

量子场论

第9章 分立对称性和 Majorana 旋量场

9.3 节至 9.5 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 2 月 9 日



9.3 节 矢量场的分立变换

9.3.1 节 有质量矢量场的 C、P、T 变换

接下来讨论自由有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换

拉氏量为 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu$

用极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ ($\lambda = \pm, 0$) 表达的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

9.3 节 矢量场的分立变换

9.3.1 节 有质量矢量场的 C、P、T 变换

接下来讨论自由有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换

拉氏量为 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu$

用极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ ($\lambda = \pm, 0$) 表达的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

宇称变换联系着 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda)$ ，根据极化矢量的具体形式，有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -) = -\mathcal{P}^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, -)$$

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -) = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +) = -\mathcal{P}^\mu_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, +)$$

宇称变换与极化矢量

此外还有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0 p^1 \\ -p^0 p^2 \\ -p^0 p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, 0)$$

因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$(-)^\lambda \varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda)$$

宇称变换与极化矢量



此外还有

$$\varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0 p^1 \\ -p^0 p^2 \\ -p^0 p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, 0)$$

因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$(-)^\lambda \varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda)$$

苹果 时间反演变换联系着 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, \lambda)$ ，有

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ p^1 p^3 - i p^2 |\mathbf{p}| \\ p^2 p^3 + i p^1 |\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, +)$$

时间反演变换与极化矢量

apple 还有

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, -)$$

$$\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ -p^0 p^1 \\ -p^0 p^2 \\ -p^0 p^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix} = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, 0)$$

斧以此推出时间反演变换与极化矢量的关系

$$(-)^{1+\lambda} \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, \lambda) = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda)$$

产生湮灭算符的分立变换

类似于标量场和旋量场的 C 、 P 、 T 变换规律, $C^{-1}A^\mu(x)C$ 、 $P^{-1}A^\mu(x)P$ 和 $T^{-1}A^\mu(x)T$ 应当分别正比于 $A^{\mu\dagger}(x)$ 、 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$ 和 $\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$

为此, 将产生湮灭算符的 C 、 P 、 T 变换表达成

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger C = \xi_C b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,$$

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} C = \xi_C^* b_{\mathbf{p},\lambda}$$

$$C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger C = \xi_C^* a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,$$

$$C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} C = \xi_C a_{\mathbf{p},\lambda}$$

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \xi_P(-)^\lambda a_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger,$$

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} P = \xi_P^*(-)^\lambda a_{-\mathbf{p},-\lambda}$$

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger P = \xi_P^*(-)^\lambda b_{-\mathbf{p},-\lambda}^\dagger,$$

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} P = \xi_P(-)^\lambda b_{-\mathbf{p},-\lambda}$$

$$T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \xi_T(-)^{1+\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger,$$

$$T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda} T = \xi_T^*(-)^{1+\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda}$$

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T = \xi_T^*(-)^{1+\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger,$$

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda} T = \xi_T(-)^{1+\lambda} b_{-\mathbf{p},\lambda}$$

其中 ξ_C 、 ξ_P 和 ξ_T 是相位因子

平面波展开式的分立变换



从而推出平面波展开式的分立变换

$$\begin{aligned}
 & C^{-1} A^\mu(x) C \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) C^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} C e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) C^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger C e^{ip \cdot x}] \\
 &= \xi_C^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}] \\
 & P^{-1} A^\mu(x) P \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} a_{\mathbf{p}, \lambda} P e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) P^{-1} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger P e^{ip \cdot x}] \\
 &= \xi_P^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [(-)^\lambda \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, -\lambda} e^{-ip \cdot x} + (-)^\lambda \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, -\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}] \\
 &= \xi_P^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [(-)^\lambda \varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + (-)^\lambda \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)}] \\
 &= \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)}]
 \end{aligned}$$

$A^\mu(x)$ 的分立变换

以及

$$\begin{aligned}
 & T^{-1} A^\mu(x) T \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} T^{-1} [\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}] T \\
 &= \xi_T^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [(-)^{1+\lambda} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a_{-\mathbf{p}, \lambda} e^{ip \cdot x} + (-)^{1+\lambda} \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-ip \cdot x}] \\
 &= \xi_T^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [(-)^{1+\lambda} \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + (-)^{1+\lambda} \varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)}] \\
 &= \xi_T^* \mathcal{T}^\mu_{\nu} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)}]
 \end{aligned}$$

因此，**有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的分立变换**为

$$C^{-1} A^\mu(x) C = \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), \quad C^{-1} A^{\mu\dagger}(x) C = \xi_C A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A^\mu(x) P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu_{\nu} A^\nu(\mathcal{P}x), \quad P^{-1} A^{\mu\dagger}(x) P = \xi_P \mathcal{P}^\mu_{\nu} A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} A^\mu(x) T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu_{\nu} A^\nu(\mathcal{T}x), \quad T^{-1} A^{\mu\dagger}(x) T = \xi_T \mathcal{T}^\mu_{\nu} A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)$$

场强张量的分立变换

根据形式上的表达式 $P^{-1}\partial^\mu P = \partial'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial^\nu$ 和 $T^{-1}\partial^\mu T = \partial'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu$

场强张量 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x) - \partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)] = \xi_C^*F^{\mu\nu\dagger}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)] = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

场强张量的分立变换

根据形式上的表达式 $P^{-1}\partial^\mu P = \partial'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \partial^\nu$ 和 $T^{-1}\partial^\mu T = \partial'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu$

场强张量 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = \xi_C^*[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x) - \partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)] = \xi_C^*F^{\mu\nu\dagger}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)] = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma [\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

动能项算符 $F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)C = |\xi_C|^2 F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu\dagger}(x) = +F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)$$

$$\begin{aligned} P^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)P &= |\xi_P|^2 F_{\alpha\beta}^\dagger(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\nu \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) \\ &= +F_{\mu\nu}^\dagger(\mathcal{P}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}F_{\mu\nu}^\dagger(x)F^{\mu\nu}(x)T &= |\xi_T|^2 F_{\alpha\beta}^\dagger(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\nu \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) \\ &= +F_{\mu\nu}^\dagger(\mathcal{T}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x) \end{aligned}$$

对偶场强张量的分立变换

由 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \mathcal{P}^\rho{}_\tau \mathcal{P}^\sigma{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \delta^\alpha{}_\tau \delta^\beta{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}\end{aligned}$$

同理有 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$

对偶场强张量的分立变换



由 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \mathcal{P}^\rho{}_\tau \mathcal{P}^\sigma{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma \mathcal{P}^\nu{}_\delta \delta^\alpha{}_\tau \delta^\beta{}_\phi \varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi} = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}\end{aligned}$$

同理有 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$

从而, 对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} / 2$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) C = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C^{-1} F_{\rho\sigma}(x) C = \xi_C^* \tilde{F}^{\mu\nu\dagger}(x)$$

$$\begin{aligned}P^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) P &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P^{-1} F_{\rho\sigma}(x) P = \frac{1}{2} \xi_P^* \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\frac{1}{2} \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) = -\xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) T &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T^{-1} F_{\rho\sigma}(x) T = \frac{1}{2} \xi_T^* \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x) (\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho (\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma \\ &= -\frac{1}{2} \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x) = -\xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)\end{aligned}$$

可见, $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换性质与 $F^{\mu\nu}$ 不同, 相差一个负号

有质量实矢量场的分立变换



质量项算符 $A_\mu^\dagger A^\mu$ 的 C 、 P 、 T 变换是

$$C^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) C = |\xi_C|^2 A_\mu(x) A^{\mu\dagger}(x) = +A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) P = |\xi_P|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{P}x) A^\mu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) T = |\xi_T|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{T}x) (\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{T}x) A^\mu(\mathcal{T}x)$$

因此，由动能项和质量项组成的自由有质量复矢量场拉氏量在 C 、 P 、 T 变换下都是不变的

有质量实矢量场的分立变换



质量项算符 $A_\mu^\dagger A^\mu$ 的 C 、 P 、 T 变换是

$$C^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) C = |\xi_C|^2 A_\mu(x) A^{\mu\dagger}(x) = +A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) P = |\xi_P|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{P}x) (\mathcal{P}^{-1})^\rho_\mu \mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{P}x) A^\mu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} A_\mu^\dagger(x) A^\mu(x) T = |\xi_T|^2 A_\rho^\dagger(\mathcal{T}x) (\mathcal{T}^{-1})^\rho_\mu \mathcal{T}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{T}x) = +A_\mu^\dagger(\mathcal{T}x) A^\mu(\mathcal{T}x)$$

因此，由动能项和质量项组成的自由有质量复矢量场拉氏量在 C 、 P 、 T 变换下都是不变的

对于自由有质量实矢量场， $A^{\mu\dagger}(x) = A^\mu(x)$ ，故 $\xi_C = \xi_C^*$ 、 $\xi_P = \xi_P^*$ 、 $\xi_T = \xi_T^*$ ，

$$\xi_C = \pm 1, \quad \xi_P = \pm 1, \quad \xi_T = \pm 1$$

当 $\xi_P = +1$ 时， $A^\mu(x)$ 是极矢量场，满足 $P^{-1} A^\mu(x) P = \mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$

当 $\xi_P = -1$ 时， $A^\mu(x)$ 是轴矢量场，满足 $P^{-1} A^\mu(x) P = -\mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$

无论 ξ_C 、 ξ_P 和 ξ_T 取 ± 1 中的哪些值，自由有质量实矢量场的拉氏量在 C 、 P 、 T 变换下也都是不变的

9.3.2 节 电磁场的 C 、 P 、 T 变换

蘑菇  相比于有质量矢量场, 无质量矢量场的物理极化矢量只有 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -)$ 两个, 但 C 、 P 、 T 变换性质是类似的

手写  自由无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C 、 P 、 T 变换为 (习题 9.5)

$$C^{-1}A^\mu(x)C = \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), \quad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C = \xi_C A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P = \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T = \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)$$

等号  对于自由无质量实矢量场, ξ_C 、 ξ_P 和 ξ_T 的取值只能是 ± 1

9.3.2 节 电磁场的 C 、 P 、 T 变换

蘑菇  相比于有质量矢量场, 无质量矢量场的物理极化矢量只有 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -)$ 两个, 但 C 、 P 、 T 变换性质是类似的

手写  自由无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C 、 P 、 T 变换为 (习题 9.5)

$$C^{-1}A^\mu(x)C = \xi_C^* A^{\mu\dagger}(x), \quad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C = \xi_C A^\mu(x)$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P = \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P = \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T = \xi_T^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T = \xi_T \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x)$$

等号  对于自由无质量实矢量场, ξ_C 、 ξ_P 和 ξ_T 的取值只能是 ± 1

电磁  电磁场是一种无质量实矢量场, 可通过 QED 相互作用确定 ξ_C 、 ξ_P 和 ξ_T 的取值

气泡  在相互作用绘景中, 参与相互作用的量子场与自由场具有形式相同的平面波展开式, 因此前面推导出来的量子场 C 、 P 、 T 变换性质照样成立

点  于是, 理论的 C 、 P 、 T 对称性由拉氏量中相互作用项的 C 、 P 、 T 变换性质决定

电磁场的分立变换

🥕 在 QED 理论中, 相互作用项的算符形式为 $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

📎 根据 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 算符的 C 变换 $C^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) C = -\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

$$P \text{ 变换 } P^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) P = \mathcal{P}^\mu_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$$

$$T \text{ 变换 } T^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) T = -\mathcal{T}^\mu_\nu \bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{T}x)$$

📌 电磁场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换必须是

$$C^{-1} A^\mu(x) C = -A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A^\mu(x) P = \mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} A^\mu(x) T = -\mathcal{T}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$$

🖇 才能使 QED 相互作用项分别在 C、P、T 变换下不变

电磁场的分立变换

🥕 在 QED 理论中, 相互作用项的算符形式为 $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

📎 根据 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 算符的 C 变换 $C^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) C = -\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

P 变换 $P^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) P = \mathcal{P}^\mu_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$

T 变换 $T^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) T = -\mathcal{T}^\mu_\nu \bar{\psi}(\mathcal{T}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{T}x)$

📌 电磁场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换必须是

$$C^{-1} A^\mu(x) C = -A^\mu(x)$$

$$P^{-1} A^\mu(x) P = \mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} A^\mu(x) T = -\mathcal{T}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{T}x)$$

⚠ 才能使 QED 相互作用项分别在 C、P、T 变换下不变

📎 也就是说, 必须取 $\xi_C = -1, \xi_P = +1, \xi_T = -1$

🔒 这样的取法是做得到的, 因此说 QED 理论同时具有 C、P、T 对称性, 即具有电荷共轭对称性、空间反射对称性和时间反演对称性

🔑 从而, 电磁场是 C 宇称为奇的极矢量场

电磁场强张量的分立变换

电磁场的场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 C 、 P 、 T 变换是

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = -F^{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \mathcal{P}^{\mu}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = -\mathcal{T}^{\mu}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

$$C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)C = -\tilde{F}^{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)P = -\mathcal{P}^{\mu}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T = \mathcal{T}^{\mu}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x)$$

尺 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 C 宇称均为奇

△ $F^{\mu\nu}$ 与 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P 、 T 变换都相差一个负号

鑰就 P 变换性质而言, $F^{\mu\nu}$ 是狭义的张量, 而 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 是赝张量

$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的分立变换

于是, 算符 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的 C 、 P 、 T 变换为

$$C^{-1} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) C = +F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) P = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) T = +F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)$$

$$C^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) C = +\tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$$

$$P^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) P = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$T^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) T = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{T}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)$$

笔 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的 **C** 宇称和宇称均为偶

碗 $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的 **C** 宇称为偶, 宇称为奇

9.4 节 CP 变换

🌿 C 变换和 P 变换相继作用，就形成 **CP 变换**

👉 CP 变换既**反转动量**的方向，又将**正反粒子互换**，但保持角动量**不变**

💪 在**弱相互作用**中，左手流算符 $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$ 参与**不同的规范**相互作用，导致**电荷共轭对称性和空间反射对称性**都遭到**极大的破坏**

跣脚 但**弱相互作用**的 **CP 对称性**却**近似成立**，只受到**微小的破坏**

👉 另一方面，实验上还**没有迹象**表明**电磁**和**强相互作用**的 CP 对称性受到破坏

复标量场的 CP 变换

根据前面推出的 C、P 变换性质, 复标量场 $\phi(x)$ 产生湮灭算符的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}a_p^\dagger CP = \eta_C P^{-1}b_p^\dagger P = \eta_C \eta_P^* b_{-p}^\dagger, \quad (CP)^{-1}a_p CP = \eta_C^* P^{-1}b_p P = \eta_C^* \eta_P b_{-p}$$

$$(CP)^{-1}b_p^\dagger CP = \eta_C^* P^{-1}a_p^\dagger P = \eta_C^* \eta_P a_{-p}^\dagger, \quad (CP)^{-1}b_p CP = \eta_C P^{-1}a_p P = \eta_C \eta_P^* a_{-p}$$

👉 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}\phi(x)CP = \eta_C^* \eta_P \phi^\dagger(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}\phi^\dagger(x)CP = \eta_C \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x)$$

👉 算符 $\phi^\dagger \phi$ 和 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)CP = +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x)CP = -\mathcal{P}^\mu_\nu i\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\overleftrightarrow{\partial^\nu}\phi(\mathcal{P}x)$$

👉 可见, $\phi^\dagger \phi$ 的 CP 宇称为偶

Dirac 旋量场的 CP 变换

对于 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ ，各种旋量双线性型的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)CP = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)CP = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)i\gamma^5\psi(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x)CP = \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x)\psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)CP = \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x)\psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\psi_L(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_L(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\psi_R(x)CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_R(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi_R(\mathcal{P}x)$$

○○ $\bar{\psi}\psi$ 的 CP 宇称为偶， $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ 的 CP 宇称为奇

💡 $\bar{\psi}_R\psi_L$ 与 $\bar{\psi}_L\psi_R$ 在 CP 变换下相互转化

👂 左手流算符 $\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$ 在 CP 变换后分别回到自身

有质量复矢量场的 CP 变换

有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 及其厄米共轭 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1} A^{\mu\dagger}(x) CP = \xi_C \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

嘴唇 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = -\xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)$$

有质量复矢量场的 CP 变换

有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 及其厄米共轭 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1} A^{\mu\dagger}(x) CP = \xi_C \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

嘴唇 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = -\xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)$$

另一方面, **自共轭场**的 CP 宇称是其 C 宇称与宇称之积

实标量场 $\phi(x)$ 的 CP 宇称是 $\eta_C \eta_P$, 取值为 ± 1

Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 CP 宇称是 $\zeta_C \zeta_P$, 取值为 $\pm i$

有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C \xi_P$, 取值为 ± 1

电磁场的 CP 变换

电磁场 $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C \xi_P = -1$ ，CP 变换为

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = -\mathcal{P}^\mu_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = -\mathcal{P}^\mu_\rho \mathcal{P}^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = \mathcal{P}^\mu_\rho \mathcal{P}^\nu_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

算符 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) CP = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) CP = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

可见， $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为偶， $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为奇

9.5 节 C、P、T 对称性

 前文讨论的所有**自由**量子场理论都同时具有 **C、P、T 对称性**

 一个相互作用理论是否具有 C 、 P 、 T 对称性，则取决于拉氏量中的**相互作用项**是否在 C 、 P 、 T 变换下不变

 由于 C 、 P 、 T 相位因子的**任意性**，我们可以对它们取合适的值，使理论具有**尽可能多**的分立对称性

9.5 节 C、P、T 对称性

🌽 前文讨论的所有**自由**量子场理论都同时具有 **C、P、T 对称性**

👁 一个相互作用理论是否具有 C、P、T 对称性，则取决于拉氏量中的**相互作用项**是否在 C、P、T 变换下不变

💡 由于 C、P、T 相位因子的**任意性**，我们可以对它们取合适的值，使理论具有**尽可能多**的分立对称性

🧠 在一些由量子场构成的**算符**的分立变换中，相位因子被**抵消**掉了，使得这些算符具有**明确**的 C、P、T 变换性质，这些性质在分析分立对称性的过程中起着重要作用

心脏病图标 为便于应用，接下来用**表格**总结一些算符的 C、P、T 变换性质

肺图标 将要用到的 $[-]^\mu$ 符号定义为

$$[-]^\mu = \begin{cases} +1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

标量场和矢量场相关算符的 C 、 P 、 T 变换性质

由复标量场 $\phi(x)$ 和电磁场 $A^\mu(x)$ 构成的一些算符的 C 、 P 、 T 变换性质如下

算符	C	P	T	CP	CPT
i	+	+	-	+	-
∂^μ	+	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	-
$(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$	+	+	+	+	+
$\phi^\dagger \phi$	+	+	+	+	+
$i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
A^μ	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$F^{\mu\nu}$	-	$[-]^\mu [-]^\nu$	$-[-]^\mu [-]^\nu$	$-[-]^\mu [-]^\nu$	+
$\tilde{F}^{\mu\nu}$	-	$-[-]^\mu [-]^\nu$	$[-]^\mu [-]^\nu$	$[-]^\mu [-]^\nu$	+
$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$	+	+	+	+	+
$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$	+	-	-	-	+

旋量场相关算符的 C 、 P 、 T 变换性质

由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构成的一些算符的 C 、 P 、 T 变换性质如下

算符	C	P	T	CP	CPT
$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	+	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	-	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	+
$\bar{\psi}_R\psi_L$	+	$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_L\psi_R$	$\bar{\psi}_L\psi_R$
$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_R\psi_L$	+	$\bar{\psi}_R\psi_L$	$\bar{\psi}_R\psi_L$
$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$-\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$[-]^\mu\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$-\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$[-]^\mu\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-

Yukawa 理论的 C、P、T 对称性

 在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$ 的 Yukawa 理论中

 实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi \bar{\psi} \psi$

 那么, C、P、T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$

 则 $\phi(x)$ 是狭义的标量场, C 宇称和宇称均为偶

算符	C	P	T	CP	CPT
$\bar{\psi} \psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi} i\gamma^5 \psi$	+	-	-	-	+

Yukawa 理论的 C、P、T 对称性

在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$ 的 Yukawa 理论中

实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi \bar{\psi} \psi$

那么, C、P、T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$

则 $\phi(x)$ 是狭义的标量场, C 宇称和宇称均为偶

算符	C	P	T	CP	CPT
$\bar{\psi} \psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi} i\gamma^5 \psi$	+	-	-	-	+

在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} i\gamma^5 \psi$ 的另一种 Yukawa 理论中

实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi \bar{\psi} i\gamma^5 \psi$

那么, C、P、T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = +1$ 和 $\eta_P = \eta_T = -1$

则 $\phi(x)$ 是赝标量场, C 宇称为偶, 宇称为奇

CPT 变换

 将 C 、 P 、 T 变换相继作用，就得到 **CPT 变换**，相应的变换算符记作

$$\Theta \equiv CPT$$

 由 $\Theta^\dagger \Theta = T^\dagger P^\dagger C^\dagger CPT = \mathbb{I}$ 得

$$\Theta^{-1} = \Theta^\dagger = T^\dagger P^\dagger C^\dagger = T^{-1} P^{-1} C^{-1}$$

 而且

$$\Theta^{-1} i \Theta = T^{-1} P^{-1} C^{-1} i CPT = T^{-1} i T = -i$$

 可见， Θ 跟 T 一样是反线性反么正算符

CPT 定理

从前面的表格可以看到，像 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 、 A^μ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇

另一方面，像 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i\gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶

CPT 定理

从前面的表格可以看到，像 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 、 A^μ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇

另一方面，像 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i\gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶

这种情况是普遍的，可以对量子场选取适当的 C、P、T 相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同

即具有奇（偶）数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的 CPT 相位因子为奇（偶）

CPT 定理

从前面的表格可以看到，像 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 、 A^μ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇

另一方面，像 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i\gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶

这种情况是普遍的，可以对量子场选取适当的 C、P、T 相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同

即具有奇（偶）数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的 CPT 相位因子为奇（偶）

在相对论性的局域量子场论里，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是一个厄米的 Lorentz 标量，必须由不携带未缩并 Lorentz 指标的厄米算符构成，因此 $\mathcal{L}(x)$ 的 CPT 相位因子为偶，即 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变，这就是 CPT 定理

CPT 定理的准确表述



CPT 定理的准确表述如下

CPT 定理

如果一个局域量子场论由一个在固有保时向 Lorentz 变换下不变的厄米拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 描述, 而且场的量子化遵循自旋-统计定理, 那么 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变, 满足

$$\Theta^{-1} \mathcal{L}(x) \Theta = +\mathcal{L}(-x)$$

拉氏量的 CPT 不变性意味着作用量、场的运动方程和哈密顿量 H 都在 CPT 变换下不变, 有

$$\Theta^{-1} H(t) \Theta = +H(-t)$$



因而理论具有 **CPT 对称性**

时间演化算符的 CPT 变换



在相互作用绘景中, CPT 对称性意味着相互作用哈密顿量 H_1 满足

$$\Theta^{-1} H_1(t) \Theta = +H_1(-t)$$

注意到 Θ 算符是反线性的, 时间演化算符 $U(t, t_0)$ 的 CPT 变换为

$$\begin{aligned} \Theta^{-1} U(t, t_0) \Theta &= \Theta^{-1} \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt H_1(t) \right] \Theta = \mathsf{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \Theta^{-1} H_1(t) \Theta \right] \\ &= \mathsf{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt H_1(-t) \right] = \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{-t_0}^{-t} dt H_1(t) \right] = U(-t, -t_0) \end{aligned}$$

倒数第二步作了变量替换 $t \rightarrow -t$

从而 S 算符的 CPT 变换是

$$\Theta^{-1} S \Theta = \Theta^{-1} U(+\infty, -\infty) \Theta = U(-\infty, +\infty) = U^\dagger(+\infty, -\infty) = S^\dagger$$

CPT 对称性的推论

✿ **CPT 定理**的证明可追溯到 1954 年 **Gerhart Lüders** 和 **Wolfgang Pauli** 的工作

🧘 由于 **CPT 定理成立的条件**在量子场论中**普遍得到满足**，因而 **CPT 对称性**被认为是一个广泛存在的对称性

🏃 它具有以下推论

🏅 **CPT 对称性保证正粒子和反粒子的质量和寿命完全相同**，电荷等**守恒荷的大小相等，符号相反**

⚡ 这些结论在**电荷共轭对称性遭到破坏时仍然成立**，因而**并不平庸**



Gerhart Lüders
(1920–1995)



Wolfgang Ernst Pauli
(1900–1958)

CPT 对称性与粒子质量

 现在证明 CPT 对称性保证正反粒子的 **质量相同**

 一个静止的 \mathcal{A} 粒子对应的态矢是哈密顿量 H (可包含相互作用项)、自旋角动量平方 \mathbf{S}^2 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的 **共同本征态**

 相应本征值为 \mathcal{A} 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$ 、 $s(s+1)$ 和 σ

 由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s ，下面的讨论与 s 无关

CPT 对称性与粒子质量

 现在证明 CPT 对称性保证正反粒子的 **质量相同**

 一个静止的 \mathcal{A} 粒子对应的态矢是哈密顿量 H (可包含相互作用项)、自旋角动量平方 \mathbf{S}^2 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的 **共同本征态**

 相应本征值为 \mathcal{A} 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$ 、 $s(s+1)$ 和 σ

 由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s ，下面的讨论与 s 无关

 将这个态矢记作 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$ ，满足 $\langle \mathcal{A}, \sigma | \mathcal{A}, \sigma \rangle = 1$ 和

$$H |\mathcal{A}, \sigma\rangle = m_{\mathcal{A}} |\mathcal{A}, \sigma\rangle$$

 **CPT 对称性**意味着 $\Theta^{-1} H(t) \Theta = +H(-t)$ ，利用它将 \mathcal{A} 粒子质量表达为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}, \sigma | H |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle$$

CPT 对称性推论：正反粒子质量相同

作为 C 、 P 和 T 的联合变换， CPT 变换将正反粒子互换，反转角动量的方向，同时保持动量不变

 **CPT 变换**将 S^3 本征值为 σ 的 \mathcal{A} 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$

 相应的量子态是 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}} |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ ，其中 $\chi_{\mathcal{A}}$ 是相位因子

CPT 对称性推论：正反粒子质量相同

作为 C 、 P 和 T 的联合变换， CPT 变换将正反粒子互换，反转角动量的方向，同时保持动量不变

 **CPT 变换** 将 S^3 本征值为 σ 的 \mathcal{A} 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$

 相应的量子态是 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle_\Theta \equiv \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}} |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ ，其中 $\chi_{\mathcal{A}}$ 是相位因子

 反么正的 Θ 算符满足 $\langle \Psi_1 | \Theta^\dagger \Psi_2 \rangle = \langle \Theta \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^*$ ，因而

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} &= \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^\dagger H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta \\ &= {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta^* = {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta \end{aligned}$$

 $|\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ 是静止的 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子的哈密顿量本征态，本征值为 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子质量 $m_{\bar{\mathcal{A}}}$ ，故

$$m_{\bar{\mathcal{A}}} = \langle \bar{\mathcal{A}}, -\sigma | H | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle = |\chi_{\mathcal{A}}|^2 {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta = {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta = m_{\mathcal{A}}$$

 这样就证明了反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 与正粒子 \mathcal{A} 的质量相同

微扰论最低阶衰变宽度

接下来在微扰论最低阶论证 CPT 对称性保证正反粒子的寿命相同

考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分

其中主要成分 H_s 描述较强的相互作用, 如强相互作用

而微扰成分 H_w 描述引起衰变的较弱相互作用, 如电磁或弱相互作用

这样的设定适用于发生电磁衰变或弱衰变的强子

CPT 对称性意味着 $\Theta^{-1}H_s(t)\Theta = H_s(-t)$ 和 $\Theta^{-1}H_w(t)\Theta = H_w(-t)$

微扰论最低阶衰变宽度

接下来在微扰论最低阶论证 CPT 对称性保证正反粒子的寿命相同

考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分

其中主要成分 H_s 描述较强的相互作用, 如强相互作用

而微扰成分 H_w 描述引起衰变的较弱相互作用, 如电磁或弱相互作用

这样的设定适用于发生电磁衰变或弱衰变的强子

CPT 对称性意味着 $\Theta^{-1}H_s(t)\Theta = H_s(-t)$ 和 $\Theta^{-1}H_w(t)\Theta = H_w(-t)$

考虑在 $t = 0$ 时刻静止的 \mathcal{A} 粒子发生衰变过程 $\mathcal{A} \rightarrow f$

f 代表所有可能的衰变末态, 描述 \mathcal{A} 粒子的态矢 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$ 是 H_s 的本征态

在 H_w 的最低阶, 根据 Fermi 黄金法则, \mathcal{A} 粒子的衰变宽度表达为

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) |\mathcal{A}, \sigma\rangle|^2$$

其中 $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$, E_f 是末态 f 中所有粒子的能量之和

时间演化算符 $U(+\infty, 0)$ 只用 H_s 定义, 描述向遥远未来的演化

反粒子衰变宽度

相应地, 反粒子 \bar{A} 的衰变过程是 $\bar{A} \rightarrow \bar{f}$

末态 \bar{f} 中的粒子都是 f 中的反粒子, 态矢 $|\bar{A}, \sigma\rangle$ 也是 H_s 的本征态

✓ \bar{A} 粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{A}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\bar{A}} - E_{\bar{f}}) |\langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{A}, \sigma \rangle|^2$$

✓ 注意 A 和 \bar{A} 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值

反粒子衰变宽度

相应地, 反粒子 \bar{A} 的衰变过程是 $\bar{A} \rightarrow \bar{f}$

末态 \bar{f} 中的粒子都是 f 中的反粒子, 态矢 $|\bar{A}, \sigma\rangle$ 也是 H_s 的本征态

✓ \bar{A} 粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{A}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\bar{A}} - E_{\bar{f}}) |\langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{A}, \sigma \rangle|^2$$

✓ 注意 A 和 \bar{A} 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值

🏓 对 $|f\rangle$ 作 **CPT 变换**, 得 $|f\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |f\rangle = \chi_f |\bar{f}\rangle$, 其中 χ_f 是相位因子

🏸 利用 **CPT 对称性**, 由 $\Theta^{-1} U(t, t_0) \Theta = U(-t, -t_0)$ 推出

$$\begin{aligned} \langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | A, \sigma \rangle &= \langle f | \Theta^{-1} U(-\infty, 0) \Theta \Theta^{-1} H_w(0) \Theta | A, \sigma \rangle \\ &= \Theta \langle f | U(-\infty, 0) H_w(0) | A, \sigma \rangle_{\Theta}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | A, \sigma \rangle|^2 &= |\Theta \langle f | U(-\infty, 0) H_w(0) | A, \sigma \rangle_{\Theta}^*|^2 \\ &= |\langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_w(0) | \bar{A}, -\sigma \rangle|^2 \end{aligned}$$

CPT 对称性与衰变宽度

再利用 $U(-\infty, 0) = \textcolor{blue}{U}(-\infty, +\infty)U(+\infty, 0) = \textcolor{blue}{S}^\dagger U(+\infty, 0)$, 有

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle \textcolor{brown}{f} | U(+\infty, 0) H_w(0) |\mathcal{A}, \sigma \rangle|^2 \\
 &= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | \textcolor{blue}{S}^\dagger U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \sum_{\bar{f}'} \langle \bar{f} | S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{\bar{f}, \bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\
 &\quad \times \langle \bar{f} | S^\dagger |\bar{f}''\rangle^* \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^*
 \end{aligned}$$

倒数第二步插入了一组完备集 $\sum_{\bar{f}'} |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}'| = \mathbb{I}$

CPT 对称性推论：正反粒子寿命相同

🍁 注意到 S 矩阵元只在初末态能量相等时非零，且 $SS^\dagger = \mathbb{I}$ ，对 \bar{f} 求和的部分化为

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* &= \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left(\langle \bar{f}' | S | \bar{f} \rangle \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle \right)^* \\ &= \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \langle \bar{f}' | SS^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* = \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}' \bar{f}''} \end{aligned}$$

⚽ 从而推出

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_{\bar{f}, \bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\ &\quad \times \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}' \bar{f}''} \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\ &\quad \times \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}'} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) |\langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 = \Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} \end{aligned}$$

█ 于是，正粒子 \mathcal{A} 与反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度相等，因而寿命相同

对 CPT 对称性的验证

在实验上，可以通过测量正反粒子质量和寿命的差异来验证 CPT 对称性是否遭到破坏

目前尚未发现任何破坏 CPT 对称性的现象

下面列举一些实验测量结果 (PDG 2022)

对于正反电子和正反质子的质量差，实验观测在 90% 置信度上给出下列上限：

$$\frac{m_{e^+} - m_{e^-}}{(m_{e^+} + m_{e^-})/2} < 8 \times 10^{-9}, \quad \frac{m_p - m_{\bar{p}}}{m_p} < 7 \times 10^{-10}$$

对于正反 μ 子的寿命比，实验测量得到

$$\frac{\tau_{\mu^+}}{\tau_{\mu^-}} = 1.000024 \pm 0.000078$$

对于正反 π 介子的寿命差，实验测量给出

$$\frac{\tau_{\pi^+} - \tau_{\pi^-}}{(\tau_{\pi^+} + \tau_{\pi^-})/2} = (5.5 \pm 7.1) \times 10^{-4}$$