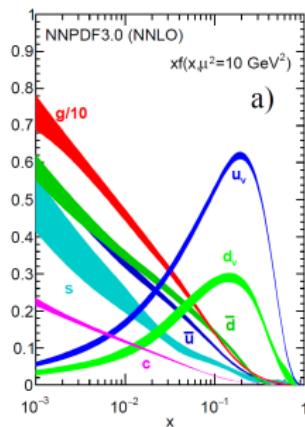
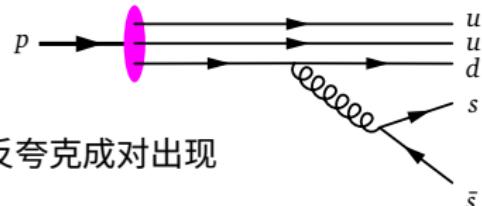
$$f_{s/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{s}/p}(x, \mu^2)$$

$$f_{c/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{c}/p}(x, \mu^2)$$

$$f_{b/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{b}/p}(x, \mu^2)$$

能动量守恒体现为

$$\int_0^1 dx \sum_i x f_{i/p}(x, \mu^2) = 1, \quad i = g, d, u, s, c, b, \bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}$$

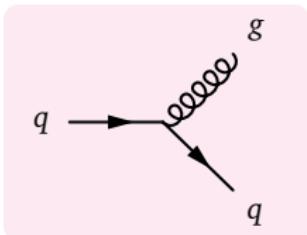


[PDG 2018]

部分子分布函数的演化

强子 h 中部分子 i 的 PDF 随能标的演化由 Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) 方程描述

$$\frac{\partial f_{i/h}(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \sum_j P_{i \leftarrow j}(z) f_{j/h}\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right)$$

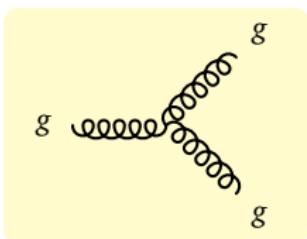
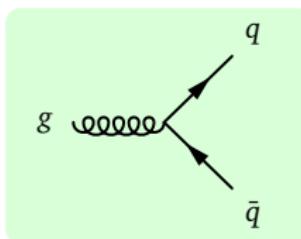


在 QCD 领头阶, 分裂函数 $P_{i \leftarrow j}(z)$ 为

$$P_{q \leftarrow q}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z)$$

$$P_{g \leftarrow q}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+(1-z)^2}{z}$$

$$P_{q \leftarrow g}(z) = \frac{1}{2}[z^2 + (1-z)^2]$$



$$P_{g \leftarrow g}(z) = 6 \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \right] + \left(\frac{11}{2} - \frac{n_f}{3} \right) \delta(1-z)$$

n_f 是满足 $m_q < \mu$ 的有效轻夸克味数

部分子分布函数的确定

hog 假设 PDF 具有一定的参数化形式，用 DGLAP 方程将 PDF 演化到不同能标以联系多个实验，再对实验数据进行全局拟合来确定参数

rainbow 各个实验有各自敏感的 x 和 Q^2 范围

guitar 固定靶实验的 $\ell^\pm N$ 、 NN 、 νN ($N = p, n$)
深度非弹性散射数据

trumpet $e^\pm p$ 对撞机 HERA 深度非弹性散射数据

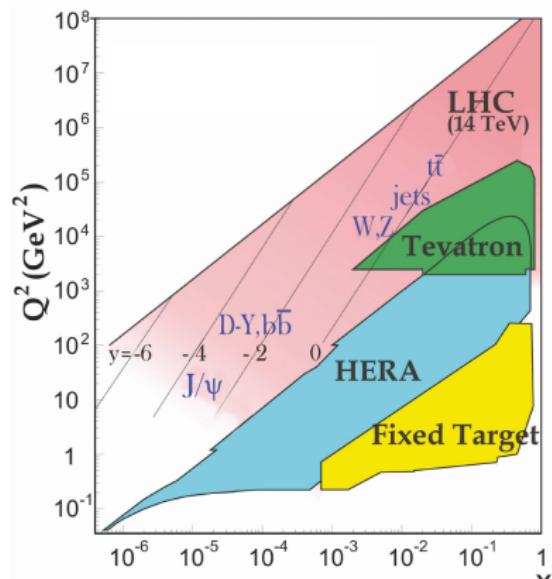
violin $p\bar{p}$ 对撞机 Tevatron 硬散射数据

guitar pp 对撞机 LHC 硬散射数据

camera 常用的 PDF 集包括 CT (CTEQ)、MSTW、NNPDF、MMHT、HERAPDF、ABMP、JR 等

camera 这些 PDF 集可以通过软件包 LHAPDF 调用

<https://lhapdf.hepforge.org>



中微子—核子散射

由于同位旋对称性，质子 p 和中子 n 的 PDF 有一定的联系

$$f_{u/n} = f_{d/p}, \quad f_{d/n} = f_{u/p}, \quad f_{\bar{u}/n} = f_{\bar{d}/p}, \quad f_{\bar{d}/n} = f_{\bar{u}/p}$$

反强子 PDF 与正强子 PDF 也有关联， $f_{q/\bar{p}} = f_{\bar{q}/p}$, $f_{g/\bar{p}} = f_{g/p}$

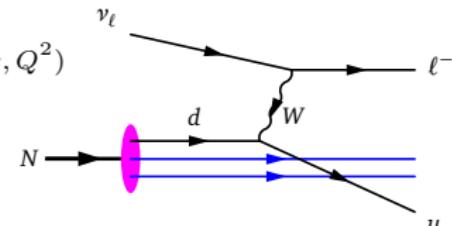
如果固定靶上有等量的质子和中子，设同位旋单态核子 $N = (p + n)/2$ ，则高能中微子带电流打靶过程 $\nu N \rightarrow \ell^- X$ 的微分截面可表达为

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{2G_F^2 E_\nu m_N}{\pi} \left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 x[q(x, Q^2) + (1-y)^2 \bar{q}(x, Q^2)]$$

$$q(x, Q^2) = \frac{1}{2}[f_{u/p}(x, Q^2) + f_{d/p}(x, Q^2)] + f_{s/p}(x, Q^2) + f_{b/p}(x, Q^2)$$

$$\bar{q}(x, Q^2) = \frac{1}{2}[f_{\bar{u}/p}(x, Q^2) + f_{\bar{d}/p}(x, Q^2)] + f_{\bar{s}/p}(x, Q^2) + f_{\bar{b}/p}(x, Q^2)$$

$q(x, Q^2) \leftrightarrow \bar{q}(x, Q^2)$  $\bar{\nu}N \rightarrow \ell^+ X$ 微分截面



中性流过程 $\nu N \rightarrow \nu X$ 也有类似表达式

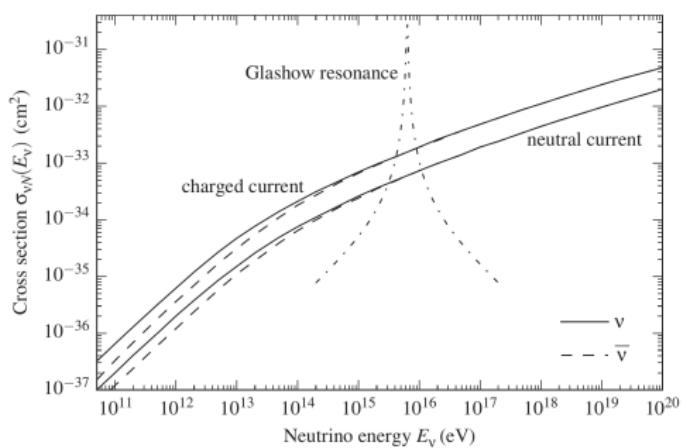
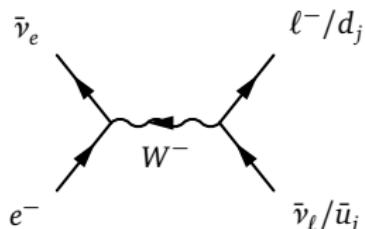
中微子深度非弹性散射

中微子深度非弹性散射具有下列特点

- 在中微子—核子散射过程中，**带电流截面比中性流截面大**
- 弱相互作用**破坏宇称** 手掌图标 当 $E_\nu \lesssim 1 \text{ PeV} = 10^{15} \text{ eV}$ 时，**反中微子截面偏小**
- 当中微子与**原子**散射时，中微子与**电子**的散射截面通常可以**忽略**
- 例外的是，**反电子型中微子 $\bar{\nu}_e$** 在

$E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_W^2}{2m_e} \simeq 6.3 \text{ PeV}$ 处通过 W^-

共振峰发生散射 $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow W^- \rightarrow X$ ，
截面**非常大**，这就是**格拉肖共振**



[Gaisser et al., 2016]

强子—强子硬散射

对于**大动量转移**，强子 A 与 B 的 **QCD 硬散射**微分截面可用 PDF 表达为

$$\frac{d\sigma_{\text{hard}}(s)}{dp_T} = \int dx_1 dx_2 \sum_{ijkl} \frac{1}{1 + \delta_{kl}} f_{i/A}(x_1, \mu^2) f_{j/B}(x_2, \mu^2) \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})}{dp_T}$$

炮筒 $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})$ 是部分子散射过程 $ij \rightarrow kl$ 的截面，可通过**微扰 QCD** 计算

土豆 部分子层面上的质心能平方为 $\hat{s} = x_1 x_2 s = (p_i + p_j)^2 = (p_k + p_l)^2$

热狗 p_T 是任一末态部分子的**横向动量**， \hat{s} 受到 p_T 的限制， $\hat{s} \geq 4p_T^2$

手指 可以用 p_T 的大小衡量散射过程的**软硬程度**

强子—强子硬散射

对于**大动量转移**，强子 A 与 B 的 **QCD 硬散射**微分截面可用 PDF 表达为

$$\frac{d\sigma_{\text{hard}}(s)}{dp_T} = \int dx_1 dx_2 \sum_{ijkl} \frac{1}{1 + \delta_{kl}} f_{i/A}(x_1, \mu^2) f_{j/B}(x_2, \mu^2) \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})}{dp_T}$$

$\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})$ 是部分子散射过程 $ij \rightarrow kl$ 的截面，可通过**微扰 QCD** 计算

部分子层面上的质心能平方为 $\hat{s} = x_1 x_2 s = (p_i + p_j)^2 = (p_k + p_l)^2$

p_T 是任一末态部分子的**横向动量**， \hat{s} 受到 p_T 的限制， $\hat{s} \geq 4p_T^2$

可以用 p_T 的大小衡量散射过程的**软硬程度**

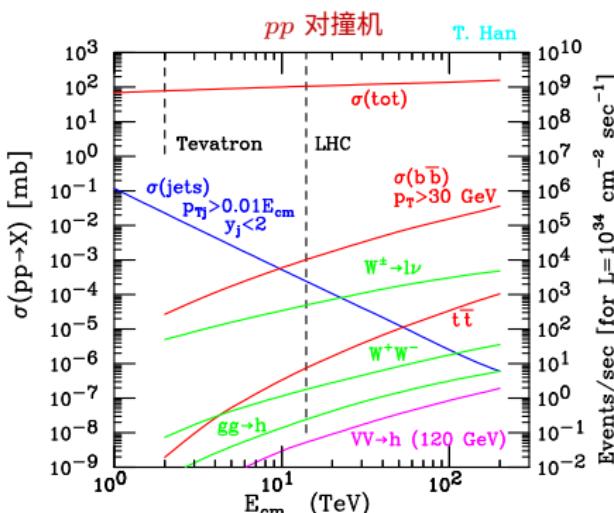
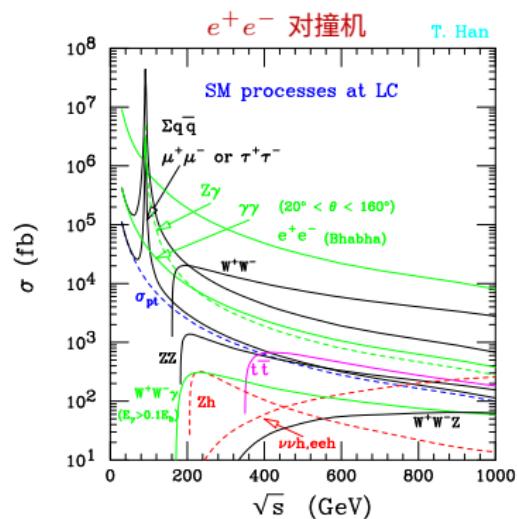
质心能很高时胶子 PDF 很大， $gg \rightarrow gg$ 主导， $\frac{d\hat{\sigma}_{gg \rightarrow gg}(\hat{s})}{dp_T} \sim \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{2\pi} \frac{1}{p_T^4}$

QCD 硬散射截面随质心能 \sqrt{s} 增长的趋势为

$$\sigma_{\text{hard}}(s) \sim \int_{4p_T^2/s}^1 \frac{dx_1}{x_1} x_1^{-\lambda} \int_{4p_T^2/(x_1 s)}^1 \frac{dx_2}{x_2} x_2^{-\lambda} \sim s^\lambda \ln s$$

s^λ 因子反映 PDF 在低 x 处的行为， $\ln s$ 因子反映末态相空间的增大

对撞机过程产生截面



[Han, arXiv:hep-ph/0508097]

天鹅 截面 σ 的单位: $10^{-24} \text{ cm}^2 = 1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb} = 10^{18} \text{ ab}$

猫头鹰 瞬时亮度 \mathcal{L} 的单位: $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \simeq 315 \text{ fb}^{-1} \text{ year}^{-1}$

老鹰 积分亮度 $\int \mathcal{L}(t) dt$ 表征数据量, 事例数 $N = \sigma \int \mathcal{L}(t) dt$

软过程

Unmarshaller 强子相互作用中的**软过程**具有很小的动量转移, $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$

Unmarshaller $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$ 是 α_s 跑动

到**无穷大**的低能标度, 因此处理

软过程时关于 $\alpha_s(Q^2)$ 的**微扰展开**

失效, 非微扰效应主导

Unmarshaller 由于**夸克禁闭**, 软过程中的

部分子**不是自由的**

软过程

强子相互作用中的**软过程**具有很小的动量转移, $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$

$\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$ 是 α_s 跑动到**无穷大**的低能标度, 因此处理软过程时关于 $\alpha_s(Q^2)$ 的**微扰展开失效**, **非微扰效应主导**

由于**夸克禁闭**, 软过程中的部分子**不是自由的**

可微扰过程

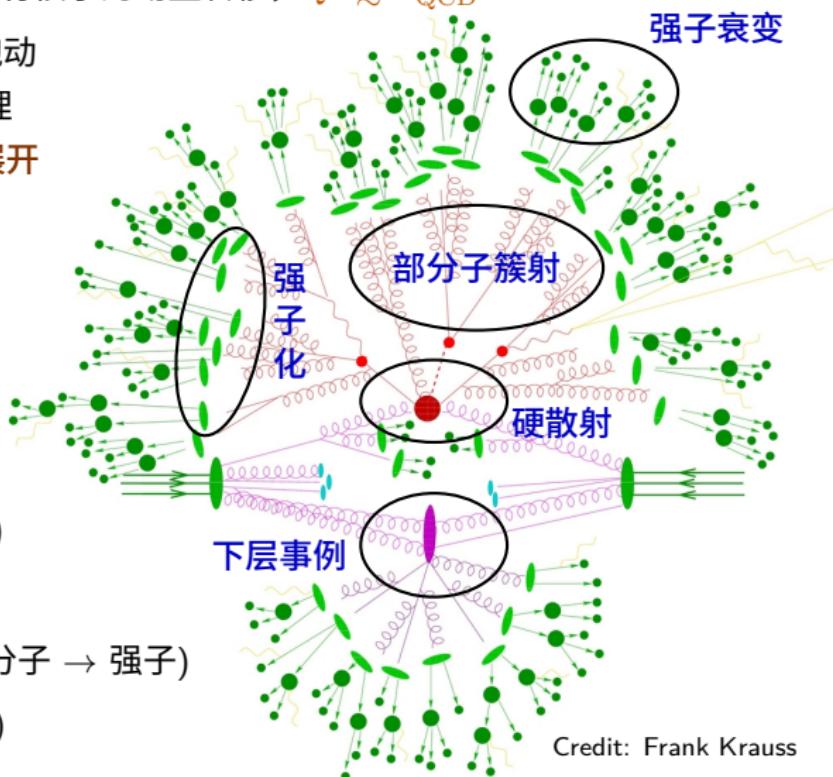
硬散射 (hard scattering)

部分子簇射 (parton shower)

非微扰软过程

强子化 (hadronization, 部分子 \rightarrow 强子)

下层事例 (underlying event)



碎裂函数

在单举截面的因子化微扰计算框架中，可以用普适的碎裂函数 (fragmentation function) 描述强子化过程

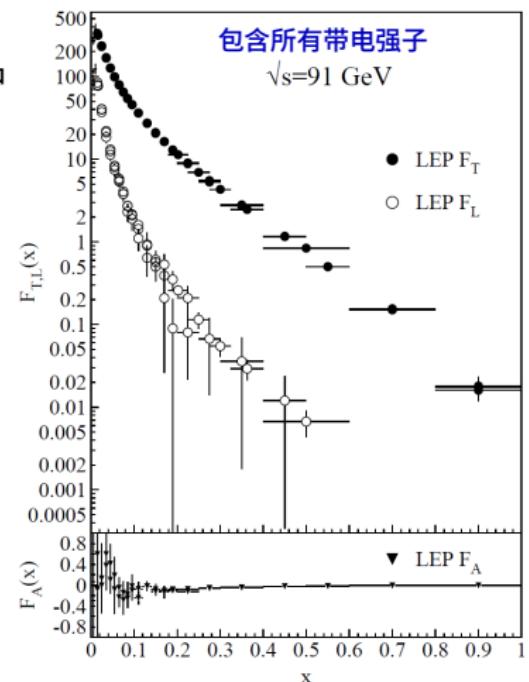
正负电子对撞过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma/Z \rightarrow h + X$ 中强子 h 的微分单举截面可以表达为

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx d\cos\theta} = \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) F_T^h(x, s) + \frac{3}{4}\sin^2\theta F_L^h(x, s) + \frac{3}{4}\cos\theta F_A^h(x, s)$$

σ_0 是归一化因子， $x = 2E_h/\sqrt{s} \leq 1$ 是 h 的能量分数， θ 是质心系中 h 运动方向与电子束流方向的夹角

横向碎裂函数 F_T^h 和纵向碎裂函数 F_L^h 分别对应于 γ/Z 的横向极化和纵向极化

不对称碎裂函数 F_A^h 描述宇称破坏效应



[PDG 2018]

部分子碎裂函数

上述微分截面对 θ 积分，就得到**总碎裂函数** $F^h(x, s) = F_T^h(x, s) + F_L^h(x, s)$

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx} = F^h(x, s) = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} C_i \left(z, \alpha_s(\mu^2), \frac{s}{\mu^2} \right) D_i^h \left(\frac{x}{z}, \mu^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)$$

系数函数 C_i 依赖于部分子类型

部分子碎裂函数 $D_i^h(z, \mu^2)$ 描述部分子 i

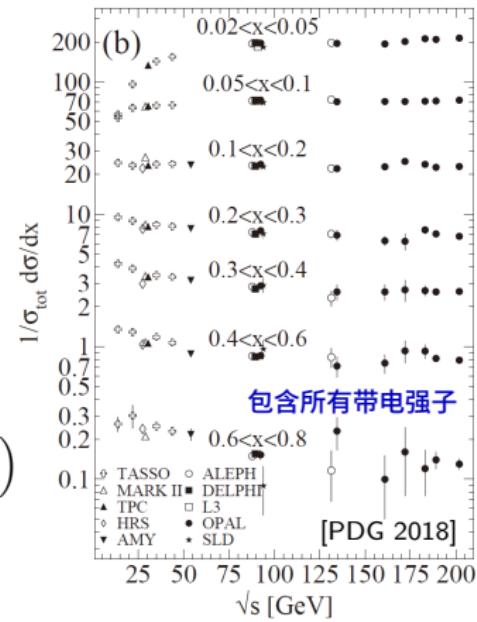
碎裂出具有动量分数 z 的强子 h 的数量

能动量守恒要求 $\int_0^1 dz \sum_h z D_i^h(z, \mu^2) = 1$

$D_i^h(z, \mu^2)$ 的演化由**微扰 QCD** 给出

$$\frac{\partial D_i^h(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \sum_j \int_x^1 \frac{dz}{z} \tilde{P}_{i \leftarrow j}(z, \alpha_s(\mu^2)) D_j^h \left(\frac{x}{z}, \mu^2 \right)$$

在 QCD 领头阶， $\tilde{P}_{i \leftarrow j}(z, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{i \leftarrow j}(z)$



隆德弦碎裂模型

在蒙特卡洛产生子中，**强子化**过程通常用一些唯象学模型来描述

蒙特卡洛产生子 **PYTHIA** 采用**隆德弦碎裂模型**

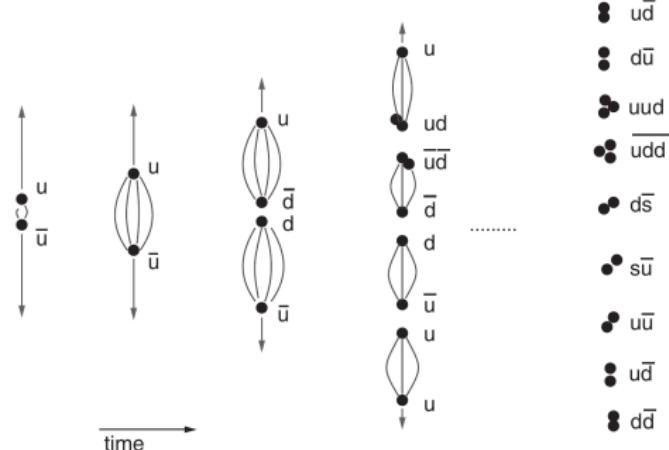
<http://home.thep.lu.se/~torbjorn/Pythia.html>

假设在高能对撞中产生一对正反夸克，构成**色单态系统**，认为夸克的动能储存在一根两端连接着它们的**弦 (string)** 中

当弦储存的**能量密度足够高时**，
量子涨落导致出现一对正反夸克或双夸克 (diquark)，将弦断开成两根弦

这些弦持续断裂，直到每根弦储存的**能量密度过低**，不足以提供给进一步的量子涨落

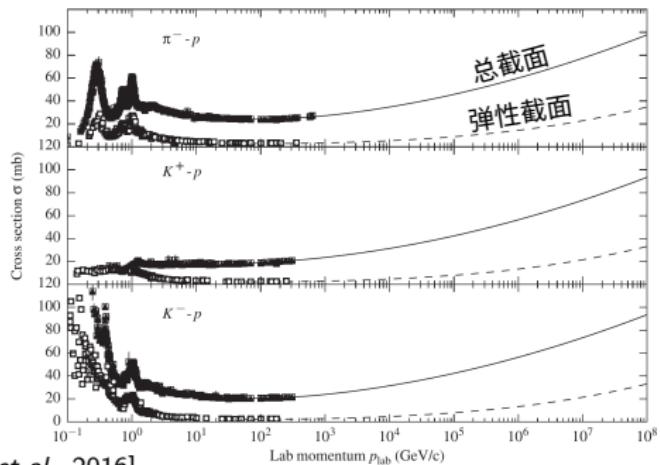
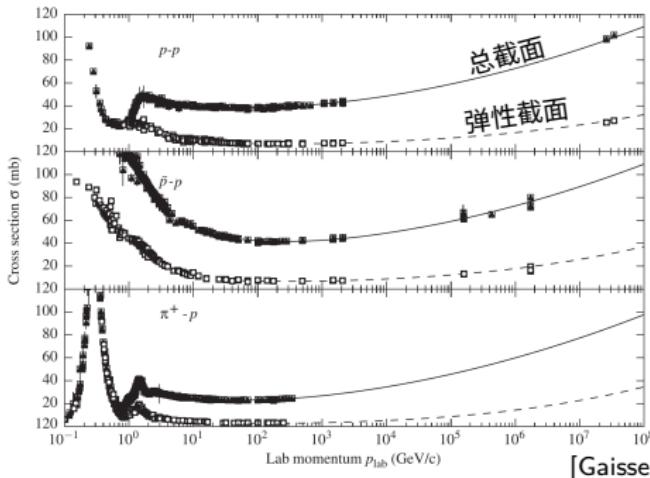
按照**夸克成分**和**不变质量**将每个色单态系统辨识为相应的**强子**



[Gaisser et al., 2016]

强子-强子散射截面

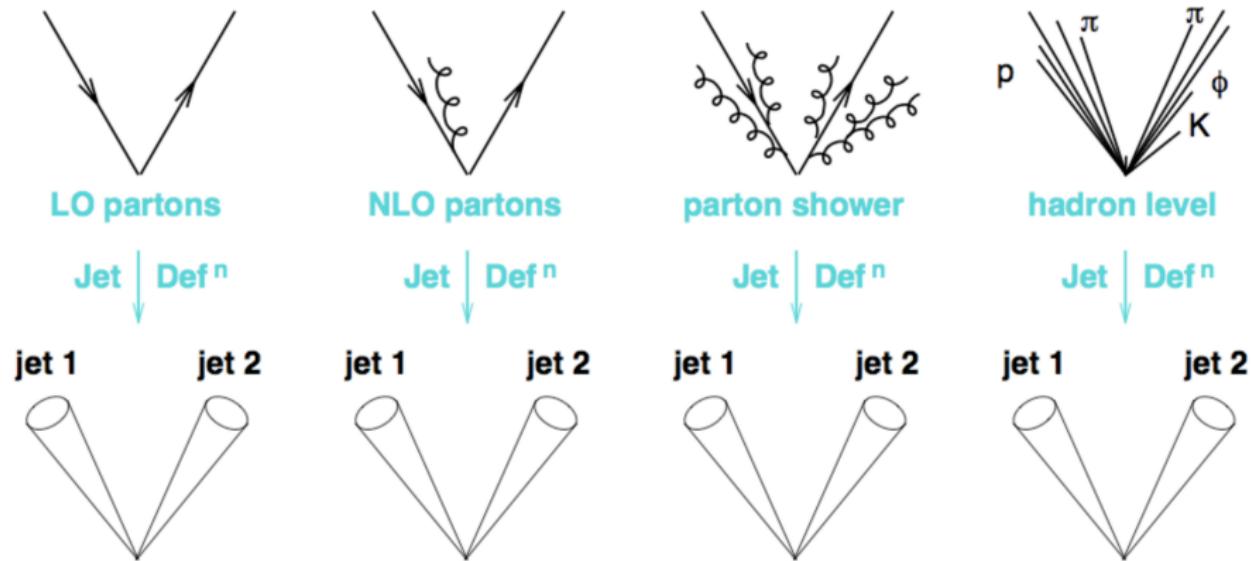
- 🦒 非微扰效应很大 ➡️ 微扰 QCD **不能够准确地计算强子-强子散射截面**
- 🔧 加速器上的截面测量 + 唯象学模型 ➡️ **高能区散射截面**
- 🔨 粒子产生阈能以下, 如果没有湮灭道, 则总截面与弹性截面**相同**
- 🔨 粒子产生阈能以上, 非弹性道打开, 总截面**大于**弹性截面
- issors 共振区域以上, πp 与 pp 总截面之比 $\sim 2/3$, 反映**价夸克数目差异**
- ☒ 高能处, 以 $\ln^2 s$ 关系将截面**外推**



[Gaisser et al., 2016]

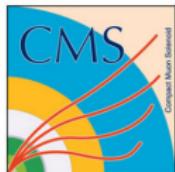
部分子与喷注

一个高能部分子产生之后，将经历末态辐射、部分子簇射和强子化过程，形成一串几乎从同一个方向出射的粒子（主要是强子），称为喷注 (jet)

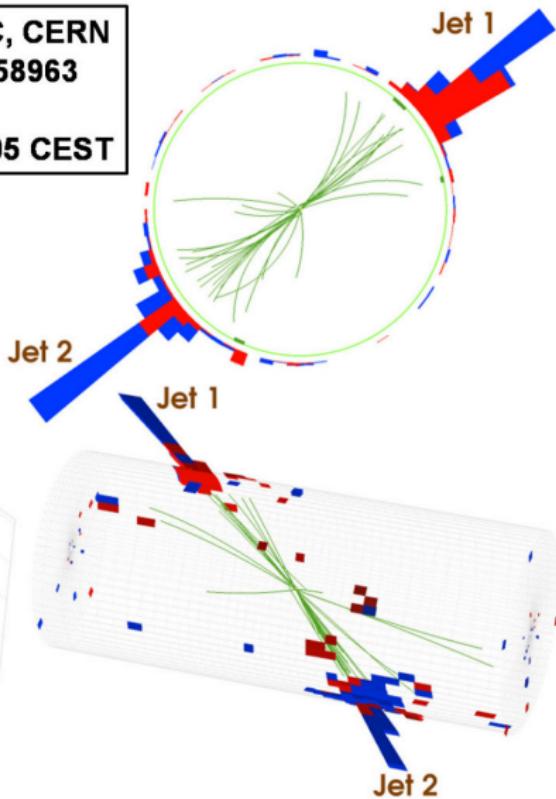
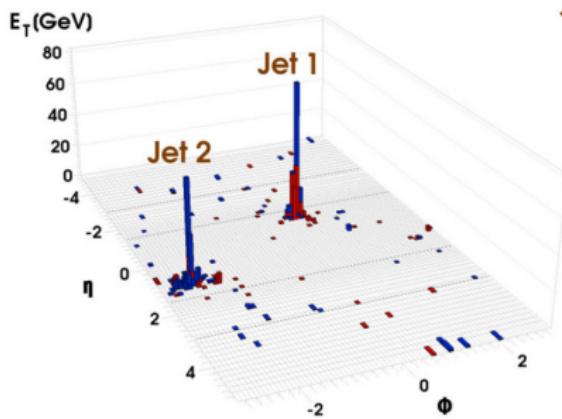


[From M. Cacciari's talk (2013)]

LHC 上的双喷注事例



CMS Experiment at LHC, CERN
Run 133450 Event 16358963
Lumi section: 285
Sat Apr 17 2010, 12:25:05 CEST



喷注聚团算法

红外一共线稳定：观测量在 QCD 无穷软辐射和共线分裂极限下不变

将粒子结合成喷注，需要采取一定的喷注聚团算法

Cone 算法：给定角半径 R ，组合满足 $\Delta R < R$ 的粒子，寻找稳定圆锥

从种子开始的 Cone 算法：只能找到部分稳定圆锥，红外一共线不稳定

SISCone 算法：不需要种子，能找到所有稳定圆锥，红外一共线稳定

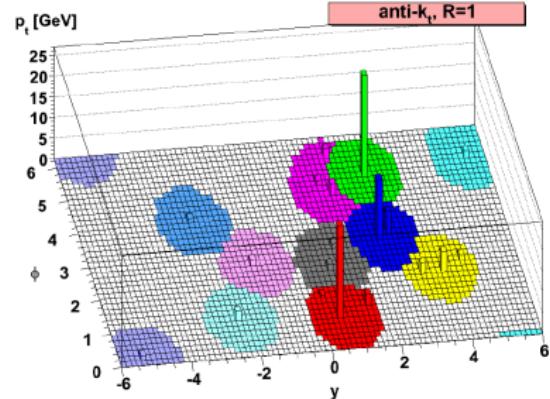
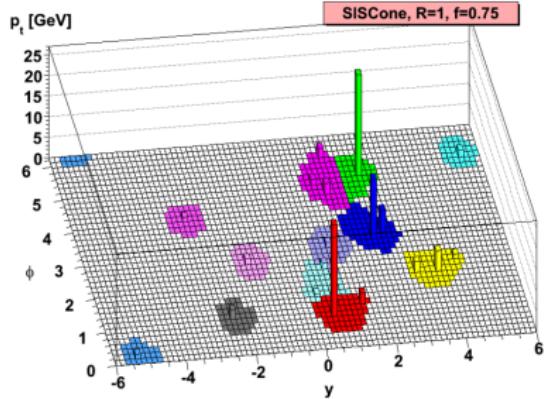
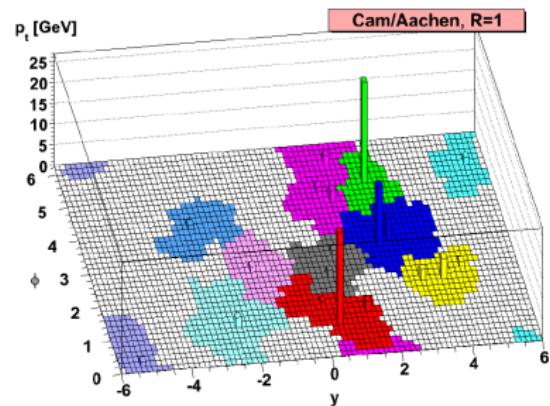
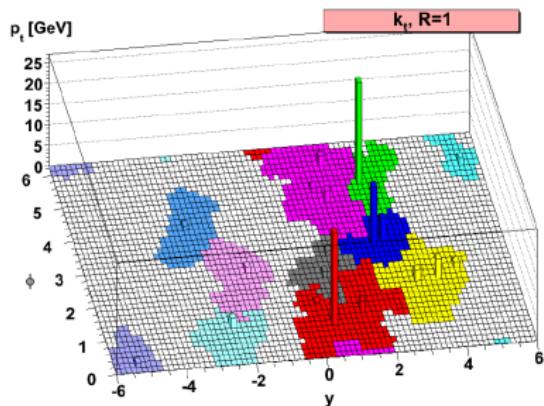
依序重组算法：用粒子的横向动量 $k_{T,i}$ 和 $k_{T,j}$ 定义“距离”

$$d_{ij} = \min(k_{T,i}^{2p}, k_{T,j}^{2p}) \left(\frac{\Delta R_{ij}}{R} \right)^2, \text{ 从距离最近的粒子逐步重组}$$

k_T 算法： $p = 1$ ，从最软的粒子开始，红外一共线稳定

剑桥—亚琛算法： $p = 0$ ，从方向最接近的粒子开始，红外一共线稳定

Anti- k_T 算法： $p = -1$ ，从最硬的粒子开始，红外一共线稳定



[Cacciari, Salam, Soyez, arXiv:0802.1189, JHEP]

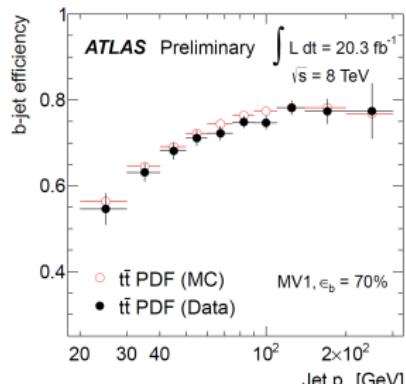
b 喷注和 τ 喷注

通过多种运动学变量发展**喷注标记技术**，能够区分来自 b 夸克和 τ 轻子的喷注与来自轻夸克和胶子的喷注

狐狸 b 喷注：标记效率约为 60–80%

樱桃 B 介子（如 B^0 和 B^\pm ）衰变引起偏移的**第二顶点**

草莓 b 喷注中的**软电子**和**软 μ 子**数量多于其它喷注



[ATLAS coll., CONF-2014-004]

b 喷注和 τ 喷注

通过多种运动学变量发展**喷注标记技术**，能够区分来自 **b 夸克** 和 **τ 轻子** 的喷注与来自**轻夸克** 和**胶子**的喷注

狐狸 **b 喷注**: 标记效率约为 60–80%

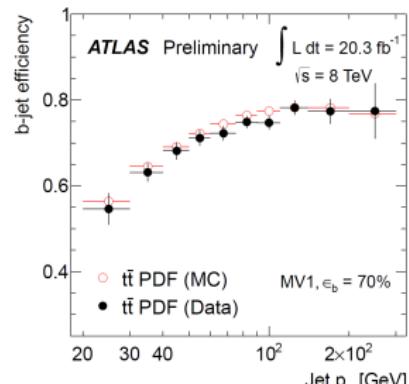
樱桃 B 介子 (如 B^0 和 B^\pm) 衰变引起偏移的**第二顶点**

草莓 b 喷注中的**软电子**和**软 μ 子**数量多于其它喷注

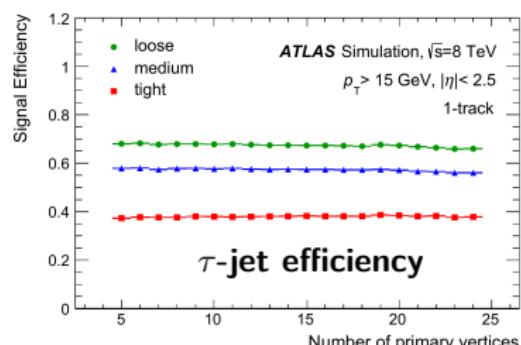
老鼠 **τ 喷注**来自衰变到强子末态的 τ 轻子

单叉 (1-prong) 模式 (分支比 50%):
衰变产物中有 1 个带电介子，中等标准的
标记效率约为 60%

三叉 (3-prong) 模式 (分支比 15%):
衰变产物中有 3 个带电介子，中等标准的
标记效率约为 40%



[ATLAS coll., CONF-2014-004]



[ATLAS coll., arXiv:1412.7086, EPJC]