数 学 物 理 方 法

第一章　复变函数与解析函数

第 1 节至第 3 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 9 月 7 日

数学物理方法课程

- 本课程包括两部分内容：复变函数与数学物理方程
- 复变函数是微积分的内容从实变量到复变量的扩展
- 它是进一步学习数学物理方程和特殊函数的基础
- 其本身在物理、力学和工程问题中也具有多方面的应用

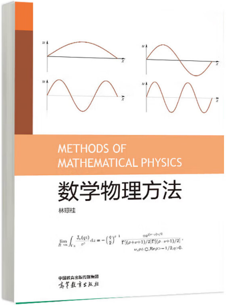
数学物理方法课程

- 本课程包括两部分内容：复变函数与数学物理方程
- 复变函数是微积分的内容从实变量到复变量的扩展
- 它是进一步学习数学物理方程和特殊函数的基础
- 其本身在物理、力学和工程问题中也具有多方面的应用
- 数学物理方程主要研究物理或工程问题中所涉及的各种偏微分方程和积分方程
- 本课程只研究偏微分方程，主要是二阶线性偏微分方程，包括波动方程、输运方程和稳定场方程
- 在偏微分方程的导出、求解和对解的物理分析三个方面，求解是课程的重点内容
- 本课程所涉及的方法在经典物理、近代物理和工程技术中都有广泛的应用

主讲教材

主讲教材：林琼桂，《数学物理方法》，高等教育出版社，2024

- ♈ 第一章　复变函数与解析函数
- ♉ 第二章　复变函数的积分
- ♊ 第三章　解析函数的幂级数展开
- ♋ 第四章　解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点
- ♌ 第五章　留数定理及其应用
- ♍ 第六章　数学物理方程的导出
- ♎ 第七章　分离变量法
- ♏ 第八章　Fourier 变换法
- ♐ 第九章　正交曲线坐标系中的分离变量
- ♑ 第十章　二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题
- ♒ 第十一章　球函数
- ♓ 第十二章　柱函数初步
- ⛎ 第十三章　Green 函数法



书中**拓展阅读内容（选读）**

- 标题前面加 * 号的章节
- 正常章节中的仿宋体小字段落

辅助教材和参考书

辅助教材

1. 梁昆淼编，刘法、缪国庆修订，《数学物理方法》，第 4 版，高等教育出版社，2010
2. 吴崇试，《数学物理方法》，高等教育出版社，2015

参考书

1. 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，第 2 版，高等教育出版社，北京，2002
2. 姚端正、梁家宝，《数学物理方法》，第 3 版，科学出版社，北京，2010
3. 邵惠民，《数学物理方法》，第 2 版，科学出版社，北京，2010
4. 杨孔庆，《数学物理方法》，高等教育出版社，北京，2012
5. 郭敦仁，《数学物理方法》，第 2 版，高等教育出版社，北京，1991
6. 钟玉泉，《复变函数论》，第 3 版，高等教育出版社，北京，2004

更多参考书

7. 王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，北京大学出版社，北京，2000
8. **E. T. Whittaker** and **G. N. Watson**, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927
9. **R. Courant** and **D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics*, New York, Interscience, 1953；**R. 柯朗、D. 希尔伯特著**，钱敏、郭敦仁译，《数学物理方法》，北京，科学出版社，2011
10. **S. Hassani**, *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*, 2nd ed., New York, Springer, 2013
11. 胡嗣柱、徐建军，《数学物理方法解题指导》，北京，高等教育出版社，1997
12. 周治宁、吴崇试、钟毓澍，《数学物理方法习题指导》，北京，北京大学出版社，2004

第一章　复变函数与解析函数

§1　复数

§1.1　复数的定义

- 形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数** (complex number)，其中 $x\in\mathbb{R}$，$y\in\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ 表示**实数的集合**；**虚数单位** $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，满足 $\mathrm{i}^2=-1$；**复数的集合**记作 $\mathbb{C}$
- x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作 $x=\operatorname{Re}z$ 和 $y=\operatorname{Im}z$
- 虚部为零的复数就是**实数**，实部为零而虚部非零的复数称为**纯虚数**
- **复数** $z^*=x-\mathrm{i}y$ 称为 z 的**共轭** (conjugate) **复数**或**复共轭**，亦记作 $\bar{z}$

第一章　复变函数与解析函数

§1　复数

§1.1　复数的定义

- 形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为**复数** (complex number)，其中 $x \in \mathbb{R}$，$y \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ 表示**实数的集合**；**虚数单位** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$；**复数的集合**记作 $\mathbb{C}$
- x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作 $x = \mathrm{Re}\, z$ 和 $y = \mathrm{Im}\, z$
- 虚部为零的复数就是**实数**，实部为零而虚部非零的复数称为**纯虚数**
- **复数** $z^* = x - \mathrm{i}y$ 称为 z 的**共轭** (conjugate) **复数**或**复共轭**，亦记作 $\bar{z}$
- **注**　一般认为 z^* 和 z 是**互相独立**的变量，犹如 x 和 y 是互相独立的变量
- 事实上，(z^*, z) 和 (x, y) 两组变量可以互相**线性**表出：

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^*)$$

- 给定 z，就能按照 $z^* = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, z$ 的规则得出 z，因此可将 z^* 看作 z **的函数**
- 但这**并非简单**的函数，在 **§3.1** 会看到，z^* 看作 z 的函数**处处连续**却**处处不可导**

§1.2 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的四则运算规则为

$$
\begin{aligned}
z_1 \pm z_2 &= (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \\
z_1 z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}
\end{aligned}
$$

理解一 利用实数的四则运算和 $\mathrm{i}^2 = -1$ 即可得到这些结果：

$$
z_1 z_2 = x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}x_2y_1 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)
$$

$$
\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}
$$

§1.2 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的四则运算规则为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

理解一　利用实数的四则运算和 $\mathrm{i}^2 = -1$ 即可得到这些结果：

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

理解二　将以上结果当作运算的定义，则可以验证实数的四则运算规则如交换律、结合律、分配律等均对复数成立，如 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$、$z_1 z_2 = z_2 z_1$，且 $\mathrm{i}^2 = -1$

这正是所期望的，因为复数包含实数，它的运算规则当然要与实数运算规则相容

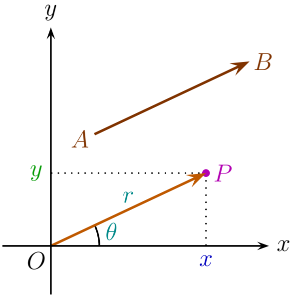
注　由上面的加法规则可见复数的加法与平面上矢量的加法一致

§1.3 复数的各种表示法

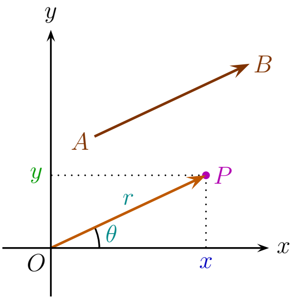
1. **代数表示**：$z = x + \mathrm{i}y$
2. **几何表示**：有两种表示方式

① 用 xy **平面**上的**点** P 来表示**复数** z

- P 的**横坐标**为 $x = \operatorname{Re} z$，**纵坐标**为 $y = \operatorname{Im} z$
- 这样复数与平面上的点是**一一对应**的
- 所以该 xy 平面亦称为**复平面**



§1.3 复数的各种表示法



1. **代数表示**：$z = x + \mathrm{i}y$
2. **几何表示**：有两种表示方式

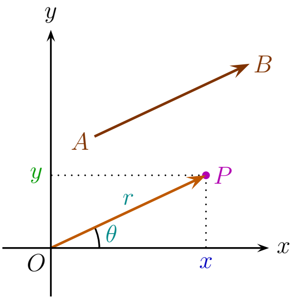
① 用 xy **平面**上的**点** P 来表示**复数** z

- P 的**横坐标**为 $x = \operatorname{Re} z$，**纵坐标**为 $y = \operatorname{Im} z$
- 这样复数与平面上的点是**一一对应**的
- 所以该 xy 平面亦称为**复平面**

② 用**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 来表示**复数** z

- **矢量** $\overrightarrow{OP}$ 在 x **轴**上的**投影**为 $x = \operatorname{Re} z$，在 y **轴**上的**投影**为 $y = \operatorname{Im} z$
- 这样复数与平面上的矢量也是**一一对应**的
- 注意：起点不同，但**方向**和**长度相同**的矢量是**等价**的
- 图上**矢量** $\overrightarrow{AB}$ 与**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 表示**同一复数**

§1.3 复数的各种表示法



1. **代数表示**：$z = x + \mathrm{i}y$
2. **几何表示**：有两种表示方式
   - ① 用 xy **平面**上的**点** P 来表示**复数** z
     - P 的**横坐标**为 $x = \operatorname{Re} z$，**纵坐标**为 $y = \operatorname{Im} z$
     - 这样复数与平面上的点是**一一对应**的
     - 所以该 xy 平面亦称为**复平面**
   - ② 用**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 来表示**复数** z
     - **矢量** $\overrightarrow{OP}$ 在 x **轴**上的**投影**为 $x = \operatorname{Re} z$，在 y **轴**上的**投影**为 $y = \operatorname{Im} z$
     - 这样复数与平面上的矢量也是**一一对应**的
     - 注意：起点不同，但**方向**和**长度相同**的矢量是**等价**的
     - 图上**矢量** $\overrightarrow{AB}$ 与**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 表示**同一复数**
3. **三角表示**：利用**点** P 的**极坐标** (r, θ)，以及 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，得到

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

复数的指数表示

4 **指数表示**：定义**纯虚数** $\mathrm{i}\theta$ 的**指数** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \equiv \exp(\mathrm{i}\theta) \equiv \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，将**复数** z 表达为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- r 称为复数 z 的**模** (module)，θ 称为**辐角** (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足} \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 模 $|z|$ 就是 z 对应的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的**长度**。

复数的指数表示

4 **指数表示**：定义**纯虚数** $\mathrm{i}\theta$ 的**指数** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \equiv \exp(\mathrm{i}\theta) \equiv \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，将**复数** z 表达为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- r 称为复数 z 的**模** (module)，θ 称为**辐角** (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足}\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 模 $|z|$ 就是 z 对应的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的**长度**。根据 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

- 可见，**宗量**为**纯虚数**的指数函数与**实变量**的指数函数具有**同样的运算性质**

注　函数的**自变量**可以是一个复杂的对象，这时通常称为**宗量** (argument)

复数的指数表示

4 **指数表示**：定义**纯虚数** $\mathrm{i}\theta$ 的**指数** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \equiv \exp(\mathrm{i}\theta) \equiv \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，将**复数** z 表达为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- r 称为复数 z 的**模** (module)，θ 称为**辐角** (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足} \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 模 $|z|$ 就是 z 对应的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的**长度**。根据 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

- 可见，**宗量**为**纯虚数**的指数函数与**实变量**的指数函数具有**同样的运算性质**

注　函数的**自变量**可以是一个复杂的对象，这时通常称为**宗量** (argument)

- 若 θ 是 z 的**辐角**，则 $\theta + 2n\pi$ 也是 z 的**辐角**，其中 $n \in \mathbb{Z}$，而 $\mathbb{Z}$ 是**整数的集合**
- 若**限制** $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$，则所得**单值分支**称为**主值分支**，记作 $\arg z$

用级数理解 Euler 公式

🍆 **Euler 公式** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 也可以用**级数**理解

🥜 由 **Taylor 级数** $e^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$ 和 $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ 得

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}
$$

Leonhard Euler
(1707–1783)

用级数理解 Euler 公式

Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 也可以用级数理解

由 Taylor 级数 $\mathrm{e}^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$ 和 $\mathrm{i}^{2k} = (\mathrm{i}^2)^k = (-1)^k$ 得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Leonhard Euler
(1707–1783)

在指数表示下，复数的乘法和除法变得非常简单：

$$z_1 z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \qquad |z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

此外，有 $z^* = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^* = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^* = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，故

$$|z^*| = r = |z|, \qquad zz^* = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = r^2 = |z|^2$$

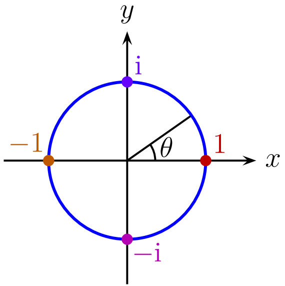
复数表示法举例

- $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ 的**模为** 1，对 θ 具有 2π **周期**
- 它对应于复平面上的**单位圆周**

$$e^{0i} = e^{2\pi i} = 1, \qquad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$$

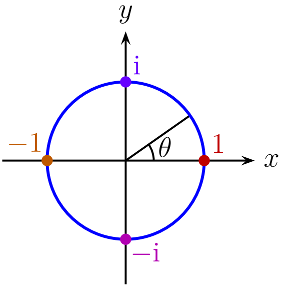
$$e^{\pi i/2} = e^{-3\pi i/2} = i, \quad e^{3\pi i/2} = e^{-\pi i/2} = -i$$

- 对任意复数 z，有 $|ze^{i\theta}| = |z|$，特别地，$|-z| = |z|$



复数表示法举例

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ 的**模为** 1，对 θ 具有 2π **周期**
- 它对应于复平面上的**单位圆周**



$$\mathrm{e}^{0\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1, \qquad \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = -1$$

$$\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i}$$

- 对任意复数 z，有 $|z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = |z|$，特别地，$|-z| = |z|$

- $z = 3 + 4\mathrm{i}$ 的模为 $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，幅角可取为 $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{4}{3}$，则

$$z = 5\exp\left(\mathrm{i}\arctan\frac{4}{3}\right) = 5\cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + 5\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right)$$

- $z = 2\mathrm{i}$ 可表示为

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

§1.4 乘方与开方

乘方是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

开方是乘方的逆运算，其运算结果是多值的，设 $z - a = \rho\, e^{i\phi}$，则

$$\sqrt[n]{z-a} \equiv (z-a)^{1/n} = (\rho\, e^{i\phi})^{1/n} = [\rho\, e^{i(\phi+2k\pi)}]^{1/n} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\phi+2k\pi)/n},$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-1$$

当 k 取其它整数时，所得结果与以上重复，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n 个不同的根；$-1 = e^{\pi i}$ 表明 $\sqrt{-1}$ 的 2 个根可取为 $e^{\pi i/2} = i$ 和 $e^{3\pi i/2} = -i$

§1.4 乘方与开方

- **乘方**是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

- **开方**是**乘方**的**逆运算**，其运算结果是**多值**的，设 $z - a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，则

$$\sqrt[n]{z-a} \equiv (z-a)^{1/n} = (\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^{1/n} = [\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}]^{1/n} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)/n},$$
$$k = 0, 1, \cdots, n-1$$

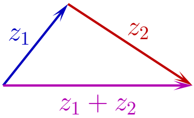
- 当 k 取**其它整数**时，所得结果与以上**重复**，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n **个不同的根**；$-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ 表明 $\sqrt{-1}$ 的 2 个根可取为 $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{i}$ 和 $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i}$
- **根式函数** $\sqrt[n]{z-a}$ 的多值性源于**宗量** (此外为 $z-a$) 的**辐角多值性**，而非**自变量** (此处为 z) 的辐角多值性
- 如果取 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2j\pi)}$，$z - a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}$，其中 θ、ϕ 均为主值，而 $j, k \in \mathbb{Z}$，则 $\sqrt[n]{z-a}$ 的函数值**只与 k 有关**，而**与 j 无关**
- 注意 ϕ 是 θ 的函数 (当然还依赖于 r 和 a)，但是 k 与 j 是**彼此独立**的，k 的取值不依赖于 j 的取值

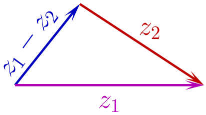
§1.5 三角不等式

三角不等式有两条：

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$





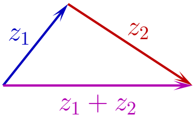
由于复数的加法与矢量的加法一样，上面两式就是关于三角形边长的不等式

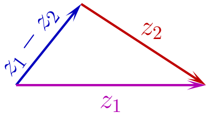
§1.5 三角不等式

三角不等式有两条：

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$$





由于复数的加法与矢量的加法一样，上面两式就是关于三角形边长的不等式

第一式的证明 利用 $\mathrm{Re}(z_1^* z_2) \le |z_1^* z_2| = |z_1||z_2|$ 得

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1^*+z_2^*)(z_1+z_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1^* z_2+z_1 z_2^* \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1^* z_2)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1^* z_2)-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1^* z_2) \\
&\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2
\end{aligned}$$

对上式两边开方即得第一式

第一式中等号成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z_1^* z_2)=|z_1||z_2|$，而

$$\mathrm{Re}(z_1^* z_2) = \mathrm{Re}\left[r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}\right] = r_1 r_2 \cos(\theta_2-\theta_1) \le r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$

可见，此充要条件是两个复数中有一个为 0，或两者方向相同

第二条三角不等式的证明

第二式的证明 由**第一式** $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ 得

$$|z_1| = |(z_1-z_2)+z_2| \le |z_1-z_2|+|z_2|$$

也就是 $|z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|$

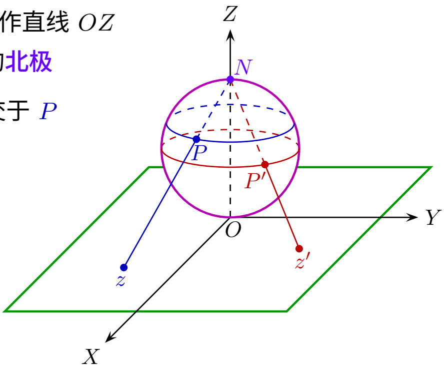
同理有 $|z_2|-|z_1| \le |z_2-z_1|$，故 $|z_1|-|z_2| \ge -|z_1-z_2|$

合起来，得 $-|z_1-z_2| \le |z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|$

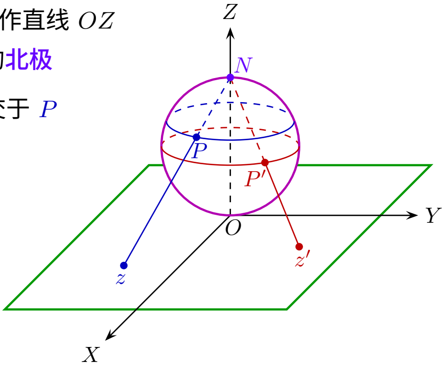
这等价于**第二式** $|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$

§1.6 复球面与无穷远点

- 作**球面**与**复平面**相切于原点 O，过 O 作直线 OZ 垂直于**复平面**，与**球面**交于 N，N 即球的**北极**
- 设 z 为任一复数，连接 Nz，与**球面**交于 P
- 易见 z 与 P **一一对应**
- 故**复数** z 亦可用**球面**上的**点** P 表示
- 该球面称为**复球面**



§1.6 复球面与无穷远点



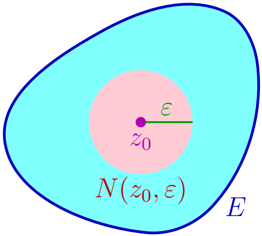
- 作球面与复平面相切于原点 O，过 O 作直线 OZ 垂直于复平面，与球面交于 N，N 即球的**北极**
- 设 z 为任一复数，连接 Nz，与球面交于 P
- 易见 z 与 P **一一对应**
- 故**复数** z 亦可用**球面**上的**点** P 表示
- 该球面称为**复球面**
- 当 $z \to \infty$ 时，$P \to N$
- 当 $z' \to \infty$ 时，亦有 $P' \to N$
- 因此，作为 N 的**对应点**，把**复平面**上的**无穷远点**当作一点，记作 ∞
- 包括 ∞ 的复平面称为**扩充复平面**
- **注** 将无穷远点当作一点是一种**规定**
- 以上复球面的作法**不是唯一**的，另一种常见的作法是将球心放在原点 O

§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

🛁 由于**复变函数**总是定义在**复平面**的**点集**上，下面介绍关于**点集**的几个基本概念

1️⃣ **邻域** (neighborhood)：由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 **的** ε **邻域**，记作 $N(z_0, \varepsilon)$，它是以 z_0 为**圆心**、ε 为**半径**的**开圆**（不包含圆周）



§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念

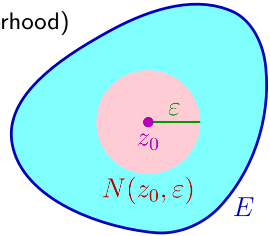
1 邻域 (neighborhood)：由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 的 ε 邻域，记作 $N(z_0, \varepsilon)$，它是以 z_0 为圆心、ε 为半径的开圆 (不包含圆周)

注　这一定义是一维空间 (实轴) 的邻域概念——开区间——的推广

当然也可**等价**地将邻域定义为以 z_0 为中心的正方形内部，不过以上定义是方便的

在以上定义中并没有对 ε 的大小作任何规定，因此邻域可以很大

邻域去掉圆心后所得点集称为去心邻域 (deleted neighborhood)



§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念

1 **邻域** (neighborhood)：由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 **的** ε **邻域**，记作 $N(z_0, \varepsilon)$，它是以 z_0 为圆心、ε 为半径的开圆 (不包含圆周)

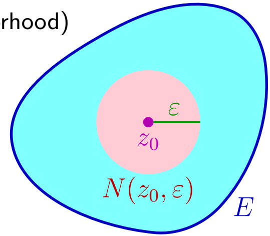
注 这一定义是一维空间 (实轴) 的邻域概念——开区间——的推广

当然也可**等价**地将邻域定义为以 z_0 为中心的正方形内部，不过以上定义是方便的

在以上定义中并没有对 ε 的大小作任何规定，因此邻域可以很大

邻域去掉圆心后所得点集称为去心邻域 (deleted neighborhood)

2 **内点** (interior point)：设 E 为点集，$z_0 \in E$，若存在 $\varepsilon > 0$，使 $N(z_0, \varepsilon) \subset E$，则 z_0 称为 E 的内点



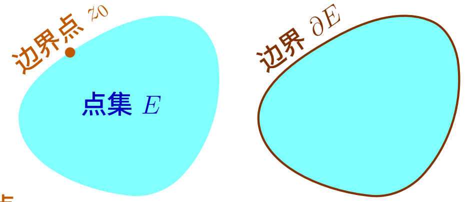
粗略地说，内点就是该点及其周围全属于点集

易见一个邻域内的任意点均为该邻域的内点

开集、边界点和边界

3 **开集** (open set)：若点集 E 中的点**皆为内点**，则称 E 为**开集**

显然，**邻域**就是**开集**



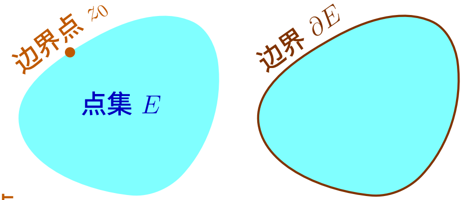
4 **边界点** (boundary point)：若点 z_0 的**任一邻域**内**既有**属于点集 E 的点，**又有**不属于 E 的点，则 z_0 为 E 的**边界点**

5 **边界** (boundary)：E 的**全部边界点**组成的点集称为 E 的**边界**，记作 ∂E

开集、边界点和边界

3 **开集** (open set)：若点集 E 中的点**皆为内点**，则称 E 为**开集**

显然，**邻域**就是**开集**



4 **边界点** (boundary point)：若**点** z_0 的**任一邻域**内**既有**属于点集 E 的点，**又有**不属于 E 的点，则 z_0 为 E 的**边界点**

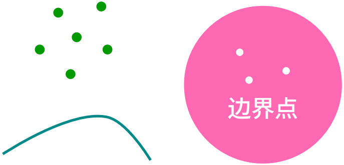
5 **边界** (boundary)：E 的**全部边界点**组成的点集称为 E 的**边界**，记作 ∂E

注 **边界点** z_0 本身**可以不属于**点集 E；**开集**则必不包含其**边界点**

如果一点集由**有限个点**组成，或由**一弧段**组成，则所有的点均为**边界点**

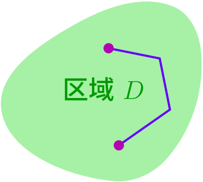
开圆或**闭圆**（包含圆周的圆）的**边界**都是**圆周**

若点集 E 是由**开圆**（或**闭圆**）内去掉若干点后所余部分构成的，则去掉的点均为**边界点**



区域

6 **区域** (domain)：非空点集 D 若满足以下两个条件，则称为**区域**



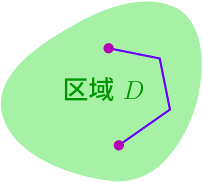
1. D 是**开集**
2. D 是**连通**的，即 D 中任意两点均可用**全属于 D 的折线连接**

注　区域是一种特殊的点集，是复变函数论中**最重要**的几何概念

显然，**邻域**或**开圆**就是**区域**

区域

6 **区域** (domain)：非空点集 D 若满足以下两个条件，则称为**区域**

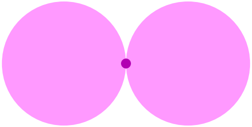


1. D 是**开集**
2. D 是**连通**的，即 D 中任意两点均可用**全属于 D 的折线连接**

注 区域是一种特殊的点集，是复变函数论中**最重要**的几何概念

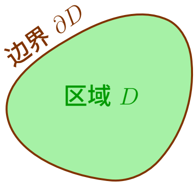
- 显然，**邻域**或**开圆**就是**区域**
- 两个**不相交**的**开圆**的**并集**仍是**开集**，但**不是区域**，哪怕两个圆的圆周**相切**

- 在相切的情况下，**两个圆加上切点仍不是区域**
- 因为**切点**是**边界点**，所以加上边界点以后虽然**连通**，但**不再是开集**



闭域、单通与复通区域

7 闭域 (closed domain)：区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域，记作 $\bar{D}$，即 $\bar{D} = D + \partial D$

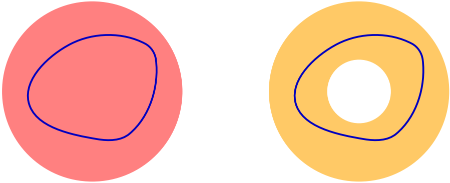


闭域 $\bar{D} = D + \partial D$

注 区域都是开集，不包括边界

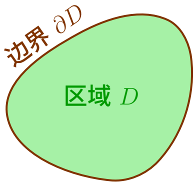
以后提到圆或环时总不包括边界

若包括边界，则称为闭圆或闭环



闭域、单通与复通区域

7 闭域 (closed domain)：区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域，记作 $\bar{D}$，即 $\bar{D} = D + \partial D$



闭域 $\bar{D} = D + \partial D$

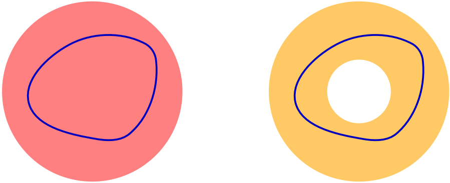
注　区域都是开集，不包括边界

以后提到圆或环时总不包括边界

若包括边界，则称为闭圆或闭环

8 单通与复通区域：在区域 D 内画任意简单闭曲线，若其内部全含于 D，则称 D 为单通 (simply connected) 区域，否则称为复通 (multiply connected) 区域

注　圆是单通区域，而环是复通区域

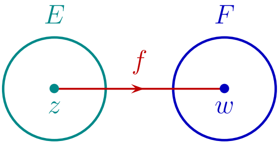


§2.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

设 E 是复平面上的点集，$\forall z \in E$，若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$



单值函数 $w = f(z)$

§2.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以**复数**为**自变量**的函数，其**函数值**通常也是**复数**

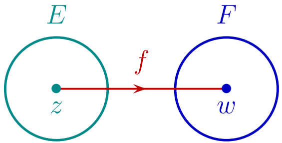
它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

设 E 是复平面上的点集，$\forall\, z \in E$，若按**规则** f 有**唯一**的**复数** w 与之对应，则称在点集 E 上确定了**单值函数** $w = f(z)$

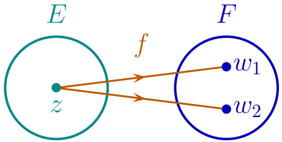
若对 $z \in E$ 有**多个** (可以**无穷多**) **复数** w 与之对应，则称在点集 E 上确定了**多值函数** $w = f(z)$

E 称为函数 $w = f(z)$ 的**定义域**

$F = \{f(z)|z \in E\}$ 称为其**值域**



单值函数 $w = f(z)$



多值函数 $w = f(z)$

§2.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

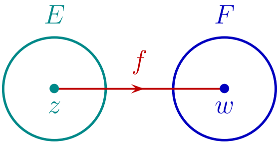
它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

设 E 是复平面上的点集，$\forall\, z \in E$，若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$

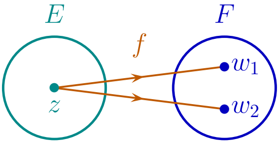
若对 $z \in E$ 有多个 (可以无穷多) 复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了多值函数 $w = f(z)$

E 称为函数 $w = f(z)$ 的定义域

$F = \{f(z) | z \in E\}$ 称为其值域



单值函数 $w = f(z)$



多值函数 $w = f(z)$

记 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$

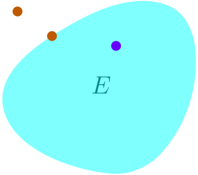
所以一个复变函数 $f(z)$ 等价于两个二元实变函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$，它给出了 z 平面到 w 平面的映射 (map) 或变换 (transform)

§2.3 复变函数的极限

设**复变函数** $w=f(z)$ 定义在**点集** E 上，z_0 是 E 的**聚点**

如果 $\forall\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$



注 若在 z_0 的**任意小邻域**内均有**属于** E 而**异于** z_0 的点(等价地，在 z_0 的**任意小去心邻域**内均有**属于** E 的点)，则称 z_0 为 E 的**聚点** (accumulation point)，它本身**可以不属于** E

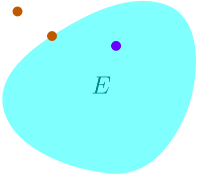
内点就是典型的聚点；**边界点**则**可能是**聚点，也**可能不是**聚点

§2.3 复变函数的极限

设**复变函数** $w=f(z)$ 定义在**点集** E 上，z_0 是 E 的**聚点**

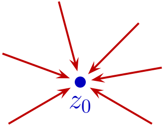
如果 $\forall\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$



注 若在 z_0 的**任意小邻域**内均有**属于** E 而**异于** z_0 的点 (等价地，在 z_0 的**任意小去心邻域**内均有**属于** E 的点)，则称 z_0 为 E 的**聚点** (accumulation point)，它本身**可以不属于** E

内点就是典型的聚点；**边界点**则**可能是**聚点，也**可能不是**聚点



在**复平面**上，$z\to z_0$ 的方式有**无穷多种**

而在**实轴**上，$x\to x_0$ 的方式只有**两种**，即 $x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$

以上要求 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ 成立的范围是 $0<|z-z_0|<\delta$，而不是 $|z-z_0|<\delta$

这对于函数的要求是**较弱**而非**较强**，因为这允许 $f(z_0)$ 与 w_0 **相差甚大**，甚至允许 $f(z)$ 在 z_0 **没有定义** (z_0 可以不在定义域 E 内)

§2.4 复变函数的连续性

复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上，$z_0 \in E$，如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续

注　易见连续就是不仅要有极限，而且该极限要等于该点处的函数值

显然，$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续

z_0 应该是 E 的聚点，否则极限没有意义，也就谈不上连续与否

若 $f(z)$ 在点集 E 上的各点连续，则称 $f(z)$ 在点集 E 上连续

§3 解析函数

- 🐷 解析函数是复变函数中最重要的一类
- 🐹 它的特点是可导或可微
- 🐔 为了研究解析函数，需要先定义复变函数的导数
- 🐸 今后研究的复变函数主要定义在区域上

§3.1 复变函数的导数

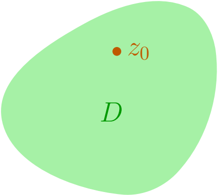
复变函数 $w=f(z)$ 定义在**区域** D 上，$z_0 \in D$，如果**极限**

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且**有限**，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处**可导**或**可微** (differentiable)

该极限称为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的**导数** (derivative) 或**微商**，记作

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$



§3.1 复变函数的导数

复变函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 上，$z_0\in D$，如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

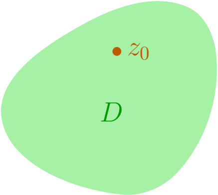
存在且有限，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处可导或可微 (differentiable)

该极限称为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的导数 (derivative) 或微商，记作

$$f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

若 $w=f(z)$ 在 z_0 处可导，必有

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]=0$$



这等价于 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，因而 $f(z)$ 在 z_0 处连续

导数举例

💙 **例 1 正整数次幂函数** $f(z)=z^n,\quad n=1,2,\cdots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\frac{nz^{n-1}\Delta z+o(\Delta z)}{\Delta z}=nz^{n-1}+\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=nz^{n-1}$$

🐑 可见**函数** $f(z)=z^n$ 在 z **平面**上**处处可导**

二项式定理

$$(z+\Delta z)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^{n-k}(\Delta z)^k$$

导数举例

💙 **例 1　正整数次幂函数** $f(z) = z^n, \quad n = 1, 2, \cdots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{nz^{n-1}\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = nz^{n-1} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = nz^{n-1}$$

🐑 可见**函数** $f(z) = z^n$ 在 z **平面**上**处处可导**

二项式定理

$$(z+\Delta z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} (\Delta z)^k$$

💜 **例 2　函数** $f(z) = z^*$ 显然**处处连续**（因为 $u(x,y) = x$ 和 $v(x,y) = -y$ 处处连续），但**处处不可导**

🐐 这是因为 $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{(z+\Delta z)^* - z^*}{\Delta z} = \dfrac{(\Delta z)^*}{\Delta z}$ 的**极限不存在**：

$$\Delta z = \Delta x, \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\Delta z = \mathrm{i}\Delta y, \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} = \frac{-\mathrm{i}\Delta y}{\mathrm{i}\Delta y} = -1$$

§3.2 解析函数

🐅 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (analytic function)，或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析

🐆 解析函数也称为全纯函数 (holomorphic function)

💙 **例 3 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$** $(n = 1, 2, \cdots)$ 在整个复平面上解析

§3.2 解析函数

🐅 若复变函数 $f(z)$ **在区域 D 内可导**，则称 $f(z)$ 是**区域** D 内的**解析函数** (analytic function)，或称 $f(z)$ 在**区域** D 内**解析**

🐆 解析函数也称为**全纯函数** (holomorphic function)

💙 **例 3　正整数次幂函数 $f(z) = z^n$** $(n = 1, 2, \cdots)$ 在**整个复平面**上**解析**

⏪ **注**　函数 $f(z)$ 在区域 D 内**解析**与**可导**是一回事

🦌 有时候说函数 $f(z)$ **在点 z_0 处解析**，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的**某一邻域**内**可导**，而**不仅仅是在 z_0 处可导**

🦓 因此，函数**在一点解析**与**可导不是一回事**

§3.2 解析函数

🐅 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (analytic function)，或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析

🐆 解析函数也称为全纯函数 (holomorphic function)

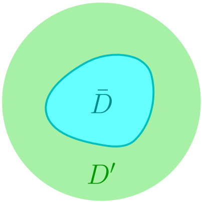
💙 **例 3　正整数次幂函数 $f(z)=z^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 在整个复平面上解析**

⏪ **注**　函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与可导是一回事

🦌 有时候说函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内可导，而不仅仅是在 z_0 处可导

🦓 因此，函数在一点解析与可导**不是一回事**

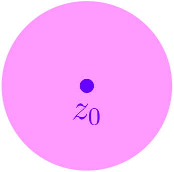
🐎 函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 内解析，指的是它在某区域 D' 内解析，而 $D' \supset \bar{D}$



§3.3 奇点

若复变函数 $f(z)$ 在某点 z_0 **不解析**，但在 z_0 的**任一邻域内都有** $f(z)$ 的**解析点**，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点** (singular point)

例 4 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的**奇点**



注 函数 $f(z)$ 在某点 z_0 **不解析**，可能是在该点**没有定义**，也可能是有定义但不连续，还可能是连续但**不可导**，还可能是可导但仍**不解析**（见第 34 页**例 6**），等等

按上述定义，$f(z)$ 在点 z_0 **不解析**，**并不说明** z_0 就是奇点

比如**函数** $f(z)=z^*$ **处处不可导**，但**所有的点都不是奇点**

§3.4 求导法则

- 简单的基本初等函数的导数可以用定义计算
- 以上**例 1** 函数 $f(z) = z^n$ 是一个典型的例子
- 稍微复杂的基本初等函数 (如指数函数) 的导数计算方法在下一小节给出

§3.4 求导法则

- 简单的基本初等函数的导数可以用定义计算
- 以上例 1 函数 $f(z)=z^n$ 是一个典型的例子
- 稍微复杂的基本初等函数（如指数函数）的导数计算方法在下一小节给出
- 初等函数的导数可由已知的基本初等函数的导数和以下求导法则得出

1️⃣ 若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在区域 D 内解析，则其和、差、积、商（分母不为零）均在 D 内解析，且求导法则与实变函数一致

$$[f_1(z)\pm f_2(z)]' = f_1'(z)\pm f_2'(z)$$

$$[f_1(z)f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z)+f_1(z)f_2'(z) \qquad \text{（Leibniz 法则）}$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z), \quad c\in\mathbb{C} \qquad \text{（Leibniz 法则的特例）}$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z)-f_1(z)f_2'(z)}{[f_2(z)]^2}, \quad f_2(z)\neq 0$$

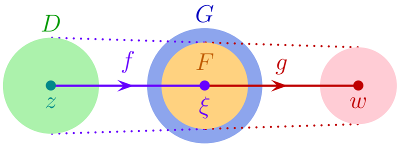
复合函数的求导法则

2 复合函数的求导法则

若函数 $\xi = f(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = g(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，且 $F = \{f(z) | z \in D\} \subset G$，则复合函数 $w = g[f(z)]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{\mathrm{d}g[f(z)]}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}g(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \qquad \text{(链式法则)}$$

注　$F \subset G$ 表示第一个函数的值域不能超出第二个函数的定义域



求导举例

💚 **例 5　多项式** $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n\in\mathbb{N})$

🐇 $\mathbb{N}$ 表示**自然数** $0,1,2,\cdots$ **的集合**

🐩 $P_n(z)$ 中各项是**常数函数**或**正整数次幂函数**，它们均在**整个复平面**上**解析**

🐕 因此，$P_n(z)$ 在**整个复平面**上**解析**

🦮 由**求导法则**得

$$P_n'(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k z^k)'=\sum_{k=0}^{n}a_k(z^k)'=\sum_{k=0}^{n}ka_k z^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}ka_k z^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}z^k$$

🐕‍🦺 最后一步作 $k\to k+1$ 的替换

§3.5 Cauchy-Riemann 条件

- 本小节研究怎样的函数可导，同时得出导数的一种计算方法
- 由于导数定义中 $\Delta z \to 0$ 的方式是任意的，复变函数的可微性是**非常苛刻**的
- 一般来说，如果 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 中的 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 相互独立，那么即使 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都具有良好的解析性质，$f(z)$ 仍然不一定是可微的
- 例 2 中处处不可导的函数 $f(z) = z^* = x - \mathrm{i}y$ 就是典型的例子
- 因此，要使 $f(z)$ 可微，则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须满足一定的关系

§3.5 Cauchy-Riemann 条件

- 本小节研究怎样的函数**可导**，同时得出**导数**的一种**计算方法**
- 由于导数定义中 $\Delta z \to 0$ 的**方式**是**任意**的，**复变函数**的**可微性**是**非常苛刻**的
- 一般来说，如果 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 中的 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ **相互独立**，那么即使 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都具有良好的解析性质，$f(z)$ 仍然**不一定**是**可微**的
- **例 2** 中**处处不可导**的**函数** $f(z) = z^* = x - \mathrm{i}y$ 就是典型的例子
- 因此，要使 $f(z)$ **可微**，则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须满足一定的**关系**
- 事实上，由于 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ **与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关**
- 可先令 $\Delta y = 0$，$\Delta z = \Delta x \to 0$，得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) + \mathrm{i}v(x+\Delta x, y)] - [u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

- 然后令 $\Delta x = 0$，$\Delta z = \mathrm{i}\Delta y \to 0$，得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) + \mathrm{i}v(x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)]}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann 条件与可微的充要条件

- 比较以上两式，推出

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

- 这就是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 之间必须满足的条件
- 它称为 **Cauchy-Riemann 条件**，简称 **CR 条件**
- 它是 $f(z)$ 在点 z 处**可微**的**必要条件**，但**不是充分条件**
- $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 也给出**导数**的**计算公式**
- 即利用熟悉的**实变函数**的**偏导数**来计算**复变函数**的**导数**

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

Bernhard Riemann
(1826–1866)

Cauchy-Riemann 条件与可微的充要条件

- 比较以上两式，推出

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

- 这就是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须满足的条件
- 它称为 **Cauchy-Riemann 条件**，简称 **CR 条件**
- 它是 $f(z)$ 在点 z 处**可微**的**必要条件**，但**不是充分条件**
- $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 也给出**导数**的**计算公式**
- 即利用熟悉的**实变函数**的**偏导数**来计算**复变函数**的**导数**

定理 **函数** $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，$z\in D$，$f(z)$ 在**点** $z=x+\mathrm{i}y$ 处**可微**的**充要条件**是

1. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在**点** (x,y) 处**可微**
2. $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在**点** (x,y) 处满足 **CR 条件**

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

Bernhard Riemann
(1826–1866)

判断解析性的定理

🕊 将上述定理（证明见选读）中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D，立得另一定理

🐓 不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

⚛ **定理** **函数** $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是

1. 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
2. $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 **CR 条件**

判断解析性的定理

将上述定理（证明见选读）中的点 z 和点 (x,y) 同时换为区域 D，立得另一定理

不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是

1. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
2. $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内满足 **CR 条件**

注 充分性是很明显的：根据微积分的定理，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微，它们又在 D 内满足 **CR 条件**，于是根据上一个定理给出 $f(z)$ 在 D 内解析的结论

反过来看必要性，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 **CR 条件**；至于一阶偏导数连续，目前还未能论证

判断解析性的定理

将上述定理（证明见选读）中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D，立得另一定理

不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是

1. 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
2. $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 **CR 条件**

注 充分性是很明显的：根据微积分的定理，$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微，它们又在 D 内满足 **CR 条件**，于是根据上一个定理给出 $f(z)$ 在 D 内解析的结论

反过来看必要性，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 **CR 条件**；至于一阶偏导数连续，目前还未能论证

下一章将会看到，若 $f(z)$ 在 D 内解析，即一阶导数存在，则 $f(z)$ 在 D 内具有任意阶导数，从而 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数就不在话下了

类似结论对实变函数 $f(x)$ 不可想象，即使 $f^{(n)}(x)$ 连续也不保证 $f^{(n+1)}(x)$ 存在

不解析的例子

例 6 考虑函数 $f(z)=|z|^2$，易知 $u(x,y)=x^2+y^2$ 和 $v(x,y)=0$，各偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

可见，所有一阶偏导数连续，故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 处处可微

但是，CR 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 只在 $z=0$ 处成立

因而 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可微，故 $f(z)$ 处处不解析

不解析的例子

例 6 考虑函数 $f(z)=|z|^2$，易知 $u(x,y)=x^2+y^2$ 和 $v(x,y)=0$，各偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

可见，**所有一阶偏导数连续**，故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ **处处可微**

但是，**CR 条件** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ **只在** $z=0$ **处成立**

因而 $f(z)$ **仅在** $z=0$ **处可微**，故 $f(z)$ **处处不解析**

事实上，只要注意到 $f(z)=z^*z$，又已知 z^* **处处不解析**，则易得以上结论

如果一个函数包含 z^* 或 $|z|$ 这样的因子，那么一般来说它是**不解析**的