

量子场论

第 9 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

9.1 节和 9.2 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期: 2024 年 7 月 4 日



第 9 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

✿ 相对于连续变换，不能用连续变化的参数描述的对称变换称为分立 (discrete) 变换，也称为离散变换

如果系统作用量在一种分立变换下不变，则系统具有相应的**分立对称性** (discrete symmetry)

 1.3 节末提到的**宇称变换**和**时间反演变换**是两种重要的分立变换

另一种常见的分立变换是**电荷共轭变换**

本章讨论量子场的分立变换和分立对称性

顺便介绍 Majorana 旋量场，并深入了解 Weyl 旋量场

9.1 节 标量场的分立变换

9.1.1 小节 标量场的 P 变换

1.3 节提到, 时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 的**宇称变换**为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

 这是一种**非固有保时向** Lorentz 变换

它将 x^μ 和 ∂_μ 分别变换为 $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$ 和 $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

将四维动量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu = (\mathcal{P}p)^\mu = (E, -\mathbf{p})$

但同时保持时空体积元不变, $d^4x' = |\det(\mathcal{P})| d^4x = d^4x$

9.1 节 标量场的分立变换

9.1.1 小节 标量场的 P 变换



1.3 节提到, 时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 的**宇称变换**为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



这是一种**非固有保时向** Lorentz 变换



它将 x^μ 和 ∂_μ 分别变换为 $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$ 和 $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$



将四维动量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu = (\mathcal{P}p)^\mu = (E, -\mathbf{p})$



但同时**保持时空体积元不变**, $d^4x' = |\det(\mathcal{P})| d^4x = d^4x$



如果场论系统的作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ 在宇称变换下不变，则运动方程的形式也在宇称变换下不变，此时称系统是宇称守恒的，即具有空间反射对称性



在宇称守恒的理论中，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 的宇称变换应当满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ ，从而使 $S' = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int d^4x \mathcal{L}(x) = S$

P 变换

类似于 3.1 节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换 $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})|\Psi\rangle = P|\Psi\rangle$ ，称为 **P 变换**

 $P \equiv U(\mathcal{P})$ 是一个线性幺正算符，满足同态关系

$$U(\mathcal{P}^{-1})U(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}) = \mathbb{I} = \textcolor{teal}{U}^{-1}(\mathcal{P})U(\mathcal{P})$$

由 $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$ 得 $\textcolor{brown}{P^{-1}} = \textcolor{teal}{U}^{-1}(\mathcal{P}) = \textcolor{teal}{U}(\mathcal{P}^{-1}) = \textcolor{teal}{U}(\mathcal{P}) = \textcolor{brown}{P}$

即 P 是自身的逆变换算符，从而 $P^2 \equiv P^{-1}P \equiv \mathbb{I}$

由 P 的幺正性得 $P^\dagger = P^{-1} = P$ ，因而 P 是厄米算符

P 变换

类似于 3.1 节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换 $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})|\Psi\rangle = P|\Psi\rangle$ ，称为 **P 变换**

$P \equiv U(\mathcal{P})$ 是一个线性幺正算符，满足同态关系

$$U(\mathcal{P}^{-1})U(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}) = \mathbb{I} = U^{-1}(\mathcal{P})U(\mathcal{P})$$

由 $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$ 得 $P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P$

即 P 是自身的逆变换算符，从而 $P^2 \equiv P^{-1}P \equiv \mathbb{I}$

由 P 的幺正性得 $P^\dagger = P^{-1} = P$ ，因而 P 是厄米算符

由量子场构成的拉氏量在宇称变换下**不变**意味着 $\mathcal{L}'(x') = P^{-1}\mathcal{L}(x')P = \mathcal{L}(x)$

作替换 $x' = \mathcal{P}x \rightarrow x$, $x \rightarrow \mathcal{P}^{-1}x = \mathcal{P}x$, 将这个式子等价地写成

$$P^{-1}\mathcal{L}(\textcolor{blue}{x})P = \textcolor{purple}{+}\mathcal{L}(\textcolor{brown}{P}x)$$

使拉氏量满足上式，也就是说，让拉氏量具有偶宇称（指上式右边的 $+$ 号），就能得到宇称守恒的量子场论

Poincaré 生成元算符的 P 变换

现在讨论量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda, a)$ 的生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在宇称守恒理论中的 P 变换, 此时可以将同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ 推广到宇称变换 \mathcal{P} 上, 于是

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a)$$

相应的无穷小变换为 $P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon)$ ，这类似于 3.1.1 小节得到的 $U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)$

Poincaré 生成元算符的 P 变换

现在讨论量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda, a)$ 的生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在宇称守恒理论中的 P 变换, 此时可以将同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ 推广到宇称变换 \mathcal{P} 上, 于是

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a)$$

相应的无穷小变换为 $P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon)$ ，这类似于 3.1.1 小节得到的 $U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)$

由此推出类似于 $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$ 和 $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的 **P** 变换规则

$$P^{-1} J^{\mu\nu} P = \mathcal{P}^{\mu}_{\rho} \mathcal{P}^{\nu}_{\sigma} J^{\rho\sigma}, \quad P^{-1} P^{\mu} P = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} P^{\nu}$$

从而, 总角动量算符 $J^i \equiv \varepsilon^{ijk} J^{jk} / 2$ 和增速算符 $K^i \equiv J^{0i}$ 在 P 变换下变成

$$P^{-1} J^i P = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} P^{-1} J^{jk} P = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{P}^j{}_l \mathcal{P}^k{}_m J^{lm} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (-\delta^j{}_l) (-\delta^k{}_m) J^{lm} = +J^i$$

$$P^{-1}K^iP = P^{-1}J^{0i}P = \mathcal{P}^0{}_0\mathcal{P}^i{}_jJ^{0j} = -\delta^i{}_jJ^{0j} = -K^i$$

总角动量、动量和哈密顿量的 P 变换



写成三维矢量的形式，得

$$P^{-1}\mathbf{J}P = +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P = -\mathbf{K}$$



总角动量算符 \mathbf{J} 具有偶宇称，体现了它作为三维轴矢量的变换性质



因此角动量在宇称变换下不变

总角动量、动量和哈密顿量的 P 变换

 写成三维矢量的形式，得

$$P^{-1}\mathbf{J}P \equiv +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P \equiv -\mathbf{K}$$

总角动量算符 \mathbf{J} 具有偶宇称, 体现了它作为三维轴矢量的变换性质

因此角动量在宇称变换下不变

将四维动量算符分解为 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ ，则 $P^{-1}P^\mu P = \mathcal{P}^\mu_{\nu} P^\nu$ 分解成

$$P^{-1}HP = +H, \quad P^{-1}\mathbf{P}P = -\mathbf{P}$$

 动量算符 \mathbf{P} 具有奇宇称，体现了它作为三维极矢量的变换性质

因而动量方向在宇称变换下反转

哈密顿量算符 H 的字称为偶，而 $P^{-1}HP = +H$ 等价于 $[H, P] = 0$

这在量子理论中意味着宇称算符 P 是一个守恒量

宇称守恒和宇称破坏

通常希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质

为了得到一个**宇称守恒**的量子场论，首先，需要让拉氏量中的**自由部分**在宇称变换下不变，这是容易做到的

其次，还得要求拉氏量中的相互作用部分也在宇称变换下不变，这一点并不平庸

尽管宇称在电磁相互作用和强相互作用中守恒，在弱相互作用中却遭到极大破坏

宇称守恒和宇称破坏

通常希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质

为了得到一个宇称守恒的量子场论，首先，需要让拉氏量中的自由部分在宇称变换下不变，这是容易做到的

其次，还得要求拉氏量中的相互作用部分也在宇称变换下不变，这一点并不平庸

尽管宇称在电磁相互作用和强相互作用中守恒，在弱相互作用中却遭到极大破坏

这个出乎意料的**现象**是 1956 年李政道和杨振宁对实验结果作理论分析时发现的

随后由吴健雄在实验中确证



李政道 (1926-)



杨振宁 (1922-)



吴健雄 (1912–1997)

复标量场产生湮灭算符的 P 变换

☀️ 下面先讨论**自由**的复标量场 $\phi(x)$ ，拉氏量为 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

$\phi(x)$ 的运动方程是 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

宇称变换翻转动量方向, P 变换对正标量玻色子 ϕ 单粒子态 $|\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 的作用为 $P|\mathbf{p}^+\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}^+\rangle$

η_P 是一个复的相位因子，满足 $|\eta_P| = 1$

出现 η_P 的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理

复标量场产生湮灭算符的 P 变换

下面先讨论**自由**的复标量场 $\phi(x)$ ，拉氏量为 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

 $\phi(x)$ 的运动方程是 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

宇称变换翻转动量方向, P 变换对正标量玻色子 ϕ 单粒子态 $|p^+\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$ 的作用为 $P|p^+\rangle = \eta_P |p^-\rangle$

η_P 是一个复的相位因子，满足 $|\eta_P| = 1$

出现 η_P 的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理

⚠ 真空态在 P 变换下不变, 故 $P|0\rangle = |0\rangle$, 从而

$$P |\mathbf{p}^+\rangle = P^{-1} |\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_p} P^{-1} a_p^\dagger P |0\rangle$$

与 $P|\mathbf{p}^+\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_P a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 比较, 推出产生湮灭算符的 P 变换

$$P^{-1}a_p^\dagger P = \eta_P a_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}a_p P = \eta_P^* a_{-p}$$

第二式由第一式取厄米共轭得到: $(P^{-1}a_p^\dagger P)^\dagger = (P^\dagger a_p^\dagger P)^\dagger = P^\dagger a_p P = P^{-1}a_p P$

复标量场平面波展开式的 P 变换

另一方面, P 变换对反标量玻色子 $\bar{\phi}$ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 的作用为 $P|\mathbf{p}^-\rangle = \tilde{\eta}_P |-\mathbf{p}^-\rangle$, 出现另一个相位因子 $\tilde{\eta}_P$, 同理推出

$$P^{-1}b_p^\dagger P = \tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}b_p P = \tilde{\eta}_P^* b_{-p}$$

复标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式在 P 变换下化为

$$\begin{aligned}
P^{-1}\phi(x)P &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\color{red}P^{-1}a_p P e^{-ip \cdot x} + \color{blue}P^{-1}b_p^\dagger P e^{ip \cdot x} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\color{red}\eta_P^* a_{-p} e^{-ip \cdot x} + \color{blue}\tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\eta_P^* a_{\textcolor{brown}{p}} e^{-ip \cdot (\textcolor{violet}{p}x)} + \tilde{\eta}_P b_{\textcolor{brown}{p}}^\dagger e^{ip \cdot (\textcolor{violet}{p}x)} \right]
\end{aligned}$$

最后一步作了变量替换 $p \rightarrow -p$ ，并利用 $(\mathcal{P}p) \cdot x = p \cdot (\mathcal{P}x)$

复标量场的 P 变换

为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变, 必须要求 η_P 和 $\tilde{\eta}_P$ 满足关系式

$$\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$$

使得 $P^{-1}\phi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\eta_P^* a_p e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\eta}_P b_p^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] = \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x)$

故 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P = \eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)$$

即 $P^{-1}\phi(x)P$ 与 $\phi(\mathcal{P}x)$ 只相差一个常数因子 η_P^*

复标量场的 P 变换

为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变, 必须要求 η_P 和 $\tilde{\eta}_P$ 满足关系式

$$\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$$

使得 $P^{-1}\phi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\eta_P^* a_p e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\eta}_P b_p^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] = \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x)$

故 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P = \eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)$$

即 $P^{-1}\phi(x)P$ 与 $\phi(\mathcal{P}x)$ 只相差一个常数因子 η_P^*

从而, 作宇称变换之后的场 $\phi'(x') = P^{-1}\phi(x')P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x') = \eta_P^*\phi(x)$ 也满足 **Klein-Gordon 方程**: $(\partial'^2 + m^2)\phi'(x') = \eta_P^*(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

这样的话, b_p^\dagger 和 b_p 的 P 变换 $P^{-1}b_p^\dagger P = \tilde{\eta}_P b_{-p}^\dagger$ 和 $P^{-1}b_p P = \tilde{\eta}_P^* b_{-p}$ 变成

$$P^{-1}b_p^\dagger P = \eta_P^* b_{-p}^\dagger, \quad P^{-1}b_p P = \eta_P b_{-p}$$

拉氏量的 P 变换

⚡ 现在讨论自由复标量场的拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$ 的宇称变换性质

拉氏量中的动能项涉及到时空导数 ∂_μ ，它满足

$$\partial_{x,\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (\mathcal{P}^\nu{}_\rho x^\rho)}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial (\mathcal{P}^\nu{}_\rho x^\rho)} = \mathcal{P}^\nu{}_\rho \delta^\rho{}_\mu \frac{\partial}{\partial (\mathcal{P}x)^\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial (\mathcal{P}x)^\nu}$$

即

$$\partial_{x,\mu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu}$$

这里在简写时把时空导数对时空点的依赖性明显写出来

在 Lorentz 逆变换定义式 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta$ 中取 $\Lambda = \mathcal{P}^{-1}$ ，得

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = g^{\mu\beta} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\beta g_{\nu\alpha}$$

据此将 $\partial_x^\mu = g^{\mu\beta} \partial_{x,\beta} = g^{\mu\beta} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha_\beta \partial_{\mathcal{P}_x, \alpha} = g^{\mu\beta} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha_\beta g_{\alpha\nu} \partial_{\mathcal{P}_x}^\nu$ 化为

$$\partial_x^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial_{\mathcal{P}_x}^\nu$$

由标量场构造的算符的 P 变换

于是，拉氏量中动能项算符 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 的 P 变换为

$$P^{-1} \partial_x^\mu \phi^\dagger(x) \partial_{x,\mu} \phi(x) P = \color{blue}{\partial_x^\mu} P^{-1} \phi^\dagger(x) P \color{brown}{\partial_{x,\mu}} P^{-1} \phi(x) P \\ = |\eta_P|^2 \color{blue}{\mathcal{P}^\mu}_\nu \color{brown}{\partial_{\mathcal{P}x}^\nu} \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \color{brown}{(\mathcal{P}^{-1})^\rho}_\mu \color{blue}{\partial_{\mathcal{P}x,\rho}} \phi(\mathcal{P}x) = + \color{blue}{\partial_{\mathcal{P}x}^\mu} \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \color{brown}{\partial_{\mathcal{P}x,\mu}} \phi(\mathcal{P}x)$$

质量项算符 $\phi^\dagger \phi$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)P = P^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\phi(x)P = |\eta_P|^2\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x) = +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)$$

以上两式最右边表达式中的 $+$ 号表明算符 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 和 $\phi^\dagger \phi$ 都具有偶宇称

因此，拉氏量满足 $P^{-1}\mathcal{L}(x)P = +\mathcal{L}(\mathcal{P}x)$ ，即在宇称变换下不变；这说明自由复标量场理论是宇称守恒的，以上讨论是自治的，而关系式 $\eta_P^* = \tilde{\eta}_P$ 是合理的

在 P 变换下, $U(1)$ 守恒流算符 $i\phi^\dagger \partial^\mu \phi$ 变成

$$P^{-1}i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial_x^\mu}\phi(x)P = iP^{-1}\phi^\dagger(x)P \mathcal{P}^\mu_\nu \partial_{P_x}^\nu P^{-1}\phi(x)P = \mathcal{P}^\mu_\nu i\phi^\dagger(Px)\overleftrightarrow{\partial_{P_x}^\nu}\phi(Px)$$

符合 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 作为**极矢量**的变换规则

正反标量玻色子态

在质心系中考虑一对正反标量玻色子 $\phi\bar{\phi}$ 组成的态 $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

Φ(p) 是动量空间波函数；当轨道角动量的量子数为 L 、磁量子数为 M 时，

$\Phi(\mathbf{p})$ 正比于 **球谐函数** $Y_{LM}(\theta, \phi) = (-)^M \sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}} P_L^M(\cos \theta) e^{iM\phi}$

其中 θ 和 ϕ 分别是球坐标系中动量 p 的极角和方位角

 **连带 Legendre 函数** $P_L^M(x) = \frac{(1-x^2)^{M/2}}{2^L L!} \frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}} (x^2 - 1)^L$ 满足

$$P_L^M(-x) = (-)^{L+M} P_L^M(x)$$

 $-\mathbf{p}$ 的极角为 $\pi - \theta$ ，方位角为 $\pi + \phi$ ，而 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ ， $e^{iM\pi} = (-)^M$

由 $Y_{LM}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-)^L Y_{LM}(\theta, \phi)$ 得

$$\Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p})$$

轨道宇称和内禀宇称

于是, $|\phi\bar{\phi}\rangle$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned} P |\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) P^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger P P^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger P |0\rangle = |\eta_P|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$

第三步作了变量替换 $p \rightarrow -p$

这表明 $|\phi\bar{\phi}\rangle$ 是 P 算符的本征态，本征值 $(-)^L$ 是可观测量，称作 $|\phi\bar{\phi}\rangle$ 的宇称

实标量场的 P 变换

接下来讨论自由的实标量场 $\phi(x)$ ，拉氏量为 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$

比较实标量场与复标量场的平面波展开式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在 $b_p = a_p$ 的条件下进行，由此推出 $\eta_P = \tilde{\eta}_P = \eta_P^*$

于是, 相位因子 η_P 是实数, 满足 $\eta_P^2 = |\eta_P|^2 = 1$, 故 $\eta_P = \pm 1$

U(1) 整体对称性与宇称变换

对于复标量场 $\phi(x)$ ，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的

2.4.3 小节中自由复标量场具有变换形式为 $\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x)$ 的 $U(1)$ 整体对称性

相应的守恒荷算符 Q 满足 $[Q, \phi] = -q\phi$ (习题 2.4)，由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \dots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi$$

再利用 $e^{-A}Be^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$ ，推出

$$e^{i\theta Q} \phi e^{-i\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\phi, (-i\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} [\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} \phi = e^{-iq\theta} \phi$$

U(1) 整体对称性与宇称变换

对于复标量场 $\phi(x)$ ，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的

2.4.3 小节中自由复标量场具有变换形式为 $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$ 的 $U(1)$ 整体对称性

相应的守恒荷算符 Q 满足 $[Q, \phi] = -q\phi$ (习题 2.4)，由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \dots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi$$

再利用 $e^{-A}Be^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$ ，推出

$$e^{i\theta Q} \phi e^{-i\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\phi, (-i\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} [\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} \phi = e^{-iq\theta} \phi$$

用厄米算符 Q 和 P 算符定义一个新的幺正算符 $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$

它满足 $P'^{-1} = P'^{\dagger} = P^{\dagger} e^{i\theta Q} = P^{-1} e^{i\theta Q}$ ，则复标量场 $\phi(x)$ 的 P' 变换为

$$P'^{-1}\phi(x)P' = P^{-1}e^{i\theta Q}\phi(x)e^{-i\theta Q}P = e^{-iq\theta}P^{-1}\phi(x)P = e^{-iq\theta}\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x) = \eta_P'^*\phi(\mathcal{P}x)$$

其中 $\eta'_P \equiv e^{i q \theta} \eta_P$ 是 P' 算符的相位因子

分立变换相位因子的任意性

尽管 P' 算符不是厄米的，它的作用与 P 算符的作用在实质上是相同的，能够将 $\phi(x)$ 变换成 $\phi(\mathcal{P}x)$ ，只相差一个相位因子 η'_P

因此可以用 P' 取代 P 作为宇称变换算符，而相位因子 η'_P 将取代原来的 η_P

由于 $U(1)$ 变换参数 θ 是任意的， $\eta'_P = e^{iq\theta}\eta_P$ 的取值也是任意的

分立变换相位因子的任意性

尽管 P' 算符不是厄米的，它的作用与 P 算符的作用在实质上是相同的，能够将 $\phi(x)$ 变换成 $\phi(Px)$ ，只相差一个相位因子 η'_P

因此可以用 P' 取代 P 作为宇称变换算符，而相位因子 η'_P 将取代原来的 η_P

由于 $U(1)$ 变换参数 θ 是任意的, $\eta'_P = e^{i\eta\theta} \eta_P$ 的取值也是任意的

另一方面，实标量场 $\phi(x)$ 不具备 $U(1)$ 整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性

实标量场的 $U(1)$ 荷 $g = 0$ ，守恒荷算符 $Q = 0$ ，因而 $P' \equiv e^{-i\theta Q} P$ 与 P 相同

分立变换相位因子的任意性

尽管 P' 算符不是厄米的，它的作用与 P 算符的作用在实质上是相同的，能够将 $\phi(x)$ 变换成 $\phi(\mathcal{P}x)$ ，只相差一个相位因子 η'_P

因此可以用 P' 取代 P 作为宇称变换算符，而相位因子 η'_P 将取代原来的 η_P

由于 $U(1)$ 变换参数 θ 是任意的， $\eta'_P = e^{iq\theta}\eta_P$ 的取值也是任意的

另一方面，实标量场 $\phi(x)$ 不具备 $U(1)$ 整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性

实标量场的 $U(1)$ 荷 $q = 0$ ，守恒荷算符 $Q = 0$ ，因而 $P' \equiv e^{-i\theta Q}P$ 与 P 相同

这个结论可以推广到其它分立对称性和其它量子场：

分立变换的相位因子对于像复标量场这样的复场来说取值是任意的，对于像实标量场这样的自共轭场则是确定的

9.1.2 小节 标量场的 T 变换

时空坐标 x^μ 的时间反演变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

这是一种**非固有反时向** Lorentz 变换

它将 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 变换为 $x'^\mu = (\mathcal{T}x)^\mu = (-t, \mathbf{x})$

将 ∂_μ 变换为 $\partial'_\mu = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

将 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu = (\mathcal{T}p)^\mu = (-E, \mathbf{p})$

同时保持时空体积元不变, $d^4x' = |\det(\mathcal{T})| d^4x = d^4x$

于是，只要拉氏量在时间反演下不变，满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ ，系统就具有时间反演对称性

T 变换

在具有时间反演对称性的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢

$|\Psi\rangle$ 的 **T 变换** $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{T})|\Psi\rangle = \mathcal{T}|\Psi\rangle$ ，其中 $\mathcal{T} \equiv U(\mathcal{T})$

 T 是自身的逆变换算符， $T^{-1} = T$

 仿照上面关于 P 变换的讨论，根据**同态关系**，量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda, a)$ 满足

$$T^{-1}U(\Lambda, a)T = U^{-1}(\mathcal{T})U(\Lambda, a)U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}a)$$

 由此推出 **T 变换规则** $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = i\mathcal{T}^{\mu}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}_{\sigma}J^{\rho\sigma}$ 和 $T^{-1}iP^{\mu}T = i\mathcal{T}^{\mu}_{\nu}P^{\nu}$

 这里保留了推导过程中的**虚数** i

T 变换

伞 在具有时间反演对称性的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的 **T 变换** $|\Psi'\rangle = U(T) |\Psi\rangle = T |\Psi\rangle$ ，其中 $T \equiv U(T)$

拖拉机 T 是自身的逆变换算符， $T^{-1} = T$

卡车 仿照上面关于 P 变换的讨论，根据**同态关系**，量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda, a)$ 满足

$$T^{-1}U(\Lambda, a)T = U^{-1}(T)U(\Lambda, a)U(T) = U(T^{-1}\Lambda T, T^{-1}a)$$

卡车 由此推出 **T 变换规则** $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = i\mathcal{T}^{\mu}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}_{\sigma}J^{\rho\sigma}$ 和 $T^{-1}iP^{\mu}T = i\mathcal{T}^{\mu}_{\nu}P^{\nu}$

卡车 这里保留了推导过程中的**虚数 i**

⚠ 如果时间反演算符 T 与宇称算符 P 一样是**线性么正算符**，那么，

$$T^{-1}HT = T^{-1}P^0T = \mathcal{T}^0_0P^0 = -H$$

🚫 这意味着哈密顿量算符 H 在 T 变换下**发生改变**，导致理论**不具有**时间反演对称性，与我们的假设**矛盾**

🚫 因此， **T 不可能是线性么正算符**

T 变换的反线性反幺正性



现在将 T 算符定义为反线性反幺正算符, 满足

$$T^{-1}iT = -i, \quad T^{-1} = T^\dagger$$

那么, $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = i\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$ 和 $T^{-1}iP^\mu T = i\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$ 表明生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 T 变换为

$$T^{-1}J^{\mu\nu}T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}P^\mu T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$$

即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}\mathbf{H}T = +\mathbf{H}, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}$$

T 变换的反线性反幺正性

现在将 T 算符定义为反线性反幺正算符，满足

$$T^{-1}iT = -i, \quad T^{-1} = T^\dagger$$

那么， $T^{-1}iJ^{\mu\nu}T = i\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$ 和 $T^{-1}iP^\mu T = i\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$ 表明生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 T 变换为

$$T^{-1}J^{\mu\nu}T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}P^\mu T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$$

即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}\mathbf{H}T = +\mathbf{H}, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}$$

从而，哈密顿量算符 H 在时间反演变换下不变，满足 $[H, T] = 0$ ，符合理论具有时间反演对称性的假设

动量算符 \mathbf{P} 和总角动量算符 \mathbf{J} 在 T 变换下分别反转成 $-\mathbf{P}$ 和 $-\mathbf{J}$

时间反演变换相当于逆着时间方向进行观察，因而动量和角动量的方向都会反转

复标量场平面波展开式的 T 变换

🔥 下面讨论**自由复标量场** $\phi(x)$ 的 T 变换

🚤 T 变换会**翻转**粒子态对应的**动量方向**，因而产生湮灭算符的 T 变换为

$$T^{-1}a_p^\dagger T = \eta_T a_{-p}^\dagger, \quad T^{-1}a_p T = \eta_T^* a_{-p}, \quad T^{-1}b_p^\dagger T = \tilde{\eta}_T b_{-p}^\dagger, \quad T^{-1}b_p T = \tilde{\eta}_T^* b_{-p}$$

🚤 η_T 和 $\tilde{\eta}_T$ 是两个模为 1 的**相位因子**

复标量场平面波展开式的 T 变换

下面讨论自由复标量场 $\phi(x)$ 的 T 变换

 T 变换会翻转粒子态对应的动量方向，因而产生湮灭算符的 T 变换为

$$T^{-1}a_{\mathbf{p}}^\dagger T = \eta_{\mathbf{T}} a_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p}} T = \eta_{\mathbf{T}}^* a_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}}^\dagger T = \tilde{\eta}_{\mathbf{T}} b_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}} T = \tilde{\eta}_{\mathbf{T}}^* b_{-\mathbf{p}}$$

η_T 和 $\tilde{\eta}_T$ 是两个模为 1 的相位因子

复标量场平面波展开式的 T 变换为

$$\begin{aligned}
T^{-1}\phi(x)T &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\textcolor{brown}{T}^{-1} a_{\mathbf{p}} \textcolor{blue}{T} T^{-1} e^{-ip \cdot x} T + \textcolor{teal}{T}^{-1} b_{\mathbf{p}}^\dagger T \textcolor{red}{T}^{-1} e^{ip \cdot x} T \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\eta_T^* a_{-\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} + \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\eta_T^* a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot (\textcolor{brown}{T}x)} + \tilde{\eta}_T b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot (\textcolor{brown}{T}x)} \right]
\end{aligned}$$

最后一步作了变量替换 $p \rightarrow -p$ ，并利用 $(\mathcal{P}p) \cdot x = p \cdot (\mathcal{P}x) = -p \cdot (\mathcal{T}x)$

复标量场的 T 变换

为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变, $T^{-1}\phi(x)T$ 与 $\phi(\mathcal{T}x)$ 最多只能相差一个常数因子, 因此必须要求 $\omega^* = \tilde{\omega}$

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T$$

使得 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^*\phi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T\phi^\dagger(\mathcal{T}x)$$

实标量场的 T 变换

令 $b_p = a_p$ ，就得到**自由实标量场** $\phi(x)$ 的情况，此时 $\eta_T = \tilde{\eta}_T = \eta_T^*$

故 $\eta_T^2 = |\eta_T|^2 = 1$ ，有

$$\eta_T = \pm 1$$

因此，存在两类实标量场

一类实标量场具有 $\eta_T = +1$ ，相应的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = +\phi(\mathcal{T}x)$$

另一类实标量场具有 $\eta_T = -1$ ，相应的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = -\phi(\mathcal{T}x)$$

无论哪一类实标量场 $\phi(x)$ ，自由拉氏量都具有时间反演不变性

9.1.3 小节 标量场的 C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换将正反粒子互相转换，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反U(1)荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度没有影响

9.1.3 小节 标量场的 C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是电荷共轭 (charge conjugation)

电荷共轭变换将正反粒子互相转换，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反U(1)荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度没有影响

4 在具有电荷共轭对称性的量子理论中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$|\Psi'\rangle = \textcolor{red}{C} |\Psi\rangle$$

这个变换称为 **C** 变换

3 C 是自身的逆变换算符，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C$$

因而 C 算符是厄米的

复标量场的 C 变换

对于自由复标量场 $\phi(x)$, C 变换将正粒子态转化成反粒子态, $C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle$

■ η_C 是相位因子，真空态在 C 变换下不变，满足 $C|0\rangle = |0\rangle$ ，从而

$$\sqrt{2E_p} C^{-1} a_p^\dagger C |0\rangle = C \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle = C |\mathbf{p}^+\rangle = \eta_C |\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_p} \eta_C b_p^\dagger |0\rangle$$

$$C^{-1} a_p^\dagger C = \eta_C b_p^\dagger, \quad C^{-1} a_p C = \eta_C^* b_p$$

第一个等式等价于 $a_p^\dagger = \eta_C C b_p^\dagger C^{-1}$ ，因而 $\eta_C^* a_p^\dagger = |\eta_C|^2 C b_p^\dagger C^{-1} = C b_p^\dagger C^{-1}$ ，即

$$C^{-1}b_p^\dagger C = \eta_C^* a_p^\dagger, \quad C^{-1}b_p C = \eta_C a_p$$

内禀 C 宇称

注意到等时对易关系, 算符 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 和 $i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 的 C 变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = + \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x)$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x)$$

$$C^{-1}i\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2 i\phi(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)$$

因此, 自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下不变, 满足 $C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x)$

对正反标量玻色子态 $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(p) a_p^\dagger b_{-p}^\dagger |0\rangle$ 作 C 变换, 得

$$C |\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) C^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger C C^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger C |0\rangle = |\eta_C|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$$[a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \rightarrow = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \xrightarrow{\text{变量替换 } \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}}$$

$$\Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p}) \rightarrow = (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle$$

内禀 C 宇称

注意到等时对易关系, 算符 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 和 $i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$ 的 C 变换是

$$C^{-1} \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) C = |\eta_C|^2 \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(x) = + \partial^\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x)$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x)$$

$$C^{-1}i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2 i\phi(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi^\dagger(x) = -i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi(x)$$

因此,自由复标量场的拉氏量在电荷共轭变换下不变,满足 $C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x)$

对正反标量玻色子态 $|\phi\bar{\phi}\rangle = \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 作 C 变换, 得

$$\begin{aligned}
C |\phi\bar{\phi}\rangle &= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) C^{-1} a_{\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{brown}{C} C^{-1} b_{-\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{teal}{C} |0\rangle = |\eta_C|^2 \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \textcolor{brown}{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{teal}{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\
&= \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \textcolor{teal}{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{brown}{b}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\
&= (-)^L \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = (-)^L |\phi\bar{\phi}\rangle
\end{aligned}$$

■ $|\phi\bar{\phi}\rangle$ 是 C 算符的本征态, 本征值 $(-)^L$ 是可观测量, 称为 C 宇称 (C -parity)

■ 扣除波函数 $\Phi(p)$ 贡献的 $(-)^L$ 因子之后, 剩下的 C 宇称为 $+$

即一对正反标量玻色子的内禀 C 宇称为偶

9.2 节 旋量场的分立变换

9.2.1 小节 旋量场的 C 变换

现在讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换

C 变换在互换正反粒子的同时，不改变动量 p 和螺旋度 $\lambda = \pm$ ，因此将正费米子态 $|p^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ 转化成反费米子态 $|p^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ ，

$$C |p^+, \lambda\rangle = \zeta_C |p^-, \lambda\rangle$$

ζ_C 是相位因子

9.2 节 旋量场的分立变换

9.2.1 小节 旋量场的 C 变换

现在讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换

C 变换在互换正反粒子的同时, 不改变动量 p 和螺旋度 $\lambda = \pm$, 因此将正费米子态 $|p^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ 转化成反费米子态 $|p^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$,

$$C |p^+, \lambda\rangle = \zeta_C |p^-, \lambda\rangle$$

ζ_C 是相位因子, 由此推出

$$C^{-1} a_{p,\lambda}^\dagger C = \zeta_C b_{p,\lambda}^\dagger, \quad C^{-1} a_{p,\lambda} C = \zeta_C^* b_{p,\lambda}, \quad C^{-1} b_{p,\lambda}^\dagger C = \zeta_C^* a_{p,\lambda}^\dagger, \quad C^{-1} b_{p,\lambda} C = \zeta_C a_{p,\lambda}$$

$\psi(x)$ 平面波展开式的 C 变换为

$$\begin{aligned} C^{-1} \psi(x) C &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[u(p, \lambda) C^{-1} a_{p,\lambda} C e^{-ip \cdot x} + v(p, \lambda) C^{-1} b_{p,\lambda}^\dagger C e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_C^* u(p, \lambda) b_{p,\lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* v(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$

螺旋态关系式

为了得到 $\psi(x)$ 的电荷共轭场，需要探讨 $u(p, \lambda)$ 和 $v(p, \lambda)$ 之间相互转换的关系

在 Weyl 表象中, 对 $\bar{u}(p, \lambda)$ 和 $\bar{v}(p, \lambda)$ 进行转置, 得

$$\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

另一方面，按照螺旋态的具体形式， $i\sigma^2$ 对 $\xi_\lambda^*(p)$ 的作用为

$$i\sigma^2 \xi_+^*(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 - ip^2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ -(|\mathbf{p}| + p^3) \end{pmatrix} = -\xi_-(\mathbf{p})$$

$$i\sigma^2 \xi_-^*(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| + p^3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} = +\xi_+(\mathbf{p})$$

其中归一化因子 $N \equiv [2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)]^{-1/2}$ ，归纳起来，得

$$i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) = -\lambda\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \quad i\sigma^2\xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = \lambda\xi_\lambda(\mathbf{p})$$

电荷共轭场



引入旋量空间中的电荷共轭矩阵

$$\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$



就可以导出平面波旋量系数 $u(p, \lambda)$ 和 $v(p, \lambda)$ 之间的转换关系式:

$$\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) i \sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) i \sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$

电荷共轭场



引入旋量空间中的电荷共轭矩阵

$$\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = i \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$



就可以导出平面波旋量系数 $u(p, \lambda)$ 和 $v(p, \lambda)$ 之间的转换关系式:

$$\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})i\sigma^2\xi_\lambda^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) i \sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \\ \lambda \omega_\lambda(\mathbf{p}) i \sigma^2 \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p}, \lambda)$$



于是, $\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$\begin{aligned} C^{-1}\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_C^* \textcolor{blue}{u}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* \textcolor{brown}{v}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_C^* \mathcal{C} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \zeta_C^* \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] = \zeta_C^* \psi^{\textcolor{blue}{C}}(x) \end{aligned}$$



$$\psi^C(x) \equiv \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$$

便是 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**

电荷共轭矩阵的性质



现在研究电荷共轭矩阵 \mathcal{C} 的性质



利用 $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 γ^0 的厄米性、 γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ ，有

$$\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = \mathbf{1}$$



可见， \mathcal{C} 是么正矩阵，满足

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$$

电荷共轭矩阵的性质



现在研究电荷共轭矩阵 \mathcal{C} 的性质



利用 $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$ 、 γ^0 的厄米性、 γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ ，有

$$\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^T & \\ & i(\sigma^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = 1$$



可见， \mathcal{C} 是么正矩阵，满足

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$$



Pauli 矩阵满足 $\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = i\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^1 = -(\sigma^1)^T$ 、 $\sigma^2\sigma^2\sigma^2 = \sigma^2 = -(\sigma^2)^T$ 和 $\sigma^2\sigma^3\sigma^2 = i\sigma^1\sigma^2 = -\sigma^3 = -(\sigma^3)^T$ ，归纳得到 $\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2 = \mathbf{1}^T$ 和 $\sigma^2\sigma\sigma^2 = -\sigma^T$ ，因此

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T, \quad \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$$

Dirac 矩阵的电荷共轭变换

利用 $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$ 和 $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$ 推出

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} & \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \\ \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 & \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} & (\bar{\sigma}^\mu)^T \\ (\sigma^\mu)^T & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma^5 \mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

即得 γ^μ 和 γ^5 关于 \mathcal{C} 的相似变换性质

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T, \quad \mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \gamma^5$$

由于 $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ ，这两个式子等价于

$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad \mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T \mathcal{C} = \gamma^5$$

$\psi^c(x)$ 的运动方程

如果 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带电荷 Q ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0 ，得

$$0 = \psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger (-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m] \gamma^0 = \bar{\psi} [-\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置, 推出 $[-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$

如果 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带电荷 Q ，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0 ，得

$$0 = \psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger (-i\partial_\mu - QeA_\mu) - m] \gamma^0 = \bar{\psi} [-\gamma^\mu (i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置，推出 $[-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$

利用 $\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T$ ，将上式化为

$$0 = [\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} (\mathrm{i} \partial_\mu + Q e A_\mu) - m \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}] \bar{\psi}^T = \mathcal{C}^{-1} [\gamma^\mu (\mathrm{i} \partial_\mu + Q e A_\mu) - m] \mathcal{C} \bar{\psi}^T$$

从而得到电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 的运动方程

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^C = 0$$

对比 $\psi(x)$ 的运动方程，可以看出 $\psi^C(x)$ 确实携带相反的电荷 $-Q$

同理, $\psi^C(x)$ 携带的任何 U(1) 荷都与 $\psi(x)$ 相反

$\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换

根据 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

电荷共轭场 $\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$ 的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C} \bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} \mathcal{C}^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T \\ &= [\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T = -(\mathcal{C} \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (\mathcal{C}^T \psi)^T\end{aligned}$$

即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$$

$\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换

🐵 根据 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

🎬 电荷共轭场 $\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$ 的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= (\psi^C)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C}\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = [(\gamma^0)^T (\bar{\psi} \mathcal{C}^T)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T (\psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^T = [(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T \\ &= [\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi]^T = -(\mathcal{C} \gamma^0 \gamma^0 \psi)^T = (\mathcal{C}^T \psi)^T\end{aligned}$$

🎥 即

$$\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$$

🎥 于是 $C^{-1}\bar{\psi}C = C^\dagger \psi^\dagger C \gamma^0 = (C^{-1}\psi C)^\dagger \gamma^0 = (\zeta_C^* \psi^C)^\dagger \gamma^0 = \zeta_C \bar{\psi}^C = \zeta_C \psi^T \mathcal{C}$

💻 也就是说, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 及其 Dirac 共轭场 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换是

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \zeta_C^* \mathcal{C} \bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C \bar{\psi}^C(x) = \zeta_C \psi^T(x) \mathcal{C}$$

⌚ 仿照 $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$ 的推导, 由 $\mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) = v(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = u(\mathbf{p}, \lambda)$ 得

$$\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) = u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) = v^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C}$$

一般旋量双线性型的 C 变换

考虑一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma\textcolor{violet}{C}^{-1}\psi\textcolor{violet}{C} = |\zeta_C|^2\psi^T\textcolor{violet}{C}\Gamma C\bar{\psi}^T = \psi^T C\Gamma C\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\textcolor{teal}{C}^T\Gamma^T C^T\psi$$

最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为

了与**反对易关系**相匹配，必须引进一个额外的**负号**

一般旋量双线性型的 C 变换

考虑一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \textcolor{red}{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma\textcolor{violet}{C}^{-1}\psi\textcolor{violet}{C} = |\zeta_C|^2\psi^T\textcolor{violet}{C}\Gamma C\bar{\psi}^T = \psi^T C\Gamma C\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\textcolor{teal}{C}^T\Gamma^T C^T\psi$$

最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为

了与**反对易关系**相匹配，必须引进一个额外的**负号**

从而, 由 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathbf{T}}\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\mathbf{C}}\psi(x)$$

其中 $\Gamma^C \equiv C^{-1} \Gamma^T C$ 可视为矩阵 Γ 的**电荷共轭变换**

一般旋量双线性型的 C 变换

🐻 考虑一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ ，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = \mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2 \psi^T \mathcal{C} \Gamma \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \psi^T \mathcal{C} \Gamma \mathcal{C} \bar{\psi}^T = -\bar{\psi} \mathcal{C}^T \Gamma^T \mathcal{C}^T \psi$$

⌚ 最后一步进行了转置，需要注意的是，转置两个旋量场会交换两者的位置，为

了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号

⌚ 从而，由 $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^C\psi(x)$$

📸 其中 $\Gamma^C \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^T\mathcal{C}$ 可视为矩阵 Γ 的电荷共轭变换

💿 根据 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C} = -\gamma^\mu$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T\mathcal{C} = \gamma^5$ ，有

$$\mathbf{1}^C = \mathcal{C}^{-1}\mathbf{1}^T\mathcal{C} = +\mathbf{1}, \quad (\mathbf{i}\gamma^5)^C = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{i}\gamma^5)^T\mathcal{C} = +\mathbf{i}\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad (\gamma^\mu\gamma^5)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^T\mathcal{C} = +\gamma^\mu\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^T\mathcal{C} = +\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad (\sigma^{\mu\nu})^C = \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^T\mathcal{C} = -\sigma^{\mu\nu}$$

旋量双线性型的 C 变换



于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$

旋量双线性型的 C 变换



于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$$



拉氏量中的动能项算符 $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 在 C 变换下化为

$$\begin{aligned} C^{-1}i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= i\psi^T C \gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T = -i\psi^T C^{-1} \gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T = i\psi^T (\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\psi}^T \\ &= -i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi = -i\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$



最后的表达式中第一项是全散度，全时空积分后对作用量没有贡献，可以丢弃



因而上式表明动能项算符在 C 变换下不变



自由 Dirac 旋量场的拉氏量 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ 具有电荷共轭不变性

手征旋量场算符的 C 变换

对于 8.3 节的手征旋量场 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ ，算符 $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} P_L \psi = \bar{\psi} (1 - \gamma^5) \psi / 2$ 和 $\bar{\psi}_L \psi_R = \bar{\psi} P_R \psi = \bar{\psi} (1 + \gamma^5) \psi / 2$ 在 C 变换下不变，满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)C = +\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)C = +\bar{\psi}_{\text{L}}(x)\psi_{\text{R}}(x)$$

手征旋量场算符的 C 变换

对于 8.3 节的手征旋量场 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ ，算符 $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} P_L \psi = \bar{\psi} (1 - \gamma^5) \psi / 2$ 和 $\bar{\psi}_L \psi_R = \bar{\psi} P_R \psi = \bar{\psi} (1 + \gamma^5) \psi / 2$ 在 C 变换下 **不变**，满足

$$C^{-1} \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) C = +\bar{\psi}_R(x) \psi_L(x)$$

$$C^{-1} \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) C = +\bar{\psi}_L(x) \psi_R(x)$$

另一方面，**左手流算符** $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi$ 和

右手流算符 $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = \bar{\psi} \gamma^\mu P_R \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi$ 的 C 变换为

$$C^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) C = -\bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x)$$

$$C^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) C = -\bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x)$$

两者在 C 变换下 **相互转化**，并出现一个 **负号**

在 **弱相互作用** 中，轻子和夸克的 **左手流算符** 和 **右手流算符** 参与 **不同的规范相互作用**，因而 **电荷共轭对称性遭到破坏**

9.2.2 小节 Majorana 旋量场

如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同, $\psi(x) = \psi^C(x)$, 即满足**自共轭条件**

$$\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$$

那么, $\psi(x)$ 就是一种纯中性的场, 不能携带任何 $U(1)$ 荷, 称为 Majorana 旋量场, 上式称为 Majorana 条件

于是, Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$



Ettore Majorana
(1906–?)

9.2.2 小节 Majorana 旋量场

如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同, $\psi(x) = \psi^C(x)$, 即满足**自共轭条件**

$$\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)$$

那么, $\psi(x)$ 就是一种纯中性的场, 不能携带任何 $U(1)$ 荷, 称为 Majorana 旋量场, 上式称为 Majorana 条件



Ettore Majorana
(1906–?)

于是, Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^C(x)$

根据 $\bar{\psi}^C(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$ ，Majorana 条件等价于 $\bar{\psi}(x) = \psi^T(x) \mathcal{C}$

这里没出现 $\psi^\dagger(x)$ ，而出现 $\psi^T(x)$ ，表明 $\bar{\psi}_a(x) = \psi_b(x) \mathcal{C}_{ba}$ 与 $\psi_a(x)$ 线性相关

因此, $\bar{\psi}_a(x)$ 并不是独立于 $\psi_a(x)$ 的场变量, 这一点与 Dirac 旋量场不同

根据前面的讨论, $\psi^C(x)$ 的平面波展开式为

$$\psi^C(x) = \zeta_C C^{-1} \psi(x) C = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

Majorana 费米子

将上式与 $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$ 比较

可知 Majorana 条件 $\psi(x) = \psi^C(x)$ 意味着 $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$

因此, Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0$$

Majorana 费米子

将上式与 $\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$ 比较

可知 Majorana 条件 $\psi(x) = \psi^C(x)$ 意味着 $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$

因此, Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \color{red} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0$$

类似于实标量场, Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子

即正费米子与反费米子相同，称为 Majorana 费米子

因此 $C^{-1}a_{p,\lambda}C = \zeta_C^*b_{p,\lambda}$ 、 $C^{-1}b_{p,\lambda}C = \zeta_C a_{p,\lambda}$ 和 $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$ 表明 $\zeta_C = \zeta_C^*$

故 $\zeta_C = \pm 1$ ，也就是说，Majorana 旋量场的 C 宇称要么为偶，要么为奇。

自由 Majorana 旋量场拉氏量

自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T \mathcal{C} \psi$$

应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中 ψ^T 扮演的角色跟 ψ 相同

如果将前后两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2 ，动量项算符可化为

$$\begin{aligned}\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T)(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu \psi_1\end{aligned}$$

自由 Majorana 旋量场拉氏量

自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m \psi^T \mathcal{C} \psi$$

应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中 ψ^T 扮演的角色跟 ψ 相同

如果将前后两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2 ，动量项算符可化为

$$\begin{aligned}\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 &= (\psi_1^T \mathcal{C} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2)^T = -(\partial_\mu \psi_2^T)(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \psi_1 \\ &= (\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} \psi_1 = -(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu \psi_1\end{aligned}$$

质量项算符可化为 $\psi_1^T \mathcal{C} \psi_2 = (\psi_1^T \mathcal{C} \psi_2)^T = -\psi_2^T \mathcal{C}^T \psi_1 = \psi_2^T \mathcal{C} \psi_1$ ，则

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} = -\frac{i}{2}(\partial_\mu \psi_2^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - \frac{1}{2} m \psi_2^T \mathcal{C}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{1}{2} m \psi_1^T \mathcal{C}$$

 ψ_1 和 ψ_2 都是 ψ ，因而

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_2} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

根据 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu$ 和 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$

💡 Euler-Lagrange 方程给出 $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu + m \psi^T \mathcal{C}$

对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = \mathcal{C} \gamma^\mu = -\mathcal{C}^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \partial_\mu \psi + m \mathcal{C}^T \psi = \mathcal{C}^T (-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi)$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

根据 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \psi^T \mathcal{C} \gamma^\mu$ 和 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu - m \psi^T \mathcal{C}$

💡 Euler-Lagrange 方程给出 $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i(\partial_\mu \psi^T) \mathcal{C} \gamma^\mu + m \psi^T \mathcal{C}$

对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = \mathcal{C} \gamma^\mu = -\mathcal{C}^T \gamma^\mu$ ，推出

$$0 = i(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^T \partial_\mu \psi + m \mathcal{C}^T \psi = \mathcal{C}^T (-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi)$$

可见，自由的 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 也满足 **Dirac** 方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

这与上述平面波展开式

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

相容

9.2.3 小节 旋量场的 P 变换

下面讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 P 变换

宇称变换反转动量方向, 但保持角动量不变, 因而会翻转螺旋度 λ 的符号

平面波旋量系数 $u(p, \lambda)$ 和 $v(p, \lambda)$ 都是用螺旋态 $\xi_\lambda(p)$ 表达出来的

而宇称变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$

9.2.3 小节 旋量场的 P 变换

下面讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 P 变换

宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度 λ 的符号

平面波旋量系数 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 都是用螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 表达出来的

而宇称变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$

第五章中的本征方程 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ 表明， $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ 都是 $\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 的归一化本征矢量，两者至多相差一个相位因子

这个相位因子的具体形式与螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的约定有关

将螺旋态 $\xi_+(\mathbf{p})$ 化为

$$\begin{aligned}\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}| + p^3}{p^1 - ip^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{(|\mathbf{p}| + p^3)(p^1 + ip^2)}{(p^1)^2 + (p^2)^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

螺旋态的宇称变换相位因子

利用 $(|\mathbf{p}| + p^3)(|\mathbf{p}| - p^3) = |\mathbf{p}|^2 - (p^3)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2$ ，推出

$$\begin{aligned}
\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \begin{pmatrix} \frac{(|\mathbf{p}| + p^3)(p^1 + ip^2)}{(p^1)^2 + (p^2)^2} (p^1 - ip^2) \\ \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} (|\mathbf{p}| - p^3) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| + p^3)}} \frac{p^1 + ip^2}{|\mathbf{p}| - p^3} \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| - p^3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| - p^3)}} \frac{p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ |\mathbf{p}| - p^3 \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},+} \xi_-(-\mathbf{p})
\end{aligned}$$

其中 $\kappa_{p,+}$ 是相位因子 $\kappa_{p,\lambda} \equiv \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}}$ 在 $\lambda = +$ 时的结果

再由 $\kappa_{p,+}^* \kappa_{p,+} = 1$ 推出 $\xi_-(-p) = \kappa_{p,+}^* \xi_+(p)$ ，故

$$\xi_-(\mathbf{p}) = \kappa_{-\mathbf{p},+}^* \xi_+(-\mathbf{p}) = \frac{-p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \xi_+(-\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},-} \xi_+(-\mathbf{p})$$

归纳起来, 有 $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} \xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$, 可见 $\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}$ 就是想要得到的相位因子

产生湮灭算符的 P 变换



为得到自洽的宇称变换结果, 将正反费米子态 $|p^+, \lambda\rangle$ 和 $|p^-, \lambda\rangle$ 的 P 变换设为

$$P|p^+, \lambda\rangle = \zeta_P \kappa_{-p, -\lambda}^* | -p^+, -\lambda \rangle, \quad P|p^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-p, -\lambda}^* | -p^-, -\lambda \rangle$$



其中 ζ_P 和 $\tilde{\zeta}_P$ 是两个相位因子, 从而推出 $a_{p, \lambda}^\dagger$ 和 $a_{p, \lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1} a_{p, \lambda}^\dagger P = \zeta_P \kappa_{-p, -\lambda}^* a_{-p, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} a_{p, \lambda} P = \zeta_P^* \kappa_{-p, -\lambda} a_{-p, -\lambda}$$



以及 $b_{p, \lambda}^\dagger$ 和 $b_{p, \lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1} b_{p, \lambda}^\dagger P = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-p, -\lambda}^* b_{-p, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} b_{p, \lambda} P = \tilde{\zeta}_P^* \kappa_{-p, -\lambda} b_{-p, -\lambda}$$

产生湮灭算符的 P 变换



为得到自洽的宇称变换结果, 将正反费米子态 $|p^+, \lambda\rangle$ 和 $|p^-, \lambda\rangle$ 的 P 变换设为

$$P|p^+, \lambda\rangle = \zeta_P \kappa_{-p, -\lambda}^* | -p^+, -\lambda \rangle, \quad P|p^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-p, -\lambda}^* | -p^-, -\lambda \rangle$$



其中 ζ_P 和 $\tilde{\zeta}_P$ 是两个相位因子, 从而推出 $a_{p, \lambda}^\dagger$ 和 $a_{p, \lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1} a_{p, \lambda}^\dagger P = \zeta_P \kappa_{-p, -\lambda}^* a_{-p, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} a_{p, \lambda} P = \zeta_P^* \kappa_{-p, -\lambda} a_{-p, -\lambda}$$



以及 $b_{p, \lambda}^\dagger$ 和 $b_{p, \lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1} b_{p, \lambda}^\dagger P = \tilde{\zeta}_P \kappa_{-p, -\lambda}^* b_{-p, -\lambda}^\dagger, \quad P^{-1} b_{p, \lambda} P = \tilde{\zeta}_P^* \kappa_{-p, -\lambda} b_{-p, -\lambda}$$



Dirac 旋量场平面波展开式的 P 变换为

$$\begin{aligned} P^{-1} \psi(x) P &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[u(p, \lambda) P^{-1} a_{p, \lambda} P e^{-ip \cdot x} + v(p, \lambda) P^{-1} b_{p, \lambda}^\dagger P e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \kappa_{-p, -\lambda} u(p, \lambda) a_{-p, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-p, -\lambda}^* v(p, \lambda) b_{-p, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$

$\psi(x)$ 的 P 变换

作变量替换 $p \rightarrow -p$ 和 $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，得

$$\begin{aligned}
& P^{-1} \psi(x) P \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda} u(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* v(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right]
\end{aligned}$$

最后一步用到 $\gamma^0 u(p, \lambda) = \kappa_{p, \lambda} u(-p, -\lambda)$ 和 $\gamma^0 v(p, \lambda) = -\kappa_{p, \lambda}^* v(-p, -\lambda)$

$\psi(x)$ 的 P 变换

作变量替换 $p \rightarrow -p$ 和 $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，得

$$\begin{aligned} & P^{-1} \psi(x) P \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \kappa_{-p, -\lambda} u(p, \lambda) a_{-p, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{-p, -\lambda}^* v(p, \lambda) b_{-p, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \kappa_{p, \lambda} u(-p, -\lambda) a_{p, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \tilde{\zeta}_P \kappa_{p, \lambda}^* v(-p, -\lambda) b_{p, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_P^* \gamma^0 u(p, \lambda) a_{p, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(p, \lambda) b_{p, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right] \end{aligned}$$

最后一步用到 $\gamma^0 u(p, \lambda) = \kappa_{p, \lambda} u(-p, -\lambda)$ 和 $\gamma^0 v(p, \lambda) = -\kappa_{p, \lambda}^* v(-p, -\lambda)$

为了保持 $\psi(x)$ 的运动方程形式不变，必须要求 $\zeta_P^* = -\tilde{\zeta}_P$ ，使 $b_{p, \lambda}^\dagger$ 和 $b_{p, \lambda}$ 的 P 变换化为 $P^{-1} b_{p, \lambda}^\dagger P = -\zeta_P^* \kappa_{-p, -\lambda}^* b_{-p, -\lambda}^\dagger$ 和 $P^{-1} b_{p, \lambda} P = -\zeta_P \kappa_{-p, -\lambda} b_{-p, -\lambda}$

从而 $\psi(x)$ 的 P 变换为 $P^{-1} \psi(x) P = \zeta_P^* D(\mathcal{P}) \psi(\mathcal{P}x)$

其中 $D(\mathcal{P}) \equiv \gamma^0$ 正是 5.1 节引入的旋量空间中的宇称变换矩阵，它是么正的

$\bar{\psi}(x)$ 的 P 变换

现在，作宇称变换后， $\psi'(x') = P^{-1}\psi(x')P = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x') = \zeta_P^* D(\mathcal{P})\psi(x)$ 也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{i}\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = \zeta_P^* [\mathbf{i}\gamma^\mu (\mathcal{P}^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m] D(\mathcal{P})\psi(x) \\
&= \zeta_P^* D(\mathcal{P}) [\mathbf{i}\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\
&= \zeta_P^* D(\mathcal{P}) [\mathbf{i}\mathcal{P}^\mu_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) = \zeta_P^* D(\mathcal{P}) (\mathbf{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

第三步用到 5.1 节公式 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

手征旋量双线性型的 P 变换

进一步推出

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) P = \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) P = \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$P^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$

左手流算符 $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$ 在 P 变换下相互转化

在弱相互作用中，轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏，即宇称不守恒

利用 $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu}$ ，动能项算符 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned} P^{-1} i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_{x,\mu} \psi(x) P &= i\bar{\psi}(x) P \gamma^\mu \partial_{x,\mu} P^{-1} \psi(x) P \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) D^{-1}(\mathcal{P}) \gamma^\mu D(\mathcal{P}) (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu} \psi(\mathcal{P}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{P}x,\nu} \psi(\mathcal{P}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\mu \partial_{\mathcal{P}x,\mu} \psi(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在宇称变换下不变

正反费米子态的 P 变换

在质心系中考虑一对正反费米子 $\psi\bar{\psi}$ 组成的系统

设两个粒子的螺旋度相反，轨道角动量量子数为 L 的态矢为

$$|\psi\bar{\psi}\rangle = \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle, \quad \Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L \Phi(\mathbf{p})$$

相应的 P 变换是

$$\begin{aligned} P|\psi\bar{\psi}\rangle &= \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \mathcal{P}^{-1} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \mathcal{P} \mathcal{P}^{-1} b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger \mathcal{P} |0\rangle \\ &= -|\zeta_P|^2 \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* a_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger |0\rangle \\ &= - \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ 和 $\lambda \rightarrow -\lambda$

内禀宇称

利用 $\kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* = \frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = 1$ ，推出

$$\begin{aligned} P |\psi\bar{\psi}\rangle &= - \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle \\ &= -(-)^L \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle = (-)^{L+1} |\psi\bar{\psi}\rangle \end{aligned}$$

可见， $|\psi\bar{\psi}\rangle$ 的总宇称为 $(-)^{L+1}$ ，包含轨道宇称 $(-)^L$ 和内禀宇称 $-$

也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇

内禀宇称

利用 $\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p}, -\lambda}^* = \frac{\lambda p^1 - ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \frac{\lambda p^1 + ip^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = 1$ ，推出

$$\begin{aligned}
P |\psi\bar{\psi}\rangle &= - \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(-\mathbf{p}) \kappa_{\mathbf{p},\lambda}^* \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda}^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle \\
&= -(-)^L \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger |0\rangle = (-)^{L+1} |\psi\bar{\psi}\rangle
\end{aligned}$$

可见, $|\psi\bar{\psi}\rangle$ 的总宇称为 $(-)^{L+1}$, 包含轨道宇称 $(-)^L$ 和内禀宇称 $(-)^1$

也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇

对于自由的 Majorana 旋量场 $\psi(x)$, $b_{p,\lambda} = a_{p,\lambda}$, 则 $\tilde{\zeta}_P = \zeta_P$

从而 $\zeta_P^* = -\tilde{\zeta}_P \equiv -\zeta_P$ ，因此

$$\zeta_P = \pm i$$

故 Majorana 旋量场的宇称是虚数

9.2.4 小节 旋量场的 T 变换



下面讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 T 变换



时间反演变换同时**反转动量**和**角动量**的方向，因而会**保持螺旋度** λ 不变



另一方面， T 变换是**反线性**的，将一个复数变换成它的**复共轭**



因此 T 变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$

9.2.4 小节 旋量场的 T 变换

下面讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 T 变换

时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度 λ 不变

另一方面, T 变换是反线性的, 将一个复数变换成它的复共轭

因此 T 变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(p)$ 和 $\xi_\lambda^*(-p)$

对 9.2.1 小节推出的关系 $i\sigma^2\xi_\lambda^*(p) = -\lambda\xi_{-\lambda}(p)$ 取复共轭

再利用 $\xi_\lambda(p) = \kappa_{p,\lambda}\xi_{-\lambda}(-p)$ ，得到 $\xi_\lambda(p)$ 和 $\xi_\lambda^*(-p)$ 之间的关系

$$i\sigma^2 \xi_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda \xi_{-\lambda}^*(\mathbf{p}) = -\lambda \kappa_{\mathbf{p}, -\lambda}^* \xi_\lambda^*(-\mathbf{p})$$

作变量替换 $\lambda \rightarrow -\lambda$ ，有 $i\sigma^2 \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p})$

cloud $i\sigma^2$ 出现在矩阵 $\mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}$ 的两个对角分块中

产生湮灭算符的 T 变换

现在, $\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = -\lambda \kappa_{\mathbf{p}, -\lambda}^* \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_{\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_{\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$

$$\mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \omega_{\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* \begin{pmatrix} \lambda \omega_{\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \\ -\lambda \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \xi_{-\lambda}^*(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

由 $\kappa_{\mathbf{p}, -\lambda} = -\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^*$ 得 $\kappa_{\mathbf{p}, -\lambda}^* = -\kappa_{\mathbf{p}, \lambda}$, 从而推出

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda), \quad \mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$$

可见, $D(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{C}\gamma^5$ 是旋量空间中的时间反演矩阵, 它对 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{p}, \lambda)$ 的作用反转了相应的动量, 并将它们转换成各自的复共轭

为得到自洽时间反演变换结果, 设正反费米子态 $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$ 的 T 变换为

$$T|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* |-\mathbf{p}^+, \lambda\rangle, \quad T|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* |-\mathbf{p}^-, \lambda\rangle$$

其中 ζ_T 和 $\tilde{\zeta}_T$ 是两个相位因子, 由此得到 $a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$ 、 $a_{\mathbf{p}, \lambda}$ 、 $b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger$ 和 $b_{\mathbf{p}, \lambda}$ 的 T 变换

$$T^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger T = \zeta_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* a_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, \quad T^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} T = \zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} a_{-\mathbf{p}, \lambda}$$

$$T^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger T = \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, \quad T^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda} T = \tilde{\zeta}_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} b_{-\mathbf{p}, \lambda}$$

平面波展开式的 T 变换

注意到 $T^{-1}iT = -i$ ，Dirac 旋量场平面波展开式的 T 变换是

$$\begin{aligned}
 & T^{-1}\psi(x)T \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} T^{-1} \left[u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] T \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_T^* \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda} u^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, \lambda} e^{ip \cdot x} + \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{-\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_T^* \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T \mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right]
 \end{aligned}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$

第四步用到 $\mathcal{C} \gamma^5 u(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda} u^*(-\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $\mathcal{C} \gamma^5 v(\mathbf{p}, \lambda) = \lambda \kappa_{\mathbf{p}, \lambda}^* v^*(-\mathbf{p}, \lambda)$

旋量空间中矩阵的 T 变换

根据 γ^5 的厄米性、 γ^i 的反厄米性、 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^T \mathcal{C} = \gamma^5$ ，有

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^5)^{\textcolor{brown}{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = (\gamma^5)^3 = \gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^0)^* D(\mathcal{T}) = \gamma^5 \mathcal{C}^{-1} (\gamma^0)^{\mathbf{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^5 = \gamma^0$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^i)^* D(\mathcal{T}) = -\gamma^5 \mathcal{C}^{-1}(\gamma^i)^{\text{T}} \mathcal{C} \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^i \gamma^5 = -\gamma^i$$

进而得到

$$D^{-1}(\mathcal{T})\mathbf{1}^*D(\mathcal{T}) = +\mathbf{1}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(i\gamma^5)^*D(\mathcal{T}) = -i\gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu \gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T}) D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^* D(\mathcal{T}) = -\mathcal{T}^\mu_{\nu} \gamma^\nu \gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\sigma^{\mu\nu})^*D(\mathcal{T}) = -\frac{i}{2}D^{-1}(\mathcal{T})[(\gamma^\mu)^*(\gamma^\nu)^* - (\gamma^\nu)^*(\gamma^\mu)^*]D(\mathcal{T})$$

$$= -\frac{i}{2} \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\mu) = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}$$

拉氏量和运动方程的时间反演对称性

利用 $\partial_{x,\mu} = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu}$ ，动能项算符 $i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 的 T 变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_{x,\mu} \psi(x)T &= -i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu} \psi(\mathcal{T}x) \\ &= i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathcal{T}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_{\mathcal{T}x,\nu} \psi(\mathcal{T}x) = +i\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\mu \partial_{\mathcal{T}x,\mu} \psi(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量在时间反演变换下不变

