

数学物理方法

第九章 正交曲线坐标系中的分离变量

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 11 月 24 日

第九章 正交曲线坐标系中的分离变量



本章开始把分离变量法推广到比较实际的**三维问题**



前已指出，分离变量时，应该根据**边界的形状**采用**适当的坐标系**



本章的目的就是研究如何在**球坐标系**和**柱坐标系**中对各类方程分离变量



前面提到的**波动方程**、**输运方程**和**稳定场方程**都包含 Laplace 算符



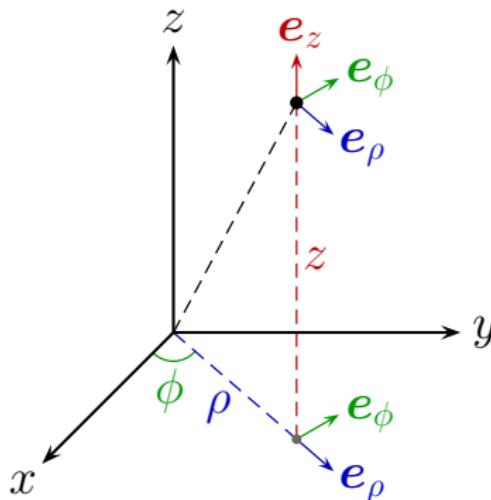
因此需要研究 Laplace 算符在**曲线坐标系**，尤其是**球坐标系**和**柱坐标系**中的形式

§1 正交曲线坐标系中的微分算符

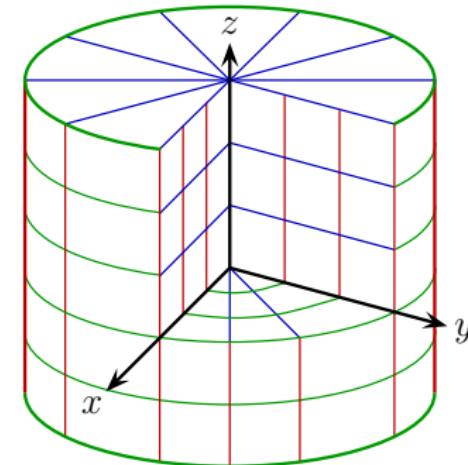
§1.1 正交曲线坐标系

🌐 直角坐标系 (x, y, z) 、柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 、球坐标系 (r, θ, ϕ) 都是正交曲线坐标系

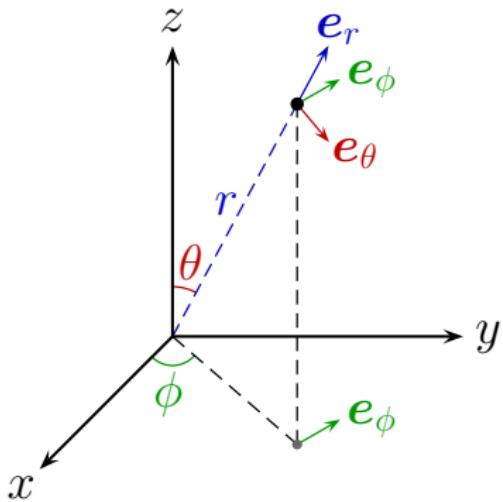
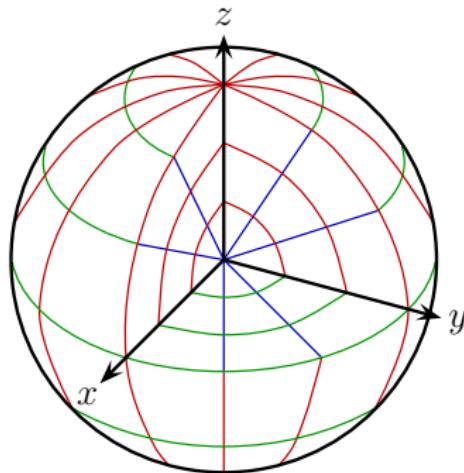
⚠ 它们的三族坐标线处处相互正交



柱坐标系 (ρ, ϕ, z)

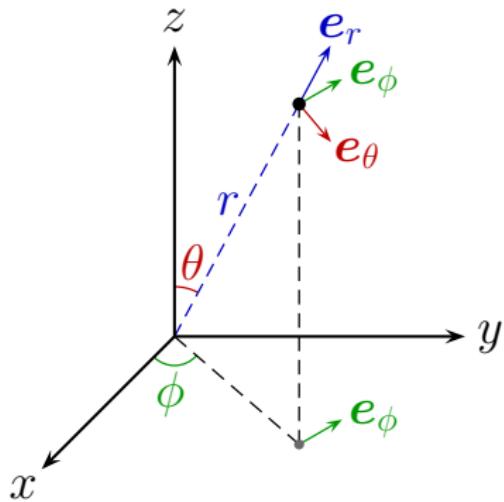
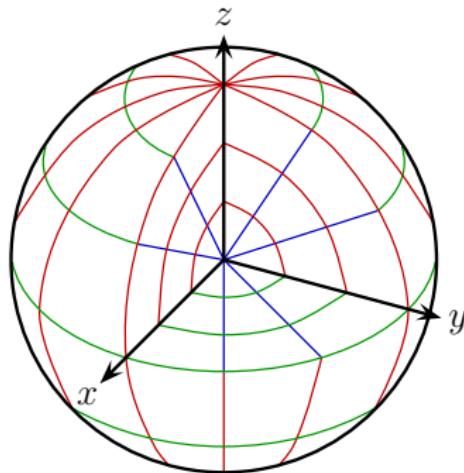


柱坐标系的坐标线

球坐标系 (r, θ, ϕ) 

球坐标系的坐标线

一般曲线坐标系

球坐标系 (r, θ, ϕ) 

球坐标系的坐标线

现在，考虑一般曲线坐标系，记其坐标为 (q_1, q_2, q_3) ，它们与直角坐标 (x, y, z) 之间的变换关系为 $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$

反之， (q_1, q_2, q_3) 也可以表达为 (x, y, z) 的函数

坐标系的奇点

一般来说，我们要求 **Jacobi 行列式**

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0$$



在 $J = 0$ 处，给定 (x, y, z) 可能无法唯一确定 (q_1, q_2, q_3)

$J = 0$ 对应的点就是坐标系的奇点

Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804–1851)

$$\mathrm{d}^3x = |J| \mathrm{d}^3q$$

坐标系的奇点

一般来说，我们要求 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0$$



Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804–1851)

在 $J = 0$ 处，给定 (x, y, z) 可能无法唯一确定 (q_1, q_2, q_3)

$J = 0$ 对应的点就是坐标系的奇点

对于球坐标系， $J = r^2 \sin \theta$ 在 $r = 0$ 或 $\theta = 0, \pi$ 处为零

此时给定 (x, y, z) ，无法唯一确定 (r, θ, ϕ)

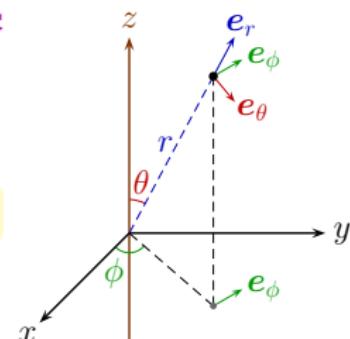
在 $\theta = 0, \pi$ 处， ϕ 没有定义

在 $r = 0$ 处， θ 和 ϕ 没有定义

所以整个 z 轴都是球坐标系的奇点

不过，这些点构成的集合测度（可以粗略地理解为体积）为零，这一般是允许的

$$d^3x = |J| d^3q$$



相邻两点之间的距离

 将 $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ 写成简洁的矢量形式

$$\mathbf{r} = \textcolor{teal}{x} \mathbf{e}_x + \textcolor{teal}{y} \mathbf{e}_y + \textcolor{teal}{z} \mathbf{e}_z = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$$

 这样可以减少书写上的麻烦，使有关结果显得更清晰

 如果一时看不清楚式子的含义，可以写出**详细的分量形式**加以对照

? 现在的问题是，什么样的**曲线坐标系**才算是**正交**的？

相邻两点之间的距离

将 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}(q_1, q_2, q_3)$ 写成简洁的矢量形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} e_x + \mathbf{y} e_y + \mathbf{z} e_z = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$$

这样可以减少书写上的麻烦，使有关结果显得更清晰

如果一时看不清楚式子的含义，可以写出**详细的分量形式**加以对照

? 现在的问题是，什么样的**曲线坐标系**才算是**正交**的？

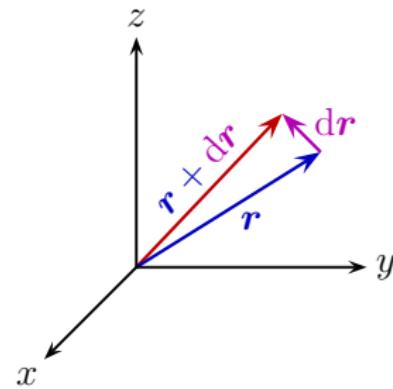
在**直角坐标系**中，相邻两点 \mathbf{r} 和 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ 之间的距离记作 $ds = |d\mathbf{r}|$ ，则

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

在**曲线坐标系**中，代入 $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i$ ，得

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j$$

如果写出**详细的分量形式**，则上式包含了 **18 项**



正交曲线坐标系的定义

 现在给出正交曲线坐标系的**定义**：如果

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j,$$

则**曲线坐标系** (q_1, q_2, q_3) 称为**正交**的，有

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 (dq_i)^2 = \sum_{i=1}^3 (\textcolor{violet}{h}_i dq_i)^2 \end{aligned}$$

 其中 $\textcolor{violet}{h}_i \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|$ 称为**度规系数**

 这样的 $(ds)^2$ 与**直角坐标系**中的形式 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ 相似，只是 dq_i 前面多了**度规系数** h_i

 所以，正交的关键就是 $(ds)^2$ 表达式中**不包含像** $dq_1 dq_2$ 这样的**交叉项**

正交曲线坐标系的定义

现在给出正交曲线坐标系的**定义**：如果

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j,$$

则**曲线坐标系** (q_1, q_2, q_3) 称为**正交**的，有

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 (dq_i)^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i dq_i)^2 \end{aligned}$$

其中 $h_i \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|$ 称为**度规系数**

这样的 $(ds)^2$ 与**直角坐标系**中的形式 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ 相似，只是 dq_i 前面多了**度规系数** h_i

所以，正交的关键就是 $(ds)^2$ 表达式中**不包含像** $dq_1 dq_2$ 这样的**交叉项**

定义**度规** $g_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ ，则

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dq_i dq_j$$

对于**正交曲线坐标系**，有

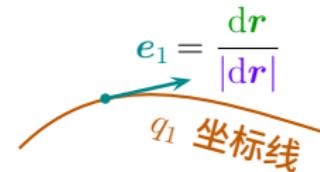
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

正交曲线坐标系中的单位矢量

接下来推导正交曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 的基底，即单位矢量 (e_1, e_2, e_3)

⌚ e_1 的方向就是 q_1 坐标线的切线方向，沿着 q_1 坐标线，有 $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$

⌚ 相应地， $ds = |\mathbf{dr}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| dq_1 = h_1 dq_1$ ，故 $e_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$



正交曲线坐标系中的单位矢量

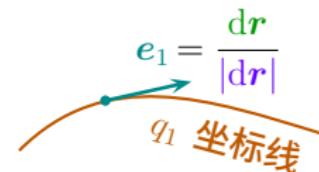
接下来推导正交曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 的基底，即单位矢量 (e_1, e_2, e_3)

📎 e_1 的方向就是 q_1 坐标线的切线方向，沿着 q_1 坐标线，有 $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$

📎 相应地， $ds = |\mathbf{dr}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| dq_1 = h_1 dq_1$ ，故 $e_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$

📎 对 e_2 和 e_3 有类似的结果，总结起来，就是

$$e_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$



📘 当 $i \neq j$ 时，有 $e_i \cdot e_j = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0$ ，可见三族坐标线确实是处处正交的

📘 此外， $e_i \cdot e_i = \frac{1}{h_i^2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 = \frac{h_i^2}{h_i^2} = 1$ ，归纳得到正交归一关系

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

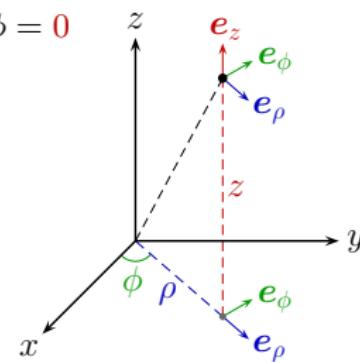
柱坐标系

例 1 在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中, $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$, 有

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \mathbf{e}_x + \rho \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z$$

从而验证正交性: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \cos \phi + \rho \sin \phi \cos \phi = 0$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0$$



柱坐标系

例 1 在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中, $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$, 有

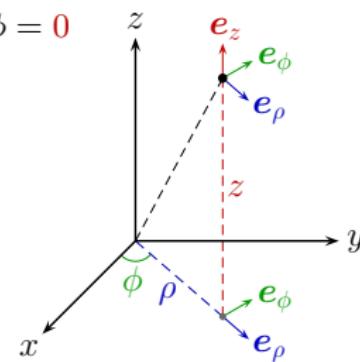
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \mathbf{e}_x + \rho \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z$$

从而验证正交性: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \cos \phi + \rho \sin \phi \cos \phi = 0$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0$$

此外, $h_\rho^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$

$$h_\phi^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|^2 = (-\rho \sin \phi)^2 + (\rho \cos \phi)^2 = \rho^2$$



故度规系数 $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$, $h_z = |\partial \mathbf{r}/\partial z| = 1$, 单位矢量为

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$h_\phi = \rho$ 表明, 沿 ϕ 坐标线的微分弧长不是 $d\phi$, 而是 $h_\phi d\phi = \rho d\phi$

球坐标系

例 2 在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中, $\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r(\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y)$$

正 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r[\sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \sin \theta \cos \theta] = 0$

交 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin^2 \theta [-\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi] = 0$

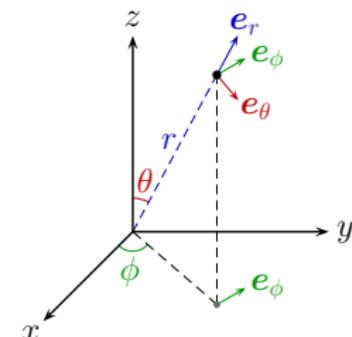
性 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin \theta \cos \theta (-\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi) = 0$

$$h_r^2 = |\partial \mathbf{r} / \partial r|^2 = \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta = 1$$

$$h_\theta^2 = |\partial \mathbf{r} / \partial \theta|^2 = r^2 [\cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + (-\sin \theta)^2] = r^2$$

$$h_\phi^2 = |\partial \mathbf{r} / \partial \phi|^2 = r^2 \sin^2 \theta [(-\sin \phi)^2 + \cos^2 \phi] = r^2 \sin^2 \theta$$

度规系数 $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$



单位矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x \\ &\quad + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y \\ &\quad + \cos \theta \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x \\ &\quad + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y \\ &\quad - \sin \theta \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

§1.2 正交曲线坐标系中的微分算符

微分算符主要有梯度、散度、旋度和 Laplace 算符 (梯度和散度的结合)

首先考虑标量函数 $u(r)$ 的梯度 $\nabla u(r)$ ，它作为矢量可以展开为 $\nabla u = \sum_{i=1}^3 f_i e_i$

注意， f_i 是 r 的函数；而 e_i 的方向随着 r 变化，这一点与直角坐标系不同

由正交归一关系推出 $e_i \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^3 f_j e_i \cdot e_j = \sum_{j=1}^3 f_j \delta_{ij} = f_i$

§1.2 正交曲线坐标系中的微分算符

微分算符主要有梯度、散度、旋度和 Laplace 算符 (梯度和散度的结合)

首先考虑标量函数 $u(r)$ 的梯度 $\nabla u(r)$ ，它作为矢量可以展开为 $\nabla u = \sum_{i=1}^3 f_i e_i$

注意， f_i 是 r 的函数；而 e_i 的方向随着 r 变化，这一点与直角坐标系不同

由正交归一关系推出 $e_i \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^3 f_j e_i \cdot e_j = \sum_{j=1}^3 f_j \delta_{ij} = f_i$

另一方面， $u(r)$ 沿 q_i 坐标线的方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial s_i} = e_i \cdot \nabla u$ ，从而得到

$$f_i = e_i \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial s_i} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s_i} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h_i \Delta q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$$

于是，梯度表达为 $\nabla u = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} e_i = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3$

梯度的形式



正交曲线坐标系中的梯度 $\nabla u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3$

相比于直角坐标系中的梯度 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} e_x + \frac{\partial u}{\partial y} e_y + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$ ，出现了度规系数



在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$$



在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中， $h_r = 1$ ， $h_\theta = r$ ， $h_\phi = r \sin \theta$ ，故

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi$$

散度

其次考虑矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在 \mathbf{r} 点处的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

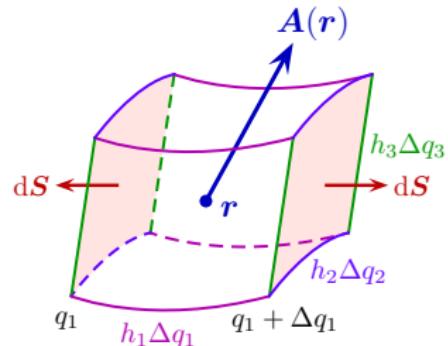
△ ΔV 是包含 \mathbf{r} 点的区域

△ $\partial(\Delta V)$ 是 ΔV 的边界面， $d\mathbf{S}$ 是其定向面积元

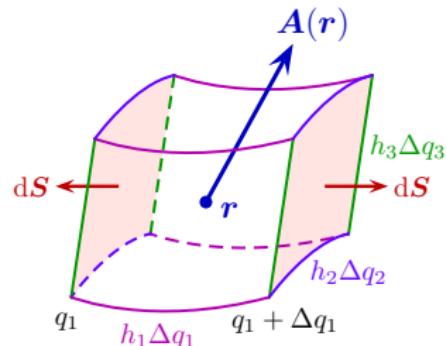
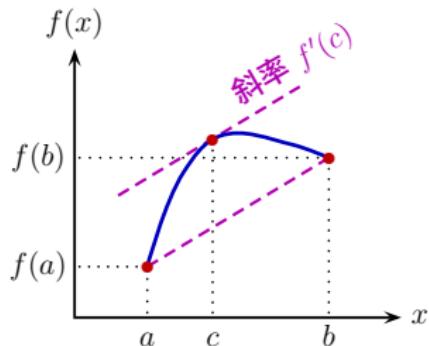
△ 取 ΔV 为由坐标面 q_1 、 $q_1 + \Delta q_1$ 、 q_2 、 $q_2 + \Delta q_2$ 、 q_3 、 $q_3 + \Delta q_3$ 所围成的六面体

△ 计算矢量场 $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ 在边界面 $\partial(\Delta V)$ 上的通量，得

$$\oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = [(A_1 h_2 h_3)_{q_1 + \Delta q_1} - (A_1 h_2 h_3)_{q_1}] \Delta q_2 \Delta q_3 + \dots$$



散度



取 ΔV 为由坐标面 q_1 、 $q_1 + \Delta q_1$ 、 q_2 、 $q_2 + \Delta q_2$ 、 q_3 、 $q_3 + \Delta q_3$ 所围成的六面体

计算矢量场 $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ 在边界面 $\partial(\Delta V)$ 上的通量，得

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(\Delta V)} A \cdot dS &= [(A_1 h_2 h_3)_{q_1 + \Delta q_1} - (A_1 h_2 h_3)_{q_1}] \Delta q_2 \Delta q_3 + \dots \\ &= \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \Big|_{r_1} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 + \dots \end{aligned}$$

在第二步中， r_1 是 ΔV 内一点，这里用到微分中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且在 (a, b) 上可导，则存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

散度的形式

以上表达式只显明写出 q_1 处和 $q_1 + \Delta q_1$ 处两个面的贡献

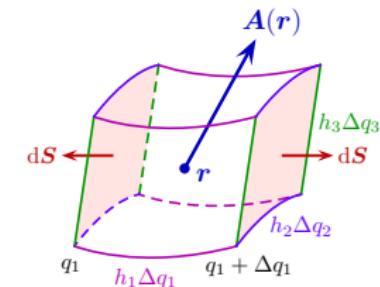
补上其它四个面的贡献，通量表达为

$$\oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \Big|_{\mathbf{r}_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} \Big|_{\mathbf{r}_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \Big|_{\mathbf{r}_3} \right] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

当 $\Delta V = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \rightarrow 0$ 时，六面体 ΔV 中的点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}$

于是， \mathbf{r} 点处的散度为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \Big|_{\mathbf{r}_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} \Big|_{\mathbf{r}_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \Big|_{\mathbf{r}_3} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \end{aligned}$$



Laplace 算符的形式

⛵ Laplace 算符对 $u(\mathbf{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令 $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则 $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

🚢 代入到 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

Laplace 算符的形式

Laplace 算符对 $u(\mathbf{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令 $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则 $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

Laplace 算符的形式

Laplace 算符对 $u(\mathbf{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令 $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则 $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Laplace 算符的形式

Laplace 算符对 $u(\mathbf{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令 $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则 $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中， $h_r = 1$ ， $h_\theta = r$ ， $h_\phi = r \sin \theta$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right]$$

Laplace 算符的形式

Laplace 算符对 $u(\mathbf{r})$ 的作用为 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令 $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则 $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中， $h_r = 1$ ， $h_\theta = r$ ， $h_\phi = r \sin \theta$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

§2 球坐标系中的分离变量

§2.1 Helmholtz 方程

 在三维空间中，前面介绍过的数理方程包括波动方程、输运方程和稳定场方程

 首先看齐次的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

 分离变量，令 $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ ，代入得 $v(\mathbf{r})T''(t) - a^2 T(t) \nabla^2 v(\mathbf{r}) = 0$

 即 $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\nabla^2 v}{v(\mathbf{r})} \equiv -k^2$ ，其中 k^2 是常数，将它记作 k^2 是物理上的习惯

 从而得到 Helmholtz 方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$

和 $T(t)$ 满足的方程

$$T'' + k^2 a^2 T = 0$$

§2 球坐标系中的分离变量

§2.1 Helmholtz 方程

在三维空间中，前面介绍过的数理方程包括波动方程、输运方程和稳定场方程

首先看齐次的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

分离变量，令 $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ ，代入得 $v(\mathbf{r})T''(t) - a^2 T(t) \nabla^2 v(\mathbf{r}) = 0$

即 $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\nabla^2 v}{v(\mathbf{r})} \equiv -k^2$ ，其中 k^2 是常数，将它记作 k^2 是物理上的习惯

从而得到 Helmholtz 方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$

和 $T(t)$ 满足的方程

$$T'' + k^2 a^2 T = 0$$

给 Helmholtz 方程加上适当的边界条件可以构成本征值问题，从而求解出本征值 k^2 和本征函数，合理的边界条件通常导致 $k^2 \geq 0$

从物理上说，如果 $k^2 < 0$ ，则 k 为虚数， $T'' - |k|^2 a^2 T = 0$ ，解为 $T(t) = e^{\pm|k|at}$

这显然不是波动，不符合问题的物理背景，由此可推测 $k^2 \geq 0$

齐次的输运方程和稳定场方程

■ 其次看齐次的输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

■ 分离变量, 令 $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$, 代入得到 Helmholtz 方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ 和

$$T' + k^2 a^2 T = 0$$

对于 Helmholtz 方程, 适当的边界条件同样导致 $k^2 \geq 0$

从物理上说, 如果 $k^2 < 0$, 则 $T' - |k|^2 a^2 T = 0$

解为 $T(t) = e^{|k|^2 a^2 t}$, 它随时间不断增大

这显然不是合理的输运行为, 由此可推测 $k^2 \geq 0$

齐次的输运方程和稳定场方程

其次看齐次的输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

分离变量，令 $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ ，代入得到 Helmholtz 方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ 和

$$T' + k^2 a^2 T = 0$$

对于 Helmholtz 方程，适当的边界条件同样导致 $k^2 \geq 0$

从物理上说，如果 $k^2 < 0$ ，则 $T' - |k|^2 a^2 T = 0$

解为 $T(t) = e^{|k|^2 a^2 t}$ ，它随时间不断增大

这显然不是合理的输运行为，由此可推测 $k^2 \geq 0$

再次看齐次的稳定场方程，即 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$

这可以当作 $k = 0$ 时 Helmholtz 方程的特殊情况

综上所述，三类方程的齐次形式都可以归结为 Helmholtz 方程

下面以 Helmholtz 方程为代表研究球坐标系和柱坐标系中的分离变量



Hermann von Helmholtz
(1821–1894)

§2.2 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量

在球坐标系中，将未知函数写作 u ，Helmholtz 方程 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ 的形式是

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

令 $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$ ，代入上式，有

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + k^2 R Y = 0$$

$\frac{1}{R} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R \right] = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right]$

上式左边与 θ 、 ϕ 无关，右边与 r 无关

两边相等，则与 r 、 θ 、 ϕ 均无关，即为常数

§2.2 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量

在球坐标系中，将未知函数写作 u ，Helmholtz 方程 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ 的形式是

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

令 $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$ ，代入上式，有

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + k^2 R Y = 0$$

$\frac{1}{R} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R \right] = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] \equiv \lambda$

上式左边与 θ 、 ϕ 无关，右边与 r 无关

两边相等，则与 r 、 θ 、 ϕ 均无关，即为常数，记作 λ

于是得到角向方程 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$

和径向方程 $r^2 R'' + 2r R' + (k^2 r^2 - \lambda) R = 0$

求解顺序

求解的顺序如下，先由角向边界条件与角向方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

 构成本征值问题，求解 $Y(\theta, \phi)$ 并确定本征值 λ

 然后，将 λ 代入径向方程

$$r^2 R'' + 2r R' + (k^2 r^2 - \lambda) R = 0$$

 此时需要分别讨论 Helmholtz 方程 ($k \neq 0$) 和 Laplace 方程 ($k = 0$) 的情况

- 如果 $k \neq 0$ ，则由径向边界条件和径向方程构成本征值问题，求解 $R(r)$ 并确定本征值 k ；此时径向方程是球 Bessel 方程，需要用级数法求解
- 如果 $k = 0$ ，则不需要由本征值问题确定 k 的值，且径向方程简化为 Euler 方程，很容易求解 $R(r)$

角向方程

角向方程 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$ 是偏微分方程

进一步分离变量，令 $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$ ，代入得

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{H}{\sin^2 \theta} \Phi'' + \lambda H \Phi = 0$$

两边同乘以 $\sin^2 \theta$ ，同除以 $H\Phi$ ，移项，推出

$$\frac{1}{H} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta H \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

上式左边与 ϕ 无关，右边与 θ 无关

两边相等，则与 θ 、 ϕ 均无关，即为常数

角向方程

角向方程 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$ 是偏微分方程

进一步分离变量，令 $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$ ，代入得

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{H}{\sin^2 \theta} \Phi'' + \lambda H \Phi = 0$$

两边同乘以 $\sin^2 \theta$ ，同除以 $H\Phi$ ，移项，推出

$$\frac{1}{H} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta H \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu$$

上式左边与 ϕ 无关，右边与 θ 无关

两边相等，则与 θ 、 ϕ 均无关，即为常数，记作 μ ，于是得到两个方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) H = 0$$

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0$$

关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

现在考虑角向方程的边界条件和相应的本征值问题

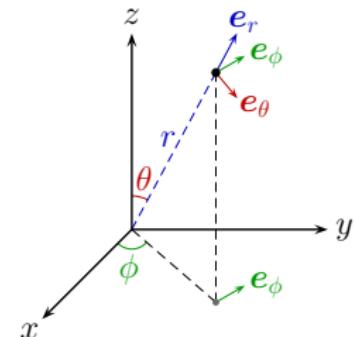
由于 $(r, \theta, \phi + 2\pi)$ 与 (r, θ, ϕ) 表示同一几何点，而物理量在一个几何点的取值应该是确定的，不应该依赖于该点的数学描述，所以应有 $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$

对于分离变量形式的解，得

$$R(r)H(\theta)\Phi(\phi + 2\pi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

但 $R(r)H(\theta)$ 不恒为零，得到自然的周期性边界条件

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$



关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

现在考虑角向方程的边界条件和相应的本征值问题

由于 $(r, \theta, \phi + 2\pi)$ 与 (r, θ, ϕ) 表示同一几何点，而物理量在一个几何点的取值应该是确定的，不应该依赖于该点的数学描述，所以应有 $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$

对于分离变量形式的解，得

$$R(r)H(\theta)\Phi(\phi + 2\pi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

但 $R(r)H(\theta)$ 不恒为零，得到自然的周期性边界条件

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

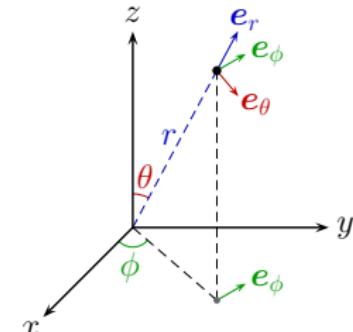
它与方程 $\Phi'' + \mu\Phi = 0$ 构成本征值问题

在第七章 §5.1 中已经求解了这一本征值问题，得到的本征值和本征函数为

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

在球坐标系，习惯上将本征函数写成以上指数形式

在柱坐标系或平面极坐标系，习惯写成等价的三角形式 $\Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$

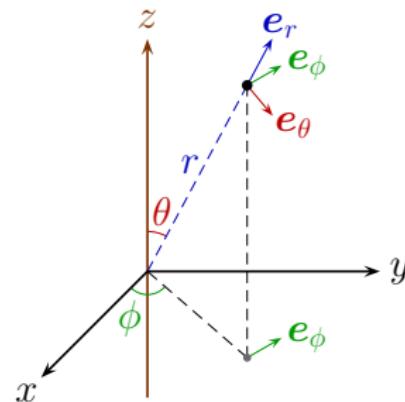


θ 方向的自然边界条件

接下来考虑 θ 方向的边界条件

现在 $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi) = H(\theta) e^{\pm im\phi}$

注意到整个 z 轴 ($\theta = 0, \pi$) 都是球坐标系的奇点



θ 方向的自然边界条件

接下来考虑 θ 方向的边界条件

现在 $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi) = H(\theta) e^{\pm im\phi}$

注意到整个 z 轴 ($\theta = 0, \pi$) 都是球坐标系的奇点

如果 $m \neq 0$ ，应该要求 $H(0) = H(\pi) = 0$

否则当 $\theta = 0, \pi$ 时， ϕ 没有定义导致 $Y(\theta, \phi)$ 也没有定义

如果 $m = 0$ ，则 $Y(\theta, \phi) = H(\theta)$ ，没有类似的问题

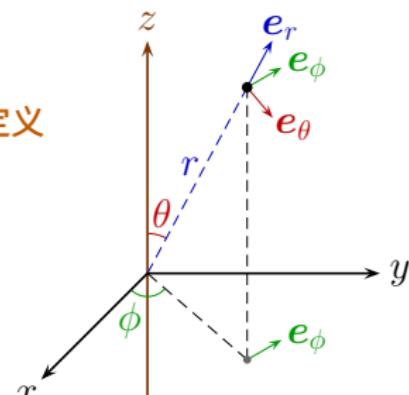
但 $H(0)$ 和 $H(\pi)$ 应该有限，即 $|H(0)|, |H(\pi)| < \infty$

原则上，物理量处处都应该有限

不过，微分方程的解在坐标系奇点很容易出现奇性

所以对物理量在这些地方的有限性需要特别强调

上述两个边界条件也属于自然边界条件



连带 Legendre 方程

 将本征值 $\mu = m^2$ 代回关于 $H(\theta)$ 的微分方程, 得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = 0$$

 令 $x = \cos \theta$, $H(\theta) = P(x)$, 由 $\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ 推出

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = -\frac{d}{dx} \left(-\sin^2 \theta \frac{dP}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P$$

连带 Legendre 方程

 将本征值 $\mu = m^2$ 代回关于 $H(\theta)$ 的微分方程, 得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = 0$$

 令 $x = \cos \theta$, $H(\theta) = P(x)$, 由 $\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ 推出

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = -\frac{d}{dx} \left(-\sin^2 \theta \frac{dP}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P$$

 利用 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$, 得到本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \\ P(\pm 1) = 0 \ (m \neq 0) \text{ 或 } |P(\pm 1)| < \infty \ (m = 0) \end{cases}$$

 这里关于 $P(x)$ 的微分方程称为连带 Legendre 方程

 自然边界条件来自 $H(0) = H(\pi) = 0 \ (m \neq 0)$ 或 $|H(0)|, |H(\pi)| < \infty \ (m = 0)$

Legendre 方程

对于轴对称问题，取对称轴为球坐标系的极轴

则解 $u(r, \theta, \phi)$ 与 ϕ 无关，具有绕 z 轴的旋转对称性

此时只需考虑 $m = 0$ (即 $e^{\pm im\phi} = 1$)，本征值问题简化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

即使问题没有轴对称性，这也是上述本征值问题在 $m = 0$ 时的特殊情况

总之，这是最重要的一种情况

Legendre 方程

对于轴对称问题，取对称轴为球坐标系的极轴

则解 $u(r, \theta, \phi)$ 与 ϕ 无关，具有绕 z 轴的旋转对称性

此时只需考虑 $m = 0$ (即 $e^{\pm im\phi} = 1$)，本征值问题简化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$



Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)

即使问题没有轴对称性，这也是上述本征值问题在 $m = 0$ 时的特殊情况

总之，这是最重要的一种情况

这里 $P(x)$ 的微分方程称为 Legendre 方程，在第十章 §2 中将用级数法求解它

至于连带 Legendre 方程，则可以通过适当的变换将它与 Legendre 方程联系起来，求解过程将在第十一章 §2.1 中介绍

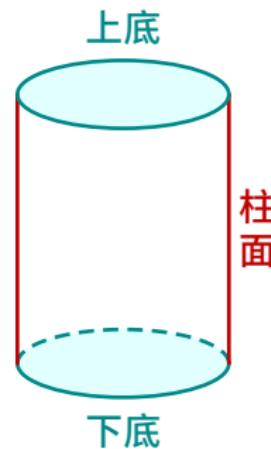
§3 柱坐标系中的分离变量

在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中对 Helmholtz 方程分离变量，求解区域涉及许多不同情况

旗 ρ 的取值范围可以是有界或半无界， z 的取值范围可以是有界、无界或半无界

尺 对于确定的区域，边界条件的情况还可以不同

鞭 比如，对于有限的圆柱区域，齐次边界条件可以出现在柱面，也可以出现在上下底



§3 柱坐标系中的分离变量

在柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中对 **Helmholtz 方程** 分离变量，求解区域涉及许多不同情况

旗 ρ 的取值范围可以是**有界或半无界**， z 的取值范围可以是**有界、无界或半无界**

叉 对于确定的区域，**边界条件**的情况还可以不同

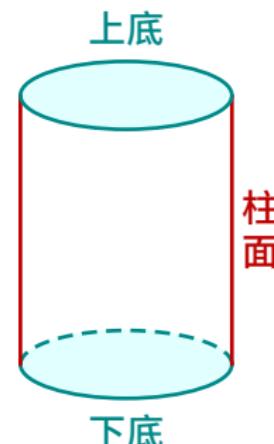
旗帜 比如，对于**有限的圆柱区域**，**齐次边界条件**可以出现在**柱面**，也可以出现在**上下底**

水滴 在**球坐标系** (r, θ, ϕ) 中，角向坐标的取值范围通常都固定为 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

耳机 而**边界条件**就是前面讨论的**自然边界条件**

滑板 所以**柱坐标系**的情况比**球坐标系**要**复杂**

运动员 在**柱坐标系**中求解数理方程的定解问题，最好是对每个具体问题都**从分离变量开始做**，这样不容易出错

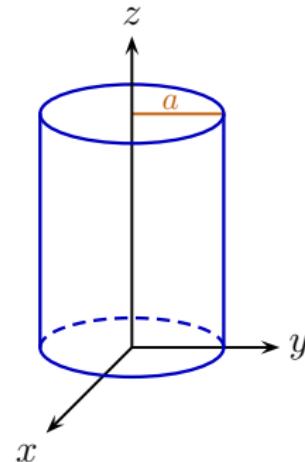


圆柱内 Laplace 方程定解问题

本节以圆柱内的 Laplace 方程定解问题为例进行分离变量

假定在 $\rho = a$ 处有齐次边界条件, z 的取值范围可以是有界的, 即 $0 \leq z \leq h$, 也可以是半无界的, 即 $0 \leq z < +\infty$, 暂时不作明确限制, 具体写出来是

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a) \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u \right) \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha, \beta \text{ 不全为 } 0) \end{cases}$$



圆柱内 Laplace 方程定解问题

本节以圆柱内的 Laplace 方程定解问题为例进行分离变量

假定在 $\rho = a$ 处有齐次边界条件, z 的取值范围可以是有界的, 即 $0 \leq z \leq h$, 也可以是半无界的, 即 $0 \leq z < +\infty$, 暂时不作明确限制, 具体写出来是

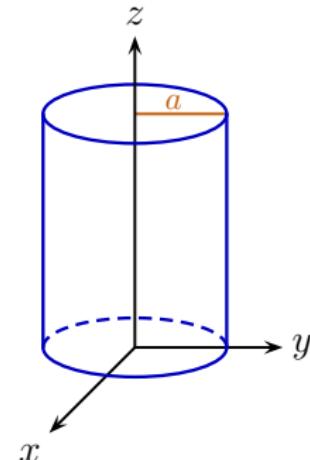
$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a) \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u \right) \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha, \beta \text{ 不全为 } 0) \end{cases}$$

由于 z 的取值范围并未具体指明, 所以定解条件不完整

不过, 这对分离变量没有影响

令 $u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$, 代入 Laplace 方程, 得

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \Phi'' + R\Phi Z'' = 0$$



分离变量

 两边同乘以 ρ^2 ，再除以 $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ ，移项，得

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \rho^2 \frac{Z''}{Z} = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

 上式左边与 ϕ 无关，右边与 ρ 、 z 无关

 两边相等，则与 ρ 、 ϕ 、 z 均无关，即为常数

分离变量

⛰ 两边同乘以 ρ^2 , 再除以 $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$, 移项, 得

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \rho^2 \frac{Z''}{Z} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu$$

🏗 上式左边与 ϕ 无关, 右边与 ρ 、 z 无关

🔧 两边相等, 则与 ρ 、 ϕ 、 z 均无关, 即为常数, 记作 μ

⛷ 于是得到方程 $\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z}$

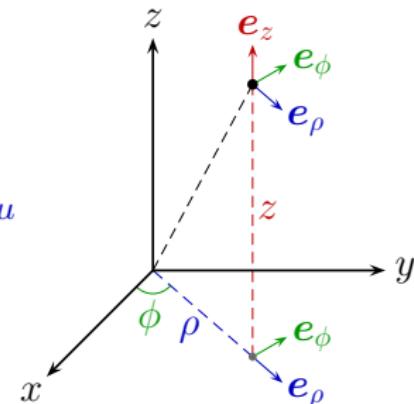
▶ 和角向方程 $\Phi'' + \mu\Phi = 0$

⛰ 先考虑角向方程的边界条件和本征值问题

🚴 由于 $(\rho, \phi + 2\pi, z)$ 与 (ρ, ϕ, z) 表示同一几何点, 与上节讨论类似, 有

$$u(\rho, \phi + 2\pi, z) = u(\rho, \phi, z), \quad R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi)Z(z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

⭐ 但 $R(\rho)Z(z)$ 不恒为零, 故得自然的周期性边界条件 $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$



常微分方程

这里将本征值问题 $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$ 的本征值和本征函数写作

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

将 $\mu = m^2$ 代入另一个方程，得

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z}$$

上式左边与 z 无关，右边与 ρ 无关

两边相等，则与 ρ 、 z 均无关，即为常数

常微分方程

这里将本征值问题 $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$ 的本征值和本征函数写作

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

将 $\mu = m^2$ 代入另一个方程，得

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda$$

上式左边与 z 无关，右边与 ρ 无关

两边相等，则与 ρ 、 z 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$ ，于是得到两个方程

$$Z'' - \lambda Z = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

ρ 方向的边界条件

分离变量后, $\rho = a$ 处的边界条件变成

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u \right) \Big|_{\rho=a} = [\alpha R'(a) + \beta R(a)] \Phi(\phi) Z(z) = 0$$

即

$$\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$$

现在, 解的形式为 $u(\rho, \phi, z) = R(\rho) \{ \cos m\phi, \sin m\phi \} Z(z)$

对于柱坐标系, $\rho = 0$ 处 ϕ 没有定义, 应该有自然边界条件

$$R(0) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |R(0)| < \infty \ (m = 0)$$

这两个边界条件与方程 $\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$ 构成本征值问题

它属于第十章 §5 讨论的 Sturm-Liouville 本征值问题, 那里将证明本征值 $\lambda \geq 0$

Bessel 方程

♥ 如果 $\lambda > 0$, 令 $x = \sqrt{\lambda} \rho$, $R(\rho) = y(x)$

利用 $\rho = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ 和 $\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx}$, 将 $R(\rho)$ 的微分方程化为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda - \lambda \frac{m^2}{x^2} \right) y \\ &= \lambda \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y \right] \end{aligned}$$

Bessel 方程

♥ 如果 $\lambda > 0$, 令 $x = \sqrt{\lambda} \rho$, $R(\rho) = y(x)$

➥ 利用 $\rho = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ 和 $\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx}$, 将 $R(\rho)$ 的微分方程化为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda - \lambda \frac{m^2}{x^2} \right) y \\ &= \lambda \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y \right] \end{aligned}$$

➥ 即得

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

➥ 或写作

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

➥ 这是 m 阶 Bessel 方程的标准形式

➥ 第十章 §4 将用级数法求解 Bessel 方程



Friedrich Bessel

(1784–1846)

$\lambda > 0$ 时 $Z(z)$ 的解

本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \\ \alpha R'(a) + \beta R(a) = 0 \\ R(0) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |R(0)| < \infty \ (m = 0) \end{cases}$$

的具体求解将在**第十二章 §2** 讨论

确定**本征值 λ** 之后，将它代入方程 $Z'' - \lambda Z = 0$ ，求得解为

$$Z(z) = \left\{ e^{-\sqrt{\lambda}z}, e^{\sqrt{\lambda}z} \right\}$$

对于 z 有界 ($0 \leq z \leq h$) 的情况，解取 $e^{-\sqrt{\lambda}z}$ 和 $e^{\sqrt{\lambda}z}$ 的**线性组合**

对于 z 半无界 ($0 \leq z < +\infty$) 的情况，解只能取 $e^{-\sqrt{\lambda}z}$

$\lambda = 0$ 的情况

如果 $\lambda = 0$, $R(\rho)$ 的微分方程化为

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R = R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{m^2}{\rho^2} R = \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R)$$

即得 Euler 方程

$$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$$

已经在第七章 §5.1 求解过这个方程, 得到的解是

$$R(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (\text{当 } m \neq 0 \text{ 时}) \quad \text{或} \quad R(\rho) = \{1, \ln \rho\} \quad (\text{当 } m = 0 \text{ 时})$$

1 当 $m \neq 0$ 时, 只有 $R(\rho) = \rho^m$ 满足自然边界条件 $R(0) = 0$

 $\rho = a$ 处边界条件 $0 = \alpha R'(a) + \beta R(a) = m\alpha a^{m-1} + \beta a^m = a^{m-1}(m\alpha + \beta a)$ 意味着 $m\alpha + \beta a = 0$

 由于 $m > 0$ 、 $a > 0$, 而 α 和 β 均非负且不同时为零, 这个边界条件不能满足

 此时 $\lambda = 0$ 不是本征值

$\lambda = 0$ 为本征值的情况

2 当 $m = 0$ 时, 只有 $R(\rho) = 1$ 满足自然边界条件 $|R(0)| < \infty$

 $\rho = a$ 处边界条件 $\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$ 化为 $\beta = 0$

 如果 $\rho = a$ 处的边界条件是第二类齐次边界条件 $R'(a) = 0$, 就可以满足

$\lambda = 0$ 为本征值的情况

2 当 $m = 0$ 时, 只有 $R(\rho) = 1$ 满足自然边界条件 $|R(0)| < \infty$

$\rho = a$ 处边界条件 $\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$ 化为 $\beta = 0$

如果 $\rho = a$ 处的边界条件是第二类齐次边界条件 $R'(a) = 0$, 就可以满足

综上, 仅当 $\rho = a$ 处为第二类齐次边界条件且 $m = 0$ 时, $\lambda = 0$ 才是一个本征值

对应于 $\lambda = 0$, $Z(z)$ 的微分方程 $Z'' - \lambda Z = 0$ 化为 $Z'' = 0$, 解为

$$Z(z) = \{1, z\}$$

对于 z 有界 ($0 \leq z \leq h$) 的情况, 解取 1 和 z 的线性组合

对于 z 半无界 ($0 \leq z < +\infty$) 的情况, 解只能取 1

一般解

-  各变量的常微分方程都解出以后，可以写出 $u(\rho, \phi, z)$ 的**一般解**
-  一般解中的**任意常数**由 z 方向的**边界条件**决定
-  对于 z 有界 ($0 \leq z \leq h$) 的情况，**下底** $z = 0$ 和**上底** $z = h$ 处各有一个已知的边界条件，它们共同确定一般解中的任意常数
-  对于 z 半无界 ($0 \leq z \leq +\infty$) 的情况，**下底** $z = 0$ 处有一个已知的边界条件，它确定了一般解中的任意常数

一般解

- 💡 各变量的常微分方程都解出以后，可以写出 $u(\rho, \phi, z)$ 的**一般解**
- 💡 一般解中的**任意常数**由 z 方向的**边界条件**决定
 - ✍ 对于 z **有界** ($0 \leq z \leq h$) 的情况，**下底** $z = 0$ 和**上底** $z = h$ 处各有一个已知的边界条件，它们共同确定一般解中的任意常数
 - ✍ 对于 z **半无界** ($0 \leq z \leq +\infty$) 的情况，**下底** $z = 0$ 处有一个已知的边界条件，它确定了一般解中的任意常数
- 🏆 以上讨论表明，需要解决的**关键问题**是求解**分离变量**过程中出现的**常微分方程**及其**本征值问题**
- 🏅 ③ 有些常微分方程是**熟悉的**，其解为**初等函数**
- 🏅 ② 另一些则**没有现成的解**，需要加以研究
- 🏅 ① **级数法**是一种常用的解法，将在**下一章**仔细讨论