数 学 物 理 方 法

第十章　二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

第 1 节至第 4 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 9 月 30 日

第十章　二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

- 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解
- 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程
- 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解法则

第十章　二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

- 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解
- 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程
- 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解法则
- 一阶线性常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+P(x)u=Q(x)$ 的通解可以用系数和非齐次项表达为

$$u(x)=\left\{\int_{x_0}^{x}Q(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t}P(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+C\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

- 虽然上式中的积分不一定能积出初等函数，但至少有一个通用形式

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

- 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解
- 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程
- 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解法则
- 一阶线性常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+P(x)u=Q(x)$ 的通解可以用系数和非齐次项表达为

$$u(x)=\left\{\int_{x_0}^{x}Q(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t}P(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+C\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

- 虽然上式中的积分不一定能积出初等函数，但至少有一个通用形式
- 对于二阶线性常微分方程，并**不存在**类似的结果
- 常系数方程和少数特殊类型的方程（比如 Euler 方程）可以用初等函数求解
- 另一些方程可以用级数解法或积分解法求解

二阶线性常微分方程的解法

- 级数解法可以算是一种比较系统的方法
- 对于那些能够用初等函数求解的简单情况，级数解法通常也有效
- 积分解法是积分变换的推广，本课程不作介绍
- 应该指出，能够用级数解法或积分解法求解的方程是非常有限的
- 更多的时候人们只能采用数值解法

二阶线性常微分方程的解法 $\begin{cases} \text{初等函数} \\ \text{级数解法} \\ \text{积分解法} \\ \text{数值解法} \end{cases}$

§1 常点邻域的级数解法

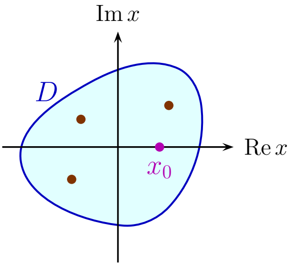
- **二阶线性齐次常微分方程**的**一般形式**是 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$
- 对于**物理**和**工程**问题中导出的微分方程，x 通常是**实数**
- $p(x)$ 和 $q(x)$ 是**已知函数**，$y(x)$ 是**未知函数**，它们的函数值也都是**实数**

§1 常点邻域的级数解法

- 二阶线性齐次常微分方程的一般形式是 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$
- 对于物理和工程问题中导出的微分方程，x 通常是实数
- $p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知函数，$y(x)$ 是未知函数，它们的函数值也都是实数
- 为了应用复变函数理论来研究微分方程的解，可以把 x 看作复数，并仍记作 x
- 相应地，$p(x)$、$q(x)$ 和 $y(x)$ 就成为复变函数，它们在实轴上取相应的实函数值
- 可以对方程附加初始条件 $y(x_0)=c_0$ 和 $y'(x_0)=c_1$
- 如果不附加初始条件，则通解中含有两个任意常数

§1 常点邻域的级数解法

- 二阶线性齐次常微分方程的一般形式是 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$
- 对于物理和工程问题中导出的微分方程，x 通常是实数
- $p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知函数，$y(x)$ 是未知函数，它们的函数值也都是实数
- 为了应用复变函数理论来研究微分方程的解，可以把 x 看作复数，并仍记作 x
- 相应地，$p(x)$、$q(x)$ 和 $y(x)$ 就成为复变函数，它们在实轴上取相应的实函数值
- 可以对方程附加初始条件 $y(x_0)=c_0$ 和 $y'(x_0)=c_1$
- 如果不附加初始条件，则通解中含有两个任意常数
- 方程的解的行为取决于系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的行为
- 假设在复平面的某个区域 D 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的



- 级数解法就是在 D 内某点 x_0 的邻域或去心邻域内将 $y(x)$ 展开为幂级数，即 Taylor 级数、Laurent 级数或更一般的幂级数（见后）

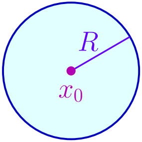
- $y(x)$ 级数展开式的形式取决于系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质
- 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 解析，则 x_0 称为方程的常点
- 如果 x_0 是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的极点或本性奇点，则 x_0 称为方程的奇点

常点邻域级数解法的理论基础

- $y(x)$ 级数展开式的形式取决于系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质
- 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 解析，则 x_0 称为方程的常点
- 如果 x_0 是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的极点或本性奇点，则 x_0 称为方程的奇点
- 本节研究常点的级数解法，理论基础是以下定理

定理 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在圆 $|x-x_0|<R$ 内解析，则在该圆内满足方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ 及初始条件 $y(x_0)=c_0$ 和 $y'(x_0)=c_1$ 的解是存在、唯一而且解析的

- 这个定理的大意是，如果系数是解析的，则方程的解也是解析的
- 这一结论非常直观，但证明起来却并不容易
- 这里不去深究定理的证明，而是把注意力集中在计算方法上



Taylor 级数解法

- 即然 $p(x)$、$q(x)$ 和 $y(x)$ 都在圆内解析，那么就可以展开为 Taylor 级数

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-x_0)^k,\quad q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-x_0)^k,\quad y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

- 其中展开系数 p_k、q_k 是已知的，而 a_k 是未知的
- 将这些展开式代入方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$，得

$$\begin{aligned}
0 &= y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}+\sum_{l=0}^{\infty}p_l(x-x_0)^l\sum_{k=0}^{\infty}ka_k(x-x_0)^{k-1}\\
&\quad+\sum_{l=0}^{\infty}q_l(x-x_0)^l\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}f_i(\{a_k\})(x-x_0)^i
\end{aligned}$$

- 最后一步合并同幂项，整理成一个幂级数，其所有系数 $f_i(\{a_k\})$ 必须为零

求解流程

- 于是得到 a_k 间的一系列代数方程

$$f_i(\{a_k\}) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

- 求解这些代数方程，就可以用 a_0 和 a_1 表出 $a_2, a_3, \cdots$
- 从而得到级数解 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$
- 注意到

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots, \quad y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots$$

- 初始条件意味着

$$a_0 = y(x_0) = c_0, \quad a_1 = y'(x_0) = c_1$$

- 如果不给定初始条件，则级数解中含有两个任意常数 a_0 和 a_1，成为方程的通解

§2 Legendre 方程及其本征值问题

§2.1 Legendre 方程的级数解

- 回顾上一章，在**球坐标系**中对 Helmholtz 方程**分离变量**时
- **轴对称情况**下得到 **Legendre 方程**的本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda P=0 \\ |P(\pm 1)|<\infty \end{cases}$
- 将 $P(x)$ 替换为 $y(x)$，把 **Legendre 方程**改写为

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$

- 无法找到这个方程的简单解法，因此只能考虑**级数解**

§2 Legendre 方程及其本征值问题

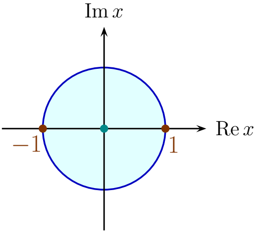
§2.1 Legendre 方程的级数解

回顾上一章，在**球坐标系**中对 Helmholtz 方程**分离变量**时

轴对称情况下得到 **Legendre 方程**的本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda P=0 \\ |P(\pm 1)|<\infty \end{cases}$

将 $P(x)$ 替换为 $y(x)$，把 **Legendre 方程**改写为

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$



无法找到这个方程的简单解法，因此只能考虑**级数解**

与**标准形式** $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ 比较可见

$$p(x)=-\frac{2x}{1-x^2},\quad q(x)=\frac{\lambda}{1-x^2}$$

显然，$x=0$ 是**常点**，而且 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在复平面上只有**两个奇点** $x=\pm 1$

因此，$p(x)$ 和 $q(x)$ **在圆** $|x|<1$ **内解析**

解的级数形式

- 在圆 $|x| < 1$ 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 是解析的，因而方程的解也是解析的，故可设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- 求导，有

$$xy'(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$$

- 又有

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

- 第一步结果中 $k=0$ 和 $k=1$ 的项均为零，第二步丢弃这两项

解的级数形式

在圆 $|x|<1$ 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 是解析的，因而方程的解也是解析的，故可设

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

求导，有

$$xy'(x)=x\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k$$

又有

$$\begin{aligned} y''(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}\\ &=\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)a_{l+2}x^l=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \end{aligned}$$

第一步结果中 $k=0$ 和 $k=1$ 的项均为零，第二步丢弃这两项

第三步作变量替换 $l=k-2$ (即 $k=l+2$)，第四步作变量替换 $k=l$

第三、四步合起来相当于将 k 的求和下限减 2，而各项中的 k 变成 $k+2$

熟悉这个规律后可以直接从第二步结果作替换 $k\to k+2$ 得到第四步结果

递推关系

此外，$x^2y''(x) = x^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$

这样一来，y''、x^2y''、xy' 和 y 的级数中通项表达式都包含**因子** x^k

将它们代入 **Legendre 方程**，得

$$0 = y'' - x^2y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k]x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k]x^k$$

递推关系

此外，$x^2y''(x) = x^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$

这样一来，y''、x^2y''、xy' 和 y 的级数中通项表达式都包含**因子** x^k

将它们代入 **Legendre 方程**，得

$$0 = y'' - x^2y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k]x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k]x^k$$

比较两边，有 $(k+2)(k+1)a_{k+2} - [k(k+1) - \lambda]a_k = 0$，即得**递推关系**

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k$$

由此递推关系，**所有** a_{2k} $(k \in \mathbb{N}^+)$ 均可**由** a_0 **确定** $[a_0 \to a_2 \to \cdots \to a_{2k} \to \cdots]$

所有 a_{2k+1} $(k \in \mathbb{N}^+)$ 均可**由** a_1 **确定** $[a_1 \to a_3 \to \cdots \to a_{2k+1} \to \cdots]$

两个线性独立的级数解

- 于是，$y(x)$ 可表达为**通解**形式 $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$
- 其中**两个线性独立的级数解**为

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} \\
y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

- 而 $c_{2k}=\dfrac{a_{2k}}{a_0}$ 和 $c_{2k+1}=\dfrac{a_{2k+1}}{a_1}$ 都只是 k 和 λ 的函数，**与 a_0、a_1 无关**

两个线性独立的级数解

于是，$y(x)$ 可表达为**通解**形式 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

其中**两个线性独立的级数解**为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

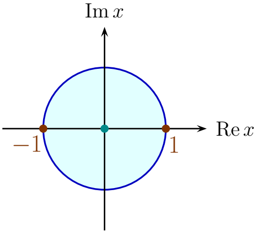
第三章 §3.2 收敛半径的 d'Alembert 公式

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l \in (0,\infty)$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的**收敛半径**为 $R = \dfrac{1}{l}$

而 $c_{2k} = \dfrac{a_{2k}}{a_0}$ 和 $c_{2k+1} = \dfrac{a_{2k+1}}{a_1}$ 都只是 k 和 λ 的函数，**与 a_0、a_1 无关**

由于 $l = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+2}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}\right| = 1$，

两个级数解的**收敛半径**都是 $R = 1/l = 1$，如所期望



但可以证明（参看**第三章 §1.5 Gauss 判别法**选读内容），$y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ **在 $x = \pm 1$ 两点均发散**

这样的发散结果对于下面**确定本征值问题的解**非常重要

§2.2 Legendre 方程的本征值问题

- 根据上一章讨论，物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$
- **一般情况**下，上面得到的两个级数解均**不满足**这一条件
- 所以，唯一的出路是让它们**中断为多项式**
- 由**递推关系** $a_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$ 可见，只要 λ **取值恰当**，中断为多项式是**可能**的，这样同时也就**确定**了**本征值**

§2.2 Legendre 方程的本征值问题

- 根据上一章讨论，物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$
- **一般情况**下，上面得到的两个级数解均**不满足**这一条件
- 所以，唯一的出路是让它们**中断为多项式**
- 由**递推关系** $a_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}\, a_k$ 可见，只要 λ **取值恰当**，中断为多项式是**可能**的，这样同时也就**确定**了**本征值**
- 若 $\lambda = 2n(2n+1)\ (n \in \mathbb{N})$，则 $a_{2n+2} = \dfrac{2n(2n+1)-\lambda}{(2n+2)(2n+1)}\, a_{2n} = 0$
- 故 $a_{2n+2} = a_{2n+4} = a_{2n+6} = \cdots = 0$，从而 $y_0(x)$ 中断为 $2n$ **次多项式**
- 同时另一个解 $y_1(x)$ 仍为无穷级数，不满足**边界条件**

§2.2 Legendre 方程的本征值问题

- 根据上一章讨论，物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$
- **一般情况**下，上面得到的两个级数解均**不满足**这一条件
- 所以，唯一的出路是让它们**中断为多项式**
- 由**递推关系** $a_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$ 可见，只要 λ **取值恰当**，中断为多项式是**可能**的，这样同时也就**确定**了**本征值**
- 若 $\lambda = 2n(2n+1)\ (n \in \mathbb{N})$，则 $a_{2n+2} = \dfrac{2n(2n+1)-\lambda}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} = 0$
- 故 $a_{2n+2} = a_{2n+4} = a_{2n+6} = \cdots = 0$，从而 $y_0(x)$ 中断为 $2n$ **次多项式**
- 同时另一个解 $y_1(x)$ 仍为无穷级数，不满足**边界条件**
- 若 $\lambda = (2n+1)(2n+2)\ (n \in \mathbb{N})$，则 $a_{2n+3} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)-\lambda}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n+1} = 0$
- 故 $a_{2n+3} = a_{2n+5} = a_{2n+7} = \cdots = 0$，从而 $y_1(x)$ 中断为 $2n+1$ **次多项式**
- 同时另一个解 $y_0(x)$ 仍为无穷级数，不满足**边界条件**

Legendre 多项式

- 🦞 综合起来，如果 $\lambda = l(l+1)\ (l \in \mathbb{N})$，两个线性独立解中就有一个解中断为 l 次多项式，它当然满足自然边界条件 $|y(\pm 1)| < \infty$
- 🦪 同时另一个解仍为无穷级数，不满足边界条件

Legendre 多项式

- 综合起来，如果 $\lambda = l(l+1)$ $(l \in \mathbb{N})$，两个线性独立解中就有**一个解**中断为 l **次多项式**，它当然满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$
- 同时**另一个解**仍为**无穷级数**，不满足**边界条件**
- 适当选取 a_0 (若 $l = 2n$) 或 a_1 (若 $l = 2n+1$)，使**多项式解**的**最高次幂系数**为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

- 这样得到的解称为 l **次 Legendre 多项式**，记作 $\mathrm{P}_l(x)$
- 下一章将会证明，这样的定义满足 $\mathrm{P}_l(1) = 1$，从而使得相关公式比较**简单**

Legendre 多项式

- 综合起来，如果 $\lambda = l(l+1)\ (l \in \mathbb{N})$，两个线性独立解中就有**一个解**中断为 **$l$ 次多项式**，它当然满足**自然边界条件** $|y(\pm 1)| < \infty$
- 同时**另一个解**仍为**无穷级数**，不满足**边界条件**
- 适当选取 a_0 (若 $l = 2n$) 或 a_1 (若 $l = 2n+1$)，使**多项式解**的**最高次幂系数**为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

- 这样得到的解称为 **l 次 Legendre 多项式**，记作 $\mathrm{P}_l(x)$
- 下一章将会证明，这样的定义满足 $\mathrm{P}_l(1) = 1$，从而使得相关公式比较**简单**
- 将 $\lambda = l(l+1)$ 代入**递推关系**，得 $a_{k+2} = \dfrac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$
- 作**变量替换** $k \to k-2$，得 $a_k = \dfrac{(k-2)(k-1) - l(l+1)}{k(k-1)} a_{k-2}$，**分子**可化为

$$\begin{aligned}(k-2)(k-1) - l(l+1) &= (k-2)(k-1) + \overbrace{(k-2)l - (k-1)l}^{=-l} - l^2 \\ &= [(k-2) - l][(k-1) + l] = (k-l-2)(k+l-1)\end{aligned}$$

猜测一般系数

从而得到**递推关系** $a_{k-2}=\dfrac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)}a_k$，于是推出

$$
\begin{aligned}
a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)}a_l=\frac{l(l-1)}{-2(2l-1)}\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\\
&=\frac{1}{-2(2l-1)}\frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!}=\frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}
\end{aligned}
$$

猜测一般系数

从而得到**递推关系** $a_{k-2}=\dfrac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)}a_k$，于是推出

$$
\begin{aligned}
a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)}a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)}\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\\
&= \frac{1}{-2(2l-1)}\frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{l-4} &= \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)}a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)}\frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}\\
&= \frac{1}{-2\cdot 2(2l-3)}\frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l(l-1)!(l-4)!} = \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!}
\end{aligned}
$$

猜测一般系数

从而得到**递推关系** $a_{k-2}=\dfrac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)}a_k$，于是推出

$$a_{l-2}=\frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)}a_l=\frac{l(l-1)}{-2(2l-1)}\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$$

$$=\frac{1}{-2(2l-1)}\frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!}=\frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}$$

$$a_{l-4}=\frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)}a_{l-2}=\frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)}\frac{-(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}$$

$$=\frac{1}{-2\cdot 2(2l-3)}\frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l(l-1)!(l-4)!}=\frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!}$$

$$a_{l-6}=\frac{(l-4)(l-5)}{(l-4-l-2)(l-4+l-1)}a_{l-4}=\frac{(l-4)(l-5)}{-6(2l-5)}\frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!}$$

$$=\frac{1}{-3\cdot 2(2l-5)}\frac{(-)^2 2(l-2)(2l-5)(2l-6)!}{2^l 2(l-2)!(l-6)!}=\frac{(-)^3(2l-6)!}{2^l 3\cdot 2(l-3)!(l-6)!}$$

猜测一般系数

从而得到**递推关系** $a_{k-2} = \dfrac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)}\, a_k$，于是推出

$$a_{l-2} = \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)}\, a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$$

$$= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \qquad (k=1)$$

$$a_{l-4} = \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)}\, a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!}$$

$$= \frac{1}{-2\cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l (l-1)!(l-4)!} = \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!} \qquad (k=2)$$

$$a_{l-6} = \frac{(l-4)(l-5)}{(l-4-l-2)(l-4+l-1)}\, a_{l-4} = \frac{(l-4)(l-5)}{-6(2l-5)} \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!}$$

$$= \frac{1}{-3\cdot 2(2l-5)} \frac{(-)^2 2(l-2)(2l-5)(2l-6)!}{2^l 2(l-2)!(l-6)!} = \frac{(-)^3(2l-6)!}{2^l 3\cdot 2(l-3)!(l-6)!} \qquad (k=3)$$

从以上结果寻找规律，**猜测一般系数**的形式为 $a_{l-2k} = (-)^k \dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$

证明一般系数

🐇 接着用数学归纳法证明一般系数 $a_{l-2k} = (-)^k \dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} \qquad (1)$

证明 由 $a_l = \dfrac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \dfrac{(-)^0 (2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$ 可知，(1) 式对 $k=0$ 成立

证明一般系数

接着用**数学归纳法证明一般系数** $a_{l-2k}=(-)^k\dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}\qquad(1)$

证明 由 $a_l=\dfrac{(2l)!}{2^l(l!)^2}=\dfrac{(-)^0(2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$ 可知，(1) **式对** $k=0$ **成立**

当 $l\geq 2n+2$ 时，假设 (1) **式对** $k=n$ **成立**，则 $a_{l-2n}=\dfrac{(-)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}$

$$
\begin{aligned}
a_{l-2n-2} &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{(l-2n-l-2)(l-2n+l-1)}a_{l-2n}\\
&= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{-2(n+1)(2l-2n-1)}\,\frac{(-)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}\\
&= \frac{1}{-2(n+1)(2l-2n-1)}\,\frac{(-)^n 2(l-n)(2l-2n-1)(2l-2n-2)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n-2)!}\\
&= \frac{(-)^{n+1}(2l-2n-2)!}{2^l(n+1)!(l-n-1)!(l-2n-2)!}
\end{aligned}
$$

可见，(1) **式对** $k=n+1$ **也成立**

证明一般系数

接着用数学归纳法证明一般系数 $a_{l-2k} = (-)^k \dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ (1)

证明 由 $a_l = \dfrac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \dfrac{(-)^0(2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$ 可知，(1) **式对** $k=0$ **成立**

当 $l \geq 2n+2$ 时，假设 (1) **式对** $k=n$ **成立**，则 $a_{l-2n} = \dfrac{(-)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}$

$$\begin{aligned}
a_{l-2n-2} &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{(l-2n-l-2)(l-2n+l-1)} a_{l-2n} \\
&= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} \\
&= \frac{1}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n 2(l-n)(2l-2n-1)(2l-2n-2)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n-2)!} \\
&= \frac{(-)^{n+1}(2l-2n-2)!}{2^l (n+1)!(l-n-1)!(l-2n-2)!}
\end{aligned}$$

可见，(1) **式对** $k=n+1$ **也成立**

于是，(1) **式对** $k=0,1,2,\cdots,[l/2]$ **成立** ■

$$[l/2] \equiv \begin{cases} \dfrac{l}{2}, & l \text{ 是偶数} \\ \dfrac{l}{2}-\dfrac{1}{2}, & l \text{ 是奇数} \end{cases}$$

$k=[l/2] \in \mathbb{N}$ 满足 $2k \leq l$

Legendre 多项式的显式

- 显然，**一般系数** $a_{l-2k} = (-)^k \dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ 只对 $l-2k \geq 0$ 成立
- 因此 $k \leq l/2$，故 $k \in \mathbb{N}$ **的求和上限为** $[l/2]$，即 $\leq l/2$ **的最大整数**
- 将代入**一般系数**代入 $\mathrm{P}_l(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} a_k x^k = \sum_{k=0}^{[l/2]} a_{l-2k} x^{l-2k}$
- 就得到 **Legendre 多项式**的**显式**

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}\, x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Legendre 多项式的显式

- 显然，**一般系数** $a_{l-2k} = (-)^k \dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$ 只对 $l-2k \geq 0$ 成立
- 因此 $k \leq l/2$，故 $k \in \mathbb{N}$ **的求和上限为** $[l/2]$，即 $\leq l/2$ **的最大整数**
- 将代入**一般系数**代入 $\mathrm{P}_l(x) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{[l/2]} a_{l-2k} x^{l-2k}$
- 就得到 **Legendre 多项式**的**显式**

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

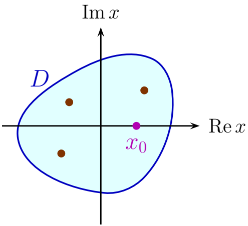
- 综上，**Legendre 方程** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{dx}\right] + \lambda P = 0$ 在**自然边界条件** $|P(\pm 1)| < \infty$ 下的**本征值**是 $\lambda = l(l+1)$ $(l \in \mathbb{N})$，相应的**本征函数**是 l **次 Legendre 多项式** $\mathrm{P}_l(x)$
- 当 $\lambda = l(l+1)$ 时，另一个线性独立解 $\mathrm{Q}_l(x)$ 是**无穷级数**，它在 $x = \pm 1$ 处具有 $\ln(1 \mp x)$ 的**奇性**

§3 正则奇点邻域的级数解法

如前所述，对于二阶线性齐次常微分方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$，假设在复平面的某个区域 D 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的

那么，如果 D 内某点 x_0 是 $p(x)$ 和(或) $q(x)$ 的奇点，那就只能是极点或本性奇点

x_0 不会是支点；至于可去奇点则可当作常点，相应的系数展开式是 Taylor 级数



§3　正则奇点邻域的级数解法

如前所述，对于二阶线性齐次常微分方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$，假设在复平面的某个区域 D 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的

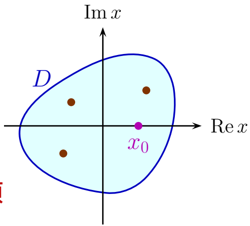
那么，如果 D 内某点 x_0 是 $p(x)$ 和(或) $q(x)$ 的奇点，那就只能是极点或本性奇点

x_0 不会是支点；至于可去奇点则可当作常点，相应的系数展开式是 Taylor 级数

一般地，有

$$p(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k(x-x_0)^k,\quad q(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q_k(x-x_0)^k,$$

$$0<|x-x_0|<R$$



若 x_0 是极点，则以上 Laurent 展开式中只有有限个负幂项

可以证明，此时方程的两个线性独立解具有下列形式：

$$y_1(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(x-x_0)^{k+s_1},\quad y_2(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(x-x_0)^{k+s_2}+\beta y_1(x)\ln(x-x_0)$$

奇点邻域的级数解

$$y_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, \quad y_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0)$$

- 上式中 s_1 和 s_2 通常**不是整数**，最一般情况下可以是**复数**
- 所以 x_0 一般来说是**解**的**支点**
- 当 $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$ 时，可能有 $\beta \neq 0$，即**第二解**中可能出现**对数函数**；否则 $\beta = 0$
- 将这样的解式代入**方程** $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$
- 将得到一系列**递推关系**，原则上由此可以确定 s_1、s_2 和系数 a_k、b_k、β 等
- 但是，由于每个递推关系都涉及**无穷多个系数**，实际计算**很困难**，甚至**不可能**

正则解

- 比较简单的一种情况是上面的解式中只有**有限个 $k<0$ 的项**
- 这时适当调整 s_1 和 s_2，使 k 从 0 开始求和，总可以将解式写成

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x)\ln(x-x_0), \quad b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0$$

- 这样的解称为**正则解**

Fuchs 定理和正则奇点

方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ 是否存在正则解，有一个还是两个正则解，取决于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质，与下面的 **Fuchs 定理**有关

Fuchs 定理 方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ 在 x_0 处有两个正则解的充要条件是 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 解析

Lazarus Fuchs
(1833–1902)

Fuchs 定理和正则奇点

方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ 是否存在正则解，有一个还是两个正则解，取决于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质，与下面的 Fuchs 定理有关

Fuchs 定理 方程 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ 在 x_0 处有两个正则解的充要条件是 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 解析

上述充要条件就是说，$p(x)$ 以 x_0 为不高于一阶的极点，$q(x)$ 以 x_0 为不高于二阶的极点

这样的奇点称为方程的正则奇点

Fuchs 定理也可以叙述为：方程在 x_0 处有两个正则解的充要条件是 x_0 为方程的正则奇点

Lazarus Fuchs
(1833–1902)

关于正则解的说明

正则解 $\begin{cases} y_1(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x)\ln(x-x_0), \quad b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0 \end{cases}$

- 这里不研究 **Fuchs 定理**的证明，只补充以下几点说明

1. s_1 和 s_2 称为**正则奇点**或**正则解**的**指标**，$\mathrm{Re}\, s_1 \geq \mathrm{Re}\, s_2$，即**第一解**对应于**指标实部较大者**，它**总不包含对数函数**

关于正则解的说明

正则解 $\begin{cases} y_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x-x_0), \quad b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0 \end{cases}$

这里不研究 **Fuchs 定理**的证明，只补充以下几点说明

1. s_1 和 s_2 称为**正则奇点**或**正则解**的**指标**，$\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$，即**第一解**对应于**指标实部较大者**，它**总不包含对数函数**
2. 若 $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \cdots$，则 $\beta = 0$，即**第二解必定不包含对数函数**
3. 若 $s_1 = s_2$，则 $\beta \neq 0$，即**第二解必定包含对数函数**（否则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 相同）
4. 若 $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}^+$，则**第二解可能包含对数函数**，也**可能不包含对数函数**，即 β **是否为零不是确定的**，需要通过具体求解得知

将**正则解**的形式和 $p(x)$、$q(x)$ 的 **Laurent 展开式**代入**方程**，可得一系列**递推关系**，从而确定正则解中的**系数**和**指标**

§4 Bessel 方程

§4.1 Bessel 方程的级数解

- 上一章在柱坐标下对 Laplace 方程分离变量时，遇到 Bessel 方程及其本征值问题
- 对波动或热传导方程分离变量，也会遇到类似的问题
- Bessel 方程也没有简单的解法，所以只能考虑级数解
- 数学上，Bessel 方程的一般形式为

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

- 其中 ν 称为 Bessel 方程的阶，它可以是复数

§4 Bessel 方程

§4.1 Bessel 方程的级数解

- 上一章在柱坐标下对 Laplace 方程分离变量时，遇到 Bessel 方程及其本征值问题
- 对波动或热传导方程分离变量，也会遇到类似的问题
- Bessel 方程也没有简单的解法，所以只能考虑级数解
- 数学上，Bessel 方程的一般形式为

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

- 其中 ν 称为 Bessel 方程的阶，它可以是复数
- 若将 ν 换为 $-\nu$，方程不变，故可设 $\operatorname{Re}\nu \geq 0$ 而不失一般性
- 与标准形式 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 比较可见

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$$

- 显然，$x = 0$ 是方程的正则奇点，而且在复平面上没有其它奇点

若 $\operatorname{Re}\nu < 0$，可令 $\nu' = -\nu$，将问题转化为 $\operatorname{Re}\nu' > 0$ 的情况来讨论

代入级数解

在 $x = 0$ 的去心邻域内，可设级数解的形式为 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}, \quad a_0 \neq 0$

这是正则解中第一解的形式，也是第二解在 $\beta = 0$ 时的形式

代入级数解

在 $x=0$ 的去心邻域内，可设级数解的形式为 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+s},\quad a_0\neq 0$

这是正则解中第一解的形式，也是第二解在 $\beta=0$ 时的形式

对级数解求导，有

$$x^2y''+xy'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)(k+s-1)a_kx^{k+s}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)a_kx^{k+s}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)^2a_kx^{k+s}$$

Bessel 方程 $y''+\dfrac{1}{x}y'+\left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$ 两边乘以 x^2，推出

$$\begin{aligned}0 &= x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=\sum_{k=0}^{\infty}[(k+s)^2-\nu^2]a_kx^{k+s}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+s+2}\\ &=(s^2-\nu^2)a_0x^s+[(s+1)^2-\nu^2]a_1x^{s+1}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+s)^2-\nu^2]a_kx^{k+s}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+s+2}\end{aligned}$$

系数关系

- 由 $k \to k+2$ 得 $\sum_{k=2}^{\infty}[(k+s)^2-\nu^2]a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty}[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}x^{k+s+2}$
- Bessel 方程化为

$$(s^2-\nu^2)a_0x^s+[(s+1)^2-\nu^2]a_1x^{s+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\{[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}+a_k\}x^{k+s+2}=0$$

- 左边各项系数必须为零，即

$$(s^2-\nu^2)a_0=0, \quad [(s+1)^2-\nu^2]a_1=0$$
$$[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}+a_k=0$$

系数关系

由 $k \to k+2$ 得 $\sum_{k=2}^{\infty}[(k+s)^2-\nu^2]a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty}[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}x^{k+s+2}$

Bessel 方程化为

$$(s^2-\nu^2)a_0x^s+[(s+1)^2-\nu^2]a_1x^{s+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\{[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}+a_k\}x^{k+s+2}=0$$

左边各项系数必须为零，即

$$(s^2-\nu^2)a_0=0, \quad [(s+1)^2-\nu^2]a_1=0$$
$$[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}+a_k=0$$

由于 $a_0 \neq 0$，有 $s^2-\nu^2=0$，这是决定指标的方程

因 $\operatorname{Re}\nu \geq 0$ 且 $\operatorname{Re}s_1 \geq \operatorname{Re}s_2$，两个根为 $s_1=\nu$ 和 $s_2=-\nu$，故 $s_1-s_2=2\nu$

暂时假定 ν 不等于整数或半奇数，则 $s_1-s_2\neq 0,1,2,\cdots$，按上一节的一般理论，两个正则解均不包含对数函数

ν 为整数或半奇数的情况将在随后各小节讨论

第一解

- 首先讨论**第一解** $y_1(x)$，对应于 $s_1 = \nu$
- $0 = [(s_1+1)^2 - \nu^2]a_1 = [(\nu+1)^2 - \nu^2]a_1$ 表明 $a_1 = 0$
- 由**系数关系** $[(k+s_1+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+\nu+2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_k}{(k+2\nu+2)(k+2)}$$

第一解

❤️ 首先讨论**第一解** $y_1(x)$，对应于 $s_1=\nu$

🏈 $0=[(s_1+1)^2-\nu^2]a_1=[(\nu+1)^2-\nu^2]a_1$ 表明 $a_1=0$

🏀 由**系数关系** $[(k+s_1+2)^2-\nu^2]a_{k+2}+a_k=0$ 得到**递推关系**

$$a_{k+2}=-\frac{a_k}{(k+\nu+2)^2-\nu^2}=-\frac{a_k}{(k+2\nu+2)(k+2)}$$

⛹️ 由此**递推关系**和 $a_1=0$ 推出 $a_{2k+1}=0\ (k\in\mathbb{N})$，故

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+s_1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k+\nu}$$

🤾 反复利用**递推关系**又可推出

$$\begin{aligned}
a_{2k}&=-\frac{a_{2k-2}}{(2\nu+2k)\cdot 2k}=(-)^2\frac{a_{2k-4}}{(2\nu+2k)(2\nu+2k-2)\cdot 2k(2k-2)}=\cdots\\
\text{共 } k \text{ 次递推 ➡️ }&=(-)^k\frac{a_0}{(2\nu+2k)(2\nu+2k-2)\cdots(2\nu+2)\cdot 2k(2k-2)\cdots 2}\\
&=(-)^k\frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\cdot k!}
\end{aligned}$$

Γ 函数

- 利用 Γ 函数可以把因子 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)$ 表达成紧凑的形式
- Γ 函数定义为 $\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\ (\mathrm{Re}\,z>0)$，满足

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z}\mathrm{d}t=-\int_0^\infty t^{z}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-t^z\mathrm{e}^{-t}\big|_0^\infty+z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=z\Gamma(z)$$

Γ 函数

利用 Γ **函数**可以把因子 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)$ 表达成紧凑的形式

Γ 函数定义为 $\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \ (\mathrm{Re}\, z>0)$，满足

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z}\mathrm{d}t=-\int_0^\infty t^{z}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-t^z\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty+z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=z\Gamma(z)$$

解析开拓到 $\mathrm{Re}\, z<0$，可证明 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 仍成立，对 $-n<\mathrm{Re}\, z<0$ 有

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)z}=\cdots=\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$

从而，$z=0,-1,-2,\cdots$ 是 Γ 函数的**单极点**，有 $\lim\limits_{z\to-m}\dfrac{1}{\Gamma(z)}=0 \ (m\in\mathbb{N})$

Γ 函数

- 利用 Γ 函数可以把因子 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)$ 表达成紧凑的形式
- Γ 函数定义为 $\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\ (\operatorname{Re} z>0)$，满足

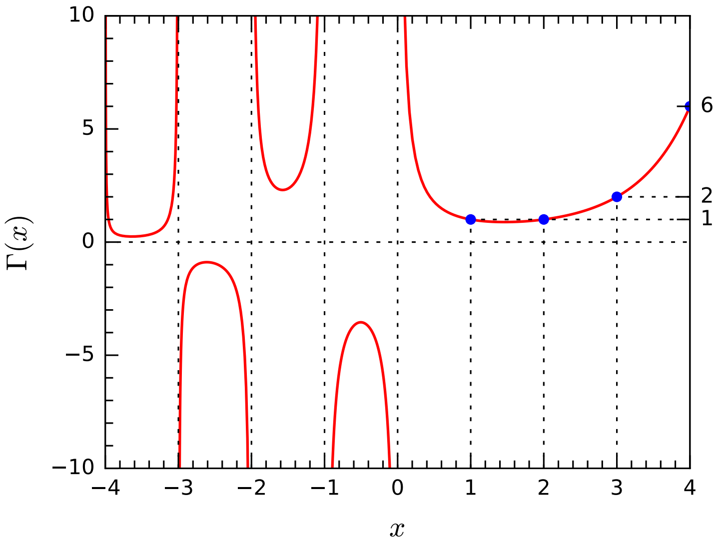
$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z}\mathrm{d}t=-\int_0^\infty t^z\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-t^z\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty+z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=z\Gamma(z)$$

- **解析开拓**到 $\operatorname{Re} z<0$，可证明 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 仍成立，对 $-n<\operatorname{Re} z<0$ 有

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)z}=\cdots=\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$

- 从而，$z=0,-1,-2,\cdots$ 是 Γ 函数的**单极点**，有 $\lim\limits_{z\to-m}\frac{1}{\Gamma(z)}=0\ (m\in\mathbb{N})$
- 由 $\Gamma(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1,\quad \Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2!,\quad\cdots$
- 得 $\Gamma(n+1)=n!\ (n\in\mathbb{N})$，可见 Γ **函数**是**阶乘**在复变函数中的**推广**

实轴上的 Γ 函数图像



Bessel 函数

反复利用 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，推出

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+k+1) &= (\nu+k)\Gamma(\nu+k)=(\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1)=\cdots\\ &= (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$

故 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)=\dfrac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$，从而

$$a_{2k}=(-)^k\frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\cdot k!}=(-)^k\frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Bessel 函数

反复利用 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，推出

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+k+1) &= (\nu+k)\Gamma(\nu+k)=(\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1)=\cdots \\ &= (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$

故 $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)=\dfrac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$，从而

$$a_{2k}=(-)^k\frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\cdot k!}=(-)^k\frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

第一解化为 $y_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k+\nu}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-)^k\dfrac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}x^{2k+\nu}$

取 $a_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，这样得到的**第一解**称为 ν **阶 Bessel 函数**，具体形式为

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

应该强调的是，**第一解** $y_1(x)=\mathrm{J}_\nu(x)$ 对于**任意** $\nu\in\mathbb{C}$ 都是适用的

第二解

💙 其次讨论**第二解** $y_2(x)$，对应于 $s_2 = -\nu$

🌊 此时 x^{s_2+1} **项系数**为 $0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = [(-\nu+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1$

🏄 已经假定 ν **不等于整数或半奇数**，有 $\nu \neq \dfrac{1}{2}$，故 $a_1 = 0$ 仍成立

🏊 **重复第一解推导过程**，将其中 ν 换为 $-\nu$，取 $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，即得**第二解**

$$y_2(x) = \mathrm{J}_{-\nu}(x)$$

第二解

- 其次讨论**第二解** $y_2(x)$，对应于 $s_2 = -\nu$
- 此时 x^{s_2+1} **项系数为** $0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = [(-\nu+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1$
- 已经假定 ν **不等于整数或半奇数**，有 $\nu \neq \frac{1}{2}$，故 $a_1 = 0$ 仍成立
- **重复第一解推导过程**，将其中 ν 换为 $-\nu$，取 $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，即得**第二解**

$$y_2(x) = \mathrm{J}_{-\nu}(x)$$

- 只要 ν **不为整数**，$\mathrm{J}_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$ 的定义就是**恰当**的
- 此时，$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 与 $\mathrm{J}_{\nu}(x)$ 是**线性独立**的
- 总结起来，当 ν **不等于整数或半奇数**时，**Bessel 方程**的**两个线性独立解**为

$$y(x) = \{\mathrm{J}_{\nu}(x), \mathrm{J}_{-\nu}(x)\}$$

Bessel 函数的性质

- 当 ν **不等于整数或半奇数**时
- 显然 $x=0$ 是 **Bessel 函数** $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\pm\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}$ 的**支点**
- 将 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 中的 $(x/2)^{\pm\nu}$ **因子**提出来，剩下的因子是**幂级数**

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu}\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\pm\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Bessel 函数的性质

🚲 当 ν **不等于整数或半奇数**时

🚴 显然 $x=0$ 是 **Bessel 函数** $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\pm\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}$ 的**支点**

🚵 将 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 中的 $(x/2)^{\pm\nu}$ **因子**提出来，剩下的因子是**幂级数**

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu}\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\pm\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

🏍 按照**递推关系** $a_{k+2}=-\dfrac{a_k}{(k+2\nu+2)(k+2)}$，有

$$l=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|-\frac{1}{(k+2\nu+2)(k+2)}\right|=0$$

🏎 根据 **d'Alembert 计算公式**，**该幂级数**的**收敛半径**为 $R=\dfrac{1}{l}=\infty$

🏁 因此，$\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 在沿 $x=0$ 至 $x=\infty$ 适当割破的 x 平面上是**单值解析**的

§4.2 半奇数阶 Bessel 方程

- 本小节考虑**半奇数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = \dfrac{2l-1}{2} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots \quad (l \in \mathbb{N}^+)$
- 此时 $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$
- 根据上一节的一般理论，**第二解可能会包含对数函数**
- 不过，下面的具体求解过程表明，**第二解**实际上**不包含对数函数**

§4.2 半奇数阶 Bessel 方程

- 本小节考虑**半奇数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = \dfrac{2l-1}{2} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots \quad (l \in \mathbb{N}^+)$
- 此时 $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$
- 根据上一节的一般理论，**第二解可能**会**包含对数函数**
- 不过，下面的具体求解过程表明，**第二解**实际上**不包含对数函数**
- **当 $\nu = 1/2$ 时**，**第一解**当然就是 $y_1(x) = \mathrm{J}_{1/2}(x)$
- **第二解**对应于 $s_2 = -\nu = -1/2$，此时 x^{s_2+1} **项**的**系数**为

$$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1 = 0 \cdot a_1$$

- 由此可见，a_1 可以**任取**，那么**取** $a_1 = 0$ 显然是最方便的
- 这样就可以像上一小节一样求得**第二解**为 $y_2(x) = \mathrm{J}_{-1/2}(x)$

§4.2 半奇数阶 Bessel 方程

- 本小节考虑**半奇数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = \dfrac{2l-1}{2} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots \quad (l \in \mathbb{N}^+)$
- 此时 $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$
- 根据上一节的一般理论，**第二解可能**会**包含对数函数**
- 不过，下面的具体求解过程表明，**第二解**实际上**不包含对数函数**
- **当 $\nu = 1/2$ 时**，**第一解**当然就是 $y_1(x) = \mathrm{J}_{1/2}(x)$
- **第二解**对应于 $s_2 = -\nu = -1/2$，此时 x^{s_2+1} **项**的**系数**为

$$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1 = 0 \cdot a_1$$

- 由此可见，a_1 可以**任取**，那么**取** $a_1 = 0$ 显然是最方便的
- 这样就可以像上一小节一样求得**第二解**为 $y_2(x) = \mathrm{J}_{-1/2}(x)$
- 如果**不取** $a_1 = 0$，则求得的解将包含两个任意常数 a_0 和 a_1
- 且包含 a_1 的部分与 $\mathrm{J}_{1/2}(x)$ 成正比，即得到**通解** $y(x) = a_0\mathrm{J}_{-1/2}(x) + a_1\mathrm{J}_{1/2}(x)$
- 由此可见，**取** $a_1 = 0$ 而得**第二解**是**恰当**的

$\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

当 $l \geq 2$ 时，$\nu = \dfrac{2l-1}{2} = \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots$，第一解仍然是 $y_1(x) = \mathrm{J}_\nu(x)$

对于第二解，$s_2 = -\nu$，$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$，且

$$(k+s_2+2)^2 - \nu^2 = (k-\nu+2)^2 - \nu^2 = (k+2)(k-2\nu+2) = (k+2)(k-2l+3)$$

由系数关系 $[(k+s_2+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到递推关系

$$(k+2)(k-2l+3)a_{k+2} = -a_k$$

$\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

当 $l \geq 2$ 时，$\nu = \dfrac{2l-1}{2} = \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots$，第一解仍然是 $y_1(x) = \mathrm{J}_\nu(x)$

对于第二解，$s_2 = -\nu$，$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$，且

$$(k+s_2+2)^2 - \nu^2 = (k-\nu+2)^2 - \nu^2 = (k+2)(k-2\nu+2) = (k+2)(k-2l+3)$$

由系数关系 $[(k+s_2+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到递推关系

$$(k+2)(k-2l+3)a_{k+2} = -a_k$$

从 $a_1 = 0$ 开始递推，得 $a_3 = a_5 = \cdots = a_{2l-3} = 0$

然后遇到 $k = 2l-3$，则 $(k+2)(k-2l+3) = 0$

递推关系化为 $0 \cdot a_{2l-1} = -a_{2l-3} = 0$，从而 a_{2l-1} 可以任取

如前取 $a_{2l-1} = 0$，则所有 $a_{2k+1} = 0 \ (k \in \mathbb{N})$，求得第二解为 $y_2(x) = \mathrm{J}_{-\nu}(x)$

$\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

- 当 $l \geq 2$ 时，$\nu = \dfrac{2l-1}{2} = \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots$，第一解仍然是 $y_1(x) = \mathrm{J}_\nu(x)$
- 对于第二解，$s_2 = -\nu$，$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu+1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$，且

$$(k+s_2+2)^2 - \nu^2 = (k-\nu+2)^2 - \nu^2 = (k+2)(k-2\nu+2) = (k+2)(k-2l+3)$$

- 由系数关系 $[(k+s_2+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到递推关系

$$(k+2)(k-2l+3)a_{k+2} = -a_k$$

- 从 $a_1 = 0$ 开始递推，得 $a_3 = a_5 = \cdots = a_{2l-3} = 0$
- 然后遇到 $k = 2l-3$，则 $(k+2)(k-2l+3) = 0$
- 递推关系化为 $0 \cdot a_{2l-1} = -a_{2l-3} = 0$，从而 a_{2l-1} 可以任取
- 如前取 $a_{2l-1} = 0$，则所有 $a_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$，求得第二解为 $y_2(x) = \mathrm{J}_{-\nu}(x)$
- 总结起来，当 ν 为半奇数时，Bessel 方程的两个线性独立解仍然是

$$y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{J}_{-\nu}(x)\}$$

§4.3 整数阶 Bessel 方程

- 本小节考虑**整数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = m \in \mathbb{N}$，此时 $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$
- 当 $m = 0$ 时，有 $s_1 = s_2 = 0$，只能求得**一个**形如 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的解
- 它是**第一解** $y_1(x) = \mathrm{J}_0(x)$，根据上一节的一般理论，**第二解必定包含对数函数**

§4.3 整数阶 Bessel 方程

- 本小节考虑**整数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = m \in \mathbb{N}$，此时 $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$
- **当 $m = 0$ 时**，有 $s_1 = s_2 = 0$，只能求得**一个**形如 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的解
- 它是**第一解** $y_1(x) = \mathrm{J}_0(x)$，根据上一节的一般理论，**第二解必定包含对数函数**
- **当 $m \in \mathbb{N}^+$ 时**，**第一解**为 $y_1(x) = \mathrm{J}_m(x)$
- 对于**第二解**，$s_2 = -m$，$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2m+1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$
- 由**系数关系** $[(k+s_2+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$-a_k = [(k-m+2)^2 - m^2]a_{k+2} = (k+2)(k-2m+2)a_{k+2}$$

§4.3 整数阶 Bessel 方程

本小节考虑**整数阶 Bessel 方程**，即 $\nu = m \in \mathbb{N}$，此时 $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$

当 $m = 0$ 时，有 $s_1 = s_2 = 0$，只能求得**一个**形如 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的解

它是**第一解** $y_1(x) = \mathrm{J}_0(x)$，根据上一节的一般理论，**第二解必定包含对数函数**

当 $m \in \mathbb{N}^+$ 时，**第一解**为 $y_1(x) = \mathrm{J}_m(x)$

对于**第二解**，$s_2 = -m$，$0 = [(s_2+1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2m+1)a_1$ 表明 $a_1 = 0$

由**系数关系** $[(k+s_2+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ 得到**递推关系**

$$-a_k = [(k-m+2)^2 - m^2]a_{k+2} = (k+2)(k-2m+2)a_{k+2}$$

从 $a_1 = 0$ 开始**递推**得到**所有** $a_{2k+1} = 0\ (k \in \mathbb{N})$

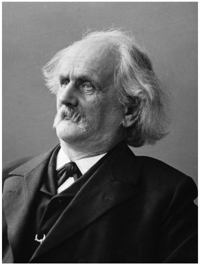
从 $a_0 \neq 0$ 开始**递推**得到**正比于** a_0 的 $a_2, a_4, \cdots, a_{2m-2}$，然后遇到 $k = 2m-2$，则 $(k+2)(k-2m+2) = 0$，**递推关系**化为 $0 \cdot a_{2m} = -a_{2m-2} \propto a_0 \neq 0$，**矛盾**

于是，**第二解不可能**具有 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ 的形式，因而**必定包含对数函数**

m 阶 Neumann 函数

- 对于 $\nu = m \in \mathbb{N}$，设**第二解**的形式为 $y_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-m} + \beta \mathrm{J}_m(x) \ln x$，代入 **Bessel 方程** $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ 求解，过程见 **§4.5 或 §4.6 选读内容**
- 适当选取其中可以任取的两个常数，最终求得**第二解** $y_2(x) = \mathrm{N}_m(x)$
- 它称为 m **阶 Neumann 函数**，具体形式为

$$\mathrm{N}_m(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{J}_m(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} [\psi(k+m+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$



Carl Neumann
(1832–1925)

- 当 $m = 0$ 时，规定**去掉第二项有限和**
- 这里出现的 ψ **函数**定义为 $\psi(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d} \ln \Gamma(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

- 由 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 可推出 $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$
- 此外，$\psi(1) = -\gamma$，其中 **Euler 常数**为

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.577\,215\,664\,901\cdots$$

- 在不同的书上，**Neumann 函数**的形式可能略有不同，但实质上是一样的

整数阶 Bessel 方程的解

- 由 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 可推出 $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$
- 此外，$\psi(1) = -\gamma$，其中 **Euler 常数**为

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.577\,215\,664\,901\cdots$$

- 在不同的书上，**Neumann 函数**的形式可能略有不同，但实质上是一样的
- 总结起来，当 $\nu = m$ **为整数**时，**Bessel 方程**的**两个线性独立解**是

$$y(x) = \{\mathrm{J}_m(x), \mathrm{N}_m(x)\}$$

- **物理上最常遇到**的就是这种情况
- 由于 **Neumann 函数包含对数函数** $\ln\dfrac{x}{2}$，**第二解** $\mathrm{N}_m(x)$ **在** $x = 0$ **处有奇性**
- 所以，如果**求解区域包括** $x = 0$ **点**，就应该**舍弃第二解** $\mathrm{N}_m(x)$

§4.4 Neumann 函数的一般定义

- 对于**一般**的 $\nu \in \mathbb{C}$，可以将 ν **阶 Neumann 函数**定义为

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

- **当** $\nu \neq m \in \mathbb{N}$ **时**，它显然**与** $\mathrm{J}_\nu(x)$ **线性独立**
- 故此时 **Bessel 方程**的**两个线性独立解**亦可取为 $y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)\}$

§4.4 Neumann 函数的一般定义

对于**一般**的 $\nu \in \mathbb{C}$，可以将 ν 阶 **Neumann 函数**定义为

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

当 $\nu \neq m \in \mathbb{N}$ 时，它显然**与 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 线性独立**

故此时 **Bessel 方程**的**两个线性独立解**亦可取为 $y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)\}$

当 $\nu \to 0$ 时，**定义式**成为 $\dfrac{0}{0}$ **型**

当 $\nu \to m \in \mathbb{N}^+$ 时，令 $\mathrm{J}_{-m}(x) \equiv \lim\limits_{\nu\to m} \mathrm{J}_{-\nu}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k-m+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-m}$

$k \leq m-1$ 时，$k-m+1 \leq 0$，由 $\dfrac{1}{\Gamma(-n)} \to 0\ (n \in \mathbb{N})$ 得 $\dfrac{1}{\Gamma(k-m+1)} \to 0$

故 $k \leq m-1$ **各项**对求和**没有贡献**，利用 $\Gamma(k-m+1) = (k-m)!\ (k \geq m)$，得

$$\mathrm{J}_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

$\nu \to m \in \mathbb{N}^+$ 的情况

- 作**替换** $k \to k+m$，推出

$$\mathrm{J}_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{k+m}}{(k+m)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+m)-m}$$

$$= (-)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = \mathrm{J}_m(x)\cos m\pi$$

- 最后一步用到 $\cos m\pi = (-)^m$ 和

$$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

- 可见，**当 $\nu \to m \in \mathbb{N}^+$ 时**，$\mathrm{N}_\nu(x) = \dfrac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$ 也成为 $\dfrac{0}{0}$ **型**

任意 ν 阶 Bessel 方程的解

当 $\nu \to m \in \mathbb{N}$ 时，应用 **L'Hospital 法则**求出上述 $\frac{0}{0}$ **型极限**，得到

$$\lim_{\nu \to m} \mathrm{N}_\nu(x) = \mathrm{N}_m(x)$$

相关证明见 **§4.7 选读内容**

可见，ν **阶 Neumann 函数**确实是**整数阶 Neumann 函数**的**推广**

Guillaume de L'Hospital
(1661–1704)

任意 ν 阶 Bessel 方程的解

- 当 $\nu \to m \in \mathbb{N}$ 时，应用 **L'Hospital 法则**求出上述 $\dfrac{0}{0}$ **型极限**，得到

$$\lim_{\nu\to m} \mathrm{N}_\nu(x) = \mathrm{N}_m(x)$$

- 相关证明见 **§4.7 选读内容**
- 可见，ν **阶 Neumann 函数**确实是**整数阶 Neumann 函数**的**推广**
- 总结起来，对于**任意** $\nu \in \mathbb{C}$ 时，**Bessel 方程**的**两个线性独立解**总可以取为

$$y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)\}$$

- **当 ν 为半奇数** $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots$ **时**，$\cos\nu\pi = 0$，有

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = -\frac{\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

- 即 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 只**相差一个常数因子**

Guillaume de L'Hospital
(1661–1704)