

数学物理方法

第一章 复变函数与解析函数

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 9 月 30 日



数学物理方法课程



本课程包括两部分内容：复变函数与数学物理方程



复变函数是微积分的内容从实变量到复变量的扩展



它是进一步学习数学物理方程和特殊函数的基础



其本身在物理、力学和工程问题中也具有多方面的应用。

数学物理方法课程

 本课程包括两部分内容：复变函数与数学物理方程

复变函数是微积分的内容从实变量到复变量的扩展

 它是进一步学习**数学物理方程**和**特殊函数**的基础

其本身在物理、力学和工程问题中也具有多方面的应用

 数学物理方程主要研究物理或工程问题中所涉及的各种偏微分方程和积分方程

 本课程只研究偏微分方程，主要是二阶线性偏微分方程，包括波动方程、输运方程和稳定场方程

 在偏微分方程的导出、求解和对解的物理分析三个方面，求解是课程的重点内容。

本课程所涉及的方法在经典物理、近代物理和工程技术和应用中都有广泛的应用

教材和参考书



主讲教材

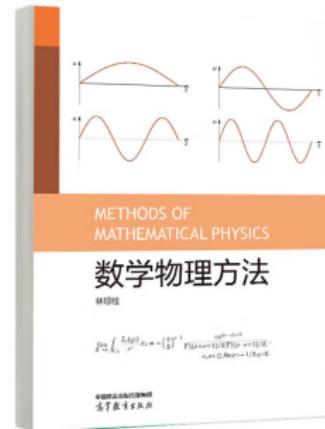
- 林琼桂, 《数学物理方法》, 高等教育出版社, 2024



辅助教材

- ① 梁昆淼编, 刘法、缪国庆修订, 《数学物理方法》, 第 4 版, 高等教育出版社, 2010

② 吴崇试, 《数学物理方法》, 高等教育出版社, 2010



参考书

- ① 胡嗣柱、倪光炯, 《数学物理方法》, 第 2 版, 高等教育出版社, 北京, 2002
 - ② 姚端正、梁家宝, 《数学物理方法》, 第 3 版, 科学出版社, 北京, 2010
 - ③ 邵惠民, 《数学物理方法》, 第 2 版, 科学出版社, 北京, 2010
 - ④ 杨孔庆, 《数学物理方法》, 高等教育出版社, 北京, 2012

更多参考书

- ⑤ 郭敦仁, 《数学物理方法》, 第 2 版, 高等教育出版社, 北京, 1991
 - ⑥ 钟玉泉, 《复变函数论》, 第 3 版, 高等教育出版社, 北京, 2004
 - ⑦ 王竹溪、郭敦仁, 《特殊函数概论》, 北京大学出版社, 北京, 2000
 - ⑧ E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927
 - ⑨ R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, New York, Interscience, 1953; R. 柯朗、D. 希尔伯特著, 钱敏、郭敦仁译, 《数学物理方法》, 北京, 科学出版社, 2011
 - ⑩ S. Hassani, *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*, 2nd ed., New York, Springer, 2013
 - ⑪ 胡嗣柱、徐建军, 《数学物理方法解题指导》, 北京, 高等教育出版社, 1997
 - ⑫ 周治宁、吴崇试、钟毓澍, 《数学物理方法习题指导》, 北京, 北京大学出版社, 2004

第一章 复变函数与解析函数

§1 复数

§1.1 复数的定义

形如 $z = x + iy$ 的数称为**复数** (complex number), 其中 $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

 \mathbb{R} 表示实数的集合；虚数单位 $i = \sqrt{-1}$ ，满足 $i^2 = -1$ ；复数的集合记作 \mathbb{C}

 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部, 记作 $x = \operatorname{Re} z$ 和 $y = \operatorname{Im} z$

 虚部为零的复数就是**实数**，实部为零而虚部非零的复数称为**纯虚数**

复数 $z^* = x - iy$ 称为 z 的共轭 (conjugate) 复数或复共轭，亦记作 \bar{z}

第一章 复变函数与解析函数

§1 复数

§1.1 复数的定义

形如 $z = x + iy$ 的数称为**复数** (complex number), 其中 $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

 \mathbb{R} 表示实数的集合；虚数单位 $i = \sqrt{-1}$ ，满足 $i^2 = -1$ ；复数的集合记作 \mathbb{C}

 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部, 记作 $x = \operatorname{Re} z$ 和 $y = \operatorname{Im} z$

虚部为零的复数就是**实数**，实部为零而虚部非零的复数称为**纯虚数**

复数 $z^* = x - iy$ 称为 z 的共轭 (conjugate) 复数或复共轭，亦记作 \bar{z}

注 一般认为 z^* 和 z 是互相独立的变量，犹如 x 和 y 是互相独立的变量

事实上， (z^*, z) 和 (x, y) 两组变量可以互相线性表出：

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

 给定 z , 就能按照 $z^* = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ 的规则得出 z , 因此可将 z^* 看作 z 的函数

但这并非简单的函数，在 §3.1 会看到， z^* 看作 z 的函数处处连续却处处不可导

§1.2 复数的四则运算

 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 复数的四则运算规则为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}$$

理解一 利用实数的四则运算和 $i^2 = -1$ 即可得到这些结果:

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

§1.2 复数的四则运算

 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 复数的四则运算规则为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}$$

 理解一 利用实数的四则运算和 $i^2 = -1$ 即可得到这些结果:

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

 理解二 将以上结果当作运算的**定义**，则可以验证**实数的四则运算规则**如**交换律、结合律、分配律**等均**对复数成立**，如 $z_1 \pm z_2 = z_2 \pm z_1$ 、 $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ，且 $i^2 = -1$

 这正是所期望的，因为复数包含实数，它的运算规则当然要与实数运算规则相容

注 由上面的加法规则可见复数的加法与平面上矢量的加法一致

§1.3 复数的各种表示法

1 代数表示: $z = x + iy$

2 几何表示：有两种表示方式

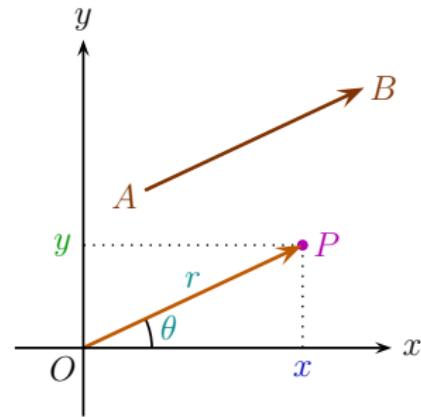
1 用 xy 平面上的点 P 来表示复数 z



P 的横坐标为 $x = \operatorname{Re} z$, 纵坐标为 $y = \operatorname{Im} z$



这样复数与平面上的点是一一对应的



§1.3 复数的各种表示法

1 代数表示: $z = x + iy$

2 几何表示：有两种表示方式

① 用 xy 平面上的点 P 来表示复数 z

 P 的横坐标为 $x = \operatorname{Re} z$ ，纵坐标为 $y = \operatorname{Im} z$

这样复数与平面上的点是一一对应的

 所以该 xy 平面亦称为**复平面**

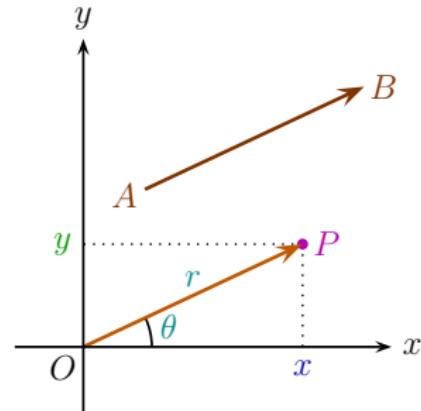
② 用矢量 \overrightarrow{OP} 来表示复数 z

✿ 矢量 \overrightarrow{OP} 在 x 轴上的投影为 $x = \operatorname{Re} z$ ，在 y 轴上的投影为 $y = \operatorname{Im} z$

这样复数与平面上的矢量是一一对应的

 注意：起点不同，但方向和长度相同的矢量是等价的

 图上矢量 \overrightarrow{AB} 与矢量 \overrightarrow{OP} 表示同一复数



§1.3 复数的各种表示法

1 代数表示: $z = x + iy$

2 几何表示：有两种表示方式

① 用 xy 平面上的点 P 来表示复数 z



P 的横坐标为 $x = \operatorname{Re} z$, 纵坐标为 $y = \operatorname{Im} z$



这样复数与平面上的点是一一对应的



所以该 xy 平面亦称为**复平面**

② 用矢量 \overrightarrow{OP} 来表示复数 z



矢量 \overrightarrow{OP} 在 x 轴上的投影为 $x \equiv \operatorname{Re} z$ ，在 y 轴上的投影为 $y \equiv \operatorname{Im} z$



这样复数与平面上的矢量也是一一对应的



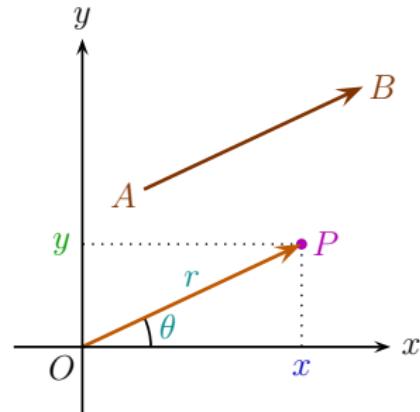
注意：起点不同，但**方向和长度相同**的矢量是等价的。



图上矢量 \overrightarrow{AB} 与矢量 \overrightarrow{OP} 表示同一复数

3 三角表示: 利用点 P 的极坐标 (r, θ) , 以及 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 得到

$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



复数的指数表示

4 指数表示：定义纯虚数 $i\theta$ 的指数 $e^{i\theta} \equiv \exp(i\theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta$ ，将复数 z 表达为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

● r 称为复数 z 的模 (module)， θ 称为辐角 (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足 } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

复数的指数表示

4 指数表示：定义纯虚数 $i\theta$ 的指数 $e^{i\theta} \equiv \exp(i\theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta$ ，将复数 z 表达为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

● r 称为复数 z 的模 (module)， θ 称为辐角 (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足 } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

根据 $e^{i\theta}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

可见，宗量为纯虚数的指数函数与实变量的指数函数具有同样的运算性质

II 注 函数的自变量可以是一个复杂的对象，这时通常称为宗量 (argument)

复数的指数表示

4 指数表示：定义纯虚数 $i\theta$ 的指数 $e^{i\theta} \equiv \exp(i\theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta$ ，将复数 z 表达为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

● r 称为复数 z 的模 (module)， θ 称为辐角 (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足 } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

根据 $e^{i\theta}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

可见，宗量为纯虚数的指数函数与实变量的指数函数具有同样的运算性质

II 注 函数的自变量可以是一个复杂的对象，这时通常称为宗量 (argument)

● 若 θ 是 z 的辐角，则 $\theta + 2n\pi$ 也是 z 的辐角，其中 $n \in \mathbb{Z}$ ，而 \mathbb{Z} 是整数的集合

● 若限制 $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$ ，则所得单值分支称为主值分支，记作 $\arg z$

用级数理解 Euler 公式

 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 也可以用级数理解

由 Taylor 级数 $e^\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$ 和 $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ 得

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$



Leonhard Euler (1707–1783)

用级数理解 Euler 公式

 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 也可以用级数理解

 由 Taylor 级数 $e^\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$ 和 $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ 得

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$



Leonhard Euler
(1707–1783)

 在指数表示下，复数的乘法和除法变得非常简单：

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{👉} \quad |z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1 e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{r_2 e^{i\theta_2} e^{-i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{👉} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

 此外，有 $z^* = (re^{i\theta})^* = r(\cos \theta + i \sin \theta)^* = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}$ ，故

$$|z^*| = r = |z|, \quad zz^* = re^{i\theta} re^{-i\theta} = r^2 = |z|^2$$

复数表示法举例

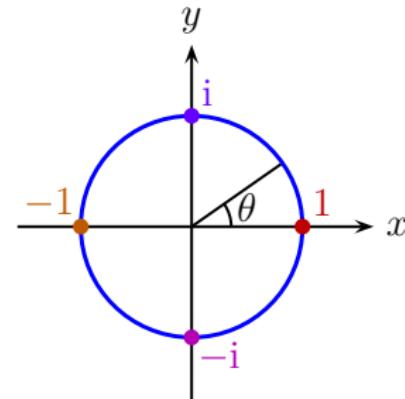
青椒 $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) 的模为 1，对 θ 具有 2π 周期

核桃 它对应于复平面上的单位圆周

$$e^{0i} = e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$$

$$e^{\pi i/2} = e^{-3\pi i/2} = i, \quad e^{3\pi i/2} = e^{-\pi i/2} = -i$$

菜叶 对任意复数 z ，有 $|ze^{i\theta}| = |z|$ ，特别地， $|-z| = |z|$



复数表示法举例

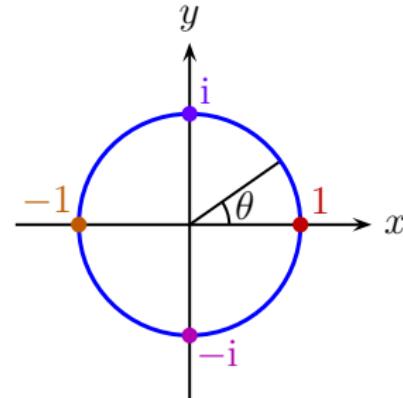
青椒 $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) 的模为 1，对 θ 具有 2π 周期

土豆 它对应于复平面上的单位圆周

$$e^{0i} = e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$$

$$e^{\pi i/2} = e^{-3\pi i/2} = i, \quad e^{3\pi i/2} = e^{-\pi i/2} = -i$$

白菜 对任意复数 z ，有 $|ze^{i\theta}| = |z|$ ，特别地， $|-z| = |z|$



● $z = 3 + 4i$ 的模为 $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，幅角可取为 $\text{Arg } z = \arctan \frac{4}{3}$ ，则

$$z = 5 \exp \left(i \arctan \frac{4}{3} \right) = 5 \cos \left(\arctan \frac{4}{3} \right) + 5i \sin \left(\arctan \frac{4}{3} \right)$$

● $z = 2i$ 可表示为

$$z = 2 e^{\pi i/2} = 2 \cos \frac{\pi}{2} + 2i \sin \frac{\pi}{2}$$

§1.4 乘方与开方

 乘方是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

 **开方**运算的结果是**多值的**，设 $z - a = \rho e^{i\phi}$ ，则

$$\sqrt[n]{z-a} \equiv (z-a)^{1/n} = (\rho e^{i\phi})^{1/n} = [\rho e^{i(\phi+2k\pi)}]^{1/n} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\phi+2k\pi)/n},$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

 当 k 取其它整数时，所得结果与以上重复，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n 个不同的根；当 $z = -1 = e^{\pi i}$ 时， \sqrt{z} 的根可取为 $e^{\pi i/2} = i$ 和 $e^{3\pi i/2} = -i$

§1.4 乘方与开方

 乘方是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

 **开方**运算的结果是**多值的**，设 $z - a = \rho e^{i\phi}$ ，则

$$\sqrt[n]{z-a} \equiv (z-a)^{1/n} = (\rho e^{i\phi})^{1/n} = [\rho e^{i(\phi+2k\pi)}]^{1/n} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\phi+2k\pi)/n},$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

 当 k 取其它整数时，所得结果与以上重复，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n 个不同的根；当 $z = -1 = e^{\pi i}$ 时， \sqrt{z} 的根可取为 $e^{\pi i/2} = i$ 和 $e^{3\pi i/2} = -i$

 根式函数 $\sqrt[n]{z-a}$ 的多值性源于宗量 (此外为 $z-a$) 的辐角多值性, 而非自变量 (此处为 z) 的辐角多值性

如果取 $z = re^{i(\theta+2j\pi)}$, $z - a = \rho e^{i(\phi+2k\pi)}$, 其中 θ 、 ϕ 均为主值, 而 $j, k \in \mathbb{Z}$, 则 $\sqrt[n]{z-a}$ 的函数值只与 k 有关, 而与 j 无关

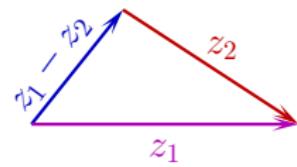
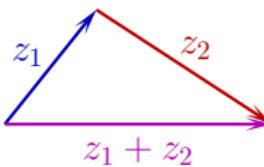
 注意 ϕ 是 θ 的函数 (当然还依赖于 r 和 a)，但是 k 与 j 是彼此独立的， k 的取值不依赖于 j 的取值

§1.5 三角不等式

🐙 三角不等式有两条：

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$



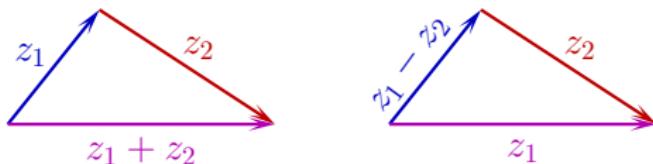
🐠 由于复数的加法与矢量的加法一样，上面两式就是关于三角形边长的不等式

§1.5 三角不等式

章鱼 **三角不等式**有两条：

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$



鱼 由于复数的加法与矢量的加法一样，上面两式就是**关于三角形边长的不等式**

第一式的证明 利用 $\operatorname{Re}(z_1^* z_2) \leq |z_1^* z_2| = |z_1| |z_2|$ 得

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1^* + z_2^*)(z_1 + z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1^* z_2) + i \operatorname{Im}(z_1^* z_2) - i \operatorname{Im}(z_1 z_2^*) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

螃蟹 对上式两边**开方**即得第一式

螃蟹 **第一式中等号成立的充要条件是** $\operatorname{Re}(z_1^* z_2) = |z_1| |z_2|$ ，而

$$\operatorname{Re}(z_1^* z_2) = \operatorname{Re} [r_1 r_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)}] = r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \leq r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$$

蜗牛 可见，此充要条件是两个复数中**有一个为 0**，或**两者方向相同**

第二条三角不等式的证明

第二式的证明 由第一式 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 得

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

也就是 $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

同理有 $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$, 故 $|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2|$

合起来, 得 $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

 这等价于第二式 $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

§1.6 复球面与无穷远点

作球面与复平面相切于原点 O ，过 O 作直线 OZ

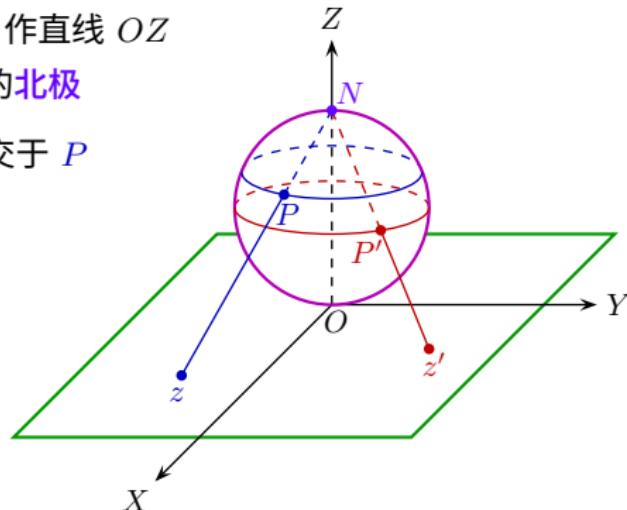
垂直于复平面，与球面交于 N ， N 即球的北极

设 z 为任一复数，连接 Nz ，与球面交于 P

易见 z 与 P 一一对应

故复数 z 亦可用球面上的点 P 表示

该球面称为复球面



§1.6 复球面与无穷远点

作球面与复平面相切于原点 O ，过 O 作直线 OZ 垂直于复平面，与球面交于 N ， N 即球的北极

设 z 为任一复数，连接 Nz ，与球面交于 P

易见 z 与 P 一一对应

故复数 z 亦可用球面上的点 P 表示

该球面称为复球面

当 $z \rightarrow \infty$ 时， $P \rightarrow N$

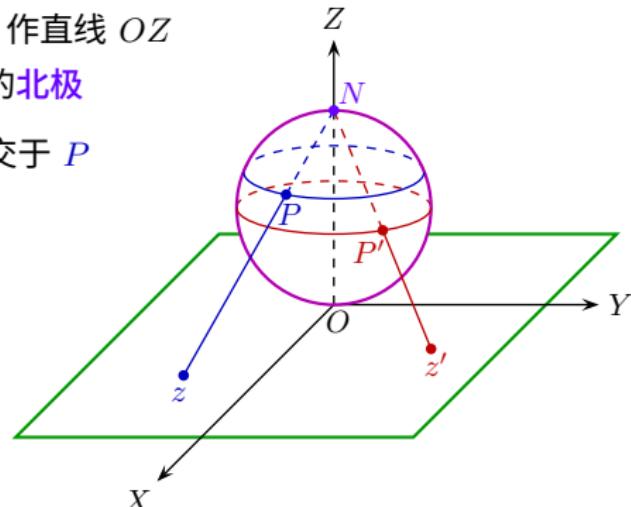
当 $z' \rightarrow \infty$ 时，亦有 $P' \rightarrow N$

因此，作为 N 的对应点，把复平面上的无穷远点当作一点，记作 ∞

包括 ∞ 的复平面称为扩充复平面

注 将无穷远点当作一点是一种规定

以上复球面的作法不是唯一的，另一种常见的作法是将球心放在原点 O



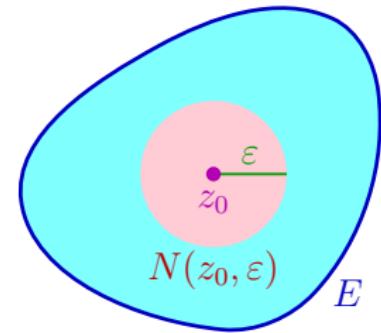
§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集



由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念

1 邻域 (neighborhood): 由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 的 ε 邻域, 记作 $N(z_0, \varepsilon)$, 它是以 z_0 为圆心、 ε 为半径的开圆 (不包含圆周)



§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

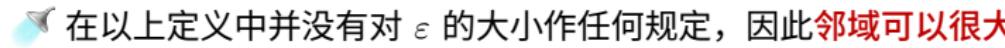


由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念。

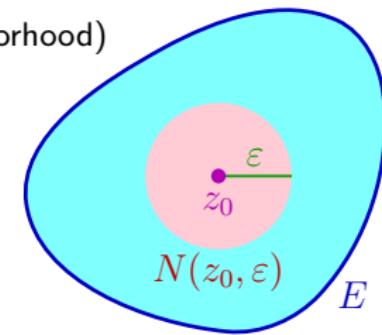
1 邻域 (neighborhood): 由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 的 ε 邻域, 记作 $N(z_0, \varepsilon)$, 它是以 z_0 为圆心、 ε 为半径的开圆 (不包含圆周)



当然也可等价地将邻域定义为以 z_0 为中心的正方形内部，不过以上定义是方便的。



 邻域去掉圆心后所得点集称为去心邻域 (deleted neighborhood)



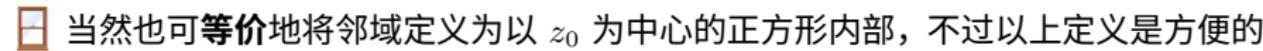
§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集



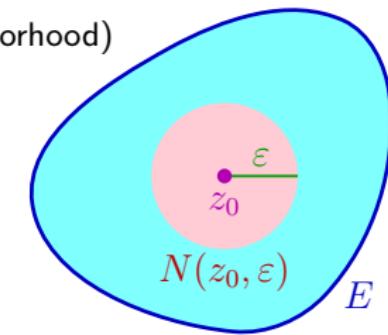
由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念。

1 邻域 (neighborhood): 由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 的 ε 邻域, 记作 $N(z_0, \varepsilon)$, 它是以 z_0 为圆心、 ε 为半径的开圆 (不包含圆周)



2 内点 (interior point): 设 E 为点集, $z_0 \in E$, 若存

在 $\varepsilon > 0$, 使 $N(z_0, \varepsilon) \subset E$, 则 z_0 称为 E 的内点



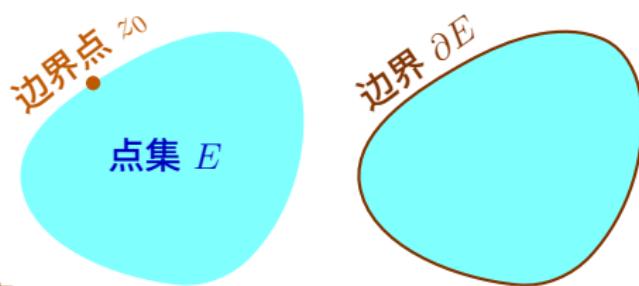
开集、边界点和边界

3 开集 (open set): 若点集 E 中的点皆为内点，则称 E 为开集

显然，邻域就是开集

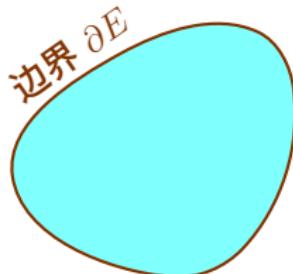
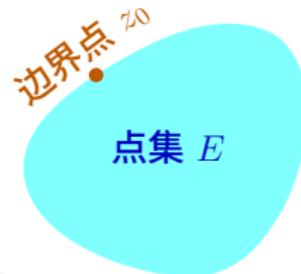
4 边界点 (boundary point): 若点 z_0 的任一邻域内既有属于点集 E 的点，又有不属于 E 的点，则 z_0 为 E 的边界点。

5 边界 (boundary): E 的全部边界点组成的点集称为 E 的边界, 记作 ∂E



开集、边界点和边界

3 开集 (open set): 若点集 E 中的点皆为内点，则称 E 为开集



4 边界点 (boundary point): 若点 z_0 的任一邻域内既有属于点集 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则 z_0 为 E 的**边界点**

5 边界 (boundary): E 的全部边界点组成的点集称为 E 的边界, 记作 ∂E

注 边界点 z_0 本身可以不属于 E ；开集必不包含其边界点

如果一点集由有限个点组成，或由一弧段组成，则所有的点均为**边界点**



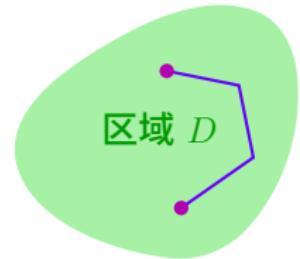
 **开圆或闭圆**（包含圆周的圆）的**边界**都是**圆周**

 若点集 E 是由开圆(或闭圆)内去掉若干点后所余部分构成的，则去掉的点均为边界点

区域

6 区域 (domain): 非空点集 D 若满足以下两个条件，则称为**区域**

- ① D 是开集
 - ② D 是连通的，即 D 中任意两点均可由全属于 D 的折线连接



▶ 注 区域是一种特殊的点集，是复变函数论中**最重要的**几何概念

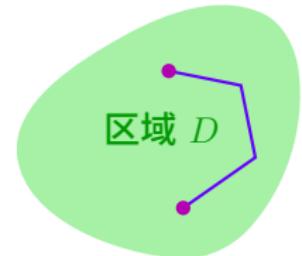


 显然，邻域或开圆就是区域

区域

6 区域 (domain): 非空点集 D 若满足以下两个条件,
则称为区域

- ① D 是开集
- ② D 是连通的, 即 D 中任意两点均可用全属于 D 的
折线连接



▶ 注 区域是一种特殊的点集, 是复变函数论中最重要的几何概念

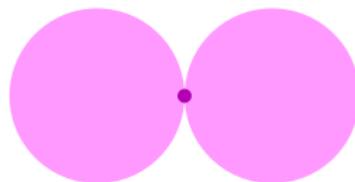
🏀 显然, 邻域或开圆就是区域

🎳 两个不相交的开圆的并集仍是开集, 但不是区域,
哪怕两个圆的圆周相切



🏓 在相切的情况下, 两个圆加上切点仍不是区域

-pencil icon 因为切点是边界点, 所以加上边界点以后虽然连通,
但不再是开集



闭域、单通与复通区域

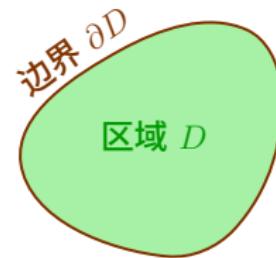
7 闭域 (closed domain): 区域 D 加上其边界 ∂D

称为闭域, 记作 \bar{D} , 即 $\bar{D} = D + \partial D$

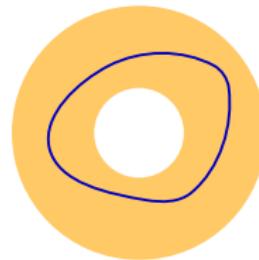
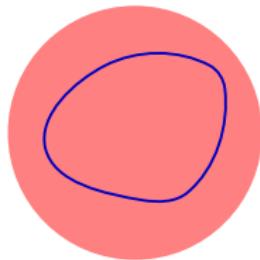
注 区域都是开集，不包括边界

以后提到圆或环时总不包括边界

◆ 若包括边界，则称为**闭圆**或**闭环**



闭域 $\bar{D} = D + \partial D$



闭域、单通与复通区域

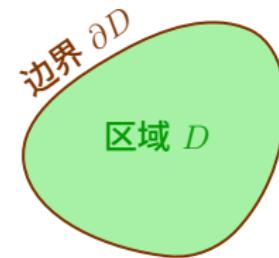
7 闭域 (closed domain): 区域 D 加上其边界 ∂D

称为闭域, 记作 \bar{D} , 即 $\bar{D} = D + \partial D$

注 区域都是开集，不包括边界

以后提到圆或环时总不包括边界

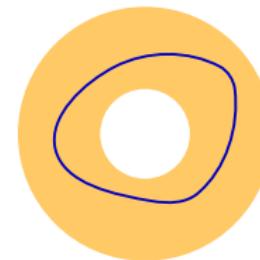
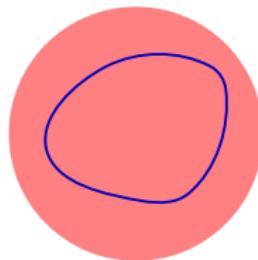
若包括边界，则称为**闭圆**或**闭环**



闭域 $\bar{D} = D + \partial D$

8 单通与复通区域: 在区域 D 内画任意简单闭曲线, 若其内部全含于 D , 则称 D 为单通 (simply connected) 区域, 否则称为复通 (multiply connected) 区域

注 圆是单通的，而环是复通的

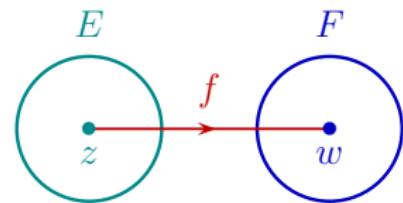


§2.2 复变函数

 复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

 它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

 设 E 是复平面上的点集, $\forall z \in E$, 若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$



单值函数 $w = f(z)$

§2.2 复变函数

 复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

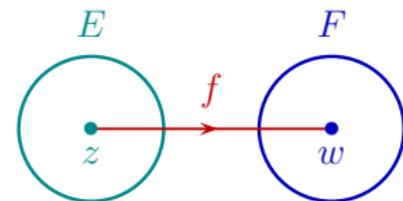
 它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

 设 E 是复平面上的点集, $\forall z \in E$, 若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$

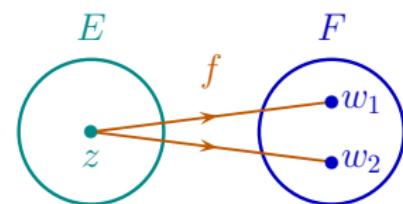
若对 $z \in E$ 有多个 (可以无穷多) 复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了多值函数 $w = f(z)$

 E 称为函数 $w = f(z)$ 的**定义域**

 $F = \{f(z) | z \in E\}$ 称为其**值域**



单值函数 $w = f(z)$



多值函数 $w = f(z)$

§2.2 复变函数

 复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

 它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

 设 E 是复平面上的点集, $\forall z \in E$, 若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$

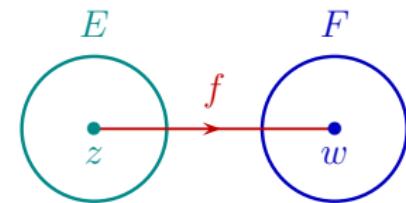
 若对 $z \in E$ 有多个 (可以无穷多) 复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了多值函数 $w = f(z)$

 E 称为函数 $w = f(z)$ 的**定义域**

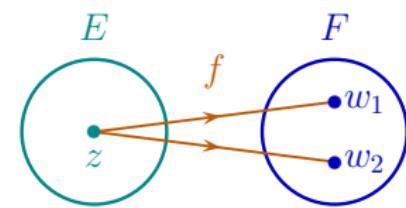
 $F = \{f(z) | z \in E\}$ 称为其**值域**

记 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

所以一个复变函数 $f(z)$ 等价于两个二元实变函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ ，它给出了 z 平面到 w 平面的映射 (map) 或变换 (transform)



单值函数 $w = f(z)$



多值函数 $w = f(z)$

§2.3 复变函数的极限

 复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上, z_0 是 E 的聚点

 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, 则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

注 若在 z_0 的任意小邻域内均有属于 E 而异于 z_0 的点
(等价地, 在 z_0 的任意小去心邻域内均有属于 E 的点), 则称
 z_0 为 E 的聚点 (accumulation point), 它本身可以不属于 E

● 内点就是典型的聚点；边界点则可能是聚点，也可能不是聚点

§2.3 复变函数的极限

 复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上, z_0 是 E 的聚点

 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, 则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

注 若在 z_0 的任意小邻域内均有属于 E 而异于 z_0 的点
(等价地, 在 z_0 的任意小去心邻域内均有属于 E 的点), 则称
 z_0 为 E 的聚点 (accumulation point), 它本身可以不属于 E

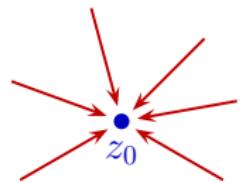
● 内点就是典型的聚点；边界点则可能是聚点，也可能不是聚点

\Downarrow 在复平面上, $z \rightarrow z_0$ 的方式有无穷多种

而在实轴上， $x \rightarrow x_0$ 的方式只有两种，即 $x \rightarrow x_0^+$ 和 $x \rightarrow x_0^-$

以上要求 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ 成立的范围是 $0 < |z - z_0| < \delta$ ，而不是 $|z - z_0| < \delta$

 这对于函数的要求是较弱而非较强，因为这允许 $f(z_0)$ 与 w_0 相差甚大，甚至允许 $f(z)$ 在 z_0 没有定义 (z_0 可以不在定义域 E 内)



§2.4 复变函数的连续性

 复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上, $z_0 \in E$, 如果

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续

注 易见连续就是不仅要有极限，而且该极限要等于该点处的函数值

 显然, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续

D z_0 应该是 E 的聚点，否则极限没有意义，也就谈不上连续与否。

 若 $f(z)$ 在点集 E 上的各点连续，则称 $f(z)$ 在点集 E 上连续

§3 解析函数

 解析函数是复变函数中最重要的一类

它的特点是可导或可微

为了研究解析函数，需要先定义复变函数的导数

 今后研究的复变函数主要定义在区域上

§3.1 复变函数的导数

 复变函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 上, $z_0 \in D$, 如果极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且有限，则称 $w = f(z)$ 在 z_0 处可导或可微 (differentiable)

 该极限称为 $w = f(z)$ 在 z_0 处的导数 (derivative) 或微商，记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

§3.1 复变函数的导数

 复变函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 上, $z_0 \in D$, 如果极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且有限，则称 $w = f(z)$ 在 z_0 处可导或可微 (differentiable)

 该极限称为 $w = f(z)$ 在 z_0 处的导数 (derivative) 或微商，记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

 若 $w = f(z)$ 在 z_0 处可导, 必有

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = 0$$

这等价于 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ，因而 $f(z)$ 在 z_0 处连续。

导数举例

例 1 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{n z^{n-1} \Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = n z^{n-1} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = nz^{n-1}$$



可见函数 $f(z) = z^n$ 在 z 平面上处处可导

二项式定理

$$(z + \Delta z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} (\Delta z)^k$$

导数举例

例 1 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{n z^{n-1} \Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = n z^{n-1} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = n z^{n-1}$$



 可见函数 $f(z) = z^n$ 在 \mathbb{C} 平面上处处可导

例 2 函数 $f(z) = z^*$ 显然处处连续 (因为 $u(x, y) = x$ 和 $v(x, y) = -y$ 处处连续), 但处处不可导



 这是因为 $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z}$ 的极限不存在：

$$\Delta z = \Delta x, \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\Delta z = i\Delta y, \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} = \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

二项式定理

$$(z + \Delta z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} (\Delta z)^k$$

§3.2 解析函数

 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (analytic function)，或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析

 解析函数也称为全纯函数 (holomorphic function)

例 3 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) 在整个复平面上解析

§3.2 解析函数

 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (analytic function)，或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析

 解析函数也称为全纯函数 (holomorphic function)

例 3 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) 在整个复平面上解析

 注 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与可导是一回事

 有时候说函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内可导，而不仅仅是 在 z_0 处可导

 因此，函数在一点解析与可导不是一回事

§3.2 解析函数

 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (analytic function)，或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析

 解析函数也称为**全纯函数** (holomorphic function)

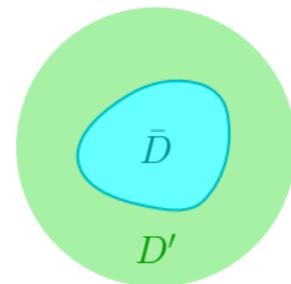
例 3 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) 在整个复平面上解析

 注 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与可导是一回事

有时候说函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内可导，而不仅仅是 在 z_0 处可导

 因此，函数在一点解析与可导不是一回事

 函数 $f(z)$ 在闭域 \bar{D} 内解析，指的是它在某区域 D' 内解析，而 $D' \supset \bar{D}$

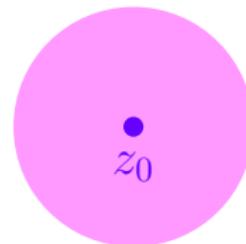


§3.3 奇点

 若复变函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不解析，但在 z_0 的任一邻域内都有 $f(z)$ 的解析点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点 (singular point)

例 4 $z = 0$ 是 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的奇点

注 函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不解析，可能是在该点没有定义，也可能是有定义但不连续，还可能是连续但不可导，还可能是可导但仍不解析（见第 33 页例 6），等等



按上述定义, $f(z)$ 在点 z_0 不解析, 并不说明 z_0 就是奇点.

 比如函数 $f(z) = z^*$ 处处不可导，但所有的点都不是奇点

§3.4 求导法则

 简单的基本初等函数的导数可以用定义计算

以上例 1 函数 $f(z) = z^n$ 是一个典型的例子

 稍微复杂的`基本初等函数`(如`指数函数`)的导数计算方法在下一小节给出

§3.4 求导法则

简单的基本初等函数的导数可以用定义计算

 以上例 1 函数 $f(z) = z^n$ 是一个典型的例子

 稍微复杂的基本初等函数（如指数函数）的导数计算方法在下一小节给出

 初等函数的导数可由已知的基本初等函数的导数和以下求导法则得出

1 若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在区域 D 内解析，则其和、差、积、商（分母不为零）均在 D 内解析，且求导法则与实变函数一致

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f'_1(z) \pm f'_2(z)$$

$$[f_1(z)f_2(z)]' = f'_1(z)f_2(z) + f_1(z)f'_2(z) \quad (\text{Leibniz 法则})$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z), \quad c \in \mathbb{C} \quad (\text{Leibniz 法则的特例})$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right]' = \frac{f'_1(z)f_2(z) - f_1(z)f'_2(z)}{[f_2(z)]^2}, \quad f_2(z) \neq 0$$

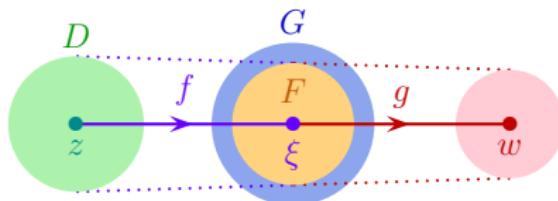
复合函数的求导法则

2 复合函数的求导法则

若函数 $\xi = f(z)$ **在** z **平面上的区域** D **内解析，函数** $w = g(\xi)$ **在** ξ **平面上的区域** G **内解析，且** $F = \{f(z) | z \in D\} \subset G$ ，**则复合函数** $w = g[f(z)]$ **在** D **内解析，且**

$$\frac{dg[f(z)]}{dz} = \frac{dg(\xi)}{d\xi} \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{链式法则})$$

注 $F \subset G$ 表示第一个函数的值域不能超出第二个函数的定义域



求导举例

例 5 多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($n \in \mathbb{N}$)

 \mathbb{N} 表示自然数 $0, 1, 2, \dots$ 的集合

 $P_n(z)$ 中各项是常数函数或正整数次幂函数，它们均在整个复平面上解析

因此, $P_n(z)$ 在整个复平面上解析

由求导法则得

$$\begin{aligned}
 P'_n(z) &= \sum_{k=0}^n (a_k z^k)' = \sum_{k=0}^n a_k (z^k)' = \sum_{k=0}^n k a_k z^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k
 \end{aligned}$$

 最后一步作 $k \rightarrow k + 1$ 的替换

§3.5 Cauchy-Riemann 条件

 本小节研究怎样的函数可导，同时得出导数的一种计算方法

由于导数定义中 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式是任意的，复变函数的可微性是非常苛刻的。

一般说来，如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 中的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 相互独立，那么即使 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都具有良好的解析性质， $f(z)$ 仍然不一定是可微的

例 2 中处处不可导的函数 $f(z) = z^* = x - iy$ 就是典型的例子

因此，要使 $f(z)$ 可微，则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须满足一定的关系

§3.5 Cauchy-Riemann 条件

 本小节研究怎样的函数可导，同时得出导数的一种计算方法

由于导数定义中 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式是任意的，复变函数的可微性是非常苛刻的

一般说来，如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 中的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 相互独立，那么即使 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都具有良好的解析性质， $f(z)$ 仍然不一定是可微的

例 2 中处处不可导的函数 $f(z) = z^* = x - iy$ 就是典型的例子

因此，要使 $f(z)$ 可微，则 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 之间必须满足一定的关系

事实上，由于 $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式无关

 可先令 $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, 得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) + i v(x + \Delta x, y)] - [u(x, y) + i v(x, y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

 然后令 $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$, 得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann 条件与可微的充要条件

 比较以上两式，推出

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

这就是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 之间必须满足的条件

 它称为 **Cauchy-Riemann 条件**，简称 **CR 条件**

它是 $f(z)$ 在点 z 处可微的必要条件，但不是充分条件

 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ 也给出导数的计算公式

 即利用熟悉的**实变函数的偏导数**来计算**复变函数的导数**



Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)



Bernhard Riemann (1826–1866)

Cauchy-Riemann 条件与可微的充要条件

 比较以上两式，推出

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

这就是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 之间必须满足的条件

 它称为 **Cauchy-Riemann 条件**，简称 **CR 条件**

它是 $f(z)$ 在点 z 处可微的必要条件，但不是充分条件

 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ 也给出导数的计算公式

 即利用熟悉的**实变函数的偏导数**来计算**复变函数的导数**

(*) 定理 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在区域 D 内,

$z \in D$, $f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 处可微的充要条件是

1 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微



Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)



Bernhard Riemann (1826–1866)

判断解析性的定理

 将上述定理(证明见选读)中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D , 立得另一定理

 不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是

- ① 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
 - ② $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 CR 条件

判断解析性的定理

 将上述定理(证明见选读)中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D , 立得另一定理

 不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是

- ① 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
 - ② $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 CR 条件

注 充分性是很明显的：根据微积分的定理， $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微，它们又在 D 内满足 CR 条件，于是根据上一个定理给出 $f(z)$ 在 D 内解析的结论

反过来看**必要性**，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 **CR 条件**；至于一阶偏导数**连续**，目前还未能论证

判断解析性的定理

 将上述定理(证明见选读)中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D , 立得另一定理

 不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是

- ① 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
 - ② $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 CR 条件

注 充分性是很明显的：根据微积分的定理， $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微，它们又在 D 内满足 CR 条件，于是根据上一个定理给出 $f(z)$ 在 D 内解析的结论

反过来看必要性，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 CR 条件；至于一阶偏导数连续，目前还未能论证

天鹅下一章将会看到, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 即一阶导数存在, 则 $f(z)$ 在 D 内具有任意阶导数, 从而 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数就不在话下了

类似结论对实变函数 $f(x)$ 不可想象, 即使 $f^{(n)}(x)$ 连续也不保证 $f^{(n+1)}(x)$ 存在

不解析的例子

例 6 考虑函数 $f(z) = |z|^2$, 易知 $u(x, y) = x^2 + y^2$ 和 $v(x, y) = 0$, 各偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

可见，所有一阶偏导数连续，故 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 处处可微

 但是，**CR 条件** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 只在 $z = 0$ 处成立

因而 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可微, 故 $f(z)$ 处处不解析

不解析的例子

例 6 考虑函数 $f(z) = |z|^2$ ，易知 $u(x, y) = x^2 + y^2$ 和 $v(x, y) = 0$ ，各偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

可见，所有一阶偏导数连续，故 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 处处可微

 但是，**CR 条件** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 只在 $z = 0$ 处成立

因而 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可微，故 $f(z)$ 处处不解析

事实上，只要注意到 $f(z) = z^*z$ ，又已知 z^* 处处不解析，则易得以上结论

如果一个函数包含 z^* 或 $|z|$ 这样的因子，那么一般来说它是不解析的

§4 初等单值函数

通常认为，基本初等函数包括常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数

初等函数 (elementary function) 是由基本初等函数经过有限次的加减乘除和复合所构成的函数, 如 $f(x) = x^2 e^x + 2 \tan x$ 和 $g(x) = \sin(x \ln x)$

 在复变函数中，**三角函数**定义为**指数函数的线性组合**，所以与**双曲函数**类似

 它们都不是最基本的，但它们很常用，下面会详细介绍

 以上这些函数包括**单值函数** (single-valued function) 和**多值函数** (multivalued function)

 本节和下节分别介绍其中较简单的几种

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式



常数函数 $f(z) = c$, 其中 $c \in \mathbb{C}$



由定义易证 $f'(z) = 0$ ，故 $f(z)$ 在复平面上解析

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

 常数函数 $f(z) = c$, 其中 $c \in \mathbb{C}$

由定义易证 $f'(z) = 0$ ，故 $f(z)$ 在复平面上解析

 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$ ，其中 $n = 1, 2, \dots$

 前面已经证明, $f'(z) = nz^{n-1}$, 故 $f(z)$ 在复平面上解析

一般的幂函数 $f(z) = z^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) 是多值函数, 见选读 §5.8

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式



常数函数 $f(z) = c$, 其中 $c \in \mathbb{C}$



由定义易证 $f'(z) \equiv 0$, 故 $f(z)$ 在复平面上解析



正整数次幂函数 $f(z) \equiv z^n$, 其中 $n \equiv 1, 2, \dots$



前面已经证明, $f'(z) \equiv nz^{n-1}$, 故 $f(z)$ 在复平面上解析



一般的幂函数 $f(z) = z^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) 是多值函数, 见选读 §5.8



多项式 (polynomial) $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($n \in \mathbb{N}$) 是**常数**和**幂函数**的线性组合



由上节例 5 可知, $P_n(z)$ 在整个复平面上解析, 且导数为

$$P'_n(z) = \sum_{k=0}^n k a_k z^{k-1}$$

有理分式

设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($n \in \mathbb{N}$) 和 $Q_m(z) = \sum_{l=0}^m b_l z^l$ ($m \in \mathbb{N}$) 是两个多项式

 则 $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 称为**有理分式**, 亦称**有理函数** (rational function)

 除去满足 $Q_m(z) = 0$ 的点 z_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (其中可能有相同的) 之外, $f(z)$ 在复平面上处处解析

有理分式

设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($n \in \mathbb{N}$) 和 $Q_m(z) = \sum_{l=0}^m b_l z^l$ ($m \in \mathbb{N}$) 是两个多项式

则 $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 称为**有理分式**, 亦称**有理函数** (rational function)

 除去满足 $Q_m(z) = 0$ 的点 z_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (其中可能有相同的) 之外, $f(z)$ 在复平面上处处解析

 $f(z)$ 在 z_i 处没有定义，而 z_i 的任一邻域内都有 $f(z)$ 的解析点

因此, z_i 是 $f(z)$ 的奇点

比如，**有理分式** $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + i)(z - i)}$ 的**奇点**为 $z = i$ 和 $z = -i$

 有理分式 $f(z) = \frac{z}{(z+2)^2}$ 的奇点为 $z = -2$

§4.4 指数函数



指数函数 (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv e^z \equiv e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$



恒等号是一般复变量的指数函数的定义



等号则引用了前面关于自变量为纯虚数的指数函数的定义

§4.4 指数函数



指数函数 (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv e^z \equiv e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$



恒等号是一般复变量的指数函数的定义



等号则引用了前面关于自变量为纯虚数的指数函数的定义



易知 $u(x, y) = e^x \cos y$ 和 $v(x, y) = e^x \sin y$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



可见, $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的一阶偏导数处处连续, CR 条件处处满足



从而, e^z 在整个复平面上解析

§4.4 指数函数



指数函数 (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv e^z \equiv e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$



恒等号是一般复变量的指数函数的定义



等号则引用了前面关于自变量为纯虚数的指数函数的定义



易知 $u(x, y) = e^x \cos y$ 和 $v(x, y) = e^x \sin y$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



可见, $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的一阶偏导数处处连续, CR 条件处处满足



从而, e^z 在整个复平面上解析, 根据 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, 指数函数的导数为

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$



这一结果与**实变量的指数函数**完全一样

指数函数的性质

 指数函数 $e^z = e^x e^{iy}$ 具有以下性质

$$1 \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

由定义有 $e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)}e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

2 $|e^z| > 0$

 由 $x \in \mathbb{R}$ 得 $|e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x > 0$

3 e^z 是周期函数，周期为 $2\pi i$ ，即 $e^{z+2\pi i} = e^z$

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

§4.5 三角函数



复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数 } \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{正弦函数 } \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

注 由此定义易得 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ，但不能将该式误解为 e^{iz} 的定义

 当 $z = i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

§4.5 三角函数



复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数 } \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{正弦函数 } \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

注 由此定义易得 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ，但不能将该式误解为 e^{iz} 的定义

 当 $z = i\theta$ 为纯虚数时, 回到前面给出的 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

由指数函数的解析性和求导法则, 易知 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在整个复平面上解析

利用 $(e^{iz})' = \frac{de^{iz}}{d(iz)} \frac{d(iz)}{dz} = ie^{iz}$ 和 $(e^{-iz})' = -ie^{-iz}$ ，易得它们的导数为

$$(\cos z)' = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z, \quad (\sin z)' = \frac{i}{2i}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

§4.5 三角函数



复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数 } \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{正弦函数 } \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$



注 由此定义易得 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, 但不能将该式误解为 e^{iz} 的定义



当 $z = i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$



由指数函数的解析性和求导法则, 易知 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在整个复平面上解析.



利用 $(e^{iz})' = \frac{de^{iz}}{dz} \frac{d(iz)}{dz} = ie^{iz}$ 和 $(e^{-iz})' = -ie^{-iz}$, 易得它们的导数为

$$(\cos z)' = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z, \quad (\sin z)' = \frac{i}{2i}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$



三角函数还具有以下性质

- 1 奇偶性: $\sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin z$, $\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos z$

三角函数的性质 2

② 满足各种**三角恒等式**，如

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2) = 1$$

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$= \frac{1}{4i} [(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})]$$

$$= \frac{1}{4i}(2e^{iz_1}e^{iz_2} - 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}) = \frac{1}{2i}[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] = \sin(z_1 + z_2)$$

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{4}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})$$

$$= \frac{1}{4}(2e^{iz_1}e^{iz_2} + 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}) = \frac{1}{2}[e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}] = \cos(z_1 + z_2)$$

三角函数的性质 3 和 4

③ $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期函数，周期为 2π

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

三角函数的性质 3 和 4

③ $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期函数，周期为 2π

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

4 $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都可以大于 1



这是与**实变情况不同的**

实际上, $\sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y)$, $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y)$



$|\sin(iy)|$ 和 $|\cos(iy)|$ 显然可以大于任意实数

三角函数的性质 3 和 4

③ $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期函数，周期为 2π

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

4 $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都可以大于 1



这是与**实变**情况不同的

实际上, $\sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y)$, $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y)$

$|\sin(iy)|$ 和 $|\cos(iy)|$ 显然可以大于任意实数

类似于实变函数，还可以定义更多三角函数，如

正切函数 $\tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}$, **余切函数** $\cot z \equiv \frac{\cos z}{\sin z}$

进一步，可定义这些三角函数的反函数，这里就不详细讨论了

§4.6 双曲函数



复变量的**双曲函数** (hyperbolic function) 也是通过**指数函数**来定义的：

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$



它们称为双曲余弦函数和双曲正弦函数



由指数函数的解析性和求导法则, 易知 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面上解析



它们的导数为 $(\cosh z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$ 和 $(\sinh z)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$

§4.6 双曲函数



复变量的**双曲函数** (hyperbolic function) 也是通过**指数函数**来定义的:

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$



它们称为**双曲余弦函数**和**双曲正弦函数**



由指数函数的解析性和求导法则, 易知 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面上解析



它们的导数为 $(\cosh z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$ 和 $(\sinh z)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$



由定义容易证明双曲函数与三角函数之间存在着以下关系：

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \sinh(iz) = i \sin z$$



由此可以从**三角函数**的性质得到**双曲函数**的类似性质，如

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$$

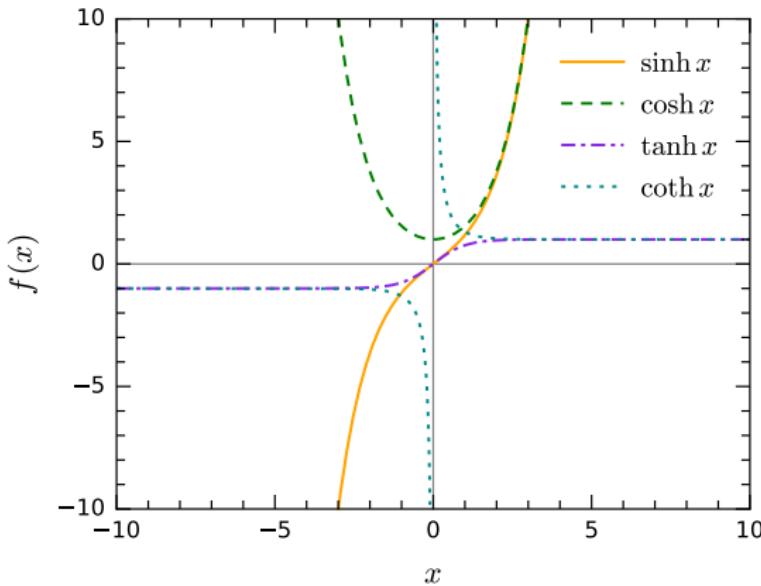
$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cos(iz_1 + iz_2) = \cos(iz_1)\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\sin(iz_2) \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2\end{aligned}$$

更多双曲函数

 类似于实变函数，还可以定义[更多双曲函数及其反函数](#)，如

$$\text{双曲正切函数 } \tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \text{双曲余切函数 } \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

实变量双曲函数的图象如下



§5 初等多值函数

§5.1 根式函数的支点

考慮根式函數 $w = \sqrt{z - a}$ ，不失一般性，設 a 為實數

 记 $z = re^{i\theta}$, $z - a = \rho e^{i\phi}$ (其中 θ 和 ϕ 不必是主值), 则

$$w = \sqrt{\rho e^{i\phi}} = \sqrt{\rho e^{i(\phi+2k\pi)}} = \sqrt{\rho} e^{i(\phi/2+k\pi)}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$, 对于每一给定的 z , 可能导致不同结果的 k 值有 0 和 1 两种

所以有两个函数值

$$w_1 = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}, \quad w_2 = \sqrt{\rho} e^{i(\phi/2 + \pi)} = -\sqrt{\rho} e^{i\phi/2} = -w_1$$

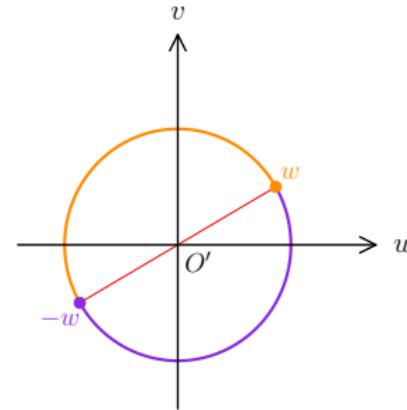
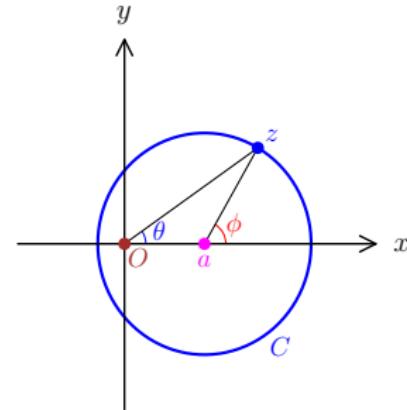
 前面已经指出，**根式函数的多值性**源于**宗量 $z - a$** 的**辐角 ϕ** 的**多值性**，而不是自变量 z 的**辐角 θ** 的**多值性**

支点

从几何上看，如果让 z 沿闭曲线 C 绕 a 点转一周回到 z ，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$

其中 + 号和 - 号分别对应于逆时针和顺时针绕行
函数值也就从 w_1 变成 w_2

在这一过程中，如果曲线 C 包围原点 O ，则 z 的辐角从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$



支点

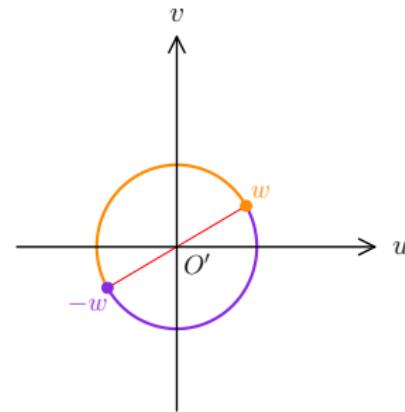
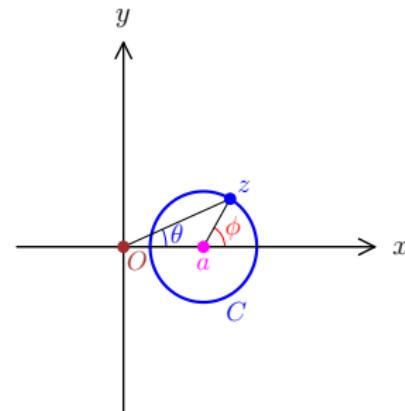
从几何上看，如果让 z 沿闭曲线 C 绕 a 点转一周回到 z ，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$

其中 + 号和 - 号分别对应于逆时针和顺时针绕行
函数值也就从 w_1 变成 w_2

在这一过程中，如果曲线 C 包围原点 O ，则 z 的辐角从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$

 如果曲线 C 不包围原点 O ，则 θ 不变

可见，影响函数值的是 ϕ 的变化而不是 θ 的变化



支点

从几何上看，如果让 z 沿闭曲线 C 绕 a 点转一周回到 z ，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$

其中 + 号和 - 号分别对应于逆时针和顺时针绕行

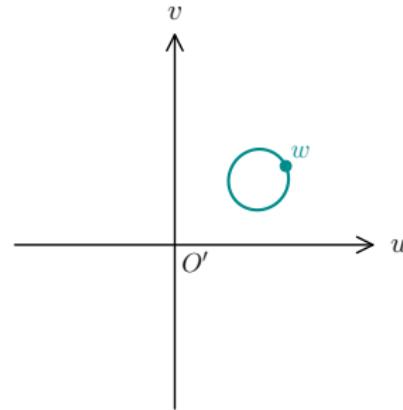
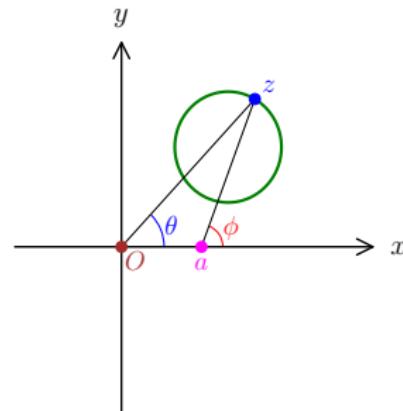
 函数值也就从 w_1 变成 w_2

在这一过程中，如果曲线 C 包围原点 O ，则 z 的辐角从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$

如果曲线 C 不包围原点 O ，则 θ 不变

可见，影响函数值的是 ϕ 的变化而不是 θ 的变化

如果 z 沿其它曲线绕一周，而该曲线不包围 a 点，则 $z - a$ 的辐角不变，因而函数值也不变



支点

从几何上看，如果让 z 沿闭曲线 C 绕 a 点转一周回到 z ，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$

其中 + 号和 - 号分别对应于逆时针和顺时针绕行
函数值也就从 w_1 变成 w_2

在这一过程中，如果曲线 C 包围原点 O ，则 z 的辐角从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$

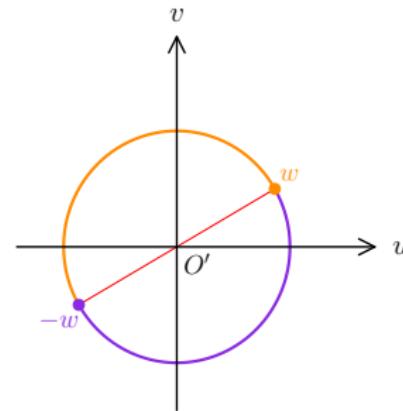
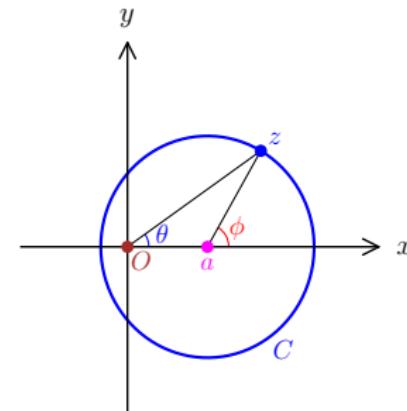
如果曲线 C 不包围原点 O ，则 θ 不变

可见，影响函数值的是 ϕ 的变化而不是 θ 的变化

如果 z 沿其它曲线绕一周，而该曲线不包围 a 点，则 $z - a$ 的辐角不变，因而函数值也不变

a 点具有特殊地位，让 z 沿闭曲线绕它转一周回到 z ，函数值会发生改变，这样的点称为多值函数的支点

函数 $w = \sqrt{z - a}$ 只有一个有限支点 a



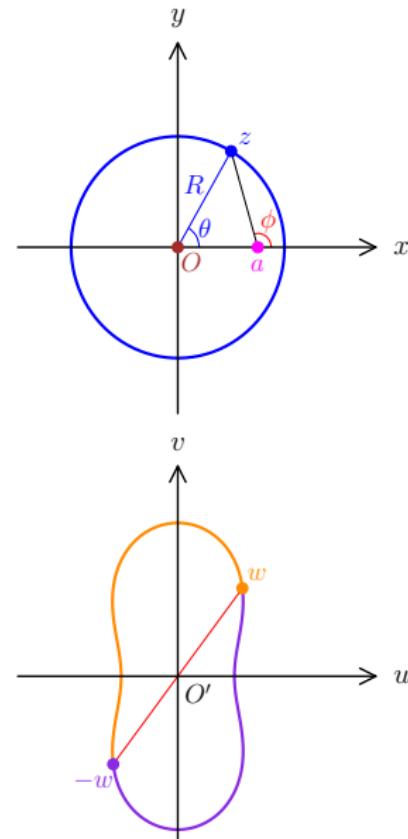
无穷远点

 如果让 z 沿**大圆** $|z| = R$ 转一周回到 z ，则 $z - a$ 的**辐角**也从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$ ，**函数值**也从 w_1 变成 w_2

注 大圆指的是它包围所有的有限支点，对函数 $w = \sqrt{z - a}$ 来说就是包围 a 点

由于绕大圆一周也可以看作绕 ∞ 点一周，所以
 ∞ 点也是函数 $w = \sqrt{z - a}$ 的支点

因此，函数 $w = \sqrt{z - a}$ 在扩充复平面上共有两个支点



无穷远点

 如果让 z 沿**大圆** $|z| = R$ 转一周回到 z ，则 $z - a$ 的**辐角**也从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$ ，**函数值**也从 w_1 变成 w_2

注 大圆指的是它包围所有的有限支点，对函数 $w = \sqrt{z - a}$ 来说就是包围 a 点

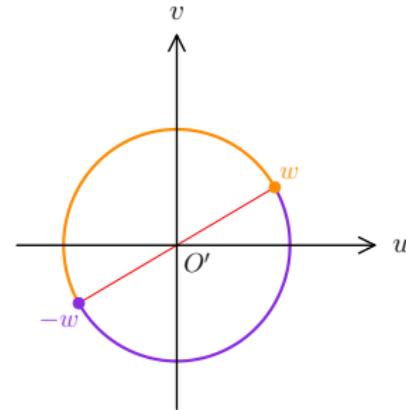
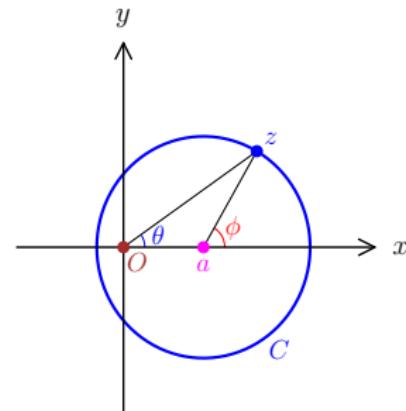
由于绕大圆一周也可以看作绕 ∞ 点一周，所以
 ∞ 点也是函数 $w = \sqrt{z - a}$ 的支点

因此，函数 $w = \sqrt{z - a}$ 在扩充复平面上共有两个支点

如果让 z 沿闭曲线绕 a 点转两周 (n 周) 回到 z ，
则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 4\pi$

这时 $w = \sqrt{z - a}$ 的函数值不变，所以 a 点称为它的一阶支点 ($n - 1$ 阶支点)

易知 ∞ 点也是一阶支点



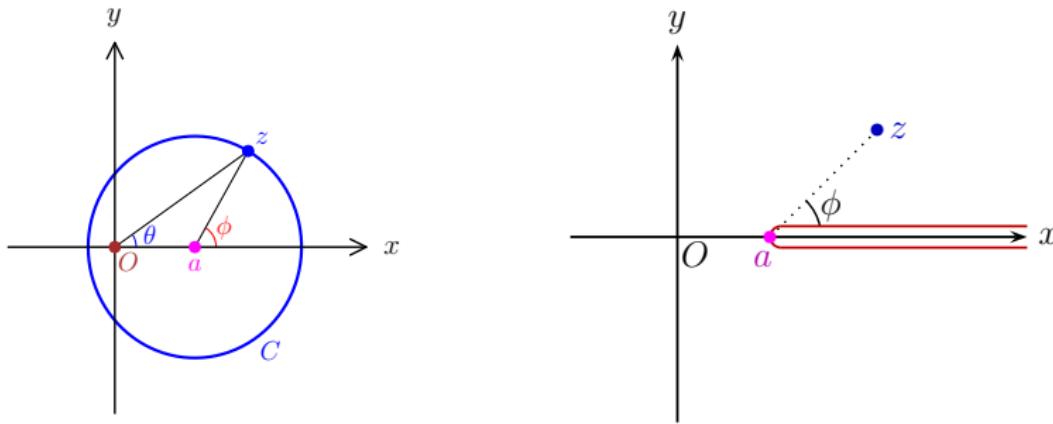
§5.2 割线与单值分支

前已指出，根式函数的多值性源于宗量的辐角的多值性

从几何上看，是因为自变量 z 可以绕支点不停转动，导致辐角的变化。

如果以某种方式把 z 平面割破, 使自变量 z 不能绕支点转动一周 (等价于对宗量辐角的取值范围加以限制), 则函数值就变成确定的, 也就是得到了一个单值分支

 对复量辐角取值范围加以不同的限制可得到不同的单值分支



函数 $w = \sqrt{z - a}$ 的割线和单值分支

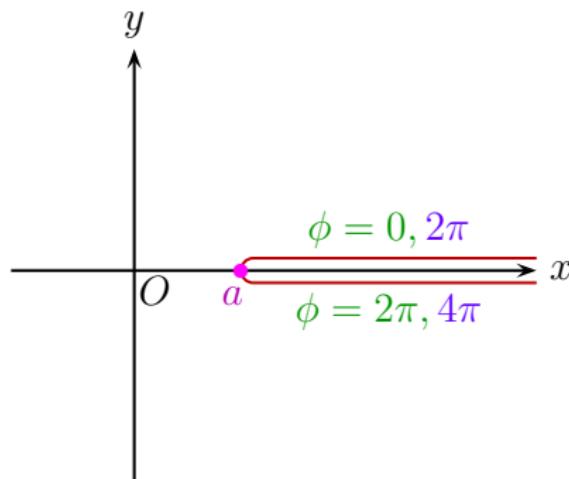
以函数 $w = \sqrt{z - a}$ 来说，可把割线取为由 a 点出发沿 x 轴正向至 ∞ 点的射线

这样割破的 z 平面上，自变量 z 再也不能绕支点 a 转动，复量的辐角就被限制在一定的范围内，因而函数值也被限制在某个单值分支内

■ 如果规定割线上岸的 $\phi = 0$ ，则在整个割破的 z 平面上， $0 \leq \phi < 2\pi$ ，就得到一个单值分支

如果规定割线上岸的 $\phi = 2\pi$ ，则在整个割破的 z 平面上， $2\pi \leq \phi < 4\pi$ ，就得到另一个单值分支

实际上，任何由 a 点出发到 ∞ 点的射线甚至曲线都可以作为该函数的割线



§5.3 Riemann 面

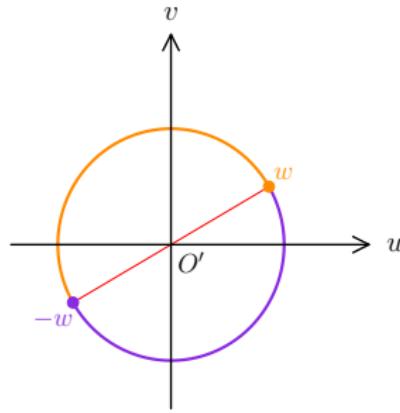
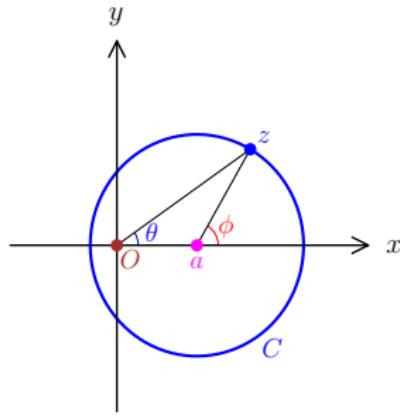
还是以函数 $w = \sqrt{z - a}$ 为例

如果规定割线上岸的 $\phi = 0$ ，则在所得的单值分支中， $0 \leq \arg w < \pi$

如果规定割线上岸的 $\phi = 2\pi$ ，则在所得的单值分支中， $\pi \leq \arg w < 2\pi$

 两个分支的函数值合起来充满了整个 w 平面

然而，自变量却要用两张 z 平面来表示，不太令人满意



§5.3 Riemann 面

还是以函数 $w = \sqrt{z - a}$ 为例

 如果规定割线上岸的 $\phi = 0$ ，则在所得的单值分支中， $0 \leq \arg w < \pi$

如果规定割线上岸的 $\phi = 2\pi$ ，则在所得的单值分支中， $\pi \leq \arg w < 2\pi$

 两个分支的函数值合起来充满了整个 w 平面

然而，自变量却要用两张 z 平面来表示，不太令人满意

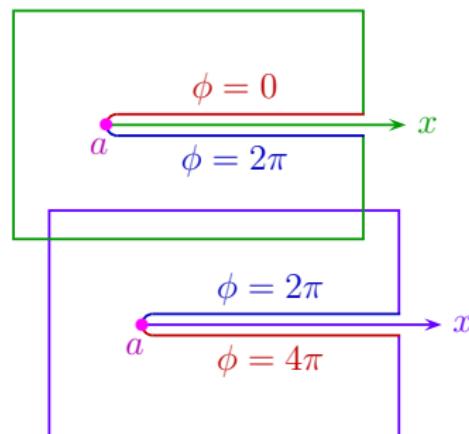
第一张 z 平面的下岸与第二张 z 平面的上岸

都对应于 $\phi = 2\pi$, 可将它们粘在一起

 第二张 z 平面的下岸 $\phi = 4\pi$ 与第一张 z 平面的上岸 $\phi = 0$ 对于函数 $w = \sqrt{z - a}$ 来说是一回事，也可将它们粘在一起

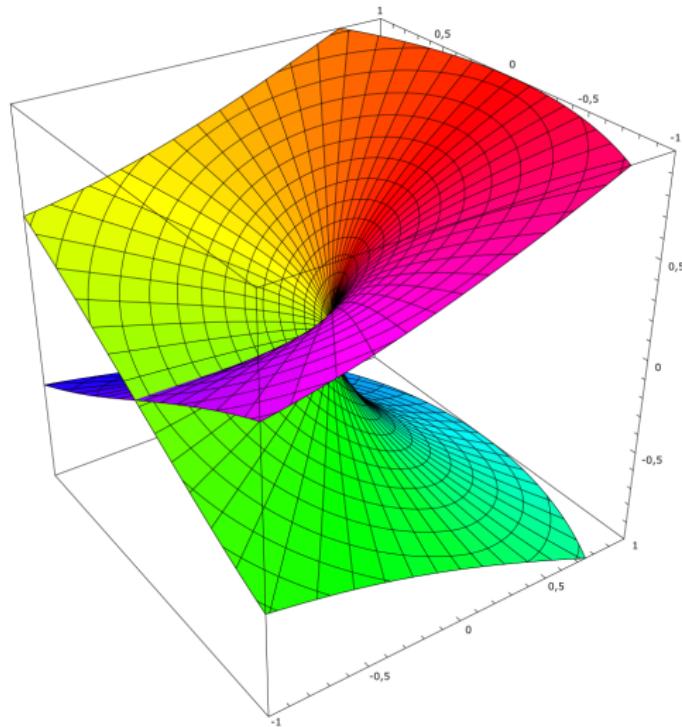
这样粘合得到的具有两页的 z 平面称为函数 $w = \sqrt{z - a}$ 的 Riemann 面

 在 Riemann 面上，函数 $w = \sqrt{z - a}$ 是单值的



函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 的 Riemann 面

将割线取为负实轴，则函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 的 Riemann 面如下图所示



§5.4 对数函数

 对数函数 (logarithmic function) 定义为指数函数的反函数

 如果 w 满足 $e^w = z$ ，则

$w = \ln z$ 是 z 的对数函数

令 $z = r e^{i\theta}$, $w = u + i v$, 有 $e^u e^{iv} = e^w = z = r e^{i\theta}$

 比较两边, 得 $u = \ln r$, $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

换句话说, $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

§5.4 对数函数

 对数函数 (logarithmic function) 定义为指数函数的反函数

如果 w 满足 $e^w = z$ ，则

$w = \ln z$ 是 z 的对数函数

令 $z = r e^{i\theta}$, $w = u + i v$, 有 $e^u e^{iv} = e^w = z = r e^{i\theta}$

 比较两边，得 $u = \ln r$, $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

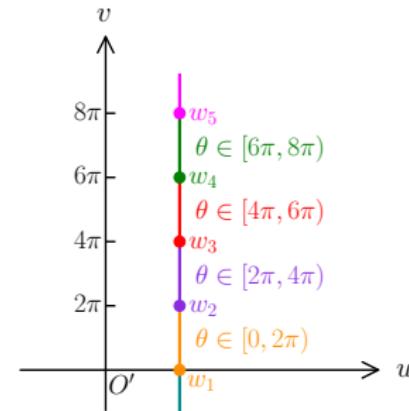
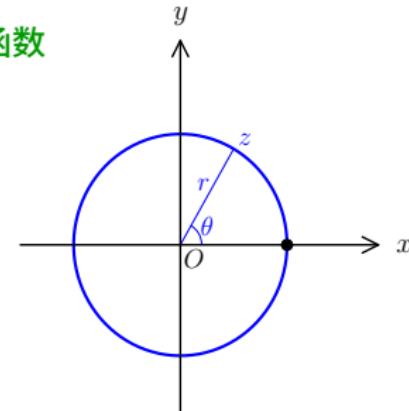
换句话说, $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

可见，对数函数也是一个多值函数，且具有无穷多个单值分支

 由于多值性来自 z 的幅角 θ ，对数函数的支点是
 $z = 0$ 和 $z = \infty$

 由于自变量绕 $z = 0$ 转动任意周回到出发点，函数值都不能复原， $z = 0$ 称为超越支点

同样， $z = \infty$ 也是超越支点



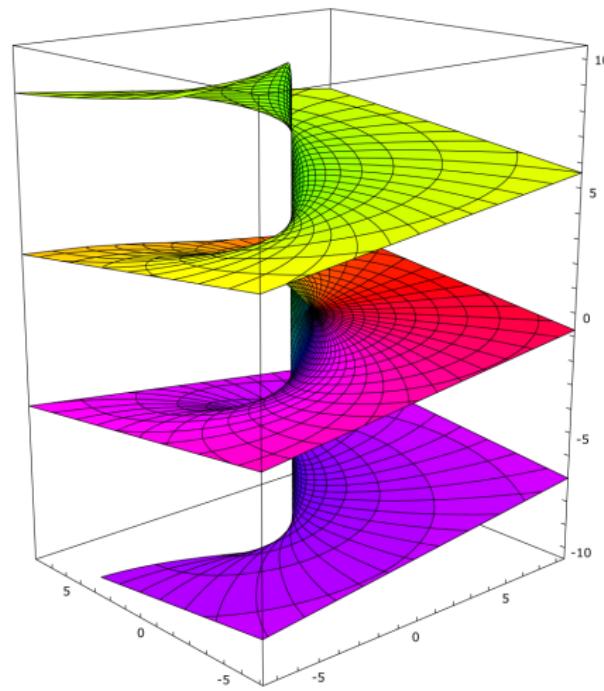
对数函数的 Riemann 面和主值分支

对数函数的割线可取为由 $z = 0$ 出发沿 x 轴正向（或负向）至 $z = \infty$ 的射线，即 x 轴的正半轴（或负半轴）

相应的 Riemann 面具有无穷多页，类似于螺旋楼梯

 若 θ 取为辐角主值并置 $k = 0$ ，则
所得单值分支称为 $\ln z$ 的**主值分支**，
记作 $\ln z$ ，即

$$\ln z = \ln r + i\theta = \ln |z| + i \arg z$$



§5.6 多值函数的解析性

 多值函数在其 Riemann 面上变成单值的

所以可以像单值函数一样定义导数并讨论多值函数的解析性

但是，**支点**为 Riemann 面各页所共有

在支点的邻域内，涉及到 Riemann 面的多页，导致函数值是不确定的

 因而支点处的导数没有定义，所以支点必为奇点

§5.7 对数函数的导数

 在多值函数的单值分支内，反函数存在

 所以可以用与**实变函数**相同的**反函数求导法**来计算**导数**

这一方法可以方便地用于根式函数和对数函数

 以对数函数 $w = \ln z$ 为例, 由 $e^w = z$ 得

$$\frac{dz}{dw} = e^w, \quad \frac{dw}{dz} = e^{-w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

故对数函数的导数为

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

 注意，该导数是一个单值函数

§6 解析函数的物理意义

§6.1 调和函数

 如果二元实变函数 $u(x, y)$ 在区域 D 内具有连续的二阶偏导数，且满足二维 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

则称 $u(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数

类似地，可以定义三维或更高维的调和函数



Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

§6.2 解析函数与调和函数的关系

若 $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是 D 内的调和函数

注 由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部

§6.2 解析函数与调和函数的关系

V 若 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是 D 内的调和函数

注 由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部

事实上，由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析，它就在 D 内具有各阶导数（见下章），所以 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的各阶偏导数

 又 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 **CR** 条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ，求导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

👉 二维 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

所以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 D 内的调和函数

共轭调和函数

由于 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 并不是相互独立的，而是由 **CR 条件** 紧密联系起来的，它们称为**共轭调和函数**

 若已知函数 $u(x, y)$ ，则由 **CR** 条件得

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

 再进行积分，就可求出 $v(x, y)$ ，反之亦然

共轭调和函数

由于 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 并不是相互独立的，而是由 **CR 条件** 紧密联系起来的，它们称为**共轭调和函数**

 若已知函数 $u(x, y)$ ，则由 **CR** 条件得

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

 再进行积分，就可求出 $v(x, y)$ ，反之亦然

由于 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 满足二维 Laplace 方程，它们可以表示无电荷区域的静电场的电势

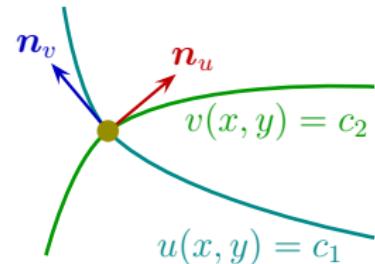
当然，它们也可以用来描述其它满足二维 Laplace 方程的物理量

§6.3 正交曲线族

若 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 相互正交

事实上, $\mathbf{n}_u = \nabla u$ 和 $\mathbf{n}_v = \nabla v$ 是曲线 $u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 的未归一化法向矢量

 在交点处，自变量 (x, y) 相同，利用 CR 条件推出



$$\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

因此，两曲线在交点处是正交的

 这一结论与 c_1 和 c_2 的取值无关，所以两个曲线族是正交曲线族

§6.3 正交曲线族

♂ 若 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 相互正交

事实上, $\mathbf{n}_u = \nabla u$ 和 $\mathbf{n}_v = \nabla v$ 是曲线 $u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 的未归一化法向矢量

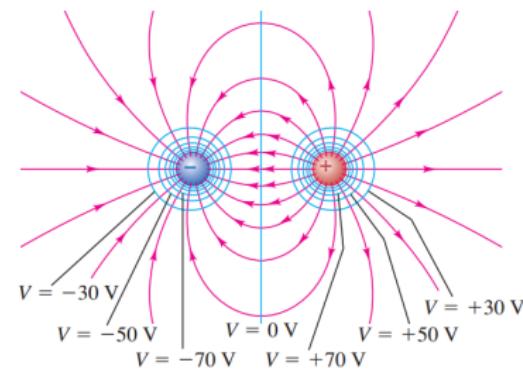
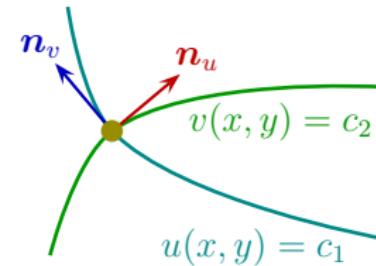
 在交点处，自变量 (x, y) 相同，利用 CR 条件推出

$$\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

 因此，两曲线在交点处是正交的

这一结论与 c_1 和 c_2 的取值无关，所以两个曲线族是正交曲线族

 由以上讨论可知，若 $u(x, y) = c_1$ 表示某平面静电场的等势线族，则 $v(x, y) = c_2$ 表示其电力线族，反之亦然



由电力线方程求等势线方程

例 已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2 - y^2 = c_1$ ，求等势线方程

解 令 $v(x,y) = x^2 - y^2$, 它是调和函数, 可作为某解析函数的虚部

求出其实部 $u(x, y)$, 则等势线方程为 $u(x, y) = \text{常数}$

 根据 **CR 条件**，有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x$ ，从而

$$\begin{aligned} \text{d}\mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} \, dx + \frac{\partial u}{\partial y} \, dy = -2y \, dx - 2x \, dy \\ &= d(-2xy) \end{aligned}$$

 故 $u(x, y) = -2xy + c'$, 其中 c' 为常数

于是，等势线方程为

$$xy = c_2$$

由电力线方程求等势线方程

例 已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2 - y^2 = c_1$ ，求等势线方程

解 令 $v(x,y) = x^2 - y^2$, 它是调和函数, 可作为某解析函数的虚部

 求出其实部 $u(x, y)$, 则等势线方程为 $u(x, y) = \text{常数}$

 根据 **CR 条件**，有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x$ ，从而

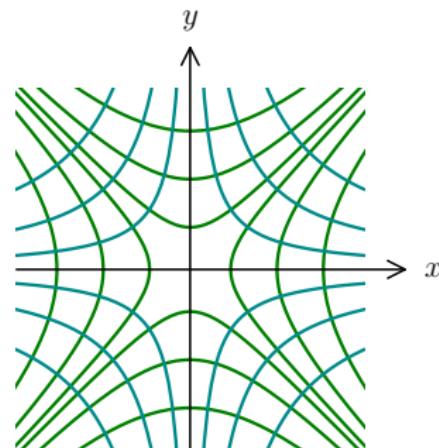
$$\begin{aligned} \text{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -2y dx - 2x dy \\ &= d(-2xy) \end{aligned}$$

 故 $u(x, y) = -2xy + c'$, 其中 c' 为常数

于是，等势线方程为

$$xy = c_2$$

 本例的**电力线**和**等势线**都是**双曲线**



讨论 1

t 注 如果给定的电力线方程为 $t(x, y) = c_1$ ，而 $t(x, y)$ 不是调和函数，则不能直接把 $t(x, y)$ 作为某解析函数的虚部

此时应该寻找函数 $v(x, y) = F(t)$ 使得该函数为调和函数，使 $v(x, y)$ 可作为某解析函数的虚部；注意 $t(x, y) = \text{常数}$ 时 $v(x, y) = \text{常数}$

讨论 1

注 如果给定的电力线方程为 $t(x, y) = c_1$ ，而 $t(x, y)$ 不是调和函数，则不能直接把 $t(x, y)$ 作为某解析函数的虚部

 此时应该寻找函数 $v(x, y) = F(t)$ 使得该函数为调和函数，使 $v(x, y)$ 可作为某解析函数的虚部；注意 $t(x, y) = \text{常数}$ 时 $v(x, y) = \text{常数}$

 若给定的是等势线方程，可类似求解电力线方程

 比如给定等势线方程为 $t(x, y) = x^2 + y^2 = c_1$ ，它不是调和函数

可令 $u(x, y) = F(t) = F(x^2 + y^2)$, 求偏导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xF'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2F'(t) + 4x^2F''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2F'(t) + 4y^2F''(t)$$

 要求 $u(x, y)$ 是调和函数，则

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4F'(t) + 4(x^2 + y^2)F''(t) = 4[F'(t) + tF''(t)]$$

故

$$\frac{dF'(t)}{dt} = -\frac{F'(t)}{t}, \quad \frac{dF'(t)}{F'(t)} = -\frac{dt}{t}$$

讨论 2

 两边积分，得 $\ln F'(t) = -\ln t + c$ ，其中 c 是积分常数

从而 $\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = \exp(-\ln t + c) = \frac{a}{t}$ ，其中 $a \equiv e^c$

再次积分，求出通解 $F(t) = a \ln t + b$ ，其中 b 是积分常数

 取一特解 $F(t) = \frac{1}{2} \ln t$, 即得 $u(x, y) = F(t) = \frac{1}{2} \ln t = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln r$

讨论 2

 两边积分，得 $\ln F'(t) = -\ln t + c$ ，其中 c 是积分常数

从而 $\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = \exp(-\ln t + c) = \frac{a}{t}$ ，其中 $a \equiv e^c$

再次积分，求出通解 $F(t) = a \ln t + b$ ，其中 b 是积分常数

取一特解 $F(t) = \frac{1}{2} \ln t$, 即得 $u(x, y) = F(t) = \frac{1}{2} \ln t = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln r$

这一结果其实可以通过 $t(x, y) = x^2 + y^2$ 与

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的关系猜测出来

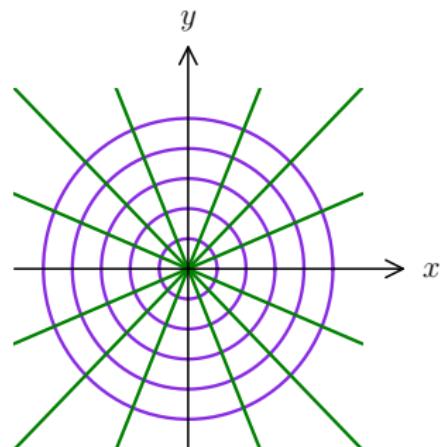
因为 $\ln r$ 是解析函数 $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$

的实部，必为调和函数

由此看出相应的虚部是

$$v(x, y) = \theta + c'_2 = \text{Arctan} \frac{y}{x} + c'_2$$

于是，电力线族的方程可以表达为 $y = c_2x$ ，
它与等势线族是正交的



讨论 3

 如果只是求正交曲线族，则并不一定要借助于复变函数的技术

 实际上，用**微积分**中学过的方法来处理可能更简单一些

以刚才的问题为例，设电力线方程为 $y = g(x)$

 在点 (x, y) 处，电力线的切线斜率为 $k_2 = g'(x)$

 对等势线方程为 $t(x, y) = x^2 + y^2 = c_1$ 两边求微分，得

$$dt = 2x \, dx + 2y \, dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

故等势线在点 (x, y) 处的切线斜率为 $k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

 两者要正交，必须满足垂直线的斜率关系 $k_1 k_2 = -1$ ，即 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{y}{x}$

 故 $g'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ，积分得到 $g(x) = c_2 x$

即电力线方程为 $y = c_2x$