量 子 场 论

第 5 章 量子旋量场

5.1 节至 5.3 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

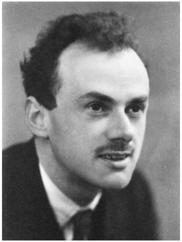
更新日期：2024 年 1 月 10 日

第 5 章　量子旋量场

本章讨论**旋量场** (spinor field) 的**正则量子化**，旋量场对应于**旋量表示** (spinor representation)

旋量表示是**固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$** 的一个**投影表示**，也是相应**覆盖群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$** 的一个**线性表示**

Paul Dirac 在 1928 年首次将旋量表示引入到描述电子的理论中，建立了 **Dirac 方程**



Paul Dirac
(1902–1984)

$\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数都是 **Lorentz 代数**，它们的表示可以通过构造满足 Lorentz 代数关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

的**生成元矩阵**来得到

下面就以这样的方式建立旋量表示

5.1 节 Lorentz 群的旋量表示

♈ 假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的 $N \times N$ **矩阵** γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$：

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}}$$

🛖 最后一步是一种简写，省略了 $N \times N$ **单位矩阵** $\mathbf{1}$

🏘️ 这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 γ **矩阵**

🏡 这个反对易关系意味着 $\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu}$

5.1 节 Lorentz 群的旋量表示

♈ 假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的 $N \times N$ **矩阵** γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$：

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}}$$

最后一步是一种简写，省略了 $N \times N$ **单位矩阵 $\mathbf{1}$**

这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 γ **矩阵**

这个反对易关系意味着 $\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu}$

当 $\mu \neq \nu$ 时，$g^{\mu\nu} = 0$，而 γ^μ 与 γ^ν 是**反对易**的，即

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad \mu \neq \nu}$$

当 $\mu = \nu$ 时，有

$$(\gamma^0)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^0, \gamma^0\} = g^{00} = \mathbf{1}, \quad (\gamma^i)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^i, \gamma^i\} = g^{ii} = -\mathbf{1}$$

Dirac 矩阵的性质

♉ $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ 表明 $(\gamma^0)^2$ 的**本征值**都是 1，$(\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$ 表明 $(\gamma^i)^2$ 的**本征值**都是 -1

🏠 这意味着 γ^0 的**本征值**为实数 ± 1，γ^i 的**本征值**为虚数 $\pm\mathrm{i}$

🚪 将它们**对角化**，则对角元是这些本征值：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i} & & & \\ & \pm \mathrm{i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Dirac 矩阵的性质

♉ $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ 表明 $(\gamma^0)^2$ 的本征值都是 1，$(\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$ 表明 $(\gamma^i)^2$ 的本征值都是 -1

🏠 这意味着 γ^0 的本征值为实数 ± 1，γ^i 的本征值为虚数 $\pm \mathrm{i}$

🚪 将它们对角化，则对角元是这些本征值：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i} & & & \\ & \pm \mathrm{i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

🪟 这些性质告诉我们，γ^0 是厄米矩阵，γ^i 是反厄米矩阵，即

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

🛋️ 于是 $(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$，$(\gamma^i)^\dagger \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = \mathbf{1}$

🛏️ 可见 γ^0 和 γ^i 都是幺正矩阵

矩阵 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

♊ 以 Dirac 矩阵的对易子定义另一组 $N\times N$ 矩阵

$$\boxed{\mathcal{S}^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}$$

🏭 显然，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 反对称，$\mathcal{S}^{\mu\nu} = -\mathcal{S}^{\nu\mu}$

🔩 因而 $\{\mathcal{S}^{\mu\nu}\}$ 中一共有 6 个独立矩阵

🔧 利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

👨‍🔧 以及反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，推出

$$[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu\gamma^\nu), \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\nu) = \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$$

旋量表示的生成元矩阵

♋ 根据**对易子公式** $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ 和 $[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$，

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}([\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]\gamma^\sigma + \gamma^\rho[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\sigma]\gamma^\rho - \gamma^\sigma[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})\gamma^\sigma + \mathrm{i}\gamma^\rho(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\quad - \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma})\gamma^\rho - \mathrm{i}\gamma^\sigma(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})]
\end{aligned}$$

旋量表示的生成元矩阵

♋ 根据**对易子公式** $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$ 和 $[\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\rho]=\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})$，

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}^{\mu\nu},\mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}([\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\sigma]-[\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}([\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\rho]\gamma^\sigma+\gamma^\rho[\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\sigma]-[\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\sigma]\gamma^\rho-\gamma^\sigma[\mathcal{S}^{\mu\nu},\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})\gamma^\sigma+\mathrm{i}\gamma^\rho(\gamma^\mu g^{\nu\sigma}-\gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\qquad -\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\sigma}-\gamma^\nu g^{\mu\sigma})\gamma^\rho-\mathrm{i}\gamma^\sigma(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})] \\
&= \frac{\mathrm{i}^2}{4}[g^{\nu\rho}(\gamma^\mu\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\mu)-g^{\mu\rho}(\gamma^\nu\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\nu) \\
&\qquad -g^{\nu\sigma}(\gamma^\mu\gamma^\rho-\gamma^\rho\gamma^\mu)+g^{\mu\sigma}(\gamma^\nu\gamma^\rho-\gamma^\rho\gamma^\nu)] \\
&= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}\mathcal{S}^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}\mathcal{S}^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}\mathcal{S}^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}\mathcal{S}^{\nu\rho})
\end{aligned}$$

📮 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 满足 **Lorentz 代数关系** $[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

✉️ 因而 $\mathcal{S}^{\mu\nu}=\mathrm{i}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]/4$ 必定是 **Lorentz 群某个表示**的**生成元矩阵**

🏤 以 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 生成的表示就是**旋量表示**

旋量表示中的固有保时向 Lorentz 变换矩阵

♌ 根据 4.1 节的讨论，一组**变换参数** $\omega_{\mu\nu}$ 在 **Lorentz 群**的**矢量表示**中生成**固有保时向的有限变换**

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{X}, \quad X \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$$

🏫 类似地，这组参数在**旋量表示**中生成**固有保时向**的**有限变换**

$$\boxed{D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{Y}, \quad Y \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}}$$

👩‍🏫 这样定义的 $D(\Lambda)$ 是**旋量表示**中的 **Lorentz 变换矩阵**

👨‍🎓 由于 $\mathrm{e}^{-Y}\mathrm{e}^{Y} = \mathrm{e}^{-Y+Y} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$，$D(\Lambda)$ 的**逆矩阵**为

$$D^{-1}(\Lambda) = \mathrm{e}^{-Y} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$$

多重对易子

♍ 对于**算符**或**同阶方阵** B 与 A，以如下方式定义**多重对易子** $[B, A^{(n)}]$：

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \cdots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

🏨 可以用**数学归纳法**证明 $BA^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}]$

🛎 由于负整数 m 的阶乘为 $m! \to \infty$，可将上式右边化为**无穷级数**，

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}]$$

多重对易子

♍ 对于**算符**或**同阶方阵** B 与 A，以如下方式定义**多重对易子** $[B,A^{(n)}]$：

$$[B,A^{(0)}]\equiv B,\quad [B,A^{(1)}]\equiv[[B,A^{(0)}],A]=[B,A]$$

$$[B,A^{(2)}]\equiv[[B,A^{(1)}],A]=[[B,A],A],\quad\cdots,\quad [B,A^{(n)}]\equiv[[B,A^{(n-1)}],A]$$

🏨 可以用**数学归纳法**证明 $BA^k=\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{(k-n)!n!}A^{k-n}[B,A^{(n)}]$

🛎 由于负整数 m 的阶乘为 $m!\to\infty$，可将上式右边化为**无穷级数**，

$$BA^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!n!}A^{k-n}[B,A^{(n)}]$$

🧳 推出 $\boxed{e^{-A}Be^{A}}=e^{-A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}BA^k=e^{-A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!n!}A^{k-n}[B,A^{(n)}]$

$$=e^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k-n)!}A^{k-n}[B,A^{(n)}]$$

$$=e^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{A}[B,A^{(n)}]=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B,A^{(n)}]}$$

Dirac 矩阵的 Lorentz 变换

♎ 由于 $$[\gamma^\mu,\mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -[\mathcal{S}^{\rho\sigma},\gamma^\mu] = [\mathcal{S}^{\sigma\rho},\gamma^\mu] = \mathrm{i}(\gamma^\sigma g^{\rho\mu} - \gamma^\rho g^{\sigma\mu})$$
$$= \mathrm{i}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🏬 有 $$[\gamma^\mu, Y^{(1)}] = [\gamma^\mu, Y] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu,\mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu = X^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(2)}] = [[\gamma^\mu, Y^{(1)}], Y] = X^\mu{}_\nu[\gamma^\nu, Y] = X^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho\gamma^\rho = (X^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \cdots,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

Dirac 矩阵的 Lorentz 变换

♎ 由于

$$[\gamma^\mu, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -[\mathcal{S}^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = [\mathcal{S}^{\sigma\rho}, \gamma^\mu] = \mathrm{i}(\gamma^\sigma g^{\rho\mu} - \gamma^\rho g^{\sigma\mu})$$
$$= \mathrm{i}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🏬 有

$$[\gamma^\mu, Y^{(1)}] = [\gamma^\mu, Y] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu = X^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(2)}] = [[\gamma^\mu, Y^{(1)}], Y] = X^\mu{}_\nu[\gamma^\nu, Y] = X^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho\gamma^\rho = (X^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \cdots,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🛒 利用 $\mathrm{e}^{-A}B\mathrm{e}^{A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B, A^{(n)}]$ 推出

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \mathrm{e}^{-Y}\gamma^\mu\mathrm{e}^{Y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu = (\mathrm{e}^X)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🪜 即

$$\boxed{D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}$$

🛍 类比**四维动量算符** P^μ 的 Lorentz 变换 $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ ，把上式看作**旋量表示**中 **Dirac 矩阵 γ^μ** 的 **Lorentz 变换规则**，那么 γ^μ 是一个 **Lorentz 矢量**

单位矩阵和生成元矩阵的 Lorentz 变换

♏ 与 γ^μ 对应的**协变矢量**为 $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$，从而

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3$$

🏦 $N \times N$ **单位矩阵 $\mathbf{1}$** 满足

$$D^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{1}\,D(\Lambda) = \mathbf{1}$$

💶 因而 $\mathbf{1}$ 是一个 **Lorentz 标量**

💵 **生成元 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$** 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda)\mathcal{S}^{\mu\nu}D(\Lambda) &= \frac{\mathrm{i}}{4}[D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda), D^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu D(\Lambda)] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\mathcal{S}^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

💷 可见，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**

γ^5 矩阵

- 引入一个新的 $N \times N$ 矩阵 $\boxed{\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$
- 由于 $\mu \neq \nu$ 时 $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的奇置换} \end{cases}$$

γ^5 矩阵

引入一个新的 $N \times N$ 矩阵 $\boxed{\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$

由于 $\mu \neq \nu$ 时 $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

这种置换性质与**四维 Levi-Civita 符号类似**：

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

因而**置换操作**带来的**正负号**在 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 与 $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ 的缩并中**相互抵消**，如

$$\varepsilon_{1023}\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon_{0123}(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

由此得到 $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\mathrm{i}\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\dfrac{\mathrm{i}}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

γ^5 的 Lorentz 变换

1.5 节曾推出等式

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

从而，$\gamma^5 = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}$ 的**固有保时向 Lorentz 变换**是

$$\begin{aligned}
D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) &= -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}D(\Lambda)D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}D(\Lambda) \\
&\quad \times D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\rho}D(\Lambda)D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\sigma}D(\Lambda) \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta} = \gamma^5
\end{aligned}$$

可见，γ^5 是一个 **Lorentz 标量**

γ^5 的性质

♒ γ^5 的**平方**为

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -(-\mathbf{1})^3 = \mathbf{1}$$

🏥 第二步利用**偶置换**将后面的 $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 转化为 $\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0$

👨‍⚕️ 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，$\gamma^5$ 是**厄米**矩阵，

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

💊 此外，γ^5 与 γ^μ **反对易**，

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu - \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) = 0$$

🩹 即

$$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$$

$\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换

♓ $\gamma^\mu\gamma^5$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

💒 因而它是一个 **Lorentz 矢量**

🤵 再引入

$$\boxed{\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathcal{S}^{\mu\nu}}$$

👰 它**正比于** $\mathcal{S}^{\mu\nu}$，所以也是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，

$$D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}$$

💍 当 $\mu \neq \nu$ 时，$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^\mu\gamma^\nu$，故 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 **6 个独立分量**为

$$\sigma^{01} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1, \quad \sigma^{02} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2, \quad \sigma^{03} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^3$$
$$\sigma^{12} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^2, \quad \sigma^{13} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^3, \quad \sigma^{23} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^3$$

变换矩阵 $D(\mathcal{P})$

- 现在拥有**一组矩阵** $\boxed{\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}}$
- 它们的**独立分量个数之和**为 $1+1+4+4+6=16$
- 上面讨论了这些矩阵的**固有保时向 Lorentz 变换**，下面研究**宇称变换**

变换矩阵 $D(\mathcal{P})$

- 现在拥有一组矩阵 $\boxed{\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}}$
- 它们的独立分量个数之和为 $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$
- 上面讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换，下面研究宇称变换
- 用 γ^0 定义变换矩阵

$$\boxed{D(\mathcal{P}) = \zeta\gamma^0}$$

- 其中 ζ 是一个复的相位因子，满足 $|\zeta|^2 = 1$
- $D^\dagger(\mathcal{P})D(\mathcal{P}) = \zeta^*(\gamma^0)^\dagger\zeta\gamma^0 = |\zeta|^2(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ 表明，$D(\mathcal{P})$ 是幺正矩阵，故

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = \zeta^*\gamma^0$$

- 用 $D(\mathcal{P})$ 对 γ^0 和 γ^i 作相似变换，得

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) &= |\zeta|^2\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = +\gamma^0 \\ D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) &= |\zeta|^2\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i \end{aligned}$$

γ^μ、1 和 γ^5 的宇称变换

利用**宇称变换矩阵** $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$

将 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 和 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

可见，$D(\mathcal{P})$ 就是**旋量表示**中的**宇称变换矩阵**，它是**非固有保时向**的

上式是 γ^μ 的**宇称变换**形式，按照 1.4 节的定义，γ^μ 是**极矢量**

γ^μ、1 和 γ^5 的宇称变换

- 利用宇称变换矩阵 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$
- 将 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 和 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

- 可见，$D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的宇称变换矩阵，它是非固有保时向的
- 上式是 γ^μ 的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义，γ^μ 是极矢量
- $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 说明 γ^0 是宇称本征态，本征值为 $+$，即具有偶宇称
- $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 说明 γ^i 是宇称本征态，本征值为 $-$，即具有奇宇称
- 虽然单位矩阵 $\mathbf{1}$ 与 γ^5 都是 Lorentz 标量，但它们的宇称变换性质不同，

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^5$$

- $\mathbf{1}$ 是狭义的标量，具有偶宇称；γ^5 是赝标量，具有奇宇称

$\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换

$\gamma^\mu\gamma^5$ 的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5$$

根据 1.4 节的定义，$\gamma^\mu\gamma^5$ 是**轴矢量**，其分量的**宇称性质**与 γ^μ **相反**

$\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换

$\gamma^\mu\gamma^5$ 的**宇称变换**是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5$$

根据 1.4 节的定义，$\gamma^\mu\gamma^5$ 是**轴矢量**，其分量的**宇称性质**与 γ^μ **相反**

$\sigma^{\mu\nu}$ 的**宇称变换**为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu}D(\mathcal{P}) &= \frac{\mathrm{i}}{2}[D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}), D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\nu D(\mathcal{P})] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta[\gamma^\alpha,\gamma^\beta] = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{0i}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0{}_\alpha\mathcal{P}^i{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{0i}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{ij}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^i{}_\alpha\mathcal{P}^j{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = +\sigma^{ij}$$

旋量表示的维数

- 可见，集合 $\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由**标量 1**、**赝标量** γ^5、**极矢量** γ^μ、**轴矢量** $\gamma^\mu\gamma^5$ 和 **2 阶反对称张量** $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的
- 综合考虑**固有保时向 Lorentz 变换**和**宇称变换**，则这些矩阵的变换性质**各不相同**
- 因而彼此之间是**线性独立**的，总共有 **16 个**线性独立的矩阵
- 线性独立的 $N \times N$ 矩阵至多有 N^2 个，需要 $N \geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵

旋量表示的维数

- 可见，集合 $\{1,\gamma^5,\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5,\sigma^{\mu\nu}\}$ 是由**标量 1**、**赝标量** γ^5、**极矢量** γ^μ、**轴矢量** $\gamma^\mu\gamma^5$ 和 **2 阶反对称张量** $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的
- 综合考虑**固有保时向 Lorentz 变换**和**宇称变换**，则这些矩阵的变换性质**各不相同**
- 因而彼此之间是**线性独立**的，总共有 **16 个**线性独立的矩阵
- 线性独立的 $N\times N$ 矩阵至多有 N^2 个，需要 $N\geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵
- 取 $N=4$，就可以用这 16 个矩阵展开一个**任意**的 4×4 矩阵 (展开系数为**复数**)
- 也就是说，它们构成一组**完备**的基底
- 可以证明，满足**反对易关系** $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$ 的 4 个 **Dirac 矩阵至少是 4 阶方阵**
- 对于 **2 阶方阵**，可以尝试用 **Pauli 矩阵**来构造 Dirac 矩阵，由 $\{\sigma^i,\sigma^j\}=2\delta^{ij}$ 得 $\{\mathrm{i}\sigma^i,\mathrm{i}\sigma^j\}=2g^{ij}$，可取 $\gamma^i=\mathrm{i}\sigma^i$，但我们**找不到**另一个 2 阶方阵能够同时与 $\mathrm{i}\sigma^1$、$\mathrm{i}\sigma^2$ 和 $\mathrm{i}\sigma^3$ 反对易
- 因此，将 Dirac 矩阵 γ^μ 取为 **4×4 矩阵**，而**旋量表示**是 **Lorentz 群**的 **4 维表示**

5.2 节 Dirac 旋量场

- 在 **Lorentz 群**的**旋量表示空间**中，被**变换矩阵** $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 **Dirac 旋量** (spinor)
- 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 **矩阵**，**Dirac 旋量** ψ_a 应当具有 **4 个分量** $(a = 1, 2, 3, 4)$
- 相应的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b$$

- 隐去旋量指标 a 和 b，上式化为 $\psi' = D(\Lambda)\psi$

5.2 节　Dirac 旋量场

在 **Lorentz 群**的**旋量表示空间**中，被**变换矩阵** $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 **Dirac 旋量** (spinor)

由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 **矩阵**，**Dirac 旋量** ψ_a 应当具有 **4 个分量** $(a=1,2,3,4)$

相应的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b$$

隐去旋量指标 a 和 b，上式化为 $\psi' = D(\Lambda)\psi$

注意上式右边是**矩阵**与**列矢量**的**乘积**：

$$\begin{pmatrix}\psi'_1\\ \psi'_2\\ \psi'_3\\ \psi'_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}(\Lambda) & D_{12}(\Lambda) & D_{13}(\Lambda) & D_{14}(\Lambda)\\ D_{21}(\Lambda) & D_{22}(\Lambda) & D_{23}(\Lambda) & D_{24}(\Lambda)\\ D_{31}(\Lambda) & D_{32}(\Lambda) & D_{33}(\Lambda) & D_{34}(\Lambda)\\ D_{41}(\Lambda) & D_{42}(\Lambda) & D_{43}(\Lambda) & D_{44}(\Lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

- 如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ，它就成为 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$
- 类比量子矢量场的 Lorentz 变换 $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$
- 量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

- 如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ，它就成为 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$
- 类比量子矢量场的 Lorentz 变换 $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$
- 量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

- 对于固有保时向 Lorentz 变换 Λ，$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$ 的无穷小形式为

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}$$

- 于是，$\psi'_a(x')$ 的无穷小形式是 $\psi'_a(x') = \psi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x)$
- 1.7.3 小节一般场的无穷小 Lorentz 变换为 $\Phi'_a(x') = \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)$
- 比较可知，生成元 $I^{\mu\nu}$ 在旋量表示中对应于 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

无穷小展开

- 作变换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$ 化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

- 对于**无穷小 Lorentz 变换**，$(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

- **在 x 处**将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ **展开到 ω 的一阶项**，得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x) \\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x)\end{aligned}$$

无穷小展开

- 作变换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$ 化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

- 对于**无穷小 Lorentz 变换**，$(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

- **在 x 处**将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ **展开到 ω 的一阶项**，得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x)\\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x)\end{aligned}$$

- 从而，$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$ **右边**展开到 ω 一阶项的形式为

$$\begin{aligned}D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) &= \left(\mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\left[\psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\psi(x)\right]\\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\hat{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu})\psi(x)\end{aligned}$$

自旋角动量

$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\hat{L}^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$ **最左边**展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$
$$= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

🌿 两相比较，得到 $\boxed{[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (\hat{L}^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)}$

自旋角动量

■ $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\hat{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu})\psi(x)$ **最左边**展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$
$$= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

🌿 两相比较，得到 $\boxed{[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (\hat{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu})\psi(x)}$

🧃 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为 $\mathcal{S}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}^{23}, \mathcal{S}^{31}, \mathcal{S}^{12})$

🧊 可以从 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 满足的 **Lorentz 代数关系**推出 **SU(2) 代数关系** $[\mathcal{S}^i, \mathcal{S}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^k$

🧋 因而 $\mathcal{S}^i$ 是 **SU(2) 群**某个**线性表示**的**生成元**

自旋角动量

$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\hat{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu})\psi(x)$ **最左边**展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$
$$= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

- 两相比较，得到 $\boxed{[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (\hat{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu})\psi(x)}$
- $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为 $\mathcal{S}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}^{23}, \mathcal{S}^{31}, \mathcal{S}^{12})$
- 可以从 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 满足的 **Lorentz 代数关系**推出 **SU(2) 代数关系** $[\mathcal{S}^i, \mathcal{S}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^k$
- 因而 $\mathcal{S}^i$ 是 **SU(2) 群**某个**线性表示**的**生成元**
- 根据 $J^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}$ 和 $\hat{L}^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{L}^{jk}$，由 $[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (\hat{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu})\psi(x)$ 得

$$[\psi(x), \mathbf{J}] = (\hat{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\mathcal{S}})\psi(x)$$

- 上式表明，除了**轨道角动量 $\hat{\mathbf{L}}$**，**总角动量算符 $\mathbf{J}$** 还给出了由 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 描述的**自旋角动量**

Weyl 表象

- 利用 **Pauli 矩阵** $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

- 以 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 **单位矩阵**，将 **Dirac 矩阵**表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$$

- 容易验证，这样表示的 Dirac 矩阵既符合**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，也满足厄米性 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和反厄米性 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

以 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 **单位矩阵**，将 **Dirac 矩阵**表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$$

容易验证，这样表示的 Dirac 矩阵既符合**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，也满足厄米性 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和反厄米性 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Dirac 矩阵有多种表示方式，以上表示方式称为 **Weyl 表象**，也称为**手征表象**

Dirac 矩阵的所有表示方式都是**等价**的，彼此通过**相似变换**联系起来

如果 γ^μ 满足**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，那么作**相似变换**后，$\gamma'^\mu \equiv U^{-1}\gamma^\mu U$ 也满足这个反对易关系：

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = U^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U = 2g^{\mu\nu}U^{-1}U = 2g^{\mu\nu}$$

Weyl 表象中的 γ^5 和 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

- 根据 Pauli 矩阵的乘积关系 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$
- Weyl 表象中 γ^5 的具体形式为

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\gamma^3$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i}\sigma^3 \\ -\mathrm{i}\sigma^3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Weyl 表象中的 γ^5 和 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$

- 根据 **Pauli 矩阵**的乘积关系 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$
- **Weyl 表象**中 γ^5 的具体形式为

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\gamma^3$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i}\sigma^3 \\ -\mathrm{i}\sigma^3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- 用 2×2 **单位矩阵** $\mathbf{1}$ 和 **Pauli 矩阵**定义 $\boxed{\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})}$ 和 $\boxed{\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})}$
- 将 **Dirac 矩阵** $\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}$ 和 $\gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$ 归纳成 $\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}}$
- **生成元矩阵**表达为 $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \dfrac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \dfrac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

- 利用 $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ 将 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{ij} &= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}-\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i\end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- 由 **Pauli 矩阵**的**厄米性**可知，$\mathcal{S}^{ij}$ 是**厄米矩阵**，$(\mathcal{S}^{ij})^\dagger = \mathcal{S}^{ij}$

Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

- 利用 $[\sigma^i,\sigma^j]=\sigma^i\sigma^j-\sigma^j\sigma^i=2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ 将 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$\mathcal{S}^{ij}=\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}-\sigma^i\sigma^j+\sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j+\sigma^j\sigma^i\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}$$

- 由 **Pauli 矩阵**的**厄米性**可知，$\mathcal{S}^{ij}$ 是**厄米矩阵**，$(\mathcal{S}^{ij})^\dagger=\mathcal{S}^{ij}$
- **自旋角动量矩阵**为

$$\mathcal{S}^i=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk}=\frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix}=\frac{1}{4}2\delta^{il}\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$$

- 即 $\mathcal{S}^i$ 是两个 **SU(2) 群基础表示生成元** $\tau^i=\dfrac{\sigma^i}{2}$ 的**直和**
- 因此 $\mathcal{S}^i$ 所属 **SU(2) 群线性表示**是两个 **SU(2) 基础表示**的**直和**

Dirac 旋量场自旋为 1/2

自旋角动量矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 的平方为

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^2 = \mathcal{S}^i\mathcal{S}^i = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^i & \\ & \sigma^i\sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = s(s+1)$$

上式最后两步省略了 4×4 **单位矩阵**

可见，**Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的**自旋量子数**是 $\boxed{s = \frac{1}{2}}$

量子化之后，$\psi(x)$ 描述**自旋为** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ 的粒子

5.3 节 Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量，需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量

在 Weyl 表象中，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $\mathcal{S}^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$

其厄米共轭为 $(\mathcal{S}^{0i})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -\mathcal{S}^{0i}$

可见，$\mathcal{S}^{0i}$ 不是厄米矩阵，而是反厄米矩阵

5.3 节 Dirac 方程

为了写下 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**，需要结合**两个旋量场**来得到 **Lorentz 标量**

在 **Weyl 表象**中，$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $\mathcal{S}^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$

其厄米共轭为 $(\mathcal{S}^{0i})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -\mathcal{S}^{0i}$

可见，$\mathcal{S}^{0i}$ **不是厄米矩阵**，而是**反厄米矩阵**

当 $\omega_{0i} \neq 0$ 时，
$$D^\dagger(\Lambda) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\right]^\dagger = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\right]$$
$$\neq \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = D^{-1}(\Lambda)$$

即 $D(\Lambda)$ **不是幺正矩阵**，因此 $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ **不是 Lorentz 标量**：
$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) \neq \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$

🟡 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，有

$$(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i$$

⛰ 将这两条式子合起来写成一条**常用**的公式

$$(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$$

$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$

根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，有

$$(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i$$

将这两条式子合起来写成一条**常用**的公式

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu}$$

从而

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 &= -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^\dagger\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0 \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\right]\gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger\right]^n\gamma^0 \\ &= \gamma^0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)^n = \gamma^0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)\end{aligned}$$

Dirac 共轭和旋量双线性型

定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭** $\boxed{\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0}$

根据 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$，$\bar{\psi}(x)$ 的 **Lorentz 变换为**

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

这样一来，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 **Lorentz 标量**：

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

Dirac 共轭和旋量双线性型

- 定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭** $\boxed{\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0}$

- 根据 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$，$\bar{\psi}(x)$ 的 **Lorentz 变换为**

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

- 这样一来，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 **Lorentz 标量**：

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

- 像 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 这样同时包含 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)

- 利用 $\bar{\psi}(x)$ 还能构造 **Lorentz 协变**的其它旋量双线性型

- $\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$ 是一个 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\mathrm{i}\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\mathrm{i}\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$$

更多旋量双线性型

- $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 **Lorentz 矢量**，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)\\ \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)\end{aligned}$$

- $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

更多旋量双线性型

- $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 **Lorentz 矢量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)$$

- $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

- 如果将 $\psi(x)$ 看作**旋量空间**中的**列矢量**，则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 都是**行矢量**
- 因而这些**旋量双线性型**都只是旋量空间中的 1×1 **矩阵**，也就是**数**，如

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \bar{\psi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu_{11} & \gamma^\mu_{12} & \gamma^\mu_{13} & \gamma^\mu_{14} \\ \gamma^\mu_{21} & \gamma^\mu_{22} & \gamma^\mu_{23} & \gamma^\mu_{24} \\ \gamma^\mu_{31} & \gamma^\mu_{32} & \gamma^\mu_{33} & \gamma^\mu_{34} \\ \gamma^\mu_{41} & \gamma^\mu_{42} & \gamma^\mu_{43} & \gamma^\mu_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

旋量双线性型的厄米性

- 由 γ^0 和 γ^5 的厄米性、$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$ 及 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$ 可知
- 这些**旋量双线性型**都是**厄米**的，也就是说，都是**实数**：

$$
\begin{aligned}
(\bar\psi\psi)^\dagger &= (\psi^\dagger\gamma^0\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar\psi\psi \\
(\bar\psi \mathrm{i}\gamma^5\psi)^\dagger &= -\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = \bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi \\
(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^\dagger &= \psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi \\
(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)^\dagger &= \psi^\dagger\gamma^5(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\gamma^\mu\psi = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi \\
(\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0\psi \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)\psi = \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi
\end{aligned}
$$

- 量子化之后，这五个旋量双线性型成为**厄米算符**

自由 Dirac 旋量场的拉氏量

- 此外，包含**时空导数**的**旋量双线性型** $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)$$
$$= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

自由 Dirac 旋量场的拉氏量

此外，包含**时空导数**的**旋量双线性型** $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)$$
$$= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

利用 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\psi$ 写下**自由 Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi}$$

其中 $m > 0$ 是 Dirac 旋量场的**质量**，于是

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}$$

Euler-Lagrange 方程 $\partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

Dirac 方程

对 $0 = \mathrm{i}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$ 取**厄米共轭**，得到

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0 (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为 $[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$

Dirac 方程

💜 对 $0 = \mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$ 取**厄米共轭**，得到

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\partial_\mu(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\partial_\mu\psi + m\gamma^0\psi = -\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

🎑 故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$\boxed{(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0}$$

🥮 上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为 $[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$

🍡 容易验证，Dirac 方程具有 **Lorentz 协变性**：

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= [\mathrm{i}\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]D(\Lambda)\psi(x)\\
&= D(\Lambda)[\mathrm{i}D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(x)\\
&= D(\Lambda)[\mathrm{i}\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(x)\\
&= D(\Lambda)(\mathrm{i}\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu - m)\psi(x) = D(\Lambda)(\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(x) = 0
\end{aligned}$$

Klein-Gordon 方程

对 **Dirac 方程** $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 左边乘以 $(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)$

利用**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，得

$$\begin{aligned} 0 &= (-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi \\ &= \left[\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\mu\partial_\nu + \partial_\nu\partial_\mu) + m^2\right]\psi = \left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\psi \\ &= (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi \end{aligned}$$

也就是说，**自由**的 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程**

$$\boxed{(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0}$$

Weyl 旋量

❤️ 在 Weyl 表象中，旋量表示生成元矩阵 $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和

🌊 把四分量 Dirac 旋量场 ψ 分解为两个二分量旋量场 η_{L} 和 η_{R}： $\psi = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$

🦞 这样的二分量旋量称为 Weyl 旋量

🐠 η_{L} 称为左手 (left-handed) Weyl 旋量，η_{R} 称为右手 (right-handed) Weyl 旋量

Weyl 旋量

在 **Weyl 表象**中，**旋量表示生成元矩阵** $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

是**分块对角**的，因而可将旋量表示分解为**两个 2 维表示**的**直和**

把**四分量 Dirac 旋量场** ψ 分解为两个**二分量旋量场** η_{L} 和 η_{R}：$\psi = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$

这样的二分量旋量称为 **Weyl 旋量**

η_{L} 称为**左手** (left-handed) **Weyl 旋量**，η_{R} 称为**右手** (right-handed) **Weyl 旋量**

利用 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$ 将 **Dirac 方程**化为

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

即得两个相互**耦合**的方程 $\begin{cases} \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} = 0 \\ \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} = 0 \end{cases}$

Weyl 方程

💛 如果 $m = 0$，两个方程就各自**独立**了：

$$i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{L}} = 0, \quad i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{R}} = 0$$

🏝 这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

🌴 可见，**非零质量** m 的存在将**左手**和**右手 Weyl 旋量场**耦合起来

Hermann Weyl
(1885–1955)

Weyl 方程

💛 如果 $m = 0$，两个方程就各自**独立**了：

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta_{\mathrm{L}} = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^\mu \partial_\mu \eta_{\mathrm{R}} = 0$$

🏝 这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

🌴 可见，**非零质量** m 的存在将**左手**和**右手 Weyl 旋量场**耦合起来

🩴 **自旋角动量矩阵**的**直和分解** $\mathcal{S}^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$ 表明

⛱ **左手**和**右手 Weyl 旋量**各对应于一个 **SU(2) 群基础表示**

🏖 当 $m = 0$ 时，量子化之后的 $\eta_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\eta_{\mathrm{R}}(x)$ 各自描述**自旋为** $\frac{1}{2}$ 的粒子

Hermann Weyl
(1885–1955)