

量子场论

第1章 预备知识

1.3节至1.5节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2022年7月11日

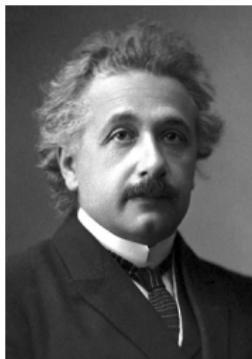


1.3 节 Lorentz 变换和 Lorentz 群

 描述高速运动的系统需要用到**狭义相对论**，它的基本原理如下

- ① 光速不变原理：在任意惯性参考系中，光速的大小不变
 - ② 狹义相对性原理：在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式

任意两个惯性参考系的直角坐标由 Lorentz 变换联系起来

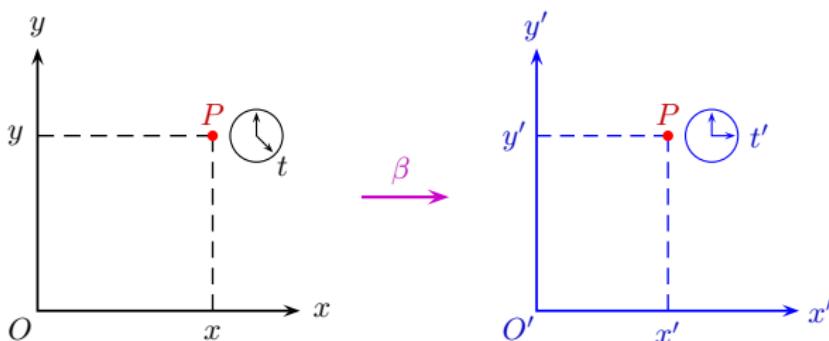


Albert Einstein (1879–1955)



Hendrik Lorentz
(1853–1928)

Lorentz 增速变换



 设惯性坐标系 O' 沿着惯性坐标系 O 的 x 轴方向以速度 β 匀速运动

 事件 P 在 O 系中的坐标为 (t, x, y, z) ，在 O' 系中的坐标为 (t', x', y', z')

 相应 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z$$

 Lorentz 因子 $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$

这种 Lorentz 变换称为沿 x 轴方向的**增速** (boost) 变换

Lorentz 不变量

 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \gamma^2(t - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta t)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 Lorentz 不变量 (invariant)

 Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同的值**

 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 Lorentz 对称性

Lorentz 不变量

在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \gamma^2(t - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta t)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta x t - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta x t) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

$t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)

扳手 Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同的值**

扳手 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 **Lorentz 对称性**

心形线 结合时间和空间坐标，构成四维 **Minkowski 时空**，**坐标**为

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

回形针 x^μ 是一个**逆变** (contravariant) 的 **Lorentz 四维矢量** (vector)

回形针 “逆变” 指它的**指标** (index) μ 写在**右上角**

钉子 受到 $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 的启发，定义 **Lorentz 不变的内积**

$$\mathbf{x}^2 \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$$



Hermann Minkowski
(1864–1909)

Minkowski 度规



引入对称的 Minkowski 度规 (metric) $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号, 空白的矩阵元是零

也就是说, $g_{00} = +1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, 其它分量都是 0

Minkowski 度规



引入对称的 Minkowski 度规 (metric) $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号, 空白的矩阵元是零

也就是说, $g_{00} = +1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, 其它分量都是 0

利用度规把内积 x^2 化为求和式,

$$\begin{aligned} x^2 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \end{aligned}$$

第二步采用了 Einstein 求和约定: 不写出求和符号, 重复的指标即表示求和

除非特别指出, 后面默认使用这个约定

在上面的表达式中, 用同个字母表示的指标分别在上标和下标重复出现并求和, 这称为缩并 (contraction), 是 Lorentz 不变量的特点

协变矢量

为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, \underline{-}\mathbf{x})$$

“协变” 指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

将 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ 看作用**度规**缩并，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

协变矢量

为简化记号, 定义协变 (covariant) 的 Lorentz 四维矢量

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})$$

“协变”指的是指标 μ 写在右下角，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

将 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ 看作度规缩并，使逆变矢量 x^ν 的指标降下来，变成协变矢量 x_μ

A black and white portrait of James A. Garfield, the 20th President of the United States. He is shown from the chest up, wearing a dark suit, a white shirt, and a dark bow tie. He has dark hair and a prominent mustache.

Leopold Kronecker (1823–1891)

从方阵的角度看，度规 $g_{\mu\nu}$ 的逆（矩阵）为 $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} =$

这里 Kronecker δ 符号定义为 $\delta^a{}_b = \delta_a{}^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$

升降指标

 Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 的逆 $g^{\mu\nu}$ 与自己具有相同的矩阵形式

 但更一般的度规可能与它的逆不同

 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$ ，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将协变矢量 x_μ 的指标升起来，变成逆变矢量 x^σ

 可见，逆变矢量与协变矢量一一对应，是对同一个 Lorentz 矢量的两种等价描述

升降指标

 Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 的逆 $g^{\mu\nu}$ 与自己具有相同的矩阵形式

 但更一般的度规可能与它的逆不同

 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$, 对 μ 缩并, 得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将协变矢量 x_μ 的指标升起来, 变成逆变矢量 x^σ

 可见, 逆变矢量与协变矢量一一对应, 是对同一个 Lorentz 矢量的两种等价描述

 利用 Kronecker 符号的定义、 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ 和度规的对称性, 推出

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}$$

 这两条式子表明, 度规也可以用来对度规自身的指标进行升降

Lorentz 增速变换的矩阵形式

 将 Lorentz 增速变换 $t' = \gamma(t - \beta x)$, $x' = \gamma(x - \beta t)$, $y' = y$, $z' = z$ 表达成矩阵与列矢量的乘积形式

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

 用四维矢量记号改写为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

 将 Λ^{μ}_{ν} 视作矩阵时, 偏左的指标 μ 表示行的编号, 偏右的指标 ν 表示列的编号

 Λ^{μ}_{ν} 的特点是保持内积 $x^2 = x^{\mu} x_{\mu}$ 不变, 使 $x^{\mu} x_{\mu}$ 在不同惯性系中具有相同的值

Lorentz 变换

进一步将 Λ^{μ}_{ν} 推广为所有保持 $x^{\mu}x_{\mu}$ 不变的线性变换，称为（齐次）Lorentz 变换

由于 $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$

要得到 $x'^2 = x^2$ ，Lorentz 变换 Λ^{μ}_{ν} 必须满足保度规条件 $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$

Lorentz 变换

👑 进一步将 Λ^{μ}_{ν} 推广为所有保持 $x^{\mu}x_{\mu}$ 不变的线性变换，称为（齐次）Lorentz 变换

警示教育：由于 $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$

警示教育：要得到 $x'^2 = x^2$ ，Lorentz 变换 Λ^{μ}_{ν} 必须满足保度规条件 $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$

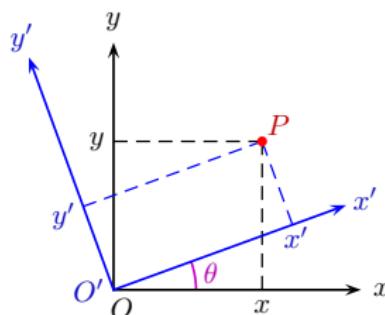
警示教育：由于 $x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$ ，保持 $|\mathbf{x}|^2$ 不变的空间旋转变换也属于 Lorentz 变换

警示教育：设惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角，则事件 P 在两系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z$$

警示教育：因而相应的 Lorentz 变换矩阵为

$$[R_z(\theta)]^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



警示教育：可以验证它满足保度规条件

Lorentz 逆变换

$\delta^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是单位矩阵 1，是一个特殊的 Lorentz 变换

它使得 $x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$ ，即 x^μ 在这个变换下不变，可见 $\delta^\mu{}_\nu$ 是恒等变换

对于任意 Lorentz 变换 $\Lambda^\alpha{}_\beta$ ，引入

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta$$

那么，由保度规条件得

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

上式表明，对时空坐标先作 Λ 变换，再作 Λ^{-1} 变换，得到的坐标还是原来的坐标

也就是说， Λ^{-1} 是 Λ 的逆变换，因而也是一个 Lorentz 变换

在这些记号下，协变矢量 x_μ 的 Lorentz 变换可以表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$$

保度规条件的等价形式

 Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

 于是有

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} \textcolor{teal}{g}^{\mu\gamma} g_{\rho\delta} \Lambda^\delta{}_\gamma \textcolor{brown}{g}^{\nu\phi} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta \delta^\beta{}_\tau \delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi} \Lambda^\delta{}_\gamma \Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\phi \end{aligned}$$

 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}$$

保度规条件的等价形式

Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

于是有

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} \textcolor{teal}{g}^{\mu\gamma} g_{\rho\delta} \Lambda^\delta{}_\gamma \textcolor{brown}{g}^{\nu\phi} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta \delta^\beta{}_\tau \delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi} \Lambda^\delta{}_\gamma \Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\phi \end{aligned}$$

这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}$$

将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 视作矩阵 Λ ，则其**转置矩阵** Λ^T 的分量满足 $(\Lambda^T)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$

保度规条件化为 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = (\Lambda^T)^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta$

用 g 代表度规矩阵，将保度规条件写成**矩阵等式**

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

时空体积元

对保度规条件 $\Lambda^T g \Lambda = g$ 取行列式，得

$$\det(g) = \det(\Lambda^T) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g) [\det(\Lambda)]^2$$

因此 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$ ，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1$$

Lorentz 坐标变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 的 Jacobi 行列式是



Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804–1851)

$$\mathcal{J} = \det \left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right] = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\Lambda)$$

于是 Lorentz 变换将体积元 d^4x 变换为

$$d^4x' = |\mathcal{J}| d^4x = |\det(\Lambda)| d^4x = d^4x$$

可见，Minkowski 时空的体积元 d^4x 是 Lorentz 不变的

Lorentz 变换分类

可以用 $\det(\Lambda)$ 的值给 Lorentz 变换分类

$\det(\Lambda) = +1$ 的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换

$\det(\Lambda) = -1$ 的变换称为**非固有** (improper) Lorentz 变换

此外, 由**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ 得

$$1 = \textcolor{blue}{g_{00}} = \textcolor{blue}{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0} = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2$$

即 $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$, 故 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 或 $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

$\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 的变换称为**保时向** (orthochronous)

Lorentz 变换

$\Lambda^0{}_0 \leq -1$ 的变换称为**反时向** (antichronous)

Lorentz 变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

群

 在数学上，对称性由**群论**描述，对称变换的集合称为**群** (group)

 群元素具有**乘法**，两个群元素的**乘积**就是两次对称变换**相继作用**，满足以下条件

① 群对乘积具有**封闭性**，即群 G 中任意两个群元 g_1 和 g_2 的乘积仍属于此群

$$g_1 g_2 \in G, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

② 群乘法满足**结合律**

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

③ 群 G 中必有一个**恒元** e ，对应于恒等变换，它与任一群元 g 的乘积仍为 g

$$eg = ge = g, \quad \forall g \in G$$

④ 任一群元 g 都可以在群 G 中找到一个**逆元** g^{-1} ，它对应于逆变换，两者之积为恒元，

$$\forall g \in G, \quad \exists g^{-1} \in G, \quad \text{使得 } g^{-1}g = gg^{-1} = e$$

更多群论概念



在线性代数中，矩阵具有乘法



可逆方阵能够依照自身乘法关系构成群，即矩阵群



群乘法讲究运算次序， g_1g_2 不一定等于 g_2g_1 ，也就是说，交换律不一定成立



满足交换律的群称为 Abel 群



不满足交换律的群称为非 Abel 群



如果群 G 的子集 H 中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称 H 是 G 的子群 (subgroup)，记作 $H < G$



Niels Henrik Abel
(1802–1829)

$O(N)$ 群和 $SO(N)$ 群

满足 $O^T O = O O^T = \mathbf{1}$ 的实方阵 O 称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)

所有 N 阶实正交矩阵 $\{O\}$ 构成**正交群** $O(N)$

对 $1 = O^T O = O O^T$ 取行列式，得 $1 = \det(O^T) \det(O) = [\det(O)]^2$

可见，实正交矩阵 O 的行列式为 $\det(O) = \pm 1$

由 $\det(O) = 1$ 的 N 阶实正交矩阵 O 构成的群称为**特殊正交群** $SO(N)$

显然， $SO(N) < O(N)$

非 Abel 群 $SO(3)$ 描述三维空间中的所有旋转变换，称为**空间旋转群**

Abel 群 $SO(2)$ 描述二维平面上的所有旋转变换，或者说，描述绕某条固定轴的旋转变换，如 $R_z(\theta)$ ，因而 $SO(2) < SO(3)$

U(N) 群和 SU(N) 群

 满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ 的复方阵 U 称为**幺正矩阵** (unitary matrix)

 所有 N 阶幺正矩阵 $\{U\}$ 构成**幺正群** U(N)

 对 $\mathbf{1} = U^\dagger U$ 取行列式, 得 $1 = \det(U^\dagger) \det(U) = [\det(U)]^\dagger \det(U) = |\det(U)|^2$

 可见, 幺正矩阵 U 的行列式满足 $|\det(U)| = 1$

 由 $\det(U) = 1$ 的 N 阶幺正矩阵 U 构成的群称为**特殊幺正群** SU(N)

 显然, $SU(N) < U(N)$

Lorentz 群

🐷 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群

豨 保度规条件 $\Lambda^T g \Lambda = g$ 是正交条件 $O^T 1 O = 1$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $O(1, 3)$

🐶 $O(3)$ 群对应于 $O(1, 3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $O(3) < O(1, 3)$

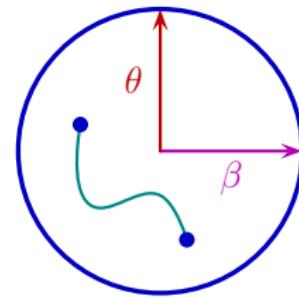
🦊 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $SO(1, 3)$

🐿 显然 $SO(1, 3) < O(1, 3)$

🐯 Lorentz 变换可用一组连续变化的参数（如 β 、 θ 等）描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数变化区域称为**群空间**

🦌 群空间中的一个**点**就是一个**群元**

🐯 如果群空间中任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通的**，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**



Lorentz 群的连通分支

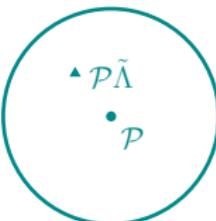


Lorentz 群是个混合连续群，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支

非固有保时向分支

$$\det(\Lambda) = -1$$

$$\Lambda^0_0 \geq +1$$



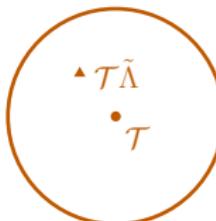
$\tilde{\Lambda}$

\mathcal{P}

非固有反时向分支

$$\det(\Lambda) = -1$$

$$\Lambda^0_0 \leq -1$$



$\tilde{\Lambda}$

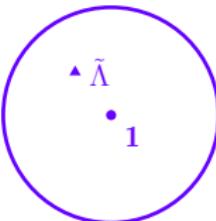
τ

固有保时向分支

(固有保时向 Lorentz 群)

$$\det(\Lambda) = +1$$

$$\Lambda^0_0 \geq +1$$



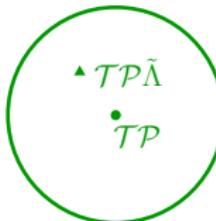
$\tilde{\Lambda}$

1

固有反时向分支

$$\det(\Lambda) = +1$$

$$\Lambda^0_0 \leq -1$$



$\tilde{\Lambda}$

$\tau\mathcal{P}$



恒元在**固有保时向分支**里面，这个分支是 $SO(1, 3)$ 的子群，称为**固有保时向 Lorentz 群**，记作 $SO^\dagger(1, 3)$ ，它包含物理上联系惯性参考系的所有 Lorentz 变换



Lorentz 不变量通常指的是在**固有保时向** Lorentz 变换下不变的量

SO(2) < SO(3) < $SO^\dagger(1, 3)$ < SO(1, 3) < O(1, 3)

宇称变换和时间反演变换

定义宇称 (parity) 变换为 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

它是一个非固有保时向 Lorentz 变换，亦称为空间反射 (space inversion) 变换

宇称变换的作用是让所有空间分量反向

定义时间反演 (time reversal) 变换为 $\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$

它是一个非固有反时向 Lorentz 变换，作用是让时间分量反向

对于固有保时向 Lorentz 群中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$ ，乘上宇称变换或（和）时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$ 、 $\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{TP}\tilde{\Lambda}$ ，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支

1.4 节 Lorentz 矢量

如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G

这些矩阵构成群 G 的一个 m 维线性表示 (linear representation) $D(G)$

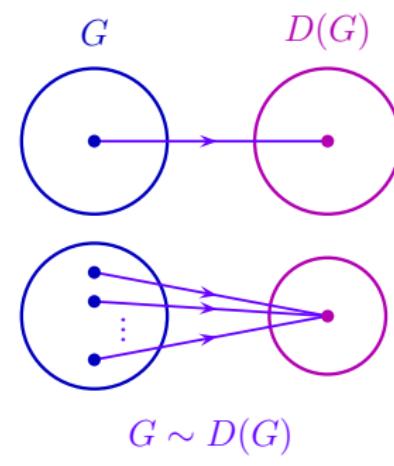
$D(G)$ 中的一个矩阵至少应该对应于 G 中的一个群元，可以对应于 G 中的多个群元，数学上称 G 与 $D(G)$ 同态 (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$

具体来说，对于群 G 中任意群元 g_1 和 g_2 ，表示 $D(G)$ 中相应表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$ 满足同态关系

$$D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1)$$

利用群的线性表示，可以将对称变换视作矩阵，将变换作用的态视作列矢量

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & D(g) & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

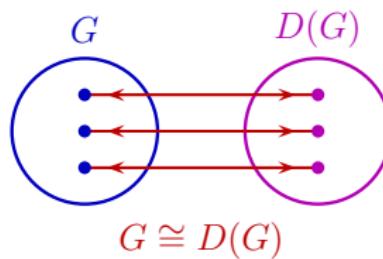


群的特殊表示

取群中所有元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的恒等表示，也称为平庸表示

如果群 G 中的每个群元一一对应于表示 $D(G)$ 中每个矩阵，则 G 与 $D(G)$ 同构 (isomorphism)，记作 $G \cong D(G)$

此时称 $D(G)$ 是 G 的忠实表示 (faithful representation)



如果 $D(G)$ 中所有矩阵都是幺正的，则称 $D(G)$ 是幺正表示

矩阵群本身就是自己的一个表示，称为自身表示，也称为基础表示

等价表示和可约表示

 如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

等价表示和可约表示

 如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

 如果每个表示矩阵 $D(g)$ 都可以通过同一个相似变换化为相同形式的阶梯矩阵，

$$S^{-1} D(g) S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G,$$

其中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 是方阵， $M(g)$ 可以是零矩阵，则称 $D(G)$ 是可约表示，否则称 $D(G)$ 为不可约表示 (irreducible representation)

 可以证明，集合 $\{D_1(g)\}$ 和 $\{D_2(g)\}$ 分别构成群 G 的线性表示

 可约表示能够通过不可约表示构造出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的不等价不可约表示

Lorentz 矢量

上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 Λ^{μ}_{ν} ，可见 $\{\Lambda^{\mu}_{\nu}\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 4 维线性表示，即基础表示

它是一个不可约忠实表示，称为矢量表示

因此，Lorentz 矢量 x^{ν} 可以看作变换 Λ^{μ}_{ν} 所作用的态

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{👉} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentz 矢量

上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 Λ^{μ}_{ν} ，可见 $\{\Lambda^{\mu}_{\nu}\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 4 维线性表示，即基础表示

它是一个不可约忠实表示，称为矢量表示

因此，Lorentz 矢量 x^{ν} 可以看作变换 Λ^{μ}_{ν} 所作用的态

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{👉} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

一般地，Lorentz 矢量 A^{μ} 在定义上要求它在固有保时向 Lorentz 变换下满足

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

类似于 $x'_{\mu} = x_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$ ，逆变矢量 A^{μ} 对应的协变矢量 $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$A'_{\mu} = A_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$$

Lorentz 矢量的内积

 任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

 由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

 像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

Lorentz 矢量的内积

任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

由于度规的对角元有正有负，Lorentz 矢量 A^μ 的自我内积 $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$ 的符号不是确定的，可以分为三类

- ① 若 $A^2 > 0$ ，即 $|A^0| > |\mathbf{A}|$ ，则称 A^μ 为**类时** (timelike) 矢量
- ② 若 $A^2 < 0$ ，即 $|A^0| < |\mathbf{A}|$ ，则称 A^μ 为**类空** (spacelike) 矢量
- ③ 若 $A^2 = 0$ ，即 $|A^0| = |\mathbf{A}|$ ，则称 A^μ 为**类光** (lightlike) 矢量

由于 A^2 是 Lorentz 不变量，**不能**通过 Lorentz 变换改变 A^μ 的类型

极矢量和轴矢量

以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量

第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量

极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ， x^{μ} 就是一个极矢量

另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

极矢量和轴矢量

以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量

第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量

极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ， x^{μ} 就是一个极矢量

另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

在经典力学中，空间坐标 \mathbf{x} 和动量 \mathbf{p} 都是极矢量，而角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 是轴矢量

在空间反射变换下， $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ ， $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ ， $\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{p}' = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$ ，与以上定义一致

四维动量

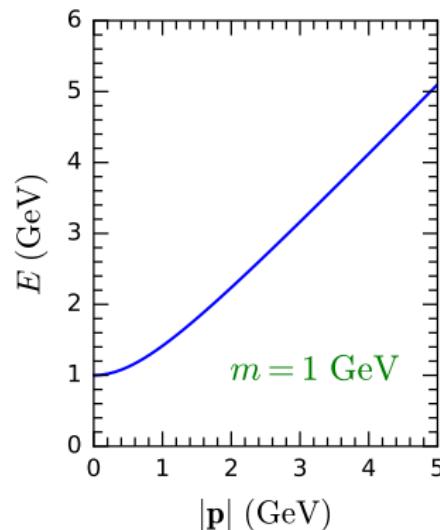
 在狭义相对论中，质点的能量 E 、动量 \mathbf{p} 和 (静止) 质量 m 具有 **色散关系** (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

 可以用 E 和 \mathbf{p} 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}),$$

称为**四维动量**，它是一个**极矢量**



四维动量

在狭义相对论中，质点的能量 E 、动量 \mathbf{p} 和 (静止) 质量 m 具有 **色散关系** (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

可以用 E 和 \mathbf{p} 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}),$$

称为**四维动量**，它是一个**极矢量**

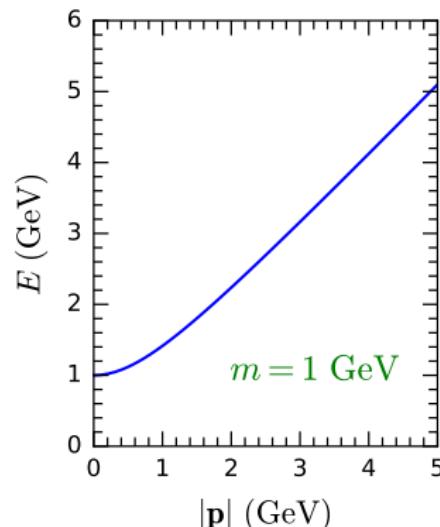
四维动量的自我内积为

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

这是合理的，因为质量 m 在狭义相对论中是一个 **Lorentz 不变量**

p^μ 在 $m > 0$ 时是类时矢量，在 $m = 0$ 时是类光矢量

$p^2 = m^2$ 称为**质壳** (mass shell) 条件，对应于四维动量空间中由质量 m 决定的**三维双曲面** (质壳)



时空导数



将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$



$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$



上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数**指标位置的写法是合理的

时空导数



将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$



$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$



上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数**指标位置的写法是合理的



对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$



两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho \delta^\rho{}_\nu$ ，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$



$$\text{故 } \partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

时空导数



将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$



$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$



上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数**指标位置的写法是合理的



对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$



两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho \delta^\rho{}_\nu$ ，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$



$$\text{故 } \partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$



这是时空导数 ∂^μ 的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同



因而可以将 ∂^μ 看作一个 **Lorentz 矢量**



相应地， ∂_μ 的 Lorentz 变换是 $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

d'Alembert 算符



定义 d'Alembert 算符

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$



由保度规条件得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$



可见, ∂^2 算符是 Lorentz 不变的



Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

d'Alembert 算符

 定义 d'Alembert 算符

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$

 由保度规条件得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

 可见, ∂^2 算符是 Lorentz 不变的



Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

 用它把 Klein-Gordon 方程 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0$ 改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0$$

 其中 x 表示四维时空坐标

 $\partial^2 + m^2$ 是 Lorentz 不变的, 因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有相同的形状, 即具有 Lorentz 协变性 (covariance)

1.5 节 Lorentz 张量

 Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

 一个 $p+q$ 阶的 (p, q) 型 Lorentz 张量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

 这里的逆变指标和协变指标统称为 Lorentz 指标

 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 Lorentz 协变性，在不同惯性系中具有相同的形式

1.5 节 Lorentz 张量

Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

一个 $p+q$ 阶的 (p, q) 型 Lorentz 张量 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

这里的逆变指标和协变指标统称为 Lorentz 指标

完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 Lorentz 协变性，在不同惯性系中具有相同的形式

Lorentz 标量是 0 阶 Lorentz 张量，不具有 Lorentz 指标

Lorentz 矢量是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标

Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 是一个 2 阶的 $(0, 2)$ 型 Lorentz 张量，不过，它是常数，在任何惯性系中不变，Lorentz 变换规则就是保度规条件 $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$

指标的升降和缩并

 用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型

 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的

 比如， $T^{\mu\nu}{}_\rho = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$ ，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3, 0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2, 1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\rho$

 相应地， $T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_\sigma$ ，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2, 1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$ 升为 $(3, 0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\rho}$

指标的升降和缩并

 用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型

 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的

 比如， $T^{\mu\nu}{}_\rho = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$ ，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3, 0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2, 1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\rho$

 相应地， $T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_\sigma$ ，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2, 1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$ 升为 $(3, 0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\rho}$

 对 (p, q) 型 Lorentz 张量的一个逆变指标和一个协变指标进行缩并，会得到一个 $(p - 1, q - 1)$ 型 Lorentz 张量，例如，

$$T'^{\mu\nu}{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\gamma (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\mu = \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\gamma \delta^\gamma{}_\alpha = \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\alpha$$

 可见， $T^{\mu\nu}{}_\mu$ 是一个 Lorentz 矢量

 可以通过缩并若干个 Lorentz 张量的所有指标来构造 Lorentz 不变量

 这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的 Λ 因子和 Λ^{-1} 因子总是相互抵消；比如，以下表达式都是 Lorentz 标量：

$$T^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} A_\mu B_\nu, \quad T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma} T^{\mu\nu}{}_\rho T^{\sigma\rho}{}_\nu$$

狭义张量和赝张量

 类似于 Lorentz 矢量，按**宇称变换**性质将 Lorentz 张量分成两种

 第一种张量是**狭义的张量**，宇称变换为

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \mathcal{P}^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q},$$

 另一种张量称为**赝张量** (pseudotensor)，宇称变换为

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \mathcal{P}^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q},$$

 因此，在宇称变换下，**狭义的标量** ϕ 满足 $\phi' = \phi$

 而**赝标量** (pseudoscalar) φ 满足 $\varphi' = -\varphi$

四维 Levi-Civita 符号

🏓 引入四维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换 (如 } \varepsilon^{1032}) \\ -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换 (如 } \varepsilon^{1023}) \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

🎳 这里的置换 (permutation) 指的是将指标重新排列

🎳 调换两个指标的位置称为对换

🎳 奇置换通过奇数次对换得到，偶置换通过偶数次对换得到

🎳 这样定义出来的 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是全反对称的，即关于任意两个指标反对称，如

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$$



Tullio Levi-Civita
(1873–1941)

协变的四维 Levi-Civita 符号

 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的协变形式为 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 也是全反对称的，如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = \textcolor{blue}{g_{\nu\alpha}} \textcolor{red}{g_{\mu\beta}} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \textcolor{red}{g_{\mu\beta}} \textcolor{blue}{g_{\nu\alpha}} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} (-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

 根据这些定义，

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

 而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

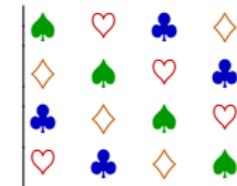
 从而

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4! \varepsilon^{0123} \varepsilon_{0123} = -4!$$

Levi-Civita 符号与行列式

利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照**行列式定义**写成

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta \Lambda^2{}_\gamma \Lambda^3{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$



	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	(0, 1, 2, 3)	+
♥	(1, 2, 3, 0)	-
♣	(2, 3, 0, 1)	+
♦	(3, 0, 1, 2)	-

Levi-Civita 符号与行列式

利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照行列式定义写成

$$\begin{aligned}\det(\Lambda) &= \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\varepsilon^{0123} &= 1 = [\det(\Lambda)]^2 \\ &= \det(\Lambda) \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

利用 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性质得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1023} &= -\varepsilon^{0123} = -\det(\Lambda) \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\det(\Lambda) \Lambda^1_{\beta} \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda) \Lambda^1_{\beta} \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\end{aligned}$$

依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda) \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$



	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	(0, 1, 2, 3)	+
♥	(1, 2, 3, 0)	-
♣	(2, 3, 0, 1)	+
♦	(3, 0, 1, 2)	-

四维和三维 Levi-Civita 符号

对于**固有保时向 Lorentz 变换**, $\det(\Lambda) = +1$, 则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

对于**宇称变换**, $\det(\mathcal{P}) = -1$, 则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

可见, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个**4 阶 Lorentz 质张量**

不过, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是常数, 在任何惯性系中**不变**

四维和三维 Levi-Civita 符号

对于**固有保时向 Lorentz 变换**, $\det(\Lambda) = +1$, 则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

对于**宇称变换**, $\det(\mathcal{P}) = -1$, 则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

可见, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个**4 阶 Lorentz 质张量**

不过, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是常数, 在任何惯性系中**不变**

三维 Levi-Civita 符号定义为

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -1, & (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

满足

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{0ijk}, \quad \varepsilon^{123} = +1$$

通常用 i, j, k 等**拉丁字母**代表**三维空间指标**

而用 μ, ν, ρ 等**希腊字母**代表**四维时空指标**

三维 Levi-Civita 符号求和关系

 ε^{ijk} 关于三个空间指标是全反对称的

 有 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i23} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} = 1$ 和 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i32} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{132} = -1$

▶ 依此类推，归纳出求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$$

 根据 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij3} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{213} = 2$ 和 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij1} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{121} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{211} = 0$

■ 归纳出另一条求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$$

四维电流密度和四维矢势

接下来讨论**真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式**

电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{J} 组成一个 Lorentz 矢量 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ ，称为四维电流密度

将电流连续性方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 写成 Lorentz 协变形式

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

用电势 Φ 和矢势 \mathbf{A} 将电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 表达为

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$$



James Clark Maxwell
(1831–1879)

Φ 和 \mathbf{A} 组成 Lorentz 矢量 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ ，称为四维矢势，则上式的分量形式为

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

场强张量

 引入**电磁场的场强张量** (field strength tensor)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$$

 它是一个 2 阶**反对称** Lorentz 张量

 由于两个**时空导数**的次序**可以交换**, 从上述定义推出

$$\begin{aligned}\partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \partial^\mu \partial^\rho A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu A^\rho + \partial^\nu \partial^\mu A^\rho - \partial^\nu \partial^\rho A^\mu \\ &= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu}\end{aligned}$$

 即 **Bianchi 恒等式**

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$



Luigi Bianchi
(1856–1928)

场强张量的分量

从 $F^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i$

可见, F^{0i} 对应于**电场强度**

由求和式 $\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{imn} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{imn} = \delta^{jm} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{km}$ 得到

$$\varepsilon^{ijk} B^k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m A^n = (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i$$

从而 $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk} B^k$

故 $F^{\mu\nu}$ 的 ij 分量对应于**磁感应强度**

 把 $F^{\mu\nu}$ 写成矩阵形式是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss 定律和 Ampère 环路定律

♠ Gauss 定律对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ 等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

♥ Ampère 环路定律对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

🂡 归纳起来，有

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

గ 这个方程完全是用 Lorentz 张量写的，具有 Lorentz 协变性

🎻 因而它在不同惯性系中具有相同形式，满足狭义相对性原理



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



André-Marie Ampère
(1775–1836)

Gauss 磁定律

 由 $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{ijl} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$ 得 $\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$ ，即

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$$

 Gauss 磁定律对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki}\partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij}\partial_k F^{ij}) \\ &= -\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}(\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij}) \end{aligned}$$

 第三步通过更换指标字母写出三个相等的项

 毕竟，对于参与缩并或求和的指标，更换指标字母不会影响结果

 上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0$$

 这是 Bianchi 恒等式取纯空间分量的形式

Faraday 电磁感应定律

◆ Faraday 电磁感应定律对应的 Maxwell-Faraday 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

写成分量的形式，得

$$-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn} \partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn} \partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn} \partial_m F^{n0}$$

从 $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k$ 推出

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{ij} &= -\varepsilon^{ijk} \partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m F^{n0} \\ &= (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial_m F^{n0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0}\end{aligned}$$

即

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0$$

这也是 Bianchi 恒等式取特定分量的形式



Michael Faraday
(1791–1867)

对偶场强张量

利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (duel field strength tensor)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}$$

它是一个 **2 阶反对称 Lorentz 贼张量**, \tilde{F}^{0i} 对应于**磁感应强度**:

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{j\mu} g_{k\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{jm} g_{kn} F^{mn} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{jkl} B^l = -\frac{1}{2} 2\delta^{il} B^l = -B^i\end{aligned}$$

第五步利用了 $g_{jm} F^{mn} = -\delta^{jm} F^{mn} = -F^{jn}$, 倒数第二步用到**求和关系**

另一方面, \tilde{F}^{ij} 对应于**电场强度**:

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij0k} F_{0k} + \varepsilon^{ijk0} F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk} F_{0k} = \varepsilon^{ijk} g_{0\mu} g_{k\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \varepsilon^{ijk} g_{00} g_{kl} F^{0l} = -\varepsilon^{ijk} F^{0k} = \varepsilon^{ijk} E^k\end{aligned}$$

对偶场强张量与 Bianchi 恒等式



对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的矩阵形式是 $\tilde{F}^{\mu\nu} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义有

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{6} (\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu} \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho} \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{6} \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

因此 Bianchi 恒等式 $\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$ 等价于

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

从这些讨论可以看到，用 Lorentz 张量语言表达 Maxwell 方程组是十分简单的，而且方程的 Lorentz 协变性非常明确