

量子场论

第5章 量子场的相互作用

5.5节 散射截面和衰变宽度

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2022年3月2日



5.5 节 散射截面和衰变宽度

在没有相互作用的理论中， S 算符就是单位算符 1 ， S 矩阵为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle$

■ 存在相互作用时, $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \text{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是单位算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = 1 + iT$ ，其中 iT 包含所有 $n \geq 1$ 的项 $\Rightarrow S$ 矩阵分解为 $S_{fi} = \langle f|i \rangle + \langle f|iT|i \rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用



由此可见， S 矩阵中真正描述相互作用的项是 $\langle f | iT | i \rangle$

5.5 节 散射截面和衰变宽度

在没有相互作用的理论中， S 算符就是单位算符 1 ， S 矩阵为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle$

■ 存在相互作用时, $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \text{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n = 0$ 项也是单位算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = 1 + iT$ ，其中 iT 包含所有 $n \geq 1$ 的项 ➡ S 矩阵分解为 $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | iT | i \rangle$

 右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见， S 矩阵中真正描述相互作用的项是 $\langle f | iT | i \rangle$

由于能动量守恒定律，初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 必定等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ ，这意味着散射矩阵元的形式为

$$\langle f | iT | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$$

 四维 δ 函数体现了能动量守恒定律； M 是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元**，或**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态动量的函数

5.5.1 小节 跃迁概率

 **发生相互作用**时， $i \rightarrow f$ 的**跃迁概率**可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$ ，**分子**为

$$|\langle f | iT | i \rangle|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^{(4)} \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

 由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$

5.5.1 小节 跃迁概率

 **发生相互作用**时， $i \rightarrow f$ 的**跃迁概率**可以表示成 $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$ ，**分子**为

$$|\langle f | iT | i \rangle|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

 由于 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$

 故 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \tilde{V}\tilde{T}$ ， \tilde{V} 是**空间区域的体积**， \tilde{T} 是**时间范围的长度**

 对于**全空间全时间积分**， \tilde{V} 和 \tilde{T} 趋于无穷大

 于是推出 $|\langle f | iT | i \rangle|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$

 对于时空坐标的函数 $f(x)$ ，将 Fourier 变换约定为 $\tilde{f}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x)$

 Fourier 逆变换为 $f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{f}(p)$

初态和末态

现在讨论 **2** 体初态到 **n** 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 **A** 和 **B**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n** 个粒子的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 p_A 和 p_B ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} \, a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

 此处省略了产生算符的螺旋度指标（或者说，自旋指标）

 $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到零

初态和末态

现在讨论 **2** 体初态到 **n** 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 **A** 和 **B**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n** 个粒子的末态 $|f\rangle$

 设初态中两个粒子的动量分别为 p_A 和 p_B ，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

 此处省略了产生算符的螺旋度指标(或者说,自旋指标)

$|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**

类似地，末态可以写成

$$|\textcolor{brown}{f}\rangle = \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2E_j} \, \textcolor{red}{a}_{\mathbf{p}_j}^\dagger \right) |0\rangle, \quad E_j = p_j^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}$$

其中 \mathbf{p}_j ($j = 1, \dots, n$) 是 n 个末态粒子的动量

此时，初态和末态的**四维总动量**分别是 $p_i^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=1}^n p_j^\mu$

初末态内积

 当 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

 这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 的两个量子场所对应的**真空态**

 参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

 利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

 于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

初末态内积

 当 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

 这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 的两个量子场所对应的**真空态**

 参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

 利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

 于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

 当 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是由同一量子场描述的**全同粒子**时，若 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \neq \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ ，也能推出这个结果

 如果末态**不包含全同粒子**，同理可得 $\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^n (2E_j\tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

 从而，**跃迁概率**化为

$$P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{\tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

 系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的动量 $\{p_j\}$ ，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

 从而，跃迁概率化为

$$P_{f|i} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{\tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

 系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 \tilde{T} ，对于一组特定的动量 $\{p_j\}$ ，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{f|i}}{\tilde{T}} = \left[4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

 此处**四维 δ 函数**可以分解为

$$\delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) = \delta^{(3)} \left(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right) \delta \left(E_A + E_B - \sum_{j=1}^n E_j \right)$$

 在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取**任意满足运动学要求**的值，而**能动量守恒定律**对应的**运动学条件** $p_A^\mu + p_B^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu = 0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

为了确保动量算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

一维动量相空间

 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

 考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

 为了确保动量算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

 作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

 结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ ，故 $\exp(ipL) = 1$

 这意味着 $pL = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ，因此动量本征值是 $p_k = 2k\pi/L$, $k \in \mathbb{Z}$

一维动量相空间

为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分

考察一维动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \rightarrow \infty$

为了确保动量算符 $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件 $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ ，故 $\exp(ipL) = 1$

这意味着 $pL = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ，因此动量本征值是 $p_k = 2k\pi/L$, $k \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \rightarrow dp, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

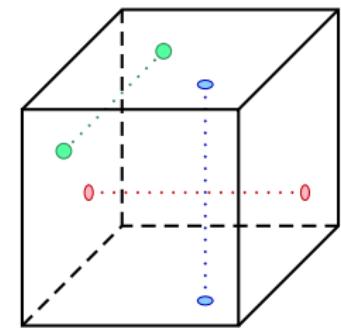
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

单位时间内跃迁概率

 推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

 满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

 当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$



单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

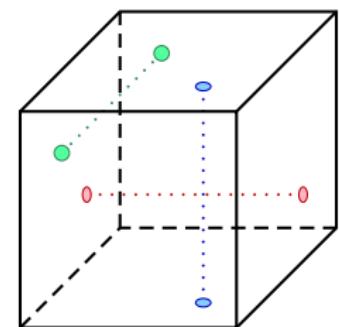
满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$

考虑 n 个末态粒子**所有动量取值**，对 $R_{\{p_j\}}$ 作**末态相空间积分**，得到**单位时间**内 $2 \rightarrow n$ 散射过程的**跃迁概率**

$$\begin{aligned} R &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

上式中**相空间体积元** $\frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 **Lorentz 不变的**



末态对称性因子

 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立

 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以相应的末态对称性因子 S** ，从而**避免量子态的重复计算**

 如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$S = \prod_k n_k!$$

 单位时间跃迁概率变成

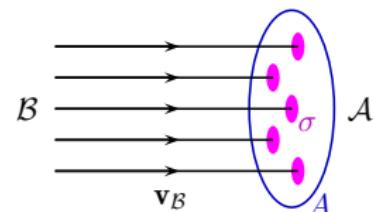
$$R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

5.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，靶 (target) 由 A 粒子组成，束流 (beam) 由 B 粒子组成

设束流中每个 B 粒子的运动速度相同，记为 v_B ，按照狭义相对论， $v_B \equiv p_B/E_B$



5.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，靶 (target) 由 \mathcal{A} 粒子组成，束流 (beam) 由 \mathcal{B} 粒子组成

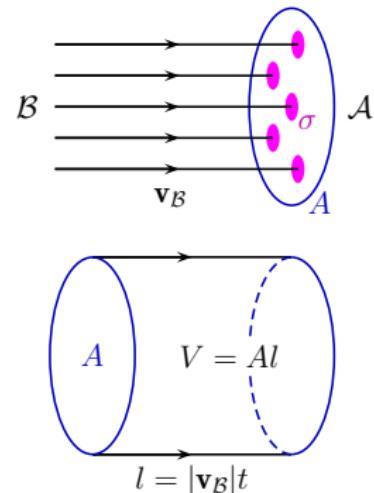
设束流中每个 \mathcal{B} 粒子的运动速度相同，记为 $v_{\mathcal{B}}$ ，按照狭义相对论， $v_{\mathcal{B}} \equiv p_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$

记束流的横截面积为 A ，则 t 时间内束流的一个横截面经过的体积为 $V = A|v_{\mathcal{B}}|t$

再设束流中 \mathcal{B} 粒子的数密度为 $n_{\mathcal{B}}$ ，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}V = n_{\mathcal{B}}A|v_{\mathcal{B}}|t$

在单位时间内穿过单位面积的 \mathcal{B} 粒子数称为流密度，记作 $j_{\mathcal{B}}$ ，通过下式计算，

$$j_{\mathcal{B}} = \frac{N_{\mathcal{B}}}{At} = \frac{n_{\mathcal{B}}A|v_{\mathcal{B}}|t}{At} = n_{\mathcal{B}}|v_{\mathcal{B}}|$$



散射截面

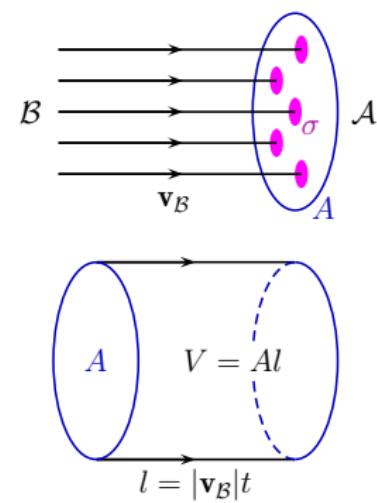
考慮流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入了物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$



散射截面

考慮流密度为 $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$ 的束流打到由 N_A 个 A 粒子组成的靶上，则 t 时间内散射发生的次数可以表示为 $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入了物理量 σ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由 A 粒子与 B 粒子的相互作用性质决定

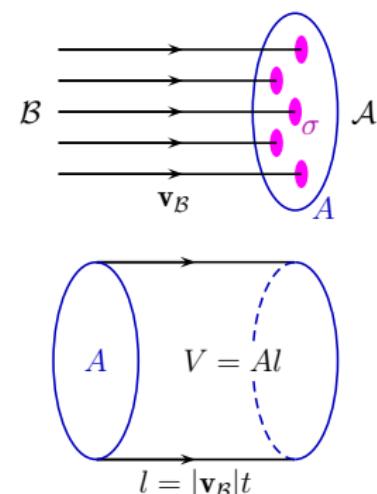
截面的常用单位是靶 (barn)，记作 b，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_A j_B \sigma}{V} = \frac{N_A n_B |\mathbf{v}_B| \sigma}{V} = n_A n_B \sigma |\mathbf{v}_B|$$

$n_A = N_A/V$ 相当于 A 粒子在体积 V 中的数密度



A 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上，那么，可以看作在体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子，因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

 单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

 代入 $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$

 得到散射截面的表达式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_A n_B |\mathbf{v}_B|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_B|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_B|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_B|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

A 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个 B 粒子打到一个 A 粒子上，那么，可以看作在体积 \tilde{V} 中仅有这两个粒子，因而 $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

单位时间单位体积内散射次数 \mathcal{R} 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

代入 $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} \tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$

得到散射截面的表达式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

上式对 A 粒子静止的参考系成立

需要将上式推广到任意惯性系，以适用于 A 和 B 处在任意运动状态的情况

为此，把散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量会比较方便

上式最后一行中除第二个因子 $(4E_A E_B |v_B|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的

Lorentz 不变的散射截面

在 A 粒子静止的参考系中， $|v_B|$ 就是 B 粒子与 A 粒子之间的相对速度

一般地，相对速度定义为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ ，其中 $\mathbf{v}_A \equiv \mathbf{p}_A/E_A$ 是 A 的运动速度

不过， $E_A E_B v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

Lorentz 不变的散射截面

在 A 粒子静止的参考系中, $|v_B|$ 就是 B 粒子与 A 粒子之间的相对速度

一般地，相对速度定义为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ ，其中 $\mathbf{v}_A \equiv \mathbf{p}_A/E_A$ 是 A 的运动速度

不过， $E_A E_\beta v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

我们要做的是将相对速度替换为另一个物理量 Møller 速度

$$v_{M\otimes l} \equiv \frac{1}{E_A E_B} \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$$

蘑菇 入射流因子 $E_A E_\beta v_{M\odot}$ 是 Lorentz 不变量，将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\ddot{\text{o}}\text{l}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

Lorentz 不变的散射截面

🚗 在 \mathcal{A} 粒子静止的参考系中, $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 \mathcal{B} 粒子与 \mathcal{A} 粒子之间的相对速度

🥑 一般地, 相对速度定义为 $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$, 其中 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \mathbf{p}_{\mathcal{A}}/E_{\mathcal{A}}$ 是 \mathcal{A} 的运动速度

🌰 不过, $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量

🍆 我们要做的是将相对速度替换为另一个物理量 Møller 速度

$$v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$$

🍄 入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量, 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

⌚ 相应的单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v_{\text{Møl}}$ 也是 Lorentz 不变的

🍋 当 \mathcal{A} 粒子静止时, $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$, 故 $v_{\text{Møl}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{m_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

$= \frac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$, 此时散射截面恢复到上一页表达式

n 体不变相空间和微分散射截面

 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{M\phi l}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是力学因素，而其它部分都属于运动学因素

 在运动学因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_{\textcolor{red}{n}} = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right)$$

 这个积分称为 ***n* 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\ddot{\text{o}}\text{l}}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$ 中，不

变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

hog 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j)$$

fish 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

fish 如果在**散射截面表达式**中不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$d\sigma = \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$$

fish 注意，计算微分截面时**不需要考虑末态对称性因子** \mathcal{S} ，因而 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \int d\sigma$

fish 如果**末态不包含全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 1$

Møller 速度与相对速度

 讲义中推出了 Møller 速度与 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 粒子运动速度的关系式

$$v_{M\ddot{o}l} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

 如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = 0$ ，则 $v_{M\ddot{o}l} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{rel}$ ，即 Møller 速度与相对速度相同

 入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{rel}$

 满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 \mathcal{A} 粒子或 \mathcal{B} 粒子静止

 另一种情况是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到
在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

 讲义中推出了 Møller 速度与 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 粒子运动速度的关系式

$$v_{M\ddot{o}ller} = \sqrt{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|^2 - |\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B|^2}$$

 如果 $\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B = 0$ ，则 $v_{M\ddot{o}ller} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = v_{rel}$ ，即 Møller 速度与相对速度相同

 入射流因子化为 $E_A E_B v_{rel}$

 满足这个条件的一种情况是 \mathbf{v}_A 或 \mathbf{v}_B 为零，即 \mathcal{A} 粒子或 \mathcal{B} 粒子静止

 另一种情况是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到
在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

 当 $v_{M\ddot{o}ller} = v_{rel}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$

 在非相对论极限下， $v_{rel} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ 确实是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的相对速度

 但是，对于极端相对论极限下的束流对撞， $|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = 1$ 且 $\mathbf{v}_B = -\mathbf{v}_A$

 故 $v_{rel} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = 2$ ，它是真空光速的 2 倍，显然不是真正意义的相对速度

质心系



对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的

不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系**（简称**质心系**，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多

质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy) E_{CM} ，满足

$$E_{CM} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^n E_j.$$

它是 **Lorentz 不变量**，

$$(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 - (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 = E_{CM}^2$$

$2 \rightarrow n$ 散射运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**, 物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生, 则在其它惯性系中也能发生
- 因此, 利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中, 当末态粒子动量 p_j 都为零时, **质心能最低**, 为 $\sum_j m_j$

$2 \rightarrow n$ 散射运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**, 物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生, 则在其它惯性系中也能发生
- 因此, 利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中, 当末态粒子动量 p_j 都为零时, **质心能最低**, 为 $\sum_j m_j$
- 所以, 发生 $2 \rightarrow n$ 散射过程的**运动学条件**是

$$E_{CM} > \sum_{j=1}^n m_j$$

- 即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**
- 若 $E_{CM} = \sum_j m_j$, 则末态相空间体积为零, 散射过程**不能发生**
- 可以认为, **质心能** E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

5.5.3 小节 两体散射运动学



接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子



在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$



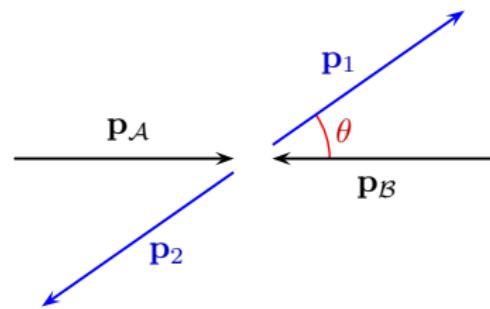
可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$



末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反



这些动量在质心系中的关系右图所示



5.5.3 小节 两体散射运动学



接下来讨论 $2 \rightarrow 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子



在质心系中，有 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而 $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$



可见，初态中 \mathbf{p}_A 与 \mathbf{p}_B 大小相等，方向相反，故 $v_{M\phi l} = v_{rel}$



末态中 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 也是大小相等，方向相反



这些动量在质心系中的关系右图所示



θ 是 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_A 之间的夹角，称为散射角

(scattering angle)



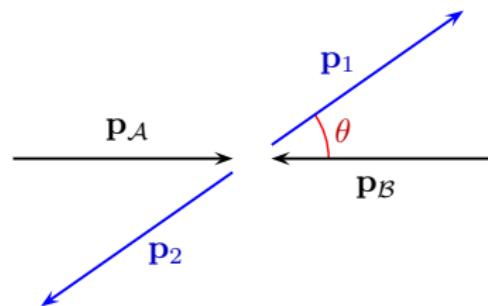
质心能满足 $E_{CM} = E_A + E_B = E_1 + E_2$



发生这个过程的运动学条件是 $E_{CM} > m_1 + m_2$



$2 \rightarrow 2$ 散射截面写成 $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2$



2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \end{aligned}$$

第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 \mathbf{p}_2 的积分

此积分看起来没有效果，但实际上要求 \mathbf{p}_2 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

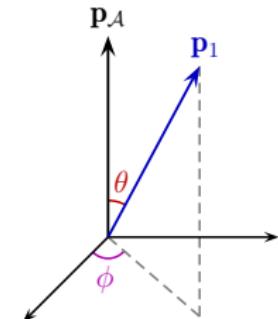
这个条件在质心系中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{CM} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \end{aligned}$$



第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 \mathbf{p}_2 的积分

此积分看起来没有效果，但实际上要求 \mathbf{p}_2 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

这个条件在质心系中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

第三步建立球坐标系，以 \mathbf{p}_A 方向为极轴方向，以散射角 θ 为极角 (polar angle)

将 \mathbf{p}_1 投影在垂直于 \mathbf{p}_A 的平面上以定义方位角 (azimuthal angle) ϕ

将 \mathbf{p}_1 动量体积元分解为 $d^3 p_1 = |\mathbf{p}_1|^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega$ ，立体角微分 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

极角 θ 的取值范围为 $[0, \pi]$ ，方位角 ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

2 → 2 散射截面



现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{CM} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} (E_{CM} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{CM}} \end{aligned}$$

2 → 2 散射截面

 现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} (E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \end{aligned}$$

 **2 → 2 散射截面**化为 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

 质心系中的**微分散射截面**是 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系能动量

利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|p_1| = |p_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{\cancel{E_1^2} - m_1^2 + m_2^2}$$

故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

即 $2E_{CM}E_1 = E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2$, 从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

质心系能动量

 利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

 即 $2E_{\text{CM}}E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 根据动量与能量的关系，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} [E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\text{CM}}^2m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2 - 4E_{\text{CM}}^2m_1^2] \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\text{CM}}^2m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2m_2^2 - 4m_1^2m_2^2) \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} \lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) \end{aligned}$$

质心系微分散射截面

 λ 函数定义为 $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$, 关于 x, y, z 对称

末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \lambda^{1/2}(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2}\right)$$

 质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) |\mathcal{M}|^2$$

质心系微分散射截面

 **λ** 函数定义为 $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$, 关于 x, y, z 对称
末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \lambda^{1/2}(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2}\right)$$

 质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) |\mathcal{M}|^2$$

 将类似分析应用到初态上, 同理得质心系中初态粒子**能量**是

$$E_A = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_A^2 - m_B^2), \quad E_B = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_B^2 - m_A^2)$$

 **动量**大小是

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_A^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_B^2}{E_{\text{CM}}^2}\right)$$

特殊情况

 下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴** (\mathbf{p}_A 对应的直线) **对称**, 则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

 **散射截面**为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴** (\mathbf{p}_A 对应的直线) **对称**, 则不变振幅 \mathcal{M} 与 ϕ 无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面 为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

(2) 如果初态粒子质量相同, $m_A = m_B = m_i$, 末态粒子质量相同, $m_1 = m_2 = m_f$, 则 $E_1 = (E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{CM})$ 和 $E_2 = (E_{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{CM})$ 意味着

$$E_A = E_B = E_1 = E_2 = \frac{E_{CM}}{2}$$

即初末态粒子分别**平分质心能**

此时, 如果末态 2 个粒子是**全同**的, 那么末态对称性因子 $S = 2$, 否则 $S = 1$

特殊情况

 另一方面，由 $\lambda(x, y, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = \textcolor{blue}{x}(x - 4y)$ 得

$$\lambda^{1/2} \left(1, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}}$$

 故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_f}{2}$$

 其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

 根据狭义相对论中运动速度的定义， β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况

 从而, 由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$

 于是, 微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

特殊情况

 从而, 由 $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ 和 $E_B = E_A = E_{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$

 于是, 微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同, $m_A = m_B = m_1 = m_2$, 则 $\beta_i = \beta_f$, 有

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

5.5.4 小节 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

不稳定粒子 A 自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

在 A 粒子静止参考系中，它在衰变之前存活的时间 t 服从指数分布，概率密度为

$$P(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

其中 τ 是常数，称为粒子的寿命 (lifetime)，则 t 的期待值为

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t e^{-t/\tau} dt = - \int_0^\infty t d e^{-t/\tau} = -t e^{-t/\tau} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt \\ &= -\tau e^{-t/\tau} \Big|_0^\infty = \tau \end{aligned}$$

可见，寿命是粒子存活的平均时间

5.5.4 小节 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

不稳定粒子 \mathcal{A} 自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

在 \mathcal{A} 粒子静止参考系中，它在衰变之前存活的时间 t 服从指数分布，概率密度为

$$P(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \Gamma \exp(-\Gamma t)$$

其中 τ 是常数，称为粒子的寿命 (lifetime)，则 t 的期待值为

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t e^{-t/\tau} dt = - \int_0^\infty t d e^{-t/\tau} = -t e^{-t/\tau} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt \\ &= -\tau e^{-t/\tau} \Big|_0^\infty = \tau \end{aligned}$$

可见，寿命是粒子存活的平均时间

因此， $\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$ 是 \mathcal{A} 粒子在静止系中发生衰变的平均速率

Γ 在自然单位制中具有质量的量纲，称为衰变宽度 (decay width)，简称宽度

分支比和分宽度

 \mathcal{A} 粒子可能有**多种**衰变过程

 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

 Γ_f 是 \mathcal{A} 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的平均速率

分支比和分宽度

 \mathcal{A} 粒子可能有**多种**衰变过程

 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

 Γ_f 是 \mathcal{A} 粒子静止系中衰变过程 $i \rightarrow f$ 发生的平均速率

 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

 总宽度 Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

接下来通过跃迁概率计算衰变过程 $i \rightarrow f$ 的分宽度

现在，初态 $|i\rangle$ 只包含 1 个粒子 \mathcal{A} ，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子

因此， $|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i \rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$

类似于散射的情况，衰变过程 $i \rightarrow f$ 的跃迁概率是

$$P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j V)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$ ，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式



将末态动量的所有取值考虑进来，可得单位时间内衰变过程 $i \rightarrow f$ 的发生概率为

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2E_A} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$



其中 \mathcal{S} 是末态对称性因子

在 A 粒子静止系中， $E_A = m_A$ ，而 R_f 的值就是分宽度 Γ_f ，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_A} \left(\prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

衰变末态分布和运动学条件

若 A 粒子是标量粒子，自旋为 0，则 A 粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

若 A 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 A 粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 A 粒子自旋方向为轴

在实际情况中， A 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同

那么，可对 A 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

衰变末态分布和运动学条件



若 \mathcal{A} 粒子是标量粒子，自旋为 0，则 \mathcal{A} 粒子静止系没有特殊的方向

👉 任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

♠ 若 \mathcal{A} 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 \mathcal{A} 粒子静止系的特殊方向

👉 末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 \mathcal{A} 粒子自旋方向为轴

♠ 在实际情况中， \mathcal{A} 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同

❤ 那么，可对 \mathcal{A} 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

♣ 由于 \mathcal{A} 粒子静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{CM} = m_{\mathcal{A}}$

♦ 因此，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^n m_j$$



即 \mathcal{A} 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变

5.5.5 小节 衰变运动学

下面分别讨论**二体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于二体衰变, $n = 2$, 在 \mathcal{A} 粒子静止系中, 由于 $E_{\text{CM}} = m_{\mathcal{A}}$, 末态能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_A} (m_A^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_A} (m_A^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 末态动量为 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_A}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_A^2}, \frac{m_2^2}{m_A^2} \right)$

中 2 体不变相空间变成 $\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_A}$

⑧ $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, 其中 θ 和 ϕ 分别是 p_1 在球坐标系中的极角和方位角

5.5.5 小节 衰变运动学

下面分别讨论**二体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于二体衰变, $n = 2$, 在 \mathcal{A} 粒子静止系中, 由于 $E_{\text{CM}} = m_{\mathcal{A}}$, 末态能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_A} (m_A^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_A} (m_A^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 末态动量为 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$

中 2 体不变相空间变成 $\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_A}$

⑧ $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, 其中 θ 和 ϕ 分别是 p_1 在球坐标系中的极角和方位角

二体衰变分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_A^2} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi^2 m_A} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_A^2}, \frac{m_2^2}{m_A^2} \right) \int d\Omega |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

如果 $m_1 \neq m_2$, 则两个末态粒子必定不是全同粒子, 而 $S = 1$

二体衰变运动学

 如果 \mathcal{A} 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈球对称分布

 此时， $|\mathcal{M}|^2$ 与 θ 、 ϕ 无关，对立体角积分只给出一个 4π 因子，分宽度变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{S} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$$

二体衰变运动学

 如果 \mathcal{A} 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈球对称分布

 此时， $|\mathcal{M}|^2$ 与 θ 、 ϕ 无关，对立体角积分只给出一个 4π 因子，分宽度变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{S} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$$

 进一步，如果末态 2 个粒子质量相同， $m_1 = m_2 = m$ ，则

$$\lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) = \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

 分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

 如果两个末态粒子是全同粒子，则 $S = 2$

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**, $n = 3$, 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的
分宽度表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_3 |\mathcal{M}|^2$$

 **3 体不变相空间为**

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3)$$

 这里只在 A 粒子静止系中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**, $|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

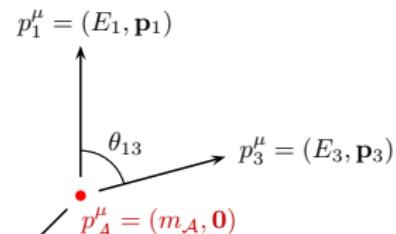
三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**, $n = 3$, 衰变过程 $i \rightarrow f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_3 |\mathcal{M}|^2$$

3 体不变相空间为

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3)$$



这里只在 \mathcal{A} 粒子静止系中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**, $|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

动量守恒定律给出 $\mathbf{0} = \mathbf{p}_A = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$, 即末态 3 个粒子的三维动量之和为零

因而这 3 个三维动量矢量处在**同一个平面内**, 如**右上图所示**

对于**确定**的 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_3 , 第 2 个粒子的动量 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 由**动量守恒定律**决定

3 体相空间

 对 \mathbf{p}_2 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ ，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_3 d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \end{aligned}$$

 Ω_1 和 Ω_3 分别是 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_3 对应的立体角

3 体相空间

 对 \mathbf{p}_2 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ ，得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_3 d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \end{aligned}$$

 Ω_1 和 Ω_3 分别是 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_3 对应的立体角

 对粒子 1 的质壳条件 $|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 = E_1^2$ 两边求微分，得 $2|\mathbf{p}_1|d|\mathbf{p}_1| = 2E_1 dE_1$ ，对粒子 3 也可以得到类似的式子，故 $|\mathbf{p}_1|d|\mathbf{p}_1| = E_1 dE_1$ ， $|\mathbf{p}_3|d|\mathbf{p}_3| = E_3 dE_3$

 从而

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d\Omega_3 dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int d\Omega_3 dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \end{aligned}$$

 第二步作 Ω_1 积分，由于粒子 1 动量呈球对称分布，此积分只给出一个 4π 因子

关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数

将 p_1 与 p_3 方向之间的夹角记为 θ_{13} ，则
粒子 3 的立体角微分表示为

$$d\Omega_3 = \sin \theta_{13} d\theta_{13} d\phi_3 = d \cos \theta_{13} d\phi_3$$

是粒子 3 的方位角

这样的话，对 Ω_3 积分不是平庸的，因为

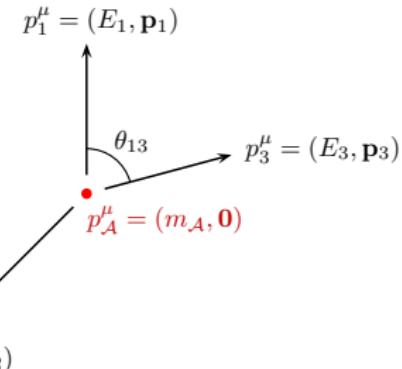
E_2 依赖于 $\cos \theta_{13}$ ，

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos \theta_{13}}$$

因此 $\delta(m_A - E_1 - E_2 - E_3)$ 的宗量也依赖于 $\cos \theta_{13}$ ，故

$$\frac{\partial E_2}{\partial \cos \theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos \theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

$$\left| \frac{\partial(m_A - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos \theta_{13}} \right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$



相空间积分

 再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, 作出关于 Ω_3 的积分, 得

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^1 d\cos\theta_{13} \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_A - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_A - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int dE_1 dE_3 \end{aligned}$$

相空间积分

 再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, 作出关于 Ω_3 的积分, 得

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^1 d\cos\theta_{13} \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_A - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_A - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int dE_1 dE_3 \end{aligned}$$

 分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_A} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2$$

 注意, 使用上式计算时需要把不变振幅 \mathcal{M} 表达为 E_1 和 E_3 的函数, 而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的积分上下限

变量替换

在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量
引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2m_A E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1$$

可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于 $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$ ， $\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为**粒子 1 和 2 的不变质量** (invariant mass)，它也是**粒子 1 和 2 的质心能**

变量替换

在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量
引入两个 Lorentz 不变量

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2m_A E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1$$

可以把粒子 1 和 2 组成的系统看成一个等效粒子，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于 $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$ ， $\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的不变质量 (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 的质心能

类似地， $\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的不变质量

s_{12} 和 s_{23} 的微分分别正比于 E_1 和 E_2 的微分，

$$ds_{12} = -2m_A dE_3, \quad ds_{23} = -2m_A dE_1$$

关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数



利用 $ds_{12} = -2m_A dE_3$ 和 $ds_{23} = -2m_A dE_1$ 将分宽度积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_A} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{256\pi^3 m_A^3} \int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23} |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2\end{aligned}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅 \mathcal{M} 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数

对 s_{23} 的积分位于内层，积分上下限会依赖于 s_{12}

关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数



利用 $ds_{12} = -2m_A dE_3$ 和 $ds_{23} = -2m_A dE_1$ 将分宽度积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_A} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{256\pi^3 m_A^3} \int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23} |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2\end{aligned}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅 \mathcal{M} 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数

对 s_{23} 的积分位于内层，积分上下限会依赖于 s_{12}

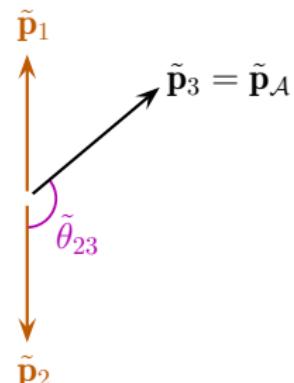
接下来讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限

考虑粒子 1 和 2 的质心系，有 $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = 0$

这里用波浪线标记此参考系中的物理量

在这个参考系中，质心能 $\tilde{E}_{CM} = \sqrt{s_{12}}$

粒子 2 的能量为 $\tilde{E}_2 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}} (s_{12} - m_1^2 + m_2^2)$



\tilde{E}_3 与 s_{12} 的关系

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_A - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_A$ ，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned} s_{12} &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_A - \tilde{\mathbf{p}}_3)^2 = \tilde{p}_A^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\tilde{\mathbf{p}}_A \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_A \tilde{E}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}_A \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\ &= m_A^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2 \end{aligned}$$

\tilde{E}_3 与 s_{12} 的关系

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_A - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_A$ ，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned} s_{12} &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_A - \tilde{\mathbf{p}}_3)^2 = \tilde{p}_A^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\tilde{\mathbf{p}}_A \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_A \tilde{E}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}_A \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\ &= m_A^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2 \end{aligned}$$

整理得 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 = m_A^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2$ ，两边平方，推出

$$\begin{aligned} 4(\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2)\tilde{E}_3^2 &= (m_A^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2)^2 \\ &= (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)^2 + 4\tilde{E}_3^4 + 4(m_A^2 - s_{12} - m_3^2)\tilde{E}_3^2 \end{aligned}$$

再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2 = (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)^2$ ，故粒子 3 的能量为

$$\tilde{E}_3 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_A^2 - s_{12} - m_3^2)$$

对于确定的 s_{12} ， \tilde{E}_2 和 \tilde{E}_3 是确定的，而且是 Lorentz 不变的

s_{23} 的积分上下限



另一方面，由 s_{23} 的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$ ， $\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时， $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$ ，而 s_{23} 取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

s_{23} 的积分上下限



另一方面，由 s_{23} 的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$ ， $\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时， $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$ ，而 s_{23} 取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$ 时， $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$ ，而 s_{23} 取得最大值

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

对于确定的 s_{12} ，以上两式分别给出 s_{23} 的积分下限和上限

注意， s_{23}^{\min} 和 s_{23}^{\max} 是 Lorentz 不变的

s_{12} 的积分上下限

 在粒子 1 和 2 的质心系中， $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 0$ ，有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时， s_{12} 取得最小值

$$s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$$

s_{12} 的积分上下限

🚗 在粒子 1 和 2 的质心系中, $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 0$, 有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

📎 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时, s_{12} 取得最小值

$$s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$$

📌 在 \mathcal{A} 粒子静止系中, $s_{23} = (p_{\mathcal{A}} - p_1)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_1$

📎 当 $E_3 = m_3$ 时, s_{12} 取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

📌 注意, s_{12}^{\min} 和 s_{12}^{\max} 也是 Lorentz 不变的