

# 数学物理方法

## 第五章 留数定理及其应用

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2026 年 1 月 21 日



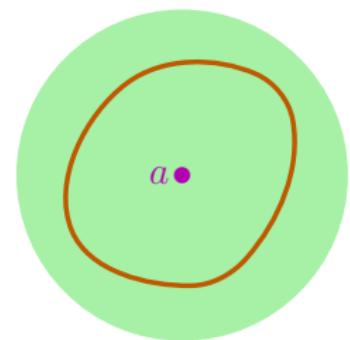
# 第五章 留数定理及其应用

## §1 留数定理

### §1.1 留数的定义

☀ 如果函数  $f(z)$  在点  $a$  的邻域  $K : |z - a| < R$  内解析，围线  $C$  全含于  $K$  (包围  $a$  或不包围  $a$ )，则根据 Cauchy 积分定理必有  $\int_C f(z) dz = 0$

☁ 但如果  $a$  是孤立奇点，即  $f(z)$  只在  $a$  的去心邻域  $K \setminus \{a\} : 0 < |z - a| < R$  内解析，围线  $C$  是  $K \setminus \{a\}$  中包围  $a$  的围线，则上式不一定成立，故定义留数如下



# 第五章 留数定理及其应用

## §1 留数定理

### §1.1 留数的定义

☀ 如果函数  $f(z)$  在点  $a$  的邻域  $K : |z - a| < R$  内解析，围线  $C$  全含于  $K$  (包围  $a$  或不包围  $a$ )，则根据 Cauchy 积分定理必有  $\int_C f(z) dz = 0$

☁ 但如果  $a$  是孤立奇点，即  $f(z)$  只在  $a$  的去心邻域  $K \setminus \{a\} : 0 < |z - a| < R$  内解析，围线  $C$  是  $K \setminus \{a\}$  中包围  $a$  的围线，则上式不一定成立，故定义留数如下

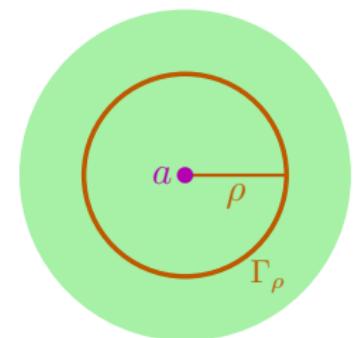
● 留数定义 如果函数  $f(z)$  以  $a$  为孤立奇点，即  $f(z)$  在去心邻域  $K \setminus \{a\} : 0 < |z - a| < R$  内解析，则积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz, \quad \Gamma_\rho : |z - a| = \rho \quad (0 < \rho < R)$$

称为  $f(z)$  在点  $a$  处的留数 (residue)，记作  $\underset{z=a}{\text{Res}} f(z)$

☁ 简记为  $\text{Res } f(a)$ ，或  $\text{Res}(f, a)$

☁ 显然，只要  $0 < \rho < R$ ，上述积分的数值与  $\rho$  的大小无关



# 留数与 Laurent 系数

 在去心邻域  $K \setminus \{a\}$  内，设  $f(z)$  在  $a$  处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

 其中 Laurent 系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

 令  $n = -1$ ，得

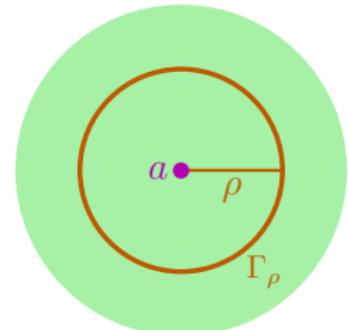
$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz$$

 与留数的定义比较，即得

$$\text{Res } f(a) = c_{-1}$$

 由此可知，可去奇点处的留数为 0

 注 有些书上直接用  $\text{Res } f(a) = c_{-1}$  作为留数的定义，这与上页的定义是等价的

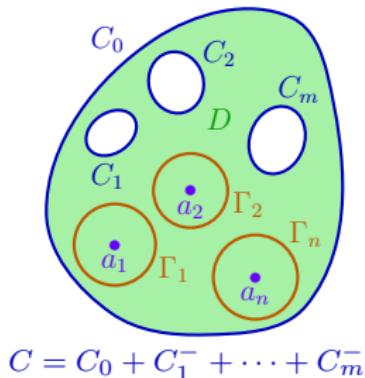


## §1.2 Cauchy 留数定理

由 Cauchy 积分定理可推出下面关于围线积分的定理

**V Cauchy 留数定理** 设函数  $f(z)$  在围线或复围线  $C$  所围成的区域  $D$  中有孤立奇点  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，此外  $f(z)$  在  $\bar{D}$  上解析，则有

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k)$$



**证明** 作  $n$  个小圆周  $\Gamma_k : |z - a_k| = \rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )，使各  $\Gamma_k$  及其内部全含于  $D$ ，但各  $\Gamma_k$  互不相交也互不包含

从而  $f(z)$  在复围线  $C + \Gamma_1^- + \Gamma_2^- + \dots + \Gamma_n^-$  所围成的复通闭域上解析

**根据 Cauchy 积分定理和留数的定义，有**

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} f(a_k)$$

利用 Cauchy 留数定理，只要算出各孤立奇点处的留数，即可得出围线积分

## §2 留数的算法

 计算**留数**的最一般方法是作 **Laurent 展开**，求出系数  $c_{-1}$ ，即得**展开中心**的**留数**

 但作 **Laurent 展开**往往**太麻烦**，所以希望有一些现成的公式可以用来计算**留数**

 下面的方法适用于计算**极点**的**留数**

 **定理 (极点的留数)** 设  $a$  是  $f(z)$  的  $n$  阶极点，则

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \Big|_{z \rightarrow a}$$

## §2 留数的算法

 计算留数的最一般方法是作 Laurent 展开，求出系数  $c_{-1}$ ，即得展开中心的留数

 但作 Laurent 展开往往太麻烦，所以希望有一些现成的公式可以用来计算留数

 下面的方法适用于计算极点的留数

 定理（极点的留数） 设  $a$  是  $f(z)$  的  $n$  阶极点，则

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \Big|_{z \rightarrow a}$$

 证明 由于  $a$  是  $f(z)$  的  $n$  阶极点，故在  $a$  的某去心邻域内有

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

 其中  $\varphi(z)$  在  $a$  点解析，且  $\varphi(a) \neq 0$ ，于是

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

 最后一步用了 Cauchy 高阶导数公式，代入  $\varphi(z) = (z-a)^n f(z)$  得证

# 单极点和二阶极点计算公式

由上页**定理**，马上可以得到下面两个推论，它们是常用的计算公式

Ⅱ 推论一（单极点留数第一公式） 若  $a$  是  $f(z)$  的**单极点**，则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$$

⑤ 推论二（二阶极点留数） 若  $a$  是  $f(z)$  的**二阶极点**，则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow a}$$

# 单极点和二阶极点计算公式

由上页**定理**，马上可以得到下面两个推论，它们是常用的计算公式

**Ⅱ 推论一（单极点留数第一公式）** 若  $a$  是  $f(z)$  的**单极点**，则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$$

**推论二（二阶极点留数）** 若  $a$  是  $f(z)$  的**二阶极点**，则

$$\text{Res } f(a) = [(z - a)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow a}$$

**单极点的留数**还有另一个计算公式，通常它更方便，把它写成以下定理

**定理（单极点留数第二公式）** 设  $a$  是  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  的**单极点**，即  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$

均在  $a$  点解析，且  $\varphi(a) \neq 0$ ， $\psi(a) = 0$ ， $\psi'(a) \neq 0$  ( $a$  是  $\psi(z)$  的**一阶零点**)，则

$$\text{Res } f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

# 定理的证明

■ 证明 按照  $\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$ , 利用  $\psi(a) = 0$  等已知条件推出

$$\begin{aligned}\text{Res } f(a) &= \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{[\psi(z) - \psi(a)]/(z - a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\end{aligned}$$

# 定理的证明

 证明 按照  $\text{Res } f(a) = [(z - a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$ ，利用  $\psi(a) = 0$  等已知条件推出

$$\begin{aligned}\text{Res } f(a) &= \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z - a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{[\psi(z) - \psi(a)]/(z - a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\end{aligned}$$

 以上三条公式就是计算极点留数的常用公式

 当极点的阶数较高时，用  $\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left. \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \right|_{z \rightarrow a}$  计算留数并不方便

 此时不如作 Laurent 展开  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ ，求出系数  $c_{-1}$

 对于本性奇点，作 Laurent 展开求  $c_{-1}$  也是唯一的计算方法

 至于可去奇点，前已指出，其留数为 0

 注 作为计算留数的手段，作 Laurent 展开时只需求出系数  $c_{-1}$ ，其它系数可以不必理会，所以只要把包含  $(z-a)^{-1}$  的项找出来就可以了

### §3 用留数定理计算围线积分

下面给出几个用留数定理计算围线积分的例子

例 1  $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$

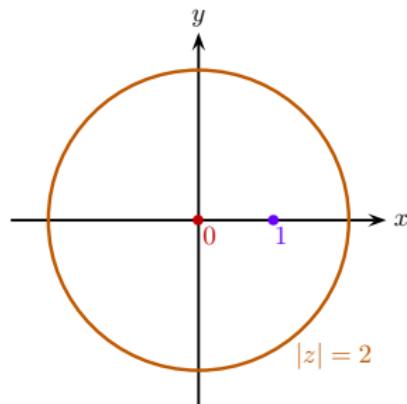
解 本题的被积函数  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$  在圆周

$|z| = 2$  的内部有一阶极点  $z = 0$  和二阶极点  $z = 1$ ，则

$$\text{Res } f(0) = [zf(z)] \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res } f(1) = [(z-1)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow 1} = \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} = -\frac{1}{z^2} \Big|_{z=1} = -1$$

故  $I = 2\pi i[\text{Res } f(0) + \text{Res } f(1)] = 0$



### §3 用留数定理计算围线积分

下面给出几个用**留数定理**计算**围线积分**的例子

**例 1**  $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$

**解** 本题的**被积函数**  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$  在**圆周**

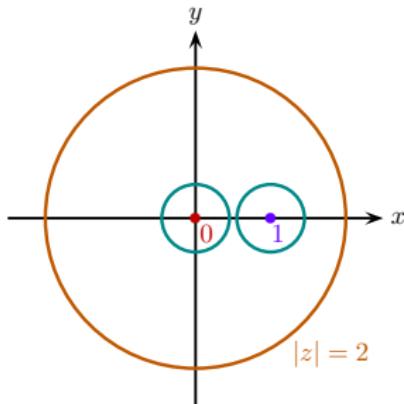
$|z| = 2$  的内部有一阶极点  $z = 0$  和二阶极点  $z = 1$ ，则

$$\text{Res } f(0) = [zf(z)] \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res } f(1) = [(z-1)^2 f(z)]' \Big|_{z \rightarrow 1} = \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} = -\frac{1}{z^2} \Big|_{z=1} = -1$$

**故**  $I = 2\pi i[\text{Res } f(0) + \text{Res } f(1)] = 0$

**注** 如果没有留数定理，可以作**两个小圆周**分别包围**一阶极点**  $z = 0$  和**二阶极点**  $z = 1$ ，根据**Cauchy 积分定理**，原积分等于沿**两个小圆周**的**积分**之和，它们可以分别用**Cauchy 积分公式**和**Cauchy 高阶导数公式**来计算



## 例 2

♥ 例 2  $I = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$

解 本题的被积函数  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  在圆周  $|z| = 1$  的内部有一个可去奇点  $z = 0$

它在  $z = 0$  处的 Laurent 展开式没有负幂项

故  $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 0$ ，而  $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 0$

## 例 2

♥ 例 2  $I = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$

解 本题的被积函数  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  在圆周  $|z| = 1$  的内部有一个可去奇点  $z = 0$

它在  $z = 0$  处的 Laurent 展开式没有负幂项

故  $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 0$ ，而  $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 0$

注 本题当然也可以用 Cauchy 积分公式  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  来计算

被积函数已经具有公式所要求的形式，故

$$I = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \sin 0 = 0$$

## 例 3

♥ 例 3  $I = \int_{|z|=1} e^{1/z} dz$

解 本题的被积函数  $f(z) = e^{1/z}$  在圆周  $|z| = 1$  的内部有一个本性奇点  $z = 0$

它在  $z = 0$  处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

故  $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 1$ ，而  $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 2\pi i$

## 例 3

例 3  $I = \int_{|z|=1} e^{1/z} dz$

解 本题的被积函数  $f(z) = e^{1/z}$  在圆周  $|z| = 1$  的内部有一个本性奇点  $z = 0$

它在  $z = 0$  处的 Laurent 展开式为

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

故  $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 1$ ，而  $I = 2\pi i \text{Res } f(0) = 2\pi i$

注 本题不能直接用 Cauchy 积分公式来计算

但可以对被积函数作 Laurent 展开后逐项积分，根据

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z}, n \neq 1 \end{cases}$$

只有  $1/z$  项有贡献，结果当然一样

# 讨论

-  以前曾经用 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 来计算某些**围线积分**
-  现在可以直接应用**留数定理**来计算
-  作为计算**围线积分**的技术，**留数定理**包括了 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 作为**特殊情况**，所以是**更一般的方法**
-  当然，在逻辑上是先有 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 的

# 讨论

- 💡 以前曾经用 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 来计算某些**围线积分**
- 🏓 现在可以直接应用**留数定理**来计算
- 🏸 作为计算**围线积分**的技术，**留数定理**包括了 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 作为**特殊情况**，所以是**更一般的方法**
- ✍️ 当然，在逻辑上是先有 **Cauchy 积分公式** 和 **Cauchy 高阶导数公式** 的
- ✍️ **留数定理**把计算**围线积分**的问题转化为计算围线内**各孤立奇点的留数**的问题
- ✍️ 由上节可以看到，计算**极点的留数**主要涉及**微分运算**
- 🛹 对于**本性奇点**，必须作 **Laurent 展开**来计算其**留数**
- 🛹 作 **Laurent 展开**，通常归结为 **Taylor 展开**，而计算 **Taylor 展开**的系数也是**微分运算**问题
- ⛸️ 所以可以说，**留数定理**把**积分运算**转化成了比较容易的**微分运算**，因此它为积分的计算提供了一项非常有用的技术

## §5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分

当然，为了应用留数定理，必须把定积分转化为围线积分

通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射到复平面上围线

其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决

本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法

## §5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分

当然，为了应用留数定理，必须把定积分转化为围线积分

通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射到复平面上围线

其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决

本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法

可以用留数定理来计算的实变函数定积分是五花八门的，其中涉及的技巧也多种多样，不是一朝一夕所能掌握的

初学者能掌握几种固定的类型即可，学有余力再涉猎其它

对于这些固定的类型，可以导出相应的计算公式

了解这些公式的来源固然是必要的，但更重要的是掌握这些公式并能熟练地运用

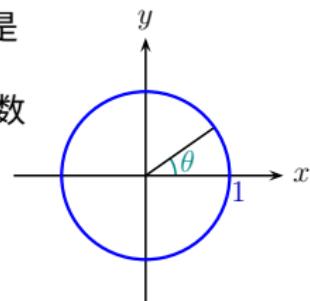
# 变量置换

本节讨论的积分具有  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  的形式，其中  $R$  是自变量  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的有理函数，即由多项式加减乘除得到的函数

对于这类积分，关键是作变量置换

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

这一变换将  $\theta$  的积分区间  $[0, 2\pi]$  映射为  $z$  平面上的单位圆周  $|z| = 1$



# 变量置换

本节讨论的积分具有  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  的形式，其中  $R$  是自变量  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的有理函数，即由多项式加减乘除得到的函数

对于这类积分，关键是作变量置换

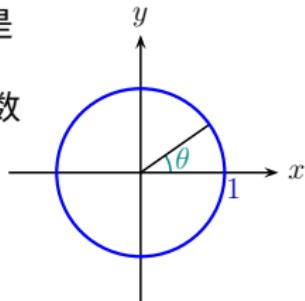
$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

这一变换将  $\theta$  的积分区间  $[0, 2\pi]$  映射为  $z$  平面上的单位圆周  $|z| = 1$

因此，定积分就变成了围线积分，注意到指数函数与三角函数之间的关系，有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

右边的被积函数是  $z$  的有理函数，所以用留数定理不难计算



# 变量置换

本节讨论的积分具有  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  的形式，其中  $R$  是自变量  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的有理函数，即由多项式加减乘除得到的函数

对于这类积分，关键是作变量置换

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

这一变换将  $\theta$  的积分区间  $[0, 2\pi]$  映射为  $z$  平面上的单位圆周  $|z| = 1$

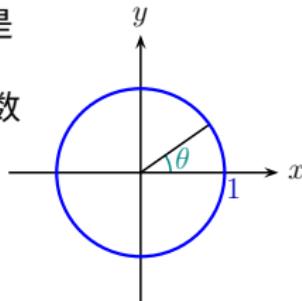
因此，定积分就变成了围线积分，注意到指数函数与三角函数之间的关系，有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

右边的被积函数是  $z$  的有理函数，所以用留数定理不难计算

对于这一类型的积分，无需记住具体的公式，只要记得变量置换  $z = e^{i\theta}$  就可以了

另外，如果题目中  $\theta$  的积分区间是  $[-\pi, \pi]$ ，同一变换也将其映射为  $z$  平面上的单位圆周  $|z| = 1$ ，因此没有必要刻意将  $\theta$  的积分区间先变换为  $[0, 2\pi]$



# 例 1

 例 1 计算积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$ , 其中  $-1 < a < 1$

 解 作变量置换  $z = e^{i\theta}$ , 得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}$$

 右边已是围线积分, 被积函数为有理分式, 其奇点就是分母

的根, 满足  $az^2 + 2z + a = 0$ , 由一元二次方程的求根公式得到两个根

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4a^2}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

## 例 1

 例 1 计算积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$ , 其中  $-1 < a < 1$

 解 作变量置换  $z = e^{i\theta}$ , 得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}$$

 右边已是围线积分, 被积函数为有理分式, 其奇点就是分母

的根, 满足  $az^2 + 2z + a = 0$ , 由一元二次方程的求根公式得到两个根

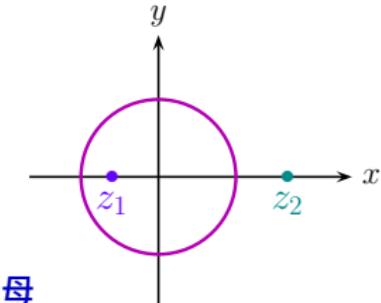
$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4a^2}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

  $-1 < a < 1$  表明  $|z_2| > 1$ , 由根与系数的关系有  $z_1 z_2 = 1$ , 故  $|z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1$

 从而, 只有  $z_1$  在单位圆内, 即对积分有贡献的只有  $z_1$  的留数

$$\text{Res} \left( \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right) = \left. \frac{1}{(az^2 + 2z + a)'} \right|_{z=z_1} = \frac{1}{2az_1 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}$$

 于是  $I = \frac{2}{i} 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$



## 例 2

 **例 2** 计算积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$ , 其中  $a > 1$

 **解** 本题不需重新作围线积分

 由于  $a > 1$ , 故  $0 < \frac{1}{a} < 1$

 利用**例 1** 的结果, 有

$$I = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos \theta/a} = \frac{1}{a} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 1/a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

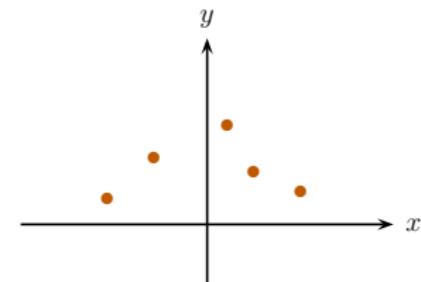
## §6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

本节讨论的积分具有  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  的形式，其中  $f(x)$  通常是**有理分式**

关于这类积分，可以推导出一个计算公式，把它表述为以下定理

**ℳ 定理** 设函数  $f(z)$  在**上半平面上有有限个孤立奇点**，此外它在**上半平面和实轴上解析**，且当  $z \rightarrow \infty$  时， $zf(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$$



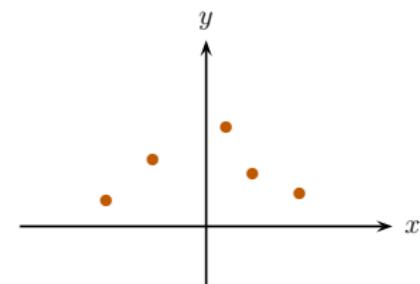
## §6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

本节讨论的积分具有  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  的形式，其中  $f(x)$  通常是**有理分式**

关于这类积分，可以推导出一个计算公式，把它表述为以下定理

**ℳ 定理** 设函数  $f(z)$  在**上半平面上有有限个孤立奇点**，此外它在**上半平面和实轴上解析**，且当  $z \rightarrow \infty$  时， $zf(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k)$$



**注**  $z \rightarrow \infty$  时  $zf(z) \Rightarrow 0$  (**一致趋于 0**) 的大意是

$zf(z) \rightarrow 0$  的**速度与  $z$  的辐角无关** (在指定的辐角范围内，这里是  $[0, \pi]$ )

**III** 精确地说，就是  $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists R_0 > 0$  与  $\theta$  无关，当  $|z| > R_0$  时，就有  $|zf(z)| < \varepsilon$

**鼙鼓** 求和号下面的  $\operatorname{Im} a_k > 0$  表示求和只对**上半平面的各孤立奇点**进行

# 满足条件的有理分式

 考虑  $f(z)$  是**有理分式**的情况，如果  $f(z) = \frac{2z}{z^3 + 2z + 1}$ ，则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2}{z^3 + 2z + 1} = 0$$

 由于这个极限与  $z$  的辐角无关，故  $z \rightarrow \infty$  时  $z f(z) \Rightarrow 0$

 如果  $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 2z + 1}$ ，则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2}{z^2 + 2z + 1} = 2$$

 从而**不满足**定理的条件

 由此可以推断，如果要用  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$  计算积分，则**有**

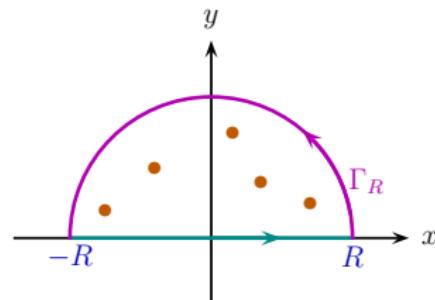
**理分式**  $f(x)$  中**分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 2**

# 定理的证明

证明 作半圆  $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )，与实轴上的线段  $[-R, R]$  一起构成围线  $C_R$ ，取  $R$  充分大以使  $f(z)$  在上半平面的孤立奇点全落在  $C_R$  内

根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$$



# 定理的证明

 证明 作半圆  $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )，与实轴上的线段  $[-R, R]$  一起构成围线  $C_R$ ，取  $R$  充分大以使  $f(z)$  在上半平面的孤立奇点全落在  $C_R$  内

 根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$$

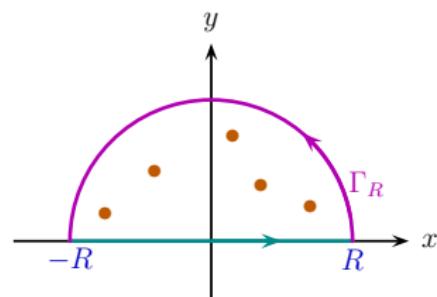
 由于  $z \rightarrow \infty$  时  $zf(z) \Rightarrow 0$ ，故  $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists R_0 > 0$  与  $\theta$  无关，当  $|z| > R_0$  时，就有  $|zf(z)| < \varepsilon/\pi$

 于是，当  $R > R_0$  时，

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_R} |f(z)| |dz| = \int_0^\pi |f(z)| R d\theta \\ &= \int_0^\pi |zf(z)| d\theta < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi d\theta = \varepsilon \end{aligned}$$

 故  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$ ，对  $\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k)$

取  $R \rightarrow \infty$  的极限得证



# 广义积分的主值

 由以上证明可以看出，这样求出的结果是**主值** (principal value)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

 而不是**一般值**  $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx$

 如果一个**广义积分** (包括**无穷积分**和**瑕积分**) 的**一般值**存在，则其**主值**必定存在且等于**一般值**

# 广义积分的主值

🎬 由以上证明可以看出，这样求出的结果是**主值** (principal value)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

🎥 而不是**一般值**  $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx$

🎥 如果一个**广义积分** (包括**无穷积分**和**瑕积分**) 的**一般值**存在，则其**主值**必定存在且等于**一般值**

📷 但**主值**存在则不足以保证**一般值**存在

📸 比如，积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$  的**主值**为 0，但**一般值不存在**：

$$\int_{-R}^R \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_{-R}^R = 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + R_2^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + R_1^2)$$

📸 用**留数定理**导出的关于**广义积分**的公式，包括本节、下节的公式和本课程没有介绍的情况，它们给出的都是积分的**主值**

## 例 1

 例 1 计算积分  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1}$

 解 取  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ ，它满足上述定理的条件，在  $z$  平面上有四个一阶极点

$$z_k = (-1)^{1/4} = (e^{\pi i + 2k\pi i})^{1/4} = e^{\pi i/4 + k\pi i/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

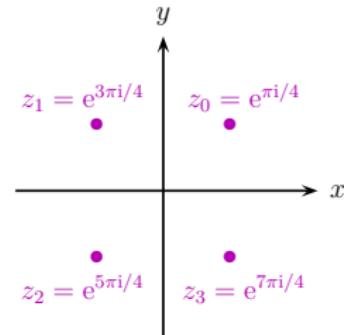
 其中  $z_0$  和  $z_1$  在上半平面

 注意到  $z_k^4 = -1$ ，各一阶极点的留数为

$$\text{Res } f(z_k) = \left. \frac{1}{(z^4 + 1)'} \right|_{z_k} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

$$\text{Res } f(z_0) + \text{Res } f(z_1) = -\frac{1}{4}(z_0 + z_1) = -\frac{e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4}}{4} = -\frac{e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}}{4} = -\frac{i}{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} 2\pi i [\text{Res } f(z_0) + \text{Res } f(z_1)] = \pi i \left( -\frac{i}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$



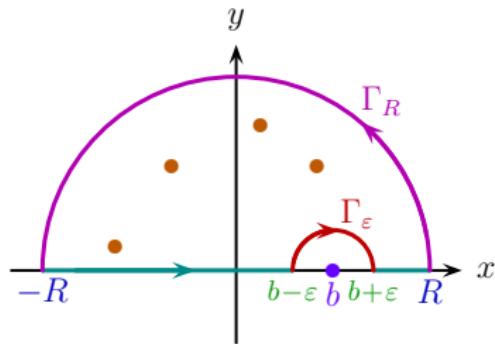
# 实轴上存在极点的情况

♪ 如果  $f(z)$  在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} b_k = 0} \operatorname{Res} f(b_k) \right]$$

方括号中第二项求和对实轴上的**各单极点**进行

形象地看，可以认为**实轴上的一阶极点有一半**处于上半平面，因此它们对**积分**的贡献只相当于**上半平面奇点**所贡献的**一半**，相关论证如下



# 实轴上存在极点的情况

如果  $f(z)$  在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} b_k = 0} \operatorname{Res} f(b_k) \right]$$

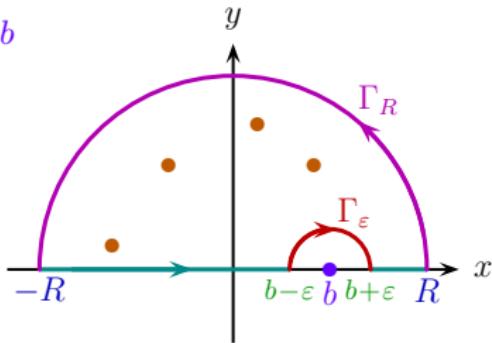
方括号中第二项求和对实轴上的**各单极点**进行

形象地看，可以认为**实轴上的一阶极点有一半**处于上半平面，因此它们对**积分**的贡献只相当于**上半平面奇点**所贡献的**一半**，相关论证如下

简单起见，设  $f(z)$  在**实轴**上只有一个一阶极点  $b$

以一阶极点  $b$  为圆心，以充分小的**正数  $\varepsilon$**  为半径作**半圆弧  $\Gamma_\varepsilon$**

$\Gamma_\varepsilon$  与实轴上的线段  $[-R, b - \varepsilon]$  和  $[b + \varepsilon, R]$  以及  $\Gamma_R$  一起构成**围线  $C_R$**



# 积分公式的证明

根据 Cauchy 留数定理，有

$$\begin{aligned}\int_{C_R} f(z) dz &= \int_{-R}^{b-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{b+\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } a_k > 0 \\ \text{Im } a_k > 0}} \text{Res } f(a_k)\end{aligned}$$

在一阶极点  $z = b$  的去心邻域内将  $f(z)$  展开为 Laurent 级数，有

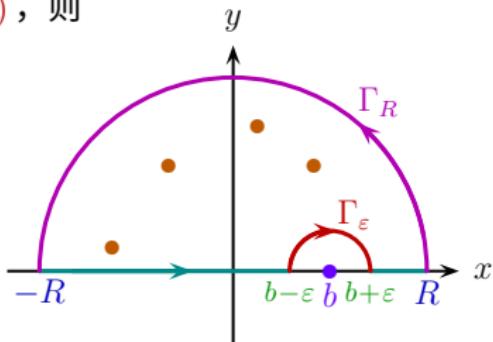
$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - b} + P(z - b), \quad P(z - b) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - b)^n$$

将半圆弧  $\Gamma_\varepsilon$  参数化为  $z - b = \varepsilon e^{i\phi}$  ( $0 < \phi < \pi$ )，则

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z - b} dz &= \int_{\pi}^0 \frac{c_{-1}}{\varepsilon e^{i\phi}} i\varepsilon e^{i\phi} d\phi \\ &= -\pi i c_{-1} = -\pi i \text{Res } f(b)\end{aligned}$$

$P(z - b)$  在  $\Gamma_\varepsilon$  上解析，因而连续且有界

故  $\exists M > 0$ ，使得  $|P(z - b)| < M$



# 完成证明

从而  $\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} P(z - b) dz \right| \leq \int_{\Gamma_\varepsilon} |P(z - b)| |dz| < M \int_0^\pi \varepsilon d\phi = \varepsilon \pi M$

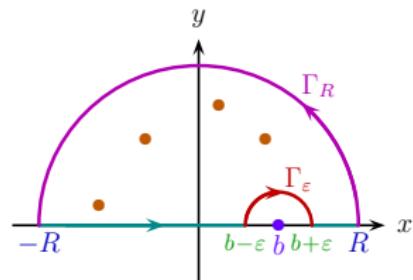
取  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限，得  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P(z - b) dz = 0$ ，故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z - b} dz = -\pi i \operatorname{Res} f(b)$$

于是，对

$$\int_{-R}^{b-\varepsilon} f(x) dx + \int_{b+\varepsilon}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) - \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz - \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

取  $R \rightarrow \infty$ 、 $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限得  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} f(b) \right]$



# 完成证明

从而  $\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} P(z - b) dz \right| \leq \int_{\Gamma_\varepsilon} |P(z - b)| |dz| < M \int_0^\pi \varepsilon d\phi = \varepsilon \pi M$

取  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限，得  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P(z - b) dz = 0$ ，故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{c-1}{z-b} dz = -\pi i \operatorname{Res} f(b)$$

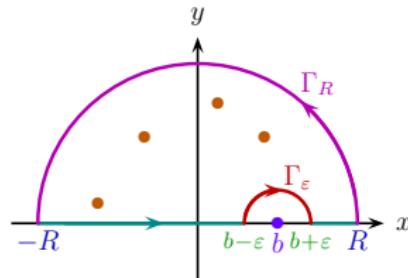
于是，对

$$\int_{-R}^{b-\varepsilon} f(x) dx + \int_{b+\varepsilon}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) - \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz - \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

取  $R \rightarrow \infty$ 、 $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限得  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res} f(a_k) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} f(b) \right]$

此时，积分既是无穷积分 ( $R \rightarrow \infty$ )，又是瑕积分 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )，因而积分结果是双重意义下的主值

注意，实轴上的奇点只能是一阶极点，否则沿  $\Gamma_\varepsilon$  的积分发散，而积分公式不成立



## 例 2

例 2 计算积分  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x^2+1)}$

解 取  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z^2+1)}$ ，它满足上述定理的条件

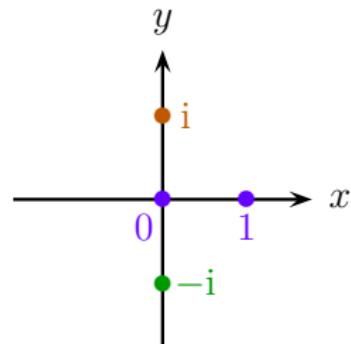
$f(z)$  在上半平面上有一阶极点  $z = i$ ，在实轴上有一阶极点  $z = 0$  和  $z = 1$

各一阶极点的留数为

$$\text{Res } f(i) = \left. \frac{1}{z(z-1)(z+i)} \right|_{z=i} = -\frac{1}{2(i-1)} = \frac{1+i}{4}$$

$$\text{Res } f(0) = \left. \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} \right|_{z=0} = -1, \quad \text{Res } f(1) = \left. \frac{1}{z(z^2+1)} \right|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[ \text{Res } f(i) + \frac{1}{2} \text{Res } f(0) + \frac{1}{2} \text{Res } f(1) \right] \\ &= 2\pi i \left( \frac{1+i}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



## §7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$

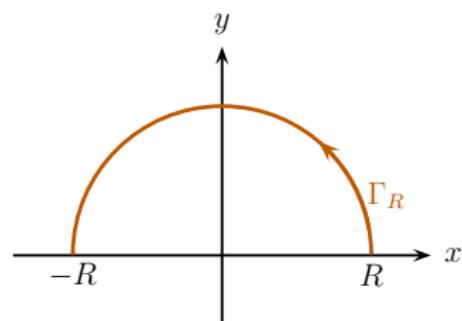
 为了计算形如  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$  的积分，先介绍下述引理

**Ω Jordan 引理** 设函数  $f(z)$  在半圆  $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 上连续，且当  $R \rightarrow \infty$  时， $f(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0 \quad (m > 0)$$



Camille Jordan  
(1838–1922)



## §7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$

 为了计算形如  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx$  的积分，先介绍下述引理

 **Jordan 引理** 设函数  $f(z)$  在半圆  $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 上连续，且当  $R \rightarrow \infty$  时， $f(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0 \quad (m > 0)$$

 证明见选读内容，这里作一点直观的说明

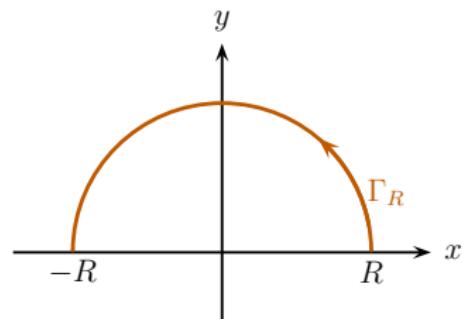
 在上一节计算积分类型  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  时，

曾经用到  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$  的结论，其条件是当  $R \rightarrow \infty$  时， $zf(z) \Rightarrow 0$

 这里看到，Jordan 引理所要求的条件较弱

 主要原因是半圆上的点满足  $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，使得被积函数中含有因子

$$e^{imz} = e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$$



# 讨论

 由于  $m > 0$  和  $\sin \theta > 0$  ( $0 < \theta < \pi$ )， $e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$  中第一个因子

$e^{-mR \sin \theta}$  随着  $R$  的增大迅速衰减 ( $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  两点例外，但对结论没有影响)

 这弥补了  $f(z)$  下降较慢的不足

 第二个因子  $e^{imR \cos \theta} = \cos(mR \cos \theta) + i \sin(mR \cos \theta)$  在半径很大的圆弧上是  $\theta$  的快速振荡函数，也有助于积分的收敛，但第一个因子起主要作用

# 讨论

由于  $m > 0$  和  $\sin \theta > 0$  ( $0 < \theta < \pi$ )， $e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$  中第一个因子

$e^{-mR \sin \theta}$  随着  $R$  的增大迅速衰减 ( $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  两点例外，但对结论没有影响)

这弥补了  $f(z)$  下降较慢的不足

第二个因子  $e^{imR \cos \theta} = \cos(mR \cos \theta) + i \sin(mR \cos \theta)$  在半径很大的圆弧上是  $\theta$  的快速振荡函数，也有助于积分的收敛，但第一个因子起主要作用

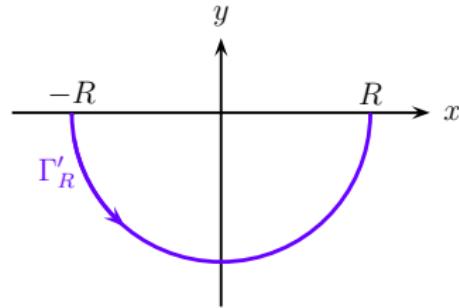
由上面分析看出  $m > 0$  这个条件是必不可少的，因为它让指数函数  $e^{-mR \sin \theta}$  的宗量  $-mR \sin \theta < 0$  ( $0 < \theta < \pi$ )，使得第一个因子随着  $R$  的增大而衰减

如果假设中的半圆改为

$$\Gamma'_R : z = R e^{i\theta} \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$$

而  $\sin \theta < 0$  ( $\pi < \theta < 2\pi$ )

则 Jordan 引理对  $m < 0$  才成立



# 定理

有了 **Jordan 引理**，就很容易推导出下面的公式，把它表述成定理

**定理** 设函数  $f(z)$  在上半平面上有有限个孤立奇点，此外它在上半平面和实轴上解析，且当  $z \rightarrow \infty$  时， $f(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, a_k], \quad m > 0$$

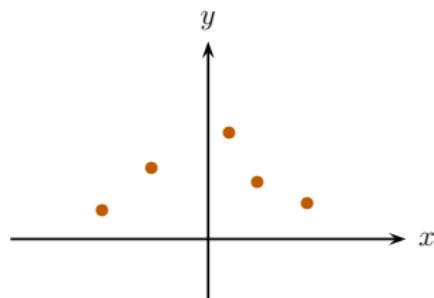
注 这里求和也只对上半平面的各孤立奇点进行

注意这里的条件 “当  $z \rightarrow \infty$  时， $f(z) \Rightarrow 0$ ”

比上节的相应条件弱

如果  $f(x)$  是有理分式，则易知分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 1

应特别注意公式成立的条件是  $m > 0$



 如果  $m < 0$ ，可作**变量置换**  $x' = -x$ ，将积分化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x') e^{-imx'} (-dx') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{i|m|x} dx$$

 此时如果  $f(-z)$  也满足**定理**的条件，就能应用**定理**

 所以  $m > 0$  这一条件并不构成本质的限制

# 定理的证明

如果  $m < 0$ , 可作变量置换  $x' = -x$ , 将积分化为

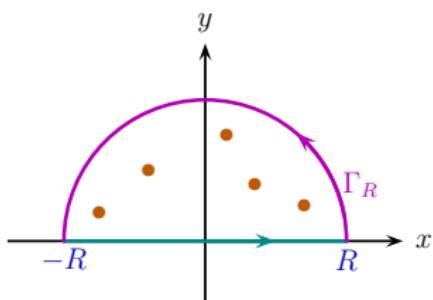
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x') e^{-imx'} (-dx') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{i|m|x} dx$$

此时如果  $f(-z)$  也满足定理的条件, 就能应用定理

所以  $m > 0$  这一条件并不构成本质的限制

证明 作半圆  $\Gamma_R : z = R e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), 与实轴上的线段  $[-R, R]$  一起构成围线  $C_R$ , 取  $R$  充分大以使  $f(z)$  在上半平面的孤立奇点全落在  $C_R$  内

根据 Cauchy 留数定理, 有



$$\int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = \int_{-R}^R f(x) e^{imx} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res}[f(z)e^{imz}, a_k]$$

取  $R \rightarrow \infty$  的极限, 由 Jordan 引理, 半圆上的积分为 0, 证毕

## 例 1

例 1 计算积分  $I = \int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx$ , 其中  $m > 0$

解 在  $e^{imx} = \cos mx + i \sin mx$  中,  $\cos mx$  和  $\sin mx$  分别是  $x$  的偶函数和奇函数, 故

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx$$

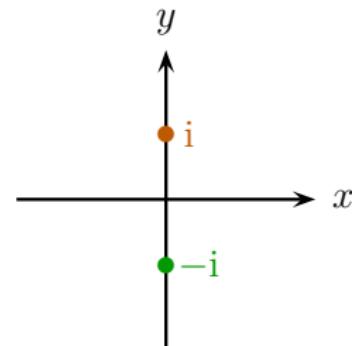
取  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ , 它满足上述定理的条件, 在上半平面只有一个一阶极点  $z = i$

$z = i$  处的相关留数为

$$\text{Res}[f(z)e^{imz}, i] = \left. \frac{e^{imz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = \left. \frac{e^{imz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

故  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \text{Res}[f(z)e^{imz}, i] = \pi e^{-m}$

于是  $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$



## 例 2

 例 2 计算积分  $I = \int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx$ , 其中  $a > 0$ ,  $m \in \mathbb{R}$  且  $m \neq 0$

 解 先考虑  $m > 0$ , 有

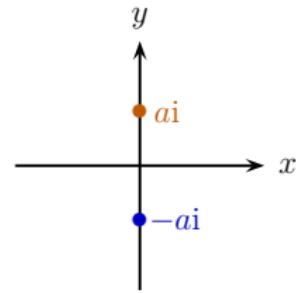
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{imx}}{x^2 + a^2} dx$$

 取  $f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$ , 它满足上述定理条件, 在上半平面只有一个一阶极点  $z = ai$

  $z = ai$  处相关留数为  $\operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, ai] = \left. \frac{z e^{imz}}{(z^2 + a^2)'} \right|_{z=ai} = \left. \frac{z e^{imz}}{2z} \right|_{z=ai} = \frac{e^{-ma}}{2}$

 故  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, ai] = i\pi e^{-ma}$

 于是  $I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma}$



# $m < 0$ 的情况

 当  $m < 0$  时，有  $m = -|m|$ ，可利用以上  $m > 0$  时的结果，得

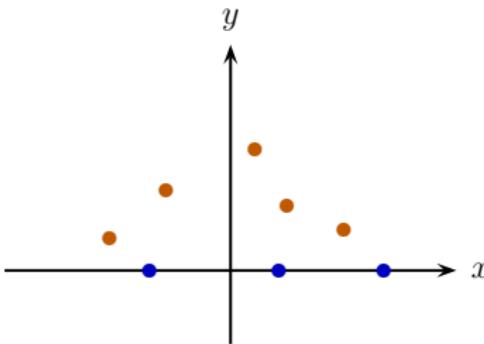
$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = - \int_0^\infty \frac{x \sin |m|x}{x^2 + a^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-|m|a} = -\frac{\pi}{2} e^{ma}$$

# 实轴上存在极点的情况

如果  $f(z)$  在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \left\{ \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res}[f(z)e^{imz}, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } b_k = 0} \text{Res}[f(z)e^{imz}, b_k] \right\},$$

$m > 0$



# 实轴上存在极点的情况

 如果  $f(z)$  在实轴上有若干一阶极点，此外满足上述定理的条件，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \left\{ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} b_k = 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, b_k] \right\},$$

$m > 0$

 例 3 计算 Dirichlet 积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$ ，其中  $m \in \mathbb{R}$  且  $m \neq 0$

 解 先考虑  $m > 0$ ，有

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx$$

 取  $f(z) = \frac{1}{z}$ ，它满足上述定理条件，在上半平面没有奇点，在实轴上有一个一阶极点  $z = 0$ ，其留数为

$$\operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, 0] = e^{imz}|_{z=0} = 1$$

## 例 3

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, 0] = \pi i$$

于是

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad m > 0$$

当  $m < 0$  时, 有  $m = -|m|$ , 可利用以上  $m > 0$  时的结果, 得

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin |m|x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$$