

数学物理方法

第七章 分离变量法

第 1 节和第 2 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 10 月 29 日



第七章 分离变量法



本章开始研究**偏微分方程**的求解



对于**常微分方程**, 求解思路通常是先求出其**通解**, 其中含有若干个**任意常数**



任意常数的个数与常微分方程的**阶数相同**



然后用**附加条件** (通常是同一点的函数值和导数值) 来确定这些任意常数

第七章 分离变量法



本章开始研究**偏微分方程**的求解



对于**常微分方程**, 求解思路通常是先求出其**通解**, 其中含有若干个**任意常数**



任意常数的个数与常微分方程的**阶数相同**



然后用**附加条件** (通常是同一点的函数值和导数值) 来确定这些任意常数



对于**偏微分方程**, 如果能求出**通解**, 则里面含有**任意函数**, 原则上由**定解条件**确定



但是, 这通常是**做不到的**



除了极少数简单情况, 人们**并不知道**怎样求出**偏微分方程**的**通解**



即使能求出**通解**, 如果**定解条件**比较复杂, 要想确定其中的**任意函数**也**非常困难**

第七章 分离变量法



本章开始研究**偏微分方程**的求解



对于**常微分方程**，求解思路通常是先求出其**通解**，其中含有若干个**任意常数**



任意常数的个数与常微分方程的**阶数相同**



然后用**附加条件**（通常是同一点的函数值和导数值）来确定这些任意常数



对于**偏微分方程**，如果能求出**通解**，则里面含有**任意函数**，原则上由**定解条件**确定



但是，这通常是**做不到的**



除了极少数简单情况，人们**并不知道**怎样求出**偏微分方程**的**通解**



即使能求出**通解**，如果**定解条件**比较复杂，要想确定其中的**任意函数**也**非常困难**



因此，对于**偏微分方程**，只能根据方程和定解条件的各种具体情况分别加以研究



本章介绍的**分离变量法**是一种比较有效的方法



它的基本思路是设法将**偏微分方程问题**转化为若干个**常微分方程问题**来求解

§1 一维波动方程

§1.1 分离变量

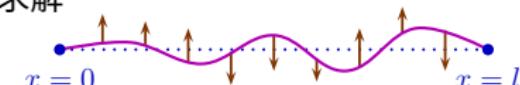
 本节以第一边值问题为例研究一维波动方程的求解

 考虑两端固定的弦在初始激励下的自由振动

 即给定初始位移和初始速度，求以后各时刻的位移 $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

 其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知函数，分别给出弦上各点的初始位移和初始速度

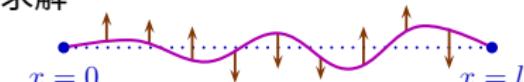


§1 一维波动方程

§1.1 分离变量

本节以第一边值问题为例研究一维波动方程的求解

考虑两端固定的弦在初始激励下的自由振动



即给定初始位移和初始速度，求以后各时刻的位移 $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知函数，分别给出弦上各点的初始位移和初始速度

现在尝试寻找 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 形式的特解，将它代入一维波动方程，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t)$$

其中 ' 表示对各自的自变量求导

常微分方程和初始条件

 从而 $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$, 左边与 t 无关, 右边与 x 无关

 两边相等, 应与 x 和 t 均无关, 即为常数, 记作 $-\lambda$

 由此得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

 初始条件给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

常微分方程和初始条件

 从而 $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$, 左边与 t 无关, 右边与 x 无关

 两边相等, 应与 x 和 t 均无关, 即为常数, 记作 $-\lambda$

 由此得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

 初始条件给出

$$u|_{t=0} = X(x)T(0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = X(x)T'(0) = \psi(x)$$

 然而, 这两个初始条件是不可能成立的

 它们表明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均与 $X(x)$ 成正比, 从而两者成正比

 但实际问题中初始位移和初始速度是可以相当任意的, 一般不可能成正比

 $X'' + \lambda X = 0$ 的解是三角函数 ($\lambda > 0$)、指数函数 ($\lambda < 0$) 或线性函数 ($\lambda = 0$)

 与 $X(x)$ 成正比的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也必须是这些函数形式, 这一般也是不可能的

边界条件

 因此，我们暂时**不要求** $u(x, t) = X(x)T(t)$ 满足初始条件

 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

 注意到 $T(t)$ **不能恒为零**，否则 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 是**平庸解** $u(x, t) \equiv 0$

 故必须要求

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

边界条件

 因此，我们暂时**不要求** $u(x, t) = X(x)T(t)$ 满足初始条件

 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

 注意到 $T(t)$ **不能恒为零**，否则 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 是**平庸解** $u(x, t) \equiv 0$

 故必须要求

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

 如果 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 、 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和**以上边界条件**同时得到满足

 那么形如 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 的**解**能够同时满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

 至于**初始条件**，我们稍后再作考虑

§1.2 本征值问题

 现在考虑方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ，它是常系数二阶线性齐次常微分方程

 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数

 在高等数学课中常用初始条件 $X(0) = c_0$ 和 $X'(0) = c_1$ 来确定这两个任意常数

 但现在的附加条件是边界条件 $X(0) = X(l) = 0$

§1.2 本征值问题

 现在考虑方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ，它是常系数二阶线性齐次常微分方程

 很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数

 在高等数学课中常用初始条件 $X(0) = c_0$ 和 $X'(0) = c_1$ 来确定这两个任意常数

 但现在的附加条件是边界条件 $X(0) = X(l) = 0$

 在这样的条件下，非平庸解并不一定存在，除非系数 λ 取某些特定值

 实际上，系数 λ 是在分离变量时引入的

 我们只知道 λ 是常数，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定

§1.2 本征值问题

现在考虑方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ，它是常系数二阶线性齐次常微分方程

很容易求出它的通解，其中含有两个任意常数

在高等数学课中常用初始条件 $X(0) = c_0$ 和 $X'(0) = c_1$ 来确定这两个任意常数

但现在的附加条件是边界条件 $X(0) = X(l) = 0$

在这样的条件下，非平庸解并不一定存在，除非系数 λ 取某些特定值

实际上，系数 λ 是在分离变量时引入的

我们只知道 λ 是常数，具体取值尚未明确，需要在求解过程中确定

也就是说，可以选择适当的 λ 值，使得方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 具有满足边界条件 $X(0) = X(l) = 0$ 的非平庸解

这样的方程和边界条件构成了一个典型的本征值问题
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

它的特点是常微分方程中含有一个未定参数 λ ，并附有边界条件

求解本征值问题

本征值问题
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

 使问题存在**非平庸解**的 λ 值称为**本征值**, 相应的非平庸解称为**本征函数**

 在**第十章 §5** 将总结这类**本征值问题的一般提法**并阐述其**一般结论**

 这里直接对它进行求解

求解本征值问题

本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

使问题存在非平庸解的 λ 值称为**本征值**，相应的非平庸解称为**本征函数**

在第十章 §5 将总结这类**本征值问题的一般提法**并阐述其**一般结论**

这里直接对它进行求解

1 如果 $\lambda < 0$ ，令 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$)

则方程的解为 $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$ ，其中 C 、 D 是**任意常数**

代入**边界条件**，利用 $\cosh 0 = 1$ 和 $\sinh 0 = 0$

得 $C = X(0) = 0$ ， $X(l) = D \sinh \mu l = 0$

由于 $\mu l > 0$ ，有 $\sinh \mu l \neq 0$ ，故 $D = 0$

于是 $X(x) \equiv 0$ ，这是**平庸解**，因而 $\lambda < 0$ **不是本征值**

$$X''(x) = \mu^2 X(x)$$

$$(\cosh \mu x)' = \mu \sinh \mu x$$

$$(\sinh \mu x)' = \mu \cosh \mu x$$

$\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的情况

本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

2 如果 $\lambda = 0$ ，则方程的解为 $X(x) = Cx + D$ ，其中 C, D 是任意常数

 代入边界条件， $D = X(0) = 0$ ， $X(l) = Cl = 0$ ，故 $C = 0$

 从而 $X(x) \equiv 0$ ，这是平庸解，因而 $\lambda = 0$ 不是本征值

$\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的情况

本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

2 如果 $\lambda = 0$ ，则方程的解为 $X(x) = Cx + D$ ，其中 C, D 是任意常数

代入边界条件， $D = X(0) = 0$ ， $X(l) = Cl = 0$ ，故 $C = 0$

从而 $X(x) \equiv 0$ ，这是平庸解，因而 $\lambda = 0$ 不是本征值

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)

则方程的解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中 C, D 是任意常数

代入边界条件，利用 $\cos 0 = 1$ 和 $\sin 0 = 0$

得 $C = X(0) = 0$ ， $X(l) = D \sin \mu l = 0$

为了得到非平庸解，必须使 $\sin \mu l = 0$ ，如此则 D 可取任意值

$$X''(x) = -\mu^2 X(x)$$

$$(\cos \mu x)' = -\mu \sin \mu x$$

$$(\sin \mu x)' = \mu \cos \mu x$$

本征值和本征函数

 因此, $\sin \mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程, 它的解为 $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 是**正弦函数**的**正零点**

 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中已取 $D = 1$

本征值和本征函数

 因此, $\sin \mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程, 它的解为 $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 是**正弦函数**的**正零点**

 于是得到全部的**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中已取 $D = 1$

 这是因为我们还要将**本征值** λ_n 代回方程 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 以求解 $T(t)$

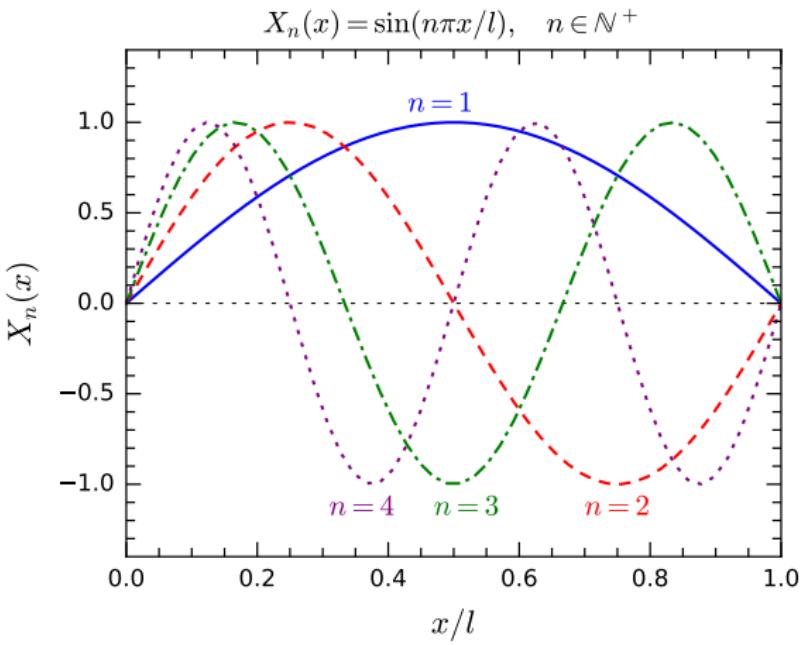
 求出来的解 $T_n(t)$ 会包含两个**任意常数**

 我们关心的是 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, 而不是 $X_n(x)$ 或 $T_n(t)$ 本身

 因此可以将常数 D 并入 $T_n(t)$ 的**任意常数**之中, 在此处直接取 $D = 1$

本征函数的图像

本征值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, 本征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}^+$



§1.3 本征函数族的正交完备性

在继续求解之前，先介绍**本征函数族** $\left\{X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个重要性质

首先，该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是正交的

这指的是两个**不同本征函数** $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 的**内积** $(X_m(x), X_n(x))$ 为零，即

$$(X_m(x), X_n(x)) \equiv \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n$$

其中第一步是**内积的定义**

三维空间中**矢量** $A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$ 和 $B = B_x e_x + B_y e_y + B_z e_z$ 的**内积**定义为

$$A \cdot B \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

矢量 A 与 B 正交意味着 $A \cdot B = 0$

矢量 A 与自身的内积为 $|A|^2 \equiv A \cdot A \geq 0$ 称为它的**模方**

§1.3 本征函数族的正交完备性

在继续求解之前，先介绍**本征函数族** $\left\{X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个重要性质

首先，该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是正交的

这指的是两个**不同本征函数** $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 的**内积** $(X_m(x), X_n(x))$ 为零，即

$$(X_m(x), X_n(x)) \equiv \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n$$

其中第一步是**内积的定义**

利用**积化和差公式**，有

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{(m+n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{l}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = 0 \end{aligned}$$

本征函数的模方

↗ 本征函数 $X_n(x)$ 与自身的内积称为它的模方 $\|X_n(x)\|^2$ ，有

$$\begin{aligned}\|X_n(x)\|^2 &\equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x \Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{l}{2}\end{aligned}$$

本征函数的模方

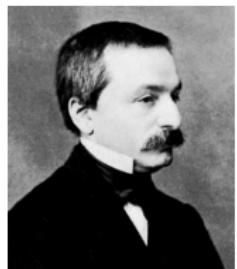
↗ 本征函数 $X_n(x)$ 与自身的内积称为它的模方 $\|X_n(x)\|^2$ ，有

$$\begin{aligned}\|X_n(x)\|^2 &\equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x \Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{l}{2}\end{aligned}$$

⚒ 将上式与 $(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ ($m \neq n$) 合起来写作

$$(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^+$$

⌚ 其中 Kronecker δ 符号定义为 $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$



Leopold Kronecker
(1823–1891)

本征函数族的完备性

 其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是完备的

 这指的是，对于区间 $[0, l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

 解析性质良好通常指具有分段连续、连续或可微等解析性质

本征函数族的完备性

其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是完备的

这指的是，对于区间 $[0, l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

解析性质良好通常指具有分段连续、连续或可微等解析性质

将上式的求和指标 n 改写为 k ，两边乘以 $\sin(n\pi x/l)$ ，对 x 从 0 到 l 积分，得

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{l}{2} \delta_{kn} = a_n \frac{l}{2}$$

其中级数应当一致收敛，才能逐项积分，对此不作深究

于是，展开系数表达为 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$

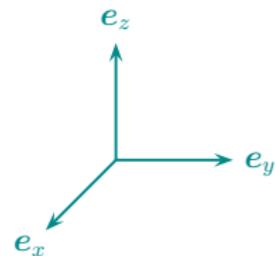
说明

在**本征函数族** $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备了**

钥匙 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** e_x 、 e_y 和 e_z 构成三维空间的一组**基底**

锁 三维空间中任何矢量 A 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备的**

锁 倘若只有 e_x 和 e_y 两个，就**不完备了**



说明

在**本征函数族** $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备了**

这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** e_x 、 e_y 和 e_z 构成三维空间的一组**基底**

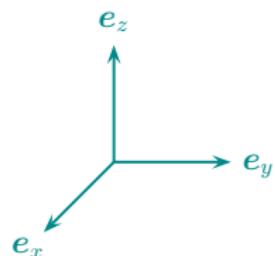
锁 三维空间中任何矢量 A 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备的**

锁 倘若只有 e_x 和 e_y 两个，就**不完备了**

球 即使 $f(x)$ 函数与**本征函数族不具有相同的边界条件**

红旗 上述**展开式基本上还是正确的**，只在**端点处可能不成立**

线圈 对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况



说明

在**本征函数族** $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ 中去掉任何一个，剩下的就**不完备了**

锁 这一点可以类比**三维空间**，**单位矢量** e_x 、 e_y 和 e_z 构成三维空间的一组**基底**

锁 三维空间中任何矢量 A 都可以用这三个单位矢量来展开，所以它们是**完备的**

锁 倘若只有 e_x 和 e_y 两个，就**不完备了**

线团 即使 $f(x)$ 函数与**本征函数族不具有相同的边界条件**

旗 上述**展开式基本上还是正确的**，只在**端点处可能不成立**

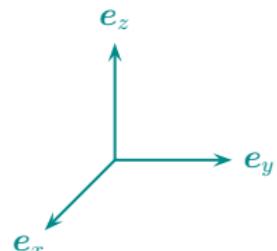
线圈 对于今后遇到的其它本征函数族，也有类似情况

灯泡 本课程遇到的**本征值问题**均属于 **Sturm-Liouville** 型，将在**第十章 §5** 作一般讨论

蜡烛 这类本征值问题的**本征函数族都是正交和完备的**

蜡烛 如果本征函数的形式比较复杂，则**正交性**难以直接验证，但可以利用它们满足的方程和边界条件加以证明

蜡烛 **完备性**的证明比较困难，本课程将直接引用结论而不作证明



§1.4 一般解

 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

 其中 A_n 和 B_n 是任意常数

§1.4 一般解

将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

其中 A_n 和 B_n 是任意常数

于是得到满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 的一系列特解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

这些解称为**弦的本征振动**

§1.4 一般解

将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

其中 A_n 和 B_n 是任意常数

于是得到满足**一维波动方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和**边界条件** $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 的一系列特解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

这些解称为**弦的本征振动**

但是，这些解一般并不满足**初始条件** $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$

除非 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 同时正比于某个**本征函数** $\sin \frac{n\pi x}{l}$

一般解

 现在，注意到方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 都是齐次的

 所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

 于是可以写出下面的一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

 它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(x, t) = 0$$

$$u|_{x=0, l} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)|_{x=0, l} = 0$$

一般解

现在，注意到方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 都是齐次的

所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

于是可以写出下面的一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

我们希望通过适当选取其中的任意常数 A_n 和 B_n

可以使给定的初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$ 也得到满足

这样一来，它就满足定解问题的所有条件了

一般解

现在，注意到方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和边界条件 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 都是齐次的

所以将上述各特解叠加后仍然满足方程和边界条件

于是可以写出下面的一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

它代表弦在两端固定时的最一般振动形式

我们希望通过适当选取其中的任意常数 A_n 和 B_n

可以使给定的初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$ 也得到满足

这样一来，它就满足定解问题的所有条件了

注 一般解已不具有分离变量的形式，而且一般解不是通解

通解应该只满足偏微分方程，不同定解条件可通过调节通解中的任意函数来满足

关于一般解的说明

 上面的**一般解**除了满足偏微分方程，还满足给定的**边界条件**

 如果**边界条件**有所改变，那么它就**不成立了**，这时需要从头开始重新求解

 因此，这个**一般解**的通用性**非常有限**，它只能满足不同的**初始条件**

关于一般解的说明

 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件

 如果边界条件有所改变，那么它就不成立了，这时需要从头开始重新求解

 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件

 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件

 这里实际上假定了级数可以逐项求导

 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是非常苛刻的

关于一般解的说明

 上面的一般解除了满足偏微分方程，还满足给定的边界条件

 如果边界条件有所改变，那么它就不成立了，这时需要从头开始重新求解

 因此，这个一般解的通用性非常有限，它只能满足不同的初始条件

 上面提到，各特解叠加后得到的一般解仍然满足方程和边界条件

 这里实际上假定了级数可以逐项求导

 但是，在实变函数项级数中，逐项求导的条件是非常苛刻的

 这些条件归结为对系数 A_n 和 B_n 的限制，而它们由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 决定

 所以最终归结为对 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的解析性质的限制，具体情况不再深入讨论

 今后我们假定所有形式操作（如逐项求导、逐项积分等）都是合法的

 不对其成立条件加以深究

§1.5 用初始条件确定系数

 一般解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$ 对 t 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

 代入初始条件, 推出

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x)$$

§1.5 用初始条件确定系数

一般解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$ 对 t 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件, 推出

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x)$$

根据前面的讨论, 本征函数族 $\{\sin(n\pi x/l)\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的

只要 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的解析性质良好, 就能选取适当的 A_n 和 B_n 使以上两式成立

参照 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 和 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$, 有

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

分离变量法

🍒 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出系数 A_n 和 B_n

🍓 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案

分离变量法

- 🍒 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出系数 A_n 和 B_n
- 🍓 将它们代回**一般解**，就得到**定解问题**的最终答案
- 🥝 由于以上方法的出发点是**特解** $u(x, t) = X(x)T(t)$
- 🍐 它具有**分离变量**的形式，即 x 的函数与 t 的函数是**分离的**
- 🍏 而**一般解**是一系列这样的**特解的叠加**，因此这种方法称为**分离变量法**

分离变量法

给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式，就通过以上积分计算出系数 A_n 和 B_n

将它们代回一般解，就得到定解问题的最终答案

由于以上方法的出发点是特解 $u(x, t) = X(x)T(t)$

它具有分离变量的形式，即 x 的函数与 t 的函数是分离的

而一般解是一系列这样的特解的叠加，因此这种方法称为分离变量法

它是 J. Fourier 在 18 世纪初最先引入的，所以也称为 Fourier 方法

实际上，一般解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

就是 x 的正弦 Fourier 级数

一般解中的每一项都是驻波，所以这种方法又称为驻波法



Joseph Fourier
(1768–1830)

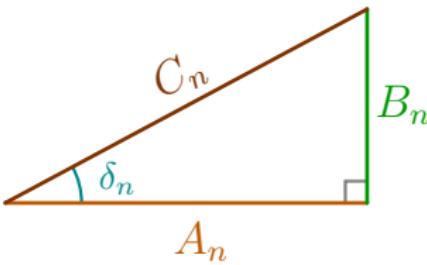
§1.6 解的物理图像

由 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 可以看出，弦上的一般振动是一系列本征振动的叠加

每一个本征振动的形式为 $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$

令 $C_n \equiv \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\delta_n \equiv \arctan \frac{B_n}{A_n}$, 则

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \delta_n, \quad \frac{B_n}{C_n} = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \delta_n$$



§1.6 解的物理图像

由 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 可以看出，弦上的一般振动是一系列本征振动的叠加

每一个本征振动的形式为 $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$

令 $C_n \equiv \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\delta_n \equiv \arctan \frac{B_n}{A_n}$, 则

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \delta_n, \quad \frac{B_n}{C_n} = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \delta_n$$

记 $k_n \equiv \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n \equiv k_n a = \frac{n\pi a}{l}$, 推出

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= C_n \sin k_n x \left(\frac{A_n}{C_n} \cos \omega_n t + \frac{B_n}{C_n} \sin \omega_n t \right) \\ &= C_n \sin k_n x (\cos \omega_n t \cos \delta_n + \sin \omega_n t \sin \delta_n) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n) \end{aligned}$$

这个结果代表一列驻波，对于给定的 n ，弦上各点以同样的频率 ω_n 振动

初相位 $-\delta_n$ 也是各点相同，只是在节点两侧相差 π (因为振幅的符号相反)

振幅 $|C_n \sin k_n x|$ 则是位置的函数

§1.6 解的物理图像

由 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 可以看出，弦上的一般振动是一系列本征振动的叠加

每一个本征振动的形式为 $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$

令 $C_n \equiv \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\delta_n \equiv \arctan \frac{B_n}{A_n}$, 则

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \delta_n, \quad \frac{B_n}{C_n} = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \delta_n$$

记 $k_n \equiv \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n \equiv k_n a = \frac{n\pi a}{l}$, 推出

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= C_n \sin k_n x \left(\frac{A_n}{C_n} \cos \omega_n t + \frac{B_n}{C_n} \sin \omega_n t \right) \\ &= C_n \sin k_n x (\cos \omega_n t \cos \delta_n + \sin \omega_n t \sin \delta_n) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n) \end{aligned}$$

驻波的动画演示

这个结果代表一列驻波，对于给定的 n ，弦上各点以同样的频率 ω_n 振动

初相位 $-\delta_n$ 也是各点相同，只是在节点两侧相差 π (因为振幅的符号相反)

振幅 $|C_n \sin k_n x|$ 则是位置的函数

驻波的特点



$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ 只决定于系统的性质 (弦的长度、线密度和张力) 和边界条件, 而与初
始条件无关, 故称为**本征频率**



另一方面, $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ 和 $\delta_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$ 则与**初始条件**有关



$n = 1$ 的振动称为**基波**, 频率为 $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$



由于 $\omega_n = n\omega_1$, 故 $n > 1$ 的振动称为 n 次**谐波**



驻波的特点

💡 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ 只决定于系统的性质（弦的长度、线密度和张力）和边界条件，而与初始条件无关，故称为本征频率

🍰 另一方面， $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ 和 $\delta_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$ 则与初始条件有关

🎂 $n=1$ 的振动称为基波，频率为 $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$

🎂 由于 $\omega_n = n\omega_1$ ，故 $n > 1$ 的振动称为 n 次谐波

🍪 驻波 $u_n(x, t) = C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n)$ 上有一些点振幅为零

🍩 这些点永远不动，称为波节或节点

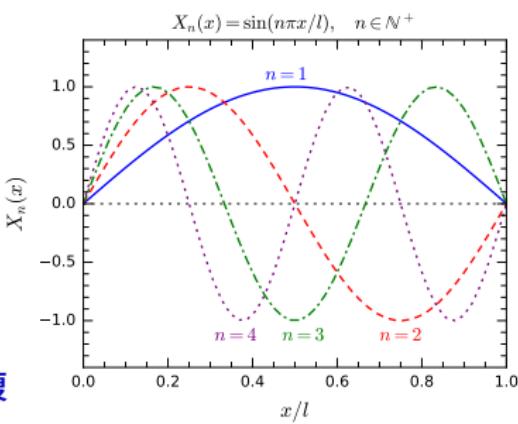
📌 节点满足 $k_n x = \frac{n\pi x}{l} = m\pi$ ，因而位置在

$$x = \frac{m}{n} l, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

💡 可见， n 次谐波包括端点共有 $n+1$ 个节点

ún 基波除端点外没有节点，振幅最大的点称为波腹

🍰 相邻节点间有一个波腹， n 次谐波共有 n 个波腹



特例

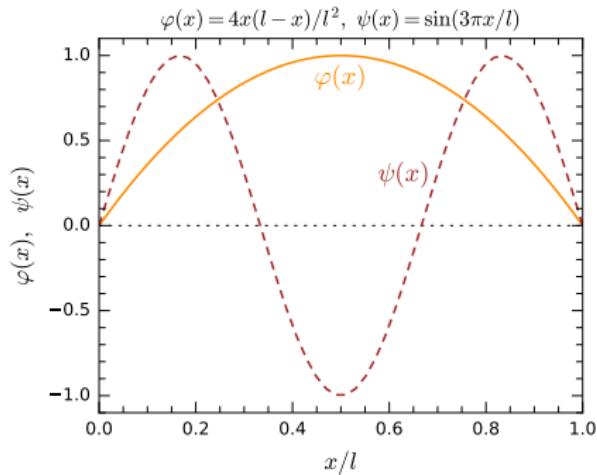
考慮特例

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 3)$$



一般解化为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a} \sin \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned}$$

特例

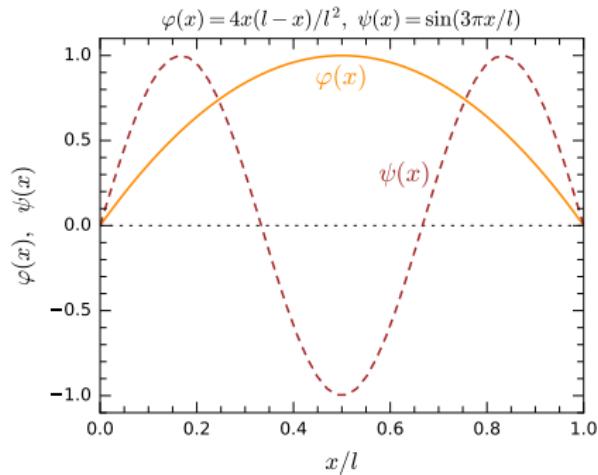
考慮特例

$$\varphi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

求得

$$A_n = \frac{16}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$B_3 = \frac{l}{3\pi a}, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 3)$$



一般解化为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a} \sin \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned}$$

解的动画演示

§2 一维热传导方程

§2.1 分离变量与本征值问题



本节以第二边值问题为例研究一维热传导方程的求解



考虑侧面和两端绝热的细杆的热传导问题



即给定初始温度分布，求以后各时刻的温度 $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



其中 $\varphi(x)$ 是已知函数，给出杆上各点的初始温度分布

§2 一维热传导方程

§2.1 分离变量与本征值问题



本节以第二边值问题为例研究一维热传导方程的求解



考虑侧面和两端绝热的细杆的热传导问题



即给定初始温度分布，求以后各时刻的温度 $u(x, t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



其中 $\varphi(x)$ 是已知函数，给出杆上各点的初始温度分布



现在尝试寻找 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 形式的特解，将它代入一维热传导方程，得

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t)$$

本征值问题

从而 $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$, 左边与 t 无关, 右边与 x 无关, 必为常数, 记作 $-\lambda$

由此得到两个常微分方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

$x = 0$ 和 $x = l$ 处的边界条件给出

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

从而得到本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

本征值问题

从而 $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$, 左边与 t 无关, 右边与 x 无关, 必为常数, 记作 $-\lambda$

由此得到两个常微分方程 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 和 $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

$x = 0$ 和 $x = l$ 处的边界条件给出

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)T(t) = 0$$

从而得到本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1 如果 $\lambda < 0$, 令 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$), 则解为 $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中 C, D 是任意常数, 有 $X'(x) = C\mu \sinh \mu x + D\mu \cosh \mu x$

由于 $\mu > 0$, $X'(0) = D\mu = 0$ 表明 $D = 0$

由于 $l > 0$, $X'(l) = C\mu \sinh \mu l = 0$ 表明 $C = 0$

于是得到平庸解 $X(x) \equiv 0$, 因而 $\lambda < 0$ 不是本征值

本征值和本征函数

2 如果 $\lambda = 0$ ，则解为 $X(x) = Cx + D$ ，其中 C 、 D 是任意常数

由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$ ，故 $C = 0$ ，而 D 可任意

于是得到本征值 $\lambda_0 = 0$ ，本征函数 $X_0(x) = 1$ ，其中已取 $D = 1$

注意这里与第一边值问题的区别，如果遗漏这个解，本征函数族将是不完备的

本征值和本征函数

2 如果 $\lambda = 0$ ，则解为 $X(x) = Cx + D$ ，其中 C 、 D 是任意常数

由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$ ，故 $C = 0$ ，而 D 可任意

于是得到本征值 $\lambda_0 = 0$ ，本征函数 $X_0(x) = 1$ ，其中已取 $D = 1$

注意这里与第一边值问题的区别，如果遗漏这个解，本征函数族将是不完备的

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中 C 、 D 是任意常数，有 $X'(x) = -C\mu \sin \mu x + D\mu \cos \mu x$

由 $X'(0) = D\mu = 0$ 得 $D = 0$ ，从而 $X'(l) = -C\mu \sin \mu l = 0$

本征值和本征函数

2 如果 $\lambda = 0$ ，则解为 $X(x) = Cx + D$ ，其中 C 、 D 是任意常数

👑 由于 $X'(x) = C = X'(0) = X'(l) = 0$ ，故 $C = 0$ ，而 D 可任意

👑 于是得到本征值 $\lambda_0 = 0$ ，本征函数 $X_0(x) = 1$ ，其中已取 $D = 1$

👑 注意这里与第一边值问题的区别，如果遗漏这个解，本征函数族将是不完备的

3 如果 $\lambda > 0$ ，令 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$)，则解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

🎓 其中 C 、 D 是任意常数，有 $X'(x) = -C\mu \sin \mu x + D\mu \cos \mu x$

🎓 由 $X'(0) = D\mu = 0$ 得 $D = 0$ ，从而 $X'(l) = -C\mu \sin \mu l = 0$

👩 为了得到非平凡解，必须使 $\sin \mu l = 0$ ，如此则 C 可任意

👚 因此 $\sin \mu l = 0$ 是决定本征值的方程，它的解为 $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

👜 从而 $\mu_n l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 是正弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

⌚ 其中已取 $C = 1$

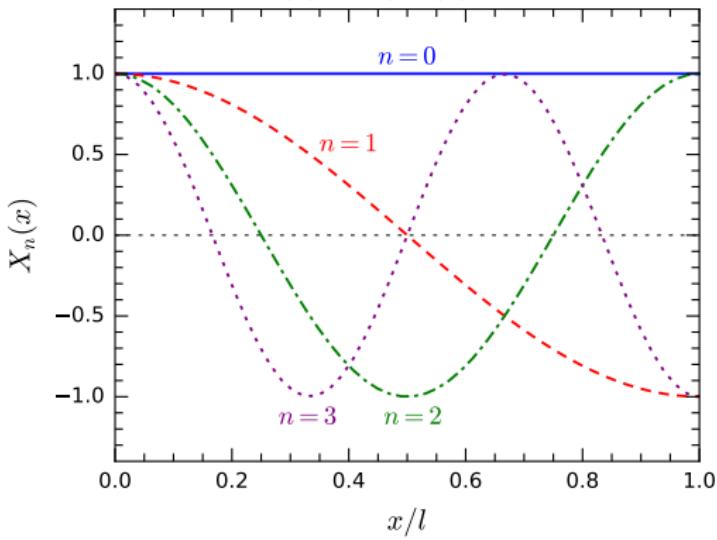
本征函数的图像

注意 $X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$ 在 $n = 0$ 时退化为 $X_0(x) = 1$

因此，可以把所有的本征值和本征函数统一写成

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X_n(x) = \cos(n\pi x/l), \quad n \in \mathbb{N}$$



§2.2 本征函数族的正交完备性

 与上节情况类似，**本征函数族** $\left\{X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 具有**正交完备性**

 首先，该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是**正交的**：

$$(X_m(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}^+, \quad m \neq n$$

$$(X_0(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 利用**积化和差公式**，有

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{(m+n)\pi x}{l} + \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{l}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l = 0$$

本征函数的模方



本征函数的模方定义为 $\|X_n(x)\|^2 \equiv (X_n(x), X_n(x)) = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx$



当 $n = 0$ 时, $\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l dx = l$



当 $n \neq 0$ 时, 有

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{2n\pi x}{l} + 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l + x \Big|_0^l \right) = \frac{l}{2}$$



归纳起来, **模方**表达为

$$\|X_n(x)\|^2 = \begin{cases} l, & n = 0 \\ \frac{l}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

本征函数族的完备性

其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是完备的

从而，对于区间 $[0, l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

本征函数族的完备性

其次，可以证明该本征函数族在区间 $[0, l]$ 上是完备的

从而，对于区间 $[0, l]$ 上任意解析性质良好的函数 $f(x)$ ，只要与本征函数族具有相同的边界条件，就一定可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]$$

将上式的求和指标 n 改写为 k ，两边乘以 $\cos(n\pi x/l)$ ，对 x 从 0 到 l 积分，得

$$\int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = a_n \|X_n(x)\|^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

第二步用到本征函数族的正交性，只有 $k = n$ 那一项的贡献非零

于是，展开系数表达为

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

§2.3 一般解

 将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程, 得 $T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$, 解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 其中 A_0 和 A_n 是**任意常数**

 于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = 1 \cdot A_0 = A_0$$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

§2.3 一般解

将**本征值** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，得 $T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$ ，解得

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) = A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right], \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中 A_0 和 A_n 是**任意常数**

于是得到一系列满足**一维热传导方程**和**边界条件**的**特解**

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = 1 \cdot A_0 = A_0$$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

将这些特解叠加，就得到满足**方程**和**边界条件**的**一般解**

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

它代表**细杆两端绝热时温度分布的最一般形式**

适当选取其中的**任意常数** A_0 和 A_n ，就可以满足给定的**初始条件**

§2.4 用初始条件确定系数

 将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

 由于本征函数族 $\{\cos n\pi x/l\}_{n=0}^{\infty}$ 是完备的，只要 $\varphi(x)$ 具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

 给定 $\varphi(x)$ 的具体形式，就可以计算出以上积分

 将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

§2.4 用初始条件确定系数

将一般解代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

由于本征函数族 $\{\cos n\pi x/l\}_{n=0}^{\infty}$ 是完备的，只要 $\varphi(x)$ 具有良好的解析性质，上式就可以成立，参照前面的系数表达式，有

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

给定 $\varphi(x)$ 的具体形式，就可以计算出以上积分

将得出的系数代回一般解，就得到定解问题的最终答案

如果初始时刻不是 $t = 0$ ，而是 $t = \tau$ ，那么只需将原一般解中的 t 改成 $t - \tau$

就得到相应的一般解 $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-\lambda_n a^2(t - \tau)] \cos \frac{n\pi x}{l}$

其中系数 A_0 和 A_n 由初始条件 $u|_{t=\tau} = \varphi(x)$ 决定，仍然由上面的表达式给出

§2.5 解的物理图像

 在一般解 $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中

 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$

 这是**输运问题**的解的特点，它体现了过程的**不可逆性**

 而常数项 A_0 则是**第二类边界条件**所特有的

§2.5 解的物理图像

 在一般解 $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中

 除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$

 这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性

 而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的

 当 $t \rightarrow \infty$ 时，有 $u(x, t) \rightarrow A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$

 注意，如果在一般解表达式中不把常数项 A_0 单独写出来，而且忽视 $\lambda_0 = 0$ 这一事实，那么就很容易得出 $u(x, t) \rightarrow 0$ 的错误结果

 这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值 A_0

§2.5 解的物理图像

在一般解 $u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \frac{n\pi x}{l}$ 中

除了第一项，各项都有指数衰减因子 $\exp(-\lambda_n a^2 t)$

这是输运问题的解的特点，它体现了过程的不可逆性

而常数项 A_0 则是第二类边界条件所特有的

当 $t \rightarrow \infty$ 时，有 $u(x, t) \rightarrow A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$

注意，如果在一般解表达式中不把常数项 A_0 单独写出来，而且忽视 $\lambda_0 = 0$ 这一事实，那么就很容易得出 $u(x, t) \rightarrow 0$ 的错误结果

这表明长时间后，杆上各点的温度将趋于均匀，并且是初始温度分布的平均值 A_0

这是因为杆的侧面和两端都是绝热的，热量只能在内部流动

根据热传导的 Fourier 定律，热量总是从高温处流向低温处，最后温度趋于均匀

根据能量守恒定律，最终温度只能是初始温度的平均值

特例

 考虑**特例** $\varphi(x) = \sin^2 \frac{2\pi x}{l}$, 由 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 得

$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi x}{l}$$

 比较两边, 得到**系数**

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \ (n \neq 0, 4)$$

 定解问题的**解**为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left[- \left(\frac{4\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cos \frac{4\pi x}{l}$$

特例

 考虑**特例** $\varphi(x) = \sin^2 \frac{2\pi x}{l}$, 由 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 得

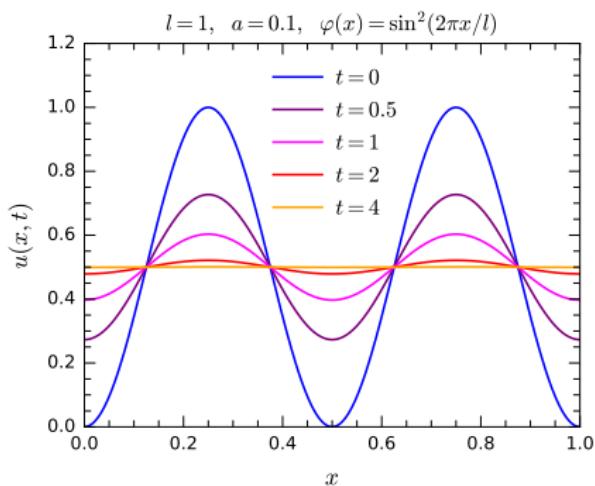
$$u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi x}{l}$$

 比较两边, 得到系数

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \ (n \neq 0, 4)$$

 定解问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left[-\left(\frac{4\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cos \frac{4\pi x}{l}$$



解的动画演示