

数学物理方法

第十二章 柱函数初步

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2023 年 12 月 21 日

第十二章 柱函数初步

 在物理问题具有圆柱形边界时，比如电动力学中的圆柱形波导和同轴传输线，就应该采用柱坐标系求解

 在柱坐标系中对常见的数理方程分离变量，会遇到 **Bessel 方程**

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\textcolor{brown}{v}^2}{x^2}\right) y = 0$$

物理上遇到的通常是 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况

 数学上 ν 可以是复数，但可设 $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ 而不失一般性

第十二章 柱函数初步

 在物理问题具有圆柱形边界时，比如电动力学中的圆柱形波导和同轴传输线，就应该采用柱坐标系求解

 在柱坐标系中对常见的数理方程分离变量，会遇到 Bessel 方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\textcolor{brown}{v}^2}{x^2}\right) y = 0$$

物理上遇到的通常是 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况

 数学上 ν 可以是复数，但可设 $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ 而不失一般性

 第十章用级数解法求解了 Bessel 方程，得到两个线性独立解

$$y(x) = \{\mathbf{J}_\nu(x), \mathbf{N}_\nu(x)\}$$

 $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ 是 ν 阶 Bessel 函数，也称为第一类柱函数

紫色珠子 $N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$ 是 ν 阶 Neumann 函数，也称为第二类柱函数

第三类柱函数

此外，还有第三类柱函数，它们指的是下列 Hankel 函数

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

 $H_{\nu}^{(1)}(x)$ 和 $H_{\nu}^{(2)}(x)$ 分别称为第一种和第二种 Hankel 函数

Bessel 方程的线性独立解可取为

$$\{\mathbf{J}_\nu(x), \mathbf{N}_\nu(x), \mathbf{H}_\nu^{(1)}(x), \mathbf{H}_\nu^{(2)}(x)\}$$

中的任意两个

柱函数在物理和工程中有广泛的应用

本章介绍柱函数的基本知识和初步应用



Hermann Hankel (1839–1873)

§1 柱函数的基本性质

§1.1 原点附近的行为

根据定义，在原点 $x = 0$ 附近， $\nu = 0$ 时有

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \simeq 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 1$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-)^k \psi(k+1)}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$\simeq \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} - \frac{2\psi(1)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) \rightarrow \infty$$

Re $\nu > 0$ 时有

$$J_\nu(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\text{Re } \nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\text{i Im } \nu} \rightarrow \text{C}$$

$$J_{-\nu}(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\text{Re } \nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{-i \text{Im } \nu} \rightarrow \infty$$

原点附近 $N_\nu(x)$ 的行为

■ $\operatorname{Re} \nu > 0$ 时 Neumann 函数在原点 $x = 0$ 附近的行为是

$$\begin{aligned} N_\nu(x) &= \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \\ &\simeq \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\pi} \left[\frac{\cos \nu\pi}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \right] \\ &\simeq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■ 这里用到 Γ 函数的性质 $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin \nu\pi}$

■ 在 $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ 的条件下, $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$ 在原点附近的行为与 $N_\nu(x)$ 类似, 只是多了系数 $\pm i$

■ 遇到物理问题中解的取舍时, 经常用到这些柱函数在原点附近的有限性或奇性

§1.2 递推关系

以 $Z_\nu(x)$ 表示 $\{J_\nu(x), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\}$ 中的任一函数

 可以证明以下递推关系

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu} Z_\nu(x)] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$$

证明 对于 $Z_\nu(x) = J_\nu(x)$ ，有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \frac{(2k+2\nu)x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}} \end{aligned}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \rightarrow = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

证明 $J_\nu(x)$ 满足第二条递推关系

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \frac{2k x^{2k-1}}{2^{2k+\nu}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k}{(k-1)! \Gamma(k + \nu + 1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu-1}} \\
k' = k - 1 \rightarrow &= \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-)^{k'+1}}{k'! \Gamma(k' + \nu + 2)} \frac{x^{2k'+1}}{2^{2k'+\nu+1}} \\
&= -x^{-\nu} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-)^{k'}}{k'! \Gamma(k' + \nu + 2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+\nu+1} \\
&\equiv -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)
\end{aligned}$$

证明 $N_\nu(x)$ 满足第一条递推关系

作变量替换 $\nu' = -\nu$ ，由递推关系 $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ 得

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_{-\nu}(x)] = \frac{d}{dx} [x^{-\nu'} J_{\nu'}(x)] = -x^{-\nu'} J_{\nu'+1}(x) = -x^\nu J_{-\nu+1}(x)$$

 再利用 $\cos[(\nu - 1)\pi] = -\cos \nu\pi$ 和 $\sin[(\nu - 1)\pi] = -\sin \nu\pi$ ，推出

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [x^\nu N_\nu(x)] &= \frac{1}{\sin \nu \pi} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x) \cos \nu \pi - x^\nu J_{-\nu}(x)] \\
&= \frac{x^\nu J_{\nu-1}(x) \cos \nu \pi + x^\nu J_{-\nu+1}(x)}{\sin \nu \pi} \\
&= \frac{x^\nu [-J_{\nu-1}(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu+1}(x)]}{-\sin \nu \pi} \\
&= \frac{x^\nu \{J_{\nu-1}(x) \cos[(\nu-1)\pi] - J_{-(\nu-1)}(x)\}}{\sin[(\nu-1)\pi]} = x^\nu N_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

证明 $N_\nu(x)$ 满足第二条递推关系

作变量替换 $\nu' = -\nu$ ，由递推关系 $\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ 得

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_{-\nu}(x)] = \frac{d}{dx}[x^{\nu'} J_{\nu'}(x)] = x^{\nu'} J_{\nu'-1}(x) = x^{-\nu} J_{-\nu-1}(x)$$

再利用 $\cos[(\nu + 1)\pi] = -\cos \nu\pi$ 和 $\sin[(\nu + 1)\pi] = -\sin \nu\pi$ ，推出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{-\nu} N_\nu(x)] &= \frac{1}{\sin \nu\pi} \frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x) \cos \nu\pi - x^{-\nu} J_{-\nu}(x)] \\ &= \frac{-x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \cos \nu\pi - x^{-\nu} J_{-\nu-1}(x)}{\sin \nu\pi} \\ &= \frac{-x^{-\nu} [-J_{\nu+1}(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu-1}(x)]}{-\sin \nu\pi} \\ &= \frac{-x^{-\nu} \{J_{\nu+1}(x) \cos[(\nu + 1)\pi] - J_{-(\nu+1)}(x)\}}{\sin[(\nu + 1)\pi]} = -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

以上证明了**两条递推关系**对 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 成立

由这些结果可以直接证明**递推关系**对 $H_\nu^{(1)}(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x)$ 成立

证毕 

柱函数的定义

以上证明了两条递推关系对 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 成立

由这些结果可以直接证明递推关系对 $H_{\nu}^{(1)}(x)$ 和 $H_{\nu}^{(2)}(x)$ 成立

证毕

同时满足**这两条递推关系**

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu} Z_\nu(x)] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$$

的函数统称为**柱函数**； $\{J_\nu(x), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\}$ 中任何一个或者它们的**线性组合**，只要组合系数与 ν 无关，都是**柱函数**

利用递推关系，可以导出一些简单的积分公式

令 $\nu = 1$ 或 $\nu = 0$, 由递推关系有 $[xJ_1(x)]' = xJ_0(x)$ 和 $J_0'(x) = -J_1(x)$

因此，有积分公式 $\int xJ_0(x) dx = xJ_1(x) + C$ 和 $\int J_1(x) dx = -J_0(x) + C$

柱函数与 Bessel 方程

 将第二条递推关系改写为 $-\nu x^{-\nu-1} Z_\nu(x) + x^{-\nu} Z'_\nu(x) = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$ ，则

$$Z_{\nu+1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) - Z'_\nu(x), \quad Z'_{\nu+1}(x) = -\nu x^{-2} Z_\nu(x) + \nu x^{-1} Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x)$$

 将第一条递推关系改写成 $\nu x^{\nu-1} Z_\nu(x) + x^\nu Z'_\nu(x) = x^\nu Z_{\nu-1}(x)$

推出 $Z_{\nu-1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) + Z'_\nu(x)$

柱函数与 Bessel 方程

将第二条递推关系改写为 $-\nu x^{-\nu-1} Z_\nu(x) + x^{-\nu} Z'_\nu(x) = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$ ，则

$$Z_{\nu+1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) - Z'_\nu(x), \quad Z'_{\nu+1}(x) = -\nu x^{-2} Z_\nu(x) + \nu x^{-1} Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x)$$

 将第一条递推关系改写成 $\nu x^{\nu-1} Z_\nu(x) + x^\nu Z'_\nu(x) = x^\nu Z_{\nu-1}(x)$

推出 $Z_{\nu-1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) + Z'_\nu(x)$, 作变量替换 $\nu \rightarrow \nu + 1$, 得

$$\begin{aligned} Z_\nu(x) &= (\nu + 1)x^{-1}Z_{\nu+1}(x) + Z'_{\nu+1}(x) \\ &= (\nu + 1)x^{-1}[\nu x^{-1}Z_\nu(x) - Z'_\nu(x)] - \nu x^{-2}Z_\nu(x) + \nu x^{-1}Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x) \\ &= \nu^2 x^{-2}Z_\nu(x) - x^{-1}Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x) \end{aligned}$$

从而得到 ν 阶 Bessel 方程 $Z''_\nu(x) + \frac{1}{x} Z'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu(x) = 0$

柱函数与 Bessel 方程

将第二条递推关系改写为 $-\nu x^{-\nu-1} Z_\nu(x) + x^{-\nu} Z'_\nu(x) = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)$ ，则

$$Z_{\nu+1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) - Z'_\nu(x), \quad Z'_{\nu+1}(x) = -\nu x^{-2} Z_\nu(x) + \nu x^{-1} Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x)$$

 将第一条递推关系改写成 $\nu x^{\nu-1} Z_\nu(x) + x^\nu Z'_\nu(x) = x^\nu Z_{\nu-1}(x)$

推出 $Z_{\nu-1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) + Z'_\nu(x)$, 作变量替换 $\nu \rightarrow \nu + 1$, 得

$$\begin{aligned} Z_\nu(x) &= (\nu + 1)x^{-1}Z_{\nu+1}(x) + Z'_{\nu+1}(x) \\ &= (\nu + 1)x^{-1}[\nu x^{-1}Z_\nu(x) - Z'_\nu(x)] - \nu x^{-2}Z_\nu(x) + \nu x^{-1}Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x) \\ &= \nu^2 x^{-2}Z_\nu(x) - x^{-1}Z'_\nu(x) - Z''_\nu(x) \end{aligned}$$

从而得到 ν 阶 Bessel 方程 $Z''_\nu(x) + \frac{1}{x} Z'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu(x) = 0$

可见，柱函数一定满足 Bessel 方程；反过来，Bessel 方程的解不一定是柱函数

比如, $J_\nu(x)$ 是 Bessel 方程的解, 但不满足上述递推关系, 因而不是柱函数

递推关系的等价形式



上一页已经得到，这两条递推关系等价于

$$Z_{\nu-1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) + Z'_\nu(x), \quad Z_{\nu+1}(x) = \nu x^{-1} Z_\nu(x) - Z'_\nu(x)$$



两式相加减，推出递推关系的等价形式

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \quad Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x)$$



显然，任何柱函数也都满足这两条递推关系

§1.3 漐近形式

人们常常希望知道，当自变量很大时，特殊函数的行为像哪个初等函数，这有助于把握其性质并应用于具体问题

△ 当 $x \rightarrow \infty$ 且 $-\pi < \arg x < \pi$ 时，有

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

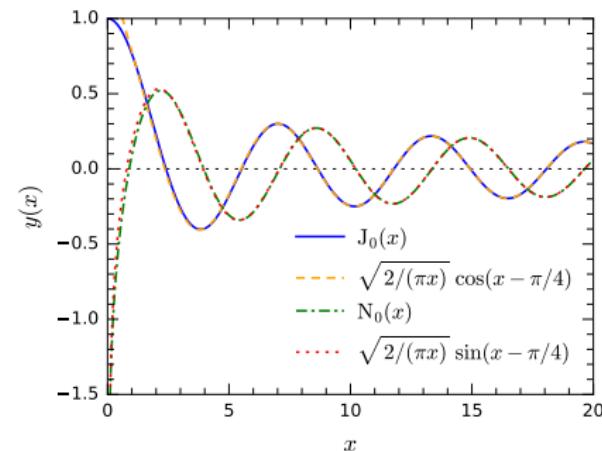
$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

可见， $\{J_\nu(x), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\}$ 之间的关系类似于 $\{\cos x, \sin x, e^{ix}, e^{-ix}\}$

如果 $\nu \in \mathbb{R}$ ，由漐近形式可以看出 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 在正实轴上都有无穷多个零点

△ 这些柱函数在正实轴上的图象都是衰减振荡的，振幅随 x 的增大按 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 衰减，所以与柱面波有关



§1.4 零点

首先指出，柱函数 $Z_\nu(x)$ 的任何零点 x_0 都是简单零点，只有 $x_0 = 0$ 可能例外

事实上，如果 $x_0 \neq 0$ 是二阶零点，则 $Z_\nu(x_0) = Z'_\nu(x_0) = 0$

由 Bessel 方程 $Z''_\nu(x) + \frac{1}{x}Z'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu(x) = 0$ 得

$$Z''_\nu(x_0) = -\frac{1}{x_0}Z'_\nu(x_0) - \left(1 - \frac{\nu^2}{x_0^2}\right)Z_\nu(x_0) = 0$$

$$Z^{(3)}_\nu(x_0) = -\frac{1}{x_0}Z''_\nu(x_0) + \frac{1}{x_0^2}Z'_\nu(x_0) - \left(1 - \frac{\nu^2}{x_0^2}\right)Z'_\nu(x_0) - \frac{2\nu^2}{x_0^3}Z_\nu(x_0) = 0$$

⋮

于是得到 $Z_\nu^{(n)}(x_0) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$)

根据 Taylor 展开式， x_0 的邻域 $N(x_0, |x_0|)$ 内有 $Z_\nu(x) \equiv 0$ ，这显然是错误的

上述论证对 $x_0 = 0$ 不成立，所以 $x_0 = 0$ 可能例外

 其次, 由于

$$J_\nu(e^{i\pi}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{e^{i\pi}x}{2}\right)^{2k+\nu} = e^{i(2k+\nu)\pi} J_\nu(x) = e^{i\nu\pi} J_\nu(x)$$

 若 $x_0 > 0$ 是 $J_\nu(x)$ 的零点, 则负实轴上与 x_0 对称的点 $e^{i\pi}x_0$ 也是 $J_\nu(x)$ 的零点

 所以, 对于 $J_\nu(x)$ 在实轴上的零点, 只需要关注正零点



J_ν(x) 的正零点

其次, 由于

$$J_\nu(e^{i\pi}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{e^{i\pi}x}{2}\right)^{2k+\nu} = e^{i(2k+\nu)\pi} J_\nu(x) = e^{i\nu\pi} J_\nu(x)$$

17 若 $x_0 > 0$ 是 $J_\nu(x)$ 的零点, 则负实轴上与 x_0 对称的点 $e^{i\pi}x_0$ 也是 $J_\nu(x)$ 的零点

17 所以, 对于 $J_\nu(x)$ 在实轴上的零点, 只需要关注正零点

最后, 在讨论零点时, 我们只考虑 $\nu \in \mathbb{R}$ 的情况, 下面给出几个结论



1 $J_\nu(x)$ 有无穷多正零点

从前面的渐近形式大致可以推测这一结果, 证明从略

这个结论会保证相关物理问题在第一类边界条件下具有无穷多本征值

J_ν(x) 的正零点

其次, 由于

$$J_\nu(e^{i\pi}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{e^{i\pi}x}{2}\right)^{2k+\nu} = e^{i(2k+\nu)\pi} J_\nu(x) = e^{i\nu\pi} J_\nu(x)$$

17 若 $x_0 > 0$ 是 $J_\nu(x)$ 的零点, 则负实轴上与 x_0 对称的点 $e^{i\pi}x_0$ 也是 $J_\nu(x)$ 的零点

17 所以, 对于 $J_\nu(x)$ 在实轴上的零点, 只需要关注正零点

最后, 在讨论零点时, 我们只考虑 $\nu \in \mathbb{R}$ 的情况, 下面给出几个结论



1 $J_\nu(x)$ 有无穷多正零点

从前面的渐近形式大致可以推测这一结果, 证明从略



Michel Rolle
(1652–1719)

这个结论会保证相关物理问题在第一类边界条件下具有无穷多本征值

根据 Rolle 定理, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在区间 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则至少存在一个 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$

于是, 在 $J_\nu(x)$ 的两个正零点之间必定存在 $J'_\nu(x)$ 的一个正零点

$J'_\nu(x)$ 的正零点



因此, $J'_\nu(x)$ 也具有无穷多正零点



这保证了相关物理问题在第二类边界条件下具有无穷多本征值



如果 $\nu > -1$, 可以证明 $J'_\nu(x)$ 的正零点也都是简单零点

J_ν'(x) 的正零点

因此, J_ν'(x) 也具有无穷多正零点

这保证了相关物理问题在第二类边界条件下具有无穷多本征值

如果 $\nu > -1$, 可以证明 J_ν'(x) 的正零点也都是简单零点

2 J_ν(x) 和 J_{ν+1}(x) 的正零点是两两相间的;

如果 $\nu > -1$, 则 J_ν(x) 的最小正零点更靠近原点

将递推关系 $[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ 改写为 $[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1} J_\nu(x)$

设 $f(x) = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$, 则 $J_{\nu+1}(a) = J_{\nu+1}(b) = 0$ 意味着 $f(a) = f(b) = 0$

根据 Rolle 定理, $\exists c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1} J_\nu(c) = 0$, 即 $J_\nu(c) = 0$

因此, 在 J_{ν+1}(x) 的两个相邻正零点 a 、 b 之间, 至少有一个 J_ν(x) 的正零点 c

J_ν'(x) 的正零点

 因此, J_ν'(x) 也具有无穷多正零点

 这保证了相关物理问题在第二类边界条件下具有无穷多本征值

 如果 $\nu > -1$, 可以证明 J_ν'(x) 的正零点也都是简单零点

2 J_ν(x) 和 J_{ν+1}(x) 的正零点是两两相间的;

如果 $\nu > -1$, 则 J_ν(x) 的最小正零点更靠近原点

 将递推关系 $[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ 改写为 $[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1} J_\nu(x)$

 设 $f(x) = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$, 则 $J_{\nu+1}(a) = J_{\nu+1}(b) = 0$ 意味着 $f(a) = f(b) = 0$

 根据 Rolle 定理, $\exists c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1} J_\nu(c) = 0$, 即 $J_\nu(c) = 0$

 因此, 在 J_{ν+1}(x) 的两个相邻正零点 a 、 b 之间, 至少有一个 J_ν(x) 的正零点 c

 设 $f(x) = x^{-\nu} J_\nu(x)$, 则 $J_\nu(a) = J_\nu(b) = 0$ 意味着 $f(a) = f(b) = 0$

 由递推关系 $[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ 和 Rolle 定理可知, $\exists c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = -c^{-\nu} J_{\nu+1}(c) = 0$, 即 $J_{\nu+1}(c) = 0$

 因此，在 $J_\nu(x)$ 的两个相邻正零点 a 、 b 之间，至少有一个 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点 c

 于是， $J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点是两两相间的

 因此，在 $J_\nu(x)$ 的两个相邻正零点 a 、 b 之间，至少有一个 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点 c

 于是， $J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点是两两相间的

 Ⅱ 如果 $\nu > -1$ ，则 $J_{\nu+1}(0) = 0$ ；记 $J_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点为 b ，则 $J_{\nu+1}(b) = 0$

 设 $f(x) = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$ ，有 $f(0) = f(b) = 0$

 由递推关系 $[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1} J_\nu(x)$ 和 Rolle 定理可知， $\exists c \in (0, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1} J_\nu(c) = 0$ ，即 $J_\nu(c) = 0$

 故 $J_\nu(x)$ 的正零点 c 比 $J_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点 b 更靠近原点

AJ_ν(x) + BxJ'_ν(x) 的正零点

因此，在 $J_\nu(x)$ 的两个相邻正零点 a 、 b 之间，至少有一个 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点 c

于是， $J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点是两两相间的

Ⅱ 如果 $\nu > -1$ ，则 $J_{\nu+1}(0) = 0$ ；记 $J_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点为 b ，则 $J_{\nu+1}(b) = 0$

设 $f(x) = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$ ，有 $f(0) = f(b) = 0$

由递推关系 $[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)]' = x^{\nu+1} J_\nu(x)$ 和 Rolle 定理可知， $\exists c \in (0, b)$ 使得 $f'(c) = c^{\nu+1} J_\nu(c) = 0$ ，即 $J_\nu(c) = 0$

故 $J_\nu(x)$ 的正零点 c 比 $J_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点 b 更靠近原点

3 $AJ_\nu(x) + BxJ'_\nu(x)$ 有无穷多正零点，其中 $A, B \in \mathbb{R}$ 且不全为零

证明从略，如果 $A = 0$ 或 $B = 0$ ，则结论已经在前面给出

当 $A \neq 0$ 且 $B \neq 0$ 时，它保证相关物理问题在第三类边界条件下有无穷多本征值

如果 $\nu > -1$ ，可以证明这些正零点都是简单零点

若 $AD - BC \neq 0$ ，则 $AJ_\nu(x) + BxJ'_\nu(x)$ 与 $CJ_\nu(x) + DxJ'_\nu(x)$ 正零点两两相间

§2 整数阶柱函数

 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时, **Bessel 函数**的形式为

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

 **Neumann 函数**的形式为

$$\begin{aligned} N_m(x) &= \frac{2}{\pi} J_m(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} [\psi(k+m+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \end{aligned}$$

 这就是本节将要讨论的**整数阶柱函数**

 可以证明, $J_{-m}(x) = (-)^m J_m(x)$, $N_{-m}(x) = (-)^m N_m(x)$

 因此**负整数阶**的情况不需要过多关注

§2.1–§2.2 对称性和零点

由 $(-x)^{2k+m} = (-)^m x^{2k+m}$ 可知，

$$J_m(-x) = (-)^m J_m(x)$$

即函数 $J_m(x)$ 的奇偶性与整数 m 的奇偶性相同

§2.1–§2.2 对称性和零点

由 $(-x)^{2k+m} = (-)^m x^{2k+m}$ 可知,

$$J_m(-x) = (-)^m J_m(x)$$

即函数 $J_m(x)$ 的奇偶性与整数 m 的奇偶性相同

根据 §1.4 的结论, 有以下结果

1 $J_m(x)$ 和 $J'_m(x)$ 均有无穷多实数零点, 且正负成对

注意 $J_m(x)$ 是单值函数, 所以负实轴上与 $x > 0$ 对称的点可以直接写成 $-x$, 而不必写成 $e^{i\pi} x$

$J_m(x)$ 的正零点从小到大排列, 记作 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $0 < x_{m1} < x_{m2} < \dots$

$J'_m(x)$ 的正零点从小到大排列, 记作 $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $0 < \tilde{x}_{m1} < \tilde{x}_{m2} < \dots$

§2.1–§2.2 对称性和零点

由 $(-x)^{2k+m} = (-)^m x^{2k+m}$ 可知,

$$J_m(-x) = (-)^m J_m(x)$$

即函数 $J_m(x)$ 的奇偶性与整数 m 的奇偶性相同

根据 §1.4 的结论, 有以下结果

1 $J_m(x)$ 和 $J'_m(x)$ 均有无穷多实数零点, 且正负成对

注意 $J_m(x)$ 是单值函数, 所以负实轴上与 $x > 0$ 对称的点可以直接写成 $-x$, 而不必写成 $e^{i\pi} x$

2 $J_m(x)$ 的正零点从小到大排列, 记作 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $0 < x_{m1} < x_{m2} < \dots$

$J'_m(x)$ 的正零点从小到大排列, 记作 $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $0 < \tilde{x}_{m1} < \tilde{x}_{m2} < \dots$

3 $J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的正零点是两两相间的;

$J_m(x)$ 的最小正零点比 $J_{m+1}(x)$ 的更靠近原点, 即 $x_{m1} < x_{m+1,1}$

§2.3 函数图象

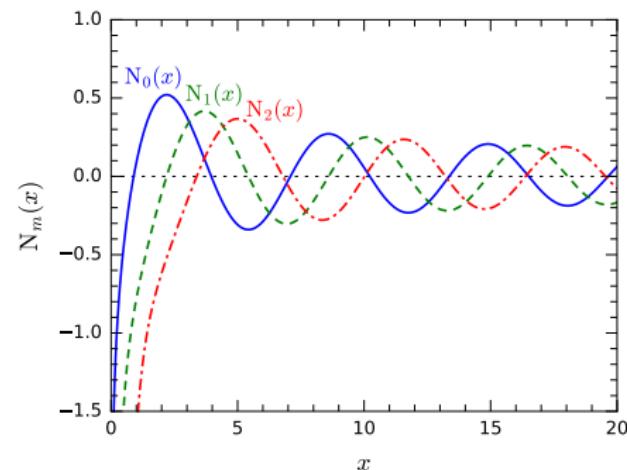
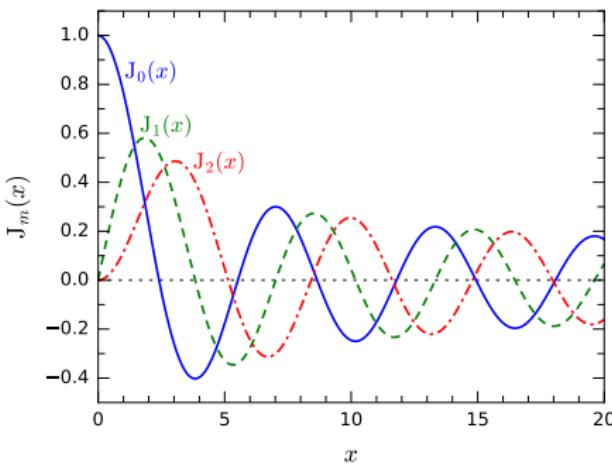
⌚ $J_m(x)$ 和 $N_m(x)$ 的函数图象都是衰减振荡的

🍇 但是, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 它们具有不同的特征, 此时 $N_m(x) \rightarrow -\infty$

莓果 而 $J_0(0) = 1$, $J_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}^+$

🍒 当 $m \geq 3$ 时, $J_m(x)$ 的图象与 $J_1(x)$ 和 $J_2(x)$ 类似;

$N_m(x)$ 的图象与 $N_1(x)$ 和 $N_2(x)$ 类似



§2.4 母函数

 第四章 §1.3 选读的例 6 求出了

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(z)t^m, \quad 0 < |t| < +\infty$$

 左边的函数称为 $J_m(z)$ 的**母函数**

 可见，**母函数**在环域 $0 < |t| < +\infty$ 内是 t 的解析函数，可以展开为 t 的 **Laurent 级数**，而**展开系数**正好是 **Bessel 函数** $J_m(z)$

§2.4 母函数

 第四章 §1.3 选读的例 6 求出了

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(z)t^m, \quad 0 < |t| < +\infty$$

 左边的函数称为 $J_m(z)$ 的**母函数**

 可见，**母函数**在环域 $0 < |t| < +\infty$ 内是 t 的解析函数，可以展开为 t 的 **Laurent 级数**，而**展开系数**正好是 **Bessel 函数** $J_m(z)$

 上式两边对 z 求导，得到

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J'_m(z)t^m &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(z)t^m \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [J_m(z)t^{m+1} - J_m(z)t^{m-1}] = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [J_{m-1}(z)t^m - J_{m+1}(z)t^m] \end{aligned}$$

 从而推出**递推关系** $J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z) = 2J'_m(z)$ ，与前面的结果一致

§2.5 加法公式

 利用指数函数的性质，有

$$\exp \left[\frac{x+y}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \exp \left[\frac{y}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]$$

 两边均用**母函数公式**展开，得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x+y)t^m = \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_l(y)t^{k+l} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} t^m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{m-k}(y)$$

 第二步令 $m = k + l$ ，并将每个 t^m 的系数合并成一个**级数**

 比较两边 t^m 的系数，就得到 **Bessel 函数的加法公式**

$$J_m(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{m-k}(y)$$

§2.6 积分表示

令 $t = e^{i\phi}$, 则 $\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = i \sin \phi$, 将母函数公式

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) t^m \text{ 化为 } \exp(i x \sin \phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) e^{im\phi}$$

这是 ϕ 的复形式 Fourier 级数, 利用 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = 2\pi \delta_{nm}$ 推出

$$J_m(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \delta_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\phi} e^{-im\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \phi} e^{-im\phi} d\phi$$

这就是 Bessel 函数的积分表示

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \phi - im\phi} d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \phi - m\phi) d\phi$$

它把 Bessel 函数表示成一个含参数积分, 被积函数是初等函数

这是特殊函数积分表示的一般特点

$$|J_m(x)| \leq 1$$



利用

$$\left| \int_0^\pi \cos(x \sin \phi - m\phi) d\phi \right| \leq \int_0^\pi |\cos(x \sin \phi - m\phi)| d\phi \leq \int_0^\pi d\phi = \pi$$



由 Bessel 函数的积分表示推出

$$|J_m(x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi \cos(x \sin \phi - m\phi) d\phi \right| \leq \frac{\pi}{\pi}$$



即

$$|J_m(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

当 $m = 0$ 且 $x = 0$ 时，有 $J_0(0) = 1$ ，这是等号成立的唯一情况

§2.7 含 Bessel 函数的积分

含 Bessel 函数的积分五花八门，相关计算涉及各种各样的技巧

这里计算积分 $I = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a, b > 0$

将积分表示 $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \phi} d\phi$ 代入并交换积分次序，得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^\infty e^{-(a - ib \sin \phi)x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{e^{-(a - ib \sin \phi)x}}{a - ib \sin \phi} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{a - ib \sin \phi} \end{aligned}$$

§2.7 含 Bessel 函数的积分

 含 Bessel 函数的积分五花八门，相关计算涉及各种各样的技巧

 这里计算积分 $I = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a, b > 0$

 将积分表示 $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \phi} d\phi$ 代入并交换积分次序，得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^\infty e^{-(a - ib \sin \phi)x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left. \frac{e^{-(a - ib \sin \phi)x}}{a - ib \sin \phi} \right|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{a - ib \sin \phi} \end{aligned}$$

 这个积分可以用围线积分和留数定理的方法来计算，令 $z \equiv e^{i\phi}$

 有 $dz = ie^{i\phi} d\phi = iz d\phi, \quad d\phi = \frac{dz}{iz}, \quad i \sin \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = \frac{1}{2}(z - z^{-1}),$ 故

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{a - ib \sin \phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{a - b(z - z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{-bz^2 + 2az + b}$$

围线积分

现在计算围线积分 $I = \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{-bz^2 + 2az + b}$, $a, b > 0$

一元二次方程 $-bz^2 + 2az + b = 0$ 的两个实根为

$$z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} > \frac{a + b}{b} > 1$$

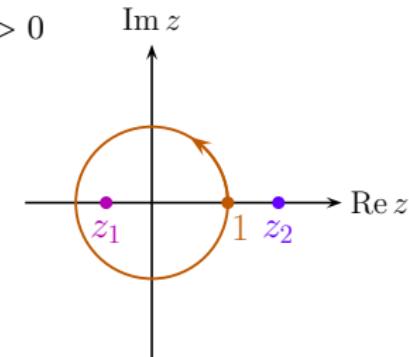
由于 $z_1 z_2 = \frac{a^2 - (a^2 + b^2)}{b^2} = -1$, 有 $|z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1$

被积函数的两个一阶极点中只有 $z = z_1$ 位于单位圆周 $|z| = 1$ 之内, 相应留数为

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{1}{-bz^2 + 2az + b}, z_1\right) &= \frac{1}{(-bz^2 + 2az + b)'|_{z=z_1}} = \frac{1}{-2bz_1 + 2a} \\ &= \frac{1}{-2(a - \sqrt{a^2 + b^2}) + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

从而得到

$$I = \frac{1}{\pi i} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{-bz^2 + 2az + b}, z_1\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



积分结果



现在得到积分结果

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a, b > 0$$

如果 $b < 0$ ，由于 $J_0(x)$ 是偶函数，有

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(-bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

这个结果仍然成立

如果 $b = 0$ ，则 $J_0(0) = 1$ ，有

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(0) dx = \int_0^\infty e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a}$$

这个结果也成立

因此， $b > 0$ 的条件实际上可以去掉

§2.8 本征值问题

 对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程在柱坐标系中分离变量，在 ρ 方向会遇到关于 $R(\rho) \equiv y(x)$ 的方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\lambda - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

改写成 Strum-Liouville 形式，结合边界条件，典型的本征值问题为

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\textcolor{brown}{x} \frac{dy}{dx} \right) - \frac{m^2}{x} y + \lambda \textcolor{teal}{x} y = 0 & (0 < x < a) \\ y(0) = 0 \ (\textcolor{green}{m} \neq 0) \text{ 或 } |y(0)| < \infty \ (\textcolor{violet}{m} = 0), \quad \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0 \end{cases}$$

 其中 $\alpha, \beta > 0$, 但 α 和 β 不同时为 0; $x = 0$ 处的边界条件是自然边界条件

与 Sturm-Liouville 方程比较可知,

$$k(x) = x \geq 0, \quad q(x) = \frac{m^2}{x} \geq 0, \quad \text{权函数 } \rho(x) = x \geq 0$$

 与 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论，必有 $\lambda \geq 0$

方程的解

由于 $\lambda \geq 0$ ，可令 $\lambda = k^2$ ，其中 $k \geq 0$

 如果 $k > 0$ ，设 $z \equiv kx$, $w(z) \equiv y(x)$, 则 $\frac{1}{x} = \frac{k}{z}$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{dz}$, 原方程化为

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\textcolor{brown}{k^2} - \frac{m^2}{x^2} \right) y = \textcolor{brown}{k^2} \left[\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) w \right]$$

方程的解

由于 $\lambda \geq 0$ ，可令 $\lambda = k^2$ ，其中 $k \geq 0$

 如果 $k > 0$ ，设 $z \equiv kx$, $w(z) \equiv y(x)$, 则 $\frac{1}{x} = \frac{k}{z}$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{dz}$, 原方程化为

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = k^2 \left[\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) w \right]$$

故 $w(z)$ 满足 m 阶 Bessel 方程 $w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)w = 0$

于是，原方程的两个线性独立解为

$$y(x) = w(z) = \{\mathbf{J}_m(z), \mathbf{N}_m(z)\} = \{\mathbf{J}_m(kx), \mathbf{N}_m(kx)\}$$

犛 $N_m(kx)$ 在 $x = 0$ 处发散，不符合该处的自然边界条件，应该舍弃，故

$$y(x) = J_m(kx)$$

 注意, $J_0(0) = 1$ 和 $J_m(0) = 0$ ($m \in \mathbb{N}^+$) 满足 $x = 0$ 处的自然边界条件



本征值和本征函数

将 $y(x) = J_m(kx)$ 代入 $x = a$ 处的**边界条件** $\alpha y'(a) + \beta y(a) = 0$ ，有

$$0 = \alpha y'(a) + \beta y(a) = \left(\alpha \frac{dJ_m(kx)}{dx} + \beta J_m(kx) \right) \Big|_{x=a} = \alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka)$$

这样得到的 $\alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka) = 0$ 是用于确定**本征值**的**超越方程**

根据上节关于**零点**的讨论，这个方程具有**无穷多正根** $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$

由于 $J_m(z)$ 的奇偶性与 m 一致，当 m 是**奇数**(**偶数**)时，方程左边是 k 的**奇函数**(**偶函数**)，这意味着 $\{-k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是**根**，即**实根是正负成对出现的**

本征值和本征函数

 将 $y(x) = J_m(kx)$ 代入 $x = a$ 处的边界条件 $\alpha y'(a) + \beta y(a) = 0$ ，有

$$0 = \alpha y'(a) + \beta y(a) = \left(\alpha \frac{dJ_m(kx)}{dx} + \beta J_m(kx) \right) \Big|_{x=a} = \alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka)$$

 这样得到的 $\alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka) = 0$ 是用于确定本征值的超越方程

 根据上节关于零点的讨论，这个方程具有无穷多正根 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$

骆驼 由于 $J_m(z)$ 的奇偶性与 m 一致, 当 m 是奇数(偶数)时, 方程左边是 k 的奇函数(偶函数), 这意味着 $\{-k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是根, 即实根是正负成对出现的

但是，负根既不能给出新的本征值，也不能给出独立的本征函数，所以是多余的

事实上，我们在引入 $\lambda = k^2$ 时，已经限制 $k \geq 0$

 将正根 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 从大到小排列，满足 $0 < k_1 < k_2 < \dots$

相应的**本征值**和**本征函数**为

$$\lambda_n = k_n^2, \quad y_n(x) = J_m(k_n x), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

说明

本征值 $\lambda_n = k_n^2$, **本征函数** $y_n(x) = J_m(k_n x)$, $n \in \mathbb{N}^+$

- 鼠 以上讨论为了记号方便, 认为 m 是**固定的**
- 兔 在实际问题中, 常常需要把对应于**不同 m 值的解叠加**
- 狐狸 从而, 必须同时处理对应于**不同 m 值的一系列本征值问题**
- 刺猬 为此, 应该将**上述正根记作 $\{k_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$** , 而相应的**本征值**和**本征函数**记作

$$\lambda_{mn} = k_{mn}^2, \quad y_{mn}(x) = J_m(k_{mn} x), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

说明

本征值 $\lambda_n = k_n^2$, **本征函数** $y_n(x) = J_m(k_n x)$, $n \in \mathbb{N}^+$

鼠 以上讨论为了记号方便, 认为 m 是**固定的**

兔 在实际问题中, 常常需要把对应于**不同 m 值的解叠加**

猴 从而, 必须同时处理对应于**不同 m 值的一系列本征值问题**

刺猬 为此, 应该将**上述正根**记作 $\{k_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, 而相应的**本征值**和**本征函数**记作

$$\lambda_{mn} = k_{mn}^2, \quad y_{mn}(x) = J_m(k_{mn} x), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

牛 上述求解**未考虑** $k = 0$ (即 $\lambda = 0$)

实际上, 在**第九章 §3** 讨论过, 仅当 $\beta = 0$ 且 $m = 0$ 时, $\lambda = 0$ 才是一个本征值

猪 于是, 对于**第二类齐次边界条件**, $m = 0$ 时需要增加一个**本征值** $\lambda_{00} = 0$ 和相应的**本征函数** $y_{00}(x) = 1$ (另一个线性独立解 $y(x) = \ln x$ 在 $x = 0$ 处有**奇性**, 舍弃)

熊 注意, $\lambda = 0$ 的方程需要单独求解, 虽然形式上 $J_0(k_{00}x) = 1$ 正好是正确的

§2.9-§2.10 本征函数的正交关系和模

 为了记号方便，我们仍然考虑 m 固定的情况

 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，本征函数在区间 $[0, a]$ 上满足正交关系

$$\int_0^a y_{n'}(x) y_n(x) \, x \, dx = \int_0^a J_m(k_{n'} x) J_m(k_n x) \, x \, dx = 0, \quad n' \neq n$$

 注意权函数 $\rho(x) = x$, 所以上式是带权正交

§2.9–§2.10 本征函数的正交关系和模

 为了记号方便，我们仍然考虑 m 固定的情况

 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，**本征函数在区间 $[0, a]$ 上满足正交关系**

$$\int_0^a y_{n'}(x) y_n(x) x \, dx = \int_0^a J_m(k_{n'} x) J_m(k_n x) x \, dx = 0, \quad n' \neq n$$

 注意**权函数 $\rho(x) = x$** ，所以上式是**带权正交**

 接下来计算**本征函数 $y_n(x) = J_m(k_n x)$** 的**模方**

 对 $y_n(x)$ 满足的方程 $\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy_n}{dx} \right) - \frac{m^2}{x} y_n + k_n^2 x y_n = 0$ 两边同乘以 $x y'_n(x)$ ，得

$$-k_n^2 x^2 y_n y'_n = x y'_n \frac{d}{dx} (x y'_n) - m^2 y_n y'_n$$

 对 x 从 0 到 a 积分，推出

$$-k_n^2 \int_0^a x^2 y_n y'_n \, dx = \int_0^a x y'_n (x y'_n)' \, dx - m^2 \int_0^a y_n y'_n \, dx$$

计算本征函数的模方

 由 $J_0(0) = 1$ 和 $J_m(0) = 0$ ($m \in \mathbb{N}^+$) 得 $m^2 y_n^2(0) = m^2 J_m^2(0) = 0$ ($m \in \mathbb{N}$)，故

$$m^2 \int_0^a y_n y'_n \, dx = m^2 \int_0^a y_n \, dy_n = \frac{m^2}{2} y_n^2 \Big|_0^a = \frac{m^2}{2} y_n^2(a)$$

$$\int_0^a xy'_n(xy'_n)' \, dx = \int_0^a xy'_n \, d(xy'_n) = \frac{1}{2}(xy'_n)^2 \Big|_0^a = \frac{a^2}{2} y_n'^2(a)$$

$$-k_n^2 \int_0^a x^2 y_n y'_n \, dx = \int_0^a x y'_n (x y'_n)' \, dx - m^2 \int_0^a y_n y'_n \, dx = \frac{a^2}{2} y_n'^2(a) - \frac{m^2}{2} y_n^2(a)$$

计算本征函数的模方

 由 $J_0(0) = 1$ 和 $J_m(0) = 0$ ($m \in \mathbb{N}^+$) 得 $m^2 y_n^2(0) = m^2 J_m^2(0) = 0$ ($m \in \mathbb{N}$)，故

$$m^2 \int_0^a y_n y'_n \, dx = m^2 \int_0^a y_n \, dy_n = \frac{m^2}{2} y_n^2 \Big|_0^a = \frac{m^2}{2} y_n^2(a)$$

$$\int_0^a xy'_n(xy'_n)' \, dx = \int_0^a xy'_n \, d(xy'_n) = \frac{1}{2}(xy'_n)^2 \Big|_0^a = \frac{a^2}{2} y_n'^2(a)$$

$$-k_n^2 \int_0^a x^2 y_n y'_n \, dx = \int_0^a x y'_n (x y'_n)' \, dx - m^2 \int_0^a y_n y'_n \, dx = \frac{a^2}{2} y_n'^2(a) - \frac{m^2}{2} y_n^2(a)$$

于是，本征函数 $y_n(x)$ 的模方为

$$\begin{aligned}\|y_n(x)\|^2 &\equiv \int_0^a y_n^2(x) x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^a y_n^2 \, dx^2 = \left. \frac{x^2}{2} y_n^2 \right|_0^a - \int_0^a x^2 y_n y'_n \, dx \\ &= \frac{a^2}{2} y_n^2(a) - \frac{1}{k_n^2} k_n^2 \int_0^a x^2 y_n y'_n \, dx = \frac{a^2}{2} y_n^2(a) + \frac{1}{k_n^2} \left[\frac{a^2}{2} y_n'^2(a) - \frac{m^2}{2} y_n^2(a) \right] \\ &= \frac{a^2}{2k_n^2} y_n'^2(a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) y_n^2(a)\end{aligned}$$

本征函数的模方

本征函数 $y_n(x) = J_m(k_n x)$ 的模方

$$\|y_n(x)\|^2 \equiv \int_0^a y_n^2(x) x \, dx = \frac{a^2}{2k_n^2} y_n'^2(a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) y_n^2(a)$$

可改写为

$$\|J_m(k_n x)\|^2 \equiv \int_0^a J_m^2(k_n x) x \, dx = \frac{a^2}{2} J_m'^2(k_n a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) J_m^2(k_n a)$$

注意, $y_n'(a)$ 中的导数是**对自变量 x 求导**

而 $J_m'^2(k_n a)$ 中的导数是**对宗量 $k_n x$ 求导**, 故

$$y_n'(a) = \frac{dy_n(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{dJ_m(k_n x)}{dx} \Big|_{x=a} = k_n \frac{dJ_m(k_n x)}{d(k_n x)} \Big|_{x=a} = k_n J_m'(k_n a)$$

因此, 改写时用到 $\frac{y_n'^2(a)}{k_n^2} = J_m'^2(k_n a)$

第一类齐次边界条件

对于第一类齐次边界条件， $\alpha = 0$

超越方程 $\alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka) = 0$ 简化为 $J_m(ka) = 0$

可以用 $J_m(x)$ 的正零点 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将方程的正根表达成 $k_n = \frac{x_{mn}}{a}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

由于 $J_m(k_n a) = 0$ ，本征函数 $J_m(k_n x)$ 的模方化为

$$\|J_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2} J_m'^2(\textcolor{teal}{k}_n a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) J_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2} J_m'^2(\textcolor{violet}{x}_{mn})$$

第一类齐次边界条件

对于第一类齐次边界条件, $\alpha = 0$

超越方程 $\alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka) = 0$ 简化为 $J_m(ka) = 0$

可以用 $J_m(x)$ 的正零点 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将方程的正根表达成 $k_n = \frac{x_{mn}}{a}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

由于 $J_m(k_n a) = 0$, 本征函数 $J_m(k_n x)$ 的模方化为

$$\|J_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2} J_m'^2(k_n a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) J_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2} J_m'^2(x_{mn})$$

利用 $J_m(x_{mn}) = 0$ 和递推关系

$$x^m J_{m-1}(x) = [x^m J_m(x)]' = mx^{m-1} J_m(x) + x^m J_m'(x)$$

$$-x^{-m} J_{m+1}(x) = [x^{-m} J_m(x)]' = -mx^{-m-1} J_m(x) + x^{-m} J_m'(x)$$

推出 $x_{mn}^m J_{m-1}(x_{mn}) = x_{mn}^m J_m'(x_{mn})$ 和 $-x_{mn}^{-m} J_{m+1}(x_{mn}) = x_{mn}^{-m} J_m'(x_{mn})$

故 $J_m'^2(x_{mn}) = J_{m\pm 1}^2(x_{mn})$, 而模方化为 $\|J_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2} J_{m\pm 1}^2(x_{mn})$

第二类齐次边界条件

 对于第二类齐次边界条件, $\beta = 0$

 超越方程 $\alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka) = 0$ 简化为 $J'_m(ka) = 0$

可以用 $J'_m(x)$ 的正零点 $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将方程的正根表达成 $k_n = \frac{\tilde{x}_{mn}}{a}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

由于 $J'_m(k_n a) = 0$ ，本征函数 $J_m(k_n x)$ 的模方化为

$$\|\mathbf{J}_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2} \mathbf{J}'_m^2(k_n a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) \mathbf{J}_m^2(k_n a) = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\tilde{x}_{mn}^2} \right) \mathbf{J}_m^2(\tilde{x}_{mn})$$

第二类齐次边界条件

 对于第二类齐次边界条件, $\beta = 0$

 超越方程 $\alpha k J'_m(ka) + \beta J_m(ka) = 0$ 简化为 $J'_m(ka) = 0$

可以用 $J'_m(x)$ 的正零点 $\{\tilde{x}_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 将方程的正根表达成 $k_n = \frac{\tilde{x}_{mn}}{a}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

由于 $J'_m(k_n a) = 0$, 本征函数 $J_m(k_n x)$ 的模方化为

$$\|\mathbf{J}_m(k_n x)\|^2 = \frac{a^2}{2} \mathbf{J}'_m^2(k_n a) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) \mathbf{J}_m^2(\mathbf{k}_n a) = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\tilde{x}_{mn}^2} \right) \mathbf{J}_m^2(\tilde{x}_{mn})$$

注 严格来说，以上记号 k_n 应该记作 k_{mn} ，本征函数 $y_n(x) = J_m(k_n x)$ 应该记作 $y_{mn}(x) = J_m(k_{mn} x)$

 对于第二类齐次边界条件和 $m = 0$ 的情况，需要增加一个本征值 $\lambda_{00} = 0$ 和相应的本征函数 $y_{00}(x) = 1$ ，该本征函数的模方为

$$\|y_{00}(x)\|^2 = \int_0^a x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

§2.11 广义 Fourier 级数

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，本征函数族 $\{J_m(k_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, a]$ 上是完备的

也就是说，区间 $[0, a]$ 上任何解析良好的函数 $f(x)$ ，如果满足与本征值问题相同的边界条件，就一定可以展开为广义 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_m(k_n x), \quad 0 \leq x \leq a$$

利用正交关系，求得展开系数为

$$f_n = \frac{1}{\|J_m(k_n x)\|^2} \int_0^a f(x) J_m(k_n x) x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

注意右边积分包含权函数 $\rho(x) = x$

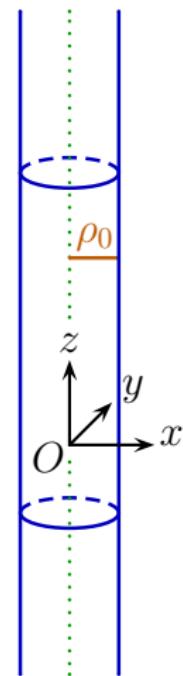
§2.12 应用

例 无穷长均匀导热圆柱体，半径为 ρ_0 ，侧面保持温度为零度，柱内的初始温度分布为已知函数 $f(\rho, \phi)$ ，求柱内各处的温度变化

采用柱坐标系，以圆柱的对称轴为 z 轴，任取轴上一点为原点

柱内的温度分布 $u(r, t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0 & (\rho < \rho_0, t > 0) \\ u|_{\rho=\rho_0} = 0 \\ u|_{t=0} = f(\rho, \phi) \end{cases}$$



§2.12 应用

例 无穷长均匀导热圆柱体，半径为 ρ_0 ，侧面保持温度为零度，柱内的初始温度分布为已知函数 $f(\rho, \phi)$ ，求柱内各处的温度变化

采用柱坐标系，以圆柱的对称轴为 z 轴，任取轴上一点为原点

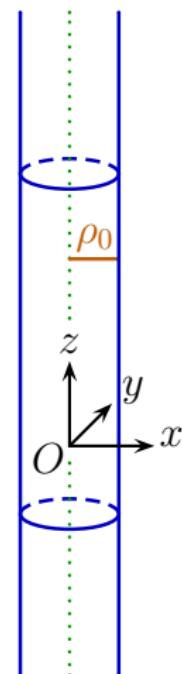
柱内的温度分布 $u(r, t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0 & (\rho < \rho_0, t > 0) \\ u|_{\rho=\rho_0} = 0 \\ u|_{t=0} = f(\rho, \phi) \end{cases}$$

分离变量，令 $u(r, t) = v(r)T(t)$ ，代入热传导方程，得

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = v(r)T'(t) - a^2 T(t) \nabla^2 v(r) = 0$$

即 $\frac{\nabla^2 v}{v} = \frac{T'}{a^2 T} \equiv -\lambda$ ，其中 λ 为常数



分离变量

- ❶ 得到常微分方程 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 和本征值问题 $\begin{cases} \nabla^2 v + \lambda v = 0, & \rho < \rho_0 \\ v|_{\rho=\rho_0} = 0 \end{cases}$
- ❷ 其中 $\rho = \rho_0$ 处边界条件来自 $u|_{\rho=\rho_0} = 0$
- ❸ 由于圆柱无穷长, 初始条件和边界条件均与 z 无关, 所以 u 和 v 也与 z 无关
- ❹ 进一步分离变量, 令 $v(r) = R(\rho)\Phi(\phi)$

分离变量

得到常微分方程 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 和本征值问题 $\begin{cases} \nabla^2 v + \lambda v = 0, & \rho < \rho_0 \\ v|_{\rho=\rho_0} = 0 \end{cases}$

其中 $\rho = \rho_0$ 处边界条件来自 $v|_{\rho=\rho_0} = 0$

由于圆柱无穷长，初始条件和边界条件均与 z 无关，所以 u 和 v 也与 z 无关

进一步分离变量，令 $v(r) = R(\rho)\Phi(\phi)$ ，代入方程，得

$$\nabla^2 v + \lambda v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = R'' \Phi + \frac{R' \Phi}{\rho} + \frac{R \Phi''}{\rho^2} + \lambda R \Phi = 0$$

即 $\frac{\rho^2}{R} \left(R'' + \frac{R'}{\rho} + \lambda R \right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu$ ，其中 μ 为常数

于是得到方程 $\Phi'' + \mu \Phi = 0$ ，结合周期性边界条件 $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ ，解得

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

ρ 方向的本征值问题

另一方面， $R(\rho)$ 满足的本征值问题为

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0, & 0 < \rho < \rho_0 \\ R(0) = 0 \text{ (} m \neq 0 \text{)} \text{ 或 } |R(0)| < \infty \text{ (} m = 0 \text{)} \\ R(\rho_0) = 0 \end{cases}$$

其中， $\rho = 0$ 处的边界条件是自然边界条件

 $\rho = \rho_0$ 处第一类齐次边界条件则来自 $v|_{\rho=\rho_0} = 0$

 根据前面 §2.8 和 §2.10 的讨论，对于给定的 m 值，本征值为

$$\lambda_{mn} = k_{mn}^2, \quad k_{mn} = \frac{x_{mn}}{\rho_0}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中 $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $J_m(x)$ 的正零点，相应的本征函数为

$$R_{mn}(\rho) = J_m(k_{mn}\rho), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

一般解

将本征值 $\lambda_{mn} = k_{mn}^2$ 代回 $T(t)$ 的方程 $T'_{mn}(t) + \lambda_{mn}a^2 T_{mn}(t) = 0$ ，解得

$$T_{mn}(t) = \exp(-\lambda_{mn}a^2 t)$$

将各本征解叠加，得到一般解为

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(k_{0n}\rho) \exp(-\lambda_{0n}a^2 t) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) (A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi) \exp(-\lambda_{mn}a^2 t) \end{aligned}$$

代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(k_{0n}\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) (A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi) = f(\rho, \phi)$$

这是双重 Fourier 展开式

Fourier 展开式的系数公式

 $f(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(k_{0n}\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) (A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi)$

对于 ϕ 是普通的 Fourier 展开式，根据系数公式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(k_{0n}\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) d\phi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(k_{mn}\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \cos m\phi d\phi, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(k_{mn}\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \sin m\phi d\phi, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

 在以上各式中，右边是 ρ 的函数，左边是其广义 Fourier 展开式

 根据 §2.11 的系数公式，可以得到 A_{0n} 、 A_{mn} 和 B_{mn} 的积分表示式

系数的积分表达式

 利用前面推出的 $\|J_m(k_{mn}\rho)\|^2 = \frac{\rho_0^2}{2} J_{m+1}^2(x_{mn})$ 和权函数，将系数表达为

$$A_{0n} = \frac{1}{\pi \rho_0^2 J_1^2(x_{0n})} \int_0^{\rho_0} d\rho \, \textcolor{blue}{J}_0(k_{0n}\rho) \int_0^{2\pi} d\phi \, f(\rho, \phi), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi \rho_0^2 \textcolor{blue}{J}_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{\rho_0} d\rho \, \textcolor{red}{\rho} \, \textcolor{blue}{J}_m(k_{mn}\rho) \int_0^{2\pi} d\phi \, f(\rho, \phi) \cos m\phi, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi \rho_0^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{\rho_0} d\rho \, \rho \, J_m(k_{mn}\rho) \int_0^{2\pi} d\phi \, f(\rho, \phi) \sin m\phi, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

 如果给定 $f(\rho, \phi)$ 的具体形式，那么原则上可以由以上各式计算系数

 然后代回一般解，就得到最后的结果

系数的积分表达式

 利用前面推出的 $\|\mathbf{J}_m(k_{mn}\rho)\|^2 = \frac{\rho_0^2}{2} \mathbf{J}_{m+1}^2(x_{mn})$ 和权函数，将系数表达为

$$A_{0n} = \frac{1}{\pi\rho_0^2 \mathbf{J}_1^2(x_{0n})} \int_0^{\rho_0} d\rho \rho \mathbf{J}_0(k_{0n}\rho) \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho, \phi), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi\rho_0^2 \mathbf{J}_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{\rho_0} d\rho \rho \mathbf{J}_m(k_{mn}\rho) \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho, \phi) \cos m\phi, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi\rho_0^2 \mathbf{J}_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{\rho_0} d\rho \rho \mathbf{J}_m(k_{mn}\rho) \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho, \phi) \sin m\phi, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

 如果给定 $f(\rho, \phi)$ 的具体形式，那么原则上可以由以上各式计算系数

 然后代回一般解，就得到最后的结果

 容易看出，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $T_{mn}(t) = \exp(-\lambda_{mn}a^2 t)$ 表明 $u(\rho, \phi, t) \rightarrow 0$

 即柱内温度分布达到侧面保持的温度，也就是环境的温度

 这一点与初始温度分布 $f(\rho, \phi)$ 的具体形式无关

特例 1

♥ 特例 1 如果 $f(\rho, \phi) = f(\rho)$ 与 ϕ 无关, 那么, 由

$$\int_0^{2\pi} d\phi f(\rho) \cos m\phi = \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho) \sin m\phi = 0$$

得

$$A_{mn} = B_{mn} = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}^+)$$

🐚 结果简化为

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(k_{0n}\rho) \exp(-\lambda_{0n}a^2 t)$$

🐙 其中

$$A_{0n} = \frac{2}{\rho_0^2 J_1^2(x_{0n})} \int_0^{\rho_0} J_0(k_{0n}\rho) f(\rho) \rho d\rho, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

特例 2

特例 2 如果在特例 1 的条件下, 进一步给定 $f(\rho) = u_0$, 其中 u_0 是常数

那么，作变量替换 $x = k_{0n}\rho$ ，利用递推关系 $[xJ_1(x)]' = xJ_0(x)$ 推出

$$\int_0^{\rho_0} \rho J_0(k_{0n}\rho) d\rho = \frac{1}{k_{0n}^2} \int_0^{k_{0n}\rho_0} x J_0(x) dx = \frac{1}{k_{0n}^2} x J_1(x) \Big|_0^{k_{0n}\rho_0}$$

$$= \frac{\rho_0}{k_{0n}} J_1(k_{0n}\rho_0) = \frac{\rho_0^2}{x_{0n}} J_1(x_{0n})$$

其中 $x_{0n} = k_{0n}\rho_0$ 是 $J_0(x)$ 的正零点，故

$$A_{0n} = \frac{2}{\rho_0^2 J_1^2(x_{0n})} \int_0^{\rho_0} u_0 J_0(k_{0n}\rho) \rho d\rho = \frac{2u_0}{\rho_0^2 J_1^2(x_{0n})} \frac{\rho_0^2}{x_{0n}} J_1(x_{0n}) = \frac{2u_0}{x_{0n} J_1(x_{0n})}$$

 结果简化为

$$u(\rho, t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(k_{0n}\rho)}{x_{0n} J_1(x_{0n})} \exp(-\lambda_{0n} a^2 t)$$

§3 虚宗量 Bessel 函数

在柱坐标系中对常见的数理方程分离变量

除了遇到 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$ 之外，还会遇到下列方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

这称为 ν 阶虚宗量 Bessel 方程，物理上遇到的通常是 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况

令 $t = ix$ ，则 $\frac{1}{x} = \frac{i}{t}$ ， $\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = i \frac{d}{dt}$ ，那么这个方程可以改写为

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(i^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = i^2 \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) y \right]$$

从而得到以 t 为自变量的 ν 阶 Bessel 方程 $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) y = 0$

所以它的解是柱函数 $y(t) = Z_\nu(t)$ ，即 ν 阶的虚宗量柱函数 $Z_\nu(ix)$



虚宗量柱函数

应该指出，**柱函数的宗量本来就可以是复数**，所以 $Z_\nu(ix)$ 和 $Z_\nu(x)$ 没有本质区别

那么人们为什么要专门定义**虚宗量柱函数**呢？这有两个原因

第一，对于物理问题， x 通常是**实数**，那么 ix 就是**纯虚数**

宗量为**纯虚数**时，柱函数的性质与宗量为**实数**时颇为不同，类似**双曲函数与三角函数**的区别 [$\cos(ix) = \cosh x$ ， $\sin(ix) = i \sinh x$]

第二，作为物理问题的解，宗量为**纯虚数**的柱函数与宗量为**实数**的柱函数是最常见的两种情况，两者均受到重视

为了便于应用，需要对 $Z_\nu(ix)$ 乘以**恰当的系数**，使得 x 为**实数**时方程的解 $y(x)$ 也是**实数**

为此，人们定义了**两类虚宗量 Bessel 函数**，以下分别讨论

虚宗量 Bessel 函数也称为**变型 Bessel 函数**

§3.1 虚宗量 Bessel 函数



七 阶虚宗量 Bessel 函数定义为

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2}x)$$



它是 ν 阶虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 的解，注意 $e^{i\pi/2} = i$



当 $k \in \mathbb{N}$ 时, 有 $e^{-i\nu\pi/2}(e^{i\pi/2})^{2k+\nu} = e^{ik\pi} = \cos k\pi + i \sin k\pi = (-1)^k$



由 $J_\nu(x)$ 的级数形式推出 $I_\nu(x)$ 的级数形式

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{e^{i\pi/2} x}{2} \right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$



当 x 和 ν 都是实数时, $I_\nu(x)$ 的函数值为实数, 所以上述定义是方便的.



 $I_\nu(x)$ 也称为变型 Bessel 函数、第一类虚宗量 Bessel 函数或第一类变型 Bessel 函数

整数阶虚宗量 Bessel 函数

当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时, 由于 $\Gamma(k+m+1) = (k+m)!$, $I_\nu(x)$ 的级数简化为

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

当 $x \geq 0$ 时, $I_m(x)$ 是单调递增函数, 这与 $J_m(x)$ 的衰减振荡图像截然不同

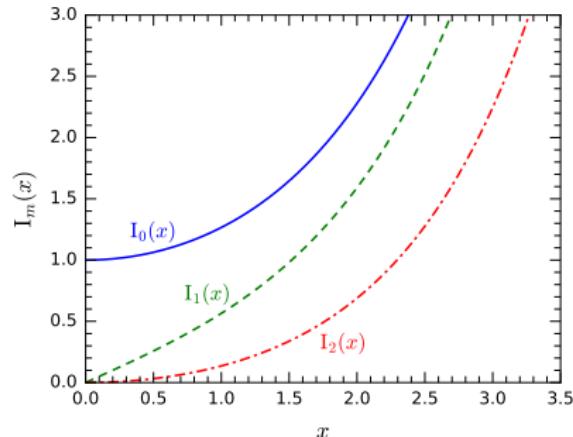
粗略地说， $J_m(x)$ 类似于三角函数，而 $I_m(x)$ 类似于指数函数

由 $I_m(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^{2k+m}}{k!(k+m)!}$ 可见,

$$I_0(0) = 1, \quad I_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

图 1-1-1 $I_0(x)$ 、 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$ 的图像见右图

而 $I_m(x)$ ($m \geq 3$) 的图像与 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$ 类似



 对 $I_{-m}(x)$ 的级数形式作变量替换 $k \rightarrow k + m$ ，得

$$\begin{aligned} I_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \end{aligned}$$

 可见 $I_{-m}(x) = I_m(x)$ ，即负整数阶和正整数阶的虚宗量 Bessel 函数是相同的

递推关系

 对 $I_{-m}(x)$ 的级数形式作变量替换 $k \rightarrow k + m$ ，得

$$\begin{aligned} I_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \end{aligned}$$

 可见 $I_{-m}(x) = I_m(x)$ ，即负整数阶和正整数阶的虚宗量 Bessel 函数是相同的

 利用 $J_\nu(x)$ 递推关系 $\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$, $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

 可以推出虚宗量 Bessel 函数 $I_\nu(x)$ 的递推关系

$$\frac{d}{dx}[x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu} I_\nu(x)] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

 第二个递推关系与柱函数递推关系的形式不同，根据定义， $I_\nu(x)$ 不是柱函数

 令 $\nu = 0$ ，得到第二个递推关系的特例 $I'_0(x) = I_1(x)$

§3.2 虚宗量 Hankel 函数



ν 阶虚宗量 Hankel 函数定义为

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$$

它是虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$

的另一个解，与 $I_\nu(x)$ 线性独立

它也称为第二类虚宗量 Bessel 函数、第二类变形 Bessel 函数或 Macdonald 函数



Hector Munro Macdonald
(1865–1935)

§3.2 虚宗量 Hankel 函数

🌊 ν 阶虚宗量 Bessel 函数定义为

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$$

📌 它是虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$

的另一个解，与 $I_\nu(x)$ 线性独立



Hector Munro Macdonald
(1865–1935)

📌 它也称为第二类虚宗量 Bessel 函数、第二类变形 Bessel 函数或 Macdonald 函数

📌 可以证明 $K_\nu(x) = \frac{i\pi e^{i\nu\pi/2}}{2} H_\nu^{(1)}(e^{i\pi/2}x)$ ，这是它称为虚宗量 Hankel 函数的原因

🏊 由定义易知， $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$ 。此外， $K_\nu(x)$ 的递推关系为

$$\frac{d}{dx}[x^\nu K_\nu(x)] = -x^\nu K_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu} K_\nu(x)] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)$$

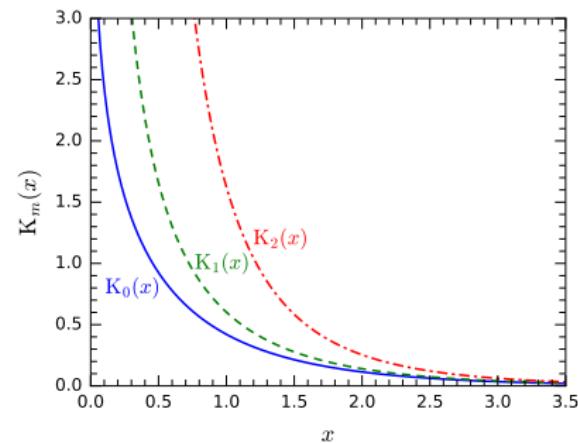
девушк第一条递推关系与柱函数递推关系的形式不同，因而 $K_\nu(x)$ 也不是柱函数

整数阶虚宗量 Hankel 函数

 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时, $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$ 成为 $\frac{0}{0}$ 型, 此时定义

$$K_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} K_\nu(x)$$

 $K_0(x)$ 、 $K_1(x)$ 和 $K_2(x)$ 的图像见右下图, $K_m(x)$ ($m \geq 3$) 的图像是类似的



整数阶虚宗量 Hankel 函数

 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时, $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$ 成为 $\frac{0}{0}$ 型, 此时定义

$$K_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} K_\nu(x)$$

 $K_0(x)$ 、 $K_1(x)$ 和 $K_2(x)$ 的图像见右下图， $K_m(x)$ ($m \geq 3$) 的图像是类似的。

现在考虑虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ 的解

可以假设 $\operatorname{Re} \nu > 0$ 而不失一般性

如果 $\nu \notin \mathbb{N}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

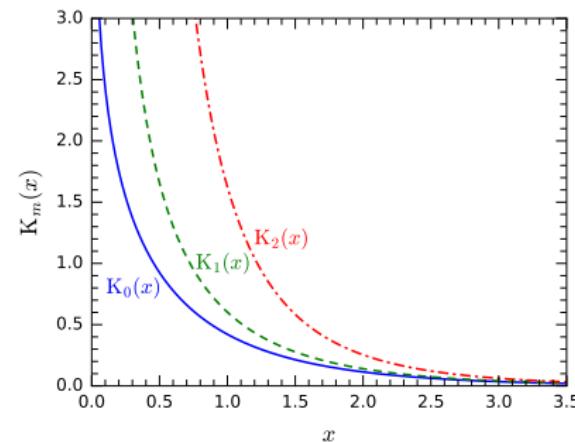
$$I_\nu(x) \rightarrow 0, \quad I_{-\nu}(x) \rightarrow \infty, \quad K_\nu(x) \rightarrow \infty$$

 若求解区间包含 $x = 0$ ，应当舍弃 $K_\nu(x)$

 当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时，同样可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_m(x) = \infty$$

所以结论也是**舍弃** $K_m(x)$



§3.3 漐近形式

 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 的渐近形式可以通过 $J_\nu(x)$ 和 $H_\nu^{(1)}(x)$ 的渐近形式导出，结果为

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$$

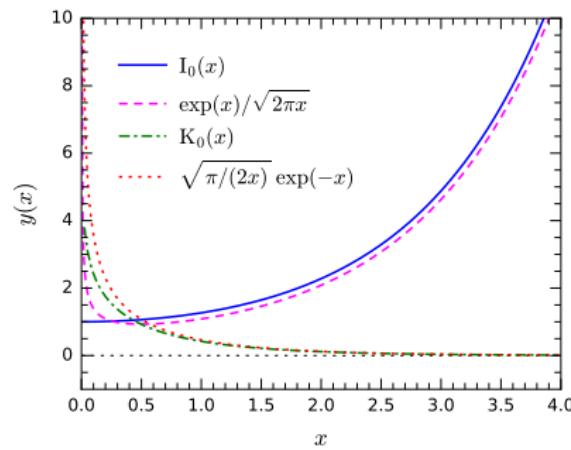
$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad -\pi < \arg x < \pi$$

需要用到的情况主要是 $x \rightarrow +\infty$ 的情况

$K_\nu(x)$ 的定义使得 $x \rightarrow +\infty$ 时不出现

发散的部分，从而 $K_\nu(x) \rightarrow 0$

这使得 $K_\nu(x)$ 成为柱外问题的恰当解



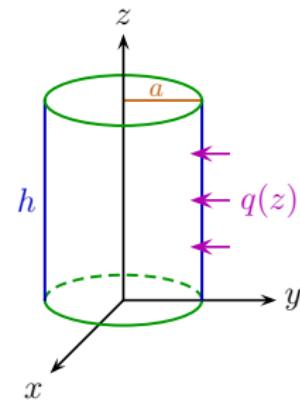
§3.4 应用

例 均匀导热圆柱体，半径为 a ，高为 h ，侧面有恒定热流 $q(z)$ 流入，上下底保持常数温度 u_0 ，求柱内的稳定温度分布

采用柱坐标系，以圆柱对称轴为 z 轴，方向自下底指向上底

边界条件与 ϕ 无关，故柱内的稳定温度分布 $u(r) = u(\rho, z)$ 也与 ϕ 无关，记热导率为 k ，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (\rho < a, 0 < z < h) \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{q(z)}{k} \\ u|_{z=0} = u_0, \quad u|_{z=h} = u_0 \end{cases}$$



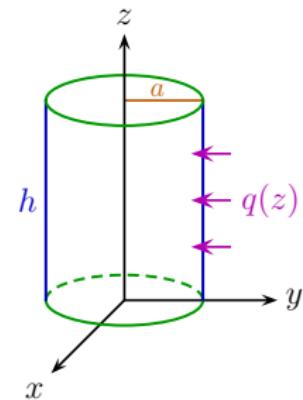
§3.4 应用

例 均匀导热圆柱体，半径为 a ，高为 h ，侧面有恒定热流 $q(z)$ 流入，上下底保持常数温度 u_0 ，求柱内的稳定温度分布

采用柱坐标系，以圆柱对称轴为 z 轴，方向自下底指向上底

边界条件与 ϕ 无关，故柱内的稳定温度分布 $u(r) = u(\rho, z)$ 也与 ϕ 无关，记热导率为 k ，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (\rho < a, 0 < z < h) \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{q(z)}{k} \\ u \Big|_{z=0} = u_0, \quad u \Big|_{z=h} = u_0 \end{cases}$$



为了将边界条件齐次化，令 $u(\rho, z) = u_0 + v(\rho, z)$ ，则

$$\nabla^2 v = \nabla^2(u - u_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{\partial(u - u_0)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{q(z)}{k}$$

$$v \Big|_{z=0} = u \Big|_{z=0} - u_0 = 0, \quad v \Big|_{z=h} = u \Big|_{z=h} - u_0 = 0$$

分离变量

 现在, $v(\rho, z)$ 满足的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 & (\rho < a, 0 < z < h) \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{q(z)}{k} \\ v \Big|_{z=0} = 0, \quad v \Big|_{z=h} = 0 \end{cases}$$

 分离变量, 令 $v(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$, 代入 Laplace 方程, 得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = R'' Z + \frac{R' Z}{\rho} + R Z'' = 0$$

 即 $\frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} = -\frac{Z''}{Z} \equiv \lambda$, 其中 λ 是常数

 从而, $R(\rho)$ 满足常微分方程 $R'' + \frac{1}{\rho} R' - \lambda R = 0$

本征值问题



另一方面, $Z(z)$ 满足**本征值问题**

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0 \end{cases}$$



其中**边界条件**来自 $v|_{z=0} = 0$ 和 $v|_{z=h} = 0$



这个**本征值问题**是我们所熟悉的, **本征值**和**本征函数**为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{h}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$



本征值问题



另一方面, $Z(z)$ 满足**本征值问题**

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0 \end{cases}$$



其中**边界条件**来自 $v|_{z=0} = 0$ 和 $v|_{z=h} = 0$



这个**本征值问题**是我们所熟悉的, **本征值**和**本征函数**为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{h}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$



将**本征值** λ_n 代回 $R(\rho)$ 的方程, 令 $x \equiv \frac{n\pi}{h} \rho$, $y(x) \equiv R(\rho)$, 则

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n\pi}{h} \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \frac{n\pi}{h} \frac{d}{dx}$$

$$0 = \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 R = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - y \right)$$

一般解

 可见, $y(z)$ 满足 0 阶虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$

 因此, 两个线性独立解是

$$R_n(\rho) = y(x) = \{I_0(x), K_0(x)\} = \left\{I_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right), K_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)\right\}$$

 但是, $K_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)$ 在 $\rho = 0$ 处有奇性, 应该舍弃, 故

$$R_n(\rho) = I_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)$$

 于是, 一般解可取为

$$v(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{I_0(n\pi\rho/h)}{I_1(n\pi a/h)} \sin \frac{n\pi z}{h}$$

 其中分母引入 $I_1(n\pi a/h)$ 是为了下面的方便

定解问题的解

 由递推关系 $I'_0(x) = I_1(x)$ 得 $\frac{d}{d\rho} I_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right) = \frac{n\pi}{h} I'_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right) = \frac{n\pi}{h} I_1\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)$

 将一般解代入 $\rho = a$ 处的边界条件，得

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{I_1(n\pi a/h)} \left. \frac{dI_0(n\pi\rho/h)}{d\rho} \right|_{\rho=a} \sin \frac{n\pi z}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi z}{h} = \frac{q(z)}{k}$$

定解问题的解

 由递推关系 $I'_0(x) = I_1(x)$ 得 $\frac{d}{d\rho} I_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right) = \frac{n\pi}{h} I'_0\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right) = \frac{n\pi}{h} I_1\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)$

 将一般解代入 $\rho = a$ 处的边界条件，得

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{I_1(n\pi a/h)} \left. \frac{d I_0(n\pi\rho/h)}{d\rho} \right|_{\rho=a} \sin \frac{n\pi z}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi z}{h} = \frac{q(z)}{k}$$

 本征函数模方是 $\left\| \sin \frac{n\pi z}{h} \right\|^2 = \frac{h}{2}$ ，系数公式为 $A_n \frac{n\pi}{h} = \frac{2}{h} \int_0^h \frac{q(z)}{k} \sin \frac{n\pi z}{h} dz$

 从而，一般解系数表达为 $A_n = \frac{2}{n\pi k} \int_0^h q(z) \sin \frac{n\pi z}{h} dz$

 如果给出 $q(z)$ 的具体形式，那么原则上可以由上式计算出各个系数，然后再代回

解式 $v(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{I_0(n\pi\rho/h)}{I_1(n\pi a/h)} \sin \frac{n\pi z}{h}$

 最终，原定解问题的解为 $u(\rho, z) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{I_0(n\pi\rho/h)}{I_1(n\pi a/h)} \sin \frac{n\pi z}{h}$

特例

 **特例** 如果 $q(z) = q_0 \sin \frac{\pi z}{h}$, 其中 q_0 是常数, 则 $\rho = a$ 处的**边界条件**化为

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi z}{h} = \frac{q(z)}{k} = \frac{q_0}{k} \sin \frac{\pi z}{h}$$

 比较两边系数, 得 $A_1 \frac{\pi}{h} = \frac{q_0}{k}$, 即

$$A_1 = \frac{q_0 h}{\pi k}, \quad A_n = 0 \ (n \geq 2)$$

 从而, 结果简化为

$$u(\rho, z) = u_0 + \frac{q_0 h}{\pi k} \frac{I_0(\pi\rho/h)}{I_1(\pi a/h)} \sin \frac{\pi z}{h}$$