数 学 物 理 方 法

第七章　分离变量法

第 4 节和第 5 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 10 月 14 日

§4 矩形区域上的稳定场方程

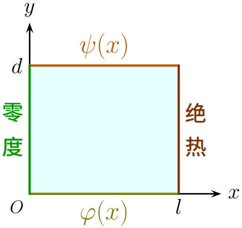
- 前面几节研究了一维波动或热传导方程定解问题的求解，它们都涉及两个自变量
- 平面上的稳定场方程定解问题也涉及两个自变量，因此与上述问题相似
- 但稳定场方程的定解问题只有边界条件，没有初始条件，其解法有一些不同之处
- 本节求解两个矩形区域上的稳定场问题，以加深对分离变量法的了解
- 矩形区域是平面上最简单的区域
- 下面先讨论矩形区域上的 **Laplace 方程**定解问题

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

矩形区域上 Laplace 方程的定解问题

考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u\big|_{x=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0 & (0\le y\le d) \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x),\quad u\big|_{y=d}=\psi(x) & (0\le x\le l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布 $u(x,y)$ 的问题

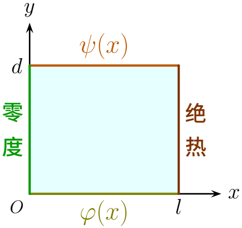
矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知

那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到

矩形区域上 Laplace 方程的定解问题

考虑以下**矩形区域**上的 **Laplace 方程**定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (0 \le y \le d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块**矩形薄板**的**稳定温度分布** $u(x,y)$ 的问题

矩形薄板一边保持**零度**，一边**绝热**，另外两边的**温度分布已知**

那么，整块薄板上的**温度分布**是**确定**的，可以通过求解上述定解问题得到

现在尝试寻找 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ 形式的**特解**，将它代入 **Laplace 方程**，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)$$

故 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}$，**左边与 y 无关**，**右边与 x 无关**，必为**常数**，记作 λ

本征值问题

- 由此得到两个方程 $X''(y)+\lambda X(y)=0$ 和 $Y''(y)-\lambda Y(y)=0$
- $x=0$ 和 $x=l$ 处的**边界条件**给出

$$u\big|_{x=0}=X(0)Y(y)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=X'(l)Y(y)=0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(y)+\lambda X(y)=0 \\ X(0)=0,\quad X'(l)=0 \end{cases}$

本征值问题

- 由此得到两个方程 $X''(y) + \lambda X(y) = 0$ 和 $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(y) + \lambda X(y) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1. 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2\ (\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cosh\mu x + D\sinh\mu x$

- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$
- 从而 $X'(l) = \mu D\cosh\mu l = 0$，但 $\cosh\mu l \geq 1$ 且 $\mu > 0$，故 $D = 0$
- 于是得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

本征值问题

- 由此得到两个方程 $X''(y) + \lambda X(y) = 0$ 和 $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(y) + \lambda X(y) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1. 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cosh \mu x + D\sinh \mu x$
- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$
- 从而 $X'(l) = \mu D\cosh \mu l = 0$，但 $\cosh \mu l \geq 1$ 且 $\mu > 0$，故 $D = 0$
- 于是得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

2. 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**
- 有 $D = X(0) = 0$，$C = X'(0) = 0$，得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，$\lambda = 0$ **不是**本征值

本征值和本征函数

3️⃣ 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2 \ (\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

🧁 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$，从而 $X'(l) = \mu D\cos\mu l = 0$

🍦 为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos\mu l = 0$，如此则 D 可**任意**

本征值和本征函数

- 3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2\ (\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$
- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$，从而 $X'(l) = \mu D\cos\mu l = 0$
- 为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos\mu l = 0$，如此则 D 可**任意**
- 因此 $\cos\mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ (n \in \mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \cdots$ 是**余弦函数**的**零点**，于是得到**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

- 其中已取 $D = 1$

本征值和本征函数

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2\ (\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$，从而 $X'(l) = \mu D\cos\mu l = 0$
- 为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos\mu l = 0$，如此则 D 可**任意**
- 因此 $\cos\mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ (n \in \mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \cdots$ 是**余弦函数**的**零点**，于是得到**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

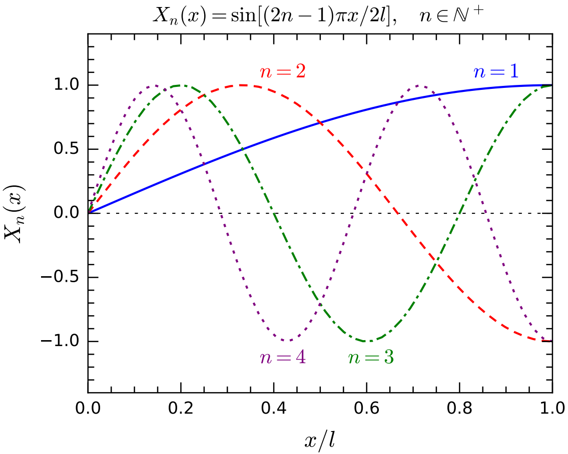
- 其中已取 $D = 1$

注 如果将上面的 μ_n 写成 $\mu_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2l}$，则应该取 $n \in \mathbb{N}$

- 求出本征函数后，最好**验证**它是否确实满足**边界条件**，避免计算错误或抄写错误
- 比如，这里如果将本征函数**误写**成 $\cos\mu_n x$，则通过**上述验证**可以**立即发现错误**

本征函数图像

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$



求解 $Y(y)$

- 这里本征函数族 $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, l]$ 上的正交完备性由 Strum-Liouville 本征值问题的一般结论得到保证
- 正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin\mu_m x \sin\mu_n x \, \mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, \mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

求解 $Y(y)$

- 这里**本征函数族** $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在**区间** $[0,l]$ 上的**正交完备性**由 **Strum-Liouville 本征值问题**的**一般结论**得到保证
- **正交性**也可以直接验证，利用**积化和差公式**容易证明

$$\int_0^l \sin\mu_m x\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\delta_{mn},\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

- 将**本征值** $\lambda_n=\mu_n^2$ 代入 $Y(y)$ 满足的方程，得 $Y_n''(y)-\mu_n^2 Y_n(y)=0$
- 它的两个线性独立解可以取为 $\{\exp(\mu_n y),\exp(-\mu_n y)\}$
- 因 $\cosh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})$，$\sinh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})$，也可取为 $\{\cosh\mu_n y,\sinh\mu_n y\}$

求解 $Y(y)$

- 这里**本征函数族** $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在**区间** $[0,l]$ 上的**正交完备性**由 **Strum-Liouville 本征值问题**的**一般结论**得到保证
- **正交性**也可以直接验证，利用**积化和差公式**容易证明

$$\int_0^l \sin\mu_m x\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\delta_{mn},\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

- 将**本征值** $\lambda_n=\mu_n^2$ 代入 $Y(y)$ 满足的方程，得 $Y_n''(y)-\mu_n^2 Y_n(y)=0$
- 它的两个线性独立解可以取为 $\{\exp(\mu_n y),\exp(-\mu_n y)\}$
- 因 $\cosh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})$，$\sinh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})$，也可取为 $\{\cosh\mu_n y,\sinh\mu_n y\}$
- 由**双曲函数减法公式**得 $\sinh[\mu_n(d-y)]=\sinh\mu_n d\cosh\mu_n y-\cosh\mu_n d\sinh\mu_n y$
- 为了下面计算方便，将**两个线性独立解**等价地取为 $\{\sinh[\mu_n(d-y)],\sinh\mu_n y\}$
- 从而将方程 $Y_n''(y)-\mu_n^2 Y_n(y)=0$ 的**通解**写作

$$Y_n(y)=A_n\sinh[\mu_n(d-y)]+B_n\sinh\mu_n y,\quad n\in\mathbb{N}^+,\quad A_n \text{ 和 } B_n \text{ 是任意常数}$$

定解问题的解

🍔 于是，满足 **Laplace 方程**和**边界条件**的**一般解**为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\sinh[\mu_n(d-y)]+B_n\sinh\mu_n y\}\sin\mu_n x$$

🍟 将上式代入 y **方向**的**两个边界条件**，得

$$u|_{y=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\varphi(x),\quad u|_{y=d}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\psi(x)$$

定解问题的解

- 于是，满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\sinh[\mu_n(d-y)]+B_n\sinh\mu_n y\}\sin\mu_n x$$

- 将上式代入 y 方向的两个边界条件，得

$$u|_{y=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\varphi(x),\quad u|_{y=d}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\psi(x)$$

- 由于本征函数族的正交完备性，适当的系数 A_n 和 B_n 可使以上两式成立
- 利用 $\int_0^l\sin\mu_m x\,\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\delta_{mn}$，可得

$$A_n=\frac{2}{l\sinh\mu_n d}\int_0^l\varphi(x)\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x,\quad B_n=\frac{2}{l\sinh\mu_n d}\int_0^l\psi(x)\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x$$

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的形式，可以求得系数 A_n 和 B_n
- 将它们代回一般解，就得到定解问题的解

讨论

- 在上述稳定场方程定解问题中，一部分边界条件（齐次）用于构成本征值问题
- 另一部分边界条件（齐次或非齐次）用于确定一般解中的系数
- 这是与波动或热传导问题的不同之处，后两者用初始条件确定系数
- 所以，就 Laplace 方程而言，**不必**要求**所有**的边界条件都是齐次的
- 否则就只有平庸解了

矩形区域上 Poisson 方程的定解问题

下面再考虑**全部边界条件**都**非齐次**的 **Poisson 方程**定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u\big|_{x=0}=\mu(y),\quad u\big|_{x=l}=\nu(y) & (0\le y\le d) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\varphi(x),\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=d}=\psi(x) & (0\le x\le l) \end{cases}$$

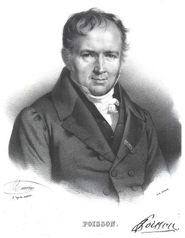
方法一　对于这一定解问题，可令

$$u(x,y)=v(x,y)+u_0(x,y)$$

并取 $u_0(x,y)=\mu(y)+\dfrac{x}{l}[\nu(y)-\mu(y)]$

从而 $v(x,y)$ 在 $x=0$ 和 $x=l$ 处满足**齐次**的**边界条件**

虽然**方程**仍是**非齐次**的，但可以用**本征函数展开法**求解



Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

分为两个定解问题

❤️ **方法二** 由于稳定场方程的所有定解条件都是边界条件，更简单的方法是令 $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$，将上述定解问题化为两个问题来求解

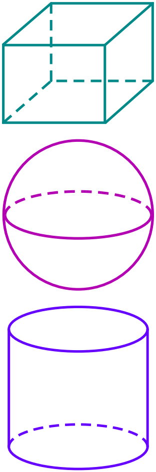
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f(x,y) & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u_1\big|_{x=0}=0,\quad u_1\big|_{x=l}=0 & (0\le y\le d) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\varphi(x),\quad \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_{y=d}=\psi(x) & (0\le x\le l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u_2\big|_{x=0}=\mu(y),\quad u_2\big|_{x=l}=\nu(y) & (0\le y\le d) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\quad \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=d}=0 & (0\le x\le l) \end{cases}$$

- $u_1(x,y)$ 的定解问题可以用本征函数展开法求解
- $u_2(x,y)$ 的定解问题可以直接用分离变量法求出一般解，再用边界条件确定系数
- 作为练习，请同学们课后做出完整的求解过程

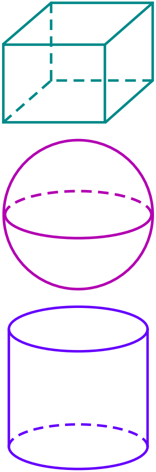
§5 平面极坐标系中的稳定场方程

- 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题
- 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状
- 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域
- 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面



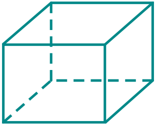
§5 平面极坐标系中的稳定场方程

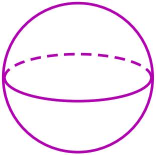
- 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题
- 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状
- 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域
- 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面
- 根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系
- 比如，对球形区域上的定解问题，就应用采用球坐标系
- 如果采用直角坐标系，则**无法**对边界条件分离变量

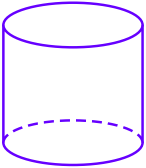


§5 平面极坐标系中的稳定场方程

- 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题
- 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状
- 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域
- 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面
- 根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系
- 比如，对球形区域上的定解问题，就应用采用球坐标系
- 如果采用直角坐标系，则**无法**对边界条件分离变量
- 分离变量成功之后，需要求解常微分方程及其本征值问题
- 前面几节遇到的常微分方程的解都是初等函数，较容易处理
- 然而，在更多问题中，出现的微分方程不是我们所熟悉的，其解并**不是**初等函数
- 即使是弦振动问题，如果弦的线密度不是常数，那么本征值问题就**困难**得多

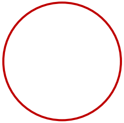


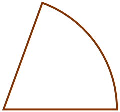


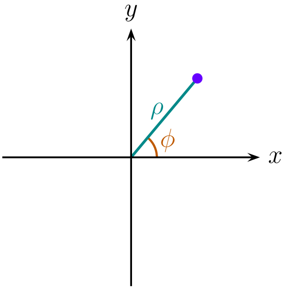


平面极坐标系

- 对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂
- 如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究
- 所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解
- 后面将对一些特殊函数作系统的介绍

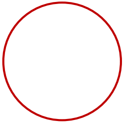


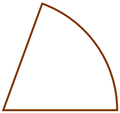


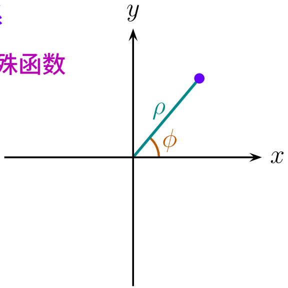


平面极坐标系

- 对于曲线坐标系中的定解问题，情况往往就更复杂
- 如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以解析求解（比如用级数解法求解），人们就会对它的解进行深入的研究
- 所谓特殊函数，常常就是这样一些微分方程的解
- 后面将对一些特殊函数作系统的介绍
- 对于平面区域上的问题，如果边界涉及圆弧，比如圆内、圆外或扇形区域上的定解问题，那么显然应该采用平面极坐标系
- 在平面极坐标系中求解波动或热传导方程，也会涉及特殊函数
- 但稳定场方程的求解则只需用到初等函数
- 这可能是曲线坐标系中最简单的问题了
- 这一问题涉及两个自变量 ρ 和 ϕ，与前面几节类似
- 但边界条件完全不同，方程的形式也有新的特点







§5.1 一般解

在平面极坐标系中，**Laplace 方程**的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 **Laplace 算符**的形式可以由直角坐标系中的形式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 通过坐标变换 $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$ 得到

这种方法思路简单，但计算较为**繁琐**，在第九章中将会介绍其它方法

§5.1 一般解

在平面极坐标系中，Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式 $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 通过坐标变换 $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$ 得到

这种方法思路简单，但计算较为繁琐，在第九章中将会介绍其它方法

这里暂时不给定定解条件，先求 Laplace 方程的一般解

接下来的求解假定 ϕ 的取值不受限制，因此下面得到的一般解不适用于扇形区域

现在尝试寻找形式为 $u(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 的特解，将它代入 Laplace 方程，有

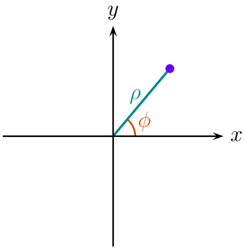
$$0 = \nabla^2 u = R''(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\phi)$$

整理得 $\rho^2\dfrac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\dfrac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\dfrac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} \equiv \lambda$，其中 λ 是常数

自然的周期性边界条件

- 从而得到两个方程 $\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0$ 和 $\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0$
- 在**直角坐标系**中，**坐标**与**几何点**是**一一对应**的，但**曲线坐标系**却往往**不是**这样
- 在**平面极坐标系**中，**坐标** (ρ,ϕ) 与 $(\rho,\phi+2\pi)$ 代表**同一个几何点**
- 一个**物理量**在一个**确定的几何点**应该具有**确定的取值**
- 这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho,\phi+2\pi)=u(\rho,\phi)$$



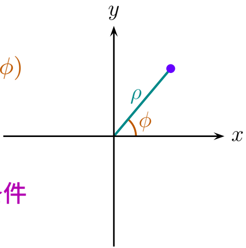
自然的周期性边界条件

- 从而得到两个方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ 和 $\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$
- 在**直角坐标系**中，**坐标**与**几何点**是**一一对应**的，但**曲线坐标系**却往往**不是**这样
- 在**平面极坐标系**中，**坐标** (ρ, ϕ) 与 $(\rho, \phi + 2\pi)$ 代表**同一个几何点**
- 一个**物理量**在一个**确定的几何点**应该具有**确定的取值**
- 这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$

- 将 $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 代入，得 $R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\phi)$
- 但 $R(\rho)$ **不恒为零**，故

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$



- 这是由**物理量**的**单值性**和**曲线坐标**的**特性**导出的一个**边界条件**
- 它是一种**自然边界条件**，自然边界条件还有**其它形式**
- 同时，它也是一种**周期性边界条件**

求解本征值问题

- 现在求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$
- 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $\Phi(\phi) = C\mathrm{e}^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$
- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$C\,\mathrm{e}^{2\pi\mu}\mathrm{e}^{\mu\phi} + D\,\mathrm{e}^{-2\pi\mu}\mathrm{e}^{-\mu\phi} = C\mathrm{e}^{\mu\phi} + D\mathrm{e}^{-\mu\phi}$$

$$C(\mathrm{e}^{2\pi\mu} - 1)\,\mathrm{e}^{\mu\phi} + D(\mathrm{e}^{-2\pi\mu} - 1)\,\mathrm{e}^{-\mu\phi} = 0$$

$$\Phi''(\phi) = \mu^2\Phi(\phi)$$
$$(\mathrm{e}^{\pm\mu\phi})'' = \mu^2\mathrm{e}^{\pm\mu\phi}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(\mathrm{e}^{2\pi\mu} - 1) = 0$，且 $D(\mathrm{e}^{-2\pi\mu} - 1) = 0$
- 但 $\mu > 0$，有 $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$，从而 $C = D = 0$
- 于是得到**平庸解** $\Phi(\phi) \equiv 0$，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

求解本征值问题

现在求解 $\Phi(\phi)$ 满足的本征值问题 $\begin{cases} \Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0 \\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi) \end{cases}$

1 如果 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2$ $(\mu>0)$，则解为 $\Phi(\phi)=C\mathrm{e}^{\mu\phi}+De^{-\mu\phi}$

其中 C、D 是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$C\,\mathrm{e}^{2\pi\mu}\mathrm{e}^{\mu\phi}+D\,\mathrm{e}^{-2\pi\mu}\mathrm{e}^{-\mu\phi}=C\mathrm{e}^{\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mu\phi}$$

$$C(\mathrm{e}^{2\pi\mu}-1)\,\mathrm{e}^{\mu\phi}+D(\mathrm{e}^{-2\pi\mu}-1)\,\mathrm{e}^{-\mu\phi}=0$$

$$\Phi''(\phi)=\mu^2\Phi(\phi)$$
$$(\mathrm{e}^{\pm\mu\phi})''=\mu^2\mathrm{e}^{\pm\mu\phi}$$

上式必须对所有 ϕ 值成立，故 $C(\mathrm{e}^{2\pi\mu}-1)=0$，且 $D(\mathrm{e}^{-2\pi\mu}-1)=0$

但 $\mu>0$，有 $\mathrm{e}^{\pm2\pi\mu}-1\neq0$，从而 $C=D=0$

于是得到平庸解 $\Phi(\phi)\equiv0$，因而 $\lambda<0$ **不是**本征值

2 如果 $\lambda=0$，则解为 $\Phi(x)=C+D\phi$，其中 C、D 是任意常数

代入周期性边界条件，得 $C+D(\phi+2\pi)=C+D\phi$，即 $2\pi D=0$

故 $D=0$，而 C 可任意，求得本征值 $\lambda_0=0$，本征函数 $\Phi_0(\phi)=1$

注意这个解**不能遗漏**，否则本征函数族将是**不完备**的

继续求解本征值问题

- 继续求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$

- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$C\,e^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + D\,e^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

$$C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$$

$$\Phi''(\phi) = -\mu^2\Phi(\phi)$$
$$(e^{\pm i\mu\phi})'' = -\mu^2 e^{\pm i\mu\phi}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$，且 $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$
- 后面一式两边乘以 $-e^{2i\pi\mu}$，得 $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

继续求解本征值问题

- 继续求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases} \Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0 \\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi) \end{cases}$
- 3 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\mu^2$ $(\mu>0)$，则解为 $\Phi(\phi)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}$
- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$C\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}$$

$$C(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}=0$$

$$\Phi''(\phi)=-\mu^2\Phi(\phi)$$
$$(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\phi})''=-\mu^2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\phi}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$，且 $D(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$
- 后面一式两边乘以 $-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}$，得 $D(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$
- 如果 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1\neq 0$，则 $C=D=0$，只得到**平庸解**
- 为得到**非平庸解**，须要求 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}=1$，而 C、D 均可**任意**

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$
$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

- 因此 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}=1$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu=m$ $(m\in\mathbb{N}^+)$
- 得到**本征值** $\lambda_m=m^2$ 和**本征函数** $\Phi_m(\phi)=\{\cos m\phi,\sin m\phi\}$，其中 $m\in\mathbb{N}^+$

简并

- 现在，**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 对应于**两个独立**的**本征函数** $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$
- 这种一个本征值对应于**多个**独立本征函数的现象称为**简并**
- 独立本征函数的个数称为**简并度**，这里简并度为 2

简并

🌲 现在，**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 对应于**两个独立**的**本征函数** $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$

🫐 这种一个本征值对应于**多个**独立本征函数的现象称为**简并**

🍒 独立本征函数的个数称为**简并度**，这里简并度为 2

↩️ **注** 在讨论上面 1️⃣ 和 3️⃣ 两种情况时，也可以将解的形式分别取为**双曲函数**和**三角函数**，结果是一样的

➡️ 但容易发现，在目前的**周期性边界条件**下，用**指数形式**更加方便

简并

现在，**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 对应于**两个独立**的**本征函数** $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$

这种一个本征值对应于**多个**独立本征函数的现象称为**简并**

独立本征函数的个数称为**简并度**，这里简并度为 2

注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时，也可以将解的形式分别取为**双曲函数**和**三角函数**，结果是一样的

但容易发现，在目前的**周期性边界条件**下，用**指数形式**更加方便

如果对 $\lambda_m = m^2$ 和 $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ 取 $m = 0$，会得到 $\lambda_0 = 0$ 和 $\Phi_0(\phi) = \{1, 0\}$，忽略**平庸解** $\Phi(\phi) \equiv 0$，则与第 1 种情况结果相同

因此，可以把**所有**的**本征值**和**本征函数**统一写成

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

但是应该注意，在上面的求解中，$m = 0$ 和 $m \neq 0$ 两种情况需要分开讨论

而且 $m = 0$ 时**简并度**为 1，$m \neq 0$ 时**简并度**为 2

这组**本征函数族**正是**标准 Fourier 展开**的**基**，在**区间** $[0, 2\pi]$ 上是**正交完备**的

求解 $R(\rho)$

🌵 将**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N})$ 代入 $R(\rho)$ 的常微分方程，得

$$\rho^2 R_m''(\rho) + \rho R_m'(\rho) - m^2 R_m(\rho) = 0$$

Leonhard Euler
(1707–1783)

🥬 这是**高等数学**课中学过的 **Euler 方程**，特点是每一项中**自变量**的**幂次**与**未知函数导数**的**阶相同**

🥦 它虽然不是常系数的微分方程，但很容易求解

🧄 令 $\rho = \mathrm{e}^t$，则 $t = \ln\rho$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho} = \dfrac{1}{\rho}$，有 $\rho\dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}\rho} = \rho\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho}\dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t}$

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}^2\rho} = \rho^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t}\right) = \rho^2\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}t^2}$$

🧅 从而将 R_m 的方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}t^2} - m^2R_m = 0$，它的解是

$$R_m = \{\mathrm{e}^{mt}, \mathrm{e}^{-mt}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0 = \{1, t\} \quad (m = 0)$$

一般解

- 根据 $\rho = \mathrm{e}^t$ 将解中的**自变量**变换回 ρ，得

$$R_m(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0(\rho) = \{1, \ln\rho\} \quad (m = 0)$$

- 再结合

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

- 推出 **Laplace 方程** $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$ 的**一般解**为

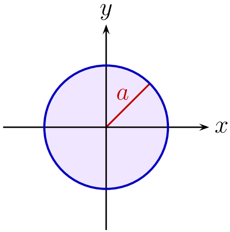
$$\begin{aligned} u(\rho,\phi) &= A_0 + B_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(C_m\cos m\phi + D_m\sin m\phi) \end{aligned}$$

- 其中**系数** A_m 和 B_m $(m \in \mathbb{N})$ 是**常数**，可以通过**边界条件**确定

§5.2 用边界条件确定系数

考虑圆内的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



其中 a 是圆的半径

物理量应该取有限值，而一般解中的 $\ln\rho$ 和 ρ^{-m} 在 $\rho = 0$ 处有奇性，应该舍弃

故 $B_0 = 0,\quad C_m = D_m = 0\quad (m \in \mathbb{N}^+)$

从而一般解简化为

$$u(\rho,\phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m (A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi)$$

这里为了下面计算方便，用 $\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^m$ 代替原来的 ρ^m

圆内问题的解

将解式代入边界条件 $u|_{\rho=a}=F(\phi)$，得

$$u|_{\rho=a}=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\phi+B_m\sin m\phi)=F(\phi)$$

由于本征函数族的完备性，只要适当选取系数，上式总可以得到满足

本征函数族具有正交性，体现为

$$\int_0^{2\pi}\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\sin m\phi\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin n\phi\,\mathrm{d}\phi=\pi\,\delta_{mn},\quad \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=2\pi$$

由此得到

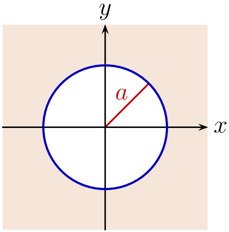
$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\,\mathrm{d}\phi,\quad A_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad B_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$$

给定 $F(\phi)$ 的具体形式，计算上述积分，再将系数代回去，就得到圆内问题的解

圆外问题

类似地，考虑**圆外**的 **Laplace 方程**定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$



由于**一般解**中的 $\ln \rho$ 和 ρ^m 在 $\rho \to \infty$ 处有**奇性**

应该**舍弃**相应的项，故 $B_0 = 0, \quad A_m = B_m = 0 \quad (m \in \mathbb{N}^+)$

从而**一般解简化**为 $u(\rho, \phi) = A_0 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$

由**边界条件**得 $u|_{\rho=a} = A_0 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) = G(\phi)$，定出**系数**为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\,\mathrm{d}\phi, \quad C_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi, \quad D_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$$

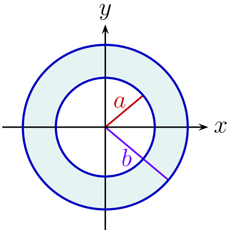
其它情况

如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

比如**环域** $a < \rho < b$ 上的定解问题，则**一般解**

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

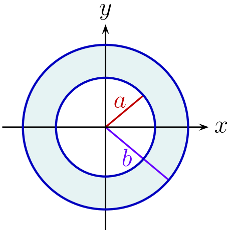
中的**各项均必须保留**



其它情况

如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

比如**环域** $a < \rho < b$ 上的定解问题，则**一般解**

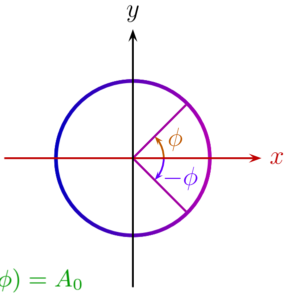


$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

中的**各项均必须保留**

不过，如果问题的**边界条件对** x **轴**具有**反射对称性**

则可以推知 $u(\rho,-\phi) = u(\rho,\phi)$，一般解**简化**为

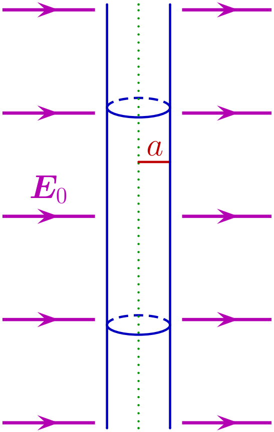


$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

在**全平面**上满足 **Laplace 方程**的解则只能是**常数**，$u(\rho,\phi) = A_0$

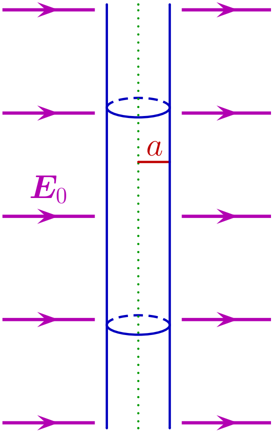
§5.3 均匀电场中的导体圆柱

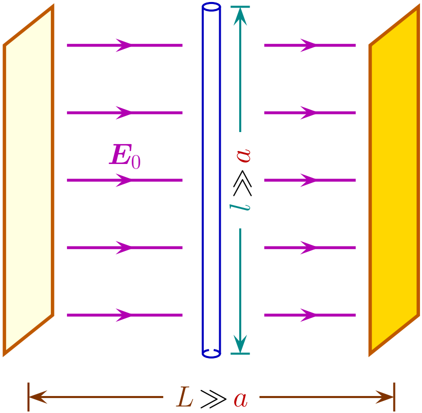
考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



§5.3 均匀电场中的导体圆柱

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

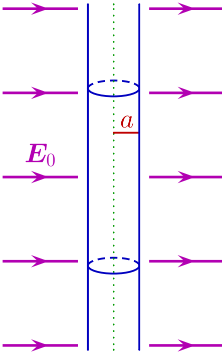




分析

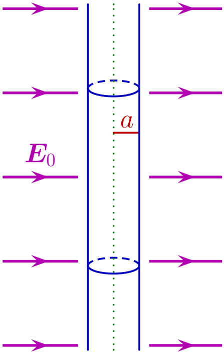
考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力



分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

1 第一步　物理分析

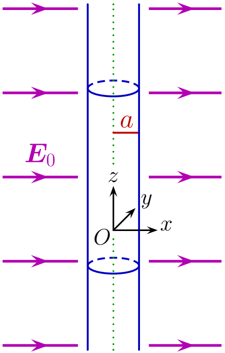
当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即 $u = 0\ (\rho \leq a)$

注　由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是**不合适**的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

1 第一步　物理分析

当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即 $u = 0\ (\rho \le a)$

注　由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是**不合适**的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

2 第二步　建立坐标系

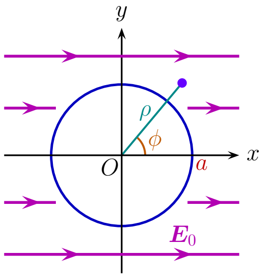
取柱轴为 z 轴，任取柱轴上一点为原点 O，又取电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为 x 轴方向

由于所有条件不随 z 变化，任何垂直于 z 轴的平面上的电势分布都是相同的

不妨选 Oxy 平面为代表来研究，故本题是二维稳定场问题

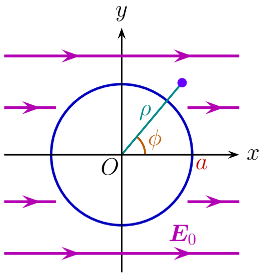
定解问题

- 鉴于**边界**的**形状**，只能采用**极坐标系** (ρ, ϕ)

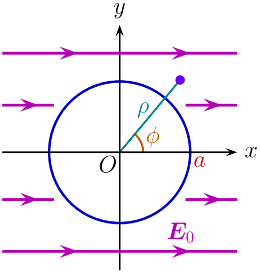


定解问题

- 鉴于边界的形状，只能采用极坐标系 (ρ, ϕ)
- 3 第三步　建立定解问题
- 柱外没有电荷，电势 $u(\rho, \phi)$ 满足 Laplace 方程
- 本题有两个边界，即柱面（圆周）和无穷远处
- 柱面的电势已取为零



定解问题



- 鉴于边界的形状，只能采用极坐标系 (ρ, ϕ)
- 3 第三步　建立定解问题
- 柱外没有电荷，电势 $u(\rho, \phi)$ 满足 Laplace 方程
- 本题有两个边界，即柱面（圆周）和无穷远处
- 柱面的电势已取为零
- 至于无穷远处，$\rho \gg a$，$a \to 0$，而原均匀电场应

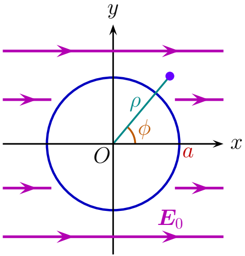
基本不受影响，有 $E_0\,\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{E}_0 = -\nabla u = -\dfrac{\partial u}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x$，故电势为

$$u = -\int E_0\,\mathrm{d}x' = u_0 - E_0 x = u_0 - E_0 \rho\cos\phi$$

- 因为电势零点已经取在柱面上，所以常数 u_0 不能任取，需要通过求解来确定
- 于是列出定解问题 $$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = 0, \qquad u|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0\rho\cos\phi \end{cases}$$

求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0\rho\cos\phi \end{cases}$$



4 第四步　求解定解问题

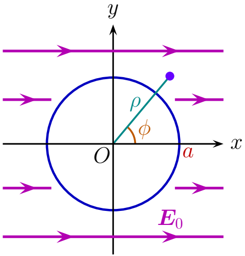
Laplace 方程和**边界条件**都在 $\phi \to -\phi$ **变换**下**不变**

因此本题具有**对 x 轴的反射对称性**，如前所述，**一般解**表达为

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m\rho^m + C_m\rho^{-m})\cos m\phi$$

求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0\rho\cos\phi \end{cases}$$



4 第四步　求解定解问题

Laplace 方程和边界条件都在 $\phi \to -\phi$ 变换下不变

因此本题具有对 x 轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m\rho^m + C_m\rho^{-m})\cos m\phi$$

代入无穷远处的边界条件，得

$$u|_{\rho\to\infty} = A_0 + B_0\ln\rho + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m\rho^m\cos m\phi}^{\supset\, A_1\rho\cos\phi} = u_0 - E_0\rho\cos\phi$$

比较两边，推出 $A_0 = u_0$，$B_0 = 0$，$A_1 = -E_0$，$A_m = 0\ (m > 1)$

定解问题的解

从而得到 $u(\rho,\phi) = u_0 - E_0\rho\cos\phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m\rho^{-m}\cos m\phi$

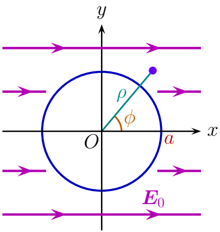
再代入**柱面**的**边界条件**，有

$$\supset \frac{C_1}{a}\cos\phi$$

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a\cos\phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m}\cos m\phi = 0$$

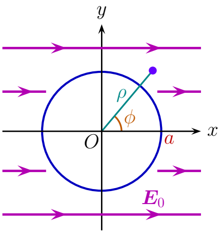
比较两边，推出 $u_0 = 0$， $C_1 = E_0 a^2$， $C_m = 0\ (m > 1)$

最终得到**定解问题**的**解**为 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$



定解问题的解

从而得到 $u(\rho,\phi) = u_0 - E_0\rho\cos\phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m\rho^{-m}\cos m\phi$



再代入柱面的边界条件，有

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a\cos\phi + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m}\cos m\phi}_{\supset \frac{C_1}{a}\cos\phi} = 0$$

比较两边，推出 $u_0 = 0$, $C_1 = E_0 a^2$, $C_m = 0\ (m>1)$

最终得到定解问题的解为 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$

5 第五步　结果分析

解式中第一项是原均匀电场的电势，第二项是由柱面上的感应面电荷产生的

本题的求解区域是圆外 $\rho > a$，即无穷远点的邻域，但电势的求解结果中第一项在 $\rho\to\infty$ 处有奇性，因为均匀电场是由无穷远处的源产生的

求解区域存在电荷，因而前面得出的圆外的解不包含 ρ 的正幂项的结论不成立

不过，无穷远处的源只通过边界条件影响结果，**不作为**非齐次项出现在方程中

感应面电荷

- 根据解式 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$，$\rho$ 方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0\cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2}\cos\phi$$

- 它在柱面附近的值为 $E_\rho\Big|_{\rho=a} = 2E_0\cos\phi$
- 可见，在 $\phi = 0, \pi$ 两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

感应面电荷

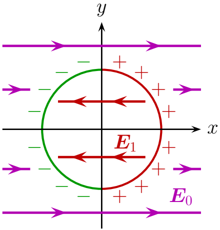
- 根据**解式** $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$，$\rho$ **方向**上的**电场分量**是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0\cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2}\cos\phi$$

- 它在**柱面附近**的值为 $E_\rho\big|_{\rho=a} = 2E_0\cos\phi$
- 可见，在 $\phi = 0, \pi$ 两处，**电场大小**是**原均匀电场**的**两倍**，所以这两处**容易被击穿**
- 根据**电磁学**，**柱面**上**感应电荷**的**面密度**为

$$\sigma(\phi) = -\epsilon_0\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\rho=a} = -\epsilon_0\frac{\partial u}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = \epsilon_0 E_\rho\big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0\cos\phi$$

- 显然，柱面上 $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 部分带**正电**，$\theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 部分带**负电**
- **感应电荷**引起的**电场** E_1 在**柱内抵消外电场** E_0，从而达到**静电平衡**

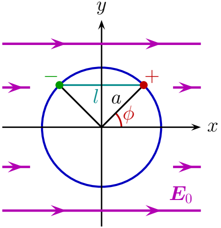


电偶极矩

正如所期望的，柱面上**每单位长度**的**总带电量**为零：

$$Q=\int_0^{2\pi}\sigma(\phi)\,a\,\mathrm{d}\phi=2a\epsilon_0E_0\int_0^{2\pi}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi=0$$

方位角 $\phi\in(-\pi/2,\pi/2)$ 处 $\mathrm{d}\phi$ **角度**内的**元电荷** $\mathrm{d}q=\sigma(\phi)\,a\,\mathrm{d}\phi$ 与**方位角** $\pi-\phi$ 处的相应**元电荷**形成**元电偶极子**



两个元电荷的**距离**为 $l=2a\cos\phi$，元电偶极子的**偶极矩**为

$$\mathrm{d}p=l\,\mathrm{d}q=2a\cos\phi\cdot2\epsilon_0E_0\cos\phi\,a\mathrm{d}\phi=4a^2\epsilon_0E_0\cos^2\phi\mathrm{d}\phi$$

从而，**感应面电荷**引起的**沿 x 轴正向**的**总电偶极矩**为

$$p=\int\mathrm{d}p=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4a^2\epsilon_0E_0\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi=2a^2\epsilon_0E_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos2\phi+1)\,\mathrm{d}\phi$$

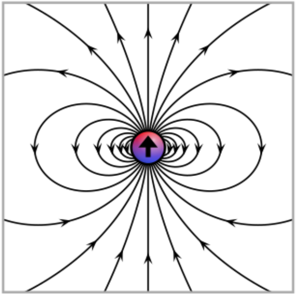
$$=2a^2\epsilon_0E_0\left(\frac{1}{2}\sin2\phi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\phi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)=2\pi a^2\epsilon_0E_0$$

理想电偶极子

- 若 $l \to 0$、$q \to \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是理想电偶极子
- 根据电磁学，一个二维理想电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 产生的电势为 $u_{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$
- 将以上沿 x 轴正向的总电偶极矩代入，得

$$u_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{2\pi a^2\epsilon_0 E_0\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho}\cos\theta$$

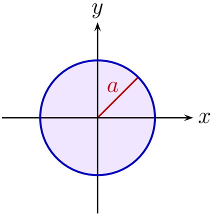
- 这与解式 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$ 中的第二项相同
- 因此，感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子



§5.4 Poisson 方程的处理

- 本小节介绍 Poisson 方程 (非齐次稳定场方程) 的处理方法
- 考虑圆内的 Poisson 方程定解问题

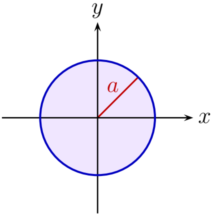
$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = f(\rho,\phi) \qquad (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



§5.4 Poisson 方程的处理

本小节介绍 Poisson 方程（非齐次稳定场方程）的处理方法

考虑圆内的 Poisson 方程定解问题



$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = f(\rho,\phi) \qquad (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$

方法一　如果 $f(\rho,\phi)$ 的形式比较简单，则可以通过观察和试探寻找一个简单函数 $u_0(\rho,\phi)$，使得 $\nabla^2 u_0 = f(\rho,\phi)$，然后令 $u(\rho,\phi) = v(\rho,\phi) + u_0(\rho,\phi)$

从而 $v(\rho,\phi)$ 满足定解问题
$$\begin{cases} \nabla^2 v = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (\rho < a) \\ v|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$

其中 $G(\phi) = u|_{\rho=a} - u_0|_{\rho=a} = F(\phi) - u_0(a,\phi)$

$u_0(\rho,\phi)$ **不是**唯一的，因为 $u_0(\rho,\phi)$ 加上任一调和函数（即 Laplace 方程的解，如 $\rho^m\cos m\phi$ 或 $\rho^m\sin m\phi$）之后仍然满足要求，应该通过选择使 $G(\phi)$ 尽可能简单

方法二

- 方法二　如果 $f(\rho,\phi)$ 的形式比较复杂，则难以找到 $u_0(\rho,\phi)$
- 这时应该使用本征函数展开法，将未知函数 $u(\rho,\phi)$ 展开为

$$u(\rho,\phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho)\cos m\phi + B_m(\rho)\sin m\phi]$$

- 其中 $A_0(\rho)$、$A_m(\rho)$、$B_m(\rho)$ 是未知函数
- 这个展开式满足周期性边界条件 $u(\rho,\phi+2\pi) = u(\rho,\phi)$

方法二

方法二 如果 $f(\rho,\phi)$ 的形式比较复杂，则难以找到 $u_0(\rho,\phi)$

这时应该使用本征函数展开法，将未知函数 $u(\rho,\phi)$ 展开为

$$u(\rho,\phi)=A_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m(\rho)\cos m\phi+B_m(\rho)\sin m\phi\right]$$

其中 $A_0(\rho)$、$A_m(\rho)$、$B_m(\rho)$ 是未知函数

这个展开式满足周期性边界条件 $u(\rho,\phi+2\pi)=u(\rho,\phi)$

将非齐次项和边界条件也作类似展开：

$$f(\rho,\phi)=a_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m(\rho)\cos m\phi+b_m(\rho)\sin m\phi\right]$$

$$F(\phi)=\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha_m\cos m\phi+\beta_m\sin m\phi\right)$$

已知函数：

$$a_0(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\,\mathrm{d}\phi,\quad a_m(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad b_m(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$$

已知常数：$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\,\mathrm{d}\phi,\quad \alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad \beta_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$

常微分方程

将这些展开式代入定解问题，用撇号代表对 ρ 求导，利用

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{\rho}(\rho A_0')' + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(A_m'' + \frac{1}{\rho}A_m' - \frac{m^2}{\rho^2}A_m\right)\cos m\phi + \left(B_m'' + \frac{1}{\rho}B_m' - \frac{m^2}{\rho^2}B_m\right)\sin m\phi\right]$$

推出未知函数 $A_0(\rho)$、$A_m(\rho)$ 和 $B_m(\rho)$ 满足的常微分方程和边界条件：

$$(\rho A_0')' = \rho\, a_0, \quad \rho^2 A_m'' + \rho A_m' - m^2 A_m = \rho^2 a_m, \quad \rho^2 B_m'' + \rho B_m' - m^2 B_m = \rho^2 b_m$$

$$A_0(a) = \alpha_0, \qquad A_m(a) = \alpha_m, \qquad B_m(a) = \beta_m$$

这些常微分方程不难求解，$A_0(\rho)$ 的方程可以直接积分

$A_m(\rho)$ 和 $B_m(\rho)$ 的方程相应的齐次方程为 **Euler 方程**，容易求出通解，对应于非齐次项的特解可以用常数变易法求出

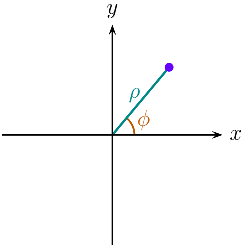
但是，对于每个未知函数，边界条件只有一个，**不足以**确定通解中的两个任意常数

自然边界条件

- 实际上，还存在另一组边界条件
- 在平面极坐标系中，$\rho=0$ 处 ϕ 没有定义，故 $\rho=0$ 是坐标系的奇点
- 展开式 $u(\rho,\phi)=A_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}[A_m(\rho)\cos m\phi+B_m(\rho)\sin m\phi]$ 本身就要求

$$A_m(0)=0,\quad B_m(0)=0,\quad m\in\mathbb{N}^+$$

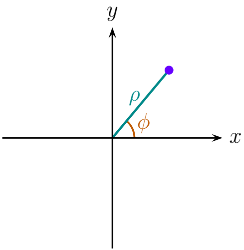
- 否则 $u(\rho,\phi)$ 在 $\rho=0$ 处没有定义，这是一组自然边界条件



自然边界条件

- 实际上，还存在**另一组边界条件**
- 在**平面极坐标系**中，$\rho = 0$ 处 ϕ **没有定义**，故 $\rho = 0$ 是坐标系的**奇点**
- **展开式** $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho)\cos m\phi + B_m(\rho)\sin m\phi]$ 本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$



- 否则 $u(\rho, \phi)$ 在 $\rho = 0$ 处**没有定义**，这是一组**自然边界条件**
- 对**展开式**第一项 $A_0(\rho)$ 没有类似要求，但它必须**有限**
- 即满足**自然边界条件**

$$|A_0(0)| < \infty$$

- 注意，上式并不意味着 $A_0(\rho)$ 在 $\rho \neq 0$ 处可以不必有限
- 只不过**偏微分方程**的**解**在**坐标系奇点** $\rho = 0$ 处很容易出现**奇性**，需要对其**有限性**特别加以强调

求解 $A_0(\rho)$

下面求解 $A_0(\rho)$ 的常微分方程边值问题 $\begin{cases} (\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

方程 $(\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho)$ 对 ρ 积分，得 $\rho A_0' = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1 + c_1$

其中 c_1 为常数，从而 $A_0' = \dfrac{1}{\rho}\int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1 + \dfrac{c_1}{\rho}$，再次对 ρ 积分，得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2 + c_1 \ln\rho + c_2, \quad \text{其中 } c_2 \text{ 为常数}$$

求解 $A_0(\rho)$

下面求解 $A_0(\rho)$ 的常微分方程边值问题 $\begin{cases} (\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

方程 $(\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho)$ 对 ρ 积分，得 $\rho A_0' = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1 + c_1$

其中 c_1 为常数，从而 $A_0' = \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1 + \dfrac{c_1}{\rho}$，再次对 ρ 积分，得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2 + c_1 \ln\rho + c_2, \quad \text{其中 } c_2 \text{ 为常数}$$

由于 $\ln\rho$ 在 $\rho = 0$ 处发散，自然边界条件 $|A_0(0)| < \infty$ 意味着 $c_1 = 0$

代入 $\rho = a$ 处的边界条件，得 $\alpha_0 = A_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2 + c_2$

故 $c_2 = \alpha_0 - \displaystyle\int_0^a \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2$，代回去，得到问题的解为

$$A_0(\rho) = \alpha_0 - \int_\rho^a \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2$$