

## 数学物理方法

# 第十章 二阶线性常微分方程的级数解法 和一般本征值问题

## 第 1 节至第 4 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 12 月 6 日

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解

 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程

 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并**不存在**什么普遍有效的解析求解法则

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解

 本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程

 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并**不存在**什么普遍有效的解析求解法则

 一阶线性常微分方程  $\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$  的通解可以用系数和非齐次项表达为

$$u(x) = \left\{ \int_{x_0}^x Q(t) \exp \left[ \int_{x_0}^t P(s) \, ds \right] dt + C \right\} \exp \left[ - \int_{x_0}^x P(t) \, dt \right]$$

 虽然上式中的积分不一定能积出初等函数，但至少有一个通用形式

第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题

 对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的是常微分方程及其本征值问题的求解

本课程遇到的都是二阶线性常微分方程，它们来源于二阶线性偏微分方程

 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并**不存在**什么普遍有效的解析求解法则

 一阶线性常微分方程  $\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$  的通解可以用系数和非齐次项表达为

$$u(x) = \left\{ \int_{x_0}^x Q(t) \exp \left[ \int_{x_0}^t P(s) \, ds \right] dt + C \right\} \exp \left[ - \int_{x_0}^x P(t) \, dt \right]$$

 虽然上式中的积分不一定能积出初等函数，但至少有一个**通用形式**

 对于二阶线性常微分方程，并不存在类似的结果

 常系数方程和少数特殊类型的方程（比如 Euler 方程）可以用初等函数求解

 另一些方程可以用**级数解法**或**积分解法**求解

## 二阶线性常微分方程的解法

级数解法可以算是一种比较系统的方法

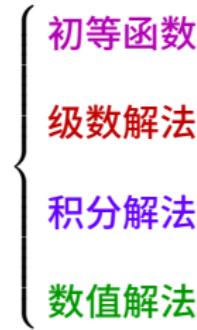
对于那些能够用初等函数求解的简单情况，级数解法通常也有效。

 积分解法是积分变换的推广，本课程不作介绍

应该指出，能够用级数解法或积分解法求解的方程是非常有限的。

更多的时候人们只能采用**数值解法**

二阶线性常微分方程的解法



## §1 常点邻域的级数解法

 二阶线性齐次常微分方程的一般形式是  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

对于物理和工程问题中导出的微分方程， $x$  通常是实数。

  $p(x)$  和  $q(x)$  是已知函数,  $y(x)$  是未知函数, 它们的函数值也都是实数

§1 常点邻域的级数解法

 二阶线性齐次常微分方程的一般形式是  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

对于物理和工程问题中导出的微分方程， $x$  通常是实数。

  $p(x)$  和  $q(x)$  是已知函数,  $y(x)$  是未知函数, 它们的函数值也都是实数

为了应用复变函数理论来研究微分方程的解，可以把  $x$  看作复数，并仍记作  $x$

相应地,  $p(x)$ 、 $q(x)$  和  $y(x)$  就成为复变函数, 它们在实轴上取相应的实函数值

可以对方程附加**初始条件**  $y(x_0) \equiv c_0$  和  $y'(x_0) \equiv c_1$

如果不附加初始条件，则通解中含有两个任意常数

## §1 常点邻域的级数解法

 二阶线性齐次常微分方程的一般形式是  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

对于物理和工程问题中导出的微分方程， $x$  通常是实数。

  $p(x)$  和  $q(x)$  是已知函数,  $y(x)$  是未知函数, 它们的函数值也都是实数

为了应用复变函数理论来研究微分方程的解，可以把  $x$  看作复数，并仍记作  $x$

相应地,  $p(x)$ 、 $q(x)$  和  $y(x)$  就成为复变函数, 它们在实轴上取相应的实函数值

可以对方程附加初始条件  $y(x_0) \equiv c_0$  和  $y'(x_0) \equiv c_1$

 如果不附加初始条件，则通解中含有两个任意常数

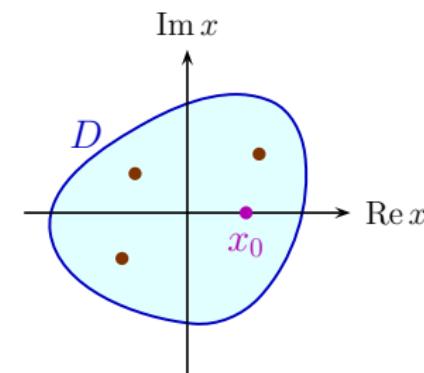
方程的解的行为取决于系数  $p(x)$  和  $q(x)$  的行为

假设在复平面的某个区域  $D$  内,  $p(x)$  和  $q(x)$  除有

限个孤立奇点外是单值解析的

 级数解法就是在  $D$  内某点  $x_0$  的邻域或去心邻域内

将  $y(x)$  展开为幂级数，即 Taylor 级数、Laurent 级数或更一般的幂级数（见后）



常点邻域级数解法的理论基础

  $y(x)$  级数展开式的形式取决于系数  $p(x)$  和  $q(x)$  在  $x_0$  的性质

如果  $p(x)$  和  $q(x)$  在  $x_0$  解析，则  $x_0$  称为方程的常点

 如果  $x_0$  是  $p(x)$  和  $q(x)$  在极点或本性奇点，则  $x_0$  称为方程的奇点



常点邻域级数解法的理论基础



$y(x)$  级数展开式的形式取决于系数  $p(x)$  和  $q(x)$  在  $x_0$  的性质



如果  $p(x)$  和  $q(x)$  在  $x_0$  可以解析，则  $x_0$  称为方程的常点。



如果  $x_0$  是  $p(x)$  和  $q(x)$  在极点或本性奇点，则  $x_0$  称为方程的奇点



本节研究常点的级数解法，理论基础是以下定理



**定理** 如果  $p(x)$  和  $q(x)$  在圆  $|x - x_0| < R$  内解析，则在该圆内满足方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  及初始条件  $y(x_0) = c_0$  和  $y'(x_0) = c_1$  的解是存在、唯一而且解析的。



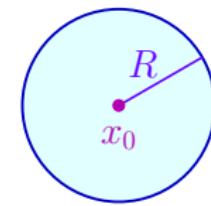
这个定理的大意是，如果系数是解析的，则方程的解也是解析的。



这一结论非常直观，但证明起来却不容易



这里不去深究定理的证明，而是把注意力集中在计算方法上。





## Taylor 级数解法

 即然  $p(x)$ 、 $q(x)$  和  $y(x)$  都在圆内解析，那么就可以展开为 Taylor 级数

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \textcolor{brown}{p_k} (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \textcolor{blue}{q_k} (x - x_0)^k, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \textcolor{red}{a_k} (x - x_0)^k$$

其中展开系数  $p_k$ 、 $q_k$  是已知的，而  $a_k$  是未知的。

将这些展开式代入方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ ，得

$$\begin{aligned}
0 &= y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\textcolor{red}{a}_k(x-x_0)^{k-2} + \sum_{l=0}^{\infty} \textcolor{brown}{p}_l(x-x_0)^l \sum_{k=0}^{\infty} k\textcolor{red}{a}_k(x-x_0)^{k-1} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\infty} \textcolor{blue}{q}_l(x-x_0)^l \sum_{k=0}^{\infty} \textcolor{red}{a}_k(x-x_0)^k \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \textcolor{magenta}{f}_i(\{a_k\})(x-x_0)^i
\end{aligned}$$

最后一步**合并同幂项**, 整理成一个幂级数, 其**所有系数**  $f_i(\{a_k\})$  必须为零



## 求解流程



于是得到  $a_k$  间的一系列代数方程

$$f_i(\{a_k\}) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



求解这些代数方程，就可以用  $a_0$  和  $a_1$  表出  $a_2, a_3, \dots$



从而得到级数解  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$



注意到

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots, \quad y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots$$



初始条件意味着

$$a_0 = y(x_0) = c_0, \quad a_1 = y'(x_0) = c_1$$



如果不给定初始条件，则级数解中含有两个任意常数  $a_0$  和  $a_1$ ，成为方程的通解

## §2 Legendre 方程及其本征值问题

## §2.1 Legendre 方程的级数解



回顾上一章，在球坐标系中对 Helmholtz 方程分离变量时



轴对称情况下得到 Legendre 方程的本征值问题  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{array} \right.$



将  $P(x)$  替换为  $y(x)$ ，把 Legendre 方程改写为

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$



无法找到这个方程的简单解法，因此只能考虑**级数解**。

## §2 Legendre 方程及其本征值问题

## §2.1 Legendre 方程的级数解



回顾上一章，在球坐标系中对 Helmholtz 方程分离变量时



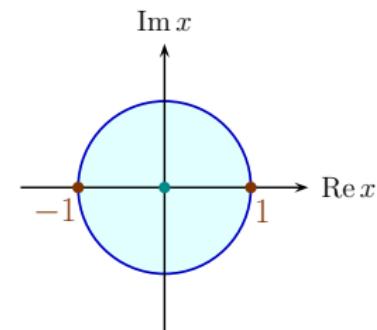
轴对称情况下得到 Legendre 方程的本征值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{array} \right.$$



将  $P(x)$  替换为  $y(x)$ ，把 Legendre 方程改写为

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$



无法找到这个方程的简单解法，因此只能考虑**级数解**。



与标准形式  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  比较可见

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2}$$



显然,  $x = 0$  是常点, 而且  $p(x)$  和  $q(x)$  在复平面上只有两个奇点  $x = \pm 1$



因此,  $p(x)$  和  $q(x)$  在圆  $|x| < 1$  内解析

## 解的级数形式

 在圆  $|x| < 1$  内,  $p(x)$  和  $q(x)$  是解析的, 因而方程的解也是解析的, 故可设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

 求导，有

$$xy'(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

 第一步结果中  $k = 0$  和  $k = 1$  的项均为零，第二步丢弃这两项

### 解的级数形式

 在圆  $|x| < 1$  内,  $p(x)$  和  $q(x)$  是解析的, 因而方程的解也是解析的, 故可设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

 求导，有

$$xy'(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1)a_{l+2} x^l = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k \end{aligned}$$

 第一步结果中  $k = 0$  和  $k = 1$  的项均为零，第二步丢弃这两项

 第三步作变量替换  $l = k - 2$  (即  $k = l + 2$ )，第四步作变量替换  $k = l$

 第三、四步合起来相当于将  $k$  的求和下限减 2，而各项中的  $k$  变成  $k+2$

 熟悉这个规律后可以直接从第二步结果作替换  $k \rightarrow k + 2$  得到第四步结果

## 递推关系

 此外,  $x^2 y''(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$

这样一来， $y''$ 、 $x^2y''$ 、 $xy'$  和  $y$  的级数中通项表达式都包含因子  $x^k$

 将它们代入 Legendre 方程，得

$$\begin{aligned} 0 &= \textcolor{violet}{y''} - x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(\textcolor{brown}{k}+2)(\textcolor{brown}{k}+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k] x^k \end{aligned}$$

递推关系

 此外,  $x^2 y''(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$

这样一来， $y''$ 、 $x^2y''$ 、 $xy'$  和  $y$  的级数中通项表达式都包含因子  $x^k$

 将它们代入 Legendre 方程，得

$$\begin{aligned} 0 &= \textcolor{violet}{y''} - x^2\textcolor{teal}{y''} - 2xy' + \lambda y = \sum_{k=0}^{\infty} [(\textcolor{violet}{k}+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2\textcolor{teal}{k}a_{\textcolor{violet}{k}} + \lambda a_k]x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(\textcolor{brown}{k}+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k]x^k \end{aligned}$$

 比较两边，有  $(k+2)(k+1)a_{k+2} - [k(k+1) - \lambda]a_k = 0$ ，即得递推关系

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$$

由此递推关系，所有  $a_{2k}$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) 均可由  $a_0$  确定 [ $a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{2k} \rightarrow \dots$ ]

所有  $a_{2k+1}$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) 均可由  $a_1$  确定  $[a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{2k+1} \rightarrow \cdots]$

## 两个线性独立的级数解

 于是,  $y(x)$  可表达为通解形式  $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

其中两个线性独立的级数解为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

而  $c_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_0}$  和  $c_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{a_1}$  都只是  $k$  和  $\lambda$  的函数，与  $a_0$ 、 $a_1$  无关



## 两个线性独立的级数解

 于是,  $y(x)$  可表达为通解形式  $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

其中两个线性独立的级数解为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

而  $c_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_0}$  和  $c_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{a_1}$  都只是  $k$  和  $\lambda$  的函数，与  $a_0$ 、 $a_1$  无关

由于  $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} \right| = 1$

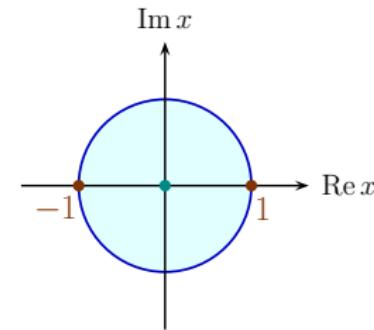
两个级数解的收敛半径都是  $R = 1/l = 1$ ，如所期望

但可以证明（参看第三章 §1.5 Gauss 判别法选读内容）， $y_0(x)$  和  $y_1(x)$  在  $x = \pm 1$  两点均发散

 这样的发散结果对于下面确定本征值问题的解非常重要

第三章 §3.2 收敛半径的 d'Alembert 公式

 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l \in (0, \infty)$ ，则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的收敛半径为  $R = \frac{1}{l}$



## §2.2 Legendre 方程的本征值问题

 根据上一章讨论，物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件**  $|y(\pm 1)| < \infty$

一般情况下，上面得到的两个级数解均不满足这一条件

 所以，唯一的出路是让它们中断为多项式

 由递推关系  $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$  可见，只要  $\lambda$  取值恰当，中断为多项式是可能的，这样同时也就确定了本征值

## §2.2 Legendre 方程的本征值问题

 根据上一章讨论，物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件**  $|y(\pm 1)| < \infty$

一般情况下，上面得到的两个级数解均不满足这一条件

 所以，唯一的出路是让它们中断为多项式

 由递推关系  $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$  可见，只要  $\lambda$  取值恰当，中断为多项式是可能的，这样同时也就确定了本特征值

若  $\lambda = 2n(2n+1)$  ( $n \in \mathbb{N}$ )，则  $a_{2n+2} = \frac{2n(2n+1) - \lambda}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} = 0$

故  $a_{2n+2} = a_{2n+4} = a_{2n+6} = \dots = 0$ ，从而  $y_0(x)$  中断为  $2n$  次多项式

同时另一个解  $y_1(x)$  仍为无穷级数，不满足**边界条件**



## §2.2 Legendre 方程的本征值问题

 根据上一章讨论，物理上要求 Legendre 方程的解满足**自然边界条件**  $|y(\pm 1)| < \infty$

一般情况下，上面得到的两个级数解均不满足这一条件

 所以，唯一的出路是让它们中断为多项式

 由递推关系  $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$  可见，只要  $\lambda$  取值恰当，中断为多项式是可能的，这样同时也就确定了本征值

若  $\lambda = 2n(2n+1)$  ( $n \in \mathbb{N}$ )，则  $a_{2n+2} = \frac{2n(2n+1) - \lambda}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} = 0$

 故  $a_{2n+2} = a_{2n+4} = a_{2n+6} = \dots = 0$ ，从而  $y_0(x)$  中断为  $2n$  次多项式

同时另一个解  $y_1(x)$  仍为无穷级数，不满足**边界条件**

若  $\lambda = (2n+1)(2n+2)$  ( $n \in \mathbb{N}$ )，则  $a_{2n+3} = \frac{(2n+1)(2n+2) - \lambda}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n+1} = 0$

故  $a_{2n+3} = a_{2n+5} = a_{2n+7} = \dots = 0$ ，从而  $y_1(x)$  中断为  $2n+1$  次多项式

同时另一个解  $y_0(x)$  仍为无穷级数，不满足**边界条件**

## Legendre 多项式

综合起来，如果  $\lambda = l(l+1)$  ( $l \in \mathbb{N}$ )，两个线性独立解中就有一个解中断为  $l$  次多项式，它当然满足自然边界条件  $|y(\pm 1)| < \infty$

同时另一个解仍为无穷级数，不满足边界条件



# Legendre 多项式

综合起来，如果  $\lambda = l(l+1)$  ( $l \in \mathbb{N}$ )，两个线性独立解中就有一个解中断为  $l$  次多项式，它当然满足自然边界条件  $|y(\pm 1)| < \infty$

同时另一个解仍为无穷级数，不满足边界条件

适当选取  $a_0$  (若  $l = 2n$ ) 或  $a_1$  (若  $l = 2n + 1$ )，使多项式解的最高次幂系数为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

这样得到的解称为  $l$  次 Legendre 多项式，记作  $P_l(x)$

下一章将会证明，这样的定义满足  $P_l(1) = 1$ ，从而使得相关公式比较简单



# Legendre 多项式

综合起来，如果  $\lambda = l(l+1)$  ( $l \in \mathbb{N}$ )，两个线性独立解中就有一个解中断为  $l$  次多项式，它当然满足自然边界条件  $|y(\pm 1)| < \infty$

同时另一个解仍为无穷级数，不满足边界条件

适当选取  $a_0$  (若  $l = 2n$ ) 或  $a_1$  (若  $l = 2n + 1$ )，使多项式解的最高次幂系数为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

这样得到的解称为  $l$  次 Legendre 多项式，记作  $P_l(x)$

下一章将会证明，这样的定义满足  $P_l(1) = 1$ ，从而使得相关公式比较简单

将  $\lambda = l(l+1)$  代入递推关系，得  $a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$

作变量替换  $k \rightarrow k-2$ ，得  $a_k = \frac{(k-2)(k-1) - l(l+1)}{k(k-1)} a_{k-2}$ ，分子可化为

$$(k-2)(k-1) - l(l+1) = (k-2)(k-1) + (k-2)l - (k-1)l - l^2$$

$$= [(k-2) - l][(k-1) + l] = (k-l-2)(k+l-1)$$



# 猜测一般系数

从而得到递推关系  $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ ，于是推出

$$\begin{aligned} a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \\ &= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{l-4} &= \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)} a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \\ &= \frac{1}{-2 \cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l (l-1)!(l-4)!} = \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!} \end{aligned}$$



# 猜测一般系数

从而得到递推关系  $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ , 于是推出

$$\begin{aligned} a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \\ &= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{l-4} &= \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)} a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \\ &= \frac{1}{-2 \cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l (l-1)!(l-4)!} = \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{l-6} &= \frac{(l-4)(l-5)}{(l-4-l-2)(l-4+l-1)} a_{l-4} = \frac{(l-4)(l-5)}{-6(2l-5)} \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!} \\ &= \frac{1}{-3 \cdot 2(2l-5)} \frac{(-)^2 2(l-2)(2l-5)(2l-6)!}{2^l 2(l-2)!(l-6)!} = \frac{(-)^3(2l-6)!}{2^l 3 \cdot 2(l-3)!(l-6)!} \end{aligned}$$



# 猜测一般系数

从而得到递推关系  $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)} a_k$ , 于是推出

$$\begin{aligned} a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-l-2)(l+l-1)} a_l = \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \\ &= \frac{1}{-2(2l-1)} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^l l!(l-2)!} = \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \quad (k=1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{l-4} &= \frac{(l-2)(l-3)}{(l-2-l-2)(l-2+l-1)} a_{l-2} = \frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)} \frac{-(2l-2)!}{2^l (l-1)!(l-2)!} \\ &= \frac{1}{-2 \cdot 2(2l-3)} \frac{-2(l-1)(2l-3)(2l-4)!}{2^l (l-1)!(l-4)!} = \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!} \quad (k=2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{l-6} &= \frac{(l-4)(l-5)}{(l-4-l-2)(l-4+l-1)} a_{l-4} = \frac{(l-4)(l-5)}{-6(2l-5)} \frac{(-)^2(2l-4)!}{2^l 2(l-2)!(l-4)!} \\ &= \frac{1}{-3 \cdot 2(2l-5)} \frac{(-)^2 2(l-2)(2l-5)(2l-6)!}{2^l 2(l-2)!(l-6)!} = \frac{(-)^3(2l-6)!}{2^l 3 \cdot 2(l-3)!(l-6)!} \quad (k=3) \end{aligned}$$

从以上结果寻找规律, 猜测一般系数的形式为  $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$

# 证明一般系数

 接着用**数学归纳法**证明一般系数  $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^lk!(l-k)!(l-2k)!}$  (1)

 证明 由  $a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} = \frac{(-)^0(2l-0)!}{2^l0!(l-0)!(l-0)!}$  可知, (1) 式对  $k=0$  成立



# 证明一般系数



接着用数学归纳法证明一般系数  $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$  (1)

证明 由  $a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} = \frac{(-)^0(2l-0)!}{2^l 0!(l-0)!(l-0)!}$  可知, (1) 式对  $k=0$  成立

当  $l \geq 2n+2$  时, 假设 (1) 式对  $k=n$  成立, 则  $a_{l-2n} = \frac{(-)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}$

$$\begin{aligned} a_{l-2n-2} &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{(l-2n-l-2)(l-2n+l-1)} a_{l-2n} \\ &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} \\ &= \frac{1}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n 2(l-n)(2l-2n-1)(2l-2n-2)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n-2)!} \\ &= \frac{(-)^{n+1}(2l-2n-2)!}{2^l (n+1)!(l-n-1)!(l-2n-2)!} \end{aligned}$$

可见, (1) 式对  $k=n+1$  也成立



# 证明一般系数



接着用数学归纳法证明一般系数  $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$  (1)

证明 由  $a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \frac{(-)^0 (2l-0)!}{2^l 0! (l-0)! (l-0)!}$  可知, (1) 式对  $k=0$  成立

当  $l \geq 2n+2$  时, 假设 (1) 式对  $k=n$  成立, 则  $a_{l-2n} = \frac{(-)^n (2l-2n)!}{2^l n! (l-n)! (l-2n)!}$

$$\begin{aligned} a_{l-2n-2} &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{(l-2n-l-2)(l-2n+l-1)} a_{l-2n} \\ &= \frac{(l-2n)(l-2n-1)}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n (2l-2n)!}{2^l n! (l-n)! (l-2n)!} \\ &= \frac{1}{-2(n+1)(2l-2n-1)} \frac{(-)^n 2(l-n)(2l-2n-1)(2l-2n-2)!}{2^l n! (l-n)! (l-2n-2)!} \\ &= \frac{(-)^{n+1} (2l-2n-2)!}{2^l (n+1)! (l-n-1)! (l-2n-2)!} \end{aligned}$$

可见, (1) 式对  $k=n+1$  也成立

于是, (1) 式对  $k=0, 1, 2, \dots, [l/2]$  成立

$$[l/2] \equiv \begin{cases} \frac{l}{2}, & l \text{ 是偶数} \\ \frac{l}{2} - \frac{1}{2}, & l \text{ 是奇数} \end{cases}$$

$k = [l/2] \in \mathbb{N}$  满足  $2k \leq l$



# Legendre 多项式的显式

显然，一般系数  $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$  只对  $l-2k \geq 0$  成立

因此  $k \leq l/2$ ，故  $k \in \mathbb{N}$  的求和上限为  $[l/2]$ ，即  $\leq l/2$  的最大整数

将代入一般系数代入  $P_l(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k = \sum_{k=0}^{[l/2]} a_{l-2k} x^{l-2k}$

就得到 Legendre 多项式的显式

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$



# Legendre 多项式的显式

显然，一般系数  $a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}$  只对  $l-2k \geq 0$  成立

因此  $k \leq l/2$ ，故  $k \in \mathbb{N}$  的求和上限为  $[l/2]$ ，即  $\leq l/2$  的最大整数

将代入一般系数代入  $P_l(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k = \sum_{k=0}^{[l/2]} a_{l-2k} x^{l-2k}$

就得到 Legendre 多项式的显式

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

综上，Legendre 方程  $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0$  在自然边界条件  $|P(\pm 1)| < \infty$

下的本征值是  $\lambda = l(l+1)$  ( $l \in \mathbb{N}$ )，相应的本征函数是  $l$  次 Legendre 多项式  $P_l(x)$

当  $\lambda = l(l+1)$  时，另一个线性独立解  $Q_l(x)$  是无穷级数，它在  $x = \pm 1$  处具有  $\ln(1 \mp x)$  的奇性

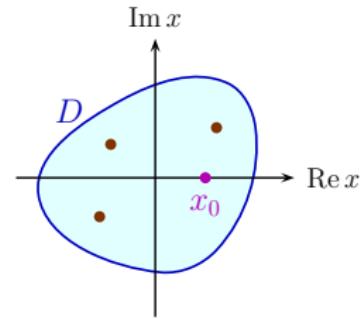
### §3 正则奇点邻域的级数解法

如前所述，对于二阶线性齐次常微分方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ ，假设在复平面的某个区域  $D$  内， $p(x)$  和  $q(x)$  除有限个孤立奇点外是单值解析的

那么，如果  $D$  内某点  $x_0$  是  $p(x)$  和(或)  $q(x)$  的奇点，那就只能是极点或本性奇点



$x_0$  不会是支点；至于可去奇点则可当作常点，相应的系数展开式是 Taylor 级数





## §3 正则奇点邻域的级数解法

如前所述, 对于二阶线性齐次常微分方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , 假设在复平面的某个区域  $D$  内,  $p(x)$  和  $q(x)$  除有限个孤立奇点外是单值解析的

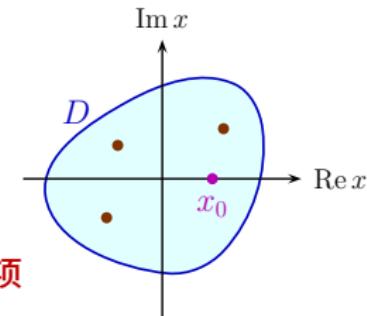
那么, 如果  $D$  内某点  $x_0$  是  $p(x)$  和(或)  $q(x)$  的奇点, 那就只能是极点或本性奇点



$x_0$  不会是支点; 至于可去奇点则可当作常点, 相应的系数展开式是 Taylor 级数

一般地, 有

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k(x - x_0)^k,$$
$$0 < |x - x_0| < R$$



若  $x_0$  是极点, 则以上 Laurent 展开式中只有有限个负幂项

可以证明, 此时方程的两个线性独立解具有下列形式:

$$y_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x - x_0)^{k+s_1}, \quad y_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0)$$





# Fuchs 定理和正则奇点

 方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  是否存在正则解，有一个还是两个正则解，取决于  $p(x)$  和  $q(x)$  在  $x_0$  的性质，与下面的 Fuchs 定理有关

 **Fuchs 定理** 方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  在  $x_0$  处有**两个正则解的充要条件是**  $(x - x_0)p(x)$  和  $(x - x_0)^2q(x)$  在  $x_0$  **解析**



Lazarus Fuchs  
(1833–1902)



# Fuchs 定理和正则奇点

方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  是否存在正则解，有一个还是两个正则解，取决于  $p(x)$  和  $q(x)$  在  $x_0$  的性质，与下面的 Fuchs 定理有关

**Fuchs 定理** 方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  在  $x_0$  处有 $\textcolor{blue}{\text{两}}$ 个正则解的充要条件是  $(x - x_0)p(x)$  和  $(x - x_0)^2 q(x)$  在  $x_0$  解析

上述充要条件就是说， $p(x)$  以  $x_0$  为不高于一阶的极点， $q(x)$  以  $x_0$  为不高于二阶的极点

这样的奇点称为方程的正则奇点

Fuchs 定理也可以叙述为：方程在  $x_0$  处有 $\textcolor{blue}{\text{两个正则解}}$ 的充要条件是  $x_0$  为方程的正则奇点



Lazarus Fuchs  
(1833–1902)

# 关于正则解的说明

正则解

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0), \quad b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0 \end{cases}$$

中 这里不研究 Fuchs 定理的证明，只补充以下几点说明

- ①  $s_1$  和  $s_2$  称为正则奇点或正则解的指标， $\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$ ，即第一解对应于指标实部较大者，它总不包含对数函数



# 关于正则解的说明

**正则解**

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, & a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0), & b_0 \neq 0 \text{ 或 } \beta \neq 0 \end{cases}$$

**中** 这里不研究 Fuchs 定理的证明，只补充以下几点说明

- ①  $s_1$  和  $s_2$  称为正则奇点或正则解的指标， $\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$ ，即第一解对应于指标实部较大者，它总不包含对数函数
- ② 若  $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \dots$ ，则  $\beta = 0$ ，即第二解必定不包含对数函数
- ③ 若  $s_1 = s_2$ ，则  $\beta \neq 0$ （否则  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  相同），即第二解必定包含对数函数
- ④ 若  $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}^+$ ，则第二解可能包含对数函数，也可能不包含对数函数，即  $\beta$  是否为零不是确定的，需要通过具体求解得知

 将正则解的形式和  $p(x)$  和  $q(x)$  的 Laurent 展开式代入方程，可得一系列递推关系，从而确定正则解中的系数和指标





## §4 Bessel 方程

### §4.1 Bessel 方程的级数解

上一章在柱坐标下对 Laplace 方程分离变量时，遇到 Bessel 方程及其本征值问题

对波动或热传导方程分离变量，也会遇到类似的问题

Bessel 方程也没有简单的解法，所以只能考虑级数解

数学上，Bessel 方程的一般形式为

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

其中  $\nu$  称为 Bessel 方程的阶，它可以是复数

若将  $\nu$  换为  $-\nu$ ，方程不变，故可设  $\operatorname{Re} \nu \geq 0$  而不失一般性

与标准形式  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  比较可见

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$$

显然， $x = 0$  是方程的正则奇点，而且在复平面上没有其它奇点

若  $\operatorname{Re} \nu < 0$ ，令  $\nu' = -\nu$ ，将问题转化为  $\operatorname{Re} \nu' > 0$  的情况来讨论

# 代入级数解

 在  $x = 0$  的去心邻域内，可设级数解的形式为  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$ ,  $a_0 \neq 0$

 这是正则解中第一解的形式，也是第二解在  $\beta = 0$  时的形式







# 系数关系

由  $k \rightarrow k+2$  得  $\sum_{k=2}^{\infty} [(k+s)^2 - \nu^2] a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+s+2)^2 - \nu^2] a_{k+2} x^{k+s+2}$

Bessel 方程化为

$$(s^2 - \nu^2)a_0 x^s + [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+s+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k\}x^{k+s+2} = 0$$

左边各项系数必须为零，即

$$(s^2 - \nu^2)a_0 = 0, \quad [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0$$

$$[(k+s+2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$$

由于  $a_0 \neq 0$ ，有  $s^2 - \nu^2 = 0$ ，这是决定指标的方程

因  $\operatorname{Re} \nu \geq 0$  且  $\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$ ，两个根为  $s_1 = \nu$  和  $s_2 = -\nu$ ，故  $s_1 - s_2 = 2\nu$

暂时假定  $\nu$  不等于整数或半奇数，则  $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \dots$ ，按上一节的一般理论，两个正则解均不包含对数函数

$\nu$  为整数或半奇数的情况将在随后各小节讨论





# Γ 函数

利用  $\Gamma$  函数可以把因子  $(\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1)$  表达成紧凑的形式

$\Gamma$  函数定义为  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  ( $\operatorname{Re} z > 0$ )，满足

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = - \int_0^\infty t^z d(e^{-t}) = -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

解析开拓到  $\operatorname{Re} z < 0$ ，可证明  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  仍成立，对  $-n < \operatorname{Re} z < 0$  有

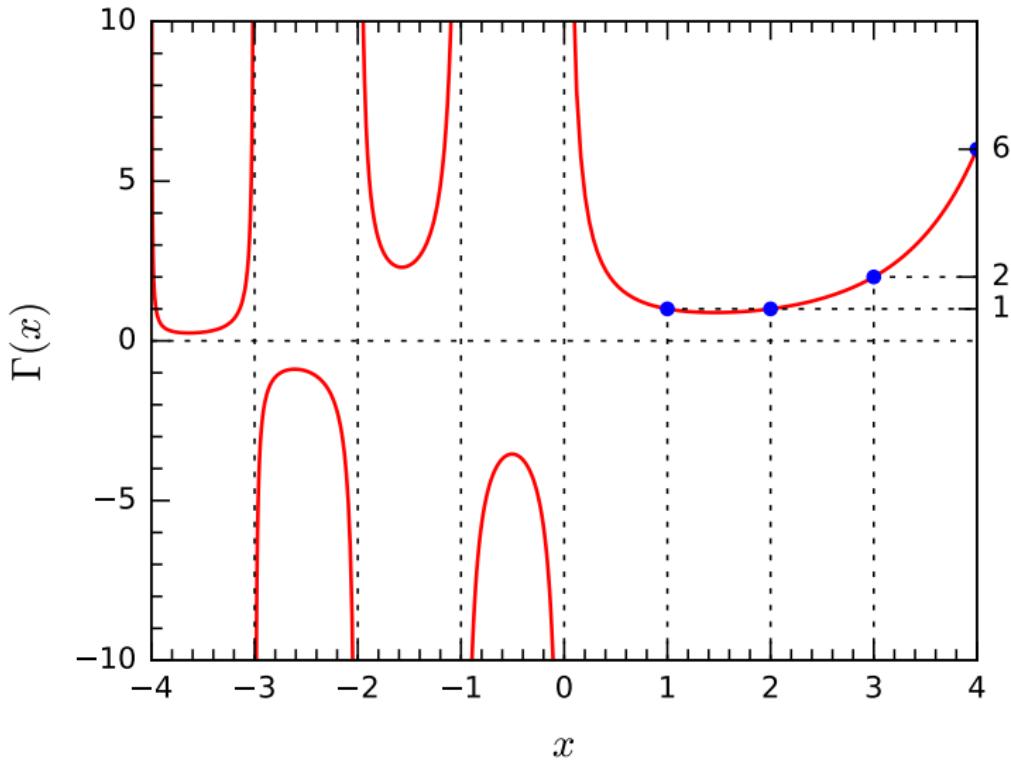
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)z} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2) \cdots (z+1)z}$$

从而， $z = 0, -1, -2, \dots$  是  $\Gamma$  函数的单极点，有  $\lim_{z \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ )

由  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ ,  $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$ ,  $\dots$

得  $\Gamma(n+1) = n!$  ( $n \in \mathbb{N}$ )，可见  $\Gamma$  函数是阶乘在复变函数中的推广

# 实轴上的 $\Gamma$ 函数图像



# Bessel 函数



反复利用  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ，推出

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+k+1) &= (\nu+k)\Gamma(\nu+k) = (\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1) = \cdots \\ &= (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$



故  $(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$ ，从而

$$a_{2k} = (-)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) \cdot k!} = (-)^k \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}$$



# Bessel 函数



反复利用  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ，推出

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+k+1) &= (\nu+k)\Gamma(\nu+k) = (\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1) = \cdots \\ &= (\nu+k)(\nu+k-1) \cdots (\nu+1)\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$



故  $(\nu+k)(\nu+k-1) \cdots (\nu+1) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$ ，从而

$$a_{2k} = (-)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1) \cdots (\nu+1) \cdot k!} = (-)^k \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}$$



第一解化为  $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} x^{2k+\nu}$



取  $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ ，这样得到的第一解称为  $\nu$  阶 Bessel 函数，具体形式为

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$



应该强调的是，第一解  $y_1(x) = J_\nu(x)$  对于任意  $\nu \in \mathbb{C}$  都是适用的

## 第二解

 其次讨论**第二解**  $y_2(x)$ ，对应于  $s_2 = -\nu$

 此时  $x^{s_2+1}$  项系数为  $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = [(-\nu + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$

 已经假定  $\nu$  不等于整数或半奇数，有  $\nu \neq \frac{1}{2}$ ，故  $a_1 = 0$  仍成立

 重复**第一解推导过程**，将其中  $\nu$  换为  $-\nu$ ，取  $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1)}$ ，即得**第二解**

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x)$$

## 第二解

♥ 次讨论**第二解**  $y_2(x)$ ，对应于  $s_2 = -\nu$

🌊 此时  $x^{s_2+1}$  项系数为  $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = [(-\nu + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$

🏃 已经假定  $\nu$  不等于整数或半奇数，有  $\nu \neq \frac{1}{2}$ ，故  $a_1 = 0$  仍成立

💻 重复**第一解推导过程**，将其中  $\nu$  换为  $-\nu$ ，取  $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1)}$ ，即得**第二解**

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x)$$

🏅 只要  $\nu$  不为整数， $J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$  的定义就是**恰当的**

💃 此时， $J_{-\nu}(x)$  与  $J_\nu(x)$  是**线性独立**的

⌚ 总结起来，当  $\nu$  不等于整数或半奇数时，**Bessel 方程的两个线性独立解**为

$$y(x) = \{J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\}$$

# Bessel 函数的性质

 当  $\nu$  不等于整数或半奇数时

 显然  $x = 0$  是 Bessel 函数  $J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k \pm \nu}$  的支点

 将  $J_{\pm\nu}(x)$  中的  $(x/2)^{\pm\nu}$  因子提出来，剩下的因子是幂级数

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

# Bessel 函数的性质

当  $\nu$  不等于整数或半奇数时

显然  $x = 0$  是 Bessel 函数  $J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k \pm \nu}$  的支点

将  $J_{\pm\nu}(x)$  中的  $(x/2)^{\pm\nu}$  因子提出来，剩下的因子是幂级数

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

按照递推关系  $a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2\nu+2)(k+2)}$ ，有

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{(k+2\nu+2)(k+2)} \right| = 0$$

根据 d'Alembert 计算公式，该幂级数的收敛半径为  $R = \frac{1}{l} = \infty$

因此， $J_{\pm\nu}(x)$  在沿  $x = 0$  至  $x = \infty$  适当割破的  $x$  平面上是单值解析的

## §4.2 半奇数阶 Bessel 方程

 本小节考虑半奇数阶 Bessel 方程，即  $\nu = \frac{2l - 1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  ( $l \in \mathbb{N}^+$ )

 此时  $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$

 根据上一节的一般理论，第二解可能会包含对数函数

 不过，下面的具体求解过程表明，第二解实际上不包含对数函数

## §4.2 半奇数阶 Bessel 方程

 本小节考虑半奇数阶 Bessel 方程，即  $\nu = \frac{2l - 1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  ( $l \in \mathbb{N}^+$ )

 此时  $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$

 根据上一节的一般理论，第二解可能会包含对数函数

 不过，下面的具体求解过程表明，第二解实际上不包含对数函数

 当  $\nu = 1/2$  时，第一解当然就是  $y_1(x) = J_{1/2}(x)$

 第二解对应于  $s_2 = -\nu = -1/2$ ，此时  $x^{s_2+1}$  项的系数为

$$0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1 = 0 \cdot a_1$$

 由此可见， $a_1$  可以任取，那么取  $a_1 = 0$  显然是最方便的

 这样就可以像上一小节一样求得第二解为  $y_2(x) = J_{-1/2}(x)$

## §4.2 半奇数阶 Bessel 方程

 本小节考虑半奇数阶 Bessel 方程，即  $\nu = \frac{2l - 1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  ( $l \in \mathbb{N}^+$ )

 此时  $s_1 - s_2 = 2\nu = 2l - 1 \in \mathbb{N}^+$

 根据上一节的一般理论，第二解可能会包含对数函数

 不过，下面的具体求解过程表明，第二解实际上不包含对数函数

 当  $\nu = 1/2$  时，第一解当然就是  $y_1(x) = J_{1/2}(x)$

 第二解对应于  $s_2 = -\nu = -1/2$ ，此时  $x^{s_2+1}$  项的系数为

$$0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1 = 0 \cdot a_1$$

 由此可见， $a_1$  可以任取，那么取  $a_1 = 0$  显然是最方便的

 这样就可以像上一小节一样求得第二解为  $y_2(x) = J_{-1/2}(x)$

 如果不取  $a_1 = 0$ ，则求得的解将包含两个任意常数  $a_0$  和  $a_1$

 且包含  $a_1$  的部分与  $J_{1/2}(x)$  成正比，即得到通解  $y(x) = a_0J_{-1/2}(x) + a_1J_{1/2}(x)$

 由此可见，取  $a_1 = 0$  而得第二解是恰当的

# $\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

 当  $l \geq 2$  时,  $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , 第一解仍然是  $y_1(x) = J_\nu(x)$

 对于第二解,  $s_2 = -\nu$ ,  $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$  表明  $a_1 = 0$ , 且  
 $(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2 = (k - \nu + 2)^2 - \nu^2 = (k + 2)(k - 2\nu + 2) = (k + 2)(k - 2l + 3)$

 由系数关系  $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$  得到递推关系

$$(k + 2)(k - 2l + 3)a_{k+2} = -a_k$$

# $\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

 当  $l \geq 2$  时,  $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , 第一解仍然是  $y_1(x) = J_\nu(x)$

 对于第二解,  $s_2 = -\nu$ ,  $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$  表明  $a_1 = 0$ , 且  $(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2 = (k - \nu + 2)^2 - \nu^2 = (k + 2)(k - 2\nu + 2) = (k + 2)(k - 2l + 3)$

 由系数关系  $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$  得到递推关系

$$(k + 2)(k - 2l + 3)a_{k+2} = -a_k$$

 从  $a_1 = 0$  开始递推, 得  $a_3 = a_5 = \dots = a_{2l-3} = 0$

 然后遇到  $k = 2l - 3$ , 则  $(k + 2)(k - 2l + 3) = 0$

 递推关系化为  $0 \cdot a_{2l-1} = -a_{2l-3} = 0$ , 从而  $a_{2l-1}$  可以任取

 如前取  $a_{2l-1} = 0$ , 则所有  $a_{2k+1} = 0 (k \in \mathbb{N})$ , 求得第二解为  $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$

# $\nu \geq 3/2$ 的半奇数阶 Bessel 方程

当  $l \geq 2$  时,  $\nu = \frac{2l-1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , 第一解仍然是  $y_1(x) = J_\nu(x)$

对于第二解,  $s_2 = -\nu$ ,  $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2\nu + 1)a_1$  表明  $a_1 = 0$ , 且  $(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2 = (k - \nu + 2)^2 - \nu^2 = (k + 2)(k - 2\nu + 2) = (k + 2)(k - 2l + 3)$

由系数关系  $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$  得到递推关系

$$(k + 2)(k - 2l + 3)a_{k+2} = -a_k$$

从  $a_1 = 0$  开始递推, 得  $a_3 = a_5 = \dots = a_{2l-3} = 0$

然后遇到  $k = 2l - 3$ , 则  $(k + 2)(k - 2l + 3) = 0$

递推关系化为  $0 \cdot a_{2l-1} = -a_{2l-3} = 0$ , 从而  $a_{2l-1}$  可以任取

如前取  $a_{2l-1} = 0$ , 则所有  $a_{2k+1} = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), 求得第二解为  $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$

总结起来, 当  $\nu$  为半奇数时, Bessel 方程的两个线性独立解仍然是

$$y(x) = \{J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\}$$

## §4.3 整数阶 Bessel 方程

 本小节考虑整数阶 Bessel 方程，即  $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，此时  $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$

 当  $m = 0$  时，有  $s_1 = s_2 = 0$ ，只能求得一个形如  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$  的解

 它是第一解  $y_1(x) = J_0(x)$ ，根据上一节的一般理论，第二解必定包含对数函数



## §4.3 整数阶 Bessel 方程

本小节考虑整数阶 Bessel 方程，即  $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，此时  $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$

当  $m = 0$  时，有  $s_1 = s_2 = 0$ ，只能求得一个形如  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$  的解

它是第一解  $y_1(x) = J_0(x)$ ，根据上一节的一般理论，第二解必定包含对数函数

当  $m \in \mathbb{N}^+$  时，第一解为  $y_1(x) = J_m(x)$

对于第二解， $s_2 = -m$ ， $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2m + 1)a_1$  表明  $a_1 = 0$

代入系数关系  $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ ，得到递推关系

$$-a_k = [(k - m + 2)^2 - m^2]a_{k+2} = (k + 2)(k - 2m + 2)a_{k+2}$$

## §4.3 整数阶 Bessel 方程

 本小节考虑整数阶 Bessel 方程，即  $\nu = m \in \mathbb{N}$ ，此时  $s_1 - s_2 = 2m \in \mathbb{N}$

 当  $m = 0$  时，有  $s_1 = s_2 = 0$ ，只能求得一个形如  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$  的解

 它是第一解  $y_1(x) = J_0(x)$ ，根据上一节的一般理论，第二解必定包含对数函数

 当  $m \in \mathbb{N}^+$  时，第一解为  $y_1(x) = J_m(x)$

 对于第二解， $s_2 = -m$ ， $0 = [(s_2 + 1)^2 - \nu^2]a_1 = (-2m + 1)a_1$  表明  $a_1 = 0$

 代入系数关系  $[(k + s_2 + 2)^2 - \nu^2]a_{k+2} + a_k = 0$ ，得到递推关系

$$-a_k = [(k - m + 2)^2 - m^2]a_{k+2} = (k + 2)(k - 2m + 2)a_{k+2}$$

 从  $a_1 = 0$  开始递推得到所有  $a_{2k+1} = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

 从  $a_0 \neq 0$  开始递推得到正比于  $a_0$  的  $a_2, a_4, \dots, a_{2m-2}$ ，然后遇到  $k = 2m - 2$ ，  
则  $(k + 2)(k - 2m + 2) = 0$ ，递推关系化为  $0 \cdot a_{2m} = -a_{2m-2} \propto a_0 \neq 0$ ，矛盾

 于是，第二解不可能具有  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$  的形式，因而必定包含对数函数



# $m$ 阶 Neumann 函数



对于  $\nu = m \in \mathbb{N}$ , 设第二解的形式为  $y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-m} + \beta J_m(x) \ln x$ , 代入

Bessel 方程  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$  求解, 过程见讲义 §4.5 或 §4.6 选读内容



适当选取其中可以任取的两个常数, 最终求得第二解  $y_2(x) = N_m(x)$



它称为  $m$  阶 Neumann 函数, 具体形式为

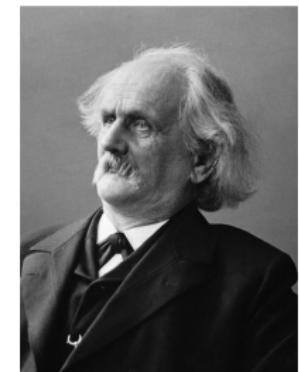
$$N_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} [\psi(k+m+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$



当  $m = 0$  时, 规定去掉第二项有限和



这里出现的  $\psi$  函数定义为  $\psi(x) \equiv \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$



Carl Neumann  
(1832–1925)

# 整数阶 Bessel 方程的解

由  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  可推出  $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$

此外,  $\psi(1) = -\gamma$ , 其中 Euler 常数为

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577\,215\,664\,901\cdots$$

在不同的书上, Neumann 函数的形式可能略有不同, 但实质上是一样的

# 整数阶 Bessel 方程的解

由  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  可推出  $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$

此外,  $\psi(1) = -\gamma$ , 其中 Euler 常数为

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577\,215\,664\,901\cdots$$

在不同的书上, Neumann 函数的形式可能略有不同, 但实质上是一样的

总结起来, 当  $\nu = m$  为整数时, Bessel 方程的两个线性独立解是

$$y(x) = \{\mathbf{J}_m(x), \mathbf{N}_m(x)\}$$

物理上最常遇到的就是这种情况

由于 Neumann 函数包含对数函数  $\ln \frac{x}{2}$ , 第二解  $\mathbf{N}_m(x)$  在  $x = 0$  处有奇性

所以, 如果求解区域包括  $x = 0$  点, 就应该舍弃第二解  $\mathbf{N}_m(x)$

## §4.4 Neumann 函数的一般定义

 对于一般的  $\nu \in \mathbb{C}$ , 可以将  $\nu$  阶 Neumann 函数 定义为

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

 当  $\nu \neq m \in \mathbb{N}$  时, 它显然与  $J_\nu(x)$  线性独立

 故此时 Bessel 方程的两个线性独立解亦可取为  $y(x) = \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$

## §4.4 Neumann 函数的一般定义

 对于一般的  $\nu \in \mathbb{C}$ , 可以将  $\nu$  阶 Neumann 函数 定义为

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

 当  $\nu \neq m \in \mathbb{N}$  时, 它显然与  $J_\nu(x)$  线性独立

 故此时 Bessel 方程的两个线性独立解亦可取为  $y(x) = \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$

 当  $\nu \rightarrow 0$  时, 定义式成为  $\frac{0}{0}$  型

 当  $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}^+$  时, 令  $J_{-m}(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow m} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(k-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$

  $k \leq m-1$  时,  $k-m+1 \leq 0$ , 由  $\frac{1}{\Gamma(-n)} \rightarrow 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 得  $\frac{1}{\Gamma(k-m+1)} \rightarrow 0$

 故  $k \leq m-1$  各项对求和没有贡献, 利用  $\Gamma(k-m+1) = (k-m)!$  ( $k \geq m$ ), 得

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

# $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}^+$ 的情况



作替换  $k \rightarrow k + m$ , 推出

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{k+m}}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+m)-m} \\ &= (-)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = J_m(x) \cos m\pi \end{aligned}$$



最后一步用到  $\cos m\pi = (-)^m$  和

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(m+k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$



可见, 当  $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}^+$  时,  $N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$  也成为  $\frac{0}{0}$  型

# 任意 $\nu$ 阶 Bessel 方程的解



当  $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}$  时, 应用 L'Hospital 法则求出上述  $\frac{0}{0}$  型极限, 得到

$$\lim_{\nu \rightarrow m} N_\nu(x) = N_m(x)$$

相关证明见讲义 §4.7 选读内容

可见,  $\nu$  阶 Neumann 函数确实是整数阶 Neumann 函数的推广



Guillaume de L'Hospital  
(1661–1704)

# 任意 $\nu$ 阶 Bessel 方程的解



当  $\nu \rightarrow m \in \mathbb{N}$  时, 应用 L'Hospital 法则求出上述  $\frac{0}{0}$  型极限, 得到

$$\lim_{\nu \rightarrow m} N_\nu(x) = N_m(x)$$



相关证明见讲义 §4.7 选读内容

可见,  $\nu$  阶 Neumann 函数确实是整数阶 Neumann 函数的推广

$\Omega$  总结起来, 对于任意  $\nu \in \mathbb{C}$  时, Bessel 方程的两个线性独立解总可以取为

$$y(x) = \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$$

当  $\nu$  为半奇数  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  时,  $\cos \nu\pi = 0$ , 有

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} = -\frac{J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

即  $N_\nu(x)$  与  $J_{-\nu}(x)$  只相差一个常数因子



Guillaume de L'Hospital  
(1661–1704)