

量子场论

第 7 章 Feynman 图

7.3 节和 7.4 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2023 年 5 月 31 日





7.3 节 ϕ^4 理论与对称性因子

如果拉氏量的相互作用项中含有多个全同的量子场，那么，在应用 Wick 定理时需要考虑一些等价的缩并方式，涉及到一些组合因子和对称性因子

本节以实标量场 $\phi(x)$ 的 ϕ^4 理论为例讨论这种情况

ϕ^4 理论的拉氏量是 $\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ ， m 是 ϕ 玻色子质量

相互作用拉氏量为 $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ ， λ 是一个实耦合常数

相互作用哈密顿量密度为 $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$

iT 展开式的第 n 阶通项是

$$\begin{aligned} iT^{(n)} &= \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)] \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\phi^4(x_1) \cdots \phi^4(x_n)] \end{aligned}$$

λ^1 阶

在 iT 展开式的第 1 阶, 即 λ^1 阶, $iT^{(1)}$ 涉及 4 个实标量场算符的时序乘积

$$iT^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x T[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \sum_{j=1}^3 iT_j^{(1)}$$

这里 4 个实标量场算符 $\phi(x)$ 是全同的

根据 Wick 定理, 第一项不包含缩并,

$$iT_1^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]$$

$C_4^2 = 6$ 种包含 1 次缩并的项彼此相等, 贡献到第二项

$$iT_2^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} 6 \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\phi(x)\phi(x)]$$

$C_3^1 = 3$ 种包含 2 次缩并的项彼此相等, 贡献到第三项

$$iT_3^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\overline{\phi(x)}\overline{\phi(x)}\phi(x)]$$

$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程

现在考虑 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射过程，设初态为 $|i\rangle = |\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\rangle$ ，末态为 $\langle f| = \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2|$ ，则 $iT_1^{(1)}$ 对散射矩阵元的贡献是

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= \frac{-i\lambda}{4!} 4! \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{}] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x e^{i(p_1+p_2)\cdot x} e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$

第二步让 2 个场算符与全同玻色子初态缩并

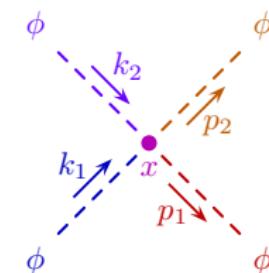
2 个场算符与全同玻色子末态缩并

一共有 $A_4^4 = 4!$ 种缩并方式，因而出现一个组合因子 $4!$

这个组合因子恰好与来自相互作用拉氏量的 $1/4!$ 因子抵消

$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射的 Feynman 图

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | i T_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\
 &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
 \end{aligned}$$



实标量玻色子内外线的位置空间 Feynman 规则与 6.1 节的 Yukawa 理论相同

$$\phi \xrightarrow{\text{---}} \bullet x = \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

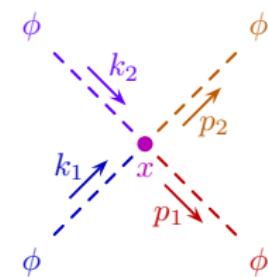
$$x \bullet \xrightarrow{\text{---}} \phi = \langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow{\text{---}} \bullet y = \phi(y)\phi(x) = D_F(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

实际上，内外线 Feynman 规则是由拉氏量中的自由部分决定的，因而不依赖于相互作用理论，具有一般性

顶点 Feynman 规则

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | i T_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 &= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\
 &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
 \end{aligned}$$

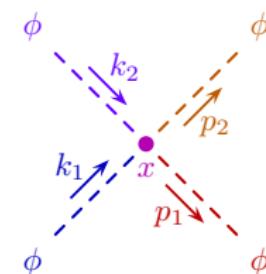


🚜 归纳出 ϕ^4 球的 顶点 Feynman 规则：

$$= -i\lambda \int d^4x$$

顶点 Feynman 规则

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | i T_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4x e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned}$$



拖拉机 归纳出 ϕ^4 理论的顶点 Feynman 规则：

$$= -i\lambda \int d^4x$$

卡车 应用这些 Feynman 规则，可以根据 Feynman 图直接写出第二步结果

公交车 相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ 包含 4 个全同 $\phi(x)$ 之积，当它们与初末态缩并时，会出现 $4!$ 种等价的缩并方式，产生组合因子 $4!$ ，它恰好与 \mathcal{L}_1 中的 $1/4!$ 因子抵消

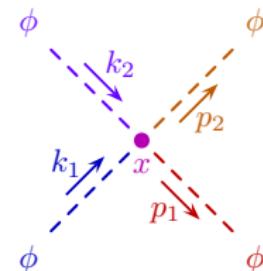
拖拉机 也就是说，我们在 \mathcal{L}_1 中引入一个 $1/4!$ 因子是为了使顶点规则中不会出现额外的组合因子，方便 Feynman 图的计算

组合因子



从 Feynman 图的角度也可以讨论**组合因子** $4!$ 的来源

 由于实标量玻色子是**纯中性粒子**，它的粒子线上**没有箭头**（注意，并非指表示动量方向的箭头），四条粒子线**对顶点而言是不可区分的**



组合因子



从 Feynman 图的角度也可以讨论**组合因子 $4!$** 的来源

 由于实标量玻色子是**纯中性粒子**, 它的粒子线上**没有箭头**(注意, 并非指表示动量方向的箭头), 四条粒子线**对顶点而言是不可区分的**



第一条外线有 4 种连接顶点的选择



第二条外线有 3 种连接顶点的选择



第三条外线只剩 2 种连接顶点的选择

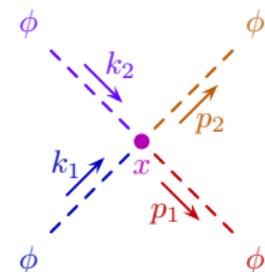


第四条外线只有 1 种连接顶点的选择



一共有 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ 种连接方式,

得到**组合因子 $4!$**



$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射截面

🚗 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射矩阵元 $\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$

👉 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 领头阶不变振幅 $i\mathcal{M} = -i\lambda$

🚂 由于初末态四个粒子质量相同，根据 5.5.3 小节知识，质心系中关于 \mathbf{p}_1 的立体角 Ω 的微分散射截面是

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

🚂 它不依赖于 \mathbf{p}_1 的极角 θ 和方位角 ϕ ，只依赖于质心能 E_{CM}

🚂 由于末态两个 ϕ 玻色子是全同的，末态对称性因子 $S = 2$

🚂 对立体角 Ω 积分，得到 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散射截面

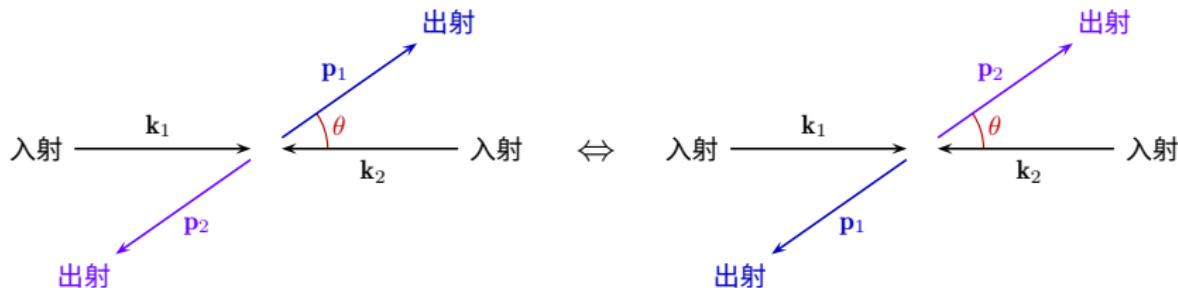
$$\sigma = \frac{1}{S} \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{2} 4\pi \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{CM}^2}$$

末态对称性因子

由于 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 末态中两个 ϕ 玻色子是全同的，**末态对称性因子 $S = 2$**

计算**散射截面**时需要除以 S 来避免量子态的重复计算

具体来说，在**质心系**中，末态中两个 ϕ 玻色子的动量大小相等，方向相反



当 p_1 的方向是 (θ, ϕ) 时， p_2 的方向是 $(\pi - \theta, \phi + \pi)$

当 p_1 的方向是 $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ 时， p_2 的方向则是 (θ, ϕ)

因为这两个 ϕ 玻色子是**全同的**，这两个情况实际上对应于**同一个量子态**

如果我们将 Ω 作 4π 立体角的积分，就会**双重计算**每个量子态

这就是**需要除以 $S = 2$** 的原因

$iT_2^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元

接下来讨论 $iT_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

记初态为 $|i\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ ，末态为 $\langle f| = \langle \mathbf{k}|$ ，则 $iT_2^{(1)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{-i\lambda}{4!} 6 \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^2] | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{-i\lambda}{4!} 6 \cdot 2 \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^2] | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^1 \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^2] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

第一步中组合因子 $C_4^2 = 6$ 是在 $\phi^4(x)$ 中取 2 个场算符相互缩并的组合数

第二步中的组合因子 $A_2^2 = 2$ 是余下 2 个场算符与初末态缩并的排列数

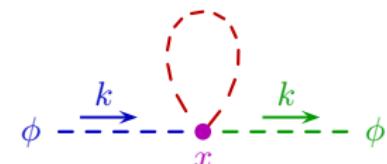
这两个组合因子将分母 $4! = 24$ 约化为 2，得到第三步的结果

这样剩下的 2 称为 Feynman 图的对称性因子 (symmetry factor)

$iT_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

$$\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{内线}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{外线}}] | \mathbf{k} \rangle$$

右图为相应的 ϕ 粒子自能图



它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

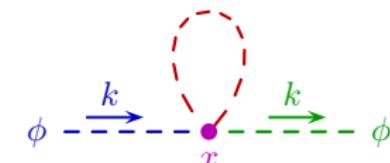
在计算时需要除以 2，否则就会双重计算

这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性

$iT_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

$$\langle \mathbf{k} | iT_2^{(1)} | \mathbf{k} \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x \langle \mathbf{k} | N[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{内线}} \overbrace{\phi(x)\phi(x)}^{\text{外线}}] | \mathbf{k} \rangle$$

右图为相应的 ϕ 粒子自能图



它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

在计算时需要除以 2，否则就会双重计算

这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性

实际上，分析 Feynman 图对称性得到的因子总是与散射矩阵元计算中剩下的因子相同，下面将继续验证这个规律

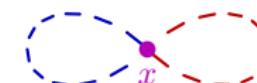
如果先画出 Feynman 图，再利用位置空间的 Feynmann 规则写出散射矩阵元，则最后必须除以 Feynman 图的对称性因子才能得出正确的结果

$iT_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

🚂 在 $iT_3^{(1)}$ 的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

🚒 因此相应的 Feynman 图是气泡图

$$\begin{aligned} iT_3^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4!} 3 \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] \\ &= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] \end{aligned}$$



🚤 第一步中的组合因子 $C_3^1 = 3$ 是在后 3 个场算符中取 1 个与第 1 个场算符缩并的组合数

🚤 它将分母 $4! = 24$ 约化为对称性因子 8

$iT_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

🚂 在 $iT_3^{(1)}$ 的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

🚒 因此相应的 Feynman 图是气泡图

$$\begin{aligned} iT_3^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4!} \textcolor{brown}{3} \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] \\ &= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x N[\overline{\phi(x)}\phi(x)\overline{\phi(x)}\phi(x)] \end{aligned}$$



🚤 第一步中的组合因子 $C_3^1 = 3$ 是在后 3 个场算符中取 1 个与第 1 个场算符缩并的组合数

🚂 它将分母 $4! = 24$ 约化为对称性因子 8

🏎️ 从 Feynman 图角度看，图中 2 个始末端连接同一顶点的圈各自贡献一个因子 2，而这 2 个圈彼此也是全同的，再贡献一个因子 2，因此 Feynman 图的对称性因子为 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ，验证了上述规律

λ^2 阶

在 iT 展开式的第 2 阶，即 λ^2 阶，有

$$iT^{(2)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y T[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]$$

通过 Wick 定理可以将上式化为许多个包含正规乘积的项，这里只讨论对 ϕ 粒子自能图有贡献的项，有 3 种情况

第 1 种情况具有如下缩并结构，

$$\begin{aligned} iT_1^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \int d^4x d^4y N[\phi(x) \overbrace{\phi(x)}^{} \overbrace{\phi(x)}^{} \overbrace{\phi(x)}^{} \phi(y) \overbrace{\phi(y)}^{} \overbrace{\phi(y)}^{} \phi(y)] \\ &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y N[\phi(x) \overbrace{\phi(x)}^{} \overbrace{\phi(x)}^{} \overbrace{\phi(x)}^{} \phi(y) \overbrace{\phi(y)}^{} \overbrace{\phi(y)}^{} \phi(y)] \end{aligned}$$

从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 1 个 $\phi(x)$ 和 1 个 $\phi(y)$ 缩并的方法有 $4 \cdot 4$ 种

从余下 3 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 中取 2 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 缩并的方法有 $C_3^2 = 3$ 种

因此组合因子为 $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

$iT_1^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

一艘船 $iT_1^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_1^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

一只鸭子 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，因而可以合成一项，贡献一个 **2!** 因子，恰好与最前面的 **1/2!** 因子抵消

一只天鹅 从而得到第二步的结果，它表明这个过程的对称性因子为 4

$iT_1^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

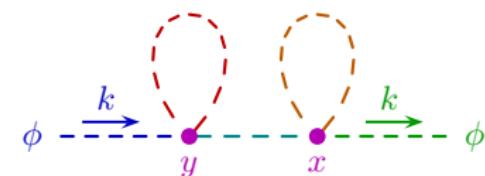
一艘船 $iT_1^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_1^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，因而可以合成一项，贡献一个 **2!** 因子，恰好与最前面的 **1/2!** 因子抵消

从而得到第二步的结果，它表明这个过程的对称性因子为 4

相应的 Feynman 图具有 2 个始末端连接同一个顶点的圈，各自贡献一个因子 2，故 Feynman 图的对称性因子为 $2 \cdot 2 = 4$



$iT_2^{(2)}$ 缩并结构

第 2 种情况具有如下缩并结构,

$$\begin{aligned} iT_2^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 6 \int d^4x d^4y N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) \boxed{\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}] \\ &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) \boxed{\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}] \end{aligned}$$

从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面取 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 出来的方法有 $C_4^3 C_4^3 = 4 \cdot 4$ 种

将这 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的排列方法有 $3! = 6$ 种

因而组合因子是 $4 \cdot 4 \cdot 6$

$iT_2^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚢 $iT_2^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_2^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

✍ 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，合为一项之后，抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子

🦖 结果表明这个过程的对称性因子为 6

$iT_2^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

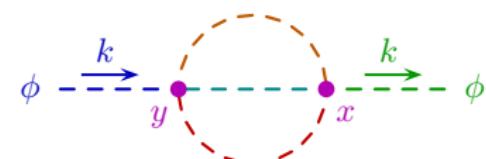
🚢 $iT_2^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | iT_2^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \{ \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

✍ 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，合为一项之后，抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子

🦖 结果表明这个过程的对称性因子为 6

🦕 相应的 Feynman 图具有 3 条全同内线连接两个不同的顶点，这 3 条内线有 $3!$ 种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为 $3! = 6$



$iT_3^{(2)}$ 缩并结构

第 3 种情况包含两种缩并结构,

$$\begin{aligned} iT_3^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 6 \cdot 6 \cdot 2 \int d^4x d^4y \{ N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\ &\quad + N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} \int d^4x d^4y N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \end{aligned}$$

在第一步中, 花括号内的两项具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性, 合为一项则抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子

花括号内的两项具有相同的组合因子

在每一项中, 从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 出来的方法有 $C_4^2 C_4^2 = 6 \cdot 6$ 种, 将这 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的排列方法有 2! 种

因而共同的组合因子为 $6 \cdot 6 \cdot 2$

$iT_3^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚢 $iT_3^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k} | iT_3^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} 2 \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle\end{aligned}$$

🐘 在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组合因子为 2，结果表明对称性因子为 4

$iT_3^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

italiane iT₃⁽²⁾ 对散射矩阵元的贡献为

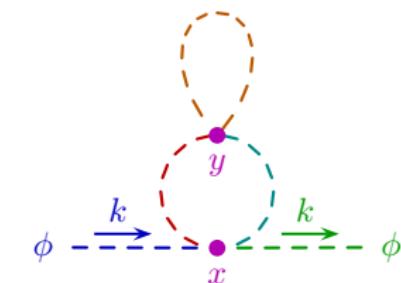
$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k} | iT_3^{(2)} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{(-i\lambda)^2}{8} 2 \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k} | N[\phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \phi(y) \phi(y)] | \mathbf{k} \rangle\end{aligned}$$

大象 在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组合因子为 2，结果表明对称性因子为 4

鹿 在相应的 Feynman 图里面，始末端连接同一顶点的 1 个圈贡献一个因子 2

老虎 连接两个不同顶点的 2 条全同内线有 $2!$ 种排列方法

老虎 故 Feynman 图的对称性因子为 $2 \cdot 2 = 4$



动量空间 Feynman 规则

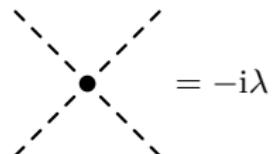
转到动量空间, ϕ^4 理论的 Feynman 规则如下

① 实标量玻色子入射外线: $\phi \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = 1$

② 实标量玻色子出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \phi = 1$

③ 实标量玻色子传播子: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$

④ ϕ^4 相互作用顶点:



$$= -i\lambda$$

⑤ 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系

⑥ 每个未定的圈动量 p^μ 贡献一个积分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

⑦ 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子

动量空间 Feynman 规则

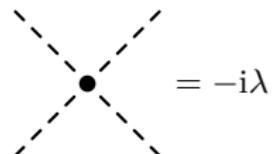
转到动量空间, ϕ^4 理论的 Feynman 规则如下

① 实标量玻色子入射外线: $\phi \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = 1$

② 实标量玻色子出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \phi = 1$

③ 实标量玻色子传播子: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$

④ ϕ^4 相互作用顶点:



将 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ 中的 4 个场算符 ϕ 剥离, 乘以 i , 还要再乘上 4 个 ϕ 的排列数 $4!$, 才得到顶点规则的表达式 $-i\lambda$

⑤ 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系

⑥ 每个未定的圈动量 p^μ 贡献一个积分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

⑦ 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子

7.4 节 一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明，外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论，它们是由拉氏量中的自由部分决定的，具有一般性

本节讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论

7.4 节 一般内外线 Feynman 规则

 上述讨论表明，外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论，它们是由拉氏量中的自由部分决定的，具有普遍性

 本节讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论

(1) 复标量场 $\phi(x)$ 描述的玻色子有正反之分，引入两种动量为 p 的单粒子态，

 正标量玻色子 ϕ 的单粒子态 $|p^+\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$

 反标量玻色子 $\bar{\phi}$ 的单粒子态 $|p^-\rangle = \sqrt{2E_p} b_p^\dagger |0\rangle$

 $\phi(x)$ 与正标量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}\overline{\phi(x)|p^+\rangle} &\equiv \phi^{(+)}(x)|p^+\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_q e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq \cdot x} [a_q, a_p^\dagger] |0\rangle = \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq \cdot x} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle\end{aligned}$$

 第四步用到产生湮灭算符的对易关系

复标量场与初末态的缩并

🏈 $\phi^\dagger(x)$ 与反标量玻色子初态的缩并为

$$\overline{\langle \phi^\dagger(x) | \mathbf{p}^- \rangle} \equiv \phi^{(+)}(x) |\mathbf{p}^- \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_p} b_p^\dagger |0\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle$$

🏀 $\phi^\dagger(x)$ 与正标量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}^+ | \phi^\dagger(x) &\equiv \langle \mathbf{p}^+ | \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_p} a_p \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_q^\dagger e^{iq \cdot x} \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] = \int d^3 q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \langle 0 | e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

🏈 $\phi(x)$ 与反标量玻色子末态的缩并为

$$\langle \mathbf{p}^- | \phi(x) \equiv \langle \mathbf{p}^- | \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_p} b_p \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q^\dagger e^{iq \cdot x} = \langle 0 | e^{ip \cdot x}$$

复标量场一般内外线规则

用带箭头的虚线表示复标量玻色子的运动，线上的箭头可认为是某种 **U(1)** 荷流动的方向，或者说是**玻色子数**流动的方向

由上述结果及 Feynman 传播子表达式，复标量场的**位置空间内外线规则**如下

$$\phi \dashrightarrow \overset{p}{\bullet} x = \langle 0 | \overline{\phi(x)} | \mathbf{p}^+ \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) | \mathbf{p}^+ \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

$$\bar{\phi} \dashrightarrow \overset{p}{\overleftarrow{\bullet}} x = \langle 0 | \overline{\phi^\dagger(x)} | \mathbf{p}^- \rangle = \langle 0 | \phi^{\dagger(+)}(x) | \mathbf{p}^- \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

$$x \bullet \dashrightarrow \overset{p}{\bullet} \phi = \langle \mathbf{p}^+ | \phi^\dagger(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \dashrightarrow \overset{p}{\overleftarrow{\bullet}} \bar{\phi} = \langle \mathbf{p}^- | \phi(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^- | \phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \dashrightarrow \overset{p}{\bullet} y = \overline{\phi(y)} \phi^\dagger(x) = D_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

⑧ 其中 m_ϕ 是标量玻色子 ϕ 的质量

有质量实矢量场

(2) 有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述纯中性矢量玻色子 A ，具有 3 种螺旋度 $\lambda = \pm, 0$

乒乓球 记动量为 p 、螺旋度为 λ 的 A 粒子态为 $|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$

棒球 $A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}& \overbrace{A^\mu(x)|p, \lambda\rangle} \equiv A^{\mu(+)}(x)|p, \lambda\rangle \\&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(q, \lambda') a_{q, \lambda'} e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_p} a_{p, \lambda}^\dagger |0\rangle \\&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(q, \lambda') e^{-iq \cdot x} [a_{q, \lambda'}, a_{p, \lambda}^\dagger] |0\rangle \\&= \int d^3q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(q, \lambda') e^{-iq \cdot x} \delta_{\lambda' \lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(p, \lambda) e^{-ip \cdot x} |0\rangle\end{aligned}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系

有质量实矢量场一般外线规则

 $A^\mu(x)$ 与**实矢量玻色子末态**的缩并为

$$\begin{aligned}
& \langle \overline{\mathbf{p}}, \lambda | A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger e^{iq \cdot x} \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] e^{iq \cdot x} \\
&= \int d^3q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{iq \cdot x} = \langle 0 | \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}
\end{aligned}$$

 用波浪线表示有质量实矢量玻色子的运动，相应的**位置空间外线规则**为

$$A, \lambda; \mu \xrightarrow{\text{wavy line}} x = \langle 0 | \overline{A^\mu(x) | \mathbf{p}, \lambda} \rangle = \langle 0 | A^{\mu(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$x \bullet \overbrace{A, \lambda; \mu}^p = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^\mu(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

非协变项

现在讨论有质量矢量场的内线规则

前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子** 表达式包含一个**非协变项**

接下来的讨论将说明这个**非协变项**在微扰论中的贡献恰好被**相互作用哈密顿量密度**中**非协变项**的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**

非协变项

现在讨论有质量实矢量场的内线规则

前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子** 表达式包含一个**非协变项**

接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被**相互作用哈密顿量密度**中**非协变项**的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**

假设相互作用拉氏量具有 $\mathcal{L}_1 = -g J_\mu A^\mu$ 的形式，则 6.1.2 小节讨论表明**相互作用绘景**中的相互作用哈密顿量密度为 $\mathcal{H}_1(x) = g J_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(x)]^2$

 g 是耦合常数， m_A 是实矢量玻色子的质量，右边第二项就是**非协变项**

 iT 展开式的第 1 阶为 $iT^{(1)} = -i \int d^4x T \left[g J_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x) J^0(x) \right]$

 第 2 阶为 $iT^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T \left\{ \left(g J_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(x)]^2 \right) \times \left(g J_\nu(y) A^\nu(y) + \frac{g^2}{2m_A^2} [J^0(y)]^2 \right) \right\}$

g^2 阶

 **Feynman 传播子** $\overline{A^\mu(x) A^\nu(y)} = \Delta_F^{\mu\nu}(x-y)$ 出现在 $n \geq 2$ 的 $iT^{(n)}$ 中

比如, $iT^{(2)}$ 包含一个涉及 Feynman 传播子的 g^2 阶的项

$$\begin{aligned}
iT_1^{(2)} &= \frac{(ig)^2}{2!} \int d^4x d^4y N[J_\mu(x) \overline{A^\mu(x) J_\nu(y) A^\nu(y)}] \\
&= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y N [J_\mu(x) J_\nu(y) \Delta_F^{\mu\nu}(x-y)] \\
&= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y N \left\{ J_\mu(x) J_\nu(y) \right. \\
&\quad \left. \times \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} - \frac{i}{m_A^2} g^{\mu 0} g^{\nu 0} \delta^{(4)}(x-y) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Feynman 传播子中的非协变项

另一方面, $iT^{(1)}$ 也包含一个 g^2 阶的项

$$\begin{aligned} i T_1^{(1)} &= -i \int d^4x \mathsf{N} \left[\frac{g^2}{2m_A^2} J^0(x) J^0(x) \right] = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathsf{N} \left[\frac{i}{m_A^2} J^0(x) J^0(y) \delta^{(4)}(x-y) \right] \\ &= \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathsf{N} \left[\frac{i}{m_A^2} J_\mu(x) J_\nu(y) g^{\mu 0} g^{\nu 0} \delta^{(4)}(x-y) \right] \end{aligned}$$

源自 $\mathcal{H}_1(x)$ 的非协变项

有质量实矢量场一般内线规则

 在微扰论的 g^2 阶计算中，必须同时考虑 $iT_1^{(2)}$ 和 $iT_1^{(1)}$ 的贡献

 两者相加，则**非协变项恰好相消**，得到一个 Lorentz 协变的表达式

$$iT_1^{(2)} + iT_1^{(1)} = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y N \left\{ J_\mu(x) J_\nu(y) \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \right] \right\}$$

 上式方括号里面的部分是 Feynman 传播子表达式中的 **Lorentz 协变项**，在实际计算中，只有这一项有贡献

 因此可以将有质量实矢量场的**位置空间内线规则**设置为

$$x; \nu \bullet \overbrace{\hspace{1cm}}^p \bullet y; \mu = \overbrace{A^\mu(y) A^\nu(x)}^{\text{的 Lorentz 协变项}}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

无质量实矢量场

(3) 无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述纯中性无质量矢量玻色子 A , 有 2 种螺旋度 $\lambda = \pm$

记动量为 p 、螺旋度为 λ 的相应 A 粒子态为 $|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$

$A^\mu(x)$ 正能解部分和负能解部分可以表达成

$$A^{\mu(+)}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(p, \sigma) b_{p,\sigma} + \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} \right]$$

$$A^{\mu(-)}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} \left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(p, \sigma) b_{p,\sigma}^\dagger + \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger \right]$$

$A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned} & \overline{A^\mu(x)} |p, \lambda\rangle \equiv A^{\mu(+)}(x) |p, \lambda\rangle \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-iq \cdot x} \left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(q, \sigma) b_{q,\sigma} + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^\mu(q, \lambda') a_{q,\lambda'} \right] \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} e^{-iq \cdot x} \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(q, \sigma) [b_{q,\sigma}, a_{p,\lambda}^\dagger] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^\mu(q, \lambda') [a_{q,\lambda'}, a_{p,\lambda}^\dagger] \right\} |0\rangle \\ &= \int d^3 q \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_q}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^\mu(q, \lambda') e^{-iq \cdot x} \delta_{\lambda' \lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(p, \lambda) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \end{aligned}$$

无质量实矢量场一般内外线规则

 $A^\mu(x)$ 与 **实矢量玻色子末态** 的缩并为

$$\begin{aligned}
 & \langle \overline{\mathbf{p}, \lambda} | A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) \\
 &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} e^{iq \cdot x} \left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q}, \sigma) b_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger \right] \\
 &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} e^{iq \cdot x} \langle 0 | \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q}, \sigma) [a_{\mathbf{p}, \lambda}, b_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') [a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger] \right\} \\
 &= \int d^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q}, \lambda') \langle 0 | \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{iq \cdot x} = \langle 0 | \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}
 \end{aligned}$$

 用 **波浪线** 表示 **无质量实矢量玻色子** 的运动，在 **Feynman 规范** 下，无质量实矢量场的**位置空间内外线规则**为

$$A, \lambda; \mu \xrightarrow[p]{\sim} \bullet x = \langle 0 | \overline{A^\mu(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \langle 0 | A^{\mu(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\sim} A, \lambda; \mu = \langle \overline{\mathbf{p}, \lambda} | A^\mu(x) | 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda | A^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x; \nu \bullet \xrightarrow[p]{\sim} y; \mu = \overline{A^\mu(y) A^\nu(x)} = \Delta_F^{\mu\nu}(y - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

动量空间一般内外线 Feynman 规则



转到动量空间中，有以下一般内外线 Feynman 规则

- ① 正标量玻色子入射光线: $\phi \xrightarrow[p]{\quad} \bullet = 1$

- ② 反标量玻色子入射外线: $\bar{\phi} \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = 1$

- ③ 正标量玻色子出射光线: $\bullet \dashv \overset{p}{\longrightarrow} \dashv \phi = 1$

- ④ 反标量玻色子出射光线: $\bullet \xrightarrow{\vec{p}} \bar{\phi} = 1$

- ⑤ 复标量玻色子传播子: $\bullet - \overset{p}{\longrightarrow} - \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + ie}$



动量空间一般内外线 Feynman 规则

⑦ 有质量实矢量玻色子入射外线: $A, \lambda; \mu \sim \overbrace{\text{wavy line}}^p = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

⑧ 有质量实矢量玻色子出射外线: $\sim \overbrace{\text{wavy line}}^p A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$

⑨ 有质量实矢量玻色子传播子: $\nu \sim \overbrace{\text{wavy line}}^p \mu = \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon}$

⑩ 无质量实矢量玻色子入射外线: $A, \lambda; \mu \sim \overbrace{\text{wavy line}}^p = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$

⑪ 无质量实矢量玻色子出射外线: $\sim \overbrace{\text{wavy line}}^p A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$

⑫ 无质量实矢量玻色子传播子: $\nu \sim \overbrace{\text{wavy line}}^p \mu = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$ (**Feynman 规范**)