量 子 场 论

第 8 章　量子电动力学

8.6 节　Compton 散射

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 12 月 20 日

8.6 节 Compton 散射

- 电子与光子的散射过程 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射**
- 1923 年，Arthur Compton 用 **X 射线**照射核外电子，发现 X 射线因失去能量而波长变长
- 他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，因而核外电子可以看成是自由的
- 根据相对论运动学，Compton 推导出光子的波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系 $\Delta\lambda = \dfrac{2\pi}{m_e}(1-\cos\theta)$
- 他的实验证实了这条公式，为光的粒子性提供了直接证据

Arthur Holly Compton
(1892–1962)

8.6 节 Compton 散射

- 电子与光子的散射过程 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射**
- 1923 年，Arthur Compton 用 **X 射线**照射**核外电子**，发现 X 射线因**失去能量**而**波长变长**
- 他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，因而核外电子可以看成是**自由**的
- 根据**相对论运动学**，Compton 推导出光子的波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系 $\Delta\lambda = \dfrac{2\pi}{m_e}(1-\cos\theta)$
- 他的实验证实了这条公式，为光的**粒子性**提供了直接证据
- 另一方面，对于**低能电磁辐射**与**电子**散射的过程，Joseph Thomson 根据**经典电磁学**推导出微分散射截面

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \pi r_e^2(1+\cos^2\theta) = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta)}$$

- $r_e \equiv \alpha/m_e$ 是电子的**经典半径**
- **QED** 将给出这条微分截面公式的**相对论修正**

Arthur Holly Compton
(1892–1962)

Joseph John Thomson
(1856–1940)

Compton 散射振幅

- Compton 散射在 QED 领头阶具有 s 通道和 u 通道的 Feynman 图，不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= \varepsilon_\mu^*(p_2)\,\bar{u}(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,\frac{\mathrm{i}(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_1)\,\varepsilon_\nu(k_2)$$

$$+\,\varepsilon_\nu(k_2)\,\bar{u}(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,\frac{\mathrm{i}(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1)\,\varepsilon_\mu^*(p_2)$$

$$= -\mathrm{i}e^2\varepsilon_\mu^*(p_2)\,\varepsilon_\nu(k_2)\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1)$$

- 两幅图的电子线拓扑结构相同，可通过连续变形相互转换，因而相对符号为正
- 这里没有显明写出振幅对螺旋度的依赖，只将极化矢量记成在壳四维动量的函数

化简振幅

根据**质壳关系** $k_1^2 = m_e^2$ 和 $k_2^2 = p_2^2 = 0$，传播子的分母化为

$$(k_1 + k_2)^2 - m_e^2 = 2\, k_1 \cdot k_2, \quad (k_1 - p_2)^2 - m_e^2 = -2\, k_1 \cdot p_2$$

利用 $\not{k}_1 \gamma^\nu = 2k_1^\nu - \gamma^\nu \not{k}_1$ 和运动方程 $(\not{k}_1 - m_e)u(k_1) = 0$，有

$$\begin{aligned}(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu u(k_1) &= (2k_1^\nu - \gamma^\nu \not{k}_1 + m_e\gamma^\nu)u(k_1) \\ &= 2k_1^\nu u(k_1) - \gamma^\nu(\not{k}_1 - m_e)u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1)\end{aligned}$$

利用这些结果化简振幅，得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\mathcal{M} &= -\mathrm{i}e^2 \varepsilon_\mu^*(p_2)\, \varepsilon_\nu(k_2)\, \bar{u}(p_1) \left[\frac{\gamma^\mu(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e)\gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e)\gamma^\mu}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\ &= -\mathrm{i}e^2 \varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\bar{u}(p_1) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\, k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\, k_1 \cdot p_2} \right) u(k_1)\end{aligned}$$

8.6.1 小节 光子极化求和与 Ward 恒等式

- 接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算**非极化**振幅模方
- 这将涉及**对光子螺旋度求和**，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}$$

- 第二步用到**极化矢量求和关系**，本小节讨论光子极化求和的**简化方法**

8.6.1 小节 光子极化求和与 Ward 恒等式

- 接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算**非极化**振幅模方
- 这将涉及**对光子螺旋度求和**，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}$$

- 第二步用到**极化矢量求和关系**，本小节讨论光子极化求和的**简化方法**
- 考虑**出射**一个动量为 p^μ 的**光子**的**任意 QED 过程**，不变振幅为

$$= \mathrm{i}\mathcal{M}(p) = \mathrm{i}M^\mu(p)\,\varepsilon_\mu^*(p)$$

- 对**光子极化求和**，振幅模方变成

$$\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) M^\mu(p) M^{\nu *}(p)$$

$$= \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}\right] M^\mu(p) M^{\nu *}(p)$$

守恒流方程的推论

- QED 相互作用项为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J^\mu_{\text{EM}}$，其中**电磁流** $J^\mu_{\text{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$
- 因此，上述过程的 T 矩阵元具有以下形式，

$$\langle f | \mathrm{i}T | i \rangle \propto \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \langle \cdots ; \mathbf{p}, \lambda | \, \mathsf{N}[A_\mu(x_1) J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$$

$$= \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$$

- 可见 $M^\mu(p) \propto \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$

守恒流方程的推论

- QED 相互作用项为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J^\mu_{\text{EM}}$，其中电磁流 $J^\mu_{\text{EM}} = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$
- 因此，上述过程的 T 矩阵元具有以下形式，

$$\langle f | \mathrm{i}T | i \rangle \propto \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \langle \cdots ; \mathbf{p}, \lambda | \, \mathsf{N}[A_\mu(x_1) J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$$

$$= \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$$

- 可见 $M^\mu(p) \propto \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$
- 在经典层面上，Noether 定理表明电磁流 J^μ_{EM} 满足守恒流方程 $\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}} = 0$
- 如果假设 $\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}} = 0$ 在量子层面上（即视 J^μ_{EM} 为算符）也成立，就可以推出

$$0 = \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$$

分部积分 ⬇️

$$= -\int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, (\partial_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}) \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle$$

$$= -\mathrm{i}p_\mu \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \, \langle \cdots | \, \mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1) \cdots] \, | i \rangle \propto p_\mu M^\mu(p)$$

Ward 恒等式

于是得到 **Ward 恒等式**

$$p_\mu M^\mu(p) = 0$$

$$= \mathrm{i}M^\mu(p)\,\varepsilon^*_\mu(p)$$

它对于**入射光子**的情况同样成立

Ward 恒等式表明，只要将**不变振幅**中任何一个**入射**或**出射光子**的**极化矢量**替换成相应的**四维动量**，则结果为**零**

John Clive Ward
(1924–2000)

Ward 恒等式

于是得到 **Ward 恒等式**

$$p_\mu M^\mu(p) = 0$$

$= \mathrm{i}M^\mu(p)\,\varepsilon^*_\mu(p)$

John Clive Ward
(1924–2000)

它对于**入射光子**的情况同样成立

Ward 恒等式表明，只要将**不变振幅**中任何一个**入射**或**出射光子**的**极化矢量**替换成相应的**四维动量**，则结果为**零**

虽然这里利用了**经典**的**守恒流方程**，但实际上可以在**量子场论**中**严格证明** Ward 恒等式，相关证明留待后文叙述

Ward 恒等式是**电磁流守恒**在**量子**层面上的体现，与 QED 的**规范对称性**密切相关

规范变换 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ 在动量空间中体现为 $\varepsilon^*_\mu(p) \to \varepsilon^*_\mu(p) + \mathrm{i}p_\mu$

因此振幅 $\varepsilon^*_\mu(p)M^\mu(p)$ 的**规范不变性**等价于 Ward 恒等式 $p_\mu M^\mu(p) = 0$

光子极化求和

对前面的

$$\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) M^\mu(p) M^{\nu *}(p)$$

$$= \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n} \right] M^\mu(p) M^{\nu *}(p)$$

应用 **Ward 恒等式** $p_\mu M^\mu(p) = 0$，则方括号中**后两项**都**没有贡献**，得到

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) M^\mu(p) M^{\nu *}(p) = -g_{\mu\nu} M^\mu(p) M^{\nu *}(p)$$

也就是说，在 QED 计算中可以使用**替换关系**

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p) \to -g_{\mu\nu}$$

这就是处理**光子极化求和**的**简化方法**

验证 Ward 恒等式

- 现在用 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ **散射振幅**验证 **Ward 恒等式**
- 将这个振幅表达为 $\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\varepsilon_\mu^*(p_2)\,\varepsilon_\nu(k_2)M^{\mu\nu}$

$$M^{\mu\nu} = -e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1)$$

- 电子场旋量系数的**运动方程**为 $(\not{k}_1-m_e)u(k_1)=0$，即

$$\not{k}_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$$

- 两边取厄米共轭，右乘 γ^0，得

$$\bar{u}(k_1)\not{k}_1 = \bar{u}(k_1)m_e, \quad \text{同理 } \bar{u}(p_1)\not{p}_1 = \bar{u}(p_1)m_e$$

- 再利用 $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$，推出

$$\begin{aligned}\not{p}_2 u(k_1) &= -(\not{k}_1-\not{p}_2-\not{k}_1)u(k_1) = -(\not{k}_1-\not{p}_2-m_e)u(k_1)\\ \bar{u}(p_1)\not{p}_2 &= \bar{u}(p_1)(\not{k}_1+\not{k}_2-\not{p}_1) = \bar{u}(p_1)(\not{k}_1+\not{k}_2-m_e)\end{aligned}$$

验证 Ward 恒等式：光子外线

从而

$$
\begin{aligned}
p_{2\mu} M^{\mu\nu} &= -e^2\, \bar{u}(p_1) \left[\frac{\not{p}_2 (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e)\not{p}_2}{(k_1-p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\
&= -e^2\, \bar{u}(p_1) \left[\frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2 - m_e)(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2 - m_e^2} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e)(\not{k}_1 - \not{p}_2 - m_e)}{(k_1-p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\
&= -e^2\, \bar{u}(p_1) \left[\frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 - m_e^2}{(k_1+k_2)^2 - m_e^2}\, \gamma^\nu - \gamma^\nu\, \frac{(\not{k}_1 - \not{p}_2)^2 - m_e^2}{(k_1-p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1)
\end{aligned}
$$

由 $\not{p}\not{p} = p^2$ 得 $(\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 = (k_1+k_2)^2$ 和 $(\not{k}_1 - \not{p}_2)^2 = (k_1-p_2)^2$

故 **Ward 恒等式** $p_{2\mu} M^{\mu\nu} = 0$ 对 $\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\varepsilon_\mu^*(p_2)\, \varepsilon_\nu(k_2) M^{\mu\nu}$ 成立

同理可以验证 **Ward 恒等式** $k_{2\nu} M^{\mu\nu} = 0$ 成立

验证 Ward 恒等式：光子内线

- 其实，Ward 恒等式不仅对**光子外线**成立，对**光子内线**也成立
- **光子传播子动量** q^μ 流入或流出的振幅 $M^\mu(q)$ 满足 **Ward 恒等式** $q_\mu M^\mu(q) = 0$
- 以 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)\,\bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)$ 为例
- 光子传播子动量为 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$，**电子线部分振幅**为 $M^\mu(q) = e\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$

验证 Ward 恒等式：光子内线

- 其实，Ward 恒等式不仅对**光子外线**成立，对**光子内线**也成立
- **光子传播子动量** q^μ 流入或流出的振幅 $M^\mu(q)$ 满足 **Ward 恒等式** $q_\mu M^\mu(q) = 0$
- 以 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)\,\bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)$ 为例
- 光子传播子动量为 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$，**电子线部分振幅**为 $M^\mu(q) = e\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$
- 运动方程 $(\not{k}_2 + m_e)v(k_2) = 0$ 表明 $\not{k}_2 v(k_2) = -m_e v(k_2)$
- 两边取厄米共轭，右乘 γ^0，得 $\bar{v}(k_2)\not{k}_2 = -\bar{v}(k_2)m_e$
- 再利用 $\not{k}_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$ 即可推出 **Ward 恒等式**

$$
\begin{aligned}
q_\mu M^\mu(q) &= e\bar{v}(k_2)\not{q}u(k_1) = e\bar{v}(k_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2)u(k_1) \\
&= e\bar{v}(k_2)(m_e - m_e)u(k_1) = 0
\end{aligned}
$$

- 同理可验证 **μ 子线部分振幅**也满足 Ward 恒等式

8.6.2 小节 非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式

对 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 不变振幅

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}e^2\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\bar{u}(p_1)\left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)u(k_1)$$

取复共轭，利用 $[\bar{u}(p_1)\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu u(k_1)]^* = u^\dagger(k_1)(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\rho)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 u(p_1)$

$$= u^\dagger(k_1)\gamma^0\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(k_1)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u(p_1)$$

得 $(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = \mathrm{i}e^2\varepsilon_\rho(p_2)\varepsilon_\sigma^*(k_2)\bar{u}(k_1)\left(\frac{\gamma^\sigma \not{k}_2\gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2\gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)u(p_1)$

非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\sum_{\text{spins}}\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\rho(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\varepsilon_\sigma^*(k_2)$$

$$\times\,\mathrm{tr}\left[u(p_1)\bar{u}(p_1)\left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right.$$

$$\left.\times u(k_1)\bar{u}(k_1)\left(\frac{\gamma^\sigma \not{k}_2\gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2\gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right]$$

非极化振幅模方

对光子极化态和费米子螺旋度求和，得

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4}(-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma})\,\mathrm{tr}\left[(\not{p}_1+m_e)\left(\frac{\gamma^\mu \not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right.$$
$$\left.\times(\not{k}_1+m_e)\left(\frac{\gamma^\sigma \not{k}_2\gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2\gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right]$$
$$= \frac{e^4}{16}\left[\frac{A}{(k_1\cdot k_2)^2} + \frac{B+C}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1\cdot p_2)^2}\right]$$

$$A \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2\gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$
$$B \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2\gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2\gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$
$$C \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2\gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$
$$D \equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2\gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2\gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

- A 来自 s 通道 Feynman 图，D 来自 u 通道 Feynman 图
- B 和 C 是两个通道的交叉项

化简 A

- 利用 8.2.2 小节提供的**求迹和缩并公式**化简 A，经过繁琐的计算，得到

$$A = 32(k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_2) - 32m_e^2\, p_1 \cdot k_2 - 32m_e^2\, p_1 \cdot k_1 + 64m_e^2\, k_1 \cdot k_2 + 64m_e^4$$

- 用 **Mandelstam 变量** $s = (k_1 + k_2)^2$、$t = (k_1 - p_1)^2$ 和 $u = (k_1 - p_2)^2$ 表达，有

$$k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_e^2), \quad k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - 2m_e^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{t}{2},$$
$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_e^2), \quad s + t + u = 2m_e^2$$

- 进而将 A 化为

$$\begin{aligned} A &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(u - m_e^2) + 2m_e^2(t - 2m_e^2) + 4m_e^2(s - m_e^2) + 8m_e^4] \\ &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(2s + t + u) - 2m_e^4] \\ &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2 s + 2m_e^4] \\ &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(s - m_e^2) + 4m_e^4] \end{aligned}$$

- 这里**消去** t，保留 s 和 u，毕竟，$e^-\gamma \to e^-\gamma$ 是 s 和 u 通道的过程

A 与 D 的交叉对称性

容易看出，对 $A = \mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$ 作动量替换 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$，就得到

$$D = \mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

注意到光子是自身的反粒子，将 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 过程 s 通道 Feynman 图的初态和末态光子相互交叉，就得到 u 通道 Feynman 图，因而动量替换规则是 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$

据此，对上面得到的 $A = 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2) + 2m_e^2(s-m_e^2) + 4m_e^4]$ 作替换 $(k_1+k_2)^2 = s \leftrightarrow u = (k_1 - p_2)^2$，就得到 D 的表达式

$$D = 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2) + 2m_e^2(u-m_e^2) + 4m_e^4]$$

B 与 C

对 $B = \mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$ 作动量替换 $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$，即

$$C = \mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

经过复杂的计算，得到

$$\begin{aligned} B &= -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2) - 32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1) + 32(p_1\cdot k_1)(k_1\cdot k_2) \\ &\quad +16m_e^2\, p_1\cdot p_2 - 16m_e^2\, p_1\cdot k_2 - 16m_e^2\, p_1\cdot k_1 + 16m_e^2\, p_2\cdot k_2 \\ &\quad +32m_e^2\, p_2\cdot k_1 - 32m_e^2\, k_1\cdot k_2 - 16m_e^4 \\ &= -8[m_e^2(s-m_e^2) + m_e^2(u-m_e^2) + 4m_e^4] \end{aligned}$$

作替换 $s \leftrightarrow u$，就得到

$$C = -8[m_e^2(u-m_e^2) + m_e^2(s-m_e^2) + 4m_e^4] = B$$

s 与 u 通道的**交叉项** B 和 C **恰好相等**

非极化振幅模方

现在重新用**四维动量内积**表达，有

$$
\begin{aligned}
A &= 32[(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2) + m_e^2\, k_1\cdot k_2 + m_e^4] \\
B &= C = 16(-m_e^2\, k_1\cdot k_2 + m_e^2\, k_1\cdot p_2 - 2m_e^4) \\
D &= 32[(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2) - m_e^2\, k_1\cdot p_2 + m_e^4]
\end{aligned}
$$

代入到**非极化振幅模方**中，得

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{16}\left[\frac{A}{(k_1\cdot k_2)^2} + \frac{2B}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1\cdot p_2)^2}\right] \\
&= 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{m_e^2}{k_1\cdot k_2} + \frac{m_e^4}{(k_1\cdot k_2)^2} - \frac{m_e^2}{k_1\cdot p_2} + \frac{m_e^2}{k_1\cdot k_2} - \frac{2m_e^4}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2} - \frac{m_e^2}{k_1\cdot p_2} + \frac{m_e^4}{(k_1\cdot p_2)^2}\right] \\
&= 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2} + 2m_e^2\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2} - \frac{1}{k_1\cdot p_2}\right) + m_e^4\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2} - \frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

实验室参考系

- 考虑**实验室参考系**，**初态电子静止**
- 初态光子通过 Compton 散射将能动量传递给末态电子，如**右图**所示
- 在**自然单位制**中，$\hbar = c = 1$，光子的**能量** E 等于**角频率** ω，即 $E = \hbar\omega = \omega$，而**波长** λ 与角频率的关系为 $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$
- 因此可用**角频率** ω 和 ω' 分别表示初末态光子的**能量**

实验室参考系

- 考虑**实验室参考系**，**初态电子静止**
- 初态光子通过 Compton 散射将能动量传递给末态电子，如**右图**所示
- 在**自然单位制**中，$\hbar = c = 1$，光子的**能量** E 等于**角频率** ω，即 $E = \hbar\omega = \omega$，而**波长** λ 与角频率的关系为 $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$

- 因此可用**角频率** ω 和 ω' 分别表示初末态光子的**能量**
- 初末态四维动量表示为

$$k_1^\mu = (m_e, \mathbf{0}), \quad k_2^\mu = (\omega, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu = (p_1^0, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (\omega', \mathbf{p}_2)$$

- 其中 $\omega = |\mathbf{k}_2|$，$\omega' = |\mathbf{p}_2|$，利用**质壳条件**和**能动量守恒**推出

$$\begin{aligned} m_e^2 &= p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_2)^2 = k_1^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_2) - 2k_2 \cdot p_2 \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \\ (p_1^0)^2 &= m_e^2 + |\mathbf{p}_1|^2 = m_e^2 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2|^2 = m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta \end{aligned}$$

实验室系运动学

- 于是得到 $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$ 和 $p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}$
- 由 $\dfrac{1}{\omega'} - \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{\omega - \omega'}{\omega'\omega} = \dfrac{1 - \cos\theta}{m_e}$ 得到出射光子与入射光子的**波长之差**

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta)$$

- 这就是 **Arthur Compton 得到的关系式**

实验室系运动学

- 于是得到 $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$ 和 $p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}$
- 由 $\dfrac{1}{\omega'} - \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{\omega - \omega'}{\omega'\omega} = \dfrac{1 - \cos\theta}{m_e}$ 得到出射光子与入射光子的**波长之差**

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta)$$

- 这就是 **Arthur Compton 得到的关系式**
- 用**入射光子角频率** ω 和**散射角** θ 将**出射光子角频率**表达成

$$\omega' = \left(\frac{1 - \cos\theta}{m_e} + \frac{1}{\omega}\right)^{-1} = \frac{\omega}{1 + \dfrac{\omega}{m_e}(1 - \cos\theta)}$$

- 再利用 $k_1 \cdot k_2 = m_e\omega$ 和 $k_1 \cdot p_2 = m_e\omega'$，将**非极化振幅模方**化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m_e\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) + m_e^2\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)^2\right] \\ &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2m_e\frac{1 - \cos\theta}{m_e} + m_e^2\frac{(1 - \cos\theta)^2}{m_e^2}\right] = 2e^4\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right)\end{aligned}$$

末态相空间积分

- 对**末态两体不变相空间**积分，得

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(m_e + \omega - p_1^0 - \omega') \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\cos\theta\, \mathrm{d}\omega'\, \omega'^2}{16\pi^2 \omega' p_1^0} \delta\Big(m_e + \omega - \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta} - \omega'\Big) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta\, \omega'}{8\pi p_1^0} \left| \frac{\partial(\sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta} + \omega')}{\partial\omega'} \right|^{-1} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta\, \omega'}{8\pi p_1^0} \left| \frac{2\omega' - 2\omega\cos\theta}{2p_1^0} + 1 \right|^{-1} = \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{\omega' + p_1^0 - \omega\cos\theta} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{m_e + \omega(1 - \cos\theta)} = \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{m_e + m_e(\omega - \omega')/\omega'} \\
&= \int \mathrm{d}\cos\theta\, \frac{\omega'^2}{8\pi m_e \omega}
\end{aligned}
$$

- 倒数第三步用到**能量守恒关系** $p_1^0 + \omega' = m_e + \omega$
- 倒数第二步用到 $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$

Klein-Nishina 公式

散射截面表达为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int \mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\\ &= \frac{1}{4k_1^0k_2^0|\mathbf{k}_2|/k_2^0}\int \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{8\pi m_e\omega}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\\ &= \int \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$

Oskar Benjamin Klein
(1894–1977)

微分散射截面是

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}} = \frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{2e^4\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)}$$

仁科芳雄 (Yoshio Nishina)
(1890–1951)

上式称为 **Klein-Nishina 公式**，它是 **Thomson 微分截面** $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta)$ 的 **QED 修正**

非相对论近似

在**非相对论近似**下，入射光子能量 $\omega \simeq 0$，

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m_e}(1 - \cos\theta)} \simeq 1$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right)$$
$$\simeq \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1 + \cos^2\theta)$$

此时 **Klein-Nishina 公式**退化到 **Thomson 微分截面公式**

散射截面近似为 **Thomson 散射截面**

$$\sigma \simeq \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1 + \cos^2\theta) = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}$$

8.6.3 小节 高能行为和极化振幅

- 下面讨论 **Compton 散射**的**高能极限**
- 在**质心系**中，动量如**右图**所示
- **散射角** θ 定义为初末态电子动量 $\mathbf{k}_1$ 与 $\mathbf{p}_1$ 方向之间的夹角
- 根据 6.5.3 小节知识，粒子能量为

$$k_1^0 = p_1^0 = \frac{s+m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv E_e$$

$$k_2^0 = p_2^0 = \frac{s-m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv \omega$$

- 动量大小为 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \omega$
- 于是得到

$$k_1 \cdot k_2 = k_1^0 k_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \omega(E_e + \omega)$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \omega(E_e + \omega\cos\theta)$$

$$\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{E_e + \omega\cos\theta}{E_e + \omega}$$

高能极限

- 在**高能极限**下，$\sqrt{s} \gg m_e$，或者说，$\omega \gg m_e$，因而可以**忽略电子质量**，得到

$$E_e \simeq \omega \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}$$

- 利用上述 $\dfrac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \dfrac{E_e + \omega\cos\theta}{E_e + \omega}$，将**非极化振幅模方**近似为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 2e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right] \\
&\simeq 2e^4 \left(\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} \right) = 2e^4 \left(\frac{E_e + \omega\cos\theta}{E_e + \omega} + \frac{E_e + \omega}{E_e + \omega\cos\theta} \right) \\
&\simeq 4e^4 \left(\frac{1 + \cos\theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos\theta} \right)
\end{aligned}$$

- 对于**向后**散射，$\theta = \pi$，而 $\cos\theta = -1$，上式**发散**，**奇性**来自圆括号中的第二项

避免发散

- 若要**避免发散**，则在奇性项分母处**不能忽略** m_e
- 将 E_e 展开到 m_e^2/ω^2 阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2 + \omega^2} = \omega\sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega\left(1 + \frac{m_e^2}{2\omega^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right)$$

- **奇性项分母**化为 $E_e + \omega\cos\theta \simeq \omega\left(1 + \cos\theta + \frac{m_e^2}{2\omega^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right)$

避免发散

- 若要**避免发散**，则在奇性项分母处**不能忽略** m_e
- 将 E_e 展开到 m_e^2/ω^2 阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2 + \omega^2} = \omega\sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega\left(1 + \frac{m_e^2}{2\omega^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right)$$

- **奇性项分母**化为 $E_e + \omega\cos\theta \simeq \omega\left(1 + \cos\theta + \frac{m_e^2}{2\omega^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right)$
- 因此，**不发散**的表达式是

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \simeq 4e^4\left[\frac{1+\cos\theta}{4} + \frac{1}{1+\cos\theta + m_e^2/(2\omega^2)}\right]$$

- 微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} \simeq \frac{2\pi}{64\pi^2}\frac{1}{2\omega^2}\frac{\omega}{2\omega}\overline{|\mathcal{M}|^2} \simeq \frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2}\left[\frac{1+\cos\theta}{4} + \frac{1}{1+\cos\theta + m_e^2/(2\omega^2)}\right]$$

- 当 $\omega \gg m_e$ 时，微分截面虽然在 $\theta = \pi$ 处**没有发散**，但**数值非常大**

极化振幅

- 接下来分析高能极限下 Compton 散射的极化振幅
- 不变振幅按 Feynman 图分解为 s 和 u 通道贡献的两个部分，$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$
- 将螺旋度依赖显明写出来，两个通道的极化振幅为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_s(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') &= -\frac{e^2}{s-m_e^2}\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) \\
&\simeq -\frac{e^2}{4\omega^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) \\
\mathcal{M}_u(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') &= -\frac{e^2}{u-m_e^2}\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) \\
&\simeq \frac{e^2}{4\omega^2 c_{\theta/2}^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)
\end{aligned}
$$

- 第二步在高能极限下忽略电子质量，并利用了

$$
\begin{aligned}
s-m_e^2 &= (k_1+k_2)^2-m_e^2 = 2\,k_1\cdot k_2 = 2\omega(E_e+\omega) \simeq 4\omega^2 \\
u-m_e^2 &= (k_1-p_2)^2-m_e^2 = -2\,k_1\cdot p_2 = -2\omega(E_e+\omega\cos\theta) \simeq -4\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

奇性分析

- 容易看出，$\theta = \pi$ 处的**奇性**来自 u **通道振幅** $\mathcal{M}_u \propto (2c_{\theta/2}^2)^{-1}$
- 不过，**因子** $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1+\cos\theta)^{-1}$ 在模方 $|\mathcal{M}_u|^2$ 中变成 $(1+\cos\theta)^{-2}$
- 这样的奇性看起来**强**于**非极化振幅模方** $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 中 $\sim (1+\cos\theta)^{-1}$ 的奇性
- 通过下面的计算将看到奇性是如何**减弱**的

奇性分析

- 容易看出，$\theta = \pi$ 处的**奇性**来自 u **通道振幅** $\mathcal{M}_u \propto (2c_{\theta/2}^2)^{-1}$
- 不过，**因子** $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1+\cos\theta)^{-1}$ 在模方 $|\mathcal{M}_u|^2$ 中变成 $(1+\cos\theta)^{-2}$
- 这样的奇性看起来**强**于**非极化振幅模方** $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 中 $\sim (1+\cos\theta)^{-1}$ 的奇性
- 通过下面的计算将看到奇性是如何**减弱**的

- 为计算极化振幅，先导出振幅中各个因子的显明表达式
- 在**高能极限**下，**初末态电子**四维动量近似为

$$k_1^\mu \simeq \omega(1,0,0,1), \quad p_1^\mu \simeq \omega(1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

- 参照 8.2.4 小节，相应的**螺旋态**为

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

电子的平面波旋量系数

根据 8.3 节，高能极限下的平面波旋量系数为

$$u(\mathbf{k}_1,+) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{k}_1) \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(\mathbf{k}_1,-) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{k}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(\mathbf{p}_1,+) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}_1,-) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} -s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$ 的 Dirac 共轭是

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p}_1,+) &= u^\dagger(\mathbf{p}_1,+)\gamma^0 \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 & \xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} \xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) & 0 \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1,-) &\simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 & \xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -s_{\theta/2} & c_{\theta/2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

光子的极化矢量

- 初末态光子的四维动量是 $k_2^\mu = \omega(1,0,0,-1)$ 和 $p_2^\mu = \omega(1,-s_\theta,0,-c_\theta)$
- 根据极化矢量表达式

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(0,\ p^1p^3 - \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|,\ p^2p^3 + \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|,\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}(0,\ p^1p^3 + \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|,\ p^2p^3 - \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|,\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)$$

- 求得末态光子极化矢量为

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta)$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta)$$

- 与动量一样，末态光子极化矢量的空间分量转动的角度为 θ，这是自旋为 1 的体现
- 令 $\theta = 0$，即得初态光子极化矢量

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-\mathrm{i},0), \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\mathrm{i},0)$$

初态极化矢量缩并

- 初态极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$
\begin{aligned}
\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+) &= \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^1 - \mathrm{i}\gamma^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -\sigma^1 + \mathrm{i}\sigma^2 \\ \sigma^1 - \mathrm{i}\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \\
\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-) &= \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma^1 - \mathrm{i}\gamma^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -\sigma^1 - \mathrm{i}\sigma^2 \\ \sigma^1 + \mathrm{i}\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

末态极化矢量缩并

- 末态极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) = \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta\gamma^1 - \mathrm{i}\gamma^2 + s_\theta\gamma^3)$$

$$= \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 \\ & & s_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 & & \\ -s_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \end{pmatrix}$$

$$\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) = \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta\gamma^1 + \mathrm{i}\gamma^2 + s_\theta\gamma^3)$$

$$= \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}^2 \\ & & -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -s_{\theta/2}^2 & & \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \end{pmatrix}$$

s 通道极化振幅计算之一

第一步计算 s 通道极化振幅，$\mathcal{M}_s$ 中的因子 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & s_{\theta/2} & -c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可见，当末态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献为零

$(k_1+k_2)^\mu \simeq (2\omega, 0, 0, 0)$ 与 Dirac 矩阵的缩并表达成

$$\not{k}_1 + \not{k}_2 = (k_1+k_2)_\mu \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \simeq 2\omega \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} = 2\omega \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda_2')$ 后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}0 & 0 & c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

s 通道极化振幅计算之二

- $\mathcal{M}_s$ 中最后两个因子 $\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)u(\mathbf{k}_1, +) \simeq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- 当初态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献也为零
- 将这些因子乘起来，就得到 $\mathcal{M}_s$ 的计算结果

零贡献原因

以上结果表明，无论是**初态**还是**末态**，只要电子与光子具有**相反螺旋度**，对 s **通道振幅**的贡献就是**零**

这是因为螺旋度相反的电子和光子组成一个**角动量为** $j = 3/2$ 的系统，而 s 通道电子传播子对应于一个**自旋为** $1/2$ 的**类时虚粒子**，**违背角动量守恒**

如果**不忽略电子质量**，则会出现受到**螺旋度压低**的非零贡献

s 通道极化振幅计算之三

- $\mathcal{M}_s$ 的初末态平面波旋量系数之间夹着 **3 个 Dirac 矩阵**
- 由 $\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0$ 推断**螺旋度相反**的**初末态电子**在高能极限下**没有贡献**，即 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,-\lambda)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$
- 对于初末态电子**螺旋度相同**的情况，高能极限下的**非零结果**只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

s 通道极化振幅计算之三

- $\mathcal{M}_s$ 的初末态平面波旋量系数之间夹着 **3 个 Dirac 矩阵**
- 由 $\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0$ 推断**螺旋度相反**的**初末态电子**在高能极限下**没有贡献**，即 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,-\lambda)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$
- 对于初末态电子**螺旋度相同**的情况，高能极限下的**非零结果**只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$
$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

- 相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(+,+,+,+) = \mathcal{M}_s(-,-,-,-) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

- **s 通道**贡献只来自四个粒子**全部右旋极化**和**全部左旋极化**的螺旋度构型
- 这两种构型在宇称变换下相互转换
- 由于**宇称守恒**，它们的振幅至多相差一个相位因子，此处**相位因子**为 1

u 通道极化振幅计算之一

第二步计算 u 通道极化振幅，$\mathcal{M}_u$ 中因子 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} c_{\theta/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) \simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(k_1 - p_2)^\mu \simeq \omega(0, s_\theta, 0, 1 + c_\theta) = 2\omega(0, s_{\theta/2}c_{\theta/2}, 0, c_{\theta/2}^2)$ 与 Dirac 矩阵的缩并是

$$\not{k}_1 - \not{p}_2 = (k_1 - p_2)_\mu \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \simeq 2\omega \begin{pmatrix} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 - c_{\theta/2}^2\sigma^3 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 + c_{\theta/2}^2\sigma^3 & \end{pmatrix}$$

$$= 2\omega \begin{pmatrix} & & -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ & & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 & & \end{pmatrix}$$

u 通道极化振幅计算之二

- 将 $\not{k}_1 - \not{p}_2$ 乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$ 后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2}\begin{pmatrix} s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix} -s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 & c_{\theta/2}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{\theta/2}^3 & s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{M}_u$ 中最后两个因子 $\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda_2')u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

u 通道极化振幅计算之三

- 同样，高能极限下**螺旋度相反**的**初末态电子没有贡献**，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$$

- 对于初末态电子**螺旋度相同**的情况，高能极限下的**非零结果**只有

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)u(\mathbf{k}_1, +) &\simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)u(\mathbf{k}_1, -) &\simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, +)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)u(\mathbf{k}_1, +) &\simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3 \\
\bar{u}(\mathbf{p}_1, -)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)u(\mathbf{k}_1, -) &\simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_u(+,+,+,+) &= \mathcal{M}_u(-,-,-,-) \simeq -\frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}} \\
\mathcal{M}_u(+,-,+,-) &= \mathcal{M}_u(-,+,-,+) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}
\end{aligned}$$

- $\theta = \pi$ 处的**奇性**来自全部粒子**螺旋度相同**的 u 通道振幅 $\mathcal{M}_u(\pm,\pm,\pm,\pm)$
- $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \pm)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \pm)(\not{k}_1 - \not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \pm)u(\mathbf{k}_1, \pm)$ 包含一个 $c_{\theta/2}$ **因子**
- 将振幅中原本 $\sim c_{\theta/2}^{-2}$ 的奇性**减弱**成 $\sim c_{\theta/2}^{-1}$ 的奇性

在**高能极限**下，振幅 $\mathcal{M}_u(+,+,+,-)$、$\mathcal{M}_u(+,-,+,+)$、$\mathcal{M}_u(-,+,-,-)$ 和 $\mathcal{M}_u(-,-,-,+)$ 都**等于零**，这是因为在这些过程中初态和末态的角动量量子数不相等，而**电子质量**已经**忽略**掉了，**不能**用于翻转螺旋度

$\mathcal{M}(+,+,+,-)$

非极化振幅模方

在高能极限下，振幅 $\mathcal{M}_u(+,+,+,-)$、$\mathcal{M}_u(+,-,+,+)$、$\mathcal{M}_u(-,+,-,-)$ 和 $\mathcal{M}_u(-,-,-,+)$ 都等于零，这是因为在这些过程中初态和末态的角动量量子数不相等，而电子质量已经忽略掉了，不能用于翻转螺旋度

将 s 和 u 通道的贡献加起来，$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$，得到非零极化振幅

$$\mathcal{M}(+,+,+,+) = \mathcal{M}(-,-,-,-) \simeq -2e^2 c_{\theta/2} - \frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}} = -\frac{2e^2}{c_{\theta/2}},$$

$$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \mathcal{M}(-,+,-,+) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

于是，非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{1}{4}\left[2|\mathcal{M}(+,-,+,-)|^2 + 2|\mathcal{M}(+,+,+,+)|^2\right]$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(4e^4 c_{\theta/2}^2 + \frac{4e^4}{c_{\theta/2}^2}\right) = 4e^4\left(\frac{1+c_\theta}{4} + \frac{1}{1+c_\theta}\right)$$

与前面通过求迹运算得到的表达式一致

8.6.4 小节 正负电子湮灭到双光子

🍦 在 QED 领头阶，**正负电子湮灭到双光子**过程 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 的 Feynman 图如**右上图**所示

8.6.4 小节 正负电子湮灭到双光子

在 QED 领头阶，**正负电子湮灭到双光子**过程 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 的 Feynman 图如**右上图**所示

它与 **Compton 散射**过程（**右下图**）具有**交叉对称性**

设初态 e^- 和 e^+ 的动量为 k_1' 和 k_2'，末态两个光子的动量为 p_1' 和 p_2'

将 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 交叉成 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 时，需要把**初态** γ（动量为 k_2）换成**末态** γ（动量为 p_1'），同时把**末态** e^-（动量为 p_1）换成**初态** e^+（动量为 k_2'），引起动量替换规则

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to -k_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to p_2'^\mu$$

非极化振幅模方

- $e^-\gamma \to e^-\gamma$ **非极化振幅模方**为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2} + 2m_e^2\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2} - \frac{1}{k_1\cdot p_2}\right) + m_e^4\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2} - \frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)^2\right]$$

- 应用上面的替换规则 $k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to -k_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to p_2'^\mu$

- 由于只交叉一个费米子，需要**移除一个整体负号**

- 从而得到 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ **非极化振幅模方**

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left[\frac{k_1'\cdot p_2'}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{k_1'\cdot p_1'}{k_1'\cdot p_2'} + 2m_e^2\left(\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'}\right) - m_e^4\left(\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'}\right)^2\right]$$

质心系中的微分散射截面

在质心系中，记 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 之间的夹角为 θ，$\beta_e = \sqrt{1-4m_e^2/s}$，则

$$k_1' \cdot p_1' = k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = \frac{s}{4}(1-\beta_e\cos\theta)$$

$$k_1' \cdot p_2' = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = \frac{s}{4}(1+\beta_e\cos\theta)$$

$$\frac{k_1'\cdot p_2'}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{k_1'\cdot p_1'}{k_1'\cdot p_2'} = \frac{1+\beta_e\cos\theta}{1-\beta_e\cos\theta} + \frac{1-\beta_e\cos\theta}{1+\beta_e\cos\theta} = \frac{2(1+\beta_e^2\cos^2\theta)}{1-\beta_e^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'} = \frac{4}{s}\left(\frac{1}{1-\beta_e\cos\theta} + \frac{1}{1+\beta_e\cos\theta}\right) = \frac{8}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)}$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2\alpha^2\left[\frac{2(1+\beta_e^2\cos^2\theta)}{1-\beta_e^2\cos^2\theta} + 2m_e^2\frac{8}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)} - m_e^4\frac{64}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

质心系中的微分散射截面

在质心系中，记 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 之间的夹角为 θ，$\beta_e = \sqrt{1-4m_e^2/s}$，则

$$k_1' \cdot p_1' = k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = \frac{s}{4}(1-\beta_e\cos\theta)$$

$$k_1' \cdot p_2' = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = \frac{s}{4}(1+\beta_e\cos\theta)$$

$$\frac{k_1'\cdot p_2'}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{k_1'\cdot p_1'}{k_1'\cdot p_2'} = \frac{1+\beta_e\cos\theta}{1-\beta_e\cos\theta} + \frac{1-\beta_e\cos\theta}{1+\beta_e\cos\theta} = \frac{2(1+\beta_e^2\cos^2\theta)}{1-\beta_e^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{k_1'\cdot p_1'} + \frac{1}{k_1'\cdot p_2'} = \frac{4}{s}\left(\frac{1}{1-\beta_e\cos\theta} + \frac{1}{1+\beta_e\cos\theta}\right) = \frac{8}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)}$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2\alpha^2\left[\frac{2(1+\beta_e^2\cos^2\theta)}{1-\beta_e^2\cos^2\theta} + 2m_e^2\frac{8}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)} - m_e^4\frac{64}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

$e^+e^- \to \gamma\gamma$ 微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 s\beta_e} = \frac{\alpha^2}{s\beta_e}\left[\frac{1+\beta_e^2\cos^2\theta}{1-\beta_e^2\cos^2\theta} + \frac{8m_e^2}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

对上式积分计算散射截面 σ 时，应当注意此过程的末态对称性因子 $\mathcal{S}=2$

与实验数据对比

1983 年，PETRA 对撞机上 **JADE 探测器**测量了**质心能** $\sqrt{s} = 14,\ 22,\ 34.6$ GeV 的 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ **微分散射截面**，**数据**如下图所示

将以上 **QED 领头阶预言值**用**实线**画在图上，与实验数据基本吻合