数 学 物 理 方 法

第一章　复变函数与解析函数

第 4 节至第 6 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 2 月 13 日

§4 初等单值函数

- 通常认为，**基本初等函数**包括**常数**、**幂函数**、**指数函数**、**对数函数**、**三角函数**和**反三角函数**

- **初等函数** (elementary function) 是由**基本初等函数**经过**有限次**的**加减乘除**和**复合**所构成的函数，如 $f(x) = x^2 e^x + 2\tan x$ 和 $g(x) = \sin(x \ln x)$

- 在**复变函数**中，**三角函数**定义为**指数函数**的**线性组合**，所以与**双曲函数**类似

- 它们都不是最基本的，但它们很常用，下面会详细介绍

- 以上这些函数包括**单值函数** (single-valued function) 和**多值函数** (multivalued function)

- **本节**和**下节**分别介绍其中较简单的几种

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- **常数函数** $f(z) = c$，其中 $c \in \mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z) = 0$，故 $f(z)$ 在复平面上解析

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- **常数函数** $f(z)=c$，其中 $c\in\mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z)=0$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **正整数次幂函数** $f(z)=z^n$，其中 $n=1,2,\cdots$
- 前面已经证明，$f'(z)=nz^{n-1}$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **一般的幂函数** $f(z)=z^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{C})$ 是**多值函数**，见后面 **§5.8** 的讨论

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- **常数函数** $f(z) = c$，其中 $c \in \mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z) = 0$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **正整数次幂函数** $f(z) = z^n$，其中 $n = 1, 2, \cdots$
- 前面已经证明，$f'(z) = nz^{n-1}$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **一般的幂函数** $f(z) = z^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{C})$ 是**多值函数**，见后面 **§5.8** 的讨论
- **多项式** (polynomial) $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ (n \in \mathbb{N})$ 是**常数**和**幂函数**的线性组合
- 由第 3 节**例 5** 可知，$P_n(z)$ 在**整个复平面上解析**，且导数为

$$P_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}$$

有理分式

设 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k\ (n\in\mathbb{N})$ 和 $Q_m(z)=\sum\limits_{l=0}^{m}b_lz^l\ (m\in\mathbb{N})$ 是**两个多项式**

则 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 称为**有理分式**，亦称**有理函数** (rational function)

除去满足 $Q_m(z)=0$ 的**点** $z_i\ (i=1,2,\cdots,m)$（其中可能有相同的）**之外**，$f(z)$ **在复平面上处处解析**

有理分式

设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\ (n\in\mathbb{N})$ 和 $Q_m(z)=\sum_{l=0}^{m}b_lz^l\ (m\in\mathbb{N})$ 是**两个多项式**

则 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 称为**有理分式**，亦称**有理函数** (rational function)

除去满足 $Q_m(z)=0$ 的**点** $z_i\ (i=1,2,\cdots,m)$（其中可能有相同的）**之外**，$f(z)$ **在复平面上处处解析**

$f(z)$ 在 z_i 处**没有定义**，而 z_i 的**任一邻域**内都有 $f(z)$ 的**解析点**

因此，z_i 是 $f(z)$ 的**奇点**

比如，**有理分式** $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$ 的**奇点**为 $z=\mathrm{i}$ 和 $z=-\mathrm{i}$

有理分式 $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^2}$ 的**奇点**为 $z=-2$

§4.4 指数函数

- **指数函数** (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv \mathrm{e}^{z} \equiv \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

- **恒等号**是**一般复变量**的指数函数的定义
- **等号**则引用了前面关于**自变量为纯虚数**的指数函数的定义

§4.4 指数函数

🏢 **指数函数** (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv \mathrm{e}^{z} \equiv \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

🚲 **恒等号**是**一般复变量**的指数函数的定义

🚴 **等号**则引用了前面关于**自变量为纯虚数**的指数函数的定义

🏔 易知 $u(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos y$ 和 $v(x,y) = \mathrm{e}^{x}\sin y$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

🚵 可见，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的**一阶偏导数处处连续**，**CR 条件处处满足**

⛷ 从而，e^{z} 在**整个复平面上解析**

§4.4 指数函数

指数函数 (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv \mathrm{e}^z \equiv \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

恒等号是一般复变量的指数函数的定义

等号则引用了前面关于自变量为纯虚数的指数函数的定义

易知 $u(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y$ 和 $v(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

可见，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的一阶偏导数处处连续，**CR 条件处处满足**

从而，e^z 在整个复平面上解析，根据 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，指数函数的导数为

$$(\mathrm{e}^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\sin y = \mathrm{e}^z$$

这一结果与实变量的指数函数完全一样

指数函数的性质

指数函数 $e^z = e^x e^{iy}$ 具有以下性质

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

   由定义有 $e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

2. $|e^z| > 0$

   由 $x \in \mathbb{R}$ 得 $|e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x > 0$

3. e^z 是**周期函数**，**周期**为 $2\pi i$，即 $e^{z+2\pi i} = e^z$

   由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

§4.5 三角函数

复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数 } \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{正弦函数 } \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

注　由此定义易得 $e^{iz} = \cos z + i\sin z$，但不能将该式**误解**为 e^{iz} 的定义

当 $z = i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

§4.5 三角函数

复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数}\ \cos z \equiv \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \text{正弦函数}\ \sin z \equiv \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

注 由此定义易得 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$，但不能将该式**误解**为 e^{iz} 的定义

当 $z=i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在整个复平面上解析

利用 $(e^{iz})'=\dfrac{de^{iz}}{d(iz)}\dfrac{d(iz)}{dz}=i\,e^{iz}$ 和 $(e^{-iz})'=-i\,e^{-iz}$，易得它们的导数为

$$(\cos z)'=\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=-\sin z, \quad (\sin z)'=\frac{i}{2i}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$$

§4.5 三角函数

复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数}\ \cos z \equiv \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \text{正弦函数}\ \sin z \equiv \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

注 由此定义易得 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$，但不能将该式**误解**为 e^{iz} 的定义

当 $z=i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在整个复平面上解析

利用 $(e^{iz})'=\dfrac{de^{iz}}{d(iz)}\dfrac{d(iz)}{dz}=i\,e^{iz}$ 和 $(e^{-iz})'=-i\,e^{-iz}$，易得它们的导数为

$$(\cos z)'=\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=-\sin z, \qquad (\sin z)'=\frac{i}{2i}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$$

三角函数还具有以下性质

1. 奇偶性：$\sin(-z)=\dfrac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\sin z, \quad \cos(-z)=\dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\cos z$

三角函数的性质 2

② 满足各种三角恒等式，如

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} - 2) + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} + 2) = 1$$

$$\begin{aligned}
&\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\
=& \frac{1}{4\mathrm{i}}[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})] \\
=& \frac{1}{4\mathrm{i}}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} e^{\mathrm{i}z_2} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}] = \sin(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
=& \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) \\
=& \frac{1}{4}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}] = \cos(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

三角函数的性质 3 和 4

3. $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是**周期函数**，**周期**为 2π

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $\sin(z + 2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

三角函数的性质 3 和 4

3. $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是**周期函数**，**周期**为 2π

由 $e^{2\pi i}=1$ 得 $\sin(z+2\pi)=\dfrac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i}=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

4. $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都**可以大于** 1

这是与**实变**情况**不同**的

实际上，$\sin(iy)=\dfrac{1}{2i}(e^{-y}-e^{y})$，$\cos(iy)=\dfrac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})$

$|\sin(iy)|$ 和 $|\cos(iy)|$ 显然**可以大于任意实数**

三角函数的性质 3 和 4

3 $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期函数，周期为 2π

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $\sin(z+2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

4 $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都可以大于 1

这是与实变情况**不同**的

实际上，$\sin(iy) = \dfrac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})$，$\cos(iy) = \dfrac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})$

$|\sin(iy)|$ 和 $|\cos(iy)|$ 显然可以大于任意实数

类似于实变函数，还可以定义更多三角函数，如

$$\text{正切函数 } \tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{余切函数 } \cot z \equiv \frac{\cos z}{\sin z}$$

进一步，可定义这些三角函数的反函数，这里就不详细讨论了

§4.6 双曲函数

复变量的双曲函数 (hyperbolic function) 也是通过指数函数来定义的：

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

它们称为双曲余弦函数和双曲正弦函数

由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面上解析

它们的导数为 $(\cosh z)' = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$ 和 $(\sinh z)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$

§4.6 双曲函数

- 复变量的双曲函数 (hyperbolic function) 也是通过指数函数来定义的：

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

- 它们称为双曲余弦函数和双曲正弦函数
- 由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面上解析
- 它们的导数为 $(\cosh z)' = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$ 和 $(\sinh z)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$
- 由定义容易证明双曲函数与三角函数之间存在着以下关系：

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad \sin(iz) = i\sinh z, \quad \sinh(iz) = i\sin z$$

- 由此可以从三角函数的性质得到双曲函数的类似性质，如

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$$

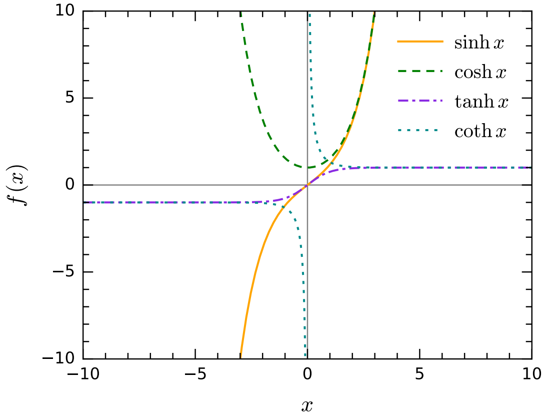
$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cos(iz_1 + iz_2) = \cos(iz_1)\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\sin(iz_2) \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2\end{aligned}$$

更多双曲函数

- 类似于实变函数，还可以定义更多双曲函数及其反函数，如

$$\text{双曲正切函数}\ \tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z},\qquad \text{双曲余切函数}\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

- 实变量双曲函数的图象如下



§5 初等多值函数

§5.1 根式函数的支点

🍟 考虑**根式函数** $w=\sqrt{z-a}$，不失一般性，设 a 为**实数**

🍔 记 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z-a=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ （其中 θ 和 ϕ 不必是主值），则

$$w=\sqrt{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}=\sqrt{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}}=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi/2+k\pi)}$$

🥨 其中 $k\in\mathbb{Z}$，对于每一给定的 z，可能导致**不同结果**的 k **值**有 0 和 1 两种

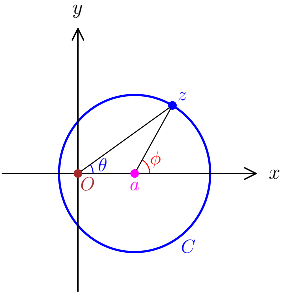
🥓 所以有**两个函数值**

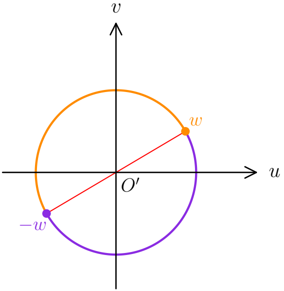
$$w_1=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2},\quad w_2=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi/2+\pi)}=-\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}=-w_1$$

🍕 前面已经指出，**根式函数**的**多值性**源于**宗量** $z-a$ 的**辐角** ϕ 的**多值性**，而不是**自变量** z 的**辐角** θ 的**多值性**

支点

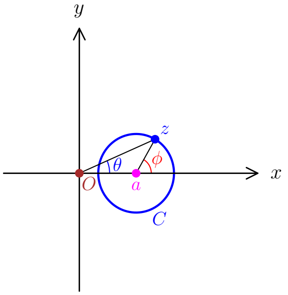
- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$
- 其中 $+$ **号**和 $-$ **号**分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$

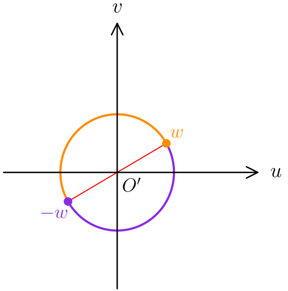




支点

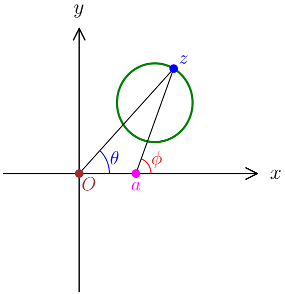
- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$
- 其中 $+$ **号**和 $-$ **号**分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$
- 如果**曲线** C 不包围**原点** O，则 θ **不变**
- 可见，影响函数值的是 ϕ **的变化**而不是 θ **的变化**

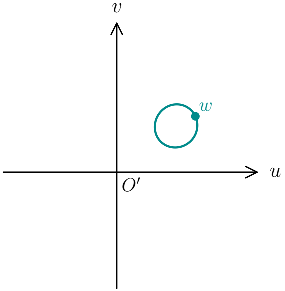




支点

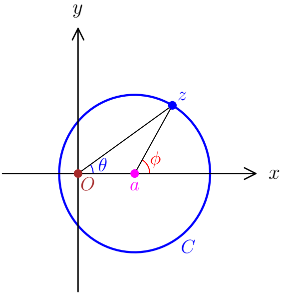
- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$
- 其中 $+$ **号**和 $-$ **号**分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$
- 如果**曲线** C 不包围**原点** O，则 θ **不变**
- 可见，影响函数值的是 ϕ **的变化**而不是 θ **的变化**
- 如果 z 沿**其它曲线**绕一周，而该曲线**不包围** a **点**，则 $z-a$ 的**辐角不变**，因而**函数值**也**不变**

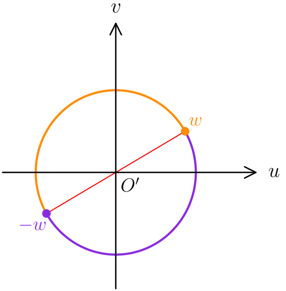




支点

- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$
- 其中 $+$ 号和 $-$ 号分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$
- 如果**曲线** C 不包围**原点** O，则 θ **不变**
- 可见，影响函数值的是 ϕ **的变化**而不是 θ **的变化**
- 如果 z 沿**其它曲线**绕一周，而该曲线**不包围** a **点**，则 $z-a$ 的**辐角不变**，因而**函数值**也**不变**
- a **点**具有特殊地位，让 z 沿**闭曲线**绕**它转一周**回到 z，**函数值**会**发生改变**，这样的点称为**多值函数**的**支点**
- **函数** $w=\sqrt{z-a}$ 只有一个**有限支点** a





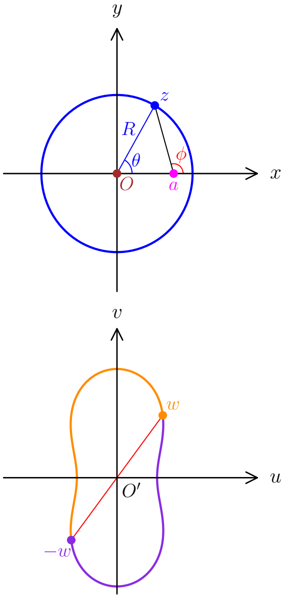
无穷远点

- 如果让 z 沿**大圆** $|z|=R$ 转一周回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**也从 ϕ 变成 $\phi\pm 2\pi$，**函数值**也从 w_1 变成 w_2

- **注**　**大圆**指的是它**包围所有**的**有限支点**，对**函数** $w=\sqrt{z-a}$ 来说就是包围 a **点**

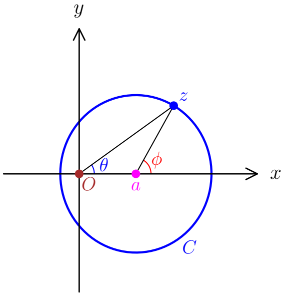
- 由于**绕大圆一周**也可以看作**绕 ∞ 点一周**，所以 ∞ **点**也是**函数** $w=\sqrt{z-a}$ 的**支点**

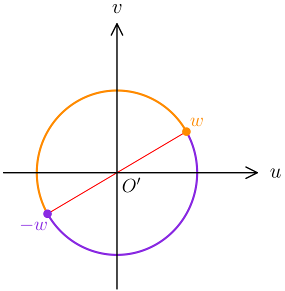
- 因此，**函数** $w=\sqrt{z-a}$ 在**扩充复平面**上共有**两个支点**



无穷远点

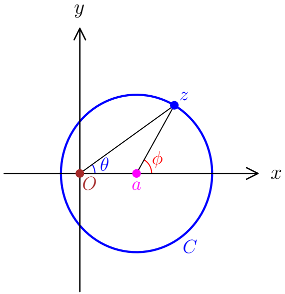
- 如果让 z 沿**大圆** $|z|=R$ 转一周回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**也从 ϕ 变成 $\phi\pm 2\pi$，**函数值**也从 w_1 变成 w_2
- **注**　**大圆**指的是它**包围所有**的**有限支点**，对**函数** $w=\sqrt{z-a}$ 来说就是包围 a **点**
- 由于**绕大圆一周**也可以看作**绕** ∞ **点一周**，所以 ∞ **点**也是**函数** $w=\sqrt{z-a}$ 的**支点**
- 因此，**函数** $w=\sqrt{z-a}$ 在**扩充复平面**上共有**两个支点**
- 如果让 z 沿闭曲线绕 a 点**转两周**（n **周**）回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi\pm 4\pi$
- 这时 $w=\sqrt{z-a}$ 的**函数值不变**，所以 a **点**称为**它的一阶支点**（$n-1$ **阶支点**）
- 易知 ∞ **点**也是**一阶支点**

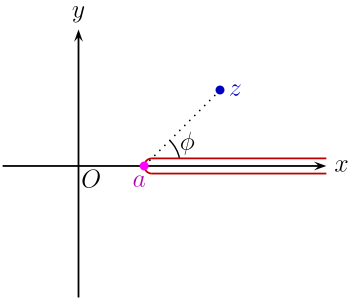




§5.2 割线与单值分支

- 前已指出，根式函数的多值性源于宗量的辐角的多值性
- 从几何上看，是因为自变量 z 可以绕支点不停转动，导致辐角的变化
- 如果以某种方式把 z 平面割破，使自变量 z 不能绕支点转动一周（等价于对宗量辐角的取值范围加以限制），则函数值就变成确定的，也就是得到了一个单值分支
- 对宗量辐角取值范围加以不同的限制可得到不同的单值分支





函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的割线和单值分支

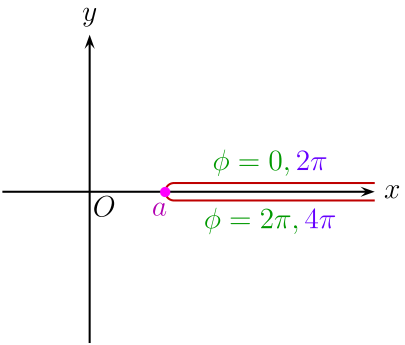
以函数 $w=\sqrt{z-a}$ 来说，可把割线取为由 a 点出发沿 x 轴正向至 ∞ 点的射线

在这样割破的 z 平面上，自变量 z 再也不能绕支点 a 转动，宗量的辐角就被限制在一定的范围内，因而函数值也被限制在某个单值分支内

如果规定割线上岸的 $\phi=0$，则在整个割破的 z 平面上，$0\leq\phi<2\pi$，就得到一个单值分支

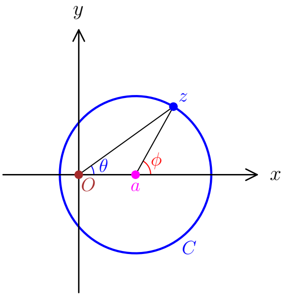
如果规定割线上岸的 $\phi=2\pi$，则在整个割破的 z 平面上，$2\pi\leq\phi<4\pi$，就得到另一个单值分支

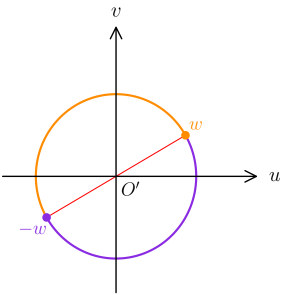
实际上，任何由 a 点出发到 ∞ 点的射线甚至曲线都可以作为该函数的割线



§5.3 Riemann 面

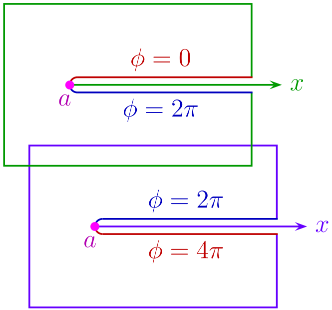
- 还是以**函数** $w = \sqrt{z-a}$ 为例
- 如果规定**割线上岸**的 $\phi = 0$，则在所得的**单值分支**中，$0 \le \arg w < \pi$
- 如果规定**割线上岸**的 $\phi = 2\pi$，则在所得的**单值分支**中，$\pi \le \arg w < 2\pi$
- 两个分支的函数值合起来充满了**整个 w 平面**
- 然而，自变量却要用**两张 z 平面**来表示，不太令人满意





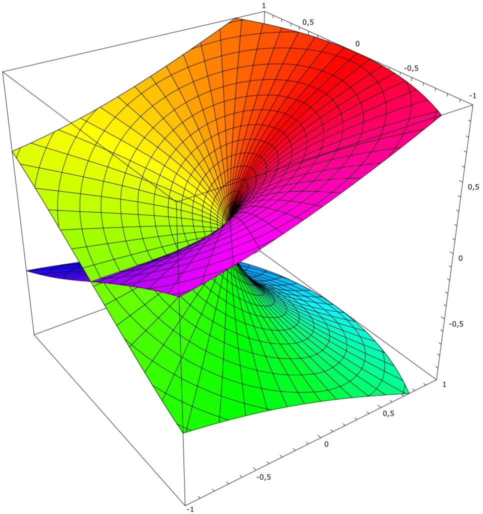
§5.3 Riemann 面

- 还是以函数 $w = \sqrt{z-a}$ 为例
- 如果规定割线上岸的 $\phi = 0$，则在所得的单值分支中，$0 \le \arg w < \pi$
- 如果规定割线上岸的 $\phi = 2\pi$，则在所得的单值分支中，$\pi \le \arg w < 2\pi$
- 两个分支的函数值合起来充满了整个 w 平面
- 然而，自变量却要用两张 z 平面来表示，不太令人满意
- 第一张 z 平面的下岸与第二张 z 平面的上岸都对应于 $\phi = 2\pi$，可将它们粘在一起
- 第二张 z 平面的下岸 $\phi = 4\pi$ 与第一张 z 平面的上岸 $\phi = 0$ 对于函数 $w = \sqrt{z-a}$ 来说是一回事，也可将它们粘在一起
- 这样粘合得到的具有两页的 z 平面称为函数 $w = \sqrt{z-a}$ 的 Riemann 面
- 在 Riemann 面上，函数 $w = \sqrt{z-a}$ 是单值的



函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 的 Riemann 面

- 将割线取为负实轴，则函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 的 Riemann 面如下图所示



§5.4 对数函数

- **对数函数** (logarithmic function) 定义为**指数函数**的**反函数**
- 如果 w 满足 $\mathrm{e}^w = z$，则

$$w = \operatorname{Ln} z \text{ 是 } z \text{ 的对数函数}$$

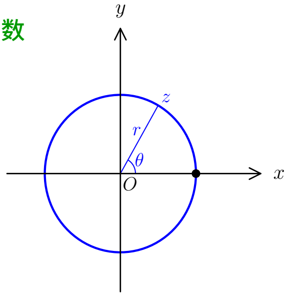
- 令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w = u + \mathrm{i}v$，有 $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
- 比较两边，得 $u = \ln r, \quad v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- 换句话说，$\operatorname{Ln} z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

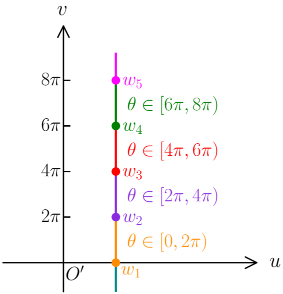
§5.4　对数函数

- **对数函数** (logarithmic function) 定义为**指数函数**的**反函数**
- 如果 w 满足 $\mathrm{e}^w = z$，则

$$w = \mathrm{Ln}\, z \text{ 是 } z \text{ 的对数函数}$$

- 令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w = u + \mathrm{i}v$，有 $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
- 比较两边，得　$u = \ln r,\quad v = \theta + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$
- 换句话说，$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi),\quad k \in \mathbb{Z}$
- 可见，**对数函数**也是一个**多值函数**，且具有**无穷多个单值分支**
- 由于**多值性**来自 z 的**幅角** θ，对数函数的**支点**是 $z = 0$ 和 $z = \infty$
- 由于自变量绕 $z = 0$ 转动**任意周**回到出发点，函数值都**不能复原**，$z = 0$ 称为**超越支点**
- 同样，$z = \infty$ 也是**超越支点**





对数函数的 Riemann 面和主值分支

- 对数函数的割线可取为由 $z=0$ 出发沿 x 轴正向（或负向）至 $z=\infty$ 的射线，即 x 轴的正半轴（或负半轴）

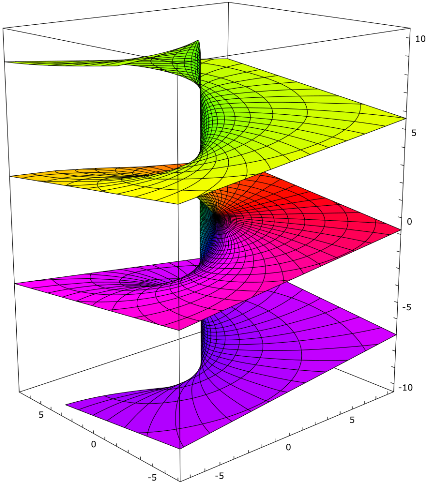
- 相应的 Riemann 面具有无穷多页，类似于螺旋楼梯

- 若 θ 取为辐角主值并置 $k=0$，则所得单值分支称为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值分支，记作 $\ln z$，即

$$\ln z = \ln r + \mathrm{i}\theta = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- 从而

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k\in\mathbb{Z}$$



§5.6 多值函数的解析性

- 多值函数在其 Riemann 面上变成单值的
- 所以可以像单值函数一样定义导数并讨论多值函数的解析性
- 但是，支点为 Riemann 面各页所共有
- 在支点的邻域内，涉及到 Riemann 面的多页，导致函数值是**不确定**的
- 因而支点处的导数**没有定义**，所以支点必为奇点

§5.7 对数函数的导数

- 在多值函数的单值分支内，反函数存在
- 所以可以用与实变函数相同的反函数求导法来计算导数
- 这一方法可以方便地用于根式函数和对数函数
- 以对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 为例，由 $\mathrm{e}^w = z$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \mathrm{e}^w, \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-w} = \frac{1}{\mathrm{e}^w} = \frac{1}{z}$$

- 故对数函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$$

- 注意，该导数是一个单值函数

§5.8 一般幂函数

👑 **一般幂函数**定义为

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

🎩 这相当于对 $\mathrm{e}^{\mathrm{Ln}\,z} = z$ 两边同时作 α 次幂，也可以写作

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha(\ln z + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\alpha\ln z}\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

👒 若 $\alpha \in \mathbb{Z}$，则 $\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}} = 1$，而 z^α 是**单值函数**

🧢 特别地，若 $\alpha = 1, 2, \cdots$，则 z^α 是**正整数次幂函数**，即通常的**乘方**

§5.8 一般幂函数

- 一般幂函数定义为

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- 这相当于对 $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} z} = z$ 两边同时作 α 次幂，也可以写作

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln z + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}\mathrm{e}^{2k\pi\alpha \mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 若 $\alpha \in \mathbb{Z}$，则 $\mathrm{e}^{2k\pi\alpha \mathrm{i}} = 1$，而 z^{α} 是单值函数
- 特别地，若 $\alpha = 1, 2, \cdots$，则 z^{α} 是正整数次幂函数，即通常的乘方
- 若 $\alpha \notin \mathbb{Z}$，则 z^{α} 是多值函数，支点为 $z = 0$ 和 $z = \infty$
- 若 α 为分数，则 z^{α} 类似于前面讨论的根式函数；具体来说，若 $\alpha = \dfrac{q}{p}$，其中 q 和 p 是两个没有公约数的整数，则两支点均为 $p-1$ 阶支点
- 若 α 为无理数，或 α 的虚部不为零，则两支点均为超越支点

§5.8 一般幂函数

👑 一般幂函数定义为

$$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z},\quad \alpha\in\mathbb{C}$$

🎩 这相当于对 $\mathrm{e}^{\mathrm{Ln}\,z}=z$ 两边同时作 α 次幂，也可以写作

$$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha(\ln z+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\alpha\ln z}\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}},\quad k\in\mathbb{Z}$$

👒 若 $\alpha\in\mathbb{Z}$，则 $\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}}=1$，而 z^{α} 是单值函数

🧢 特别地，若 $\alpha=1,2,\cdots$，则 z^{α} 是正整数次幂函数，即通常的乘方

🎓 若 $\alpha\notin\mathbb{Z}$，则 z^{α} 是多值函数，支点为 $z=0$ 和 $z=\infty$

⛑ 若 α 为分数，则 z^{α} 类似于前面讨论的根式函数；具体来说，若 $\alpha=\dfrac{q}{p}$，其中 q 和 p 是两个没有公约数的整数，则两支点均为 $p-1$ 阶支点

🪖 若 α 为无理数，或 α 的虚部不为零，则两支点均为超越支点

🎀 由指数函数和对数函数的导数得到 z^{α} 的导数为

$$(z^{\alpha})'=(\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z})'=\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}(\alpha\,\mathrm{Ln}\,z)'=z^{\alpha}\frac{\alpha}{z}=\alpha z^{\alpha-1}$$

§6 解析函数的物理意义

§6.1 调和函数

如果二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内具有连续的二阶偏导数，且满足二维 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数

类似地，可以定义三维或更高维的调和函数

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

§6.2 解析函数与调和函数的关系

♈ 若 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是 D 内的调和函数

⤵ 注　由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部

§6.2 解析函数与调和函数的关系

♈ 若 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 D 内的调和函数

⤵ 注　由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部

🟥 事实上，由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析，它就在 D 内具有各阶导数 (见下章)，所以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的各阶偏导数

🚊 又 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内满足 **CR 条件** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，求导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

👉 **二维 Laplace 方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

🚇 所以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 D 内的调和函数

共轭调和函数

- 由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 并不是相互独立的，而是由 **CR 条件**紧密联系起来的，它们称为**共轭调和函数**

- 若已知函数 $u(x,y)$，则由 **CR 条件**得

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

- 再进行**积分**，就可求出 $v(x,y)$，**反之亦然**

共轭调和函数

由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 并不是相互独立的，而是由 **CR 条件**紧密联系起来的，它们称为**共轭调和函数**

若已知函数 $u(x,y)$，则由 **CR 条件**得

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

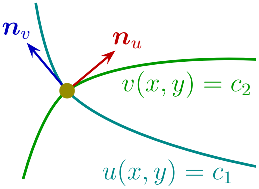
再进行**积分**，就可求出 $v(x,y)$，**反之亦然**

由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 满足**二维 Laplace 方程**，它们可以表示**无电荷区域**的**静电场**的**电势**

当然，它们也可以用来描述其它满足**二维 Laplace 方程**的物理量

§6.3 正交曲线族

若 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x,y) = c_1$ 和 $v(x,y) = c_2$ 相互正交



事实上，$\boldsymbol{n}_u = \nabla u$ 和 $\boldsymbol{n}_v = \nabla v$ 是曲线 $u(x,y) = c_1$ 和 $v(x,y) = c_2$ 的未归一化法向矢量

在交点处，自变量 (x,y) 相同，利用 CR 条件推出

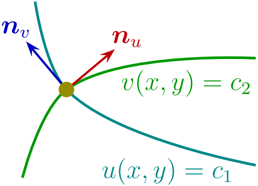
$$\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

因此，两曲线在交点处是正交的

这一结论与 c_1 和 c_2 的取值**无关**，所以两个曲线族是正交曲线族

§6.3 正交曲线族

♉ 若 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和 $v(x,y)=c_2$ 相互正交



■ 事实上，$\boldsymbol{n}_u=\nabla u$ 和 $\boldsymbol{n}_v=\nabla v$ 是曲线 $u(x,y)=c_1$ 和 $v(x,y)=c_2$ 的未归一化法向矢量

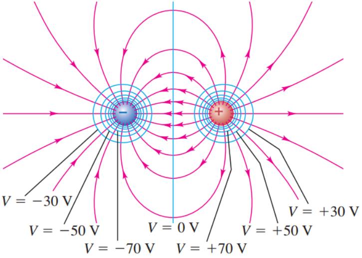
🚕 在交点处，自变量 (x,y) 相同，利用 **CR** 条件推出

$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=\nabla u\cdot\nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

🚙 因此，两曲线在交点处是正交的

🚓 这一结论与 c_1 和 c_2 的取值**无关**，所以两个曲线族是正交曲线族

🚌 由以上讨论可知，若 $u(x,y)=c_1$ 表示某平面静电场的等势线族，则 $v(x,y)=c_2$ 表示其电力线族，反之亦然



由电力线方程求等势线方程

💛 例　已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2-y^2=c_1$，求等势线方程

🟨 解　令 $v(x,y)=x^2-y^2$，它是调和函数，可作为某解析函数的虚部

🚍 求出其实部 $u(x,y)$，则等势线方程为 $u(x,y)=$ 常数

🚖 根据 **CR 条件**，有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2x$，从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y=-2y\,\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}(-2xy) \end{aligned}$$

🚘 故 $u(x,y)=-2xy+c'$，其中 c' 为常数

🚔 于是，等势线方程为

$$xy=c_2$$

由电力线方程求等势线方程

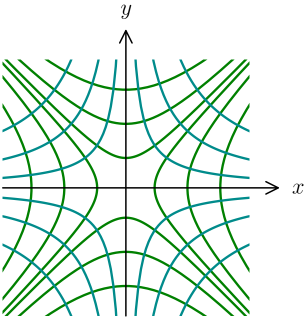
例　已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2 - y^2 = c_1$，求等势线方程

解　令 $v(x, y) = x^2 - y^2$，它是调和函数，可作为某解析函数的虚部

求出其实部 $u(x, y)$，则等势线方程为 $u(x, y) =$ 常数

根据 CR 条件，有 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x$，从而

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -2y\, dx - 2x\, dy \\ &= d(-2xy) \end{aligned}$$



故 $u(x, y) = -2xy + c'$，其中 c' 为常数

于是，等势线方程为

$$xy = c_2$$

本例的电力线和等势线都是双曲线

讨论 1

注　如果给定的**电力线方程**为 $t(x,y)=c_1$，而 $t(x,y)$ **不是调和函数**，则不能直接把 $t(x,y)$ 作为某**解析函数**的**虚部**

此时应该寻找**函数** $v(x,y)=F(t)$ 使得**该函数**为**调和函数**，使 $v(x,y)$ 可作为某**解析函数**的**虚部**；注意 $t(x,y)=$ **常数** 时 $v(x,y)=$ **常数**

讨论 1

注 如果给定的**电力线方程**为 $t(x,y)=c_1$，而 $t(x,y)$ **不是调和函数**，则不能直接把 $t(x,y)$ 作为某**解析函数**的**虚部**

此时应该寻找**函数** $v(x,y)=F(t)$ 使得**该函数**为**调和函数**，使 $v(x,y)$ 可作为某**解析函数**的**虚部**；注意 $t(x,y)=$ **常数** 时 $v(x,y)=$ **常数**

若给定的是**等势线方程**，可类似求解**电力线方程**

比如给定**等势线方程**为 $t(x,y)=x^2+y^2=c_1$，它**不是调和函数**

可令 $u(x,y)=F(t)=F(x^2+y^2)$，求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xF'(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2F'(t)+4x^2F''(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2F'(t)+4y^2F''(t)$$

要求 $u(x,y)$ 是**调和函数**，则

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4F'(t)+4(x^2+y^2)F''(t)=4[F'(t)+tF''(t)]$$

故

$$\frac{\mathrm{d}F'(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{F'(t)}{t},\quad \frac{\mathrm{d}F'(t)}{F'(t)}=-\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

讨论 2

- 两边**积分**，得 $\ln F'(t) = -\ln t + c$，其中 c 是积分常数
- 从而 $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = F'(t) = \exp(-\ln t + c) = \dfrac{a}{t}$，其中 $a \equiv \mathrm{e}^c$
- 再次**积分**，求出**通解** $F(t) = a\ln t + b$，其中 b 是积分常数
- 取一**特解** $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t$，即得 $u(x,y) = F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln r$

讨论 2

两边**积分**，得 $\ln F'(t) = -\ln t + c$，其中 c 是积分常数

从而 $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = F'(t) = \exp(-\ln t + c) = \dfrac{a}{t}$，其中 $a \equiv \mathrm{e}^c$

再次**积分**，求出**通解** $F(t) = a\ln t + b$，其中 b 是积分常数

取一**特解** $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t$，即得 $u(x,y) = F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln r$

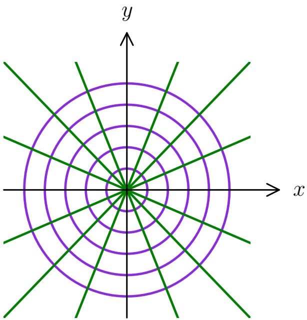
这一结果其实可以通过 $t(x,y) = x^2 + y^2$ 与 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 的关系猜测出来

因为 $\ln r$ 是**解析函数** $\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$ 的实部，必为**调和函数**

由此看出相应的**虚部**是

$$v(x,y) = \theta + c_2' = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x} + c_2'$$

于是，**电力线族**的方程可以表达为 $y = c_2 x$，它与**等势线族**是**正交**的



讨论 3

- 如果只是求**正交曲线族**，则并不一定要借助于**复变函数**的技术
- 实际上，用**微积分**中学过的方法来处理可能更简单一些
- 以刚才的问题为例，设**电力线方程**为 $y=g(x)$
- 在点 (x,y) 处，**电力线**的**切线斜率**为 $k_2=g'(x)$
- 对**等势线方程**为 $t(x,y)=x^2+y^2=c_1$ 两边求**微分**，得

$$\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y=0,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$$

- 故**等势线**在点 (x,y) 处的**切线斜率**为 $k_1=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}$
- 两者要**正交**，必须满足**垂直线**的**斜率关系** $k_1k_2=-1$，即 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{y}{x}$
- 故 $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$，积分得到 $g(x)=c_2x$
- 即**电力线方程**为 $y=c_2x$