

数学物理方法

第五章 留数定理及其应用

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2026年1月7日



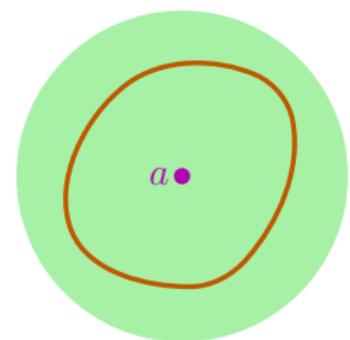
第五章 留数定理及其应用

§1 留数定理

§1.1 留数的定义

☀ 如果函数 $f(z)$ 在点 a 的邻域 $K : |z - a| < R$ 内解析，围线 C 全含于 K (包围 a 或不包围 a)，则根据 Cauchy 积分定理必有 $\int_C f(z) dz = 0$

☁ 但如果 a 是孤立奇点，即 $f(z)$ 只在 a 的去心邻域 $K \setminus \{a\} : 0 < |z - a| < R$ 内解析，围线 C 是 $K \setminus \{a\}$ 中包围 a 的围线，则上式不一定成立，故定义留数如下



第五章 留数定理及其应用

§1 留数定理

§1.1 留数的定义

☀ 如果函数 $f(z)$ 在点 a 的邻域 $K : |z - a| < R$ 内解析，围线 C 全含于 K (包围 a 或不包围 a)，则根据 Cauchy 积分定理必有 $\int_C f(z) dz = 0$

☁ 但如果 a 是孤立奇点，即 $f(z)$ 只在 a 的去心邻域 $K \setminus \{a\} : 0 < |z - a| < R$ 内解析，围线 C 是 $K \setminus \{a\}$ 中包围 a 的围线，则上式不一定成立，故定义留数如下

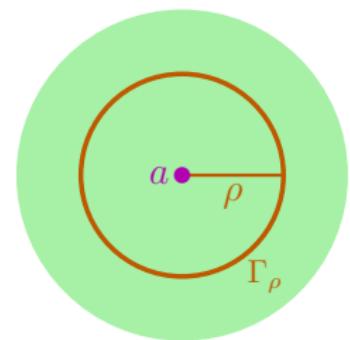
● 留数定义 如果函数 $f(z)$ 以 a 为孤立奇点，即 $f(z)$ 在去心邻域 $K \setminus \{a\} : 0 < |z - a| < R$ 内解析，则积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz, \quad \Gamma_\rho : |z - a| = \rho \quad (0 < \rho < R)$$

称为 $f(z)$ 在点 a 处的留数 (residue)，记作 $\underset{z=a}{\text{Res}} f(z)$

☁ 简记为 $\text{Res } f(a)$ ，或 $\text{Res}(f, a)$

☁ 显然，只要 $0 < \rho < R$ ，上述积分的数值与 ρ 的大小无关



留数与 Laurent 系数

 在去心邻域 $K \setminus \{a\}$ 内，设 $f(z)$ 在 a 处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

 其中 Laurent 系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

 令 $n = -1$ ，得

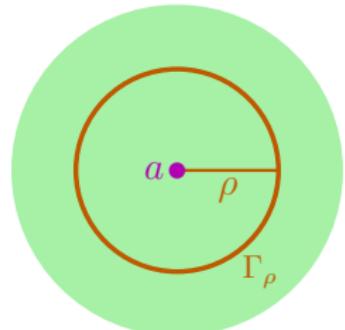
$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz$$

 与留数的定义比较，即得

$$\text{Res } f(a) = c_{-1}$$

 由此可知，可去奇点处的留数为 0

 注 有些书上直接用 $\text{Res } f(a) = c_{-1}$ 作为留数的定义，这与上页的定义是等价的

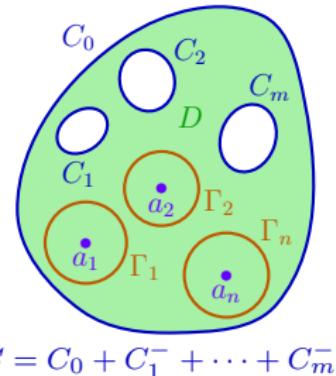


§1.2 Cauchy 留数定理

由 **Cauchy 积分定理** 可推出下面关于围线积分的定理

V Cauchy 留数定理 设函数 $f(z)$ 在围线或复围线 C 所围成的区域 D 中有孤立奇点 a_1, a_2, \dots, a_n ，此外 $f(z)$ 在 \bar{D} 上解析，则有

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k)$$



证明 作 n 个小圆周 $\Gamma_k : |z - a_k| = \rho_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$)，使各 Γ_k 及其内部全含于 D ，但各 Γ_k 互不相交也互不包含

从而 $f(z)$ 在复围线 $C + \Gamma_1^- + \Gamma_2^- + \dots + \Gamma_n^-$ 所围成的复通闭域上解析

根据 Cauchy 积分定理和留数的定义，有

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} f(a_k)$$

利用 **Cauchy 留数定理**，只要算出各孤立奇点处的留数，即可得出围线积分

§2 留数的算法

 计算**留数**的最一般方法是作 **Laurent 展开**，求出系数 c_{-1} ，即得**展开中心**的**留数**

 但作 **Laurent 展开**往往**太麻烦**，所以希望有一些现成的公式可以用来计算**留数**

 下面的方法适用于计算**极点**的**留数**

 **定理 (极点的留数)** 设 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，则

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \Big|_{z \rightarrow a}$$

§2 留数的算法

 计算留数的最一般方法是作 Laurent 展开，求出系数 c_{-1} ，即得展开中心的留数

 但作 Laurent 展开往往太麻烦，所以希望有一些现成的公式可以用来计算留数

 下面的方法适用于计算极点的留数

 定理（极点的留数） 设 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，则

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \Big|_{z=a}$$

 证明 由于 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，故在 a 的某去心邻域内有

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

 其中 $\varphi(z)$ 在 a 点解析，且 $\varphi(a) \neq 0$ ，于是

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

 最后一步用了 Cauchy 高阶导数公式，代入 $\varphi(z) = (z-a)^n f(z)$ 得证

单极点和二阶极点计算公式

 由上页**定理**, 马上可以得到下面两个推论, 它们是常用的计算公式

Ⅱ 推论一 (单极点留数第一公式) 若 a 是 $f(z)$ 的**单极点**, 则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$$

 **推论二 (二阶极点留数)** 若 a 是 $f(z)$ 的**二阶极点**, 则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow a}$$

单极点和二阶极点计算公式

由上页**定理**, 马上可以得到下面两个推论, 它们是常用的计算公式

Ⅱ 推论一 (单极点留数第一公式) 若 a 是 $f(z)$ 的**单极点**, 则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$$

推论二 (二阶极点留数) 若 a 是 $f(z)$ 的**二阶极点**, 则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow a}$$

单极点的留数还有另一个计算公式, 通常它更方便, 把它写成以下定理

定理 (单极点留数第二公式) 设 a 是 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的**单极点**, 即 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$

均在 a 点解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ (a 是 $\psi(z)$ 的**一阶零点**), 则

$$\text{Res } f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

定理的证明

■ 证明 按照 $\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$, 利用 $\psi(a) = 0$ 等已知条件推出

$$\begin{aligned}\text{Res } f(a) &= \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{[\psi(z) - \psi(a)]/(z - a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\end{aligned}$$

定理的证明

 证明 按照 $\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$ ，利用 $\psi(a) = 0$ 等已知条件推出

$$\begin{aligned}\text{Res } f(a) &= \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{[\psi(z) - \psi(a)]/(z - a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\end{aligned}$$

 以上三条公式就是计算极点留数的常用公式

 当极点的阶数较高时，用 $\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left. \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \right|_{z \rightarrow a}$ 计算留数并不方便

 此时不如作 Laurent 展开 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ ，求出系数 c_{-1}

 对于本性奇点，作 Laurent 展开求 c_{-1} 也是唯一的计算方法

 至于可去奇点，前已指出，其留数为 0

 注 作为计算留数的手段，作 Laurent 展开时只需求出系数 c_{-1} ，其它系数可以不必理会，所以只要把包含 $(z-a)^{-1}$ 的项找出来就可以了

§3 用留数定理计算围线积分

下面给出几个用留数定理计算围线积分的例子

例 1 $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$

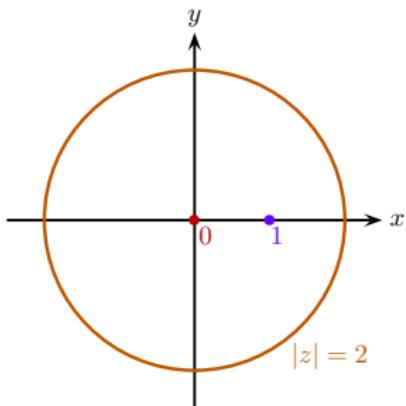
解 本题的被积函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ 在圆周

$|z| = 2$ 的内部有一阶极点 $z = 0$ 和二阶极点 $z = 1$ ，则

$$\text{Res } f(0) = [zf(z)] \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res } f(1) = [(z-1)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow 1} = \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} = -\frac{1}{z^2} \Big|_{z=1} = -1$$

故 $I = 2\pi i[\text{Res } f(0) + \text{Res } f(1)] = 0$



§3 用留数定理计算围线积分

下面给出几个用**留数定理**计算**围线积分**的例子

例 1 $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$

解 本题的**被积函数** $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ 在**圆周**

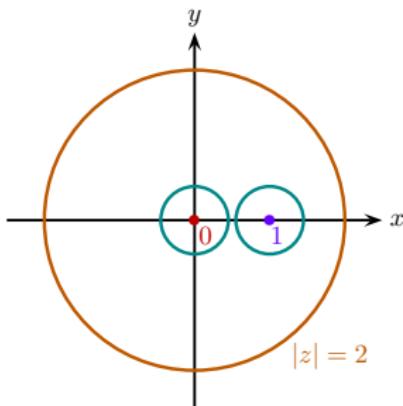
$|z| = 2$ 的内部有一阶极点 $z = 0$ 和二阶极点 $z = 1$ ，则

$$\text{Res } f(0) = [zf(z)] \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res } f(1) = [(z-1)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow 1} = \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} = -\frac{1}{z^2} \Big|_{z=1} = -1$$

故 $I = 2\pi i[\text{Res } f(0) + \text{Res } f(1)] = 0$

注 如果没有留数定理，可以作**两个小圆周**分别包围**一阶极点** $z = 0$ 和**二阶极点** $z = 1$ ，根据**Cauchy 积分定理**，原积分等于沿**两个小圆周**的**积分**之和，它们可以分别用**Cauchy 积分公式**和**Cauchy 高阶导数公式**来计算



例 2

♥ 例 2 $I = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$

解 本题的被积函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 在圆周 $|z| = 1$ 的内部有一个可去奇点 $z = 0$

它在 $z = 0$ 处的 Laurent 展开式没有负幂项

故 $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 0$ ，而 $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 0$

例 2

♥ 例 2 $I = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$

解 本题的被积函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 在圆周 $|z| = 1$ 的内部有一个可去奇点 $z = 0$

它在 $z = 0$ 处的 Laurent 展开式没有负幂项

故 $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 0$ ，而 $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 0$

注 本题当然也可以用 Cauchy 积分公式 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 来计算

被积函数已经具有公式所要求的形式，故

$$I = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \sin 0 = 0$$

例 3

♥ 例 3 $I = \int_{|z|=1} e^{1/z} dz$

解 本题的被积函数 $f(z) = e^{1/z}$ 在圆周 $|z| = 1$ 的内部有一个本性奇点 $z = 0$

它在 $z = 0$ 处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

故 $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 1$ ，而 $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 2\pi i$

例 3

例 3 $I = \int_{|z|=1} e^{1/z} dz$

解 本题的被积函数 $f(z) = e^{1/z}$ 在圆周 $|z| = 1$ 的内部有一个本性奇点 $z = 0$

它在 $z = 0$ 处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

故 $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 1$ ，而 $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 2\pi i$

注 本题不能直接用 Cauchy 积分公式来计算

但可以对被积函数作 Laurent 展开后逐项积分，根据

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z}, n \neq 1 \end{cases}$$

只有 $1/z$ 项有贡献，结果当然一样

讨论

-  以前曾经用 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 来计算某些**围线积分**
-  现在可以直接应用**留数定理**来计算
-  作为计算**围线积分**的技术，**留数定理**包括了 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 作为**特殊情况**，所以是**更一般的方法**
-  当然，在逻辑上是先有 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 的

讨论

- 💡 以前曾经用 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 来计算某些**围线积分**
- 💡 现在可以直接应用**留数定理**来计算
- 💡 作为计算**围线积分**的技术，**留数定理**包括了 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 作为**特殊情况**，所以是**更一般的方法**
- 💡 当然，在逻辑上是先有 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 的
- 💡 **留数定理**把计算**围线积分**的问题转化为计算围线内**各孤立奇点的留数**的问题
- 💡 由上节可以看到，计算**极点**的**留数**主要涉及**微分运算**
- 💡 对于**本性奇点**，必须作 **Laurent 展开**来计算其**留数**
- 💡 作 **Laurent 展开**，通常归结为 **Taylor 展开**，而计算 **Taylor 展开**的系数也是**微分运算**问题
- 💡 所以可以说，**留数定理**把**积分运算**转化成了比较容易的**微分运算**，因此它为积分的计算提供了一项非常有用的技术

§5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分

当然，为了应用留数定理，必须把定积分转化为围线积分

通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射到复平面上围线

其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决

本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法

§5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分

当然，为了应用留数定理，必须把定积分转化为围线积分

通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射到复平面上围线

其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决

本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法

可以用留数定理来计算的实变函数定积分是五花八门的，其中涉及的技巧也多种多样，不是一朝一夕所能掌握的

初学者能掌握几种固定的类型即可，学有余力再涉猎其它

对于这些固定的类型，可以导出相应的计算公式

了解这些公式的来源固然是必要的，但更重要的是掌握这些公式并能熟练地运用

变量置换

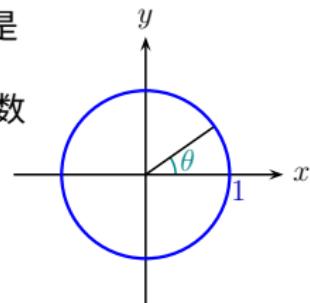
🏀 本节讨论的积分具有 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的形式，其中 R 是

自变量 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的有理函数，即由多项式加减乘除得到的函数

🔗 对于这类积分，关键是作变量置换

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

🌐 这一变换将 θ 的积分区间 $[0, 2\pi]$ 映射为 z 平面上的单位圆周 $|z| = 1$



变量置换

本节讨论的积分具有 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的形式，其中 R 是

自变量 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的**有理函数**，即由**多项式加减乘除**得到的函数

对于这类积分，关键是作**变量置换**

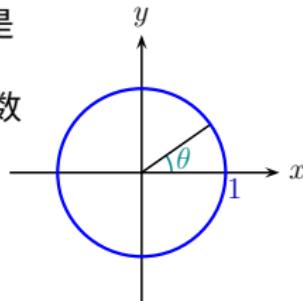
$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

这一变换将 θ 的**积分区间** $[0, 2\pi]$ 映射为 z 平面上的**单位圆周** $|z| = 1$

因此，**定积分**就变成了**围线积分**，注意到**指数函数与三角函数**之间的关系，有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

右边的**被积函数**是 z 的**有理函数**，所以用**留数定理**不难计算



变量置换

本节讨论的积分具有 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的形式，其中 R 是

自变量 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的**有理函数**，即由**多项式加减乘除**得到的函数

对于**这类积分**，关键是作**变量置换**

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

这一变换将 θ 的**积分区间** $[0, 2\pi]$ 映射为 z 平面上的**单位圆周** $|z| = 1$

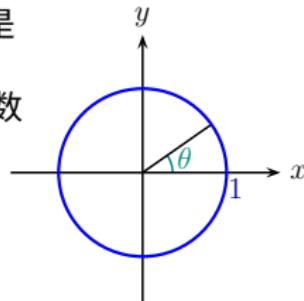
因此，**定积分**就变成了**围线积分**，注意到**指数函数与三角函数**之间的关系，有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

右边的**被积函数**是 z 的**有理函数**，所以用**留数定理**不难计算

对于**这一类型的积分**，无需记住具体的公式，只要记得**变量置换** $z = e^{i\theta}$ 就可以了

另外，如果题目中 θ 的**积分区间**是 $[-\pi, \pi]$ ，同一变换也将其映射为 z 平面上的**单位圆周** $|z| = 1$ ，因此**没有必要刻意将 θ 的积分区间先变换为 $[0, 2\pi]$**



例 1

 例 1 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$, 其中 $-1 < a < 1$

 解 作变量置换 $z = e^{i\theta}$, 得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}$$

 右边已是围线积分, 被积函数为有理分式, 其奇点就是分母

的根, 满足 $az^2 + 2z + a = 0$, 由一元二次方程的求根公式得到两个根

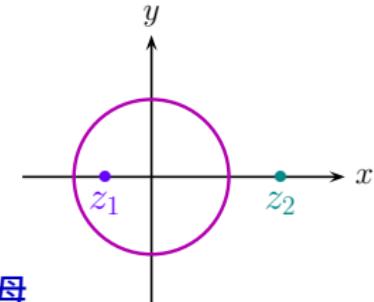
$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4a^2}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

例 1

例 1 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$, 其中 $-1 < a < 1$

解 作变量置换 $z = e^{i\theta}$, 得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}$$



右边已是围线积分, 被积函数为有理分式, 其奇点就是分母

的根, 满足 $az^2 + 2z + a = 0$, 由一元二次方程的求根公式得到两个根

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4a^2}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

$-1 < a < 1$ 表明 $|z_2| > 1$, 由根与系数的关系有 $z_1 z_2 = 1$, 故 $|z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1$

从而, 只有 z_1 在单位圆内, 即对积分有贡献的只有 z_1 的留数

$$\text{Res} \left(\frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right) = \left. \frac{1}{(az^2 + 2z + a)'} \right|_{z=z_1} = \frac{1}{2az_1 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}$$

于是 $I = \frac{2}{i} 2\pi i \text{Res} \left(\frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$

例 2

 例 2 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$, 其中 $a > 1$

 解 本题不需重新作围线积分

 由于 $a > 1$, 故 $0 < \frac{1}{a} < 1$

 利用例 1 的结果, 有

$$I = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos \theta/a} = \frac{1}{a} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 1/a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

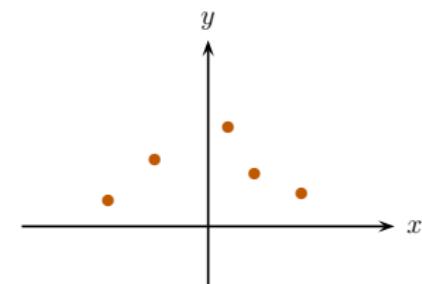
§6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

本节讨论的积分具有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的形式，其中 $f(x)$ 通常是**有理分式**

关于这类积分，可以推导出一个计算公式，把它表述为以下定理

ℳ 定理 设函数 $f(z)$ 在**上半平面上有有限个孤立奇点**，此外它在**上半平面和实轴上解析**，且当 $z \rightarrow \infty$ 时， $zf(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)$$



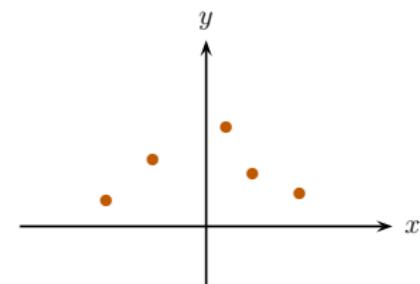
§6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

本节讨论的积分具有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的形式，其中 $f(x)$ 通常是**有理分式**

关于这类积分，可以推导出一个计算公式，把它表述为以下定理

ℳ 定理 设函数 $f(z)$ 在**上半平面上有有限个孤立奇点**，此外它在**上半平面和实轴上解析**，且当 $z \rightarrow \infty$ 时， $zf(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)$$



注 $z \rightarrow \infty$ 时 $zf(z) \Rightarrow 0$ (**一致趋于 0**) 的大意是

$zf(z) \rightarrow 0$ 的**速度与 z 的辐角无关** (在指定的辐角范围内，这里是 $[0, \pi]$)

III 精确地说，就是 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists R_0 > 0$ 与 θ 无关，当 $|z| > R_0$ 时，就有 $|zf(z)| < \varepsilon$

鼙鼓 求和号下面的 $\operatorname{Im} a_k > 0$ 表示求和只对**上半平面的各孤立奇点**进行

满足条件的有理分式

 考虑 $f(z)$ 是**有理分式**的情况，如果 $f(z) = \frac{2z}{z^3 + 2z + 1}$ ，则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2}{z^3 + 2z + 1} = 0$$

 由于这个极限与 z 的辐角无关，故 $z \rightarrow \infty$ 时 $z f(z) \Rightarrow 0$

 如果 $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 2z + 1}$ ，则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2}{z^2 + 2z + 1} = 2$$

 从而**不满足**定理的条件

 由此可以推断，如果要用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$ 计算积分，则**有**

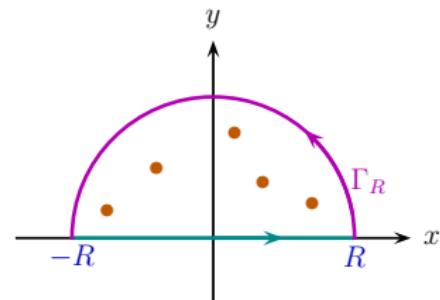
理分式 $f(x)$ 中**分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 2**

定理的证明

证明 作半圆 $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)，与实轴上的线段 $[-R, R]$ 一起构成围线 C_R ，取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内

根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$$



定理的证明

█ 证明 作半圆 $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)，与实轴上的线段 $[-R, R]$ 一起构成围线 C_R ，取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内

√ 根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$$

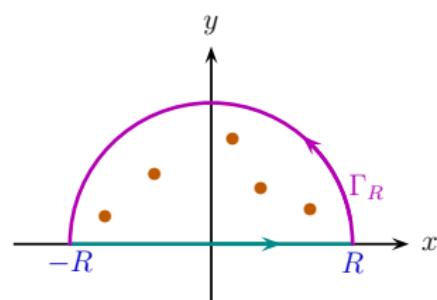
喇叭 由于 $z \rightarrow \infty$ 时 $zf(z) \Rightarrow 0$ ，故 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists R_0 > 0$ 与 θ 无关，当 $|z| > R_0$ 时，就有 $|zf(z)| < \varepsilon/\pi$

吉他 于是，当 $R > R_0$ 时，

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_R} |f(z)| |dz| = \int_0^\pi |f(z)| R d\theta \\ &= \int_0^\pi |zf(z)| d\theta < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi d\theta = \varepsilon \end{aligned}$$

鼓 故 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$ ，对 $\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$

取 $R \rightarrow \infty$ 的极限得证



广义积分的主值

 由以上证明可以看出，这样求出的结果是**主值** (principal value)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

 而不是**一般值** $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx$

 如果一个**广义积分** (包括**无穷积分**和**瑕积分**) 的**一般值**存在，则其**主值**必定存在且等于**一般值**

广义积分的主值

由以上证明可以看出，这样求出的结果是**主值** (principal value)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

而不是**一般值** $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx$

如果一个**广义积分** (包括**无穷积分**和**瑕积分**) 的**一般值**存在，则其**主值**必定存在且等于**一般值**

但**主值**存在则不足以保证**一般值**存在

比如，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$ 的**主值**为 0，但**一般值不存在**：

$$\int_{-R}^R \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_{-R}^R = 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + R_2^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + R_1^2)$$

用**留数定理**导出的关于**广义积分**的公式，包括本节、下节的公式和本课程没有介绍的情况，它们给出的都是积分的**主值**

例 1

 例 1 计算积分 $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1}$

 解 取 $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ ，它满足上述定理的条件，在 z 平面上有四个一阶极点

$$z_k = (-1)^{1/4} = (e^{\pi i + 2k\pi i})^{1/4} = e^{\pi i/4 + k\pi i/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

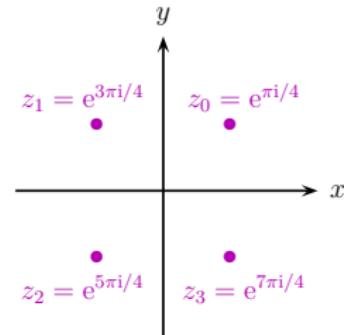
 其中 z_0 和 z_1 在上半平面

 注意到 $z_k^4 = -1$ ，各一阶极点的留数为

$$\text{Res } f(z_k) = \left. \frac{1}{(z^4 + 1)'} \right|_{z_k} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

$$\text{Res } f(z_0) + \text{Res } f(z_1) = -\frac{1}{4}(z_0 + z_1) = -\frac{e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4}}{4} = -\frac{e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}}{4} = -\frac{i}{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} 2\pi i [\text{Res } f(z_0) + \text{Res } f(z_1)] = \pi i \left(-\frac{i}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$



实轴上存在极点的情况

♪ 如果 $f(z)$ 在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[\sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} b_k = 0} \operatorname{Res} f(b_k) \right]$$

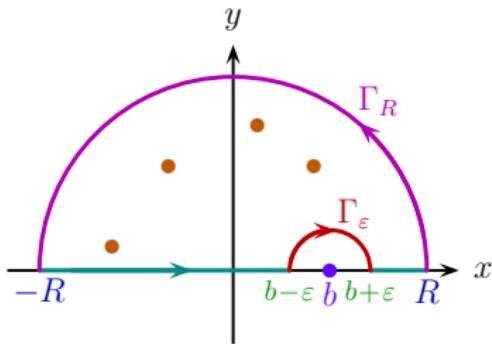
|m| 方括号中第二项求和对实轴上的**各单极点**进行

|m| 此公式的证明可参看梁昆淼《数学物理方法》第5版4.2节

|m| 形象地看，可以认为**实轴上的一阶极点有一半**处于上半平面，因此它们对**积分**的贡献只相当于**上半平面奇点**所贡献的**一半**

♪ 此时，**积分**既是**无穷积分** ($R \rightarrow \infty$)，又是**瑕积分** ($\varepsilon \rightarrow 0$)，因而积分结果是**双重意义**下的**主值**

♪ 注意，此处**实轴上的奇点只能是一阶极点**，否则**沿 Γ_ε 的积分发散**，而积分公式不成立



例 2

例 2 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x^2+1)}$

解 取 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z^2+1)}$ ，它满足上述定理的条件

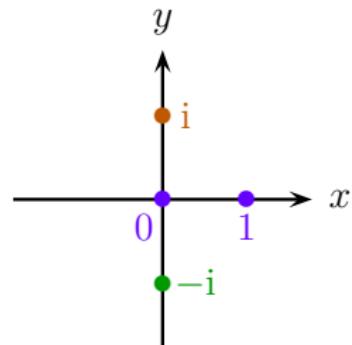
$f(z)$ 在上半平面上有一阶极点 $z = i$ ，在实轴上有一阶极点 $z = 0$ 和 $z = 1$

各一阶极点的留数为

$$\text{Res } f(i) = \left. \frac{1}{z(z-1)(z+i)} \right|_{z=i} = -\frac{1}{2(i-1)} = \frac{1+i}{4}$$

$$\text{Res } f(0) = \left. \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} \right|_{z=0} = -1, \quad \text{Res } f(1) = \left. \frac{1}{z(z^2+1)} \right|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[\text{Res } f(i) + \frac{1}{2} \text{Res } f(0) + \frac{1}{2} \text{Res } f(1) \right] \\ &= 2\pi i \left(\frac{1+i}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



§7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$

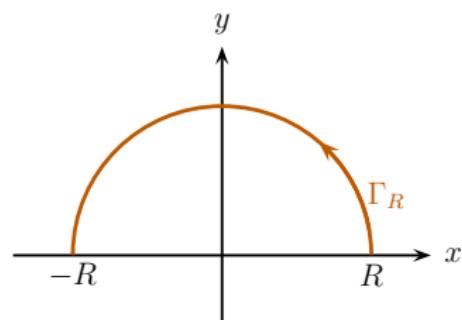
为了计算形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$ 的积分，先介绍下述引理

Ω Jordan 引理 设函数 $f(z)$ 在半圆 $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 上连续，且当 $R \rightarrow \infty$ 时， $f(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0 \quad (m > 0)$$



Camille Jordan
(1838–1922)



§7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$

 为了计算形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$ 的积分，先介绍下述引理

 **Jordan 引理** 设函数 $f(z)$ 在半圆 $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 上连续，且当 $R \rightarrow \infty$ 时， $f(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0 \quad (m > 0)$$

 证明见选读内容，这里作一点直观的说明

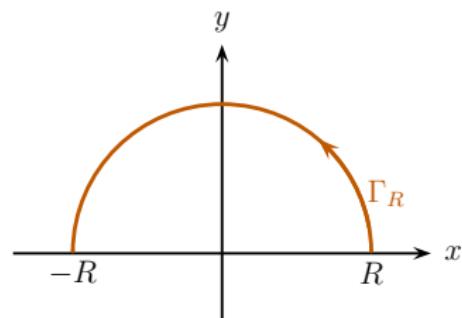
 在上一节计算积分类型 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 时，

曾经用到 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$ 的结论，其条件是当 $R \rightarrow \infty$ 时， $zf(z) \Rightarrow 0$

 这里看到，Jordan 引理所要求的条件较弱

 主要原因是半圆上的点满足 $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，使得被积函数中含有因子

$$e^{imz} = e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$$



讨论

bus 由于 $m > 0$ 和 $\sin \theta > 0$ ($0 < \theta < \pi$)， $e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$ 中第一个因子

$e^{-mR \sin \theta}$ 随着 R 的增大迅速衰减 ($\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两点例外，但对结论没有影响)

car 这弥补了 $f(z)$ 下降较慢的不足

truck 第二个因子 $e^{imR \cos \theta} = \cos(mR \cos \theta) + i \sin(mR \cos \theta)$ 在半径很大的圆弧上是 θ 的快速振荡函数，也有助于积分的收敛，但第一个因子起主要作用

讨论

由于 $m > 0$ 和 $\sin \theta > 0$ ($0 < \theta < \pi$)， $e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$ 中第一个因子

$e^{-mR \sin \theta}$ 随着 R 的增大迅速衰减 ($\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两点例外，但对结论没有影响)

这弥补了 $f(z)$ 下降较慢的不足

第二个因子 $e^{imR \cos \theta} = \cos(mR \cos \theta) + i \sin(mR \cos \theta)$ 在半径很大的圆弧上是 θ 的快速振荡函数，也有助于积分的收敛，但第一个因子起主要作用

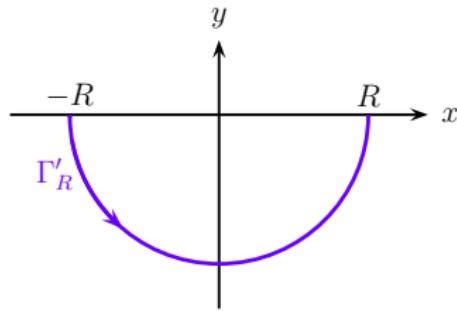
由上面分析看出 $m > 0$ 这个条件是必不可少的，因为它让指数函数 $e^{-mR \sin \theta}$ 的宗量 $-mR \sin \theta < 0$ ($0 < \theta < \pi$)，使得第一个因子随着 R 的增大而衰减

如果假设中的半圆改为

$$\Gamma'_R : z = R e^{i\theta} \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$$

而 $\sin \theta < 0$ ($\pi < \theta < 2\pi$)

则 Jordan 引理对 $m < 0$ 才成立



定理

有了 **Jordan 引理**，就很容易推导出下面的公式，把它表述成定理

定理 设函数 $f(z)$ 在上半平面上有有限个孤立奇点，此外它在上半平面和实轴上解析，且当 $z \rightarrow \infty$ 时， $f(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, a_k], \quad m > 0$$

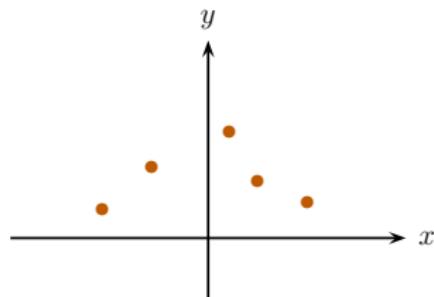
注 这里求和也只对上半平面的各孤立奇点进行

注意这里的条件 “当 $z \rightarrow \infty$ 时， $f(z) \Rightarrow 0$ ”

比上节的相应条件弱

如果 $f(x)$ 是有理分式，则易知分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 1

应特别注意公式成立的条件是 $m > 0$



 如果 $m < 0$ ，可作**变量置换** $x' = -x$ ，将积分化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x') e^{-imx'} (-dx') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{i|m|x} dx$$

 此时如果 $f(-z)$ 也满足**定理**的条件，就能应用**定理**

 所以 $m > 0$ 这一条件并不构成本质的限制

定理的证明

如果 $m < 0$, 可作变量置换 $x' = -x$, 将积分化为

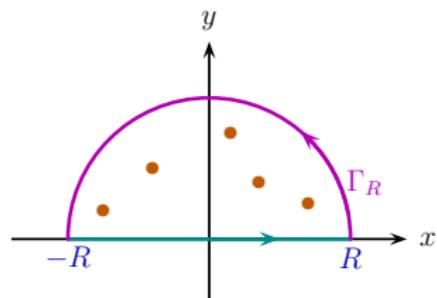
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x') e^{-imx'} (-dx') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{i|m|x} dx$$

此时如果 $f(-z)$ 也满足定理的条件, 就能应用定理

所以 $m > 0$ 这一条件并不构成本质的限制

证明 作半圆 $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 与实轴上的线段 $[-R, R]$ 一起构成围线 C_R , 取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内

根据 Cauchy 留数定理, 有



$$\int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = \int_{-R}^R f(x) e^{imx} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, a_k]$$

取 $R \rightarrow \infty$ 的极限, 由 Jordan 引理, 半圆上的积分为 0, 证毕

例 1

例 1 计算积分 $I = \int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx$, 其中 $m > 0$

解 在 $e^{imx} = \cos mx + i \sin mx$ 中, $\cos mx$ 和 $\sin mx$ 分别是 x 的偶函数和奇函数, 故

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx$$

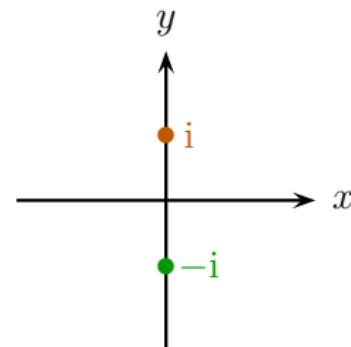
取 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, 它满足上述定理的条件, 在上半平面只有一个一阶极点 $z = i$

$z = i$ 处的相关留数为

$$\text{Res}[f(z)e^{imz}, i] = \left. \frac{e^{imz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = \left. \frac{e^{imz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \text{Res}[f(z)e^{imz}, i] = \pi e^{-m}$

于是 $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$



例 2

例 2 计算积分 $I = \int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx$, 其中 $a > 0$, $m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$

解 先考虑 $m > 0$, 有

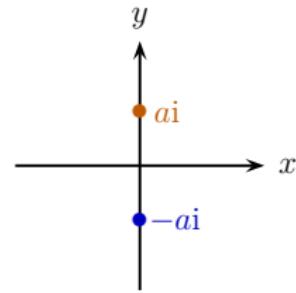
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{imx}}{x^2 + a^2} dx$$

取 $f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$, 它满足上述定理条件, 在上半平面只有一个一阶极点 $z = ai$

$z = ai$ 处相关留数为 $\operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, ai] = \left. \frac{z e^{imz}}{(z^2 + a^2)'} \right|_{z=ai} = \left. \frac{z e^{imz}}{2z} \right|_{z=ai} = \frac{e^{-ma}}{2}$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, ai] = i\pi e^{-ma}$

于是 $I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma}$



$m < 0$ 的情况

 当 $m < 0$ 时, 有 $m = -|m|$, 可利用以上 $m > 0$ 时的结果, 得

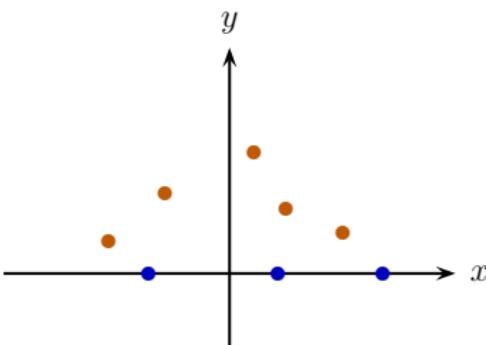
$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = - \int_0^\infty \frac{x \sin |m|x}{x^2 + a^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-|m|a} = -\frac{\pi}{2} e^{ma}$$

实轴上存在极点的情况

如果 $f(z)$ 在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \left\{ \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res}[f(z)e^{imz}, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } b_k = 0} \text{Res}[f(z)e^{imz}, b_k] \right\},$$

$m > 0$



实轴上存在极点的情况

 如果 $f(z)$ 在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \left\{ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} b_k = 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, b_k] \right\},$$

$m > 0$

 例 3 计算 Dirichlet 积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$ ，其中 $m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$

 解 先考虑 $m > 0$ ，有

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx$$

 取 $f(z) = \frac{1}{z}$ ，它满足上述定理条件，在上半平面没有奇点，在实轴上有一个一阶极点 $z = 0$ ，其留数为

$$\operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, 0] = e^{imz}|_{z=0} = 1$$

例 3

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, 0] = \pi i$$

于是

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad m > 0$$

当 $m < 0$ 时, 有 $m = -|m|$, 可利用以上 $m > 0$ 时的结果, 得

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin |m|x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$$