

数学物理方法

第十三章 Green 函数法

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 12 月 16 日

第十三章 Green 函数法

前面几章研究**数学物理方程定解问题**的求解

主要介绍了**分离变量法**和 **Fourier 变换法**

 **Fourier 变换法**的精神也是**分离变量法**，只是形式上不甚明显

 本章研究求解数理方程定解问题的 **Green 函数法**

 这是一种新的解法

 它的思路是先求出与**点源**对应的解，即 **Green 函数**

 然后将原来定解问题的解表示为包含 **Green 函数**和
定解条件的积分



George Green
(1793–1841)



§1 Green 函数的一般概念

线性偏微分方程可以统一写成以下形式

$$\mathcal{L} u = f$$

其中 u 是未知函数，即要研究的物理量， f 是已知函数， \mathcal{L} 是线性微分算符

从数学上说，上式可以涉及任意的有限个自变量

对于常见物理问题，自变量是三维空间变量 r 和时间变量 t （稳定场方程不含 t ）

因此， $u = u(r, t)$ ， $f = f(r, t)$ ， $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(r, t; \nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)$

具体来说，熟悉的几类方程所对应的算符如下

波动方程： $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2$ Poisson 方程： $\mathcal{L} = -\nabla^2$

输运方程： $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \nabla^2$ Helmholtz 方程： $\mathcal{L} = -(\nabla^2 + k^2)$

Green 函数

首先考虑不含时的稳定场方程，有 $L = L(r, \nabla)$

这包含 Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程

由 r_0 处的点源 $f(r) = \delta(r - r_0)$ 所产生的场称为 **Green 函数**, 记作 $G(r, r_0)$

也就是说, Green 函数满足方程 $LG(r, r_0) = \delta(r - r_0)$

因此，Green 函数又称为点源影响函数，无界空间的 Green 函数又称为基本解

对于有界空间, Green 函数除满足上述方程之外还要满足一定的边界条件

Green 函数

 首先考虑不含时的稳定场方程，有 $L = L(r, \nabla)$

这包含 Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程

由 r_0 处的点源 $f(r) = \delta(r - r_0)$ 所产生的场称为 **Green 函数**, 记作 $G(r, r_0)$

也就是说, Green 函数满足方程 $LG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

因此, Green 函数又称为点源影响函数, 无界空间的 Green 函数又称为基本解

对于有界空间, Green 函数除满足上述方程之外还要满足一定的边界条件

就无界空间来说，如果能求出 Green 函数，则方程 $Lu(r) = f(r)$ 的解可以表为

$$u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$$

注意到 L 只对 r 作用，不对 r_0 作用，就有

 δ 函数定义二

$$Lu(\mathbf{r}) = \int [LG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 = f(\mathbf{r})$$

物理意义

 解式 $u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 的物理意义如下



 $G(r, r_0)$ 是 r_0 处的单位点源(比如单位点电荷)产生的场

乘以 $f(r_0) dr_0$ 就是 r_0 处大小 (比如电量) 为 $f(r_0) dr_0$ 的点源产生的场

再对 r_0 积分就是把所有源产生的场叠加，如此即得总场 $u(r)$



物理意义

 解式 $u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 的物理意义如下



 $G(r, r_0)$ 是 r_0 处的单位点源 (比如单位点电荷) 产生的场

乘以 $f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 就是 \mathbf{r}_0 处大小 (比如电量) 为 $f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 的点源产生的场

再对 r_0 积分就是把所有源产生的场叠加，如此即得总场 $u(r)$

例 考虑 Poisson 方程 $\nabla^2 u(r) = -f(r)$ ，其微分算符为 $L = -\nabla^2$

相应的 Green 函数满足 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

规定 $r \rightarrow \infty$ 时 $G(r, r_0) \rightarrow 0$ ，可得 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ (证明见下节)

于是，解表达为 $u(\mathbf{r}) = \int \frac{f(\mathbf{r}_0)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{r}_0$



物理意义

 解式 $u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 的物理意义如下



 $G(r, r_0)$ 是 r_0 处的单位点源 (比如单位点电荷) 产生的场

乘以 $f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 就是 \mathbf{r}_0 处大小 (比如电量) 为 $f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 的点源产生的场

再对 r_0 积分就是把所有源产生的场叠加，如此即得总场 $u(r)$

例 考虑 Poisson 方程 $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$ ，其微分算符为 $L = -\nabla^2$

相应的 Green 函数满足 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

规定 $r \rightarrow \infty$ 时 $G(r, r_0) \rightarrow 0$ ，可得 $G(r, r_0) = \frac{1}{4\pi|r - r_0|}$ (证明见下节)

于是, 解表达为 $u(\mathbf{r}) = \int \frac{f(\mathbf{r}_0)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{r}_0$

特别地，如果 $f(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$ ，其中 $\rho(r)$ 是自由电荷密度， ϵ_0 是真空介电常数

则 $u(r) = \int \frac{\rho(r_0)}{4\pi\epsilon_0|r - r_0|} dr_0$ 是真空中的静电势



含时的情况

 对于含时的方程，如波动方程和输运方程，有 $L = L(r, t; \nabla, \frac{\partial}{\partial t})$

此时可以定义 **Green 函数** $G(r, t; r_0, t_0)$ 满足方程

$$LG(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0)$$

 上式右边的 δ 函数不仅是空间上的点源，也是时间上的瞬时源

含时的 Green 函数通常还要满足一定的初始条件

 如果空间是有界的，则还要满足适当的边界条件



含时的情况

对于含时的方程，如波动方程和输运方程，有 $L = L\left(\mathbf{r}, t; \nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)$

此时可以定义 Green 函数 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$ 满足方程

$$LG(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0)$$

上式右边的 δ 函数不仅是空间上的点源，也是时间上的瞬时源

含时的 Green 函数通常还要满足一定的初始条件

如果空间是有界的，则还要满足适当的边界条件

含时的问题通常要复杂得多

即使对于无界空间，方程 $Lu(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)$ 的解也不能简单地表达为

$$u(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) f(\mathbf{r}_0, t_0) d\mathbf{r}_0 dt_0$$

因为初始条件尚未考虑在内

实际上，如果没有给定适当的初始条件，Green 函数本身也没有确切的定义



§2 稳定场方程的 Green 函数法

§2.1 Poisson 方程的基本解

■ Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程都是不含时的稳定场方程

■ 这里主要研究 Possion 方程, 而 Helmholtz 方程可用类似方法加以研究

■ 考虑无界空间的 Possion 方程 $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$

■ 它的 Green 函数, 即基本解 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 满足 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

§2 稳定场方程的 Green 函数法

§2.1 Poisson 方程的基本解

 **Posson 方程** (包括 **Laplace 方程**) 和 **Helmholtz 方程**都是不含时的**稳定场方程**

这里主要研究 Possion 方程，而 Helmholtz 方程可用类似方法加以研究

考虑无界空间的 Possion 方程 $\nabla^2 u(r) = -f(r)$

它的 Green 函数，即基本解 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 满足 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

※ 在三维情况下，规定 $r \rightarrow \infty$ 时 $G(r, r_0) \rightarrow 0$ ，则

$$\text{三维基本解 } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

证明 需要证明的是 $-\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 符合 δ 函数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 的**定义一**，即

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = 1$$



三维基本解的证明

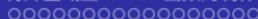
令 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $R = |\mathbf{R}|$, 则 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R}$

记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{R} = (X, Y, Z) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

有 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial(x - x_0)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}$, 同理 $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z}$

故 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{\partial u}{\partial X} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial Y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial Z} \mathbf{e}_z = \nabla_{\mathbf{R}} u$

其中 $\nabla_{\mathbf{R}}$ 是对 \mathbf{R} 求导的梯度算符, 故 $\nabla^2 = \nabla_{\mathbf{R}}^2$



三维基本解的证明

令 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $R = |\mathbf{R}|$, 则 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R}$

记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{R} = (X, Y, Z) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

有 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial(x - x_0)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}$, 同理 $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z}$

故 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{\partial u}{\partial X} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial Y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial Z} \mathbf{e}_z = \nabla_{\mathbf{R}} u$

其中 $\nabla_{\mathbf{R}}$ 是对 \mathbf{R} 求导的梯度算符, 故 $\nabla^2 = \nabla_{\mathbf{R}}^2$

根据球坐标系中 Laplace 算符的形式

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

当 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, 即 $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ 时, 有

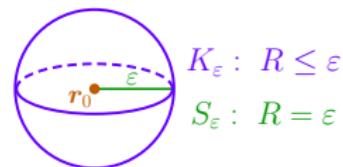
$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \nabla_{\mathbf{R}}^2 \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d}{dR} \frac{1}{4\pi R} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \left(-\frac{1}{4\pi R^2} \right) \right] = 0$$

完成证明

但是，当 $r = r_0$ ，即 $R = 0$ 时，Green 函数有奇性，

而且该点是球坐标系的奇点，上述计算不成立

考虑以 r_0 为球心、 ε 为半径的球 K_ε ，其表面记作 S_ε ，则



$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \int_{K_\varepsilon} \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{4\pi R} d\mathbf{R} = \int_{S_\varepsilon} \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{4\pi R} \cdot d\sigma$$

其中第二步用到 **Gauss 定理**，而 $d\sigma = d\sigma e_R$ ， $d\sigma$ 是面积元的大小

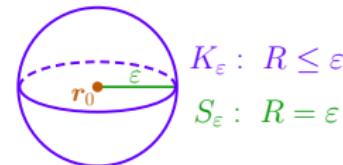


完成证明

但是，当 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ，即 $\mathbf{R} = 0$ 时，Green 函数有奇性，

而且该点是球坐标系的奇点，上述计算不成立

考虑以 \mathbf{r}_0 为球心、 ε 为半径的球 K_ε ，其表面记作 S_ε ，则



$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \int_{K_\varepsilon} \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{4\pi R} d\mathbf{R} = \int_{S_\varepsilon} \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{4\pi R} \cdot d\sigma$$

其中第二步用到 Gauss 定理，而 $d\sigma = d\sigma e_R$ ， $d\sigma$ 是面积元的大小

由 $\nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{4\pi R} = \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{4\pi R} \right) e_R = -\frac{1}{4\pi R^2} e_R$ 得

$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = - \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} d\sigma = -\frac{4\pi \varepsilon^2}{4\pi \varepsilon^2} = -1$$

这表明 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 与 $-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 处的奇性一致

于是， $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 在 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 处都成立

证毕

说明和讨论

在上述证明中，利用 Gauss 定理将球内的体积分转化为球面上的面积分

按照 **Gauss 定理** 成立的条件，必须要求 $G(r, r_0)$ 在球内具有连续的二阶偏导数

 但 $G(r, r_0)$ 在球心处有奇性，并不满足这一条件

所以上述证明是不严格的



比较严格的论证见**选读内容**



里面用经典函数序列 δ_ε 代替 δ 函数进行推导，最后再取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限。



说明和讨论

- ⌚ 在上述证明中，利用 **Gauss 定理** 将球内的**体积分**转化为球面上的**面积分**
- ⌚ 按照 **Gauss 定理** 成立的条件，必须要求 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 在**球内**具有连续的二阶偏导数
- ⌚ 但 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 在**球心**处有**奇性**，**并不满足**这一条件
- ⌚ 所以**上述证明是不严格的**
- 🛒 比较严格的论证见**选读内容**
- 🕒 里面用**经典函数序列** δ_ε 代替 δ 函数进行推导，最后再取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限

- ⌚ 考虑**三维空间**中的**静电场**问题，在 \mathbf{r}_0 处有一个**点电荷** Q
 - ⌚ 那么，它产生的**电势** $u(\mathbf{r})$ 满足的方程为 $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$
 - ⌚ 与 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 比较，即得 $u(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$
 - ⌚ 可见，**三维基本解** $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ 相当于 $Q = \epsilon_0$ 的**点电荷**引起的**电势**



二维基本解



基本解的形式与空间的维数有关



在二维无界空间，把位置矢量记作 ρ ，以示与三维空间的区别



相应地，Green 函数 $G(\rho, \rho_0)$ 满足的方程为 $\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0)$ ，则

$$\text{二维基本解 } G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho_0| + \text{常数}$$



二维基本解



基本解的形式与**空间的维数**有关



在**二维无界空间**，把**位置矢量**记作 ρ ，以示与**三维空间**的区别



相应地，**Green 函数** $G(\rho, \rho_0)$ 满足的方程为 $\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0)$ ，则

$$\text{二维基本解 } G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho_0| + \text{常数}$$



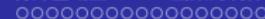
二维基本解在 $\rho \rightarrow \infty$ 处发散，因此不能取 $\rho \rightarrow \infty$ 为 $G(\rho, \rho_0)$ 的零点



上式也可以写作 $G(\rho, \rho_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\rho - \rho_0|} + \text{常数}$



这个形式与**三维基本解** $G(r, r_0) = \frac{1}{4\pi|r - r_0|}$ 类似，可以帮助记忆



二维基本解



基本解的形式与**空间的维数**有关

Ⓐ 在**二维无界空间**，把**位置矢量**记作 ρ ，以示与**三维空间**的区别

Ⓑ 相应地，**Green 函数** $G(\rho, \rho_0)$ 满足的方程为 $\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0)$ ，则

$$\text{二维基本解 } G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho_0| + \text{常数}$$

Ⓑ **二维基本解**在 $\rho \rightarrow \infty$ 处发散，因此不能取 $\rho \rightarrow \infty$ 为 $G(\rho, \rho_0)$ 的零点

Ⓒ 上式也可以写作 $G(\rho, \rho_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\rho - \rho_0|} + \text{常数}$

Ⓓ 这个形式与**三维基本解** $G(r, r_0) = \frac{1}{4\pi|r - r_0|}$ 类似，可以帮助记忆

⓫ **证明** 令 $R = \rho - \rho_0$ ， $R = |\mathbf{R}|$ ，取常数为零，则 $G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln R$

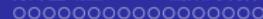
⓬ 类似于**三维**情况，有 $\nabla = \nabla_{\mathbf{R}}$ 和 $\nabla^2 = \nabla_{\mathbf{R}}^2$

二维基本解的证明

 根据极坐标系中 Laplace 算符的形式 $\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$

 当 $\rho \neq \rho_0$ ，即 $R \neq 0$ 时，有

$$\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \nabla_R^2 \ln R = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} \ln R \right) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{1}{R} \right) = 0$$



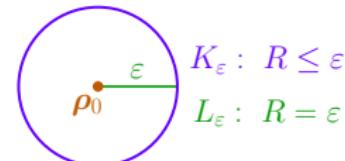
二维基本解的证明

蜡烛图标 根据极坐标系中 Laplace 算符的形式 $\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$

心形图标 当 $\rho \neq \rho_0$, 即 $R \neq 0$ 时, 有

$$\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \nabla_R^2 \ln R = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} \ln R \right) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{1}{R} \right) = 0$$

魔杖图标 但是, 当 $\rho = \rho_0$, 即 $R = 0$ 时, Green 函数有奇性,
而且该点是极坐标系的奇点, 上述计算不成立



魔杖图标 考虑以 ρ_0 为圆心、 ε 为半径的圆面 K_ε , 圆周记作 L_ε , 则

$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) d\rho = \int_{K_\varepsilon} \nabla_R \cdot \nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) dR = \int_{L_\varepsilon} \nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot ds$$

南瓜图标 其中第二步用到二维空间中的 Gauss 定理 (其实就是 Green 公式)

圣诞树图标 这里 $ds = ds e_R$, ds 是弧元, e_R 是圆周的外法向单位矢量



二维点电荷

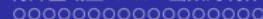
由 $\nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot d\mathbf{s} = \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dR} \ln R e_R \right) \cdot (ds e_R) = -\frac{1}{2\pi R} ds$ 得

$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) d\rho = \int_{L_\varepsilon} \nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{L_\varepsilon} \frac{1}{2\pi \varepsilon} ds = -\frac{2\pi \varepsilon}{2\pi \varepsilon} = -1$$

这表明 $\nabla^2 G(\rho, \rho_0)$ 与 $-\delta(\rho - \rho_0)$ 在 $\rho = \rho_0$ 处的奇性一致

于是, $\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0)$ 在 $\rho \neq \rho_0$ 和 $\rho = \rho_0$ 处都成立

证毕



二维点电荷

由 $\nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot d\mathbf{s} = \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dR} \ln R e_R \right) \cdot (ds e_R) = -\frac{1}{2\pi R} ds$ 得

$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) d\rho = \int_{L_\varepsilon} \nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{L_\varepsilon} \frac{1}{2\pi \varepsilon} ds = -\frac{2\pi \varepsilon}{2\pi \varepsilon} = -1$$

这表明 $\nabla^2 G(\rho, \rho_0)$ 与 $-\delta(\rho - \rho_0)$ 在 $\rho = \rho_0$ 处的奇性一致

于是, $\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0)$ 在 $\rho \neq \rho_0$ 和 $\rho = \rho_0$ 处都成立

证毕

二维空间中的点电荷 Q 产生的电势 $u(\rho)$ 满足 $\nabla^2 u(\rho) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\rho - \rho_0)$

因此 $u(\rho) = \frac{Q}{\epsilon_0} G(\rho, \rho_0)$, 故二维基本解相当于 $Q = \epsilon_0$ 时的电势



二维点电荷

由 $\nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot d\mathbf{s} = \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dR} \ln R e_R \right) \cdot (ds e_R) = -\frac{1}{2\pi R} ds$ 得

$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) d\rho = \int_{L_\varepsilon} \nabla_R \left(-\frac{1}{2\pi} \ln R \right) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{L_\varepsilon} \frac{1}{2\pi \varepsilon} ds = -\frac{2\pi \varepsilon}{2\pi \varepsilon} = -1$$

这表明 $\nabla^2 G(\rho, \rho_0)$ 与 $-\delta(\rho - \rho_0)$ 在 $\rho = \rho_0$ 处的奇性一致

于是, $\nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0)$ 在 $\rho \neq \rho_0$ 和 $\rho = \rho_0$ 处都成立

证毕

二维空间中的点电荷 Q 产生的电势 $u(\rho)$ 满足 $\nabla^2 u(\rho) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\rho - \rho_0)$

因此 $u(\rho) = \frac{Q}{\epsilon_0} G(\rho, \rho_0)$, 故二维基本解相当于 $Q = \epsilon_0$ 时的电势

容易看出, 二维基本解 $G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho_0| + \text{常数}$ 在 $\rho = \rho_0$ 处的奇性

弱于三维基本解 $G(r, r_0) = \frac{1}{4\pi |r - r_0|}$ 在 $r = r_0$ 处的奇性

可以证明, 一维空间基本解的奇性更弱



§2.2 第二 Green 公式

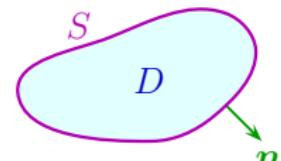
设 $u(\mathbf{r})$ 和 $v(\mathbf{r})$ 在区域 D 上具有连续的二阶偏导数，在闭域 \bar{D} 上具有连续的一阶偏导数， $S = \partial D$ 是 D 的边界面， n 是 S 的外法向单位矢量

将 $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v$ 与 $\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u$ 相减

得 $u \nabla^2 v - v \nabla^2 u = \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u)$

在区域 D 上积分，利用 Gauss 定理，推出

$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\mathbf{r} = \int_D \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) d\mathbf{r} = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma$$





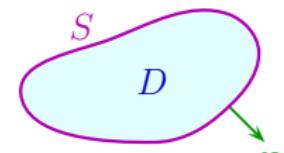
§2.2 第二 Green 公式

设 $u(\mathbf{r})$ 和 $v(\mathbf{r})$ 在区域 D 上具有连续的二阶偏导数，在闭域 \bar{D} 上具有连续的一阶偏导数， $S = \partial D$ 是 D 的边界面， \mathbf{n} 是 S 的外法向单位矢量

将 $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v$ 与 $\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u$ 相减

得 $u \nabla^2 v - v \nabla^2 u = \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u)$

在区域 D 上积分，利用 Gauss 定理，推出



$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\mathbf{r} = \int_D \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) d\mathbf{r} = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma$$

由 $d\sigma = d\sigma \mathbf{n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$ 得 $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = (\nabla v \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \nabla v \cdot d\sigma$ ，于是

$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\mathbf{r} = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma$$

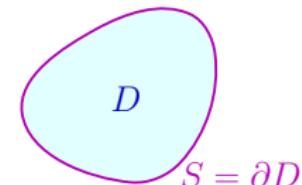
这称为第二 Green 公式，以上是它在三维空间中的形式，它对二维空间也成立



§2.3 Poisson 方程第一边值问题

考虑有界区域 D 上的 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D \\ u(\mathbf{r})|_{\mathcal{S}} = \varphi(\mathbf{r}) \end{cases}$$



前面在无界空间中曾用基本解和 $f(\mathbf{r})$ 表达出一般解 $u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$

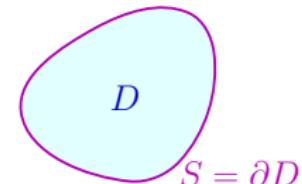
现在，由于边界条件的限制，这样的—般解不再成立

为了得到类似的结果，需要修改 Green 函数的定义

§2.3 Poisson 方程第一边值问题

考虑有界区域 D 上的 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D \\ u(\mathbf{r})|_S = \varphi(\mathbf{r}) \end{cases}$$



前面在无界空间中曾用基本解和 $f(r)$ 表达出一般解 $u(r) = \int G(r, r_0) f(r_0) dr_0$

 现在，由于**边界条件**的限制，这样的一般解**不再成立**

 为了得到类似的结果，需要修改 Green 函数的定义

 假设 Green 函数仍满足方程 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ，结合 Poisson 方程，有

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \nabla^2 u(\mathbf{r}) = -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -u(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

 两式相减, 得 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})$

从而 $u(\mathbf{r}_0) = \int_D u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}$

$$= \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \int_D [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \, d\mathbf{r}$$

Green 函数的定解问题

 利用第二 Green 公式，得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_0) &= \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_D [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] d\mathbf{r} \\ &= \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] d\sigma \end{aligned}$$

 这似乎给出了问题的解，但它要求已知**边界**上的 u 值和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 值

 而**边界条件** $u(\mathbf{r})|_S = \varphi(\mathbf{r})$ 只给出**前者**，所以上式**不是**最后的解



Green 函数的定解问题

利用第二 Green 公式，得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_0) &= \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_D [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] d\mathbf{r} \\ &= \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] d\sigma \end{aligned}$$

这似乎给出了问题的解，但它要求已知**边界**上的 u 值和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 值

而**边界条件** $u(\mathbf{r})|_S = \varphi(\mathbf{r})$ 只给出**前者**，所以上式**不是**最后的解

不难看出，只要在 **Green 函数的定义**中加上适当的**边界条件**，就能解决这一困难

对于这里的 **Poisson 方程第一边值问题**，**定义**相应的 **Green 函数**满足**定解问题**

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in D \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \end{cases}$$

从而**原定解问题的解**表达为 $u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$



关于解式的讨论

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$$

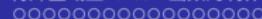
只要能求出 **Green 函数** $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, 原定解问题的解就可以通过以上积分表出

因此问题归结为求解 **Green 函数**, 由于**边界条件**的限制, 它不再是**基本解**

现在, **Green 函数**满足的定解问题是一个**特殊的 Poisson 方程定解问题**

一般来说, **这个问题并不一定比原定解问题容易求解**

但对于某些**特殊的区域**, 存在求解 Green 函数的**特殊技巧**, 即下节介绍的**镜像法**



关于解式的讨论

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$$

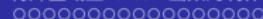
- 只要能求出 **Green 函数** $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, 原定解问题的解就可以通过以上积分表出
 因此问题归结为求解 **Green 函数**, 由于边界条件的限制, 它不再是基本解
- 现在, **Green 函数**满足的定解问题是一个特殊的 **Poisson 方程定解问题**
- 一般来说, 这个问题并不一定比原定解问题容易求解
- 但对于某些特殊的区域, 存在求解 Green 函数的特殊技巧, 即下节介绍的镜像法
- 前面无界空间中的一般解 $u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$ 表达为对源点 \mathbf{r}_0 积分
- 现在解 $u(\mathbf{r}_0)$ 表达为对场点 \mathbf{r} 积分, 即对 **Green 函数** $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 的第一变量积分
 这似乎使解式第一项 $\int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ 的物理诠释发生困难
- 但可以证明 (§2.5), **Green 函数**对源点和场点具有对称性, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$
 故 $\int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_D G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, 后者以 \mathbf{r} 为源点, 不再有困难

边界条件的验证

? 有同学可能会问，为什么要如此定义 Green 函数？

! 其实，Green 函数是一个辅助工具，其作用类似于证明几何问题时所作的辅助线

!! 如何作辅助线取决于怎样才有助于解决问题，Green 函数的定义也是如此



边界条件的验证

? 有同学可能会问, 为什么要如此定义 Green 函数?

! 其实, Green 函数是一个辅助工具, 其作用类似于证明几何问题时所作的辅助线

!! 如何作辅助线取决于怎样才有助于解决问题, Green 函数的定义也是如此

下面讨论边界条件 $u(\mathbf{r})|_S = \varphi(\mathbf{r})$ 的验证, 也就是当 \mathbf{r}_0 趋于边界点 ($\mathbf{r}_0 \rightarrow S$) 时,

验证解式 $u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$ 给出 $\varphi(\mathbf{r}_0)$

由于 Green 函数的对称性和边界条件, 有 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}_0 \rightarrow S} = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})|_{\mathbf{r}_0 \rightarrow S} = 0$

因此解式第一项 $\int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ 在 $\mathbf{r}_0 \rightarrow S$ 时为零



边界条件的验证

？有同学可能会问，为什么要如此定义 Green 函数？

！其实，Green 函数是一个辅助工具，其作用类似于证明几何问题时所作的辅助线

!! 如何作辅助线取决于怎样才有助于解决问题，Green 函数的定义也是如此

hog 下面讨论边界条件 $u(\mathbf{r})|_S = \varphi(\mathbf{r})$ 的验证，也就是当 \mathbf{r}_0 趋于边界点 ($\mathbf{r}_0 \rightarrow S$) 时，

验证解式 $u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$ 给出 $\varphi(\mathbf{r}_0)$

pig 由于 Green 函数的对称性和边界条件，有 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}_0 \rightarrow S} = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})|_{\mathbf{r}_0 \rightarrow S} = 0$

bear 因此解式第一项 $\int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ 在 $\mathbf{r}_0 \rightarrow S$ 时为零

squirrel 当 $\mathbf{r}_0 \rightarrow S$ 时，粗略看来，第二项中对边界面的积分必然包含 \mathbf{r}_0 附近的面积元

monkey 而 Green 函数在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 处有奇性，所以对积分的贡献主要来自 \mathbf{r}_0 附近的面积元

bear 这样就大致可以用 $\varphi(\mathbf{r}_0)$ 代替第二项积分中的 $\varphi(\mathbf{r})$ ，利用 Gauss 定理推出

$$u(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}_0 \rightarrow S} = -\varphi(\mathbf{r}_0) \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot d\sigma = -\varphi(\mathbf{r}_0) \int_D \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}$$



边界条件的满足

将 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ($\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in D$) 代入，得到期望的结果

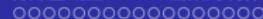
$$u(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}_0 \rightarrow s} = -\varphi(\mathbf{r}_0) \int_D \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_0) \int_D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_0)$$

注意， \mathbf{r}_0 虽然靠近**边界面**，但仍然在**区域** D 内

因此 δ 函数在**区域** D 上的**积分为 1**

这个讨论帮助我们理解为什么**边界条件**得以满足，但不能看作**严格的论证**

对于**具体问题**的结果，通常可以通过**具体计算加以验证**



Poisson 方程第二边值问题

考虑有界区域 D 上的 Poisson 方程第二边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D \\ \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{\mathcal{S}} = \psi(\mathbf{r}) \end{cases}$$

如果仿照第一边值问题的情况定义 Green 函数的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in D \\ \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \Big|_{\mathbf{r} \in \mathcal{S}} = 0 \end{cases}$$

则由 $u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{S}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] d\sigma$ 得

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{S}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}) d\sigma$$

这似乎得到了原定解问题的解，但它是有问题的

Green 函数不存在

实际上，由 **Gauss 定理** 得

$$\int_D \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot d\sigma = \int_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma = 0$$

另一方面，由 **Green 函数** 满足的方程得

$$\int_D \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = - \int_D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = -1 \neq 0$$

两者矛盾，表明满足定解问题 $\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \Big|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \end{cases}$ 的 Green 函数不存在



Green 函数不存在

实际上，由 **Gauss 定理** 得

$$\int_D \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot d\sigma = \int_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma = 0$$

另一方面，由 **Green 函数** 满足的方程得

$$\int_D \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = - \int_D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = -1 \neq 0$$

两者矛盾，表明满足定解问题 $\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \Big|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \end{cases}$ 的 Green 函数不存在

在物理上，可以把这个定解问题看作热传导问题

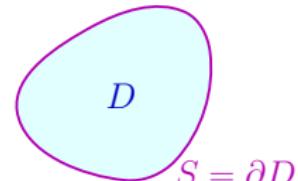
\mathbf{r}_0 处有热源，因而稳定时边界上必定有热流

但齐次的第二类边界条件意味着边界上绝热，相互矛盾，解不存在

§2.4 Laplace 方程第一边值问题

考虑有界区域 D 上的 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in D \\ u(\mathbf{r})|_{\partial D} = \varphi(\mathbf{r}) \end{cases}$$

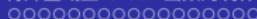


这只是 Possion 方程第一边值问题的一种特殊情况

相应的 Green 函数定解问题仍然由 $\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \end{cases}$ 给出

 对原来的解式取 $f(r) = 0$ ，就得到 Laplace 方程定解问题的解

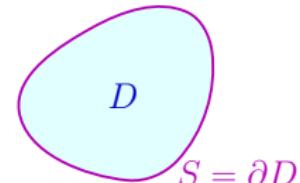
$$u(\mathbf{r}_0) = - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$$



§2.4 Laplace 方程第一边值问题

考虑有界区域 D 上的 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in D \\ u(\mathbf{r})|_{\mathcal{S}} = \varphi(\mathbf{r}) \end{cases}$$



这只是 Poisson 方程第一边值问题的一种特殊情况

相应的 Green 函数定解问题仍然由 $\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{\mathcal{S}} = 0 \end{cases}$ 给出

对原来的解式取 $f(\mathbf{r}) = 0$ ，就得到 Laplace 方程定解问题的解

$$u(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma$$

需要特别注意的是，尽管 Laplace 方程是无源的，但相应的 Green 函数定解问题仍然是有源的，否则由于 Green 函数的边界条件是齐次的，将会得到 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$

只要记得 Green 函数又称为点源影响函数，就可以避免在这个问题上出错



§3 特殊区域上 Green 函数的制作

👑 由上节讨论可知, Green 函数法的关键在于求解 Green 函数的定解问题

👸 前已指出, 求解它通常并不比求解一般的定解问题来得容易

👸 但对于一些特殊区域上的 Possion 方程(或 Laplace 方程)第一边值问题

🎀 存在求解 Green 函数的特殊技巧, 即镜像法

👗 本节讨论几个典型的例子

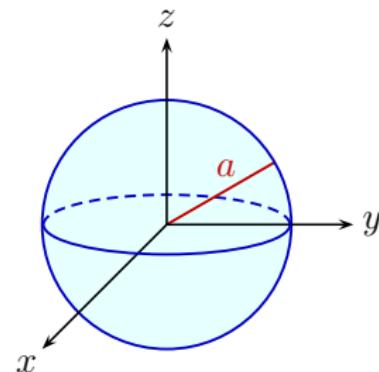
§3.1 球内 Laplace 方程第一边值问题

考虑球内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0, & r < a \\ u(\mathbf{r})|_{r=a} = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & r, r_0 < a \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{r=a} = 0 \end{cases}$$





§3.1 球内 Laplace 方程第一边值问题

考虑球内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0, & r < a \\ u(\mathbf{r})|_{r=a} = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

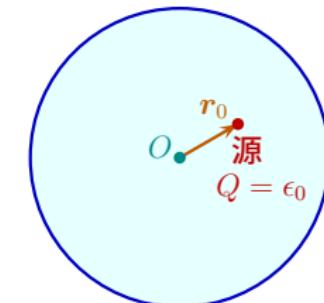
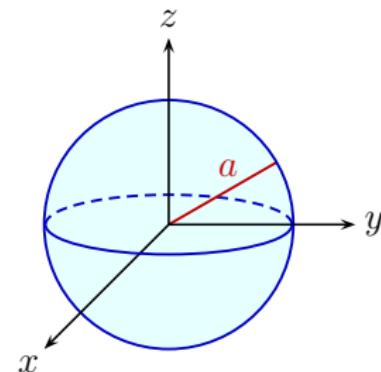
相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & r, r_0 < a \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

将它看作静电场问题，表述为：

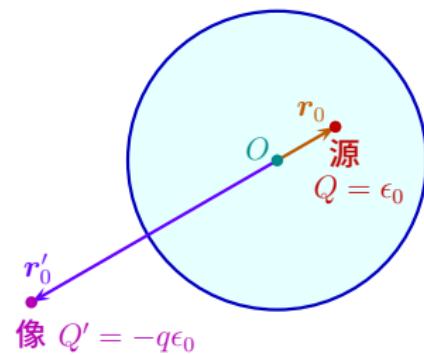
球内某点 \mathbf{r}_0 处有一个点电荷，电量为 $Q = \epsilon_0$ ，而球面上的电势为零，求解球内的电势分布

为了保持球面上的电势为零，则球外必须有某种电荷分布，以抵消 \mathbf{r}_0 处的点电荷在球面上产生的电势



镜像法

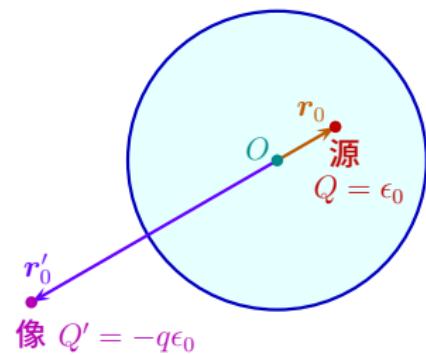
- 现在希望在球外某点 r'_0 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$ ，参数 q 有待确定
 - 从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零
 - 由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解





镜像法

- 球 现在希望在球外某点 r'_0 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$ ，参数 q 有待确定
- 奖杯 从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零
- 金牌 由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解
- 奖牌 ① 这种方法称为镜像法，在电动力学中称为电像法， r'_0 处放置的点电荷称为像电荷
- 奖牌 ② 对于某些区域，如果一个像电荷不能解决问题，可以考虑用多个像电荷
- 奖牌 ③ 镜像法是否可行，取决于区域的形状，通常它只对某些非常规则的区域才能奏效





镜像法

现在希望在球外某点 r'_0 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$ ，参数 q 有待确定

从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零

由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解

这种方法称为镜像法，在电动力学中称为电像法， r'_0 处放置的点电荷称为像电荷

对于某些区域，如果一个像电荷不能解决问题，可以考虑用多个像电荷

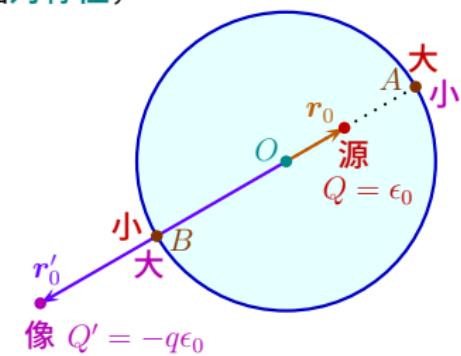
镜像法是否可行，取决于区域的形状，通常它只对某些非常规则的区域才能奏效

对于目前的问题，如果镜像法能够奏效，那么根据对称性，

像电荷的位置必定在通过球心 O 和点 r_0 的直线上

如果像电荷与源电荷在球心的两侧，那么源电荷的电势在 A 点较大，在 B 点较小

而像电荷的电势却在 A 点较小，在 B 点较大





镜像法

现在希望在球外某点 r'_0 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$ ，参数 q 有待确定

从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零

由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解

这种方法称为镜像法，在电动力学中称为电像法， r'_0 处放置的点电荷称为像电荷

对于某些区域，如果一个像电荷不能解决问题，可以考虑用多个像电荷

镜像法是否可行，取决于区域的形状，通常它只对某些非常规则的区域才能奏效

对于目前的问题，如果镜像法能够奏效，那么根据对称性，

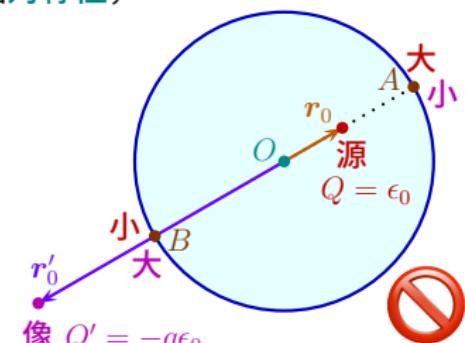
像电荷的位置必定在通过球心 O 和点 r_0 的直线上

如果像电荷与源电荷在球心的两侧，那么源电荷的电势在 A 点较大，在 B 点较小

而像电荷的电势却在 A 点较小，在 B 点较大

于是两者的电势在 A 、 B 两点不可能抵消

从而球面上的电势不能为零





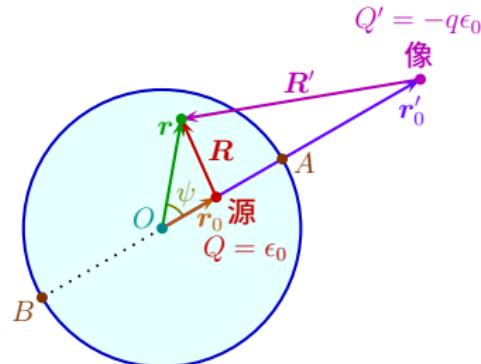
源电荷和像电荷产生的电势

因此，像电荷与源电荷必定在球心的同一侧

像电荷位置 r'_0 在经过 r_0 的半径 OA 的延长线上

所以 r'_0 与 r_0 具有相同的角向坐标

记 r_0 和 r'_0 的球坐标为 (r_0, θ_0, ϕ_0) 和 (r'_0, θ_0, ϕ_0)





源电荷和像电荷产生的电势

因此，像电荷与源电荷必定在球心的同一侧

像电荷位置 r'_0 在经过 r_0 的半径 OA 的延长线上

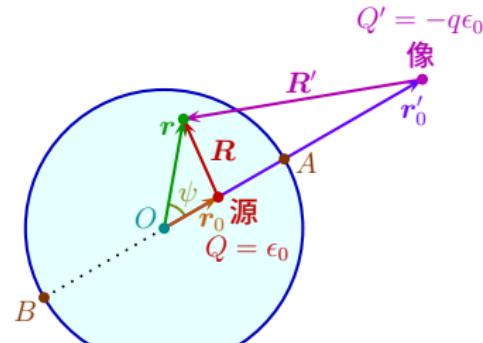
所以 r'_0 与 r_0 具有相同的角向坐标

记 r_0 和 r'_0 的球坐标为 (r_0, θ_0, ϕ_0) 和 (r'_0, θ_0, ϕ_0)

在球内任取一点 r ，其球坐标为 (r, θ, ϕ)

记 r 与 r_0 的夹角为 ψ ， $R = r - r_0$ ， $R' = r - r'_0$

源电荷和像电荷在 r 处产生的电势 $g(r, r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{1}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi R'}$





源电荷和像电荷产生的电势

因此，像电荷与源电荷必定在球心的同一侧

像电荷位置 r'_0 在经过 r_0 的半径 OA 的延长线上

所以 r'_0 与 r_0 具有相同的角向坐标

记 r_0 和 r'_0 的球坐标为 (r_0, θ_0, ϕ_0) 和 (r'_0, θ_0, ϕ_0)

在球内任取一点 r ，其球坐标为 (r, θ, ϕ)

记 r 与 r_0 的夹角为 ψ ， $R = r - r_0$ ， $R' = r - r'_0$

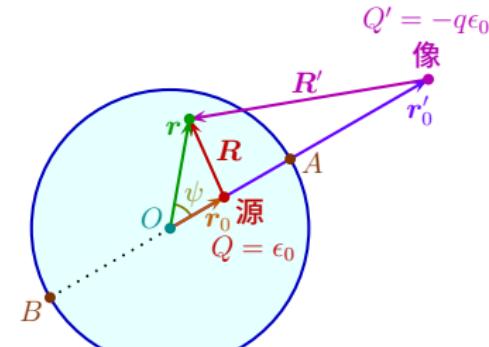
源电荷和像电荷在 r 处产生的电势 $g(r, r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{1}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi R'}$

由 $R^2 = |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi$ ， $R'^2 = |r - r'_0|^2 = r^2 + r'_0^2 - 2rr'_0 \cos \psi$

得 $g(r, r_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}} - \frac{q}{4\pi\sqrt{r^2 + r'_0^2 - 2rr'_0 \cos \psi}}$

在球面上， $r = a$ ，则

$$g(r, r_0)|_{r=a} = \frac{1}{4\pi r_0 \sqrt{(a/r_0)^2 + 1 - 2(a/r_0) \cos \psi}} - \frac{q}{4\pi a \sqrt{1 + (r'_0/a)^2 - 2(r'_0/a) \cos \psi}}$$





Green 函数

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{r=a} = \frac{1}{4\pi r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 - 2 \frac{a}{r_0} \cos \psi}} - \frac{q}{4\pi a \sqrt{1 + \left(\frac{r'_0}{a}\right)^2 - 2 \frac{r'_0}{a} \cos \psi}}$$

注意到 $\frac{a}{r_0}$ 和 $\frac{r'_0}{a}$ 均大于 1，可见，只要取 $\frac{a}{r_0} = \frac{r'_0}{a}$ 和 $\frac{1}{r_0} = \frac{q}{a}$ ，即

$$r'_0 = \frac{a^2}{r_0}, \quad q = \frac{a}{r_0}$$

就能得到 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{r=a} = 0$ ，使球面上的电势为零

可见，镜像法对于本问题确实是成功的



Green 函数

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{r=a} = \frac{1}{4\pi r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 - 2\frac{a}{r_0} \cos \psi}} - \frac{q}{4\pi a \sqrt{1 + \left(\frac{r'_0}{a}\right)^2 - 2\frac{r'_0}{a} \cos \psi}}$$

注意到 $\frac{a}{r_0}$ 和 $\frac{r'_0}{a}$ 均大于 1，可见，只要取 $\frac{a}{r_0} = \frac{r'_0}{a}$ 和 $\frac{1}{r_0} = \frac{q}{a}$ ，即

$$r'_0 = \frac{a^2}{r_0}, \quad q = \frac{a}{r_0}$$

就能得到 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{r=a} = 0$ ，使球面上的电势为零

可见，镜像法对于本问题确实是成功的

将参数值 r'_0 和 q 代入 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi R'}$ ，得到所求的 Green 函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R} - \frac{a}{r_0} \frac{1}{4\pi R'}$$

其中 $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}$, $R' = \sqrt{r^2 + a^4/r_0^2 - 2r(a^2/r_0) \cos \psi}$

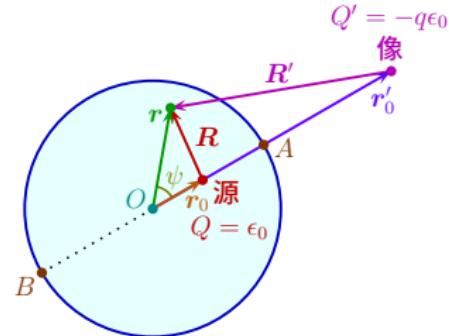
以 \hat{r} 和 \hat{r}_0 代表 r 和 r_0 方向的单位矢量

则可以用**直角坐标**将它们表示为

$$\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_0 = (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0)$$

从而， r 与 r_0 的夹角 ψ 满足



$$\cos \psi = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 = \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$$

$$= \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$$



对称点

以 \hat{r} 和 \hat{r}_0 代表 r 和 r_0 方向的单位矢量

则可以用直角坐标将它们表示为

$$\hat{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\hat{r}_0 = (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0)$$

从而, r 与 r_0 的夹角 ψ 满足

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \hat{r} \cdot \hat{r}_0 = \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0 \\ &= \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0\end{aligned}$$

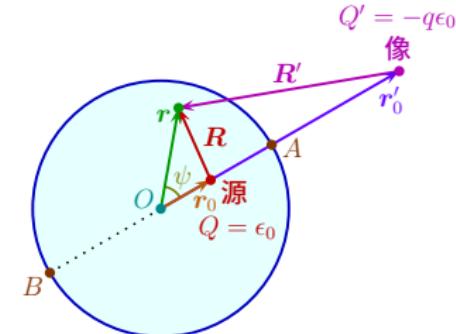
由前面的讨论和 $r'_0 = a^2/r_0$ 可知, 像电荷与源电荷具有相同的角向坐标

而径向坐标满足 $r'_0 r_0 = a^2$, 这样的两点称为关于球面的对称点

$q = a/r_0$ 表明像电荷 $Q' = -q\epsilon_0$ 与源电荷 $Q = \epsilon_0$ 之比为 $-a/r_0$

负号容易理解, 因为两个同号电荷不可能使球面上的总电势为零

B 点离源电荷近, 离像电荷远, 电势为零要求 $|Q'| > |Q|$, 这与 $q = \frac{a}{r_0} > 1$ 一致





解的积分式

球面的外法线方向是半径方向，将 Green 函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R} - \frac{\mathbf{a}}{r_0} \frac{1}{4\pi R'}$ 代入

$$u(\mathbf{r}_0) = - \int_S \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} d\sigma = - \int_S f(\theta, \phi) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} d\sigma$$

就可以写出原定解问题的解

根据

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi R} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}} = -\frac{\mathbf{r} - r_0 \cos \psi}{4\pi R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\mathbf{a}}{r_0} \frac{1}{4\pi R'} \right) = -\frac{\mathbf{a}}{4\pi r_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^4/r_0^2 - 2r(a^2/r_0) \cos \psi}} = \frac{\mathbf{a} - (a^3/r_0) \cos \psi}{4\pi r_0 R'^3}$$

推出

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi R} - \frac{\mathbf{a}}{r_0} \frac{1}{4\pi R'} \right) \Big|_{r=a} \\ &= -\frac{\mathbf{a} - r_0 \cos \psi}{4\pi R^3|_{r=a}} + \frac{\mathbf{a}^2 - (a^3/r_0) \cos \psi}{4\pi r_0 R'^3|_{r=a}} \end{aligned}$$



Green 函数的方向导数



由 $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}$ 和 $R' = \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r_0^2} - \frac{2ra^2}{r_0} \cos \psi}$ 得

$$R|_{r=a} = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi}, \quad R'|_{r=a} = \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{r_0^2} - \frac{2a^3}{r_0} \cos \psi} = \frac{a}{r_0} R|_{r=a}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{a - r_0 \cos \psi}{4\pi R^3|_{r=a}} + \frac{a^2 - (a^3/r_0) \cos \psi}{4\pi r_0 R'^3|_{r=a}} \\ &= \frac{1}{4\pi R^3|_{r=a}} \left[-a + r_0 \cos \psi + \frac{a^2 - (a^3/r_0) \cos \psi}{r_0 (a/r_0)^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi R^3|_{r=a}} \left(\frac{-a^2 + ar_0 \cos \psi}{a} + \frac{r_0^2 - ar_0 \cos \psi}{a} \right) \\ &= \frac{r_0^2 - a^2}{4\pi a R^3|_{r=a}} = \frac{r_0^2 - a^2}{4\pi a (a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}} \end{aligned}$$



球的 Poisson 积分

将 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} \Big|_{\mathbf{r}=a} = \frac{r_0^2 - a^2}{4\pi a(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}}$ 和 $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ 代入

$$u(\mathbf{r}_0) = - \int_S f(\theta, \phi) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} d\sigma$$

得到原定解问题的解

$$u(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{a(a^2 - r_0^2)}{4\pi} \int \frac{f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}}$$

其中 θ 和 ϕ 的积分范围分别是从 0 到 π 和从 0 到 2π

上式称为球的 Poisson 积分

球的 Poisson 积分

将 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{a}} = \frac{r_0^2 - a^2}{4\pi a(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}}$ 和 $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ 代入

$$u(\mathbf{r}_0) = - \int_S f(\theta, \phi) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} d\sigma$$

 得到原定解问题的解

$$u(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{a(a^2 - r_0^2)}{4\pi} \int \frac{f(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}}$$

其中 θ 和 ϕ 的积分范围分别是从 0 到 π 和从 0 到 2π

💡 上式称为球的 Poisson 积分，可以证明，它与分离变量法得到的结果是一致的

注 $\cos \psi = \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$ 包含变量 θ 、 ϕ 和参数 θ_0 、 ϕ_0

对 θ 、 ϕ 积分后，解 u 是 r_0 、 θ_0 和 ϕ_0 的函数，注意 (r_0, θ_0, ϕ_0) 可以任意变化

所以在求 Green 函数时，不能将源点 r_0 置于特殊的位置，比如极轴上

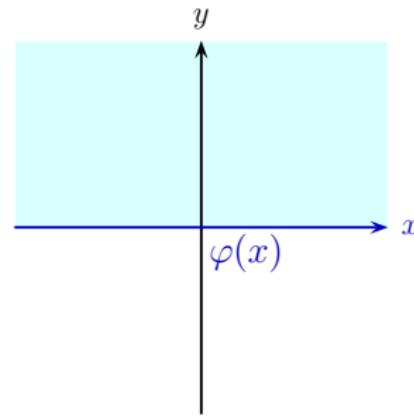
§3.2 上半平面 Laplace 方程第一边值问题

考虑上半平面 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho) = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ u(\rho)|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0), & -\infty < x, x_0 < +\infty, \quad 0 < y, y_0 < +\infty \\ G(\rho, \rho_0)|_{y=0} = 0 \end{cases}$$





§3.2 上半平面 Laplace 方程第一边值问题

考虑上半平面 Laplace 方程第一边值问题

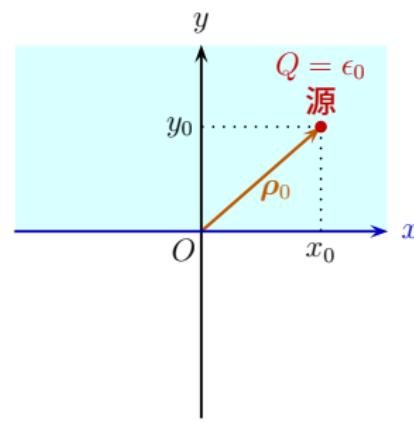
$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho) = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ u(\rho)|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0), & -\infty < x, x_0 < +\infty, \quad 0 < y, y_0 < +\infty \\ G(\rho, \rho_0)|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

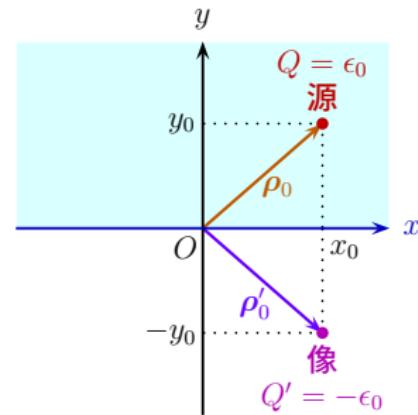
将它看作静电场问题，表述为：

上半平面上某点 $\rho_0 = (x_0, y_0)$ 处有一个二维点电荷，电量为 $Q = \epsilon_0$ （从三维空间看，其实是垂直于 xy 平面的无穷长线电荷，线电荷密度为 ϵ_0 ），而 x 轴上的电势为零，求解上半平面的电势分布



像电荷

为了保持 x 轴上的电势为零，显然应该在下半平面的点 $\rho'_0 = (x_0, -y_0)$ 处放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$



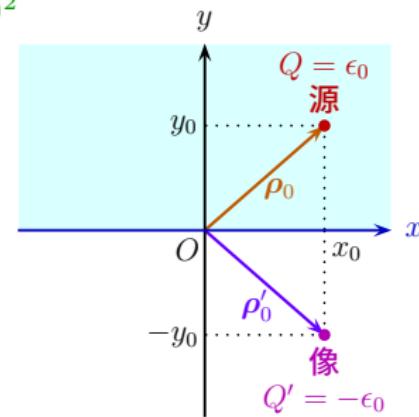
像电荷

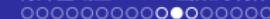
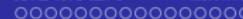
为了保持 x 轴上的电势为零，显然应该在下半平面的点 $\rho'_0 = (x_0, -y_0)$ 处放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

从而，源电荷和像电荷在上半平面上产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$\begin{aligned} G(\rho, \rho_0) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln |\rho - \rho_0| - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln |\rho - \rho'_0| = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho_0| + \frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho'_0| \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|\rho - \rho'_0|^2}{|\rho - \rho_0|^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

这里正好不需要常数项





像电荷

为了保持 x 轴上的电势为零，显然应该在下半平面的点 $\rho'_0 = (x_0, -y_0)$ 处放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

从而，源电荷和像电荷在上半平面上产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$\begin{aligned} G(\rho, \rho_0) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln |\rho - \rho_0| - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln |\rho - \rho'_0| = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho_0| + \frac{1}{2\pi} \ln |\rho - \rho'_0| \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|\rho - \rho'_0|^2}{|\rho - \rho_0|^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

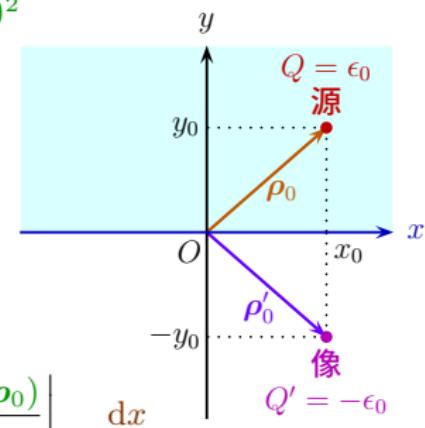
这里正好不需要常数项

注意上半平面的外法线方向是 $-y$ 方向，有

$$\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n} = -\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y}$$

原定解问题的解表达为

$$u(x_0, y_0) = - \int_S \varphi(\rho) \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n} d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left. \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} \right|_{y=0} dx$$



原定解问题的解

由于 $\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \{ \ln[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2] - \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \}$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2(y + y_0)}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} - \frac{2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right]$$

有 $\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{-2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} \right] = \frac{y_0}{\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2}$

 最终，原定解问题的解是

$$u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx$$

原定解问题的解

由于 $\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \{ \ln[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2] - \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \}$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2(y + y_0)}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} - \frac{2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right]$$

有 $\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{-2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} \right] = \frac{y_0}{\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2}$

 最终，原定解问题的解是

$$u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx$$

根据 $\delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)}$ ，有 $\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} \frac{y_0}{\pi[(x - x_0)^2 + y_0^2]} = \delta(x - x_0)$ ，故

$$\begin{aligned} u(x_0, 0) &= \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left\{ \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} \frac{y_0}{\pi[(x - x_0)^2 + y_0^2]} \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \varphi(x_0) \quad \rightarrow \text{验证了边界条件} \end{aligned}$$

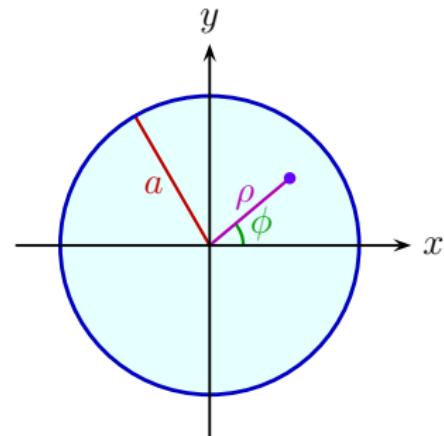
§3.3 圆内 Laplace 方程第一边值问题

🌐 考虑平面上圆内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho) = 0, & \rho < a \\ u(\rho)|_{\rho=a} = f(\phi) \end{cases}$$

🧭 相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0), & \rho, \rho_0 < a \\ G(\rho, \rho_0)|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$$





§3.3 圆内 Laplace 方程第一边值问题

考虑平面上圆内 Laplace 方程第一边值问题

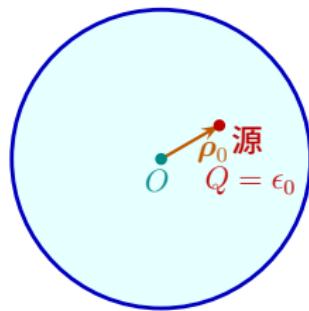
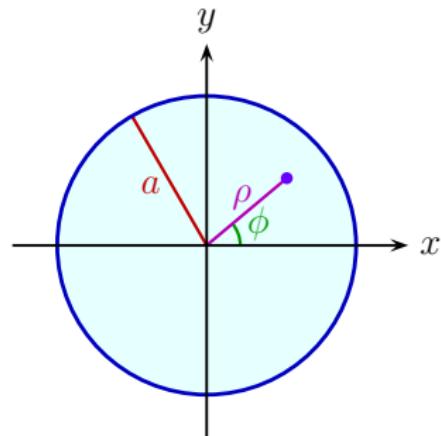
$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho) = 0, & \rho < a \\ u(\rho)|_{\rho=a} = f(\phi) \end{cases}$$

相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\rho, \rho_0) = -\delta(\rho - \rho_0), & \rho, \rho_0 < a \\ G(\rho, \rho_0)|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$$

将它看作静电场问题，表述为：

圆内极坐标为 $\rho_0 = (\rho_0, \phi_0)$ 的某点处有一个二维点电荷，电量为 $Q = \epsilon_0$ ，而圆周上的电势为零，求解圆内的电势分布





像电荷

今在源点 $\rho_0 = (\rho_0, \phi_0)$ 关于圆周的对称点

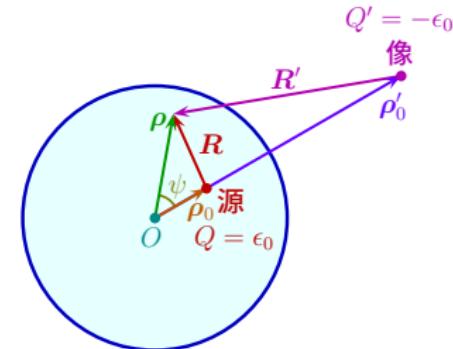
$$\rho'_0 = \frac{a^2}{\rho_0^2} \rho_0 = \left(\frac{a^2}{\rho_0}, \phi_0 \right) \quad [\text{满足 } \rho_0 \rho'_0 = a^2] \text{ 处}$$

放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

在圆内任取一点 $\rho = (\rho, \phi)$

ρ 与 ρ_0 的夹角为 $\psi = \phi - \phi_0$

记 $R = \rho - \rho_0$, $R' = \rho - \rho'_0$





像电荷

今在源点 $\rho_0 = (\rho_0, \phi_0)$ 关于圆周的对称点

$$\rho'_0 = \frac{a^2}{\rho_0^2} \rho_0 = \left(\frac{a^2}{\rho_0}, \phi_0 \right) \quad [\text{满足 } \rho_0 \rho'_0 = a^2] \text{ 处}$$

放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

在圆内任取一点 $\rho = (\rho, \phi)$

ρ 与 ρ_0 的夹角为 $\psi = \phi - \phi_0$

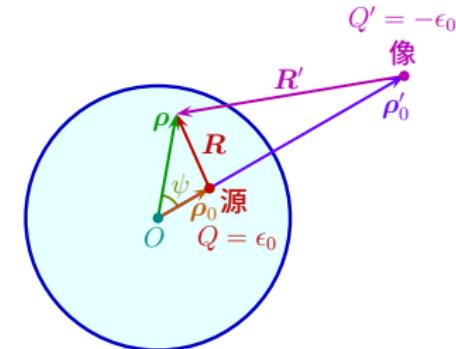
记 $R = \rho - \rho_0$, $R' = \rho - \rho'_0$, 有 $R^2 = |\rho - \rho_0|^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi$ 和

$$R'^2 = |\rho - \rho'_0|^2 = \rho^2 + \rho'_0^2 - 2\rho\rho'_0 \cos \psi = \rho^2 + \frac{a^4}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{a^2}{\rho_0} \cos \psi$$

源电荷与像电荷在 ρ 处产生的电势为

$$\begin{aligned} g(\rho, \rho_0) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln R - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln R' + c = -\frac{1}{2\pi} \ln R + \frac{1}{2\pi} \ln R' + c \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R'^2}{R^2} + c = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\rho^2 + a^4/\rho_0^2 - 2\rho(a^2/\rho_0) \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi} + c \end{aligned}$$

注意其中有一个常数项，它依赖于电势零点的选择，这是二维问题的特点





Green 函数

源电荷与像电荷在圆周 ($\rho = a$) 上产生的电势为

$$\begin{aligned} g(\rho, \rho_0)|_{\rho=a} &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{a^2 + a^4/\rho_0^2 - 2(a^3/\rho_0) \cos \psi}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \psi} + c \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{a^2}{\rho_0^2} \frac{\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0 \cos \psi}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \psi} \right) + c = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho_0} + c \end{aligned}$$

从而, 只要取 $c = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho_0}$, 就能使圆周上的电势 $g(\rho, \rho_0)|_{\rho=a} = 0$

注意, Green 函数定解问题的变量是 ρ , 可将 ρ_0 视作固定的常数

将 c 值代入 $g(\rho, \rho_0)$, 得到所求的 Green 函数为

$$\begin{aligned} G(\rho, \rho_0) &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\rho^2 + a^4/\rho_0^2 - 2\rho(a^2/\rho_0) \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho_0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{\rho^2 + a^4/\rho_0^2 - 2\rho(a^2/\rho_0) \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi} \frac{\rho_0^2}{a^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\rho^2 \rho_0^2/a^2 + a^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi} \right) \end{aligned}$$



Green 函数的导数

注意圆周的外法线方向就是半径方向，原定解问题的解表达为

$$u(\rho_0, \phi_0) = - \int_S \varphi(\rho) \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n} d\sigma = - \int_0^{2\pi} f(\phi) \left. \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} a d\phi$$

Green 函数对 ρ 求导，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial \rho} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\ln \left(\frac{\rho_0^2 \rho^2}{a^2} + a^2 - 2\rho \rho_0 \cos \psi \right) - \ln(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho \rho_0 \cos \psi) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho_0^2 \rho/a^2 - \rho_0 \cos \psi}{\rho_0^2 \rho^2/a^2 + a^2 - 2\rho \rho_0 \cos \psi} - \frac{\rho - \rho_0 \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho \rho_0 \cos \psi} \right) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho_0^2/a - \rho_0 \cos \psi}{\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0 \cos \psi} - \frac{a - \rho_0 \cos \psi}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \psi} \right) \\ &= \frac{\rho_0^2 - a^2}{2\pi a [a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]} \end{aligned}$$



圆的 Poisson 积分

最终，原定解问题的解是

$$u(\rho_0, \phi_0) = \frac{a^2 - \rho_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}$$

上式称为圆的 Poisson 积分

可以证明，它与第七章 §5 用分离变量法得到的结果是一致的