量 子 场 论

第 7 章　量子电动力学

7.3 节至 7.5 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 3 月 24 日

7.3 节　手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_{L} 和**右手投影矩阵** P_{R}，

$$P_{\mathrm{L}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{R}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}$，$P_{\mathrm{R}}^2 = P_{\mathrm{R}}$，**正交性** $P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = \mathbf{0}$ 和**完备性** $P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{R}} = \mathbf{1}$，由 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 得 $P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{R}}$，$P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{L}}$

7.3 节　手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_{L} 和**右手投影矩阵** P_{R}，

$$P_{\mathrm{L}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{R}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}$，$P_{\mathrm{R}}^2 = P_{\mathrm{R}}$，**正交性** $P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = \mathbf{0}$ 和**完备性** $P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{R}} = \mathbf{1}$，由 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 得 $P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{R}}$，$P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{L}}$

将 **Dirac 旋量场** ψ 分解为**左手 Weyl 旋量场** η_{L} 和**右手 Weyl 旋量场** η_{R}

左手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_{\mathrm{L}} \equiv P_{\mathrm{L}}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ 0 \end{pmatrix}$

右手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_{\mathrm{R}} \equiv P_{\mathrm{R}}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$

可见，**左右手投影矩阵**正好挑选出具有**相应手征性**的分量

左右手投影分解

- 将 $\mathbf{1}\pm\gamma^5$ 的**简化**地写成 $1\pm\gamma^5$，**左手**旋量场 ψ_{L} 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_{\mathrm{L}}=(\psi_{\mathrm{L}})^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}[(1-\gamma^5)\psi]^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5)=\bar{\psi}P_{\mathrm{R}}$$

- 同理得**右手**旋量场 ψ_{R} 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}=\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}$

左右手投影分解

🔨 将 $1\pm\gamma^5$ 的简化地写成 $1\pm\gamma^5$，左手旋量场 $\psi_{\rm L}$ 的 Dirac 共轭为

$$\bar\psi_{\rm L}=(\psi_{\rm L})^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}[(1-\gamma^5)\psi]^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5)=\bar\psi P_{\rm R}$$

📜 同理得右手旋量场 $\psi_{\rm R}$ 的 Dirac 共轭为 $\bar\psi_{\rm R}=\bar\psi P_{\rm L}$

📌 对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解，得

$$\begin{aligned}
\bar\psi\psi &= \bar\psi(P_{\rm L}+P_{\rm R})\psi=\bar\psi(P_{\rm L}^2+P_{\rm R}^2)\psi=\bar\psi_{\rm R}\psi_{\rm L}+\bar\psi_{\rm L}\psi_{\rm R}\\
\bar\psi\gamma^\mu\psi &= \bar\psi\gamma^\mu(P_{\rm L}^2+P_{\rm R}^2)\psi=\bar\psi P_{\rm R}\gamma^\mu P_{\rm L}\psi+\bar\psi P_{\rm L}\gamma^\mu P_{\rm R}\psi=\bar\psi_{\rm L}\gamma^\mu\psi_{\rm L}+\bar\psi_{\rm R}\gamma^\mu\psi_{\rm R}\\
\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\psi &= \bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu(P_{\rm L}^2+P_{\rm R}^2)\psi=\bar\psi_{\rm R}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\rm L}+\bar\psi_{\rm L}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\rm R}\\
\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi &= \bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(P_{\rm L}^2+P_{\rm R}^2)\psi=\bar\psi_{\rm L}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\rm L}+\bar\psi_{\rm R}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\rm R}
\end{aligned}$$

👉 包含偶数（奇数）个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反（相同）的旋量场

📋 拉氏量中的 Dirac 旋量场质量项分解为 $-m\bar\psi\psi=-m(\bar\psi_{\rm R}\psi_{\rm L}+\bar\psi_{\rm L}\psi_{\rm R})$

📰 也就是说，质量 m 将左手旋量场 $\psi_{\rm L}$ 与右手旋量场 $\psi_{\rm R}$ 耦合起来

高能极限

- 在**高能极限**下，**忽略**旋量场的**质量 m**，则 $E_{\mathbf{p}} \simeq |\mathbf{p}|$
- 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$，$\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} - |\mathbf{p}|} \simeq 0$
- 按照 4.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

高能极限

- 在**高能极限**下，**忽略**旋量场的**质量 m**，则 $E_{\mathbf{p}} \simeq |\mathbf{p}|$
- 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$，$\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} - |\mathbf{p}|} \simeq 0$
- 按照 4.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

- 此时，**螺旋度不同**的 u 和 v 显示出**不同手征性**
- $u(\mathbf{p},+)$ 和 $v(\mathbf{p},-)$ 是**右手**的，$u(\mathbf{p},-)$ 和 $v(\mathbf{p},+)$ 是**左手**的
- 可见，高能极限下**手征性等价于螺旋度**
- 注意，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与**螺旋度为 λ 的正费米子**相关
- $v(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与**螺旋度为 λ 的反费米子**相关

旋量系数的左右手投影

- 由于**高能极限**下 $u(\mathbf{p},-)$ 和 $v(\mathbf{p},+)$ 是**左手**的，$u(\mathbf{p},+)$ 和 $v(\mathbf{p},-)$ 是**右手**的
- 用**投影矩阵**作用，得

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-) \simeq u(\mathbf{p},-), & u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+) \simeq u(\mathbf{p},+) \\
u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},+) \simeq 0, & u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},-) \simeq 0 \\
v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+) \simeq v(\mathbf{p},+), & v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-) \simeq v(\mathbf{p},-) \\
v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},-) \simeq 0, & v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},+) \simeq 0
\end{aligned}
$$

- 相应的 Dirac 共轭满足

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq \bar{u}(\mathbf{p},-), & \bar{u}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq u(\mathbf{p},+) \\
\bar{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, & \bar{u}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq 0 \\
\bar{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq v(\mathbf{p},+), & \bar{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq v(\mathbf{p},-) \\
\bar{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, & \bar{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq 0
\end{aligned}
$$

高能极限下的手征旋量场

- 将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 平面波解上，得到**手征旋量场**的平面波解

$$\psi_{\mathrm{L}}(x) = P_{\mathrm{L}}\psi(x) \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[u(\mathbf{p},-)a_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},+)b^\dagger_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

$$\psi_{\mathrm{R}}(x) = P_{\mathrm{R}}\psi(x) \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[u(\mathbf{p},+)a_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},-)b^\dagger_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

- 相应的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x) = [\psi_{\mathrm{L}}(x)]^\dagger\gamma^0 \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\bar{u}(\mathbf{p},-)a^\dagger_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},+)b_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

$$\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x) = [\psi_{\mathrm{R}}(x)]^\dagger\gamma^0 \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\bar{u}(\mathbf{p},+)a^\dagger_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},-)b_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

- 在**高能极限**下，**忽略质量**
- **左手旋量场** $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 描述**左旋极化的正费米子**和**右旋极化的反费米子**
- **右手旋量场** $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 描述**右旋极化的正费米子**和**左旋极化的反费米子**
- $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 成为两个**相互独立**的场

旋量系数的左右手投影

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},-)u(\mathbf{p},-) &\simeq \bar{u}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-)=0\\
\bar{u}(\mathbf{q},+)u(\mathbf{p},+) &\simeq \bar{u}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+)=0\\
\bar{v}(\mathbf{q},-)v(\mathbf{p},-) &\simeq \bar{v}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-)=0\\
\bar{v}(\mathbf{q},+)v(\mathbf{p},+) &\simeq \bar{v}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+)=0
\end{aligned}$$

此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi=\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}$ 在旋量系数上的体现

旋量系数的左右手投影

🪛 在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},-)u(\mathbf{p},-) &\simeq \bar{u}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-)=0\\
\bar{u}(\mathbf{q},+)u(\mathbf{p},+) &\simeq \bar{u}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+)=0\\
\bar{v}(\mathbf{q},-)v(\mathbf{p},-) &\simeq \bar{v}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-)=0\\
\bar{v}(\mathbf{q},+)v(\mathbf{p},+) &\simeq \bar{v}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+)=0
\end{aligned}$$

📓 此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi=\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}$ 在旋量系数上的体现

📖 一般地，有

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0, & \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0\\
\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0, & \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0\\
\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0, & \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0\\
\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0, & \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p},\lambda)&\simeq 0
\end{aligned}$$

旋量系数的左右手投影

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0,\qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0$$

容易看出，在**高能极限**下，**忽略质量**，只有 $\lambda_1=-\lambda_2$ 且 $\lambda_1'=-\lambda_2'$ 的螺旋度构型对 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 极化振幅

$$\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')=\frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$$

的贡献**非零**，与上一小节的计算结果一致

如果**不忽略质量**，则其它螺旋度构型的**贡献正比于质量**，表现出**螺旋度压低**效应

7.4 节 Coulomb 散射 7.4.1 小节 $e^-\mu^-$ 散射

- 现在讨论与 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **散射**过程
- 这个过程对应于电子受 μ **子 Coulomb 电场**影响而发生的 **Coulomb 散射**

Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

7.4 节 Coulomb 散射 7.4.1 小节 $e^-\mu^-$ 散射

- 现在讨论与 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **散射**过程
- 这个过程对应于电子受 **μ 子 Coulomb 电场**影响而发生的 **Coulomb 散射**
- 它的领头阶费曼图与 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 类似，但**线的方向不同**，相应的**不变振幅**为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

$$= \bar{u}(p_1')\,(-\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1')\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q'^2}\,\bar{u}(p_2')\,(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')$$

- 这里将旋量系数 u 和 $\bar{u}$ 简写成**在壳四维动量**的函数，且**没有**写出对**螺旋度**的依赖
- **虚光子**的四维动量 $q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu - k_2'^\mu$

非极化振幅模方

$\mathrm{i}\mathcal{M} = \dfrac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')$ 的复共轭是

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu u(p_1')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu u(p_2')$$

非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu u(p_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu u(p_2') \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\sum_{\text{spins}}\mathrm{tr}[u(p_1')\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[u(p_2')\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1'+m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1'+m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_2'+m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}_2'+m_\mu)\gamma_\nu]
\end{aligned}$$

$\sum\limits_{\text{spins}}$ 表示**对自旋求和**，即**对螺旋度求和**

交叉对称性

比较 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ **湮灭**与 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **散射**的非极化振幅模方：

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^-\to e^-\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu]$$

容易看出，$\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^-\to e^-\mu^-}|^2}$ 相当于对 $\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}|^2}$ 作**动量替换**

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to -k_2'^\mu$$

$q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \to q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu$，这种关系称为**交叉对称性** (crossing symmetry)

交叉对称性

比较 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ **湮灭**与 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **散射**的非极化振幅模方：

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]$$

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^-\to e^-\mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu]$$

容易看出，$\overline{|\mathcal{M}_{e^-\mu^-\to e^-\mu^-}|^2}$ 相当于对 $\overline{|\mathcal{M}_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}|^2}$ 作**动量替换**

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to -k_2'^\mu$$

$q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \to q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu$，这种关系称为**交叉对称性** (crossing symmetry)

通过这样的**动量替换**，从 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的计算结果

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2}\left[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + (k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) + m_e^2(p_1\cdot p_2) + m_\mu^2(k_1\cdot k_2) + 2m_e^2m_\mu^2\right]$$

直接得到 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **非极化振幅模方**的表达式

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q'^2)^2}\left[(k_1'\cdot p_2')(p_1'\cdot k_2') + (k_1'\cdot k_2')(p_1'\cdot p_2') - m_e^2(p_2'\cdot k_2') - m_\mu^2(k_1'\cdot p_1') + 2m_e^2m_\mu^2\right]$$

质心系

在**质心系**中，根据 5.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子动量满足

$$|\mathbf{k}_1'| = |\mathbf{k}_2'| = |\mathbf{p}_1'| = |\mathbf{p}_2'| = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \equiv Q$$

也就是说，初末态四个粒子的**动量大小**都是 Q，相应的能量是

$$k_1'^0 = p_1'^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\mathrm{CM}}} \equiv E_e, \quad k_2'^0 = p_2'^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\mathrm{CM}}} \equiv E_\mu$$

E_e 是初末态**电子能量**，E_μ 是初末态 **μ 子能量**

质心系

在质心系中，根据 5.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子动量满足

$$|\mathbf{k}_1'| = |\mathbf{k}_2'| = |\mathbf{p}_1'| = |\mathbf{p}_2'| = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \equiv Q$$

也就是说，初末态四个粒子的动量大小都是 Q，相应的能量是

$$k_1'^0 = p_1'^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\mathrm{CM}}} \equiv E_e, \quad k_2'^0 = p_2'^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\mathrm{CM}}} \equiv E_\mu$$

E_e 是初末态电子能量，E_μ 是初末态 μ 子能量

设散射角 θ 为 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$\begin{aligned}
k_1' \cdot p_1' &= k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = E_e^2 - Q^2\cos\theta \\
k_1' \cdot p_2' &= k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = E_e E_\mu + Q^2\cos\theta \\
k_2' \cdot p_2' &= k_2'^0 p_2'^0 - |\mathbf{k}_2'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = E_\mu^2 - Q^2\cos\theta \\
k_2' \cdot p_1' &= k_2'^0 p_1'^0 + |\mathbf{k}_2'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = E_e E_\mu + Q^2\cos\theta \\
k_1' \cdot k_2' &= k_1'^0 k_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{k}_2'| = E_e E_\mu + Q^2 \\
p_1' \cdot p_2' &= p_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{p}_1'||\mathbf{p}_2'| = E_e E_\mu + Q^2
\end{aligned}$$

质心系中的非极化振幅模方

🎸 虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^2 = (k_1' - p_1')^2 = 2m_e^2 - 2\,k_1' \cdot p_1' = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2\cos\theta) = -2Q^2(1-\cos\theta)$$

☎️ 对任意 $\theta > 0$，有 $q'^2 < 0$，即虚光子是类空的

质心系中的非极化振幅模方

🎸 虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^2 = (k_1' - p_1')^2 = 2m_e^2 - 2\,k_1' \cdot p_1' = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2\cos\theta) = -2Q^2(1-\cos\theta)$$

☎️ 对任意 $\theta > 0$，有 $q'^2 < 0$，即虚光子是类空的

📞 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\big[(E_eE_\mu + Q^2\cos\theta)^2 + (E_eE_\mu + Q^2)^2 \\ &\qquad - m_e^2(E_\mu^2 - Q^2\cos\theta) - m_\mu^2(E_e^2 - Q^2\cos\theta) + 2m_e^2m_\mu^2\big] \\ &= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\big\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2 + Q^4(1+\cos^2\theta) \\ &\qquad + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\big\}\end{aligned}$$

📱 微分截面的入射流因子是

$$E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = E_eE_\mu\left(\frac{Q}{E_e} + \frac{Q}{E_\mu}\right) = E_eE_\mu\frac{Q(E_\mu+E_e)}{E_eE_\mu} = QE_{\mathrm{CM}}$$

质心系中的微分截面

于是，$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **微分截面**为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{QE_{\mathrm{CM}}}\frac{Q}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^4(1-\cos\theta)^2}\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2 + Q^4(1+\cos^2\theta) + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\}$$

由于分母上的 $(1-\cos\theta)^2$ 因子，微分截面对于**向前散射** ($\theta \to 0$) 具有**奇性**

这是 **Coulomb 散射**的一个**普遍特征**

质心系中的微分截面

于是，$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **微分截面**为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{QE_{\mathrm{CM}}}\frac{Q}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^4(1-\cos\theta)^2}\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2 + Q^4(1+\cos^2\theta) + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\}$$

由于分母上的 $(1-\cos\theta)^2$ 因子，微分截面对于**向前散射** ($\theta \to 0$) 具有**奇性**

这是 **Coulomb 散射**的一个**普遍特征**

当**散射角 θ 很小**时，$\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \mathcal{O}(\theta^4)$，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta \to 0$$

$(1-\cos\theta)^2$ 因子来源于**光子传播子**贡献的 $q'^2 = -2Q^2(1-\cos\theta)$

故奇性来自**接近质壳**的**虚光子** ($q'^2 \simeq 0$)

微分截面的近似

当 $E_{\mathrm{CM}} \gg m_e$ 时，**忽略电子质量**，有 $E_e \simeq Q \simeq \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$，微分截面化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2 Q^2 (1-\cos\theta)^2}\left[2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2\cos^2\theta + 2QE_\mu \right.\\ &\qquad\qquad \left. + 2QE_\mu\cos\theta + m_\mu^2\cos\theta\right]\\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2 Q^2 (1-\cos\theta)^2}\left[(E_\mu+Q)^2 + (E_\mu + Q\cos\theta)^2 - m_\mu^2(1-\cos\theta)\right]\end{aligned}$$

在**高能极限** ($E_{\mathrm{CM}} \gg m_\mu > m_e$) 下，$Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{\mathrm{CM}}/2$，则微分截面变成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \simeq \frac{\alpha^2[4+(1+\cos\theta)^2]}{2E_{\mathrm{CM}}^2(1-\cos\theta)^2} = \frac{\alpha^2[1+\cos^4(\theta/2)]}{2E_{\mathrm{CM}}^2\sin^4(\theta/2)}$$

第二步用到**三角函数倍角公式** $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$ 和 $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$

7.4.2 小节 e^-p 散射

- **质子** (proton) $\boldsymbol{p}$ 是**自旋为** $1/2$ 的**稳定**费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV
- 它是一种**复合粒子**，具有内部结构，可以看作由 **2 个** $\boldsymbol{u}$ **夸克**和 **1 个** $\boldsymbol{d}$ **夸克**组成的束缚态
- 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的**电荷之和**，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

7.4.2 小节 e^-p 散射

- **质子** (proton) p 是**自旋为** $1/2$ 的**稳定**费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV
- 它是一种**复合粒子**，具有内部结构，可以看作由 **2 个 u 夸克**和 **1 个 d 夸克**组成的束缚态

- 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的**电荷之和**，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$
- 像这样**贡献**到质子的**相加性量子数**（如电荷）的夸克称为**价夸克** (valence quark)
- 由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对**正反夸克 $q\bar{q}$**，q 与 $\bar{q}$ 携带的相加性量子数正好**相互抵消**，这样的夸克称为**海夸克** (sea quark)

7.4.2 小节 e^-p 散射

- 质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV
- 它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

- 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$
- 像这样贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为价夸克 (valence quark)
- 由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$，q 与 $\bar{q}$ 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)
- 一个相互作用过程通常涉及一个典型的能量或动量大小，比如质心能 E_{CM} 或上一小节用到的动量 Q，这样的量称为能标 (energy scale)

- 当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的点粒子一样
- 此时可以用 Dirac 旋量场来描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点

Rutherford 公式

- 接下来讨论电子与质子的 **Coulomb 散射** $e^-p \to e^-p$
- 在**非相对论性经典物理学**中，假设入射电子的动量**远小于**质子质量 m_p
- 从而可取 $m_p \to \infty$ 的极限，则**质子**在散射前后都是**静止**的
- **初末态电子运动速率**相同，记为 v，运动方向相差**散射角** θ

Rutherford 公式

- 接下来讨论电子与质子的 **Coulomb 散射** $e^-p \to e^-p$
- 在**非相对论性经典物理学**中，假设入射电子的动量**远小于**质子质量 m_p
- 从而可取 $m_p \to \infty$ 的极限，则**质子**在散射前后都是**静止**的
- **初末态电子运动速率**相同，记为 v，运动方向相差**散射角** θ
- 那么，**Coulomb 力**引起的**微分散射截面**为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

- 这个式子就是 **Rutherford 公式**
- 可见，$\theta \to 0$ 时 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \propto \theta^{-4}$ 的**奇性**在**经典物理**层面就已经出现了

Ernest Rutherford (1871–1937)

e^-p Coulomb 散射

在 **QED** 中，$e^-p \to e^-p$ 散射过程的领头阶**不变振幅**为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= \bar{u}(p_1)\left(-\mathrm{i}e\gamma^\mu\right)u(k_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(p_2)\left(+\mathrm{i}e\gamma^\nu\right)u(k_2)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(k_1)\,\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(k_2)$$

e^-p Coulomb 散射

在 **QED** 中，$e^-p \to e^-p$ 散射过程的领头阶**不变振幅**为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} =$$

$$= \bar{u}(p_1)\left(-\mathrm{i}e\gamma^\mu\right)u(k_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(p_2)\left(+\mathrm{i}e\gamma^\nu\right)u(k_2)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(k_1)\,\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(k_2)$$

相比于 $e^-\mu^-$ **散射**，这个结果多出一个**负号**，这是因为 $Q_p = -Q_\mu = +1$

由于这里只有一幅 Feynman 图，这个符号差异**不会影响**振幅模方

类比于 $e^-\mu^-$ **散射**，$e^-p \to e^-p$ **非极化振幅模方**为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2}\left[(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_2) + (k_1\cdot k_2)(p_1\cdot p_2) - m_e^2(p_2\cdot k_2) - m_p^2(k_1\cdot p_1) + 2m_e^2m_p^2\right]$$

运动学

下面在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导 Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，初末态电子的能量都是 E，四维动量分解为

$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

运动学

下面在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导 Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，初末态电子的能量都是 E，四维动量分解为

$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

初末态电子的动量大小相等，记为 $Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$

根据狭义相对论中的定义，初末态电子的运动速率为 $v = \dfrac{Q}{E} = \sqrt{1 - \dfrac{m_e^2}{E^2}}$

因而 $m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2)$，四维动量的内积可以表达成

$$\begin{aligned} k_1 \cdot p_1 &= E^2 - Q^2 \cos\theta = E^2(1 - v^2 \cos\theta), \quad k_2 \cdot p_2 = m_p^2 \\ k_1 \cdot p_2 &= k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E \\ q^2 &= (k_1 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2E^2 + 2Q^2 \cos\theta = -2Q^2(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

非极化振幅模方

从而，非极化振幅模方化为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2+m_p^2E^2-m_e^2m_p^2-m_p^2E^2(1-v^2\cos\theta)+2m_e^2m_p^2\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left(m_p^2E^2+m_p^2E^2v^2\cos\theta+m_e^2m_p^2\right) \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2+m_p^2E^2v^2\cos\theta+m_p^2E^2(1-v^2)\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2(1-\cos\theta)^2}\left[2-v^2(1-\cos\theta)\right] = \frac{16\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

非极化振幅模方

从而，**非极化振幅模方化**为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2+m_p^2E^2-m_e^2m_p^2-m_p^2E^2(1-v^2\cos\theta)+2m_e^2m_p^2\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left(m_p^2E^2+m_p^2E^2v^2\cos\theta+m_e^2m_p^2\right) \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2+m_p^2E^2v^2\cos\theta+m_p^2E^2(1-v^2)\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2(1-\cos\theta)^2}\left[2-v^2(1-\cos\theta)\right] = \frac{16\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

末态**两体不变相空间积分**是

$$
\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)
$$

$$
= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0p_2^0}\delta(k_1^0+k_2^0-p_1^0-p_2^0) = \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}Q\,Q^2}{16\pi^2Em_p}\delta\left(E+m_p-\sqrt{Q^2+m_e^2}-m_p\right)
$$

$$
= \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,Q^2}{16\pi^2Em_p}\left|\frac{\mathrm{d}\left(E-\sqrt{Q^2+m_e^2}\right)}{\mathrm{d}Q}\right|^{-1} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,Q^2}{16\pi^2Em_p}\frac{\sqrt{Q^2+m_e^2}}{Q} = \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q}{16\pi^2m_p}
$$

Mott 公式

- 入射流因子 $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = Em_p\dfrac{Q}{E} = Qm_p$
- 此过程末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int \mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p}\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p}\\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2}\int \mathrm{d}\Omega\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$

Mott 公式

入射流因子 $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = Em_p\dfrac{Q}{E} = Qm_p$

此过程末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，散射截面是

$$\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int \mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p}\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2}\int \mathrm{d}\Omega\,\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

Nevill Francis Mott
(1905–1996)

微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad Q \ll m_p$$

这是 **QED** 对 **Rutherford 公式**的**修正**，称为 **Mott 公式**

Mott 公式跟 Rutherford 公式一样**不依赖于** m_p，因而 $m_p\to\infty$ **的极限**是**存在**的

Mott 公式与 Rutherford 公式

在低速极限下，$v \ll 1$，$Q \simeq m_e v$，**Mott 公式**

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

退化成 **Rutherford 公式** $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \dfrac{\alpha^2}{4m_e^2v^4\sin^4(\theta/2)}$

7.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

- 从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**
- 在**非相对论极限**下，Mott 公式**退化**为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**
- 这是接下来要**论证**的观点
- 考虑两种带电费米子 f 和 f'，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$
- 讨论 **Coulomb 散射过程** $ff' \to ff'$
- 初态四维动量为 k_1 和 k_2，末态四维动量为 p_1 和 p_2

7.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

- 从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**
- 在**非相对论极限**下，Mott 公式**退化**为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**
- 这是接下来要**论证**的观点
- 考虑两种带电费米子 f 和 f'，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$
- 讨论 **Coulomb 散射过程** $ff' \to ff'$
- 初态四维动量为 k_1 和 k_2，末态四维动量为 p_1 和 p_2

- 在**非相对论极限**下，$|\mathbf{k}_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$，粒子**能量近似为质量**，即

$$k_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{p}_2)$$

- 在此极限下，可将正费米子的平面波旋量系数 u 表达为 $u(\mathbf{p}, s) \simeq \sqrt{m}\begin{pmatrix}\zeta_s \\ \zeta_s\end{pmatrix}$
- $\mathbf{p}$ 是动量，$s = \pm 1/2$ 是**自旋**在某个**固定方向**上的**投影本征值**，而相应的**二分量本征态** ζ_s 是常数，满足 $\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s = \delta_{s's}$

非相对论极限

- 这样的 $u(\mathbf{p},s)$ 在 $\mathbf{p}\to 0$ 极限下满足运动方程，

$$(\not{p}-m)u(\mathbf{p},s)=\begin{pmatrix}-m & \sigma^\mu p_\mu\\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m\end{pmatrix}u(\mathbf{p},s)\simeq m^{3/2}\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_s\\ \zeta_s\end{pmatrix}=0$$

- 也满足归一化条件，$u^\dagger(\mathbf{p},s')u(\mathbf{p},s)\simeq m\begin{pmatrix}\zeta^\dagger_{s'} & \zeta^\dagger_{s'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_s\\ \zeta_s\end{pmatrix}=2m\zeta^\dagger_{s'}\zeta_s\simeq 2E_{\mathbf{p}}\delta_{s's}$

非相对论极限

这样的 $u(\mathbf{p},s)$ 在 $\mathbf{p}\to 0$ 极限下满足运动方程，

$$(\not{p}-m)u(\mathbf{p},s)=\begin{pmatrix}-m & \sigma^\mu p_\mu\\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m\end{pmatrix}u(\mathbf{p},s)\simeq m^{3/2}\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_s\\ \zeta_s\end{pmatrix}=0$$

也满足归一化条件，$u^\dagger(\mathbf{p},s')u(\mathbf{p},s)\simeq m\begin{pmatrix}\zeta_{s'}^\dagger & \zeta_{s'}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_s\\ \zeta_s\end{pmatrix}=2m\zeta_{s'}^\dagger\zeta_s\simeq 2E_{\mathbf{p}}\delta_{s's}$

于是，$ff'\to ff'$ 散射过程的 QED 领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M}=$

$$=\bar{u}(\mathbf{p}_1,s_1')\left(\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu\right)u(\mathbf{k}_1,s_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_2,s_2')\left(\mathrm{i}Q_{f'}e\gamma^\nu\right)u(\mathbf{k}_2,s_2)$$

$$=\frac{\mathrm{i}Q_fQ_{f'}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,s_1')\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,s_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_2,s_2')\gamma_\mu u(\mathbf{k}_2,s_2)$$

非相对论极限下的 Coulomb 散射振幅

由 $u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1}\\ \zeta_{s_1}\end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1') \simeq \sqrt{m_f}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger\end{pmatrix}$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f\begin{pmatrix}\zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1}\\ \zeta_{s_1}\end{pmatrix} = 2m_f\zeta_{s_1'}^\dagger\zeta_{s_1} = 2m_f\delta_{s_1's_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f\begin{pmatrix}\zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma^i\\ -\sigma^i&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1}\\ \zeta_{s_1}\end{pmatrix} = 0$$

同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'}\delta_{s_2's_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0$

因此在**非相对论极限**下只有**时间分量** $\bar{u}\gamma^0 u$ 的贡献

非相对论极限下的 Coulomb 散射振幅

由 $u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1}\\ \zeta_{s_1}\end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1') \simeq \sqrt{m_f}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger\end{pmatrix}$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f\begin{pmatrix}\zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1}\\ \zeta_{s_1}\end{pmatrix} = 2m_f\zeta_{s_1'}^\dagger\zeta_{s_1} = 2m_f\delta_{s_1's_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f\begin{pmatrix}\zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma^i\\ -\sigma^i&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{s_1}\\ \zeta_{s_1}\end{pmatrix} = 0$$

同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'}\delta_{s_2's_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0$

因此在**非相对论极限**下只有**时间分量** $\bar{u}\gamma^0 u$ 的贡献

再注意到 $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$，则 $q^2 = (q^0)^2 - |q|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$

将**不变振幅**化为 $\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\dfrac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}(2m_f\delta_{s_1's_1})(2m_{f'}\delta_{s_2's_2})$

$\mathrm{i}\mathcal{M}$ 只在 $s_1' = s_1$ 且 $s_2' = s_2$ 时非零

也就是说，**非相对论性**的 Coulomb 散射**不改变**费米子的**自旋状态**

非相对论性归一化

- $\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\dfrac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}(2m_f\delta_{s_1' s_1})(2m_{f'}\delta_{s_2' s_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ **因子**跟**归一化取法**有关
- 依照 4.5.4 小节的**相对论性归一化**取法，正费米子态为 $\left|\mathbf{p}^+, s\right\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},s}\left|0\right\rangle$
- 满足 $\left\langle \mathbf{k}^+, s' \,\middle|\, \mathbf{p}^+, s\right\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$

非相对论性归一化

- $\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\dfrac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}(2m_f\delta_{s_1' s_1})(2m_{f'}\delta_{s_2' s_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ **因子**跟**归一化取法**有关
- 依照 4.5.4 小节的**相对论性归一化**取法，正费米子态为 $\left|\mathbf{p}^+, s\right\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},s}\left|0\right\rangle$
- 满足 $\left\langle \mathbf{k}^+, s' \,\middle|\, \mathbf{p}^+, s\right\rangle = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$
- 在**非相对论性**量子力学中，通常将**正费米子态**定义为

$$\left|\mathbf{p}^+, s\right\rangle_{\mathrm{NR}} \equiv a^\dagger_{\mathbf{p},s}\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left|\mathbf{p}^+, s\right\rangle$$

- 满足内积关系 ${}_{\mathrm{NR}}\left\langle \mathbf{k}^+, s' \,\middle|\, \mathbf{p}^+, s\right\rangle_{\mathrm{NR}} = (2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$，相应外线规则变成

$$f, s \xrightarrow{\;p\;} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\, u(\mathbf{p}, s), \qquad \bullet \xrightarrow{\;p\;} f, s = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\, \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda).$$

- **非相对论性归一化不变振幅**是 $\mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{NR}} \simeq -\dfrac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}\delta_{s_1' s_1}\delta_{s_2' s_2}$，$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$
- 相应的**散射矩阵元**为

$${}_{\mathrm{NR}}\left\langle \mathbf{p}_2^+, s_2'; \mathbf{p}_1^+, s_1' \right| \mathrm{i}T \left|\mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2\right\rangle_{\mathrm{NR}} = \mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{NR}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

Born 近似

另一方面，对于 f 粒子进入**势场** $V(\mathbf{x})$ 发生的散射过程，**非相对论性量子力学**的 **Born 近似**给出**散射矩阵元**

$$ {}_{\mathrm{NR}}\left\langle \mathbf{p}_1^+, s_1 \middle| \mathrm{i}T \middle| \mathbf{k}_1^+, s_1 \right\rangle_{\mathrm{NR}} = -\mathrm{i}\tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi\,\delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1}) $$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**，

$$ \tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int \mathrm{d}^3x\, V(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} $$

这里相当于**对引起势场** $V(\mathbf{x})$ 的 f' **粒子动量作积分**

因而**没有**相关的**三维动量** δ **函数因子**

Born 近似

另一方面，对于 f 粒子进入**势场** $V(\mathbf{x})$ 发生的散射过程，**非相对论性量子力学**的 **Born 近似**给出**散射矩阵元**

$$_{\mathrm{NR}}\left\langle \mathbf{p}_1^+, s_1 \middle| \mathrm{i}T \middle| \mathbf{k}_1^+, s_1 \right\rangle_{\mathrm{NR}} = -\mathrm{i}\tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi\,\delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int \mathrm{d}^3x\, V(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

这里相当于**对引起势场** $V(\mathbf{x})$ 的 f' **粒子动量作积分**

因而**没有**相关的**三维动量** δ **函数因子**

与以上**Coulomb 散射矩阵元** $_{\mathrm{NR}}\left\langle \mathbf{p}_2^+, s_2'; \mathbf{p}_1^+, s_1' \middle| \mathrm{i}T \middle| \mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2 \right\rangle_{\mathrm{NR}}$

$$= -\frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}\,\delta_{s_1' s_1}\delta_{s_2' s_2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

比较，得到 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \dfrac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$

Coulomb 势能

对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \dfrac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 **Fourier 逆变换**，记 $r \equiv |\mathbf{x}|$，推出 **Coulomb 势能**

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 \mathrm{d}|\mathbf{q}| \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2}$$

$$= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}$$

$$= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right)$$

Coulomb 势能

对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \dfrac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 **Fourier 逆变换**，记 $r \equiv |\mathbf{x}|$，推出 **Coulomb 势能**

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 \mathrm{d}|\mathbf{q}| \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2}$$

$$= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}$$

$$= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right)$$

作变量替换 $Q = -|\mathbf{q}|$，将第二个积分化为

$$-\int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \int_0^{-\infty} \mathrm{d}Q \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{-Q} = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}Q \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q} = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$$

最后一步作了变量替换 $|\mathbf{q}| = Q$

因而可将 $V(\mathbf{x})$ 表达成 $V(r) = \dfrac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

Coulomb 势

- 利用**留数定理**计算积分 $V(r)=\dfrac{Q_fQ_{f'}e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}|\mathbf{q}|\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$
- 被积函数在 $|\mathbf{q}|=0$ 处存在**单极点**，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上**沿实轴和上半圆周积分**，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}|\mathbf{q}|\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}=\mathrm{i}\pi\operatorname*{Res}_{|\mathbf{q}|=0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}=\mathrm{i}\pi$$

- **Coulomb 势能**化为 $V(r)=\dfrac{Q_fQ_{f'}e^2}{4\pi r}$

Coulomb 势

- 利用**留数定理**计算积分 $V(r)=\dfrac{Q_fQ_{f'}e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}|\mathbf{q}|\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$
- 被积函数在 $|\mathbf{q}|=0$ 处存在**单极点**，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上**沿实轴和上半圆周积分**，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}|\mathbf{q}|\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}=\mathrm{i}\pi\operatorname*{Res}_{|\mathbf{q}|=0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}=\mathrm{i}\pi$$

- **Coulomb 势能**化为 $V(r)=\dfrac{Q_fQ_{f'}e^2}{4\pi r}$
- f' 粒子的 **Coulomb 势** $\Phi(r)=\dfrac{V(r)}{Q_fe}=\dfrac{Q_{f'}e}{4\pi r}$
- 这正是**电动力学**中**点电荷电势**的形式
- Coulomb 势是**长程势**，以 r^{-1} 规律**衰减**
- $V(r)$ 的**符号**由 Q_f 和 $Q_{f'}$ 的符号决定
- 当 Q_f 与 $Q_{f'}$ **同号**时，$V(r)>0$，r 越小，势能越大，Coulomb 势是**排斥势**
- 当 Q_f 与 $Q_{f'}$ **异号**时，$V(r)<0$，r 越小，势能越小，Coulomb 势是**吸引势**

Yukawa 势

- 我们已经看到，**光子传播子**在非相对论极限下的效应等价于 **Coulomb 势**
- 类似地，**Yukawa 理论**中**标量玻色子 ϕ 的传播子**应该等价于一种 **Yukawa 势**
- 与光子不同的是，ϕ 具有**质量 m_ϕ**，下面推导 Yukawa 势能的形式

Yukawa 势

- 我们已经看到，**光子传播子**在非相对论极限下的效应等价于 **Coulomb 势**
- 类似地，**Yukawa 理论**中**标量玻色子 ϕ 的传播子**应该等价于一种 **Yukawa 势**
- 与光子不同的是，ϕ 具有**质量 m_ϕ**，下面推导 Yukawa 势能的形式
- 假设存在两种参与 **Yukawa 相互作用**的**费米子 f 和 f'**，相应的**耦合常数均为 κ**
- 根据 6.2 节的 Feynman 规则，$ff' \to ff'$ 散射过程的领头阶**不变振幅**为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$

$$= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\,(-\mathrm{i}\kappa)\,u(\mathbf{k}_1, s_1)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\,(-\mathrm{i}\kappa)\,u(\mathbf{k}_2, s_2)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')u(\mathbf{k}_1, s_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')u(\mathbf{k}_2, s_2)$$

Yukawa 理论的 $\tilde{V}(\mathbf{q})$

由于

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{s_1' s_1}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{s_2' s_2}$$

振幅化为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} (2m_f \delta_{s_1' s_1})(2m_{f'} \delta_{s_2' s_2})$$

类比**前面 Coulomb 散射的计算**：

$$\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s_1' s_1})(2m_{f'} \delta_{s_2' s_2}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

即得 **Yukawa 势场** $V(\mathbf{x})$ 的 **Fourier 变换**

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$

Yukawa 势能

📼 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\dfrac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$ 对应的 **Yukawa 势能**为

$$V(\mathbf{x}) = -\kappa^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \, \frac{|\mathbf{q}|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r\cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$

$$= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r} = -\frac{\kappa^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{|\mathbf{q}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$

👜 被积函数在**上半复平面** $|\mathbf{q}| = \mathrm{i}m_\phi$ 处存在**单极点**，**沿实轴和上半圆周积分**，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{|\mathbf{q}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2\mathrm{i}\pi \operatorname*{Res}_{|\mathbf{q}|=\mathrm{i}m_\phi} \frac{|\mathbf{q}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2\mathrm{i}\pi \left. \frac{|\mathbf{q}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}| + \mathrm{i}m_\phi} \right|_{|\mathbf{q}|=\mathrm{i}m_\phi} = \mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{-m_\phi r}$$

🎒 因此，Yukawa 势能的形式是 $V(r) = -\dfrac{\kappa^2}{4\pi r} \mathrm{e}^{-m_\phi r}$

短程吸引势

- **Yukawa 势能** $V(r) = -\dfrac{\kappa^2}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-m_\phi r} < 0$
- r 越小，势能越小，Yukawa 势是**吸引势**
- 在**长矩离**处，**指数因子** $\mathrm{e}^{-m_\phi r}$ 使 Yukawa 势**迅速衰减**，因而它是**短程势**
- $r_0 \equiv 1/m_\phi$ 是 Yukawa 势的特征长度，即 Yukawa 相互作用的**力程**
- 若标量玻色子 ϕ **没有质量**，则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式**类似**

7.5 节　交叉对称性和 Mandelstam 变量

- 上一节讨论表明，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 与 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程具有交叉对称性，利用相应的**动量替换规则**，可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方
- **交叉对称性**的一般表述如下
- 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的**粒子** Φ
- 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的**反粒子** $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程
- 那么，这两个过程的**不变振幅**可以通过**动量替换** $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来，

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots)$$

7.5 节　交叉对称性和 Mandelstam 变量

上一节讨论表明，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 与 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程具有交叉对称性，利用相应的**动量替换规则**，可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

交叉对称性的一般表述如下

如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的**粒子** Φ

从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的**反粒子** $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程

那么，这两个过程的**不变振幅**可以通过**动量替换** $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来，

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots)$$

物理的初末态粒子必须具有**正能量**，但 $k^\mu = -p^\mu$ 意味着 Φ 和 $\bar{\Phi}$ **不可能同时具有正能量**，因而看起来有一个过程是**非物理**的

实际上，应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的**数学技巧**：对第一个过程的振幅作**动量替换** $p^\mu \to -k^\mu$，再**解析延拓**到**物理区域**就得到第二个过程的振幅

可以这样**想象**交叉对称性：一个**粒子沿着时间方向运动**等价于它的**反粒子逆着时间方向运动**，这样的反粒子具有**负能量**和**相反动量**

交叉对称性与动量替换

- 把 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 的过程如下
- 先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p_1')，引起动量替换 $k_2^\mu \to -p_1'^\mu$
- 再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k_2')，引起动量替换 $p_2^\mu \to -k_2'^\mu$
- 初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到**替换规则**

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to -k_2'^\mu$$

交叉对称性与动量替换

- 把 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 的过程如下
- 先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p_1')，引起动量替换 $k_2^\mu \to -p_1'^\mu$
- 再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k_2')，引起动量替换 $p_2^\mu \to -k_2'^\mu$
- 初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到**替换规则**

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to -k_2'^\mu$$

- 交叉一个粒子的 Feynman 图如**右下图**所示，**灰色圆形**象征一些 Feynman 图结构
- **图 (a)** 中有一个**正粒子** Φ 进入顶点
- **图 (b)** 相应地替换成一个**反粒子** $\bar{\Phi}$ 离开顶点，两幅图其余部分完全相同
- 由于**顶点处能动量守恒**，**图 (a)** 中四维动量满足 $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$
- **图 (b)** 则满足 $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$

(a) 正粒子 Φ 入射 **(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 入射**

玻色子的交叉对称性

只要 $k^\mu = -p^\mu$，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots)$ 成立

(a) 正粒子 Φ 入射　(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 入射

玻色子的交叉对称性

只要 $k^\mu = -p^\mu$，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

(a) 正粒子 Φ 入射　(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 入射

如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p)+\cdots\to\cdots)=\mathcal{M}(\cdots\to\bar{\Phi}(k)+\cdots)$ 成立

如果 Φ 是正矢量玻色子，则 $\Phi(p)$ 的外线因子为极化矢量 $\varepsilon_\mu(p,\lambda)$：

$$\varepsilon^\mu(p,0)=\frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\ p^0p^1\\ p^0p^2\\ p^0p^3\end{pmatrix},\quad \varepsilon^\mu(p,\pm)=\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix}0\\ \mp p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\ \mp p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\ |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\end{pmatrix}$$

可见，$\varepsilon_\mu(-p,\lambda)=\varepsilon^*_\mu(p,\lambda)$ 对 $\lambda=0,\pm$ 成立

因此，当 $k^\mu=-p^\mu$ 时，有 $\varepsilon_\mu(p,\lambda)=\varepsilon_\mu(-k,\lambda)=\varepsilon^*_\mu(k,\lambda)$，这恰好是 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子，故 $\mathcal{M}(\Phi(p)+\cdots\to\cdots)=\mathcal{M}(\cdots\to\bar{\Phi}(k)+\cdots)$ 成立

费米子的交叉对称性

- 如果 Φ 是 **Dirac 正费米子**，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$
- 在计算自旋求和时**将 p 替换成 $-k$**，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

- 因而两个过程的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 相差一个**整体负号**
- 可见，**交叉一个费米子**时，除了作**动量替换** $p^\mu \to -k^\mu$ ，还需要**去除一个整体负号**才能得到正确的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$

费米子的交叉对称性

- 如果 Φ 是 **Dirac 正费米子**，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$
- 在计算自旋求和时**将 p 替换成 $-k$**，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

- 因而两个过程的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 相差一个**整体负号**
- 可见，**交叉一个费米子**时，除了作**动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$**，还需要**去除一个整体负号**才能得到正确的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$
- 将 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 时，**交叉了两个费米子**，产生了**两个整体负号**，它们正好**相互抵消**
- 交叉一个费米子时，如果想让交叉对称性**在振幅层面上成立**，则需要**对 $v(p,\lambda)$ 采取特殊的定义**，而 $u(p,\lambda)$ 可保持**原先的定义**

$$u(p,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$v(p,\lambda)$ 的特殊定义

由**螺旋态本征值方程** $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p})=\lambda\,\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p})=\lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$，故

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p})=-\lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即 $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是**螺旋度为** $-\lambda$ 的本征态，从而可以将 $v(p,\lambda)$ **的定义**取为

$$v(p,\lambda)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sqrt{p^0+\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})\\ -\mathrm{i}\sqrt{p^0-\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})\end{pmatrix}$$

$v(p,\lambda)$ 的特殊定义

由**螺旋态本征值方程** $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p})=\lambda\,\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p})=\lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$，故

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p})=-\lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即 $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是**螺旋度为** $-\lambda$ 的本征态，从而可以将 $v(p,\lambda)$ **的定义**取为

$$v(p,\lambda)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sqrt{p^0+\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})\\ -\mathrm{i}\sqrt{p^0-\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})\end{pmatrix}$$

$$v(p,\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})\\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix},\ \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})=\mathrm{i}\sqrt{p^0+\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}),\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p})=-\mathrm{i}\sqrt{p^0-\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

利用 $m=\sqrt{(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2}=\sqrt{(p^0+\lambda|\mathbf{p}|)(p^0-\lambda|\mathbf{p}|)}$，推出

$$\begin{aligned}-\frac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})&=-\frac{\mathrm{i}}{m}\sqrt{p^0+\lambda|\mathbf{p}|}\,(p^0+\mathbf{p}\cdot\sigma)\xi_\lambda(-\mathbf{p})\\&=-\frac{\mathrm{i}}{m}\sqrt{p^0+\lambda|\mathbf{p}|}\,(p^0-\lambda|\mathbf{p}|)\xi_\lambda(-\mathbf{p})=-\mathrm{i}\sqrt{p^0-\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})=\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p})\end{aligned}$$

因此，这样定义的 $v(p,\lambda)$ 满足**运动方程** $(\not{p}+m)v(p,\lambda)=0$

振幅的费米子交叉对称性

☕ 也可以验证这样定义的 $v(p,\lambda)$ 满足**正交归一关系**和**自旋求和关系**

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda) = \not{p} - m$$

振幅的费米子交叉对称性

☕ 也可以验证这样定义的 $v(p,\lambda)$ 满足**正交归一关系**和**自旋求和关系**

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda) = \not{p} - m$$

📎 如此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，可以推出

$$u(p,\lambda) = u(-k,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{k^0 + \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{k^0 - \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = v(k,\lambda)$$

📎 即 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的**外线因子相等**

🛡️ 故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots)$ 成立

📌 注意，**平方根**函数是**多值函数**，在上式推导过程中，利用 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$ 对两个平方根函数采用了**不同**的取值方式

Mandelstam 变量

现在定义一些便于应用**交叉关系**的物理量

对于 $2 \to 2$ **散射**，按照**右图**表示的四维动量，定义三个 **Lorentz 不变**的 **Mandelstam 变量**：

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$t \equiv (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2$$

第二步均用到**能动量守恒关系** $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

记这些四维动量对应的**质量**为 m_1、m_2、m_1'、m_2'，

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m_1'^2, \quad p_2^2 = m_2'^2$$

Stanley Mandelstam
(1928–2016)

Mandelstam 变量性质

四维动量的内积可以用 **Mandelstam 变量**和质量表示为

$$k_1\cdot k_2=\frac{1}{2}(s-k_1^2-k_2^2)=\frac{1}{2}(s-m_1^2-m_2^2),\qquad p_1\cdot p_2=\frac{1}{2}(s-m_1'^2-m_2'^2)$$

$$k_1\cdot p_1=-\frac{1}{2}(t-k_1^2-p_1^2)=-\frac{1}{2}(t-m_1^2-m_1'^2),\qquad k_2\cdot p_2=-\frac{1}{2}(t-m_2^2-m_2'^2)$$

$$k_1\cdot p_2=-\frac{1}{2}(u-k_1^2-p_2^2)=-\frac{1}{2}(u-m_1^2-m_2'^2),\qquad k_2\cdot p_1=-\frac{1}{2}(u-m_2^2-m_1'^2)$$

进一步推出

$$\begin{aligned}s+t+u &= (k_1+k_2)^2+(k_1-p_1)^2+(k_1-p_2)^2\\ &= 3k_1^2+k_2^2+p_1^2+p_2^2+2\,k_1\cdot(k_2-p_1-p_2)\\ &= 3k_1^2+k_2^2+p_1^2+p_2^2-2k_1^2=k_1^2+k_2^2+p_1^2+p_2^2\\ &= m_1^2+m_2^2+m_1'^2+m_2'^2\end{aligned}$$

即 **Mandelstam 变量之和**是初末态粒子**质量平方和**

Mandelstam 变量的进一步说明

- $t=(k_1-p_1)^2$ 和 $u=(k_1-p_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义
- 实际应用通常用初末态中两个**性质相近**的粒子定义 t
- 比如，对于 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 散射过程，通常用**初态电子动量** k_1' 与**末态电子动量** p_1' 定义 $t=(k_1'-p_1')^2$，从而虚光子动量满足 $q'^2=t$

Mandelstam 变量的进一步说明

- $t=(k_1-p_1)^2$ 和 $u=(k_1-p_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义
- 实际应用通常用初末态中两个**性质相近**的粒子定义 t
- 比如，对于 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 散射过程，通常用**初态电子动量** k_1' 与**末态电子动量** p_1' 定义 $t=(k_1'-p_1')^2$，从而虚光子动量满足 $q'^2=t$
- 在**质心系**中，$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{0}$，有 $s=(k_1^0+k_2^0)^2=E_{\mathrm{CM}}^2$
- 故 $\sqrt{s}=E_{\mathrm{CM}}$ 就是**质心能**
- 对于**任意 $2\to n$ 散射过程**，将 s 定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，

$$s=(k_1+k_2)^2=\left(\sum_i p_i\right)^2$$

- 于是，$\sqrt{s}$ 就是这个 $2\to n$ 过程的**质心能**

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

- 可以用 **Mandelstam 变量表达**任意 $2 \to 2$ 散射过程的非极化振幅模方
- 对于 7.2 节的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程，**非极化振幅模方**可化为

$$
\begin{aligned}
&\overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)|^2} \\
&= \frac{8e^4}{s^2}\left[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + (k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) + m_\mu^2(k_1\cdot k_2) + m_e^2(p_1\cdot p_2) + 2m_e^2m_\mu^2\right] \\
&= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{1}{4}(t-m_e^2-m_\mu^2)^2 + \frac{1}{4}(u-m_e^2-m_\mu^2)^2 + \frac{1}{2}m_\mu^2(s-2m_e^2) + \frac{1}{2}m_e^2(s-2m_\mu^2)\right. \\
&\qquad \left. + 2m_e^2m_\mu^2\right] \\
&= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{t^2+u^2}{4} - \frac{t+u}{2}(m_e^2+m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2+m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)\right]
\end{aligned}
$$

- 由 $s+t+u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$ 得 $t+u = 2(m_e^2+m_\mu^2) - s$，故

$$
\begin{aligned}
&\overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)|^2} \\
&= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{t^2+u^2}{4} - \frac{2(m_e^2+m_\mu^2)-s}{2}(m_e^2+m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2+m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)\right] \\
&= \frac{2e^4}{s^2}\left[t^2 + u^2 + 4s(m_e^2+m_\mu^2) - 2(m_e^2+m_\mu^2)^2\right]
\end{aligned}
$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

- 现在将 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ **交叉**成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$
- 根据**动量替换规则** $k_1^\mu \to k_1'^\mu$，$k_2^\mu \to -p_1'^\mu$，$p_1^\mu \to p_2'^\mu$，$p_2^\mu \to -k_2'^\mu$，有

$$(k_1+k_2)^2 \to (k_1'-p_1')^2, \quad (k_1-p_1)^2 \to (k_1'-p_2')^2, \quad (k_1-p_2)^2 \to (k_1'+k_2')^2$$

- 即 **Mandelstam 变量的替换规则**为

$$s \to t, \quad t \to u, \quad u \to s$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

- 现在将 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ **交叉**成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$
- 根据**动量替换规则** $k_1^\mu \to k_1'^\mu$，$k_2^\mu \to -p_1'^\mu$，$p_1^\mu \to p_2'^\mu$，$p_2^\mu \to -k_2'^\mu$，有

$$(k_1+k_2)^2 \to (k_1'-p_1')^2, \quad (k_1-p_1)^2 \to (k_1'-p_2')^2, \quad (k_1-p_2)^2 \to (k_1'+k_2')^2$$

- 即 **Mandelstam 变量的替换规则**为

$$s \to t, \quad t \to u, \quad u \to s$$

- 可见，**交叉对称性**对应于**Mandelstam 变量的调换**
- 据此，从 $\overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)|^2} = \dfrac{2e^4}{s^2}\left[t^2+u^2+4s(m_e^2+m_\mu^2)-2(m_e^2+m_\mu^2)^2\right]$

直接得到 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^- \to e^-\mu^-)|^2} = \frac{2e^4}{t^2}\left[u^2+s^2+4t(m_e^2+m_\mu^2)-2(m_e^2+m_\mu^2)^2\right]$$

- 容易验证此结果与前面得到的 $\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^- \to e^-\mu^-)|^2} = \dfrac{8e^4}{(q'^2)^2}\left[(k_1'\cdot p_2')(p_1'\cdot k_2')\right.$

$\left.+(k_1'\cdot k_2')(p_1'\cdot p_2')-m_e^2(p_2'\cdot k_2')-m_\mu^2(k_1'\cdot p_1')+2m_e^2m_\mu^2\right]$ **一致**

s、t 和 u 通道

- $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的**虚光子动量**满足 $q^2 = s$，交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程之后，虚光子动量满足 $q'^2 = t$
- 一般来说，当 $2 \to 2$ 散射过程的 Feynman 图**只包含一条内线**时，内线动量对应于一个 **Mandelstam 变量** s、t 或 u
- 相应地称这种图为 **s 通道** (channel)、**t 通道**或 **u 通道**的 Feynman 图
- $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 和 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ Feynman 图分别对应于 **s 通道**和 **t 通道**

三种通道的特点

以 **Yukawa 理论**为例，三种通道具有如下特点

s 通道：

$$\propto \frac{1}{(k_1+k_2)^2-m_\phi^2} = \frac{1}{s-m_\phi^2}$$

t 通道：

$$\propto \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m_\phi^2} = \frac{1}{t-m_\phi^2}$$

u 通道：

$$\propto \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2} = \frac{1}{u-m_\phi^2}$$

Bhabha 散射和 Møller 散射

- 一个散射过程可以包含**多个通道**的 Feynman 图
- **Bhabha 散射** $e^+e^- \to e^+e^-$ 具有 1 个 s **通道**和 1 个 t **通道**领头阶 Feynman 图

- **Møller 散射** $e^-e^- \to e^-e^-$ 具有 1 个 t **通道**和 1 个 u **通道**领头阶 Feynman 图

Mandelstam 变量与散射角的关系

在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是 m

动量如右图所示，则有

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\rm CM}}{2} = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}} \equiv Q$$

从而得到

$$t = (k_1 - p_1)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_1^0 + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = -2Q^2(1-\cos\theta)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_2^0 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = -2Q^2(1+\cos\theta)$$

于是，$\theta \to 0$ 时 $t \to 0$，$\theta \to \pi$ 时 $u \to 0$，而 $s = E_{\rm CM}^2$ 与散射角 θ 无关

三种通道的传播子对散射角 θ 的依赖截然不同