量 子 场 论

第 8 章　量子电动力学

8.1 节和 8.2 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 12 月 17 日

第 8 章　量子电动力学

- 除了中微子之外，基本费米子都携带电荷，参与电磁相互作用
- 下表列出基本费米子 f 的电荷和质量，其中 Q_f 是以 e 为单位的正费米子电荷

标准模型中的基本费米子

费米子 f	带电轻子 e, μ, τ	中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ	下型夸克 d, s, b	上型夸克 u, c, t
电荷 Q_f	-1	0	$-1/3$	$2/3$
质量 m_f	$m_e = 0.5110$ MeV $m_\mu = 105.7$ MeV $m_\tau = 1.777$ GeV	$m_{\nu_e} = 0$ $m_{\nu_\mu} = 0$ $m_{\nu_\tau} = 0$	$m_d = 4.70$ MeV $m_s = 93.5$ MeV $m_b = 4.18$ GeV	$m_u = 2.16$ MeV $m_c = 1.27$ GeV $m_t = 172.6$ GeV

- 带电轻子的正粒子带负电，记作 e^-、μ^-、τ^-；反粒子带正电，记作 e^+、μ^+、τ^+
- 表中 (d, u, s)、c、b 夸克的质量分别是能标 $\mu = 2$ GeV、m_c、m_b 处的 $\overline{\mathrm{MS}}$ 质量
- 标准模型中 3 代中微子都没有质量，但 1998 年实验发现中微子振荡，表明中微子具有质量，所以需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理

量子电动力学 (QED)

❤️ **电荷**是电磁相互作用的**源**，**单位电荷量** e 表征电磁相互作用的**强度**

💙 **光子**是传递电磁相互作用的**媒介粒子**

💜 描述带电粒子如何参与**电磁相互作用**的量子场理论称为**量子电动力学** (quantum electrodynamics)，简称 **QED**，它是**标准模型**的一个组成部分

💚 QED 于 20 世纪中叶由**朝永振一郎**、**Julian Schwinger**、**Richard Feynman** 和 **Freeman Dyson** 建立起来，是第一个**自洽**的**相对论性量子场论**

朝永振一郎
(1906–1979)

Julian Schwinger
(1918–1994)

Richard Feynman
(1918–1988)

Freeman Dyson
(1923–2020)

8.1 节 U(1) 规范对称性与 QED

- 记 f 为标准模型中某种带电的基本费米子，它对应于一个 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$
- 写下相应的自由场拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x) = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)$$

- m_f 是费米子 f 的质量
- 如 5.5.3 小节所述，$\mathcal{L}_{\text{free}}$ 具有 U(1) 整体对称性

8.1 节 U(1) 规范对称性与 QED

- 记 f 为标准模型中某种**带电**的**基本费米子**，它对应于一个 **Dirac 旋量场** $\psi_f(x)$
- 写下相应的**自由场拉氏量**

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x) = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)$$

- m_f 是费米子 f 的**质量**
- 如 **5.5.3 小节**所述，$\mathcal{L}_{\text{free}}$ 具有 **U(1) 整体对称性**
- 具体来说，对 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$ 作 **U(1) 整体变换**

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta}\psi_f(x)$$

- Q_f 是**正费米子 f 的电荷**，也看成是**场 $\psi_f(x)$ 的电荷**；θ 是连续变换参数
- 从而，$\bar{\psi}'_f(x) = \bar{\psi}_f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Q_f\theta}$，**拉氏量不变**：

$$\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}'_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi'_f - m_f\bar{\psi}'_f\psi'_f = \mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f = \mathcal{L}_{\text{free}}$$

- 根据 Noether 定理，**电荷守恒定律**成立

U(1) 规范变换

- 将变换参数 θ 改为**依赖于** x^μ 的 **Lorentz 标量函数** $\theta(x)$，就变成 **U(1) 规范变换**

$$\boxed{\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)}$$

- 由于 $\partial_\mu\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$
- 不会得到 $\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathcal{L}_{\text{free}}$，故**不存在**相应的对称性
- 原因是 $\partial_\mu\psi'_f(x)$ 包含正比于 $\partial_\mu\theta(x)$ 的**第二项**，导致 $\partial_\mu\psi'_f(x) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x)$

U(1) 规范变换

- 将变换参数 θ 改为**依赖于** x^μ 的 **Lorentz 标量函数** $\theta(x)$，就变成 **U(1) 规范变换**

$$\boxed{\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)}$$

- 由于 $\partial_\mu\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$
- 不会得到 $\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathcal{L}_{\text{free}}$，故**不存在**相应的对称性
- 原因是 $\partial_\mu\psi'_f(x)$ 包含正比于 $\partial_\mu\theta(x)$ 的**第二项**，导致 $\partial_\mu\psi'_f(x) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x)$
- 为了得到对称性，将作用在 $\psi_f(x)$ 上的 ∂_μ 替换为**协变导数** (covariant derivative)

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}Q_f eA_\mu(x)}$$

- $A_\mu(x)$ 是**电磁场**，e 是**单位电荷量**
- 要求在 $\psi_f(x)$ 作 **U(1) 规范变换**的同时，电磁场 $A_\mu(x)$ 作**规范变换**

$$\boxed{A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)}$$

- **4.4.2 小节**中用到的**规范变换函数** $\chi(x)$ 与 $\theta(x)$ 的关系为 $\theta(x) = -e\chi(x)$

U(1) 规范对称性

这样一来，$D_\mu\psi_f(x)$ 的变换形式就与 $\psi_f(x)$ 相同：

$$
\begin{aligned}
[D_\mu\psi_f(x)]' &= \partial_\mu\psi'_f(x) + \mathrm{i}Q_f e A'_\mu(x)\psi'_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&\quad + \mathrm{i}Q_f e\left[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}[\partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu(x)]\psi_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}D_\mu\psi_f(x)
\end{aligned}
$$

只要将拉氏量修改为 $\boxed{\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu D_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)}$

那么，同时让 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 规范变换 $\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$、$A_\mu(x)$ 作规范变换 $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - e^{-1}\partial_\mu\theta(x)$ 会使得 $\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}$

U(1) 规范对称性

这样一来，$D_\mu\psi_f(x)$ **的变换形式就与** $\psi_f(x)$ **相同**：

$$
\begin{aligned}
[D_\mu\psi_f(x)]' &= \partial_\mu\psi'_f(x) + \mathrm{i}Q_f e A'_\mu(x)\psi'_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&\quad + \mathrm{i}Q_f e\left[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}[\partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu(x)]\psi_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}D_\mu\psi_f(x)
\end{aligned}
$$

只要将**拉氏量**修改为 $\boxed{\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu D_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x)}$

那么，同时让 $\psi_f(x)$ **作 U(1) 规范变换** $\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x)$、$A_\mu(x)$ **作规范变换** $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - e^{-1}\partial_\mu\theta(x)$ 会使得 $\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}$

这种对称性称为 **U(1) 规范对称性**

4.4.2 小节表明，当电磁场 $A_\mu(x)$ 作**规范变换**时，场强张量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 不变，因此**动能项** $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 是规范对称性所**允许**的

但是，**质量项** $m^2 A_\mu A^\mu/2$ 不满足规范对称性，即**规范对称性禁止光子具有质量**

QED 拉氏量

现在写下量子电动力学的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \sum_f (\mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m_f \bar{\psi}_f \psi_f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad f = e,\, \mu,\, \tau,\, d_i,\, s_i,\, b_i,\, u_i,\, c_i,\, t_i$$

$i = 1, 2, 3$ 是夸克的颜色指标，同味异色的夸克具有相同的质量和电荷

$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 具有 U(1) 规范对称性，因此称 QED 是 U(1) 规范理论 (gauge theory)，电磁场是 U(1) 规范场 (gauge field)，光子是规范玻色子 (gauge boson)

QED 拉氏量

现在写下量子电动力学的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \sum_f (\mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m_f \bar{\psi}_f \psi_f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad f = e,\, \mu,\, \tau,\, d_i,\, s_i,\, b_i,\, u_i,\, c_i,\, t_i$$

$i = 1, 2, 3$ 是夸克的颜色指标，同味异色的夸克具有相同的质量和电荷

$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 具有 U(1) 规范对称性，因此称 QED 是 U(1) 规范理论 (gauge theory)，电磁场是 U(1) 规范场 (gauge field)，光子是规范玻色子 (gauge boson)

$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 包含场的动能项和质量项

将协变导数算符 $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} Q_f e A_\mu(x)$ 展开，发现 $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 还包含相互作用项

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -\sum_f Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 描述费米子 f 的电磁相互作用

这样的相互作用称为规范相互作用，而单位电荷量 e 是一个规范耦合常数

电磁流和 Maxwell 方程

- 容易看出，$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 也具有 $\mathrm{U}(1)$ **整体对称性**
- 类似于 5.5.3 小节的做法，根据 **Noether 定理**将相应**守恒流**定义成

$$\boxed{J^\mu_{\mathrm{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f}$$

- J^μ_{EM} 称为**电磁流** (electromagnetic current)，满足**电磁流守恒方程** $\partial_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}} = 0$
- 可见，**QED 相互作用拉氏量**具有**流耦合**形式 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -A_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}}$

电磁流和 Maxwell 方程

- 容易看出，$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 也具有 U(1) **整体对称性**
- 类似于 5.5.3 小节的做法，根据 **Noether 定理**将相应**守恒流**定义成

$$\boxed{J^\mu_{\mathrm{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f}$$

- J^μ_{EM} 称为**电磁流** (electromagnetic current)，满足**电磁流守恒方程** $\partial_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}} = 0$
- 可见，**QED 相互作用拉氏量**具有**流耦合**形式 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -A_\mu J^\mu_{\mathrm{EM}}$
- 求导得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial A_\nu} = -J^\nu_{\mathrm{EM}}$
- **Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu_{\mathrm{EM}}$
- 故电磁场的经典运动方程为

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu_{\mathrm{EM}}}$$

- 这是**有源**的 **Maxwell 方程**，**源**为带电费米子的**电磁流**

费米子场经典运动方程

- 求导得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial \psi_f} = -m_f \bar{\psi}_f - Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$，**Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial \psi_f} = \mathrm{i}(\partial_\mu \bar{\psi}_f)\gamma^\mu + m_f \bar{\psi}_f + Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$
- 取厄米共轭，利用 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$，有

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi_f + m_f \gamma^0 \psi_f + Q_f e A_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi_f = -\gamma^0 (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f - Q_f e A_\mu \gamma^\mu)\psi_f$$

- 于是推出**费米子场 ψ_f 的经典运动方程** $\boxed{(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = 0}$
- 这个方程只是将 **Dirac 方程**中的**普通导数**替换成**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu$

费米子场经典运动方程

- 求导得 $\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f \gamma^\mu$，$\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial \psi_f} = -m_f \bar{\psi}_f - Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$，**Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial(\partial_\mu \psi_f)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}_{\rm QED}}{\partial \psi_f} = \mathrm{i}(\partial_\mu \bar{\psi}_f)\gamma^\mu + m_f \bar{\psi}_f + Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu$
- 取厄米共轭，利用 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$，有

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi_f + m_f \gamma^0 \psi_f + Q_f e A_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi_f = -\gamma^0 (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f - Q_f e A_\mu \gamma^\mu)\psi_f$$

- 于是推出**费米子场 ψ_f 的经典运动方程** $\boxed{(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = 0}$
- 这个方程只是将 **Dirac 方程**中的**普通导数**替换成**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu$
- 对**运动方程左乘** $(\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu + m_f)$，得

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu + m_f)(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f = (-\gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu - m_f^2)\psi_f = -(\not{D}^2 + m_f^2)\psi_f$$

$$\begin{aligned}\not{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu D_\nu \\ &= \frac{1}{2}(2g^{\mu\nu} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu D_\nu = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu\end{aligned}$$

协变导数算符的对易子

- 调整 Lorentz 指标，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu + [\gamma^\nu,\gamma^\mu]D_\nu D_\mu)\\ &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu - [\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\nu D_\mu) = \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]\end{aligned}$$

- 根据 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$，有 $\not{D}^2 = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu,D_\nu]$

协变导数算符的对易子

- 调整 Lorentz 指标，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu + [\gamma^\nu,\gamma^\mu]D_\nu D_\mu)\\ &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu - [\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\nu D_\mu) = \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]\end{aligned}$$

- 根据 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$，有 $\not{D}^2 = D^2 + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu,D_\nu]$
- 对 ψ_f 连续作用两次协变导数算符，得

$$\begin{aligned}D_\mu D_\nu \psi_f &= (\partial_\mu + \mathrm{i}Q_f e A_\mu)(\partial_\nu\psi_f + \mathrm{i}Q_f e A_\nu \psi_f)\\ &= \partial_\mu\partial_\nu\psi_f + \mathrm{i}Q_f e\partial_\mu(A_\nu\psi_f) + \mathrm{i}Q_f e A_\mu\partial_\nu\psi_f - Q_f^2 e^2 A_\mu A_\nu \psi_f\end{aligned}$$

- 故 $[D_\mu, D_\nu]$ 对 ψ_f 的作用为

$$\begin{aligned}[D_\mu,D_\nu]\psi_f &= D_\mu D_\nu\psi_f - D_\nu D_\mu \psi_f\\ &= \mathrm{i}Q_f e[\partial_\mu(A_\nu\psi_f) + A_\mu\partial_\nu\psi_f - \partial_\nu(A_\mu\psi_f) - A_\nu\partial_\mu\psi_f]\\ &= \mathrm{i}Q_f e[(\partial_\mu A_\nu)\psi_f - (\partial_\nu A_\mu)\psi_f] = \mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}\psi_f\end{aligned}$$

ψ_f 的运动方程

由 ψ_f 场的任意性有

$$[D_\mu, D_\nu] = \mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}$$

也就是说，**协变导数算符的对易子** $[D_\mu, D_\nu]$ 实际上不包含对 ψ_f 的求导操作，而直接对应于**场强张量** $F_{\mu\nu}$

$\not{D}^2 = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]$ 进一步化为

$$\not{D}^2 = D^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

ψ_f 的运动方程

由 ψ_f 场的任意性有

$$[D_\mu, D_\nu] = \mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}$$

也就是说，**协变导数算符的对易子** $[D_\mu, D_\nu]$ 实际上不包含对 ψ_f 的求导操作，而直接对应于**场强张量** $F_{\mu\nu}$

$\not{D}^2 = D^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]$ 进一步化为

$$\not{D}^2 = D^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

于是，ψ_f **的运动方程** $(\not{D}^2 + m_f^2)\psi_f = 0$ 变成

$$\left(D^2 + m_f^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi_f = 0$$

与自由 Dirac 旋量场满足的 **Klein-Gordon 方程** $(\partial^2 + m^2)\psi_f = 0$ 相比，不仅**普通导数**替换成**协变导数**，还多出一个正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项

电子场的运动方程

由于 $F_{ij} = F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$ ， $F_{0i} = -F^{0i} = E^i$ ，

$$\sigma^{ij} = 2\mathcal{S}^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = 2\mathcal{S}^{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = F_{ij}\sigma^{ij} + 2F_{0i}\sigma^{0i} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}B^k\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} + 2\mathrm{i}E^i\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$= -2\delta^{kl}\begin{pmatrix}B^k\sigma^l & \\ & B^k\sigma^l\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E^i\sigma^i & \\ & \mathrm{i}E^i\sigma^i\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

电子场的运动方程

由于 $F_{ij} = F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$，$F_{0i} = -F^{0i} = E^i$，

$$\sigma^{ij} = 2\mathcal{S}^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = 2\mathcal{S}^{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = F_{ij}\sigma^{ij} + 2F_{0i}\sigma^{0i} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}B^k\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} + 2\mathrm{i}E^i\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

$$= -2\delta^{kl}\begin{pmatrix}B^k\sigma^l & \\ & B^k\sigma^l\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E^i\sigma^i & \\ & \mathrm{i}E^i\sigma^i\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

注意到 $Q_e = -1$，**电子场 ψ_e 的运动方程**化为

$$\left[(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 + m_e^2 + e\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi_e = 0$$

这里采用**缩写** $(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 \equiv (\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu - \mathrm{i}eA^\mu)$，即 **Lorentz 矢量的平方**指它的**自我内积**

Schrödinger-Pauli 方程

- 电子场 $\psi_e(x)$ 的运动方程

$$\left[(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 + m_e^2 + e\begin{pmatrix} (\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi_e = 0$$

在非相对论近似下对应于量子力学里的 **Schrödinger-Pauli 方程**

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = \left[\frac{1}{2m_e}(-\mathrm{i}\nabla + e\mathbf{A})^2 - eA^0 + \mu_\mathrm{B}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]|\Psi\rangle$$

- 它描述电子在电磁场中的运动
- $|\Psi\rangle$ 是电子的自旋双重态
- $\boxed{\mu_\mathrm{B} = \dfrac{e}{2m_e}}$ 是 **Bohr 磁子**，即电子磁偶极矩的基本单位
- 可见，正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项描述费米子自旋导致的内禀磁偶极矩与电磁场之间的相互作用
- $\pm\mathrm{i}\,\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 项是相对论修正

Niels Bohr
(1885–1962)

QED 的 Feynman 规则

- 由于**电磁场**是**无质量矢量场**，如 4.4.2 小节所述，对 QED 进行**正则量子化**时，需要加入**规范固定项** $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$
- 可采用 **Feynman 规范** ($\xi = 1$) 以得到简单的结果

QED 的 Feynman 规则

- 由于**电磁场**是**无质量矢量场**，如 4.4.2 小节所述，对 QED 进行**正则量子化**时，需要加入**规范固定项** $-\dfrac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$
- 可采用 **Feynman 规范** ($\xi = 1$) 以得到简单的结果
- 根据第 7 章知识，**QED 的动量空间 Feynman 规则**如下

1. 正费米子 f 入射外线： f, λ $= u(\mathbf{p}, \lambda)$
2. 反费米子 $\bar{f}$ 入射外线： $\bar{f}, \lambda$ $= \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$
3. 正费米子 f 出射外线： $f, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$
4. 反费米子 $\bar{f}$ 出射外线： $\bar{f}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$
5. 费米子 f 传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_f + \mathrm{i}\epsilon}$

QED 的 Feynman 规则

这里将光子记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆

6. 光子 γ 入射外线：$\gamma, \lambda; \mu$ $= \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$
7. 光子 γ 出射外线： $\gamma, \lambda; \mu = \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$
8. 光子 γ 传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **(Feynman 规范)**

QED 的 Feynman 规则

这里将光子记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆

6. 光子 γ 入射外线：$\gamma, \lambda; \mu$ $= \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

7. 光子 γ 出射外线： $\gamma, \lambda; \mu = \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

8. 光子 γ 传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **(Feynman 规范)**

9. **QED 相互作用顶点**：

$= -\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$

剥离相互作用拉氏量 $-Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$ 中的**场算符**

A_μ、ψ_f **和** $\bar{\psi}_f$，再**乘以** i，就得到 QED 顶点规则表达式 $-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$

QED 的 Feynman 规则

这里将光子记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆

6. 光子 γ 入射外线：$\gamma, \lambda; \mu$ $= \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

7. 光子 γ 出射外线： $\gamma, \lambda; \mu = \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

8. 光子 γ 传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **(Feynman 规范)**

9. **QED 相互作用顶点**： $= -\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$

在这些 Feynman 规则中，**Lorentz 指标** μ 和 ν 既可写成**上标**，也可写成**下标**，只要在写出振幅表达式时保证**相同指标上下缩并**即可

QED 顶点**线头**处标注了对应的**正粒子名**

一个 QED 顶点只能联系**同一种费米子** f **及其反粒子** $\bar{f}$，而**无法**联系**不同**的费米子 f 和 f'

剥离相互作用拉氏量 $-Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$ 中的**场算符** A_μ、ψ_f **和** $\bar{\psi}_f$，再**乘以** i，就得到 QED 顶点规则表达式 $-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$

8.2 节 正负电子湮灭到正负 μ 子

♈ 本节讨论一个典型的 QED 散射过程，**一对正负电子湮灭成一对正负 μ 子**，即

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$$

👶 利用 QED 的 **Feynman 规则**中的图形**拼接**出这个过程的**领头阶 Feynman 图**，得到一个包含 2 个 QED 顶点的**树图**

👧 如**右图**所示，它只有 **1 种拓扑结构**

👩 由于 μ 子质量比电子质量大得多，根据**能动量守恒定律**，此过程仅当正负电子对的质心能 $E_{\rm CM} > 2m_\mu$ 时才能发生

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 领头阶 Feynman 图

8.2.1 小节　不变振幅

♉ 根据 QED 的 Feynman 规则和 $Q_e = Q_\mu = -1$，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

👨🏻‍🦱 根据能动量守恒，光子传播子的四维动量 q^μ 满足 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

👩🏻 运动学要求 $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 > 4m_\mu^2$

👨🏻‍🎓 光子传播子 $\dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ 在运动学允许的区域上没有极点，可以丢弃无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$

8.2.1 小节　不变振幅

♉ 根据 QED 的 Feynman 规则和 $Q_e = Q_\mu = -1$，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

> 👩🏻‍🏫 只要不涉及传播子的极点，则无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$ 可以忽略
>
> 🦸🏻‍♀️ 在圈图计算中，圈动量积分通常会涉及到传播子的极点，则 $\mathrm{i}\epsilon$ **不可忽略**

👨🏻 根据能动量守恒，光子传播子的四维动量 q^μ 满足 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

👩🏻 运动学要求 $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 > 4m_\mu^2$

👨🏻‍🎓 光子传播子 $\dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ 在运动学允许的区域上没有极点，可以丢弃无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$

不变振幅模方

♊ 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$

👴 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 中旋量双线性型 $\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)$ 的复共轭为

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v$$

$(\bar{u}\gamma_\mu v)^* = \bar{v}\gamma_\mu u$，$\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 的复共轭为

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$$

不变振幅模方

♊ 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$

👴 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 中旋量双线性型 $\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)$ 的复共轭为

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v$$

$(\bar{u}\gamma_\mu v)^* = \bar{v}\gamma_\mu u$，$\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 的复共轭为

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$$

👵 **不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{(q^2)^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2') \\
&\qquad \times[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1') \\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)] \\
&\qquad \times\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1') \\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu] \\
&\qquad \times\mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu]
\end{aligned}$$

👨‍🏫 第三步采取计算 7.1.1 小节用过的 **Casimir 技巧**，因而出现**求迹**运算

非极化不变振幅模方

- 在现实的实验中，通常**不会控制入射粒子的自旋状态**，即采用**非极化**的入射束流
- 粒子探测器 (detector) 通常也**不能区分出射粒子的自旋状态**
- 在计算散射截面时，需要对**入射**正负电子的**螺旋度** λ_1 和 λ_2 **取平均**，对**出射**正负 μ 子的**螺旋度** λ_1' 和 λ_2' **求和**，也就是说，应当计算**非极化不变振幅模方**

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=\pm}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2=\pm}\sum_{\lambda_1'=\pm}\sum_{\lambda_2'=\pm}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2$$

非极化不变振幅模方

- 在现实的实验中，通常**不会控制入射粒子的自旋状态**，即采用**非极化**的入射束流
- 粒子探测器 (detector) 通常也**不能区分出射粒子的自旋状态**
- 在计算散射截面时，需要对**入射**正负电子的**螺旋度** λ_1 和 λ_2 **取平均**，对**出射**正负 μ 子的**螺旋度** λ_1' 和 λ_2' **求和**，也就是说，应当计算**非极化不变振幅模方**

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=\pm}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2=\pm}\sum_{\lambda_1'=\pm}\sum_{\lambda_2'=\pm}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu] \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\nu]
\end{aligned}
$$

- 最后用到**自旋求和关系** $\sum_{\lambda=\pm}u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)=\not{p}+m$ 和 $\sum_{\lambda=\pm}v(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)=\not{p}-m$
- 现在问题归结为计算 **Dirac 矩阵乘积的迹**

8.2.2 小节 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧

- 第 7 章计算过与 Dirac 矩阵相关的迹 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$，$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- 实际上，利用 $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$、$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= \mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5\gamma^5) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积})
\end{aligned}
$$

- 因此，**奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**，这个结论自然包含 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$

8.2.2 小节 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧

- 第 7 章计算过与 Dirac 矩阵相关的迹 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$，$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- 实际上，利用 $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$、$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= \mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5\gamma^5) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积} \times \gamma^5) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5 \times \text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) \\
&= -\,\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积})
\end{aligned}
$$

- 因此，**奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**，这个结论自然包含 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0$
- 对于 4 个 Dirac 矩阵乘积的迹，多次利用 $\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma) \\
&= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + 2\gamma^\nu\gamma^\rho g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\sigma) - 2g^{\mu\rho}\,\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\sigma) + 2g^{\mu\sigma}\,\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho) - \mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

γ^5 相关求迹公式

- 根据定义，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，因而它相当于 **4 个 Dirac 矩阵之积**
- 于是，**γ^5 与奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**
- 利用 $(\gamma^0)^2 = 1$ 和 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$，得

$$\mathrm{tr}(\gamma^5) = \mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^5)$$

- 可见 $\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$

γ^5 相关求迹公式

- 根据定义，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，因而它相当于 **4 个 Dirac 矩阵之积**
- 于是，**γ^5 与奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零**
- 利用 $(\gamma^0)^2 = 1$ 和 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$，得

$$\mathrm{tr}(\gamma^5) = \mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^5)$$

- 可见 $\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$
- $(\gamma^\mu)^2 = \pm 1$ 在 $\mu = 0$ 时取正号、在 $\mu = 1, 2, 3$ 时取负号
- 若 $\mu = \nu$，则 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = \pm\,\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$
- 若 $\mu \neq \nu$，取 $\alpha \neq \mu, \nu$，利用 $(\gamma^\alpha)^2 = \pm 1$、$\gamma^\mu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\mu$、$\gamma^\nu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\nu$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= \pm\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\alpha) = \mp\,\mathrm{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha) \\ &= \mp\,\mathrm{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = -\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)\end{aligned}$$

- 故 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0$ 对任意 μ 和 ν 成立

$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$

- 对于 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$，只要 (μ,ν,ρ,σ) 这 4 个指标中**有 2 个指标相等**，就能够类似地推出 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=0$
- 因此，仅当 (μ,ν,ρ,σ) **是** $(0,1,2,3)$ **的某种置换**时，才能得到例外的结果
- 由于 Dirac 矩阵的反对易性质，此时有 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$，且**偶置换**取**正号**，**奇置换**取**负号**

$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$

对于 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$，只要 (μ,ν,ρ,σ) 这 4 个指标中**有 2 个指标相等**，就能够类似地推出 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=0$

因此，仅当 (μ,ν,ρ,σ) **是** $(0,1,2,3)$ **的某种置换**时，才能得到例外的结果

由于 Dirac 矩阵的反对易性质，此时有 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\pm\,\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$，且**偶置换**取**正号**，**奇置换**取**负号**

根据 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的偶置换},\\ -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的奇置换},\\ 0, & \text{其它情况},\end{cases}$ 即得

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$$

由于 $\mathrm{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)=-\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5)=-\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})=-4\mathrm{i}$，有

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)=-4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

求迹公式小结

总结起来，有下列**求迹公式**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\
\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
\mathrm{tr}(\gamma^5) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= -4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

Dirac 矩阵相关缩并

🌅 除了求迹，还经常遇到 Lorentz 指标的**缩并运算**

🐃 首先，

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu + g_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\mu = 4$$

🐄 其次，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu$$

🐂 再次，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\rho = 2\{\gamma^\rho,\gamma^\nu\} = 4g^{\nu\rho}$$

🦬 最后，

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 4g^{\rho\sigma}\gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2(\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho)\gamma^\nu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\end{aligned}$$

Levi-Civita 符号的缩并

- 另一方面，可能会遇到度规和 Levi-Civita 符号的缩并
- 首先，由 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ 得 $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\nu\mu} = \delta^{\mu}{}_{\mu} = 4$
- 其次，1.5 节已经推出 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$

Levi-Civita 符号的缩并

- 另一方面，可能会遇到度规和 Levi-Civita 符号的缩并
- 首先，由 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ 得 $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\nu\mu} = \delta^\mu{}_\mu = 4$
- 其次，1.5 节已经推出 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$
- 再次，根据 Levi-Civita 符号的性质，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ 只在 $\mu = \nu$ 时非零，即

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \propto \delta^\mu{}_\nu$$

- 取 $\mu = \nu = 3$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma 3} = 3!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -6$，故比例系数为 -6
- 因此 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^\mu{}_\nu$

Levi-Civita 符号的缩并

另一方面，可能会遇到**度规**和 **Levi-Civita 符号**的**缩并**

首先，由 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ 得 $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\nu\mu} = \delta^\mu{}_\mu = 4$

其次，1.5 节已经推出 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$

再次，根据 Levi-Civita 符号的性质，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ **只在 $\mu = \nu$ 时非零**，即

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \propto \delta^\mu{}_\nu$$

取 $\mu = \nu = 3$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma3} = 3!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -6$，故**比例系数**为 -6

因此 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^\mu{}_\nu$

最后，$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ **仅在 $(\mu,\nu) = (\rho,\sigma)$ 或 $(\mu,\nu) = (\sigma,\rho)$ 时非零**，而且这两种情况的数值互为**相反数**，故

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \propto \delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho$$

取 $(\mu,\nu) = (\rho,\sigma) = (2,3)$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta23}\varepsilon_{\alpha\beta23} = 2!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -2$

因而 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)$

缩并公式小结

总结起来，有下列**缩并公式**

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \\
g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= 4, \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24 \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu{}_\nu \\
\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)
\end{aligned}
$$

四维动量与 Dirac 矩阵的缩并

实际计算中经常遇到**四维动量与 Dirac 矩阵的缩并**，进一步导出下列有用公式

$$\gamma^\mu \not{p} = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu$$

$$\not{p}\not{k} = p_\mu \gamma^\mu \not{k} = p_\mu (2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu) = 2\,p\cdot k - \not{k}\not{p}$$

$$\not{p}\not{p} = \frac{1}{2}(\not{p}\not{p} + \not{p}\not{p}) = \frac{1}{2}\,2\,p\cdot p = p^2$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2p_\nu \gamma^\nu = -2\not{p}$$

四维动量与 Dirac 矩阵的缩并

实际计算中经常遇到**四维动量与 Dirac 矩阵的缩并**，进一步导出下列有用公式

$$\gamma^\mu \not{p} = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu$$

$$\not{p}\not{k} = p_\mu \gamma^\mu \not{k} = p_\mu (2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu) = 2\,p\cdot k - \not{k}\not{p}$$

$$\not{p}\not{p} = \frac{1}{2}(\not{p}\not{p} + \not{p}\not{p}) = \frac{1}{2}\,2\,p\cdot p = p^2$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2p_\nu \gamma^\nu = -2\not{p}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu = p_\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4p_\rho g^{\nu\rho} = 4p^\nu$$

$$\gamma^\mu \not{p}\not{k} \gamma_\mu = p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \not{k} \gamma_\mu = 4p_\nu k^\nu = 4\,p\cdot k$$

$$\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}) = p_\mu k_\nu\, \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4p_\mu k_\nu g^{\mu\nu} = 4\,p\cdot k$$

$$\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}\not{q}\not{l}) = p_\mu k_\nu q_\rho l_\sigma\, \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4p_\mu k_\nu q_\rho l_\sigma (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

$$= 4[(p\cdot k)(q\cdot l) - (p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]$$

此外，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu) &= p_\rho k_\sigma \mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) = 4p_\rho k_\sigma(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \\
&= 4(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k) \\
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu)\,\mathrm{tr}(\not{q}\gamma_\mu \not{l}\gamma_\nu) &= 16(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k)(q_\mu l_\nu + q_\nu l_\mu - g_{\mu\nu}q\cdot l) \\
&= 32[(p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]
\end{aligned}
$$

FeynCalc 程序包

此外，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu) &= p_\rho k_\sigma \mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) = 4p_\rho k_\sigma(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \\
&= 4(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k) \\
\mathrm{tr}(\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu)\,\mathrm{tr}(\not{q}\gamma_\mu \not{l}\gamma_\nu) &= 16(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k)(q_\mu l_\nu + q_\nu l_\mu - g_{\mu\nu}q\cdot l) \\
&= 32[(p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]
\end{aligned}
$$

- 当求迹和缩并计算非常复杂时，可利用 Mathematica 程序包 FeynCalc 辅助计算
- FeynCalc 网址：https://feyncalc.github.io

8.2.3 小节 非极化散射截面

♌ 现在回来计算 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

👩🏻‍⚕️ 根据上一小节的求迹公式，第一个迹化为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] &= \mathrm{tr}(\not{k}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu) - m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= 4[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)]\end{aligned}$$

👨🏻‍🎤 第一步丢弃了具有奇数个 Dirac 矩阵乘积的项

8.2.3 小节　非极化散射截面

♌ 现在回来计算 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

👩🏻‍⚕️ 根据上一小节的求迹公式，第一个迹化为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] &= \mathrm{tr}(\not{k}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu) - m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)\\ &= 4[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)]\end{aligned}$$

👨🏻‍🎨 第一步丢弃了具有奇数个 Dirac 矩阵乘积的项

👨🏻‍🔬 同理，第二个迹变成

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu] &= \mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu) - m_\mu^2\,\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)\\ &= 4[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)]\end{aligned}$$

👨🏻‍💻 于是

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)][p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)]$$

化简 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$

♍ 化简，得

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)\right] \\
&\qquad \times\left[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)\right] \\
&= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\Big[2(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + 2(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) - 2\,p_1\cdot p_2(k_1\cdot k_2 + m_e^2) \\
&\qquad - 2\,k_1\cdot k_2(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2) + 4(k_1\cdot k_2 + m_e^2)(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)\Big] \\
&= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + (k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)\right. \\
&\qquad \left. + m_e^2(p_1\cdot p_2) + m_\mu^2(k_1\cdot k_2) + 2m_e^2 m_\mu^2\right]
\end{aligned}
$$

🤦🏻‍♀️ 现在，非极化振幅模方表达成**四维动量内积**的函数，具有明显的 **Lorentz 不变性**

质心系运动学

- 在质心系中，入射和出射粒子的三维动量如右图所示
- 将散射角 θ 定义为 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的方向夹角
- 质心系总动量为零，$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$
- 故有 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

- 6.5.3 小节表明，质心能 $q^0 = E_{\mathrm{CM}}$ 平分在两个入射（出射）粒子上

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}$$

质心系运动学

- 在质心系中，入射和出射粒子的三维动量如右图所示
- 将散射角 θ 定义为 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的方向夹角
- 质心系总动量为零，$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$
- 故有 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$

- 6.5.3 小节表明，质心能 $q^0 = E_{\rm CM}$ 平分在两个入射（出射）粒子上

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\rm CM}}{2}$$

- 由此推出

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \sqrt{(k_2^0)^2 - m_e^2} = \sqrt{E_{\rm CM}^2/4 - m_e^2} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\beta_e$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{(p_2^0)^2 - m_\mu^2} = \sqrt{E_{\rm CM}^2/4 - m_\mu^2} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\beta_\mu$$

- 其中，电子和 μ 子在质心系中的运动速率为

$$\beta_e \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{E_{\rm CM}^2}} = \frac{|\mathbf{k}_1|}{k_1^0} = \frac{|\mathbf{k}_2|}{k_2^0}, \quad \beta_\mu \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{p_2^0}$$

四维动量内积

- 现在推导**四维动量**之间**内积**的表达式，质心能 E_{CM} 满足

$$E_{\mathrm{CM}}^2 = q^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1 \cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1 \cdot k_2)$$

- 同理有 $E_{\mathrm{CM}}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1 \cdot p_2)$，故 $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2} - m_e^2$，$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2} - m_\mu^2$

四维动量内积

- 现在推导**四维动量**之间**内积**的表达式，质心能 $E_{\rm CM}$ 满足

$$E_{\rm CM}^2 = q^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1 \cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1 \cdot k_2)$$

- 同理有 $E_{\rm CM}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1 \cdot p_2)$，故 $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2$，$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2$
- 根据**能动量守恒定律**，$k_1 + k_2 = p_1 + p_2$，则 $k_1 - p_1 = p_2 - k_2$，从而推出

$$m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_1 \cdot p_1 = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_2 \cdot p_2$$

- 所以有 $k_2 \cdot p_2 = k_1 \cdot p_1 = k_1^0 p_1^0 - |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 - \beta_e\beta_\mu\cos\theta)$
- 另一方面，也有 $k_1 - p_2 = p_1 - k_2$，同理推出

$$k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 + |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 + \beta_e\beta_\mu\cos\theta)$$

四维动量内积

♏ 现在推导**四维动量**之间**内积**的表达式，质心能 $E_{\rm CM}$ 满足

$$E_{\rm CM}^2 = q^2 = (k_1+k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1\cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1\cdot k_2)$$

💂 同理有 $E_{\rm CM}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1\cdot p_2)$，故 $k_1\cdot k_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2$，$p_1\cdot p_2 = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2$

🕵 根据**能动量守恒定律**，$k_1+k_2 = p_1+p_2$，则 $k_1 - p_1 = p_2 - k_2$，从而推出

$$m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_1\cdot p_1 = (k_1-p_1)^2 = (p_2-k_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_2\cdot p_2$$

👷 所以有 $k_2\cdot p_2 = k_1\cdot p_1 = k_1^0 p_1^0 - |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = \dfrac{E_{\rm CM}^2}{4}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)$

🕴 另一方面，也有 $k_1 - p_2 = p_1 - k_2$，同理推出

$$k_2\cdot p_1 = k_1\cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 + |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)$$

💁 由 $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 得 $q\cdot k_1 = q^0 k_1^0 = E_{\rm CM}^2/2$，由此可见

$$q\cdot k_1 = q\cdot k_2 = q\cdot p_1 = q\cdot p_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2}$$

质心系非极化振幅模方

利用以上表达式，将**非极化振幅模方**化为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2+\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2\right.\\
&\qquad\left.+m_\mu^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_e^2\right)+m_e^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_\mu^2\right)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^2}\left[E_{\mathrm{CM}}^2(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta)+4(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]
\end{aligned}
$$

精细结构常数定义为 $\boxed{\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}}$

质心系非极化振幅模方

利用以上表达式，将**非极化振幅模方**化为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\left[\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2+\frac{E_{\mathrm{CM}}^4}{16}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2\right.\\
&\qquad\left.+m_\mu^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_e^2\right)+m_e^2\left(\frac{E_{\mathrm{CM}}^2}{2}-m_\mu^2\right)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\
&= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^2}\left[E_{\mathrm{CM}}^2(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta)+4(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]
\end{aligned}
$$

精细结构常数定义为 $\boxed{\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}}$

$\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto \alpha^2$，因而称 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的**领头阶**是 $\boldsymbol{\alpha^2}$ **阶**，而相应 Feynman 图包含 **2 个 QED 顶点**

由此可以推断，包含 $\boldsymbol{n}$ **个 QED 顶点**的 Feynman 图在振幅模方上对应于 $\boldsymbol{\alpha^n}$ **阶**过程

非极化散射截面

- $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 依赖于 θ，但不依赖于方位角 ϕ
- 根据 6.5.3 小节公式，非极化微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\beta_\mu \overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_e} = \frac{\alpha^2 \beta_\mu}{4E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_e}\left[1 + \beta_e^2\beta_\mu^2 \cos^2\theta + \frac{4(m_e^2 + m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]$$

- 利用 $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta = \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta = 2$, $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \cos^2\theta = \int_{-1}^1 \cos^2\theta\, \mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{3}$
- 此过程末态对称性因子 $\mathcal{S} = 1$，对全立体角积分，得到非极化散射截面

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{2E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[2 + \frac{2}{3}\beta_e^2\beta_\mu^2 + \frac{8(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[3 + \left(1 - \frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) + \frac{12(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left[1 + \frac{2(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2} + \frac{4m_e^2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^4}\right] = \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}\left(1 + \frac{2m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1 + \frac{2m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)
\end{aligned}$$

实验数据

- 右下图根据以上公式画出领头阶散射截面 σ 随质心能 E_{CM} 的变化曲线
- 误差棒标注着 1988 年 PETRA 对撞机上 TASSO 探测器测量到的实验数据
- 可以看到，QED 领头阶预言结果与实验数据符合得比较好

实验数据

- 右下图根据以上公式画出领头阶散射截面 σ 随质心能 $E_{\rm CM}$ 的变化曲线
- 误差棒标注着 1988 年 PETRA 对撞机上 TASSO 探测器测量到的实验数据
- 可以看到，QED 领头阶预言结果与实验数据符合得比较好
- 由于 $m_e \ll m_\mu < E_{\rm CM}/2$，可以近似地忽略电子质量，则 $\beta_e \simeq 1$，而散射截面近似为

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2\beta_e}\left(1+\frac{2m_e^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right) \simeq \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right)$$

- 若 $E_{\rm CM} \gg m_\mu$，则 $\beta_\mu \simeq 1$，散射截面进一步近似为

$$\sigma \simeq \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm CM}^2}$$

8.2.4 小节　极化振幅

🐭 根据前面的计算结果，螺旋度为 λ_1 和 λ_2 的 e^- 和 e^+ 湮灭到螺旋度为 λ_1' 和 λ_2' 的 μ^- 和 μ^+ 的过程对应的**极化不变振幅**为

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\, \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\, \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$$

🦙 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2' = \pm$，而 $\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$ 都是用**旋量双线性型**表达的 **Lorentz 矢量**

🦘 本小节探索极化振幅的显明表达式

8.2.4 小节　极化振幅

根据前面的计算结果，螺旋度为 λ_1 和 λ_2 的 e^- 和 e^+ 湮灭到螺旋度为 λ_1' 和 λ_2' 的 μ^- 和 μ^+ 的过程对应的**极化不变振幅**为

$$\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2' = \pm$，而 $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 都是用**旋量双线性型**表达的 **Lorentz 矢量**

本小节探索极化振幅的显明表达式

依照**右图质心系**中**坐标系**的定义，z **轴**沿 $\mathbf{k}_1$ 方向，初末态四个粒子的动量均位于 xz **平面**上，则末态 μ^- 和 μ^+ 四维动量的分量表达式为

$$p_1^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,\beta_\mu s_\theta,0,\beta_\mu c_\theta)$$
$$p_2^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,-\beta_\mu s_\theta,0,-\beta_\mu c_\theta)$$

这里采用了**缩写** $s_\theta \equiv \sin\theta$ 和 $c_\theta \equiv \cos\theta$

末态螺旋态

根据**螺旋态**表达式

$$\xi_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}$$

得到末态 μ^- 和 μ^+ 对应螺旋态 $\xi_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)$ 和 $\xi_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的形式为

$$\xi_+(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\\ |\mathbf{p}_1|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2c_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2c_{\theta/2}^2\\ 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}-|\mathbf{p}_1|s_\theta\\ |\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\ c_{\theta/2}\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}1+c_\theta &= 2c_{\theta/2}^2\\ s_\theta &= 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{aligned}$$

$$\xi_+(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\\ -|\mathbf{p}_2|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2s_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2s_{\theta/2}^2\\ -2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\ -c_{\theta/2}\end{pmatrix}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|s_\theta\\ |\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix} \qquad 1-c_\theta = 2s_{\theta/2}^2$$

当 $\mu^\pm$ **动量转动 θ 角**时，**螺旋态只转动 $\theta/2$ 角**，这正是**自旋 $1/2$** 的特征

初态螺旋态

- 初态 e^- 和 e^+ 的四维动量为 $k_1^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,\beta_e)$ 和 $k_2^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,-\beta_e)$
- 与 μ^- 和 μ^+ 四维动量的差异在于 β_μ 换成 β_e，且 $\theta = 0$
- 只要将上一页 μ^- 和 μ^+ 螺旋态的 θ 取为 0，就得到 e^- 和 e^+ 的螺旋态

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

初态螺旋态

- 初态 e^- 和 e^+ 的四维动量为 $k_1^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,\beta_e)$ 和 $k_2^\mu = \dfrac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,-\beta_e)$
- 与 μ^- 和 μ^+ 四维动量的差异在于 β_μ 换成 β_e，且 $\theta = 0$
- 只要将上一页 μ^- 和 μ^+ 螺旋态的 θ 取为 0，就得到 e^- 和 e^+ 的螺旋态

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

- 在 Weyl 表象中，$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^\mu\\ \bar\sigma^\mu & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar\sigma^\mu & \\ & \sigma^\mu\end{pmatrix}$
- 根据 5.4.2 小节 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋态表达式，$e^\pm$ 贡献的 Lorentz 矢量为

$$\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) = v^\dagger(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^0\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2) & -\lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\sigma^\mu & \\ & \sigma^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\\ \omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) - \lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$$

$\omega_\lambda(\mathbf{p})$ 的性质

按照 $\omega_\lambda(\mathbf{p})$ 函数的定义 $\omega_\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{E_\mathbf{p} + \lambda|\mathbf{p}|}$，有

$$\begin{aligned}
\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) &= \sqrt{(k_2^0 + |\mathbf{k}_2|)(k_1^0 + |\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}} \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2} \\
\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) &= \sqrt{(k_2^0 - |\mathbf{k}_2|)(k_1^0 - |\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}} \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}
\end{aligned}$$

再由 $\sqrt{1-\beta_e^2} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)} = \frac{2m_e}{E_{\mathrm{CM}}}$ 导出

$$\begin{aligned}
\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) = \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) &= \sqrt{\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}} \\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\sqrt{1-\beta_e^2} = m_e
\end{aligned}$$

初态分量

代入 $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$、$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$ 和

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

得到 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) 的**分量**表达式

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, -1, -\mathrm{i}, 0) = -\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1, -\mathrm{i}, 0) = -\xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)$$

$$\xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 1), \qquad \xi^\dagger_-(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = (1, 0, 0, -1)$$

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, 0, 1), \quad \xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = (-1, 0, 0, -1)$$

初态 Lorentz 矢量的分量

从而，**初态 Lorentz 矢量** $\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的**分量**表达式是

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)+\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,\mathrm{i},0)+\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,-\mathrm{i},0)\\
\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)-\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,\mathrm{i},0)-\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,\mathrm{i},0)\\
\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)-\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= m_e(1,0,0,-1)-m_e(1,0,0,1)=2m_e(0,0,0,-1)\\
\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar{\sigma}^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)+\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= -m_e(-1,0,0,-1)+m_e(-1,0,0,1)=2m_e(0,0,0,1)
\end{aligned}
$$

末态 Lorentz 矢量

- 另一方面，**末态正负 μ 子**贡献的 **Lorentz 矢量**为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2') = u^\dagger(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^0\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$$

$$= \begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1) & \omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\sigma}_\mu & \\ & \sigma_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2'\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\\ -\lambda_2'\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_2'\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2) - \lambda_2'\omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$$

- 此时有

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}$$

$$\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}$$

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = m_\mu$$

末态分量

- 利用三角函数公式 $c_{\theta/2}^2 - s_{\theta/2}^2 = c_\theta$ 和 $s_{\theta/2}^2 + c_{\theta/2}^2 = 1$
- 推出 $\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 和 $\xi^\dagger_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的**分量**为

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} s_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2} \end{pmatrix} = (0, c_\theta, -\mathrm{i}, -s_\theta) = -\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} & c_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix} = (0, -c_\theta, -\mathrm{i}, s_\theta) = -\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix} = (1, -s_\theta, 0, -c_\theta)$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = (1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} & c_{\theta/2} \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} s_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2} \end{pmatrix} = (-1, -s_\theta, 0, -c_\theta)$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = (-1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

末态 Lorentz 矢量的分量

🐵 从而，**末态 Lorentz 矢量** $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$ 的**分量**是

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, -) &= -\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) + \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) \\
&= -\tfrac{1}{2}E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)(0, -c_\theta, \mathrm{i}, s_\theta) + \tfrac{1}{2}E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)(0, c_\theta, -\mathrm{i}, -s_\theta) \\
&= E_{\mathrm{CM}}(0, c_\theta, -\mathrm{i}, -s_\theta) \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, +) &= \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) - \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) \\
&= \tfrac{1}{2}E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)(0, c_\theta, \mathrm{i}, -s_\theta) - \tfrac{1}{2}E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)(0, -c_\theta, -\mathrm{i}, s_\theta) \\
&= E_{\mathrm{CM}}(0, c_\theta, \mathrm{i}, -s_\theta) \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, +) &= \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) - \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) \\
&= m_\mu(1, s_\theta, 0, c_\theta) - m_\mu(1, -s_\theta, 0, -c_\theta) = 2m_\mu(0, s_\theta, 0, c_\theta) \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, -) &= -\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar{\sigma}_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) + \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) \\
&= -m_\mu(-1, s_\theta, 0, c_\theta) + m_\mu(-1, -s_\theta, 0, -c_\theta) = 2m_\mu(0, -s_\theta, 0, -c_\theta)
\end{aligned}
$$

🐣 与动量一样，这些 **Lorentz 矢量**的空间分量**转动的角度**是 θ，对应的**角动量量子数**是 1，它是由**两个**量子数为 $1/2$ 的**自旋角动量耦合**出来的

极化振幅：$\lambda_1 = -\lambda_2$，$\lambda_1' = -\lambda_2'$

- 将上述表达式代入，就得到**极化振幅** $\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$ 的显明表达式
- 下面分 4 类**螺旋度构型**来讨论

(1) 当 $e^\pm$ 具有**相反螺旋度** $(\lambda_1 = -\lambda_2)$、$\mu^\pm$ 也具有**相反螺旋度** $(\lambda_1' = -\lambda_2')$ 时，得

$$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -e^2(1+\cos\theta)$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -e^2(1+\cos\theta)$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = e^2(1-\cos\theta)$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = e^2(1-\cos\theta)$$

- 可见，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 且 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$

宇称守恒

实际上，QED 是一个**宇称守恒**的理论，即具有**空间反射对称性**

在**宇称变换**下，动量方向**反转**，角动量方向**不变**，因而**螺旋度翻转**，但 θ 角不变

于是，对**所有螺旋度**作**翻转变换**之后，**宇称守恒**保证 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ **不变**，故振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ **不变**，而振幅至多相差一个**相位因子** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，

$$\mathcal{M}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_1', -\lambda_2') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$$

这里得到 $\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$，故相应的**相位因子**都是 1

宇称守恒

实际上，QED 是一个**宇称守恒**的理论，即具有**空间反射对称性**

在**宇称变换**下，动量方向**反转**，角动量方向**不变**，因而**螺旋度翻转**，但 θ 角不变

于是，对**所有螺旋度**作**翻转变换**之后，**宇称守恒**保证 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ **不变**，故振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ **不变**，而振幅至多相差一个**相位因子** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，

$$\mathcal{M}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_1', -\lambda_2') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$$

这里得到 $\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = \mathcal{M}(-,+,+,-)$，故相应的**相位因子**都是 1

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,+,-)$ 和 $(-,+,-,+)$ 两种构型的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu e^4(1+\cos\theta)^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1+\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,-,+)$ 和 $(-,+,+,-)$ 对应的极化微分截面也相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1-\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}$$

$\mathcal{M}(+,-,+,-)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+)$ 的零振幅构型

- 当 $\theta = \pi$ 时，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = -e^2(1+\cos\pi) = 0$，动量和角动量如左下图所示
- 双线箭头 $\Rightarrow$ 表示自旋角动量的方向，与动量方向一致时螺旋度为正，反之为负
- e^+e^- 系统角动量 $\mathbf{J}$ 的量子数为 $j=1$，方向为 z 轴正向，J^3 本征值为 $\sigma = +1$
- $\mu^+\mu^-$ 系统角动量 $\mathbf{J}$ 的量子数为 $j=1$，方向为 z 轴负向，J^3 本征值为 $\sigma = -1$
- 初末态系统的 J^3 本征值不同，不满足角动量守恒，因此振幅为零
- 当 $\theta \neq \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统是三种 J^3 本征态 $|\sigma=+1\rangle$、$|\sigma=0\rangle$ 和 $|\sigma=-1\rangle$ 的叠加态，在振幅上体现为一个 $(1+\cos\theta)$ 因子

$\mathcal{M}(+,-,+,-)$ 和 $\mathcal{M}(+,-,-,+)$ 的零振幅构型

- 当 $\theta = \pi$ 时，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = -e^2(1+\cos\pi) = 0$，动量和角动量如左下图所示
- 双线箭头 $\Rightarrow$ 表示自旋角动量的方向，与动量方向一致时螺旋度为正，反之为负
- e^+e^- 系统角动量 $\mathbf{J}$ 的量子数为 $j=1$，方向为 z 轴正向，J^3 本征值为 $\sigma = +1$
- $\mu^+\mu^-$ 系统角动量 $\mathbf{J}$ 的量子数为 $j=1$，方向为 z 轴负向，J^3 本征值为 $\sigma = -1$
- 初末态系统的 J^3 本征值不同，不满足角动量守恒，因此振幅为零
- 当 $\theta \neq \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统是三种 J^3 本征态 $|\sigma=+1\rangle$、$|\sigma=0\rangle$ 和 $|\sigma=-1\rangle$ 的叠加态，在振幅上体现为一个 $(1+\cos\theta)$ 因子
- 对右下图可作类似分析，因此 $\theta = 0$ 时有 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = e^2(1-\cos 0) = 0$，而 $\theta \neq 0$ 时振幅上出现一个 $(1-\cos\theta)$ 因子

极化振幅：$\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda_1' = \lambda_2'$

(2) 当 $e^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1 = \lambda_2$)、$\mu^\pm$ 也具有**相同螺旋度** ($\lambda_1' = \lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}$$

🐢 这些振幅都**正比于** $m_e m_\mu \cos\theta$，**宇称变换**引起的**相位因子**都是 1

🐍 这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{16e^4 m_e^2 m_\mu^2 \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^4} = \frac{4\alpha^2 m_e^2 m_\mu^2 \beta_\mu \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^6 \beta_e}$$

螺旋度压低

- 一个**类时虚粒子**的行为类似于一个实粒子，具有与实粒子**相同**的**自旋**
- $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的中间态是**类时**的**虚光子**，**自旋为** 1，**角动量量子数**为 $j = 1$
- 不过，具有**相同螺旋度**的正反粒子对在质心系中的**角动量**为 $j = 0$，必须**翻转**其中一个粒子的螺旋度才能得到**角动量** $j = 1$

$$e^- \xrightarrow{\Rightarrow} \quad \xleftarrow{\Leftarrow} e^+$$

螺旋度压低

- 一个**类时虚粒子**的行为类似于一个实粒子，具有与实粒子**相同**的**自旋**
- $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的中间态是**类时**的**虚光子**，**自旋为** 1，**角动量量子数**为 $j = 1$
- 不过，具有**相同螺旋度**的正反粒子对在质心系中的**角动量**为 $j = 0$，必须**翻转**其中一个粒子的螺旋度才能得到**角动量** $j = 1$

$$e^- \xrightarrow{\Rightarrow} \quad \xleftarrow{\Leftarrow} e^+$$

- 实际上，粒子的**质量可以翻转螺旋度**
- 根据 **3.3.2 小节**知识，对于**无质量**的自由粒子，**螺旋度**在任意惯性系中**不变**
- 对于**有质量**的自由粒子，**螺旋度**在**不同惯性系**中可以具有**不同**的值
- 毕竟，在**静止系**中粒子动量为零，因而螺旋度**不确定**

螺旋度压低

- 一个**类时虚粒子**的行为类似于一个实粒子，具有与实粒子**相同**的**自旋**
- $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的中间态是**类时**的**虚光子**，**自旋为** 1，**角动量量子数**为 $j = 1$
- 不过，具有**相同螺旋度**的正反粒子对在质心系中的**角动量**为 $j = 0$，必须**翻转**其中一个粒子的螺旋度才能得到**角动量** $j = 1$

- 实际上，粒子的**质量可以翻转螺旋度**
- 根据 **3.3.2 小节**知识，对于**无质量**的自由粒子，**螺旋度**在任意惯性系中**不变**
- 对于**有质量**的自由粒子，**螺旋度**在**不同惯性系**中可以具有**不同**的值
- 毕竟，在**静止系**中粒子动量为零，因而螺旋度**不确定**
- 可将**质量**看作一种**耦合**，耦合螺旋度相反的两种状态，效果是**翻转粒子的螺旋度**
- 必须**翻转 e^- 或 e^+ 的螺旋度**来得到系统角动量为 $j = 1$ 的态，振幅中出现一个 $2m_e/E_{\mathrm{CM}}$ 因子；同时必须**翻转 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度**，出现一个 $2m_\mu/E_{\mathrm{CM}}$ 因子
- 由于运动学上要求 $E_{\mathrm{CM}}/2 > m_\mu \gg m_e$，这些振幅受到**严重压低**，贡献可忽略
- 这种效应称为**螺旋度压低** (helicity suppression)

$\mathcal{M}(+,+,+,+)$ 的零振幅构型

- 由于 $\mathcal{M} \propto \cos\theta$，当 $\theta = \pi/2$ 时，这四种情况都出现**零振幅**
- 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$，零振幅构型如**右下图**所示
- 图中 e^+ 被**质量耦合**（用 $\times$ 表示）**翻转**螺旋度，使得**角动量为** $j = 0$ 的 e^+e^- 系统转化成**角动量为** $j = 1$ 的虚光子
- 随后，虚光子转化成**角动量为** $j = 1$ 的 $\mu^+\mu^-$ 系统
- 最后，**质量耦合**将 μ^+ 的螺旋度**翻转**，从而得到**角动量为** $j = 0$ 的 $\mu^+\mu^-$ 系统

$\mathcal{M}(+,+,+,+)$ 的零振幅构型

- 由于 $\mathcal{M} \propto \cos\theta$，当 $\theta = \pi/2$ 时，这四种情况都出现**零振幅**
- 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$，零振幅构型如**右下图**所示
- 图中 e^+ 被**质量耦合**（用 $\times$ 表示）**翻转**螺旋度，使得**角动量为** $j = 0$ 的 e^+e^- 系统转化成**角动量为** $j = 1$ 的虚光子
- 随后，虚光子转化成**角动量为** $j = 1$ 的 $\mu^+\mu^-$ 系统
- 最后，**质量耦合**将 μ^+ 的螺旋度**翻转**，从而得到**角动量为** $j = 0$ 的 $\mu^+\mu^-$ 系统
- 但是，虚光子的角动量**沿 z 轴正向**，当 $\theta = \pi/2$ 时**不可能**转化成角动量**沿 x 轴正向**的 $\mu^+\mu^-$ 系统，因而振幅为零
- 当 $\theta \neq \pi/2$ 时，虚光子转化成 $\mu^+\mu^-$ 系统的概率在振幅上体现为一个 $\cos\theta$ 因子

极化振幅：$\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda_1' = -\lambda_2'$

(3) 当 $e^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1 = \lambda_2$)、$\mu^\pm$ 具有**相反螺旋度** ($\lambda_1' = -\lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

- 这些振幅都**正比于** $m_e \sin\theta$，**宇称变换**引起的**相位因子**都是 -1
- 这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{4e^4 m_e^2 \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_e^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4 \beta_e}$$

$\mathcal{M}(+,+,+,-)$ 的零振幅构型

- 这里初态 e^+e^- 系统的**角动量为** $j=0$
- 必须**翻转** e^- 或 e^+ 的**螺旋度**来得到**角动量为** $j=1$ 的态，因而振幅中出现一个 $2m_e/E_{\mathrm{CM}}$ 因子，受到**螺旋度压低**
- 由于 $E_{\mathrm{CM}}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅的贡献可以忽略

$\mathcal{M}(+,+,+,-)$ 的零振幅构型

- 这里初态 e^+e^- 系统的**角动量为** $j=0$
- 必须**翻转** e^- 或 e^+ 的**螺旋度**来得到**角动量为** $j=1$ 的态，因而振幅中出现一个 $2m_e/E_{\rm CM}$ 因子，受到**螺旋度压低**
- 由于 $E_{\rm CM}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅的贡献可以忽略
- 当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现**零振幅**
- 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,-)$，零振幅构型如**右上图**和**右下图**所示
- 末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的**角动量为** $j=1$，当 $\theta=0$ 或 π 时，J^3 **本征值**为 $\sigma=+1$ 或 $\sigma=-1$，而 e^+e^- 系统的 J^3 本征值为 $\sigma=0$，**不满足角动量守恒**，故振幅为零
- 当 $\theta \neq 0, \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统是 $|\sigma=+1\rangle$、$|\sigma=0\rangle$ 和 $|\sigma=-1\rangle$ 的叠加态，在振幅上体现为一个 $\sin\theta$ 因子

极化振幅：$\lambda_1 = -\lambda_2$，$\lambda_1' = \lambda_2'$

(4) 当 $e^\pm$ 具有**相反螺旋度** ($\lambda_1 = -\lambda_2$)、$\mu^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1' = \lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

宇称变换引起的**相位因子**都是 -1，这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{4e^4 m_\mu^2 \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_\mu^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4 \beta_e}$$

极化振幅：$\lambda_1 = -\lambda_2$，$\lambda_1' = \lambda_2'$

(4) 当 $e^\pm$ 具有**相反螺旋度** ($\lambda_1 = -\lambda_2$)、$\mu^\pm$ 具有**相同螺旋度** ($\lambda_1' = \lambda_2'$) 时，得

$$\mathcal{M}(+,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}$$

宇称变换引起的**相位因子**都是 -1，这四个振幅对应的**极化微分截面**相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2\beta_e}\,\frac{4e^4 m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_\mu^2\beta_\mu\sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4\beta_e}$$

这里末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的**角动量为** $j=0$，必须**翻转** μ^- 或 μ^+ 的**螺旋度**来得到**角动量为** $j=1$ 的态，因而振幅中出现一个 $2m_\mu/E_{\rm CM}$ 因子，受到**螺旋度压低**

当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现**零振幅**，理由类似于**第 (3) 类**情况

非极化振幅模方

♓ 利用上述 **16 个极化振幅**表达式，可以直接计算**非极化振幅模方**，

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'} |\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')|^2 \\
&= \frac{e^4}{4}\left[2(1+\cos\theta)^2 + 2(1-\cos\theta)^2 + 4\,\frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 4\,\frac{4m_e^2\sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2} + 4\,\frac{4m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= e^4\left[1+\cos^2\theta + \frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4} + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)(1-\cos^2\theta)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= e^4\left[1+\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right]
\end{aligned}
$$

🐞 结果与 **8.2.3 小节**中通过**求迹运算**得到的表达式**一致**