

手征性与螺旋度  
○○○○○○○

$e^- \mu^-$  散射  
○○○○○○○

$e^- p$  散射  
○○○○○○○

Coulomb 势能  
○○○○○○○

Yukawa 势能  
○○○○○

交叉对称性  
○○○○○○○

Mandelstam 变量  
○○○○○○○○○○

# 量子场论

## 第 7 章 量子电动力学

### 7.3 节至 7.5 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2022 年 12 月 12 日



## 7.3 节 手征性与螺旋度

 本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

 在 **Weyl 表象**中利用  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  引入**左手投影矩阵**  $P_L$  和**右手投影矩阵**  $P_R$  ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

 它们是**厄米**的, 而且具有**投影性**  $P_L^2 = P_L$ ,  $P_R^2 = P_R$ , **正交性**  $P_L P_R = P_R P_L = 0$  和**完备性**  $P_L + P_R = 1$ , 由  $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$  得  $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$ ,  $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

## 7.3 节 手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

在 **Weyl 表象**中利用  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  引入**左手投影矩阵**  $P_L$  和**右手投影矩阵**  $P_R$  ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的, 而且具有**投影性**  $P_L^2 = P_L$ ,  $P_R^2 = P_R$ , **正交性**  $P_L P_R = P_R P_L = 0$  和**完备性**  $P_L + P_R = 1$ , 由  $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$  得  $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$ ,  $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

将 **Dirac 旋量场**  $\psi$  分解为**左手 Weyl 旋量场**  $\eta_L$  和**右手 Weyl 旋量场**  $\eta_R$

**左手**的四分量**旋量场**定义为  $\psi_L \equiv P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_L \\ 0 \end{pmatrix}$

**右手**的四分量**旋量场**定义为  $\psi_R \equiv P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_R \end{pmatrix}$

可见, 左右手投影矩阵正好挑选出具有**相应手征性**的分量

# 左右手投影分解

 将  $1 \pm \gamma^5$  的简化地写成  $1 \pm \gamma^5$ ，左手旋量场  $\psi_L$  的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

 同理得右手旋量场  $\psi_R$  的 Dirac 共轭为  $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

# 左右手投影分解

将  $1 \pm \gamma^5$  的简化地写成  $1 \pm \gamma^5$ , 左手旋量场  $\psi_L$  的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

同理得右手旋量场  $\psi_R$  的 Dirac 共轭为  $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解, 得

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (P_L + P_R) \psi = \bar{\psi} (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi + \bar{\psi} P_L \gamma^\mu P_R \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi_R$$

包含偶数(奇数)个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反(相同)的旋量场

拉氏量中的 Dirac 旋量场质量项分解为  $-m \bar{\psi} \psi = -m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$

也就是说, 质量  $m$  将左手旋量场  $\psi_L$  与右手旋量场  $\psi_R$  耦合起来

# 高能极限

↖ 在高能极限下，忽略旋量场的质量  $m$ ，则  $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

↗ 故  $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$ ,  $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

↖ 按照 4.4.2 小节中平面波旋量系数  $u$  和  $v$  的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

# 高能极限

在高能极限下，忽略旋量场的质量  $m$ ，则  $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

故  $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$ ,  $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

按照 4.4.2 小节中平面波旋量系数  $u$  和  $v$  的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

此时，螺旋度不同的  $u$  和  $v$  显示出不同手征性

$u(\mathbf{p}, +)$  和  $v(\mathbf{p}, -)$  是右手的， $u(\mathbf{p}, -)$  和  $v(\mathbf{p}, +)$  是左手的

可见，高能极限下手征性等价于螺旋度

注意， $u(\mathbf{p}, \lambda)$  是本征值为  $\lambda$  的螺旋度本征态，与螺旋度为  $\lambda$  的正费米子相关

$v(\mathbf{p}, \lambda)$  是本征值为  $-\lambda$  的螺旋度本征态，却与螺旋度为  $\lambda$  的反费米子相关

# 旋量系数的左右手投影



由于高能极限下  $u(\mathbf{p}, -)$  和  $v(\mathbf{p}, +)$  是左手的,  $u(\mathbf{p}, +)$  和  $v(\mathbf{p}, -)$  是右手的



用投影矩阵作用, 得

$$u_L(\mathbf{p}, -) = P_L u(\mathbf{p}, -) \simeq u(\mathbf{p}, -), \quad u_R(\mathbf{p}, +) = P_R u(\mathbf{p}, +) \simeq u(\mathbf{p}, +)$$

$$u_L(\mathbf{p}, +) = P_L u(\mathbf{p}, +) \simeq 0, \quad u_R(\mathbf{p}, -) = P_R u(\mathbf{p}, -) \simeq 0$$

$$v_L(\mathbf{p}, +) = P_L v(\mathbf{p}, +) \simeq v(\mathbf{p}, +), \quad v_R(\mathbf{p}, -) = P_R v(\mathbf{p}, -) \simeq v(\mathbf{p}, -)$$

$$v_L(\mathbf{p}, -) = P_L v(\mathbf{p}, -) \simeq 0, \quad v_R(\mathbf{p}, +) = P_R v(\mathbf{p}, +) \simeq 0$$



相应的 Dirac 共轭满足

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, -), \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq u(\mathbf{p}, +)$$

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq 0, \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq 0$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq v(\mathbf{p}, +), \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq v(\mathbf{p}, -)$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq 0, \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq 0$$

# 高能极限下的手征旋量场

将投影矩阵作用到  $\psi(x)$  平面波解上，得到**手征旋量场**的平面波解

$$\psi_L(x) = P_L \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

$$\psi_R(x) = P_R \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ u(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

17 相应的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L(x) = [\psi_L(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \bar{u}(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} \right]$$

$$\bar{\psi}_R(x) = [\psi_R(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \bar{u}(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} \right]$$

在高能极限下，忽略质量

左手旋量场  $\psi_L(x)$  描述**左旋极化的正费米子**和**右旋极化的反费米子**

右手旋量场  $\psi_R(x)$  描述**右旋极化的正费米子**和**左旋极化的反费米子**

$\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$  成为两个**相互独立**的场

# 旋量系数的左右手投影

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式  $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$  在旋量系数上的体现

# 旋量系数的左右手投影

 在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

 此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式  $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$  在旋量系数上的体现

 一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

# 旋量系数的左右手投影

对于  $u$  和  $v$  一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

# 旋量系数的左右手投影

对于  $u$  和  $v$  一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

容易看出，在高能极限下，忽略质量，只有  $\lambda_1 = -\lambda_2$  且  $\lambda'_1 = -\lambda'_2$  的螺旋度构型对  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  极化振幅

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = \frac{e^2}{E_{CM}^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$$

的贡献非零，与上一小节的计算结果一致

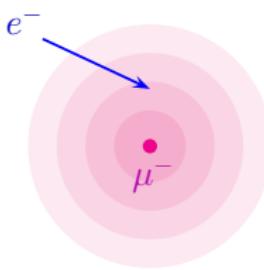
如果忽略质量，则其它螺旋度构型的贡献正比于质量，表现出螺旋度压低效应

## 7.4 节 Coulomb 散射

7.4.1 小节  $e^- \mu^-$  散射

现在讨论与  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  湮灭过程关系密切的  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  散射过程

这个过程对应于电子受  $\mu^-$  子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射



Charles-Augustin de Coulomb  
(1736–1806)

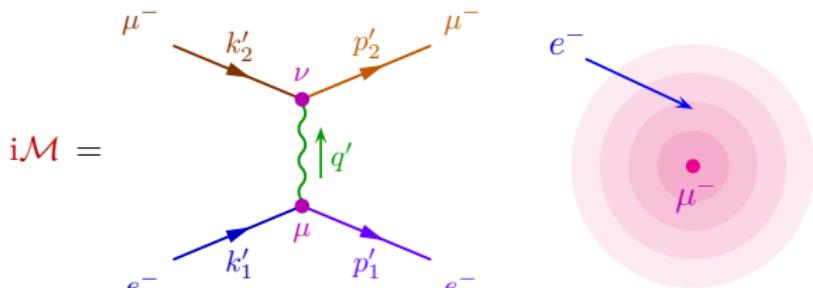
## 7.4 节 Coulomb 散射

### 7.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

💡 现在讨论与  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  湮灭过程关系密切的  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  散射过程

🏮 这个过程对应于电子受  $\mu$  子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射

蠟烛 它的领头阶费曼图与  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  类似，但线的方向不同，相应的不变振幅为



$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(p'_1) (ie\gamma^\mu) u(k'_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q'^2} \bar{u}(p'_2) (ie\gamma^\nu) u(k'_2) \\ &= \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(k'_2) \end{aligned}$$



Charles-Augustin de Coulomb  
(1736–1806)

蠟烛 这里将旋量系数  $u$  和  $\bar{u}$  简写成在壳四维动量的函数，且没有写出对螺旋度的依赖

💡 虚光子的四维动量  $q'^\mu = k'^\mu_1 - p'^\mu_1 = p'^\mu_2 - k'^\mu_2$

# 非极化振幅模方

$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2)$  的复共轭是

$$(i\mathcal{M})^* = -\frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2)$$

非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2) \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \text{tr}[u(p'_1)\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu] \text{tr}[u(p'_2)\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu] \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu] \end{aligned}$$

$\sum_{\text{spins}}$  表示对自旋求和，即对螺旋度求和

# 交叉对称性

比较  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  湮灭与  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  散射的非极化振幅模方：

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\nu]$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu) \gamma_\nu]$$

容易看出， $|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2$  相当于对  $|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2$  作动量替换

$$k_1^\mu \rightarrow k'_1{}^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p'_2{}^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$$

$\checkmark q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow q'^\mu = k'_1{}^\mu - p'_1{}^\mu$ ，这种关系称为交叉对称性 (crossing symmetry)

# 交叉对称性

比较  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  湮灭与  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  散射的非极化振幅模方：

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(\mathbf{q}^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\nu]$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(\mathbf{q}'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu) \gamma_\nu]$$

容易看出， $|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2$  相当于对  $|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2$  作动量替换

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

勾  $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu$ ，这种关系称为交叉对称性 (crossing symmetry)

通过这样的动量替换，从  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  的计算结果

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(\mathbf{q}^2)^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + 2m_e^2m_\mu^2]$$

直接得到  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  非极化振幅模方的表达式

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(\mathbf{q}'^2)^2} [(\not{k}'_1 \cdot \not{p}'_2)(\not{p}'_1 \cdot \not{k}'_2) + (\not{k}'_1 \cdot \not{k}'_2)(\not{p}'_1 \cdot \not{p}'_2) - m_e^2(\not{p}'_2 \cdot \not{k}'_2) - m_\mu^2(\not{k}'_1 \cdot \not{p}'_1) + 2m_e^2m_\mu^2]$$

# 质心系



在质心系中，根据 5.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子动量满足

$$|\mathbf{k}'_1| = |\mathbf{k}'_2| = |\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_e^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \equiv Q$$

也就是说，初末态四个粒子的动量大小都是  $Q$ ，相应的能量是

$$k'^0_1 = p'^0_1 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_e, \quad k'^0_2 = p'^0_2 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_\mu$$

$E_e$  是初末态电子能量， $E_\mu$  是初末态  $\mu$  子能量

设散射角  $\theta$  为  $\mathbf{k}'_1$  与  $\mathbf{p}'_1$  方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = k'^0_1 p'^0_1 - |\mathbf{k}'_1||\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e^2 - Q^2 \cos \theta$$

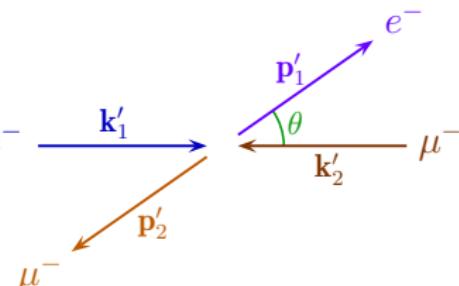
$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = k'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{k}'_1||\mathbf{p}'_2| \cos \theta = E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2 = k'^0_2 p'^0_2 - |\mathbf{k}'_2||\mathbf{p}'_2| \cos \theta = E_\mu^2 - Q^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}'_1 = k'^0_2 p'^0_1 + |\mathbf{k}'_2||\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}'_2 = k'^0_1 k'^0_2 + |\mathbf{k}'_1||\mathbf{k}'_2| = E_e E_\mu + Q^2$$

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = p'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{p}'_1||\mathbf{p}'_2| = E_e E_\mu + Q^2$$



# 质心系中的非极化振幅模方

 虚光子的四维动量  $q'^\mu$  满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2 k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

 对任意  $\theta > 0$ ，有  $q'^2 < 0$ ，即虚光子是类空的

# 质心系中的非极化振幅模方

虚光子的四维动量  $q'^\mu$  满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

对任意  $\theta > 0$ ，有  $q'^2 < 0$ ，即虚光子是类空的

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1 - \cos \theta)^2} [(E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta)^2 + (E_e E_\mu + Q^2)^2 \\ &\quad - m_e^2(E_\mu^2 - Q^2 \cos \theta) - m_\mu^2(E_e^2 - Q^2 \cos \theta) + 2m_e^2 m_\mu^2] \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} \{2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 + Q^4(1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad + Q^2[2E_e E_\mu(1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta]\} \end{aligned}$$

微分截面的入射流因子是

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = E_e E_\mu \left( \frac{Q}{E_e} + \frac{Q}{E_\mu} \right) = E_e E_\mu \frac{Q(E_\mu + E_e)}{E_e E_\mu} = QE_{CM}$$

# 质心系中的微分截面

于是,  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{QE_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos \theta)^2} \{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \\ &\quad + Q^4 (1 + \cos^2 \theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta] \}\end{aligned}$$

由于分母上的  $(1 - \cos \theta)^2$  因子, 微分截面对于向前散射 ( $\theta \rightarrow 0$ ) 具有奇性

这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

# 质心系中的微分截面

于是,  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{QE_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos \theta)^2} \{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \\ &\quad + Q^4 (1 + \cos^2 \theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta] \}\end{aligned}$$

由于分母上的  $(1 - \cos \theta)^2$  因子, 微分截面对于向前散射 ( $\theta \rightarrow 0$ ) 具有奇性

这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

当散射角  $\theta$  很小时,  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \mathcal{O}(\theta^4)$ , 有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta \rightarrow 0$$

$(1 - \cos \theta)^2$  因子来源于光子传播子贡献的  $q'^2 = -2Q^2(1 - \cos \theta)$

故奇性来自接近质壳的虚光子 ( $q'^2 \simeq 0$ )

# 微分截面的近似



当  $E_{\text{CM}} \gg m_e$  时, 忽略电子质量, 有  $E_e \simeq Q \simeq \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$ , 微分截面化为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 Q^2 (1 - \cos \theta)^2} [2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2 \cos^2 \theta + 2QE_\mu \\ &\quad + 2QE_\mu \cos \theta + m_\mu^2 \cos \theta] \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 Q^2 (1 - \cos \theta)^2} [(E_\mu + Q)^2 + (E_\mu + Q \cos \theta)^2 - m_\mu^2 (1 - \cos \theta)] \end{aligned}$$



在高能极限 ( $E_{\text{CM}} \gg m_\mu > m_e$ ) 下,  $Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{\text{CM}}/2$ , 则微分截面变成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2 [4 + (1 + \cos \theta)^2]}{2E_{\text{CM}}^2 (1 - \cos \theta)^2} = \frac{\alpha^2 [1 + \cos^4(\theta/2)]}{2E_{\text{CM}}^2 \sin^4(\theta/2)}$$



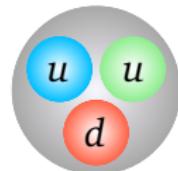
第二步用到三角函数倍角公式  $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$  和  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$

## 7.4.2 小节 $e^- p$ 散射

鼓 质子 (proton)  $p$  是自旋为  $1/2$  的稳定费米子，质量为  $m_p = 938.3$  MeV

按钮 它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个  $u$  夸克和 1 个  $d$  夸克组成的束缚态

卷尺 质子的电荷  $Q_p$  是这些夸克的电荷之和，即  $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$



## 7.4.2 小节 $e^- p$ 散射

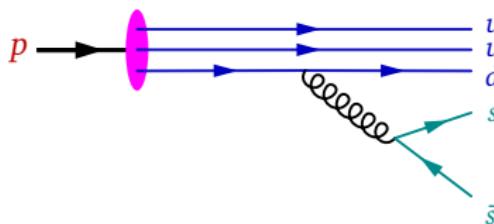
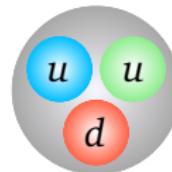
质子 (proton)  $p$  是自旋为  $1/2$  的稳定费米子，质量为  $m_p = 938.3$  MeV

它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个  $u$  夸克和 1 个  $d$  夸克组成的束缚态

质子的电荷  $Q_p$  是这些夸克的电荷之和，即  $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

像这样贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为价夸克 (valence quark)

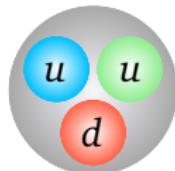
由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克  $q\bar{q}$ ， $q$  与  $\bar{q}$  携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)



## 7.4.2 小节 $e^- p$ 散射

质子 (proton)  $p$  是自旋为  $1/2$  的稳定费米子，质量为  $m_p = 938.3$  MeV

它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个  $u$  夸克和 1 个  $d$  夸克组成的束缚态



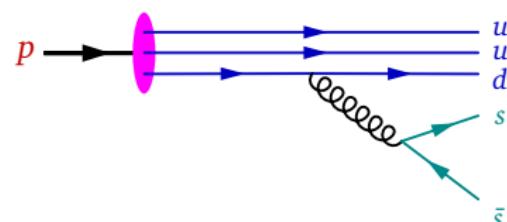
质子的电荷  $Q_p$  是这些夸克的电荷之和，即  $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

像这样贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为价夸克 (valence quark)

由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克  $q\bar{q}$ ， $q$  与  $\bar{q}$  携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)

一个相互作用过程通常涉及一个典型的能量

或动量大小，比如质心能  $E_{CM}$  或上一小节用到的动量  $Q$ ，这样的量称为能标 (energy scale)



当能标远小于  $m_p$  时，质子在相互作用过程中就像没有结构的点粒子一样

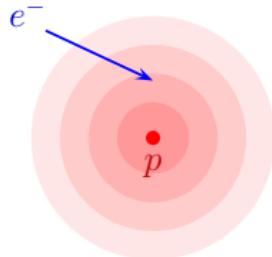
此时可以用 Dirac 旋量场 来描述质子，并使用  $Q_p = +1$  的 QED 相互作用顶点

# Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 Coulomb 散射  $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量  $m_p$

从而可取  $m_p \rightarrow \infty$  的极限，则质子在散射前后都是静止的  
初末态电子运动速率相同，记为  $v$ ，运动方向相差散射角  $\theta$



# Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 Coulomb 散射  $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量  $m_p$

从而可取  $m_p \rightarrow \infty$  的极限，则质子在散射前后都是静止的

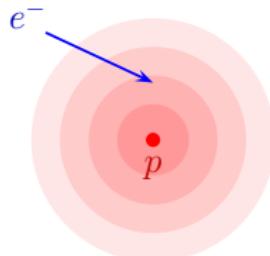
初末态电子运动速率相同，记为  $v$ ，运动方向相差散射角  $\theta$

那么，Coulomb 力引起的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

这个式子就是 Rutherford 公式

可见， $\theta \rightarrow 0$  时  $d\sigma/d\Omega \propto \theta^{-4}$  的奇性在经典物理层面就已经出现了



Ernest Rutherford  
(1871–1937)

# $e^- p$ Coulomb 散射

III 在 QED 中,  $e^- p \rightarrow e^- p$  散射过程的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{Feynman diagram} = \bar{u}(p_1) (ie\gamma^\mu) u(k_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2) (-ie\gamma^\nu) u(k_2) \\
 &= -\frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(k_2)
 \end{aligned}$$

相比于  $e^- \mu^-$  散射, 这个结果多出一个负号, 这是因为  $Q_p = -Q_\mu = +1$

由于这里只有一幅 Feynman 图, 这个符号差异不会影响振幅模方

○ 类比于  $e^- \mu^-$  散射,  $e^- p \rightarrow e^- p$  非极化振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2) - m_e^2(p_2 \cdot k_2) - m_p^2(k_1 \cdot p_1) + 2m_e^2m_p^2]$$

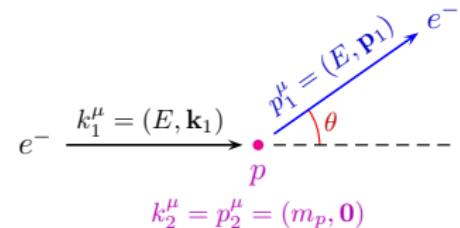
# 运动学

下面在入射电子动量远小于  $m_p$  的极限下推导

Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，  
初末态电子的能量都是  $E$ ，四维动量分解为

$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

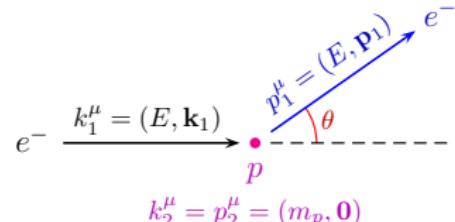


# 运动学

下面在入射电子动量远小于  $m_p$  的极限下推导

Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，  
初末态电子的能量都是  $E$ ，四维动量分解为



$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

初末态电子的动量大小相等，记为  $Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$

根据狭义相对论中的定义，初末态电子的运动速率为  $v = \frac{Q}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}$

因而  $m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2)$ ，四维动量的内积可以表达成

$$k_1 \cdot p_1 = E^2 - Q^2 \cos \theta = E^2(1 - v^2 \cos \theta), \quad k_2 \cdot p_2 = m_p^2$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E$$

$$q^2 = (k_1 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2E^2 + 2Q^2 \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

# 非极化振幅模方

从而，**非极化振幅模方化为**

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1-v^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_e^2 m_p^2) \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_p^2 E^2 (1-v^2)] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 (1-\cos\theta)^2} [2 - v^2 (1-\cos\theta)] = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

# 非极化振幅模方

从而，**非极化振幅模方化为**

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1-v^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_e^2 m_p^2) \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_p^2 E^2 (1-v^2)] \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 (1-\cos\theta)^2} [2 - v^2 (1-\cos\theta)] = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

末态**两体不变相空间积分**是

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(k_1^0 + k_2^0 - p_1^0 - p_2^0) = \int \frac{d\Omega \, dQ \, Q^2}{16\pi^2 E m_p} \delta(E + m_p - \sqrt{Q^2 + m_e^2} - m_p) \\ &= \int \frac{d\Omega \, Q^2}{16\pi^2 E m_p} \left| \frac{d(E - \sqrt{Q^2 + m_e^2})}{dQ} \right|^{-1} = \int \frac{d\Omega \, Q^2}{16\pi^2 E m_p} \frac{\sqrt{Q^2 + m_e^2}}{Q} = \int d\Omega \frac{Q}{16\pi^2 m_p} \end{aligned}$$

手征性与螺旋度  
○○○○○○○ $e^- \mu^-$  散射  
○○○○○○○ $e^- p$  散射  
○○○○○●○Coulomb 势能  
○○○○○○○Yukawa 势能  
○○○○交叉对称性  
○○○○○○Mandelstam 变量  
○○○○○○○○○○

# Mott 公式

 入射流因子  $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = Em_p \frac{Q}{E} = Qm_p$

 此过程末态对称性因子  $\mathcal{S} = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p} \int d\Omega \frac{Q \overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$

# Mott 公式

 **入射流因子**  $E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = Em_p \frac{Q}{E} = Qm_p$

 此过程末态对称性因子  $S = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p} \int d\Omega \frac{Q \overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$



Nevill Francis Mott  
(1905–1996)

 **微分散射截面为**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad Q \ll m_p$$

 这是 QED 对 Rutherford 公式的修正，称为 Mott 公式

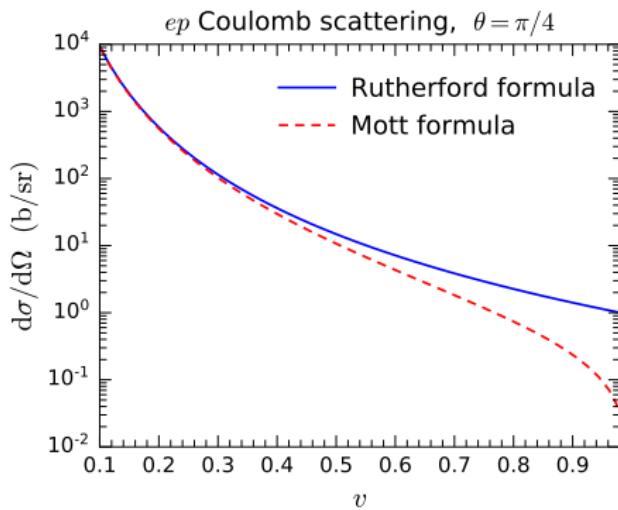
 Mott 公式跟 Rutherford 公式一样不依赖于  $m_p$ ，因而  $m_p \rightarrow \infty$  的极限是存在的

# Mott 公式与 Rutherford 公式

在低速极限下,  $v \ll 1$ ,  $Q \simeq m_e v$ , Mott 公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

退化成 Rutherford 公式  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$



## 7.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

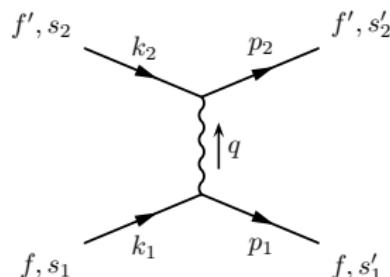
在**非相对论极限下**，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

这是接下来要**论证**的观点

考虑两种带电费米子  $f$  和  $f'$ ，电荷分别为  $Q_f$  和  $Q_{f'}$

讨论 **Coulomb 散射过程**  $ff' \rightarrow ff'$

初态四维动量为  $k_1$  和  $k_2$ ，末态四维动量为  $p_1$  和  $p_2$



## 7.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

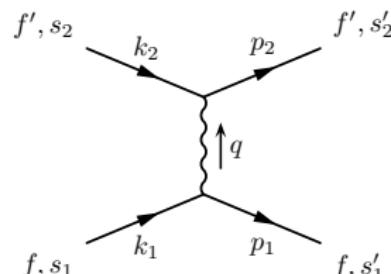
在**非相对论极限下**，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

这是接下来要**论证**的观点

考虑两种带电费米子  $f$  和  $f'$ ，电荷分别为  $Q_f$  和  $Q_{f'}$

讨论 **Coulomb 散射过程**  $ff' \rightarrow ff'$

初态四维动量为  $k_1$  和  $k_2$ ，末态四维动量为  $p_1$  和  $p_2$



在**非相对论极限下**， $|k_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$ ，粒子**能量近似为质量**，即

$$k_1^\mu \simeq (\mathbf{m}_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (\mathbf{m}_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (\mathbf{m}_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (\mathbf{m}_{f'}, \mathbf{p}_2)$$

在此极限下，可将正费米子的平面波旋量系数  $u$  表达为  $u(\mathbf{p}, s) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_s \end{pmatrix}$

$\mathbf{p}$  是动量；不依赖于  $\mathbf{p}$  的  $\zeta_s$  是某个固定方向上的**二分量自旋本征态**，**本征值**为  $s = \pm 1/2$ ，满足正交归一关系  $\zeta_s^\dagger \zeta_s = \delta_{s's}$  和完备性关系  $\sum_{s=\pm 1/2} \zeta_s \zeta_s^\dagger = 1$

# 非相对论极限

这样的  $u(\mathbf{p}, s)$  在  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, s) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

也满足正交归一关系,  $u^\dagger(\mathbf{p}, s')u(\mathbf{p}, s) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{s'}^\dagger & \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = 2m\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s \simeq 2E_p \delta_{s' s}$

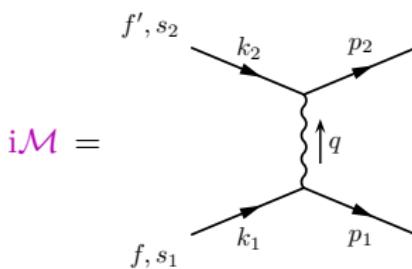
# 非相对论极限

这样的  $u(\mathbf{p}, s)$  在  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, s) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = 0$$

也满足正交归一关系,  $u^\dagger(\mathbf{p}, s')u(\mathbf{p}, s) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{s'}^\dagger & \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = 2m\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s \simeq 2E_p \delta_{s' s}$

于是,  $ff' \rightarrow ff'$  散射过程的 QED 领头阶不变振幅为



$$\begin{aligned} &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) (-iQ_f e \gamma^\mu) u(\mathbf{k}_1, s_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) (-iQ_{f'} e \gamma^\nu) u(\mathbf{k}_2, s_2) \\ &= \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_\mu u(\mathbf{k}_2, s_2) \end{aligned}$$

# 非相对论极限下的 Coulomb 散射振幅

由  $u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix}$  和  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix}$  得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{s'_1}^\dagger \zeta_{s_1} = 2m_f \delta_{s'_1 s_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 0$$

同理有  $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_f \delta_{s'_2 s_2}$  和  $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0$

因此在非相对论极限下只有时间分量  $\bar{u} \gamma^0 u$  的贡献

# 非相对论极限下的 Coulomb 散射振幅

由  $u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix}$  和  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix}$  得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{s'_1}^\dagger \zeta_{s_1} = 2m_f \delta_{s'_1 s_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 0$$

同理有  $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2}$  和  $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0$

因此在非相对论极限下只有时间分量  $\bar{u} \gamma^0 u$  的贡献

再注意到  $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$ ，则  $q^2 = (q^0)^2 - |\mathbf{q}|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$

将不变振幅化为  $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$

$i\mathcal{M}$  只在  $s'_1 = s_1$  且  $s'_2 = s_2$  时非零

也就是说，非相对论性的 Coulomb 散射不改变费米子的自旋状态

# 非相对论性归一化

  $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$  中的  $2m_{f/f'}$  因子跟归一化取法有关

-  依照 4.5.4 小节的相对论性归一化取法, 正费米子态为  $|\mathbf{p}^+, s\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle$
-  满足  $\langle \mathbf{k}^+, s' | \mathbf{p}^+, s \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

# 非相对论性归一化

$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$  中的  $2m_{f/f'}$  因子跟归一化取法有关

依照 4.5.4 小节的相对论性归一化取法, 正费米子态为  $|\mathbf{p}^+, s\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle$

满足  $\langle \mathbf{k}^+, s' | \mathbf{p}^+, s \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

在非相对论性量子力学中, 通常将正费米子态定义为

$$|\mathbf{p}^+, s\rangle_{NR} \equiv a_{\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\mathbf{p}^+, s\rangle$$

满足内积关系  $_{NR} \langle \mathbf{k}^+, s' | \mathbf{p}^+, s \rangle_{NR} = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ , 相应外线规则变成

$$f, s \xrightarrow[p]{\quad} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} u(\mathbf{p}, s), \quad \bullet \xrightarrow[p]{\quad} f, s = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda).$$

非相对论性归一化不变振幅是  $i\mathcal{M}_{NR} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$

相应的散射矩阵元为

$$_{NR} \langle \mathbf{p}_2^+, s'_2; \mathbf{p}_1^+, s'_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2 \rangle_{NR} = i\mathcal{M}_{NR} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

# Born 近似

另一方面，对于  $f$  粒子进入势场  $V(x)$  发生的散射过程，**非相对论性量子力学** 的 Born 近似给出散射矩阵元

$$_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_1^+, s_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1 \rangle_{\text{NR}} = -i \tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

其中  $\tilde{V}(\mathbf{q})$  是  $V(x)$  的 **Fourier 变换**，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(x) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

# Born 近似

耳机 另一方面，对于  $f$  粒子进入势场  $V(x)$  发生的散射过程，非相对论性量子力学的 Born 近似给出散射矩阵元

$$_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_1^+, s_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1 \rangle_{\text{NR}} = -i \tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

地球 其中  $\tilde{V}(\mathbf{q})$  是  $V(x)$  的 Fourier 变换，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(x) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

钻石 这里相当于对引起势场  $V(x)$  的  $f'$  粒子动量作积分

菱形 因而没有相关的三维动量  $\delta$  函数因子

戒指 与以上 Coulomb 散射矩阵元  $_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_2^+, s'_2; \mathbf{p}_1^+, s'_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2 \rangle_{\text{NR}}$

$$= -\frac{i Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

比较，得到  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$

# Coulomb 势能

🎬 对  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$  求 Fourier 逆变换, 记  $r \equiv |\mathbf{x}|$ , 推出 Coulomb 势能

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left( \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right) \end{aligned}$$

# Coulomb 势能

对  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$  求 Fourier 逆变换，记  $r \equiv |\mathbf{x}|$ ，推出 Coulomb 势能

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left( \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right) \end{aligned}$$

作变量替换  $Q = -|\mathbf{q}|$ ，将第二个积分化为

$$-\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \int_0^{-\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{-Q} = \int_{-\infty}^0 dQ \frac{e^{iQr}}{Q} = \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$$

最后一步作了变量替换  $|\mathbf{q}| = Q$

因而可将  $V(\mathbf{x})$  表达成  $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

# Coulomb 势

利用留数定理计算积分  $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

被积函数在  $|\mathbf{q}| = 0$  处存在单极点，在  $|\mathbf{q}|$  复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=0} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi$$

Coulomb 势能化为  $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$

# Coulomb 势

利用留数定理计算积分  $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

被积函数在  $|\mathbf{q}| = 0$  处存在单极点，在  $|\mathbf{q}|$  复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi \underset{|\mathbf{q}|=0}{\text{Res}} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi$$

**Coulomb 势能化为**  $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$

**王冠**  $f'$  粒子的 Coulomb 势  $\Phi(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}$

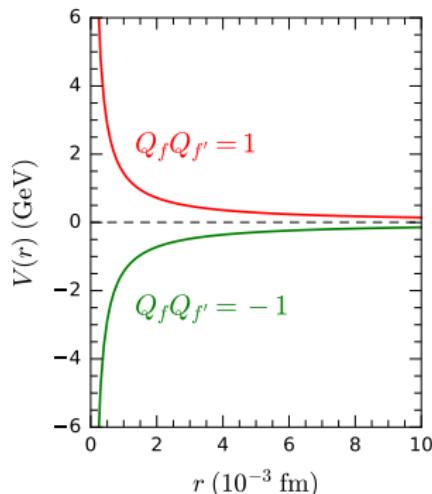
**学士帽** 这正是电动力学中点电荷电势的形式

**水滴** Coulomb 势是长程势，以  $r^{-1}$  规律衰减

**军帽**  $V(r)$  的符号由  $Q_f$  和  $Q_{f'}$  的符号决定

**红十字** 当  $Q_f$  与  $Q_{f'}$  同号时， $V(r) > 0$ ， $r$  越小，势能越大，Coulomb 势是排斥势

**军盔** 当  $Q_f$  与  $Q_{f'}$  异号时， $V(r) < 0$ ， $r$  越小，势能越小，Coulomb 势是吸引势



# Yukawa 势

我们已经看到，光子传播子在非相对论极限下的效应等价于 Coulomb 势

类似地，Yukawa 理论中标量玻色子  $\phi$  的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

与光子不同的是， $\phi$  具有质量  $m_\phi$ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

# Yukawa 势

我们已经看到，光子传播子在非相对论极限下的效应等价于 Coulomb 势

类似地，Yukawa 理论中标量玻色子  $\phi$  的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

与光子不同的是， $\phi$  具有质量  $m_\phi$ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

假设存在两种参与 Yukawa 相互作用的费米子  $f$  和  $f'$ ，相应的耦合常数均为  $\kappa$

根据 6.2 节的 Feynman 规则， $ff' \rightarrow ff'$  散射过程的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) (-i\kappa) u(\mathbf{k}_1, s_1) \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) (-i\kappa) u(\mathbf{k}_2, s_2) \\
 &= -\frac{i\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) u(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) u(\mathbf{k}_2, s_2)
 \end{aligned}$$

# Yukawa 理论的 $\tilde{V}(\mathbf{q})$

由于

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1)u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{s'_1 s_1}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2)u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2}$$

振幅化为

$$i\mathcal{M} = \frac{i\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$$

类比前面 Coulomb 散射的计算：

$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2}) \quad \text{👉} \quad \tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

即得 Yukawa 势场  $V(x)$  的 Fourier 变换

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$

# Yukawa 势能

⌚  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$  对应的 Yukawa 势能为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{|\mathbf{q}|^2 e^{i|\mathbf{q}|r \cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \\ &= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r} - e^{-i|\mathbf{q}|r}}{i|\mathbf{q}|r} = -\frac{\kappa^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \end{aligned}$$

👜 被积函数在上半复平面  $|\mathbf{q}| = im_\phi$  处存在单极点，沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=im_\phi} \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \left. \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}| + im_\phi} \right|_{|\mathbf{q}|=im_\phi} = i\pi e^{-m_\phi r}$$

🎒 因此，Yukawa 势能的形式是  $V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r}$

# 短程吸引势



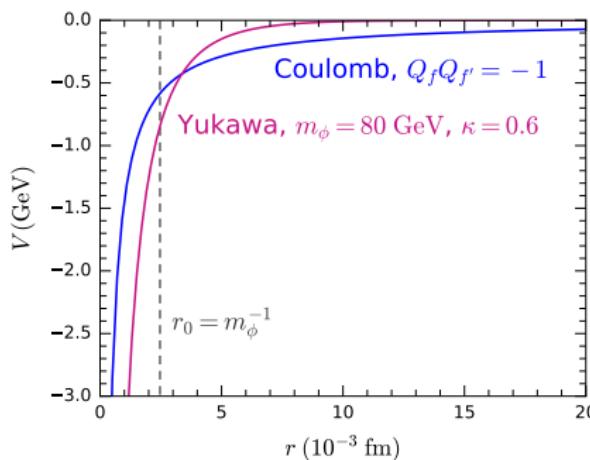
**Yukawa 势能**  $V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} < 0$

$r$  越小，势能越小，Yukawa 势是**吸引势**

在**长距离处**，**指数因子**  $e^{-m_\phi r}$  使 Yukawa 势**迅速衰减**，因而它是**短程势**

$r_0 \equiv 1/m_\phi$  是 Yukawa 势的特征长度，即 Yukawa 相互作用的**力程**

若标量玻色子  $\phi$  **没有质量**，则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式**类似**



手征性与螺旋度  
○○○○○○○ $e^- \mu^-$  散射  
○○○○○○○ $e^- p$  散射  
○○○○○○○Coulomb 势能  
○○○○○○○Yukawa 势能  
○○○○交叉对称性  
●○○○○○Mandelstam 变量  
○○○○○○○○○○

## 7.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

💡 上一节讨论表明,  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  与  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  过程具有交叉对称性, 利用相应的动量替换规则, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

📝 交叉对称性的一般表述如下

📝 如果一个过程的初态包含一个四维动量为  $p^\mu$  的粒子  $\Phi$

📝 从初态中移除  $\Phi$  并在末态中添加四维动量为  $k^\mu$  的反粒子  $\bar{\Phi}$  而得到另一个过程

📝 那么, 这两个过程的不变振幅可以通过动量替换  $k^\mu = -p^\mu$  联系起来,

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

## 7.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

 上一节讨论表明,  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  与  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  过程具有交叉对称性, 利用相应的动量替换规则, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

 交叉对称性的一般表述如下

 如果一个过程的初态包含一个四维动量为  $p^\mu$  的粒子  $\Phi$

 从初态中移除  $\Phi$  并在末态中添加四维动量为  $k^\mu$  的反粒子  $\bar{\Phi}$  而得到另一个过程

 那么, 这两个过程的不变振幅可以通过动量替换  $k^\mu = -p^\mu$  联系起来,

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

 物理的初末态粒子必须具有正能量, 但  $k^\mu = -p^\mu$  意味着  $\Phi$  和  $\bar{\Phi}$  不可能同时具有正能量, 因而看起来有一个过程是非物理的

 实际上, 应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的数学技巧: 对第一个过程的振幅作动量替换  $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ , 再解析延拓到物理区域就得到第二个过程的振幅

 可以这样想象交叉对称性: 一个粒子沿着时间方向运动等价于它的反粒子逆着时间方向运动, 这样的反粒子具有负能量和相反动量

# 交叉对称性与动量替换

把  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  交叉成  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  的过程如下

先将初态  $e^+$  (动量为  $k_2$ ) 换成末态  $e^-$  (动量为  $p'_1$ )，引起动量替换  $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$

再将末态  $\mu^+$  (动量为  $p_2$ ) 换成初态  $\mu^-$  (动量为  $k'_2$ )，引起动量替换  $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$

初态  $e^-$  和末态  $\mu^-$  不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

# 交叉对称性与动量替换

把  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  交叉成  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  的过程如下

先将初态  $e^+$  (动量为  $k_2$ ) 换成末态  $e^-$  (动量为  $p'_1$ )，引起动量替换  $k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu$

再将末态  $\mu^+$  (动量为  $p_2$ ) 换成初态  $\mu^-$  (动量为  $k'_2$ )，引起动量替换  $p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$

初态  $e^-$  和末态  $\mu^-$  不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k'_1{}^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p'_2{}^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$$

交叉一个粒子的 Feynman 图如右下图所示，灰色圆形象征一些 Feynman 图结构

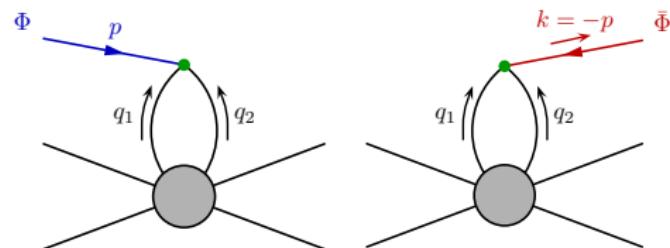
图 (a) 中有一个正粒子  $\Phi$  进入顶点

图 (b) 相应地替换成一个反粒子  $\bar{\Phi}$

离开顶点，两幅图其余部分完全相同

由于顶点处能动量守恒，图 (a) 中四维动量满足  $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$

图 (b) 则满足  $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$



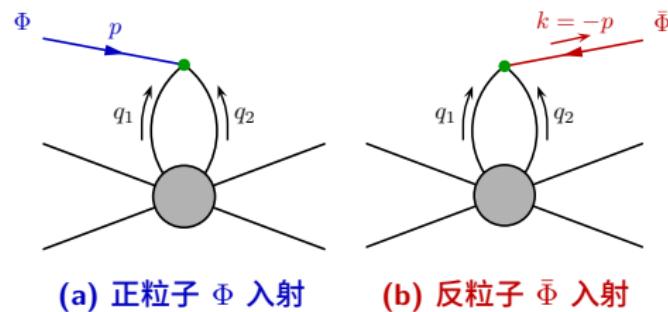
(a) 正粒子  $\Phi$  入射

(b) 反粒子  $\bar{\Phi}$  出射

# 玻色子的交叉对称性

 只要  $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是  $\Phi(p)$  与  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

 如果  $\Phi$  是标量玻色子，则  $\Phi(p)$  和  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故  $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$  成立



# 玻色子的交叉对称性

只要  $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是  $\Phi(p)$  与  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

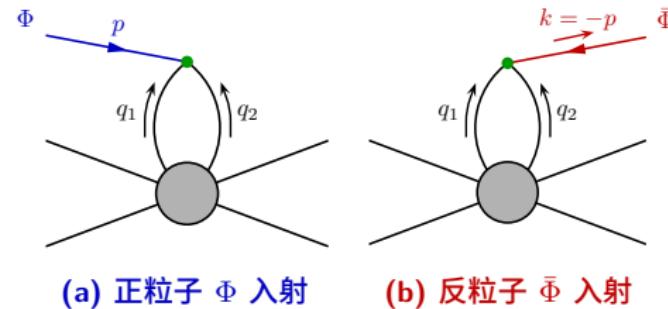
如果  $\Phi$  是标量玻色子，则  $\Phi(p)$  和  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故  $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$  成立

如果  $\Phi$  是正矢量玻色子，则  $\Phi(p)$  的外线因子为极化矢量  $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ ：

$$\varepsilon^\mu(p, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu(p, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ \mp p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix}$$

可见， $\varepsilon_\mu(-p, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$  对  $\lambda = 0, \pm$  成立

因此，当  $k^\mu = -p^\mu$  时，有  $\varepsilon_\mu(p, \lambda) = \varepsilon_\mu(-k, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$ ，这恰好是  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子，故  $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$  成立



# 费米子的交叉对称性

如果  $\Phi$  是 Dirac 正费米子，则  $\Phi(p)$  和  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子是旋量系数  $u(p)$  和  $v(k)$

在计算自旋求和时将  $p$  替换成  $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

因而两个过程的非极化振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$  相差一个整体负号

可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换  $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的  $|\mathcal{M}|^2$

# 费米子的交叉对称性

如果  $\Phi$  是 Dirac 正费米子，则  $\Phi(p)$  和  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子是旋量系数  $u(p)$  和  $v(k)$

在计算自旋求和时将  $p$  替换成  $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p) \bar{u}(p) = \cancel{p} + m = -(\cancel{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k) \bar{v}(k)$$

因而两个过程的非极化振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$  相差一个整体负号

可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换  $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的  $|\mathcal{M}|^2$

将  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  交叉成  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  时，交叉了两个费米子，产生了两个整体负号，它们正好相互抵消

交叉一个费米子时，如果想让交叉对称性在振幅层面上成立，则需要对  $v(p, \lambda)$  采取特殊的定义，而  $u(p, \lambda)$  可保持原先的定义

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|p|} \xi_\lambda(p) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|p|} \xi_\lambda(p) \end{pmatrix}$$

# $v(p, \lambda)$ 的特殊定义



由螺旋态本征值方程  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$  得  $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$ , 故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即  $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$  是螺旋度为  $-\lambda$  的本征态, 从而可以将  $v(p, \lambda)$  的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

# $v(p, \lambda)$ 的特殊定义



由螺旋态本征值方程  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$  得  $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$ , 故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即  $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$  是螺旋度为  $-\lambda$  的本征态, 从而可以将  $v(p, \lambda)$  的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

👉  $v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$ ,  $\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$

💡 利用  $m = \sqrt{(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{(p^0 + \lambda|\mathbf{p}|)(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)}$ , 推出

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{p} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{m} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 - \lambda|\mathbf{p}|) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

因此, 这样定义的  $v(p, \lambda)$  满足运动方程  $(\not{p} + m)v(p, \lambda) = 0$

手征性与螺旋度  
○○○○○○○

$e^- \mu^-$  散射  
○○○○○○○

$e^- p$  散射  
○○○○○○○

Coulomb 势能  
○○○○○○○

Yukawa 势能  
○○○○

交叉对称性  
○○○○○●

Mandelstam 变量  
○○○○○○○○○

# 振幅的费米子交叉对称性

也可以验证这样定义的  $v(p, \lambda)$  满足正交归一关系和自旋求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

# 振幅的费米子交叉对称性

也可以验证这样定义的  $v(p, \lambda)$  满足正交归一关系和自旋求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

如此，当  $k^\mu = -p^\mu$  时，可以推出

$$\begin{aligned} u(p, \lambda) &= u(-k, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\text{e}^{i\pi}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ [\text{e}^{-i\pi}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{e}^{i\pi/2}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \text{e}^{-i\pi/2}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{k^0 + \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ -i\sqrt{k^0 - \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = v(k, \lambda) \end{aligned}$$

即  $\Phi(p)$  和  $\bar{\Phi}(k)$  的外线因子相等

故  $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$  成立

注意，平方根函数是多值函数，在上式推导过程中，利用  $\text{e}^{\pm i\pi} = -1$  对两个平方根函数采用了不同的取值方式

# Mandelstam 变量

现在定义一些便于应用**交叉关系**的物理量

对于  $2 \rightarrow 2$  散射，按照右图表示的四维动量，定义三个 **Lorentz 不变的 Mandelstam 变量**：

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

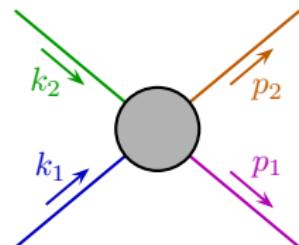
$$t \equiv (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2$$

第二步均用到**能动量守恒关系**  $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

记这些四维动量对应的**质量**为  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m'_1$ 、 $m'_2$ ，

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m'^2_1, \quad p_2^2 = m'^2_2$$



Stanley Mandelstam  
(1928–2016)

# Mandelstam 变量性质

四维动量的内积可以用 Mandelstam 变量和质量表示为

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}(s - k_1^2 - k_2^2) = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2), \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1'^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - k_1^2 - p_1^2) = -\frac{1}{2}(t - m_1^2 - m_1'^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(t - m_2^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(u - k_1^2 - p_2^2) = -\frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2'^2), \quad k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_2^2 - m_1'^2)$$

因为  $|\mathcal{M}|^2$  只是这些四维动量内积的函数，所以用 3 个 Mandelstam 变量就足以表达任意  $2 \rightarrow 2$  散射过程的非极化振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$

进一步推出

$$\begin{aligned} s + t + u &= (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - p_1)^2 + (k_1 - p_2)^2 \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_1 - p_2) \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2 \end{aligned}$$

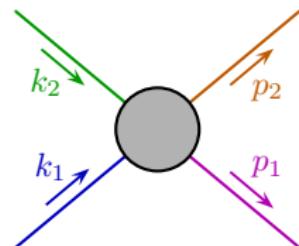
即 Mandelstam 变量之和是初末态粒子质量平方和

# Mandelstam 变量的进一步说明

  $t = (k_1 - p_1)^2$  和  $u = (k_1 - p_2)^2$  均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

 实际应用通常用初末态中两个性质相近的粒子定义  $t$

 比如，对于  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  散射过程，通常用初态电子动量  $k'_1$  与末态电子动量  $p'_1$  定义  $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足  $q'^2 = t$



# Mandelstam 变量的进一步说明

💡  $t = (k_1 - p_1)^2$  和  $u = (k_1 - p_2)^2$  均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

💡 实际应用通常用初末态中两个**性质相近**的粒子定义  $t$

💡 比如，对于  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  散射过程，通常用**初态电子动量**  $k'_1$  与**末态电子动量**  $p'_1$  定义  $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足  $q'^2 = t$

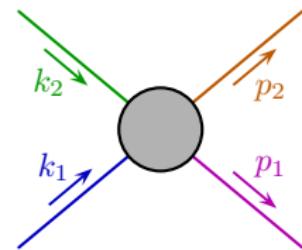
💡 在**质心系**中， $k_1 + k_2 = 0$ ，有  $s = (k_1 + k_2)^2 = (k_1^0 + k_2^0)^2 = E_{CM}^2$

💡 故  $\sqrt{s} = E_{CM}$  就是**质心能**

💡 对于**任意**  $2 \rightarrow n$  散射过程，将  $s$  定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \left( \sum_i p_i \right)^2$$

💡 于是， $\sqrt{s}$  就是这个  $2 \rightarrow n$  过程的**质心能**



# $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

可以用 Mandelstam 变量表达任意  $2 \rightarrow 2$  散射过程的非极化振幅模方

对于 7.2 节的  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  过程，非极化振幅模方可化为

$$\begin{aligned}
 & |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2m_\mu^2] \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} \left[ \frac{1}{4}(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{4}(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{2}m_\mu^2(s - 2m_e^2) + \frac{1}{2}m_e^2(s - 2m_\mu^2) \right. \\
 &\quad \left. + 2m_e^2m_\mu^2 \right] \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} \left[ \frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{t+u}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right]
 \end{aligned}$$

由  $s + t + u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$  得  $t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) - s$ ，故

$$\begin{aligned}
 & |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} \left[ \frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{2(m_e^2 + m_\mu^2) - s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right] \\
 &= \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]
 \end{aligned}$$

# Mandelstam 变量与交叉对称性

🍺 现在将  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  交叉成  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

.SOCK 根据动量替换规则  $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$ ,  $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$ ,  $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$ ,  $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$ , 有

$$(k_1 + k_2)^2 \rightarrow (k'_1 - p'_1)^2, \quad (k_1 - p_1)^2 \rightarrow (k'_1 - p'_2)^2, \quad (k_1 - p_2)^2 \rightarrow (k'_1 + k'_2)^2$$

++) 即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

# Mandelstam 变量与交叉对称性

现在将  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  交叉成  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

根据动量替换规则  $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$ ,  $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$ ,  $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$ ,  $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$ , 有

$$(k_1 + k_2)^2 \rightarrow (k_1' - p_1')^2, \quad (k_1 - p_1)^2 \rightarrow (k_1' - p_2')^2, \quad (k_1 - p_2)^2 \rightarrow (k_1' + k_2')^2$$

即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

可见, 交叉对称性对应于 Mandelstam 变量的调换

据此, 从  $\overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2} = \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$

直接得到  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$  过程的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2} = \frac{2e^4}{t^2} [u^2 + s^2 + 4t(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$$

容易验证此结果与前面得到的  $\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2} = \frac{8e^4}{(q'^2)^2} [(k_1' \cdot p_2')(p_1' \cdot k_2') + (k_1' \cdot k_2')(p_1' \cdot p_2') - m_e^2(p_2' \cdot k_2') - m_\mu^2(k_1' \cdot p_1') + 2m_e^2m_\mu^2]$  一致

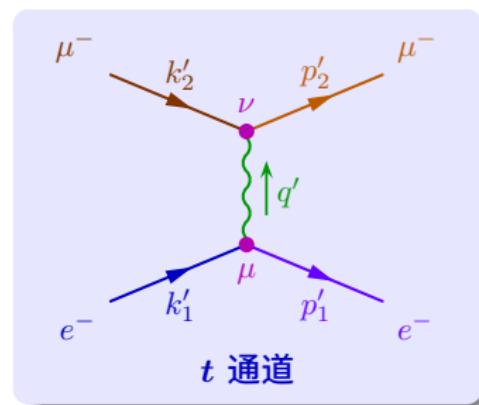
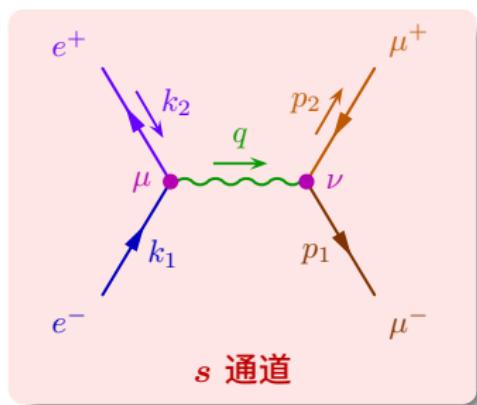
# $s$ 、 $t$ 和 $u$ 通道

🥃  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  过程的虚光子动量满足  $q^2 = s$ ，交叉成  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  过程之后，虚光子动量满足  $q'^2 = t$

👢 一般来说，当  $2 \rightarrow 2$  散射过程的 Feynman 图只包含一条内线时，内线动量的内积等于一个 Mandelstam 变量  $s$ 、 $t$  或  $u$

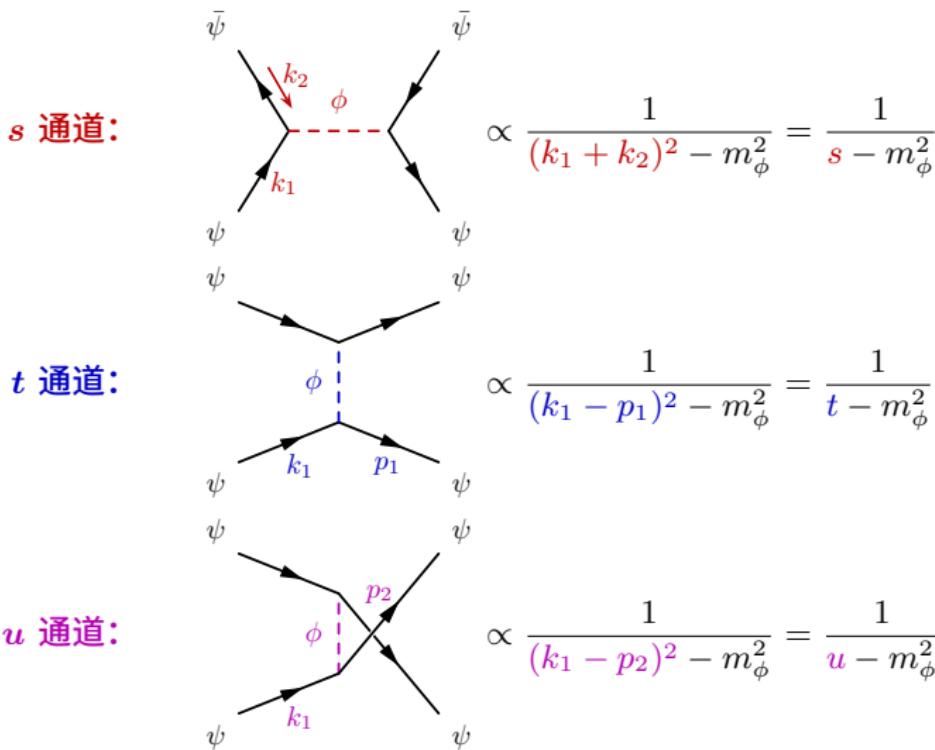
👠 相应地称这种图为  $s$  通道 (channel)、 $t$  通道或  $u$  通道的 Feynman 图

👞  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  和  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  Feynman 图分别对应于  $s$  通道和  $t$  通道



# 三种通道的特点

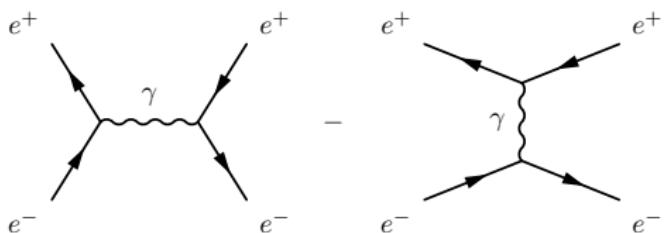
以 Yukawa 理论为例，三种通道具有如下特点



# Bhabha 散射和 Møller 散射

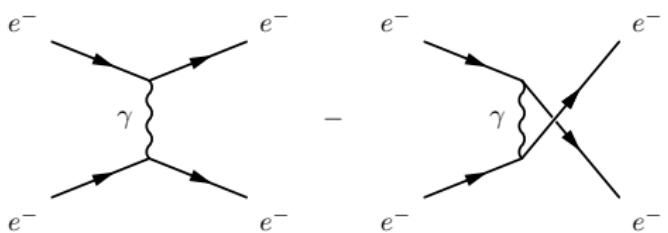
🍺 一个散射过程可以包含多个通道的 Feynman 图

👢 Bhabha 散射  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  具有 1 个  $s$  通道和 1 个  $t$  通  
道领头阶 Feynman 图



Homi Jehangir Bhabha  
(1909–1966)

👢 Møller 散射  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  具有 1 个  $t$  通道和 1 个  $u$  通  
道领头阶 Feynman 图



Christian Møller  
(1904–1980)

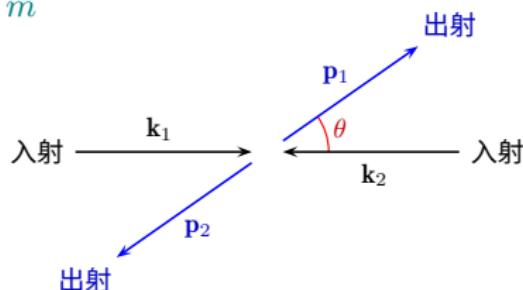
# Mandelstam 变量与散射角的关系

🥂 在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是  $m$

🍴 动量如右图所示，则有

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{CM}}{2} = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \equiv Q$$



勺 从而得到

$$t = (k_1 - p_1)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_1^0 + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1| \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_2^0 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta = -2Q^2(1 + \cos \theta)$$

🍴 于是， $\theta \rightarrow 0$  时  $t \rightarrow 0$ ， $\theta \rightarrow \pi$  时  $u \rightarrow 0$ ，而  $s = E_{CM}^2$  与散射角  $\theta$  无关

⌚ 三种通道的传播子对散射角  $\theta$  的依赖截然不同