

# 量子场论

## 第 7 章 Feynman 图

### 7.3 节和 7.4 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2023 年 12 月 12 日



### 7.3 节 $\phi^4$ 理论与对称性因子

 如果拉氏量的相互作用项中含有多个全同的量子场，那么，在应用 Wick 定理时需要考虑一些等价的缩并方式，涉及到一些组合因子和对称性因子

本节以实标量场  $\phi(x)$  的  $\phi^4$  理论为例讨论这种情况

图 10-1  $\phi^4$  理论的拉氏量是  $\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ ,  $m$  是  $\phi$  玻色子质量

相互作用拉氏量为  $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ ， $\lambda$  是一个实耦合常数

相互作用哈密顿量密度为  $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

  $iT$  展开式的第  $n$  阶通项是

$$\begin{aligned} iT^{(n)} &= \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)] \\ &= \frac{1}{n!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathsf{T}[\phi^4(x_1) \cdots \phi^4(x_n)] \end{aligned}$$

# $\lambda^1$ 阶

在  $iT$  展开式的第 1 阶, 即  $\lambda^1$  阶,  $iT^{(1)}$  涉及 4 个实标量场算符的时序乘积

$$iT^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \sum_{j=1}^3 iT_j^{(1)}$$

这里 4 个实标量场算符  $\phi(x)$  是全同的

根据 Wick 定理, 第一项不包含缩并,

$$iT_1^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]$$

$C_4^2 = 6$  种包含 1 次缩并的项彼此相等, 贡献到第二项

$$iT_2^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} 6 \int d^4x \mathsf{N}[\overline{\phi(x)}\phi(x)\phi(x)\phi(x)]$$

$C_3^1 = 3$  种包含 2 次缩并的项彼此相等, 贡献到第三项

$$iT_3^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x \mathsf{N}[\overline{\phi(x)}\overline{\phi(x)}\overline{\phi(x)}\phi(x)]$$

# $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程

🚗 现在考虑  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射过程, 设初态为  $|i\rangle = |\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\rangle$ , 末态为  $\langle f| = \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2|$ , 则  $iT_1^{(1)}$  对  $T$  矩阵元的贡献是

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= \frac{-i\lambda}{4!} 4! \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{2个场算符}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{2个场算符}}] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x e^{i(p_1+p_2)\cdot x} e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} \\
 &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
 \end{aligned}$$

🚗 第二步让 🍎 2 个场算符与全同玻色子初态缩并

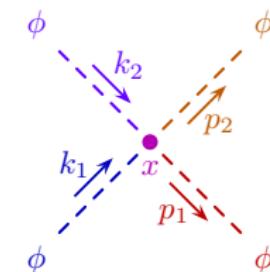
🍊 2 个场算符与全同玻色子末态缩并

🚕 一共有  $A_4^4 = 4!$  种缩并方式, 因而出现一个组合因子 4!

🚕 这个组合因子恰好与来自相互作用拉氏量的 1/4! 因子抵消

# $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射的 Feynman 图

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | i T_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | \overbrace{\mathbf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}^{\text{N}} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\
 &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
 \end{aligned}$$



实标量玻色子内外线的位置空间 Feynman 规则与 6.1 节的 Yukawa 理论相同

$$\phi \xrightarrow{\text{---}} \bullet x = \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

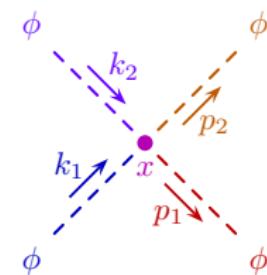
$$x \bullet \xrightarrow{\text{---}} \phi = \langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow{\text{---}} \bullet y = \phi(y)\phi(x) = D_F(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

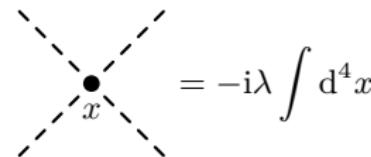
实际上，内外线 Feynman 规则是由拉氏量中的自由部分决定的，因而不依赖于相互作用理论，具有一般性

## 顶点 Feynman 规则

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | i T_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\
&= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}$$

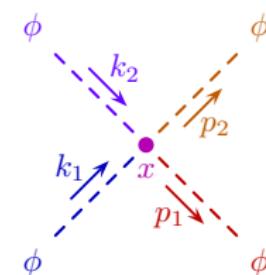


归纳出  $\phi^4$  理论的顶点 Feynman 规则：

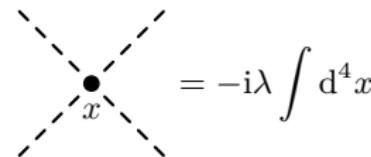


## 顶点 Feynman 规则

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | i T_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | \overbrace{\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]}^{\text{red}} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\
&= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}$$



归纳出  $\phi^4$  理论的顶点 Feynman 规则：



应用这些 Feynman 规则，就可以根据 Feynman 图直接写出第二步结果

公交车 相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$  包含 4 个全同  $\phi(x)$  之积, 当它们与初末态缩并时, 会出现  $4!$  种等价的缩并方式, 产生组合因子  $4!$ , 它恰好与  $\mathcal{L}_1$  中的  $1/4!$  因子抵消

也就是说，我们在  $\mathcal{L}_1$  中引入一个  $1/4!$  因子是为了使顶点规则中不会出现额外的组合因子，方便 Feynman 图的计算

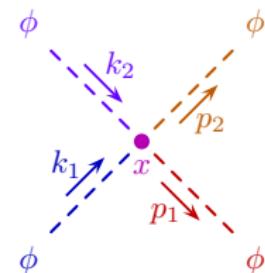
## 组合因子



从 Feynman 图的角度也可以讨论组合因子  $4!$  的来源



由于实标量玻色子是纯中性粒子，它的粒子线上没有箭头（注意，并非指表示动量方向的箭头），四条粒子线对顶点而言是不可区分的



## 组合因子



从 Feynman 图的角度也可以讨论组合因子  $4!$  的来源



由于实标量玻色子是纯中性粒子，它的粒子线上没有箭头

(注意，并非指表示动量方向的箭头)，四条粒子线对顶点而言

是不可区分的



第一条外线有 4 种连接顶点的选择



第二条外线有 3 种连接顶点的选择



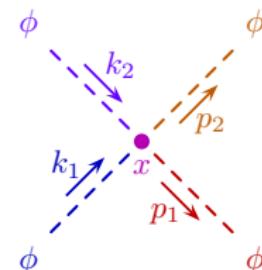
第三条外线只剩 2 种连接顶点的选择



第四条外线只有 1 种连接顶点的选择

一共有  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$  种连接方式。

得到组合因子 4!



## $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射截面

图 1  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  的  $T$  矩阵元  $\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$

👉  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  领头阶不变振幅  $i\mathcal{M} = -i\lambda$

由于初末态四个粒子质量相同, 根据 6.5.3 小节知识, 质心系中关于  $p_1$  的立体角  $\Omega$  的微分散射截面是

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

它不依赖于  $p_1$  的极角  $\theta$  和方位角  $\phi$ ，只依赖于质心能  $E_{CM}$

由于末态两个  $\phi$  玻色子是全同的, 末态对称性因子  $S = 2$

对立体角  $\Omega$  积分, 得到  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射截面

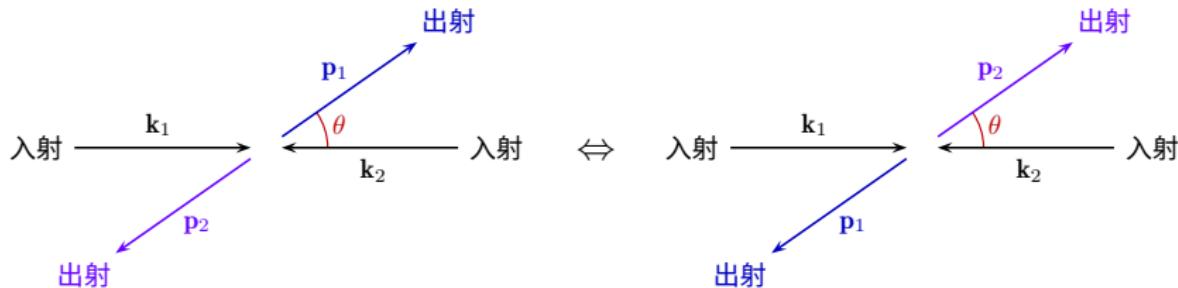
$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{2} 4\pi \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{CM}}^2}$$

# 末态对称性因子

由于  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  末态中两个  $\phi$  玻色子是全同的, 末态对称性因子  $S = 2$

计算散射截面时需要除以  $S$  来避免量子态的重复计算

具体来说, 在质心系中, 末态中两个  $\phi$  玻色子的动量大小相等, 方向相反



当  $p_1$  的方向是  $(\theta, \phi)$  时,  $p_2$  的方向是  $(\pi - \theta, \phi + \pi)$

当  $p_1$  的方向是  $(\pi - \theta, \phi + \pi)$  时,  $p_2$  的方向则是  $(\theta, \phi)$

因为这两个  $\phi$  玻色子是全同的, 这两个情况实际上对应于同一个量子态

如果我们对  $\Omega$  作  $4\pi$  立体角的积分, 就会双重计算每个量子态

这就是需要除以  $S = 2$  的原因

### iT<sub>2</sub><sup>(1)</sup> 贡献的 T 矩阵元



接下来讨论  $iT_2^{(1)}$  贡献的  $\phi$  粒子自能图



记初态为  $|i\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ , 末态为  $\langle f| = \langle \mathbf{k}|$ , 则  $iT_2^{(1)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{-i\lambda}{4!} 6 \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k} \rangle \\
&= \frac{-i\lambda}{4!} 6 \cdot 2 \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] | \mathbf{k} \rangle \\
&= \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k} \rangle
\end{aligned}$$



第一步中组合因子  $C_4^2 = 6$  是在  $\phi^4(x)$  中取 2 个场算符相互缩并的组合数



第二步中的组合因子  $A_2^2 = 2$  是余下 2 个场算符与初末态缩并的排列数



这两个组合因子将分母  $4! = 24$  约化为 2，得到第三步的结果

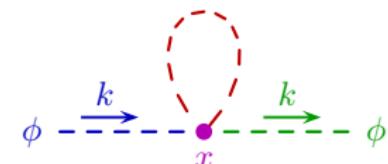


这样剩下的 2 称为 **Feynman** 图的对称性因子 (symmetry factor)

# $iT_2^{(1)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

$$\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{内线}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{内线}}] | \mathbf{k} \rangle$$

右图为相应的  $\phi$  粒子自能图



它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

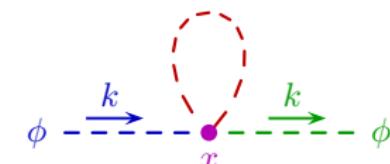
在计算时需要除以 2，否则就会双重计算

这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性

# $iT_2^{(1)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

$$\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{内线}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{外线}}] | \mathbf{k} \rangle$$

右图为相应的  $\phi$  粒子自能图



它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

在计算时需要除以 2，否则就会双重计算

这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性

实际上，分析 Feynman 图对称性得到的因子总是与  $T$  矩阵元计算中剩下的因子相同，下面将继续验证这个规律

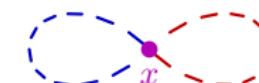
如果先画出 Feynman 图，再利用位置空间的 Feynmann 规则写出  $T$  矩阵元，则最后必须除以 Feynman 图的对称性因子才能得出正确的结果

# $iT_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

🚂 在  $iT_3^{(1)}$  的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

🚒 因此相应的 Feynman 图是气泡图

$$\begin{aligned}
 iT_3^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] \\
 &= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)]
 \end{aligned}$$



🚤 第一步中的组合因子  $C_3^1 = 3$  是在后 3 个场算符中取 1 个与第 1 个场算符缩并的组合数

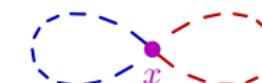
🚤 它将分母  $4! = 24$  约化为对称性因子 8

# $iT_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

🚂 在  $iT_3^{(1)}$  的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

🚒 因此相应的 Feynman 图是气泡图

$$\begin{aligned}
 iT_3^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] \\
 &= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)]
 \end{aligned}$$



🚤 第一步中的组合因子  $C_3^1 = 3$  是在后 3 个场算符中取 1 个与第 1 个场算符缩并的组合数

🚂 它将分母  $4! = 24$  约化为对称性因子 8

🚂 从 Feynman 图角度看，图中 2 个始末端连接同一顶点的圈各自贡献一个因子 2，而这 2 个圈彼此也是全同的，再贡献一个因子 2，因此 Feynman 图的对称性因子为  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ，验证了上述规律

## $\lambda^2$ 阶

在  $iT$  展开式的第 2 阶, 即  $\lambda^2$  阶, 有

$$iT^{(2)} = \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y T[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]$$

通过 Wick 定理可以将上式化为许多个包含正规乘积的项, 这里只讨论对  $\phi$  粒子 **自能图** 有贡献的项, 有 3 种情况

第 1 种情况具有如下缩并结构,

$$\begin{aligned} iT_1^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \int d^4x d^4y N[\phi(x) \overbrace{\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(y)}^1 \overbrace{\phi(y)}^1 \overbrace{\phi(y)}^1 \phi(y)] \\ &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y N[\phi(x) \overbrace{\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)}^1 \phi(y) \overbrace{\phi(y)}^1 \overbrace{\phi(y)}^1 \phi(y)] \end{aligned}$$

从  $\phi^4(x)$  和  $\phi^4(y)$  里面分别取 1 个  $\phi(x)$  和 1 个  $\phi(y)$  缩并的方法有  $4 \cdot 4$  种

从余下 3 个  $\phi(x)$  [或  $\phi(y)$ ] 中取 2 个  $\phi(x)$  [或  $\phi(y)$ ] 缩并的方法有  $C_3^2 = 3$  种

因此组合因子为  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

# $iT_1^{(2)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

一艘  $iT_1^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_1^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，因而可以合成一项，贡献一个 **2!** 因子，恰好与最前面的 **1/2!** 因子抵消

从而得到第二步的结果，它表明这个过程的对称性因子为 4

# $iT_1^{(2)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

一艘  $iT_1^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

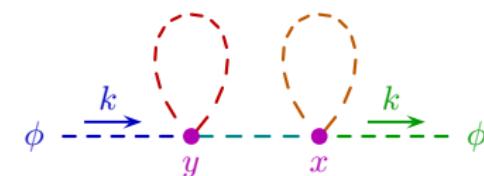
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_1^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有 **交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性**，因而可以合成一项，贡献一个  **$2!$  因子**，恰好与最前面的  **$1/2!$  因子** 抵消

从而得到第二步的结果，它表明这个过程的**对称性因子为 4**

相应的 Feynman 图具有 **2 个始末端连接同一个顶点的圈**，各自贡献一个**因子 2**，故

Feynman 图的对称性因子为  $2 \cdot 2 = 4$



# $iT_2^{(2)}$ 缩并结构

第 2 种情况具有如下缩并结构,

$$\begin{aligned}
 iT_2^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 6 \int d^4x d^4y N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] \\
 &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)]
 \end{aligned}$$

从  $\phi^4(x)$  和  $\phi^4(y)$  里面取 3 个  $\phi(x)$  和 3 个  $\phi(y)$  出来的方法有  $C_4^3 C_4^3 = 4 \cdot 4$  种

将这 3 个  $\phi(x)$  和 3 个  $\phi(y)$  彼此缩并的排列方法有  $3! = 6$  种

因而组合因子是  $4 \cdot 4 \cdot 6$

# $iT_2^{(2)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

🚢  $iT_2^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{k} | iT_2^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\
 &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\
 &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle
 \end{aligned}$$

✍ 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，合为一项之后，抵消掉最前面的  $1/2!$  因子

🦖 结果表明这个过程的对称性因子为 6

# $iT_2^{(2)}$ 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

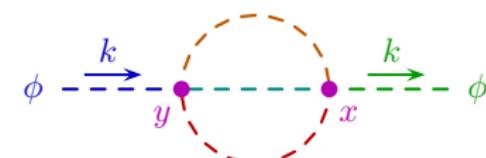
🚢  $iT_2^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_2^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

🏁 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，合为一项之后，抵消掉最前面的  $1/2!$  因子

🦖 结果表明这个过程的对称性因子为 6

🦕 相应的 Feynman 图具有 3 条全同内线连接两个不同的顶点，这 3 条内线有  $3!$  种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为  $3! = 6$



## iT<sub>3</sub><sup>(2)</sup> 缩并结构



第 3 种情况包含两种缩并结构，

$$\begin{aligned}
iT_3^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 6 \cdot 6 \cdot 2 \int d^4x d^4y \{ \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\
&\quad + \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \} \\
&= \frac{(-i\lambda)^2}{8} \int d^4x d^4y \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]
\end{aligned}$$



在第一步中，花括号内的两项具有交换时空坐标  $x$  和  $y$  的对称性，合为一项则抵消掉最前面的  $1/2!$  因子



花括号内的两项具有相同的组合因子



在每一项中，从  $\phi^4(x)$  和  $\phi^4(y)$  里面分别取 2 个  $\phi(x)$  和 2 个  $\phi(y)$  出来的方法有  $C_4^2 C_4^2 = 6 \cdot 6$  种，将这 2 个  $\phi(x)$  和 2 个  $\phi(y)$  彼此缩并的排列方法有 2! 种



因而共同的组合因子为  $6 \cdot 6 \cdot 2$

## iT<sub>3</sub><sup>(2)</sup> 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

轮船  $iT_3^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_3^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} \textcolor{brown}{2} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\textcolor{teal}{\phi(y)}\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组合因子为 2，结果表明对称性因子为 4

## iT<sub>3</sub><sup>(2)</sup> 贡献的 $\phi$ 粒子自能图

🚢  $iT_3^{(2)}$  对  $T$  矩阵元的贡献为

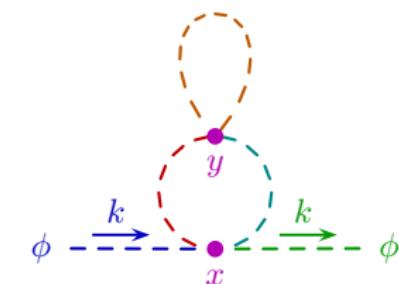
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_3^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} \textcolor{brown}{2} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组合因子为 2，结果表明对称性因子为 4

 在相应的 Feynman 图里面，始末端连接同一顶点的  
1 个圈贡献一个因子  $2$

 连接两个不同顶点的 **2** 条全同内线有  **$2!$**  种排列方法

故 Feynman 图的对称性因子为  $2 \cdot 2 = 4$



# 动量空间 Feynman 规则

转到动量空间,  $\phi^4$  理论的 Feynman 规则如下

① 实标量玻色子入射外线:  $\phi \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = 1$

② 实标量玻色子出射外线:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \phi = 1$

③ 实标量玻色子传播子:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

④  $\phi^4$  相互作用顶点:   $= -i\lambda$

⑤ 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系

⑥ 每个未定的圈动量  $p^\mu$  贡献一个积分  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

⑦ 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子

# 动量空间 Feynman 规则

转到动量空间,  $\phi^4$  理论的 Feynman 规则如下

① 实标量玻色子入射外线:  $\phi \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = 1$

② 实标量玻色子出射外线:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \phi = 1$

③ 实标量玻色子传播子:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

④  $\phi^4$  相互作用顶点:   $= -i\lambda$

⑤ 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系

⑥ 每个未定的圈动量  $p^\mu$  贡献一个积分  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

⑦ 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子

将  $\phi^4$  相互作用项  $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$  中的 4 个场算符  $\phi$  剥离, 乘以  $i$ , 还要再乘上 4 个  $\phi$  的排列数  $4!$ , 才得到顶点规则的表达式  $-i\lambda$

## 7.4 节 一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明, **外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论, 它们是由拉氏量中的自由部分决定的, 具有一般性**

本节讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论

## 7.4 节 一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明, **外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论, 它们是由拉氏量中的自由部分决定的, 具有一般性**

本节讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论。

(1) 复标量场  $\phi(x)$  描述的玻色子有正反之分, 引入两种动量为  $p$  的单粒子态,

正标量玻色子  $\phi$  的单粒子态  $|p^+\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$

反标量玻色子  $\bar{\phi}$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

足球  $\phi(x)$  与正标量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned} \phi(x) |\mathbf{p}^+\rangle &\equiv \phi^{(+)}(x) |\mathbf{p}^+\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_q e^{-iq\cdot x} \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq\cdot x} [a_q, a_p^\dagger] |0\rangle = \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq\cdot x} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = e^{-ip\cdot x} |0\rangle \end{aligned}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系

## 复标量场与初末态的缩并

$\phi^\dagger(x)$  与反标量玻色子初态的缩并为

$$\phi^{\dagger}(x) |p^- \rangle \equiv \phi^{(+)}(x) |p^- \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_p} b_p^\dagger |0\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle$$

  $\phi^\dagger(x)$  与正标量玻色子末态的缩并为

$$\langle \mathbf{p}^+ | \phi^\dagger(x) \equiv \langle \mathbf{p}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_p} a_p \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_q^\dagger e^{iq \cdot x}$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] = \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \langle 0 | e^{ip \cdot x}$$

橄榄球  $\phi(x)$  与反标量玻色子末态的缩并为

$$\langle \overline{\mathbf{p}^-} | \phi(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{p}^- | \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_p} b_p \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q^\dagger e^{iq \cdot x} = \langle 0 | e^{ip \cdot x}$$

## 复标量场一般内外线规则

用带箭头的虚线表示复标量玻色子的运动，线上的箭头可认为是某种  $U(1)$  荷流动的方向，或者说是玻色子数流动的方向

由上述结果及 Feynman 传播子表达式, 复标量场的**位置空间内外线规则**如下

$$\phi \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \overline{\phi(x)} | \mathbf{p}^+ \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) | \mathbf{p}^+ \rangle = e^{-i p \cdot x}$$

$$\bar{\phi} \xrightarrow[p]{\text{---} \leftarrow \text{---} \bullet} x = \langle 0 | \overline{\phi^\dagger(x)} | \mathbf{p}^- \rangle = \langle 0 | \phi^{\dagger(+)}(x) | \mathbf{p}^- \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

$$x \bullet \overbrace{\phi}^p = \langle \overbrace{\mathbf{p}^+}^{\phi^\dagger(x)} | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \overrightarrow{\phi} = \langle \mathbf{p}^- | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^- | \phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \text{---} \xrightarrow{p} \bullet y = \overline{\phi(y)\phi^\dagger}(x) = D_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

其中  $m_\phi$  是标量玻色子  $\phi$  的质量

## 有质量实矢量场

(2) 有质量实矢量场  $A^\mu(x)$  描述纯中性矢量玻色子  $A$ ，具有 3 种螺旋度  $\lambda = \pm, 0$

记动量为  $p$ 、螺旋度为  $\lambda$  的  $A$  粒子态为  $|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p, \lambda}^\dagger |0\rangle$

  $A^\mu(x)$  与**实矢量玻色子初态**的缩并为

$$\begin{aligned}
& \overline{A^\mu(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv A^{\mu(+)}(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} e^{-iq\cdot x} \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda') e^{-iq\cdot x} [a_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger] |0\rangle \\
&= \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda') e^{-iq\cdot x} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) e^{-ip\cdot x} |0\rangle
\end{aligned}$$

#### 第四步用到产生湮灭算符的对易关系

## 有质量实矢量场一般外线规则



$A^\mu(x)$  与**实矢量玻色子末态**的缩并为

$$\begin{aligned}
& \langle \overline{\mathbf{p}}, \lambda | A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger e^{iq \cdot x} \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] e^{iq \cdot x} \\
&= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{iq \cdot x} = \langle 0 | \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}
\end{aligned}$$



用波浪线表示有质量实矢量玻色子的运动，相应的位置空间外线规则为

$$A, \lambda; \mu \xrightarrow{\text{wavy line with arrow}} x = \langle 0 | A^\mu(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \langle 0 | A^{\mu(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$x \bullet \overbrace{A, \lambda; \mu}^p = \langle \overbrace{\mathbf{p}, \lambda}^p | A^\mu(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

# 非协变项

现在讨论有质量矢量场的内线规则

前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子** 表达式包含一个 **非协变项**

接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被 **相互作用哈密顿量密度** 中 **非协变项** 的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**

### 非协变项

现在讨论有质量实矢量场的内线规则

前面的计算表明，有质量矢量场的 Feynman 传播子表达式包含一个非协变项

接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被相互作用哈密顿量密度中非协变项的贡献抵消，因而理论仍然具有 Lorentz 协变性

假设相互作用拉氏量具有  $\mathcal{L}_1 = -gJ_\mu A^\mu$  的形式，则 6.1.2 小节讨论表明相互作用绘景中的相互作用哈密顿量密度为  $\mathcal{H}_1(x) = gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(x)]^2$

$q$  是耦合常数,  $m_A$  是实矢量玻色子的质量, 右边第二项就是非协变项

靴子  $iT$  展开式的第 1 阶为  $iT^{(1)} = -i \int d^4x \mathsf{T} \left[ g J_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x) J^0(x) \right]$

第 2 阶为  $iT^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T \left\{ \left( g J_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(x)]^2 \right) \right. \\ \left. \times \left( g J_\nu(y) A^\nu(y) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(y)]^2 \right) \right\}$

$g^2$  阶

 **Feynman 传播子**  $\overline{A^\mu(x)A^\nu(y)} = \Delta_F^{\mu\nu}(x-y)$  出现在  $n \geq 2$  的  $iT^{(n)}$  中

比如,  $iT^{(2)}$  包含一个涉及 Feynman 传播子的  $g^2$  阶的项

$$\begin{aligned}
iT_1^{(2)} &= \frac{(ig)^2}{2!} \int d^4x d^4y \mathsf{N} [J_\mu(x) \overline{A^\mu(x) J_\nu(y) A^\nu(y)}] \\
&= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathsf{N} [J_\mu(x) J_\nu(y) \Delta_F^{\mu\nu}(x-y)] \\
&= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathsf{N} \left\{ \textcolor{brown}{J_\mu(x) J_\nu(y)} \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} - \frac{i}{m_A^2} g^{\mu 0} g^{\nu 0} \delta^{(4)}(x-y) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Feynman 传播子中的非协变项

另一方面,  $iT^{(1)}$  也包含一个  $g^2$  阶的项

$$\begin{aligned}
iT_1^{(1)} &= -i \int d^4x \mathsf{N} \left[ \frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x) J^0(x) \right] = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathsf{N} \left[ \frac{i}{m_A^2} J^0(x) J^0(y) \delta^{(4)}(x-y) \right] \\
&= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathsf{N} \left[ \frac{i}{m_A^2} J_\mu(x) J_\nu(y) g^{\mu 0} g^{\nu 0} \delta^{(4)}(x-y) \right]
\end{aligned}$$

源自  $\mathcal{H}_1(x)$  的非协变项

# 有质量实矢量场一般内线规则

在微扰论的  $g^2$  阶计算中，必须同时考虑  $iT_1^{(2)}$  和  $iT_1^{(1)}$  的贡献

两者相加，则非协变项恰好相消，得到一个 Lorentz 协变的表达式

$$iT_1^{(2)} + iT_1^{(1)} = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y N \left\{ J_\mu(x) J_\nu(y) \left[ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \right] \right\}$$

上式方括号里面的部分是 Feynman 传播子表达式中的 Lorentz 协变项，在实际计算中，只有这一项有贡献

因此可以将有质量实矢量场的 **位置空间内线规则** 设置为

$$x; \nu \bullet \xrightarrow{\text{---} \xrightarrow{p} \text{---}} y; \mu = \overbrace{A^\mu(y) A^\nu(x)}^{\text{的 Lorentz 协变项}}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

## 无质量实矢量场

(3) 无质量实矢量场  $A^\mu(x)$  描述纯中性无质量矢量玻色子  $A$ , 有 2 种螺旋度  $\lambda = \pm$

记动量为  $\mathbf{p}$ 、螺旋度为  $\lambda$  的相应  $A$  粒子态为  $|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

  $A^\mu(x)$  正能解部分和负能解部分可以表达成

$$A^{\mu(+)}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) b_{\mathbf{p}, \sigma} + \sum_{\lambda=+} \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} \right]$$

$$A^{\mu(-)}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{ip \cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) b_{\mathbf{p}, \sigma}^{\dagger} + \sum_{\lambda=+} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} \right]$$

中  $A^\mu(x)$  与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}
& \overline{A^\mu(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv A^{\mu(+)}(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} e^{-iq\cdot x} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma) b_{\mathbf{q},\sigma} + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \right] \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} e^{-iq\cdot x} \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma) [b_{\mathbf{q},\sigma}, a_{\mathbf{p},\lambda'}^\dagger] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda') [a_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda'}^\dagger] \right\} |0\rangle \\
&= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda') e^{-iq\cdot x} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) e^{-ip\cdot x} |0\rangle
\end{aligned}$$

# 无质量实矢量场一般内外线规则

  $A^\mu(x)$  与 **实矢量玻色子末态** 的缩并为

$$\begin{aligned}
 & \langle \overline{\mathbf{p}, \lambda} | A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) \\
 &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \left[ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q}, \sigma) b_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger \right] \\
 &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q}, \sigma) [a_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') [a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger] \right\} \\
 &= \int d^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = \langle 0 | \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}
 \end{aligned}$$

 用 **波浪线** 表示 **无质量实矢量玻色子** 的运动，在 **Feynman 规则** 下，无质量实矢量场的 **位置空间内外线规则** 为

$$A, \lambda; \mu \xrightarrow[p]{\sim} \bullet x = \langle 0 | \overline{A^\mu(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \langle 0 | A^{\mu(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\sim} A, \lambda; \mu = \langle \overline{\mathbf{p}, \lambda} | A^\mu(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

$$x; \nu \bullet \xrightarrow[p]{\sim} y; \mu = \overline{A^\mu(y) A^\nu(x)} = \Delta_F^{\mu\nu}(y - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}$$

## 动量空间一般内外线 Feynman 规则



转到动量空间中，有以下一般内外线 Feynman 规则

- ① 正标量玻色子入射外线:  $\phi \xrightarrow[p]{\quad} \bullet = 1$

- ② 反标量玻色子入射外线:  $\bar{\phi} \xrightarrow{\text{---}} \xrightarrow{\text{---}} \bullet = 1$

- ③ 正标量玻色子出射光线:  $\bullet \dashv \overset{p}{\longrightarrow} \dashv \phi = 1$

- ④ 反标量玻色子出射光线:  $\bullet - \xrightarrow{p} - \bar{\phi} = 1$

- 5 复标量玻色子传播子:  $\bullet \xrightarrow{p} \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$

## 动量空间一般内外线 Feynman 规则

- 7 有质量实矢量玻色子入射外线:  $A, \lambda; \mu \xrightarrow{\text{入射}} \bullet = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

8 有质量实矢量玻色子出射外线:  $\bullet \xrightarrow{\text{出射}} A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$

9 有质量实矢量玻色子传播子:  $\nu \xrightarrow{\text{传播子}} \mu = \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon}$

10 无质量实矢量玻色子入射外线:  $A, \lambda; \mu \xrightarrow{\text{入射}} \bullet = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

11 无质量实矢量玻色子出射外线:  $\bullet \xrightarrow{\text{出射}} A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$

12 无质量实矢量玻色子传播子:  $\nu \xrightarrow{\text{传播子}} \mu = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$  (Feynman 规范)