数 学 物 理 方 法

第十三章　Green 函数法

余钊焕

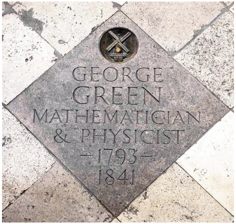
中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 12 月 21 日

第十三章　Green 函数法

- 前面几章研究数学物理方程定解问题的求解
- 主要介绍了分离变量法和 Fourier 变换法
- Fourier 变换法的精神也是分离变量法，只是形式上不甚明显
- 本章研究求解数理方程定解问题的 Green 函数法
- 这是一种新的解法
- 它的思路是先求出与点源对应的解，即 Green 函数
- 然后将原来定解问题的解表示为包含 Green 函数和定解条件的积分



George Green
(1793–1841)

§1　Green 函数的一般概念

- 线性偏微分方程可以统一写成以下形式

$$Lu = f$$

- 其中 u 是未知函数，即要研究的物理量，f 是已知函数，L 是线性微分算符
- 从数学上说，上式可以涉及任意的有限个自变量
- 对于常见物理问题，自变量是三维空间变量 $\boldsymbol{r}$ 和时间变量 t（稳定场方程不含 t）
- 因此，$u = u(\boldsymbol{r}, t)$，$f = f(\boldsymbol{r}, t)$，$L = L\left(\boldsymbol{r}, t; \nabla, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$
- 具体来说，熟悉的几类方程所对应的算符如下

- 波动方程：　$L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2$
- Poisson 方程：　$L = -\nabla^2$
- 输运方程：　$L = \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\nabla^2$
- Helmholtz 方程：　$L = -(\nabla^2 + k^2)$

Green 函数

- 首先考虑不含时的稳定场方程，有 $L = L(\boldsymbol{r}, \nabla)$
- 这包含 Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程
- 由 $\boldsymbol{r}_0$ 处的点源 $f(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ 所产生的场称为 Green 函数，记作 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$
- 也就是说，Green 函数满足方程 $LG(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$
- 因此，Green 函数又称为点源影响函数，无界空间的 Green 函数又称为基本解
- 对于有界空间，Green 函数除满足上述方程之外还要满足一定的边界条件

Green 函数

- 首先考虑不含时的稳定场方程，有 $L = L(\boldsymbol{r}, \nabla)$
- 这包含 Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程
- 由 $\boldsymbol{r}_0$ 处的点源 $f(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ 所产生的场称为 Green 函数，记作 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$
- 也就是说，Green 函数满足方程 $LG(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$
- 因此，Green 函数又称为点源影响函数，无界空间的 Green 函数又称为基本解
- 对于有界空间，Green 函数除满足上述方程之外还要满足一定的边界条件
- 就无界空间来说，如果能求出 Green 函数，则方程 $Lu(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})$ 的解可以表为

$$u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$$

- 注意到 L 只对 $\boldsymbol{r}$ 作用，不对 $\boldsymbol{r}_0$ 作用，就有

δ 函数定义二

$$Lu(\boldsymbol{r}) = \int [LG(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)] f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 = \int \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 = f(\boldsymbol{r})$$

物理意义

- **解式** $u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 的物理意义如下
- $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 是 $\boldsymbol{r}_0$ 处的**单位点源**（比如**单位点电荷**）产生的**场**
- 乘以 $f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 就是 $\boldsymbol{r}_0$ 处**大小**（比如**电量**）为 $f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 的**点源**产生的**场**
- 再对 $\boldsymbol{r}_0$ **积分**就是把**所有源**产生的**场**叠加，如此即得**总场** $u(\boldsymbol{r})$

物理意义

- **解式** $u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 的物理意义如下
- $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 是 $\boldsymbol{r}_0$ 处的**单位点源**（比如**单位点电荷**）产生的**场**
- 乘以 $f(\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 就是 $\boldsymbol{r}_0$ 处**大小**（比如**电量**）为 $f(\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 的**点源**产生的**场**
- 再对 $\boldsymbol{r}_0$ **积分**就是把**所有源**产生的**场**叠加，如此即得**总场** $u(\boldsymbol{r})$
- **例**　考虑 **Poisson 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r})$，其**微分算符**为 $L = -\nabla^2$
- 相应的 **Green 函数**满足 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$
- **规定** $\boldsymbol{r}\to\infty$ **时** $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\to 0$，可得 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$　（证明见下节）
- 于是，**解**表达为 $u(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$

物理意义

- **解式** $u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 的物理意义如下
- $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 是 $\boldsymbol{r}_0$ 处的**单位点源**（比如**单位点电荷**）产生的**场**
- 乘以 $f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 就是 $\boldsymbol{r}_0$ 处**大小**（比如**电量**）为 $f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 的**点源**产生的**场**
- 再对 $\boldsymbol{r}_0$ **积分**就是把**所有源**产生的**场**叠加，如此即得**总场** $u(\boldsymbol{r})$
- **例**　考虑 **Poisson 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r})$，其**微分算符**为 $L = -\nabla^2$
- 相应的 **Green 函数**满足 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$
- **规定** $\boldsymbol{r} \to \infty$ **时** $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \to 0$，可得 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$　（证明见下节）
- 于是，**解**表达为 $u(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$
- 特别地，如果 $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$，其中 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是**自由电荷密度**，ϵ_0 是**真空介电常数**
- 则 $u(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 是**真空**中的**静电势**

含时的情况

- 对于含时的方程，如波动方程和输运方程，有 $L = L\left(\boldsymbol{r}, t; \nabla, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$
- 此时可以定义 **Green 函数** $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0)$ 满足方程

$$LG(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\delta(t - t_0)$$

- 上式右边的 δ 函数不仅是空间上的点源，也是时间上的瞬时源
- 含时的**Green 函数**通常还要满足一定的初始条件
- 如果空间是有界的，则还要满足适当的边界条件

含时的情况

- 对于含时的方程，如波动方程和输运方程，有 $L = L\left(\boldsymbol{r}, t; \nabla, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$
- 此时可以定义 **Green 函数** $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0)$ 满足方程

$$LG(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\delta(t - t_0)$$

- 上式右边的 δ 函数不仅是空间上的点源，也是时间上的瞬时源
- 含时的Green 函数通常还要满足一定的初始条件
- 如果空间是有界的，则还要满足适当的边界条件
- 含时的问题通常要**复杂**得多
- 即使对于无界空间，方程方程 $Lu(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t)$ 的解也**不能**简单地表达为

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \int G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) f(\boldsymbol{r}_0, t_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\, \mathrm{d}t_0$$

- 因为初始条件尚未考虑在内
- 实际上，如果没有给定适当的初始条件，Green 函数本身也没有确切的定义

§2 稳定场方程的 Green 函数法

§2.1 Poisson 方程的基本解

- Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程都是不含时的稳定场方程
- 这里主要研究 Possion 方程，而 Helmholtz 方程可用类似方法加以研究
- 考虑无界空间的 Possion 方程 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r})$
- 它的 Green 函数，即基本解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 满足 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$

§2 稳定场方程的 Green 函数法

§2.1 Poisson 方程的基本解

- Possion 方程 (包括 Laplace 方程) 和 Helmholtz 方程都是不含时的稳定场方程
- 这里主要研究 Possion 方程，而 Helmholtz 方程可用类似方法加以研究
- 考虑无界空间的 Possion 方程 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r})$
- 它的 Green 函数，即基本解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 满足 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$
- 在三维情况下，规定 $\boldsymbol{r} \to \infty$ 时 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \to 0$，则

三维基本解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$

证明 需要证明的是 $-\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 符合 δ 函数 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ 的定义一，即

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \\ 0, & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1$$

三维基本解的证明

- 令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$，$R=|\boldsymbol{R}|$，则 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{4\pi R}$
- 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\boldsymbol{R}=(X,Y,Z)=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$
- 有 $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial X}=\dfrac{\partial(x-x_0)}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial X}=\dfrac{\partial}{\partial X}$，同理 $\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial Y}$，$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial Z}$
- 故 $\nabla u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=\dfrac{\partial u}{\partial X}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\partial u}{\partial Y}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\partial u}{\partial Z}\boldsymbol{e}_z=\nabla_{\boldsymbol{R}}\,u$
- 其中 $\nabla_{\boldsymbol{R}}$ 是对 $\boldsymbol{R}$ 求导的梯度算符，故 $\nabla^2=\nabla_{\boldsymbol{R}}^2$

三维基本解的证明

令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$，$R=|\boldsymbol{R}|$，则 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{4\pi R}$

记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{R}=(X,Y,Z)=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$

有 $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial X}=\dfrac{\partial(x-x_0)}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial X}=\dfrac{\partial}{\partial X}$，同理 $\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial Y}$，$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial Z}$

故 $\nabla u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=\dfrac{\partial u}{\partial X}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\partial u}{\partial Y}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\partial u}{\partial Z}\boldsymbol{e}_z=\nabla_{\boldsymbol{R}}\,u$

其中 $\nabla_{\boldsymbol{R}}$ 是对 $\boldsymbol{R}$ 求导的**梯度算符**，故 $\nabla^2=\nabla^2_{\boldsymbol{R}}$

根据**球坐标系**中 **Laplace 算符**的形式

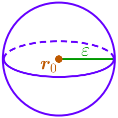
$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0$，即 $\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\nabla^2_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{4\pi R}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{4\pi R}\right)=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^2\left(-\frac{1}{4\pi R^2}\right)\right]=0$$

完成证明

但是，当 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$，即 $\boldsymbol{R}=0$ 时，**Green 函数**有**奇性**，而且**该点**是**球坐标系**的**奇点**，上述计算不成立



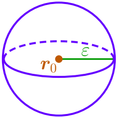
考虑以 $\boldsymbol{r}_0$ 为**球心**、ε 为**半径**的**球** K_ε，其**表面**记作 S_ε，则

$$\int_{K_\varepsilon}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{K_\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{R}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{4\pi R}\,\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\int_{S_\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{4\pi R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

其中第二步用到 **Gauss 定理**，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{d}\sigma\,\boldsymbol{e}_R$，$\mathrm{d}\sigma$ 是**面积元**的大小

完成证明

但是，当 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$，即 $\boldsymbol{R}=0$ 时，**Green 函数**有**奇性**，而且**该点**是**球坐标系**的**奇点**，上述计算不成立



$K_\varepsilon:\ R\leq\varepsilon$

$S_\varepsilon:\ R=\varepsilon$

考虑以 $\boldsymbol{r}_0$ 为**球心**、ε 为**半径**的**球** K_ε，其**表面**记作 S_ε，则

$$\int_{K_\varepsilon}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{K_\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{R}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{4\pi R}\,\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\int_{S_\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{4\pi R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

其中第二步用到 **Gauss 定理**，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{d}\sigma\,\boldsymbol{e}_R$，$\mathrm{d}\sigma$ 是**面积元**的大小

由 $\nabla_{\boldsymbol{R}}\dfrac{1}{4\pi R}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\dfrac{1}{4\pi R}\right)\boldsymbol{e}_R=-\dfrac{1}{4\pi R^2}\boldsymbol{e}_R$ 得

$$\int_{K_\varepsilon}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{S_\varepsilon}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\,\mathrm{d}\sigma=-\frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2}=-1$$

这表明 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 与 $-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处的**奇性一致**

于是，$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 在 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处都成立　　**证毕**

说明和讨论

- 在上述证明中，利用 Gauss 定理将球内的体积分转化为球面上的面积分
- 按照 Gauss 定理成立的条件，必须要求 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 在球内具有连续的二阶偏导数
- 但 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 在球心处有奇性，并**不满足**这一条件
- 所以上述证明是**不严格**的
- 比较严格的论证见讲义选读内容
- 里面用经典函数序列 δ_ε 代替 δ 函数进行推导，最后再取 $\varepsilon \to 0$ 的极限

说明和讨论

- 在上述证明中，利用 Gauss 定理将球内的体积分转化为球面上的面积分
- 按照 Gauss 定理成立的条件，必须要求 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 在球内具有连续的二阶偏导数
- 但 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ 在球心处有奇性，并**不满足**这一条件
- 所以上述证明是**不严格**的
- 比较严格的论证见讲义选读内容
- 里面用经典函数序列 δ_ε 代替 δ 函数进行推导，最后再取 $\varepsilon \to 0$ 的极限

- 考虑三维空间中的静电场问题，在 $\boldsymbol{r}_0$ 处有一个点电荷 Q
- 那么，它产生的电势 $u(\boldsymbol{r})$ 满足的方程为 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{Q}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$
- 与 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ 比较，即得 $u(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{\epsilon_0} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$
- 可见，三维基本解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$ 相当于 $Q = \epsilon_0$ 的点电荷引起的电势

二维基本解

- 基本解的形式与空间的维数有关
- 在二维无界空间，把位置矢量记作 $\boldsymbol{\rho}$，以示与三维空间的区别
- 相应地，**Green 函数** $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 满足的方程为 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$，则

$$\text{二维基本解 } G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0| + \text{常数}$$

二维基本解

- 基本解的形式与空间的维数有关
- 在二维无界空间，把位置矢量记作 $\boldsymbol{\rho}$，以示与三维空间的区别
- 相应地，**Green 函数** $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)$ 满足的方程为 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)$，则

$$\text{二维基本解 } G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0| + \text{常数}$$

- 二维基本解在 $\boldsymbol{\rho} \to \infty$ 处发散，因此**不能**取 $\boldsymbol{\rho} \to \infty$ 为 $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)$ 的零点
- 上式也可以写作 $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|} + \text{常数}$
- 这个形式与三维基本解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$ 类似，可以帮助记忆

二维基本解

- 基本解的形式与空间的维数有关
- 在二维无界空间，把位置矢量记作 $\boldsymbol{\rho}$，以示与三维空间的区别
- 相应地，**Green 函数** $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 满足的方程为 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$，则

$$\text{二维基本解}\ G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0| + \text{常数}$$

- 二维基本解在 $\rho\to\infty$ 处发散，因此**不能**取 $\rho\to\infty$ 为 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 的零点
- 上式也可以写作 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|} + \text{常数}$
- 这个形式与三维基本解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ 类似，可以帮助记忆
- **证明** 令 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0$，$R = |\boldsymbol{R}|$，取常数为零，则 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln R$
- 类似于三维情况，有 $\nabla = \nabla_{\boldsymbol{R}}$ 和 $\nabla^2 = \nabla^2_{\boldsymbol{R}}$

二维基本解的证明

- 根据极坐标系中 Laplace 算符的形式 $\nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$
- 当 $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}_0$，即 $\boldsymbol{R} \neq \mathbf{0}$ 时，有

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{1}{2\pi}\nabla_{\boldsymbol{R}}^2 \ln R = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\ln R\right) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{1}{R}\right) = 0$$

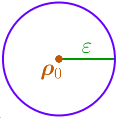
二维基本解的证明

根据极坐标系中 Laplace 算符的形式 $\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$

当 $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}_0$，即 $\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$ 时，有

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{1}{2\pi}\nabla_{\boldsymbol{R}}^2 \ln R = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\ln R\right) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{1}{R}\right) = 0$$

但是，当 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$，即 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ 时，Green 函数有奇性，而且该点是极坐标系的奇点，上述计算不成立



$K_\varepsilon:\ R \leq \varepsilon$

$L_\varepsilon:\ R = \varepsilon$

考虑以 $\boldsymbol{\rho}_0$ 为圆心、ε 为半径的圆 K_ε，其圆周记作 L_ε，则

$$\int_{K_\varepsilon} \nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = \int_{K_\varepsilon} \nabla_{\boldsymbol{R}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \int_{L_\varepsilon} \nabla_{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中第二步用到二维空间中的 Gauss 定理 (其实就是 Green 公式)

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}s\,\boldsymbol{e}_R$，$\mathrm{d}s$ 是弧元，$\boldsymbol{e}_R$ 是圆周的外法向单位矢量

二维点电荷

由 $\nabla_{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\ln R\,\boldsymbol{e}_R\right)\cdot(\mathrm{d}s\,\boldsymbol{e}_R)=-\frac{1}{2\pi R}\mathrm{d}s$ 得

$$\int_{K_\varepsilon}\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}=\int_{L_\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{L_\varepsilon}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{d}s=-\frac{2\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon}=-1$$

这表明 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 与 $-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 在 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处的**奇性一致**

于是，$\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 在 $\boldsymbol{\rho}\neq\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处都成立 **证毕** ■

二维点电荷

由 $\nabla_R\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\ln R\,\boldsymbol{e}_R\right)\cdot(\mathrm{d}s\,\boldsymbol{e}_R) = -\frac{1}{2\pi R}\mathrm{d}s$ 得

$$\int_{K_\varepsilon}\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = \int_{L_\varepsilon}\nabla_R\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{L_\varepsilon}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{d}s = -\frac{2\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} = -1$$

这表明 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 与 $-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 在 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处的**奇性一致**

于是，$\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 在 $\boldsymbol{\rho}\neq\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处都成立 **证毕**

二维空间中的**点电荷** Q 产生的**电势** $u(\boldsymbol{\rho})$ 满足 $\nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$

因此 $u(\boldsymbol{\rho}) = \frac{Q}{\epsilon_0}G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$，故**二维基本解**相当于 $Q=\epsilon_0$ 时的**电势**

二维点电荷

由 $\nabla_R\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\ln R\,\boldsymbol{e}_R\right)\cdot(\mathrm{d}s\,\boldsymbol{e}_R)=-\frac{1}{2\pi R}\mathrm{d}s$ 得

$$\int_{K_\varepsilon}\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}=\int_{L_\varepsilon}\nabla_R\left(-\frac{1}{2\pi}\ln R\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{L_\varepsilon}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{d}s=-\frac{2\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon}=-1$$

这表明 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 与 $-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 在 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处的奇性一致

于是，$\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 在 $\boldsymbol{\rho}\neq\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处都成立 证毕

二维空间中的点电荷 Q 产生的电势 $u(\boldsymbol{\rho})$ 满足 $\nabla^2 u(\boldsymbol{\rho})=-\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$

因此 $u(\boldsymbol{\rho})=\frac{Q}{\epsilon_0}G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$，故二维基本解相当于 $Q=\epsilon_0$ 时的电势

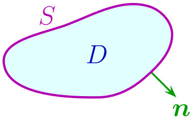
容易看出，二维基本解 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|+$ 常数 在 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_0$ 处的奇性

弱于三维基本解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处的奇性

可以证明，一维空间基本解的奇性更弱

§2.2 第二 Green 公式

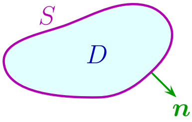
- 设 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $v(\boldsymbol{r})$ 在区域 D 上具有连续的二阶偏导数，在闭域 $\bar{D}$ 上具有连续的一阶偏导数，$S=\partial D$ 是 D 的边界面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向单位矢量
- 将 $\nabla\cdot(u\nabla v)=\nabla u\cdot\nabla v+u\nabla^2 v$ 与 $\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\nabla^2 u$ 相减
- 得 $u\nabla^2 v-v\nabla^2 u=\nabla\cdot(u\nabla v-v\nabla u)$
- 在区域 D 上积分，利用 **Gauss 定理**，推出



$$\int_D (u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_D \nabla\cdot(u\nabla v-v\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_S (u\nabla v-v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

§2.2 第二 Green 公式

- 设 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $v(\boldsymbol{r})$ 在区域 D 上具有连续的二阶偏导数，在闭域 $\bar{D}$ 上具有连续的一阶偏导数，$S=\partial D$ 是 D 的边界面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向单位矢量
- 将 $\nabla\cdot(u\nabla v)=\nabla u\cdot\nabla v+u\nabla^2 v$ 与 $\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\nabla^2 u$ 相减
- 得 $u\nabla^2 v-v\nabla^2 u=\nabla\cdot(u\nabla v-v\nabla u)$
- 在区域 D 上积分，利用 **Gauss 定理**，推出



$$\int_D (u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_D \nabla\cdot(u\nabla v-v\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_S (u\nabla v-v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

- 由 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{d}\sigma\,\boldsymbol{n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}=\nabla v\cdot\boldsymbol{n}$ 得 $\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=(\nabla v\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma=\nabla v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，于是

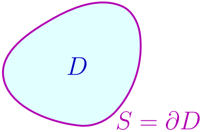
$$\int_D (u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_S (u\nabla v-v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

- 这称为**第二 Green 公式**，以上是它在三维空间中的形式，它对二维空间也成立

§2.3 Poisson 方程第一边值问题

- 考虑**有界区域** D 上的 **Poisson 方程第一边值问题**

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in D \\ u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

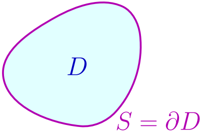


- 前面在**无界空间**中曾用**基本解**和 $f(\boldsymbol{r})$ 表达出**一般解** $u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$
- 现在，由于**边界条件**的限制，这样的**一般解不再成立**
- 为了得到类似的结果，需要**修改 Green 函数的定义**

§2.3　Poisson 方程第一边值问题

考虑**有界区域** D 上的 **Poisson 方程第一边值问题**

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in D \\ u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$



前面在**无界空间**中曾用**基本解**和 $f(\boldsymbol{r})$ 表达出**一般解** $u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$

现在，由于**边界条件**的限制，这样的**一般解不再成立**

为了得到类似的结果，需要**修改 Green 函数的定义**

假设 Green 函数仍满足方程 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$，结合 **Poisson 方程**，有

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}), \quad u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

两式相减，得 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})$

从而

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}_0) &= \int_D u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_D \left[G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

Green 函数的定解问题

- 利用第二 Green 公式，得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}_0) &= \int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_D [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_S \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n} - u(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\right]\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

- 这似乎给出了问题的解，但它要求已知边界上的 u 值和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 值
- 而边界条件 $u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r})$ 只给出前者，所以上式**不是**最后的解

Green 函数的定解问题

- 利用第二 Green 公式，得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}_0) &= \int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_D \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_S \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n} - u(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\right]\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

- 这似乎给出了问题的解，但它要求已知边界上的 u 值和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 值
- 而边界条件 $u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r})$ 只给出前者，所以上式**不是**最后的解
- 不难看出，只要在 Green 函数的定义中加上适当的边界条件，就能解决这一困难
- 对于这里的 Poisson 方程第一边值问题，定义相应的 Green 函数满足定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0 \in D \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r}\in S} = 0 \end{cases}$$

- 从而原定解问题的解表达为 $u(\boldsymbol{r}_0) = \displaystyle\int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_S \varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma$

关于解式的讨论

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_S \varphi(\boldsymbol{r})\,\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma$$

- 只要能求出 **Green 函数** $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$，原定解问题的解就可以通过以上积分表出
- 因此问题归结为求解 **Green 函数**，由于边界条件的限制，它不再是基本解
- 现在，**Green 函数**满足的定解问题是一个特殊的 **Poisson 方程定解问题**
- 一般来说，这个问题并不一定比原定解问题容易求解
- 但对于某些特殊的区域，存在求解 Green 函数的特殊技巧，即下节介绍的镜像法

关于解式的讨论

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_S \varphi(\boldsymbol{r})\,\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma$$

- 只要能求出 **Green 函数** $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$，原定解问题的解就可以通过以上积分表出
- 因此问题归结为求解 **Green 函数**，由于边界条件的限制，它不再是基本解
- 现在，**Green 函数**满足的定解问题是一个特殊的 **Poisson 方程定解问题**
- 一般来说，这个问题并不一定比原定解问题容易求解
- 但对于某些特殊的区域，存在求解 Green 函数的特殊技巧，即下节介绍的镜像法
- 前面无界空间中的一般解 $u(\boldsymbol{r})=\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 表达为对源点 $\boldsymbol{r}_0$ 积分
- 现在解 $u(\boldsymbol{r}_0)$ 表达为对场点 $\boldsymbol{r}$ 积分，即对 **Green 函数** $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 的第一变量积分
- 这似乎使解式第一项 $\int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的物理诠释发生**困难**
- 但可以证明 (§2.5)，**Green 函数**对源点和场点具有对称性，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=G(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})$
- 故 $\int_D G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_D G(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，后者以 $\boldsymbol{r}$ 为源点，不再有困难

边界条件的验证

❓ 有同学可能会问，为什么要如此定义 Green 函数?

❗ 其实，Green 函数是一个辅助工具，其作用类似于证明几何问题时所作的辅助线

‼ 如何作辅助线取决于怎样才有助于解决问题，Green 函数的定义也是如此

边界条件的验证

❓ 有同学可能会问，为什么要**如此定义 Green 函数**?

❗ 其实，**Green 函数**是一个**辅助工具**，其作用类似于**证明几何问题**时所作的**辅助线**

‼ 如何作**辅助线**取决于怎样才有助于解决问题，**Green 函数的定义**也是如此

下面讨论**边界条件** $u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r})$ 的验证，也就是当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋于**边界点** $(\boldsymbol{r}_0 \to S)$ 时，

验证**解式** $u(\boldsymbol{r}_0) = \int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_S \varphi(\boldsymbol{r}) \dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\, \mathrm{d}\sigma$ 给出 $\varphi(\boldsymbol{r}_0)$

由于 **Green 函数**的**对称性**和**边界条件**，有 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r}_0 \to S} = G(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}_0 \to S} = 0$

因此**解式**第一项 $\int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{r}_0 \to S$ 时为**零**

边界条件的验证

? 有同学可能会问，为什么要**如此定义 Green 函数**?

! 其实，**Green 函数**是一个**辅助工具**，其作用类似于**证明几何问题**时所作的**辅助线**

!! 如何作**辅助线**取决于怎样才有助于解决问题，**Green 函数的定义**也是如此

- 下面讨论**边界条件** $u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r})$ 的验证，也就是当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋于**边界点** $(\boldsymbol{r}_0 \to S)$ 时，

验证**解式** $u(\boldsymbol{r}_0) = \int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_S \varphi(\boldsymbol{r}) \dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\, \mathrm{d}\sigma$ 给出 $\varphi(\boldsymbol{r}_0)$

- 由于 **Green 函数**的**对称性**和**边界条件**，有 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r}_0 \to S} = G(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}_0 \to S} = 0$
- 因此**解式**第一项 $\int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{r}_0 \to S$ 时为**零**
- 当 $\boldsymbol{r}_0 \to S$ 时，粗略看来，第二项中对**边界面**的**积分**必然包含 $\boldsymbol{r}_0$ **附近**的**面积元**
- 而 **Green 函数**在 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ 处有**奇性**，所以对**积分**的贡献主要来自 $\boldsymbol{r}_0$ **附近**的**面积元**
- 这样就大致可以用 $\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ 代替第二项积分中的 $\varphi(\boldsymbol{r})$，利用 **Gauss 定理**推出

$$u(\boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r}_0 \to S} = -\varphi(\boldsymbol{r}_0) \int_S \nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\varphi(\boldsymbol{r}_0) \int_D \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

边界条件的满足

- 将 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0 \in D)$ 代入，得到期望的结果

$$u(\boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r}_0 \to S} = -\varphi(\boldsymbol{r}_0) \int_D \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{r}_0) \int_D \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{r}_0)$$

- 注意，$\boldsymbol{r}_0$ 虽然靠近**边界面**，但仍然在**区域** D 内
- 因此 δ **函数**在**区域** D 上的**积分**为 1
- 这个讨论帮助我们理解为什么**边界条件**得以满足，但不能看作**严格**的论证
- 对于**具体问题**的结果，通常可以通过**具体计算**加以**验证**

Poisson 方程第二边值问题

🦌 考虑**有界区域** D 上的 **Poisson 方程第二边值问题**

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in D \\ \left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_S = \psi(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

🦓 如果仿照**第一边值问题**的情况定义 **Green 函数**的**定解问题**为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \quad \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0 \in D \\ \left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\right|_{\boldsymbol{r} \in S} = 0 \end{cases}$$

🦒 则由 $u(\boldsymbol{r}_0) = \int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_S \left[G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n} - u(\boldsymbol{r}) \dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\partial n} \right] \mathrm{d}\sigma$ 得

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \int_D G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_S G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\sigma$$

🦬 这似乎得到了**原定解问题**的**解**，但它是**有问题**的

Green 函数不存在

- 实际上，由 **Gauss 定理**得

$$\int_D \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_S \frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

- 另一方面，由 **Green 函数**满足的方程得

$$\int_D \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_D \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -1 \neq 0$$

- 两者**矛盾**，表明满足**定解问题** $\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \\ \left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\right|_{\boldsymbol{r}\in S} = 0 \end{cases}$ 的 **Green 函数不存在**

Green 函数不存在

- 实际上，由 **Gauss 定理**得

$$\int_D \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_S \frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

- 另一方面，由 **Green 函数**满足的方程得

$$\int_D \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_D \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -1 \neq 0$$

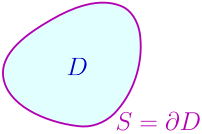
- 两者**矛盾**，表明满足**定解问题** $\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \\ \left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\right|_{\boldsymbol{r}\in S} = 0 \end{cases}$ 的 **Green 函数不存在**

- 在**物理**上，可以把**这个定解问题**看作**热传导问题**
- $\boldsymbol{r}_0$ 处有**热源**，因而稳定时**边界**上必定有**热流**
- 但**齐次**的**第二类边界条件**意味着**边界**上**绝热**，相互**矛盾**，解不存在

§2.4 Laplace 方程第一边值问题

考虑**有界区域** D 上的 **Laplace 方程第一边值问题**

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, & \boldsymbol{r} \in D \\ u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r}) & \end{cases}$$



这只是 **Possion 方程第一边值问题**的一种特殊情况

相应的 **Green 函数**定解问题仍然由 $\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \\ G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r} \in S} = 0 \end{cases}$ 给出

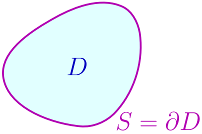
对原来的**解式**取 $f(\boldsymbol{r}) = 0$，就得到 **Laplace 方程定解问题**的**解**

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\int_S \varphi(\boldsymbol{r}) \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma$$

§2.4 Laplace 方程第一边值问题

考虑有界区域 D 上的 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, & \boldsymbol{r} \in D \\ u(\boldsymbol{r})|_S = \varphi(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$



这只是 Possion 方程第一边值问题的一种特殊情况

相应的 Green 函数定解问题仍然由 $\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \\ G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{\boldsymbol{r}\in S} = 0 \end{cases}$ 给出

对原来的解式取 $f(\boldsymbol{r}) = 0$，就得到 Laplace 方程定解问题的解

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\int_S \varphi(\boldsymbol{r}) \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma$$

需要特别注意的是，尽管 Laplace 方程是无源的，但相应的 Green 函数定解问题仍然是有源的，**否则**由于 Green 函数的边界条件是齐次的，将会得到 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = 0$

只要记得 Green 函数又称为点源影响函数，就可以避免在这个问题上出错

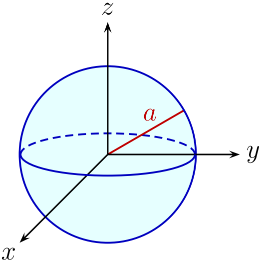
§3 特殊区域上 Green 函数的制作

- 由上节讨论可知，Green 函数法的关键在于求解 Green 函数的定解问题
- 前已指出，求解它通常并不比求解一般的定解问题来得容易
- 但对于一些特殊区域上的 Possion 方程（或 Laplace 方程）第一边值问题
- 存在求解 Green 函数的特殊技巧，即镜像法
- 本节讨论几个典型的例子

§3.1 球内 Laplace 方程第一边值问题

⚽ 考虑球内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, & r < a \\ u(\boldsymbol{r})|_{r=a} = f(\theta, \phi) \end{cases}$$



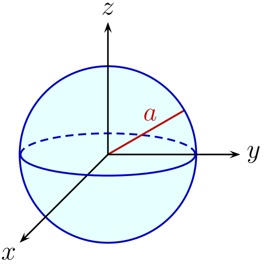
🥅 相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), & r, r_0 < a \\ G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

§3.1 球内 Laplace 方程第一边值问题

考虑球内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, & r < a \\ u(\boldsymbol{r})|_{r=a} = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

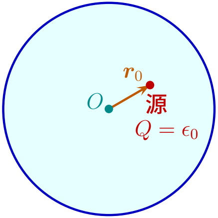


相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), & r, r_0 < a \\ G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

将它看作静电场问题，表述为：

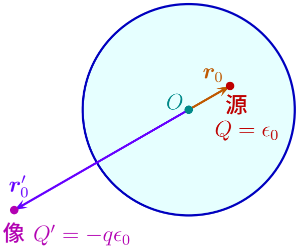
球内某点 $\boldsymbol{r}_0$ 处有一个点电荷，电量为 $Q = \epsilon_0$，而球面上的电势为零，求解球内的电势分布



为了保持球面上的电势为零，则球面上或球外必须有某种电荷分布，以抵消 $\boldsymbol{r}_0$ 处的点电荷在球面上产生的电势

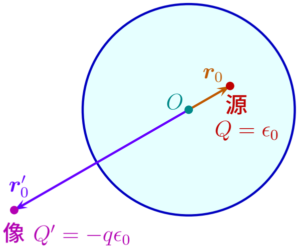
镜像法

- 现在希望在球外某点 $\boldsymbol{r}_0'$ 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$，参数 q 有待确定
- 从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零
- 由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解



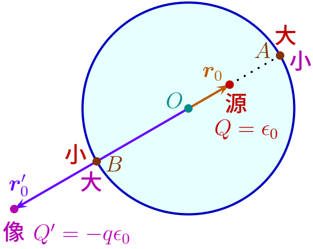
镜像法

- 现在希望在球外某点 r_0' 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$，参数 q 有待确定
- 从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零
- 由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解
- 这种方法称为镜像法，在电动力学中称为电像法，r_0' 处放置的点电荷称为像电荷
- 对于某些区域，如果一个像电荷不能解决问题，可以考虑用多个像电荷
- 镜像法是否可行，取决于区域的形状，通常它只对某些非常规则的区域才能奏效



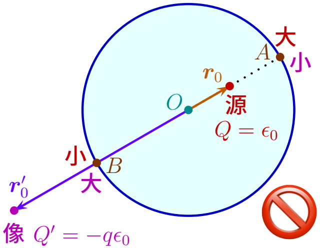
镜像法

- 现在希望在球外某点 r_0' 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$，参数 q 有待确定
- 从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零
- 由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解
- 这种方法称为镜像法，在电动力学中称为电像法，r_0' 处放置的点电荷称为像电荷
- 对于某些区域，如果一个像电荷不能解决问题，可以考虑用多个像电荷
- 镜像法是否可行，取决于区域的形状，通常它只对某些非常规则的区域才能奏效
- 对于目前的问题，如果镜像法能够奏效，那么根据对称性，像电荷的位置必定在通过球心 O 和点 r_0 的直线上
- 如果像电荷与源电荷在球心的两侧，那么源电荷的电势在 A 点较大，在 B 点较小
- 而像电荷的电势却在 A 点较小，在 B 点较大



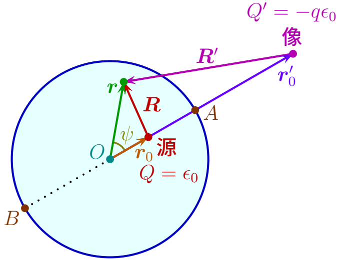
镜像法

- 现在希望在球外某点 r_0' 处放置一个点电荷，电量为 $Q' = -q\epsilon_0$，参数 q 有待确定
- 从而使得两个点电荷在球面产生的电势为零
- 由于数学上可以证明有唯一性定理，那么它们在球内产生的电势就是所求的解
- 这种方法称为镜像法，在电动力学中称为电像法，r_0' 处放置的点电荷称为像电荷
- 对于某些区域，如果一个像电荷不能解决问题，可以考虑用多个像电荷
- 镜像法是否可行，取决于区域的形状，通常它只对某些非常规则的区域才能奏效
- 对于目前的问题，如果镜像法能够奏效，那么根据对称性，像电荷的位置必定在通过球心 O 和点 r_0 的直线上
- 如果像电荷与源电荷在球心的两侧，那么源电荷的电势在 A 点较大，在 B 点较小
- 而像电荷的电势却在 A 点较小，在 B 点较大
- 于是两者的电势在 A、B 两点不可能抵消
- 从而球面上的电势不能为零



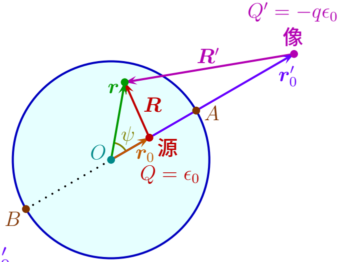
源电荷和像电荷产生的电势

- 因此，像电荷与源电荷必定在球心的同一侧
- 像电荷位置 $\boldsymbol{r}_0'$ 在经过 $\boldsymbol{r}_0$ 的半径 OA 的延长线上
- 所以 $\boldsymbol{r}_0'$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 具有相同的角向坐标
- 记 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0'$ 的球坐标为 (r_0, θ_0, ϕ_0) 和 (r_0', θ_0, ϕ_0)

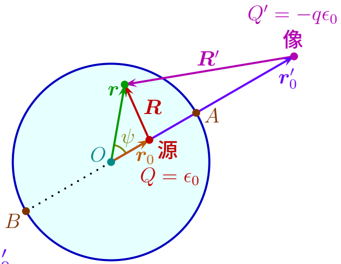


源电荷和像电荷产生的电势

- 因此，像电荷与源电荷必定在球心的同一侧
- 像电荷位置 $\boldsymbol{r}_0'$ 在经过 $\boldsymbol{r}_0$ 的半径 OA 的延长线上
- 所以 $\boldsymbol{r}_0'$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 具有相同的角向坐标
- 记 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0'$ 的球坐标为 (r_0, θ_0, ϕ_0) 和 (r_0', θ_0, ϕ_0)
- 在球内任取一点 $\boldsymbol{r}$，其球坐标为 (r, θ, ϕ)
- 记 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 的夹角为 ψ，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0'$
- 源电荷和像电荷在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电势 $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \dfrac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \dfrac{1}{4\pi R} - \dfrac{q}{4\pi R'}$



源电荷和像电荷产生的电势



- 因此，**像电荷**与**源电荷**必定在**球心**的**同一侧**
- **像电荷位置** $\boldsymbol{r}_0'$ 在经过 $\boldsymbol{r}_0$ 的半径 OA 的延长线上
- 所以 $\boldsymbol{r}_0'$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 具有**相同的角向坐标**
- 记 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0'$ 的球坐标为 (r_0, θ_0, ϕ_0) 和 (r_0', θ_0, ϕ_0)
- 在**球内**任取一点 $\boldsymbol{r}$，其球坐标为 (r, θ, ϕ)
- 记 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 的**夹角**为 ψ，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0'$
- **源电荷**和**像电荷**在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的**电势** $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \dfrac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \dfrac{1}{4\pi R} - \dfrac{q}{4\pi R'}$
- 由 $R^2 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi$，$R'^2 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0'|^2 = r^2 + r_0'^2 - 2rr_0'\cos\psi$
- 得 $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} - \dfrac{q}{4\pi\sqrt{r^2 + r_0'^2 - 2rr_0'\cos\psi}}$
- 在**球面**上，$r = a$，则

$$g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)|_{r=a} = \frac{1}{4\pi r_0\sqrt{(a/r_0)^2 + 1 - 2(a/r_0)\cos\psi}} - \frac{q}{4\pi a\sqrt{1 + (r_0'/a)^2 - 2(r_0'/a)\cos\psi}}$$

Green 函数

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|_{r=a}=\frac{1}{4\pi r_0\sqrt{1+\left(\frac{a}{r_0}\right)^2-2\frac{a}{r_0}\cos\psi}}-\frac{q}{4\pi a\sqrt{1+\left(\frac{r_0'}{a}\right)^2-2\frac{r_0'}{a}\cos\psi}}$$

- 注意到 $\frac{a}{r_0}$ 和 $\frac{r_0'}{a}$ **均大于** 1，可见，只要取 $\frac{a}{r_0}=\frac{r_0'}{a}$ 和 $\frac{1}{r_0}=\frac{q}{a}$，即

$$r_0'=\frac{a^2}{r_0},\quad q=\frac{a}{r_0}$$

- 就能得到 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|_{r=a}=0$，使**球面**上的**电势**为**零**
- 可见，**镜像法**对于本问题确实是**成功**的

Green 函数

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|_{r=a}=\frac{1}{4\pi r_0\sqrt{1+\left(\frac{a}{r_0}\right)^2-2\frac{a}{r_0}\cos\psi}}-\frac{q}{4\pi a\sqrt{1+\left(\frac{r_0'}{a}\right)^2-2\frac{r_0'}{a}\cos\psi}}$$

- 注意到 $\frac{a}{r_0}$ 和 $\frac{r_0'}{a}$ **均大于 1**，可见，只要取 $\frac{a}{r_0}=\frac{r_0'}{a}$ 和 $\frac{1}{r_0}=\frac{q}{a}$，即

$$r_0'=\frac{a^2}{r_0},\quad q=\frac{a}{r_0}$$

- 就能得到 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|_{r=a}=0$，使**球面**上的**电势**为**零**
- 可见，**镜像法**对于本问题确实是**成功**的
- 将参数值 r_0' 和 q 代入 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi R}-\frac{q}{4\pi R'}$，得到所求的 **Green 函数**为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi R}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi R'}$$

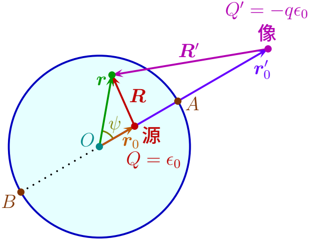
- 其中 $R=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\psi}$，$R'=\sqrt{r^2+a^4/r_0^2-2r(a^2/r_0)\cos\psi}$

以 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 代表 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 方向的**单位矢量**

则可以用**直角坐标**将它们表示为

$$\hat{\boldsymbol{r}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

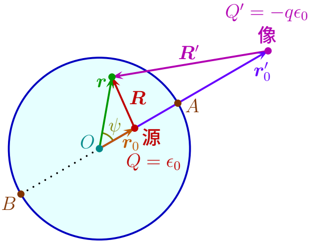
$$\hat{\boldsymbol{r}}_0 = (\sin\theta_0\cos\phi_0, \sin\theta_0\sin\phi_0, \cos\theta_0)$$



从而，$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 的**夹角** ψ 满足

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_0 = \sin\theta\sin\theta_0(\cos\phi\cos\phi_0 + \sin\phi\sin\phi_0) + \cos\theta\cos\theta_0 \\ &= \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0) + \cos\theta\cos\theta_0\end{aligned}$$

对称点



- 以 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 代表 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 方向的**单位矢量**
- 则可以用**直角坐标**将它们表示为

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{r}} &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\
\hat{\boldsymbol{r}}_0 &= (\sin\theta_0\cos\phi_0, \sin\theta_0\sin\phi_0, \cos\theta_0)
\end{aligned}
$$

- 从而，$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 的**夹角** ψ 满足

$$
\begin{aligned}
\cos\psi &= \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_0 = \sin\theta\sin\theta_0(\cos\phi\cos\phi_0 + \sin\phi\sin\phi_0) + \cos\theta\cos\theta_0 \\
&= \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0) + \cos\theta\cos\theta_0
\end{aligned}
$$

- 由前面的讨论和 $r_0' = a^2/r_0$ 可知，**像电荷**与**源电荷**具有**相同**的**角向坐标**
- 而**径向坐标**满足 $r_0' r_0 = a^2$，这样的两点称为关于**球面**的**对称点**
- $q = a/r_0$ 表明**像电荷** $Q' = -q\epsilon_0$与**源电荷** $Q = \epsilon_0$ 之比为 $-a/r_0$
- **负号**容易理解，因为两个**同号**电荷**不可能**使球面上的总电势为零
- B **点**离**源电荷**近，离**像电荷**远，电势为零要求 $|Q'| > |Q|$，这与 $q = \dfrac{a}{r_0} > 1$ 一致

解的积分式

球面的外法线方向是半径方向，将 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{4\pi R}-\dfrac{a}{r_0}\dfrac{1}{4\pi R'}$ 代入

$$u(\boldsymbol{r}_0)=-\int_S\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma=-\int_S f(\theta,\phi)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\,\mathrm{d}\sigma$$

就可以写出原定解问题的解

根据

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi R}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\psi}}=-\frac{r-r_0\cos\psi}{4\pi R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi R'}\right)=-\frac{a}{4\pi r_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^4/r_0^2-2r(a^2/r_0)\cos\psi}}=\frac{ar-(a^3/r_0)\cos\psi}{4\pi r_0 R'^3}$$

推出

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi R}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi R'}\right)\bigg|_{r=a}$$

$$=-\frac{a-r_0\cos\psi}{4\pi R^3|_{r=a}}+\frac{a^2-(a^3/r_0)\cos\psi}{4\pi r_0R'^3|_{r=a}}$$

Green 函数的方向导数

由 $R=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\psi}$ 和 $R'=\sqrt{r^2+\frac{a^4}{r_0^2}-\frac{2ra^2}{r_0}\cos\psi}$ 得

$$R|_{r=a}=\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\psi},\quad R'|_{r=a}=\sqrt{a^2+\frac{a^4}{r_0^2}-\frac{2a^3}{r_0}\cos\psi}=\frac{a}{r_0}R|_{r=a}$$

从而

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\right|_{r=a} &= -\frac{a-r_0\cos\psi}{4\pi R^3|_{r=a}}+\frac{a^2-(a^3/r_0)\cos\psi}{4\pi r_0 R'^3|_{r=a}} \\
&= \frac{1}{4\pi R^3|_{r=a}}\left[-a+r_0\cos\psi+\frac{a^2-(a^3/r_0)\cos\psi}{r_0(a/r_0)^3}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi R^3|_{r=a}}\left(\frac{-a^2+ar_0\cos\psi}{a}+\frac{r_0^2-ar_0\cos\psi}{a}\right) \\
&= \frac{r_0^2-a^2}{4\pi a R^3|_{r=a}}=\frac{r_0^2-a^2}{4\pi a(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\psi)^{3/2}}
\end{aligned}$$

球的 Poisson 积分

将 $\left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\right|_{r=a}=\dfrac{r_0^2-a^2}{4\pi a(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\psi)^{3/2}}$ 和 $\mathrm{d}\sigma=a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ 代入

$$u(\boldsymbol{r}_0)=-\int_S f(\theta,\phi)\,\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\,\mathrm{d}\sigma$$

得到原定解问题的解

$$u(r_0,\theta_0,\phi_0)=\frac{a(a^2-r_0^2)}{4\pi}\int\frac{f(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\psi)^{3/2}}$$

其中 θ 和 ϕ 的积分范围分别是从 0 到 π 和从 0 到 2π

上式称为球的 Poisson 积分

球的 Poisson 积分

将 $\left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\right|_{r=a} = \dfrac{r_0^2 - a^2}{4\pi a(a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\psi)^{3/2}}$ 和 $\mathrm{d}\sigma = a^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ 代入

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\int_S f(\theta,\phi)\,\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}\,\mathrm{d}\sigma$$

得到原定解问题的解

$$u(r_0,\theta_0,\phi_0) = \frac{a(a^2 - r_0^2)}{4\pi}\int \frac{f(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\psi)^{3/2}}$$

其中 θ 和 ϕ 的积分范围分别是从 0 到 π 和从 0 到 2π

上式称为球的 Poisson 积分，可以证明，它与分离变量法得到的结果是一致的

注 $\cos\psi = \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0) + \cos\theta\cos\theta_0$ 包含变量 θ、ϕ 和参数 θ_0、ϕ_0

对 θ、ϕ 积分后，解 u 是 r_0、θ_0 和 ϕ_0 的函数，注意 (r_0,θ_0,ϕ_0) 可以任意变化

所以在求 Green 函数时，**不能**将源点 $\boldsymbol{r}_0$ 置于特殊的位置，比如极轴上

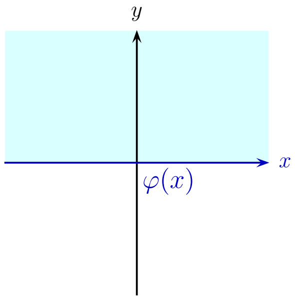
§3.2 上半平面 Laplace 方程第一边值问题

考虑上半平面 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ u(\boldsymbol{\rho})|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0), \quad -\infty < x, x_0 < +\infty, \quad 0 < y, y_0 < +\infty \\ G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)|_{y=0} = 0 \end{cases}$$



§3.2 上半平面 Laplace 方程第一边值问题

考虑上半平面 Laplace 方程第一边值问题

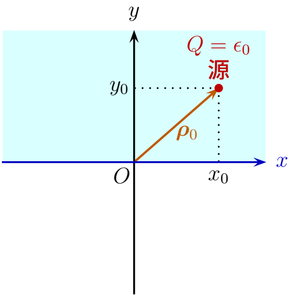
$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ u(\boldsymbol{\rho})|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0), & -\infty < x, x_0 < +\infty, \quad 0 < y, y_0 < +\infty \\ G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

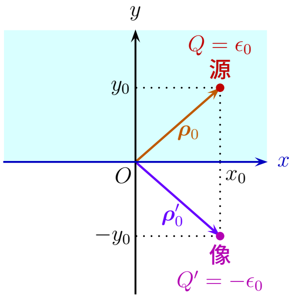
将它看作静电场问题，表述为：

上半平面上某点 $\boldsymbol{\rho}_0 = (x_0, y_0)$ 处有一个二维点电荷，电量为 $Q = \epsilon_0$（从三维空间看，其实是垂直于 xy 平面的无穷长线电荷，线电荷密度为 ϵ_0），而 x 轴上的电势为零，求解上半平面的电势分布



像电荷

为了保持 x **轴**上的**电势**为**零**，显然应该在**下半平面**的**点** $\boldsymbol{\rho}_0' = (x_0, -y_0)$ 处放置一个**二维像电荷**，**电量**为 $Q' = -\epsilon_0$



像电荷

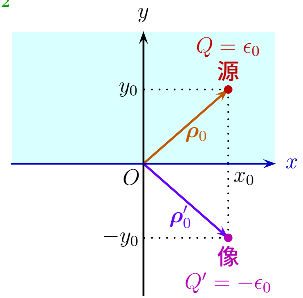
为了保持 x 轴上的电势为零，显然应该在下半平面的点 $\boldsymbol{\rho}_0' = (x_0, -y_0)$ 处放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

从而，源电荷和像电荷在上半平面上产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0| - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'| = -\frac{1}{2\pi} \ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0| + \frac{1}{2\pi} \ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'|$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'|^2}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

这里正好不需要常数项



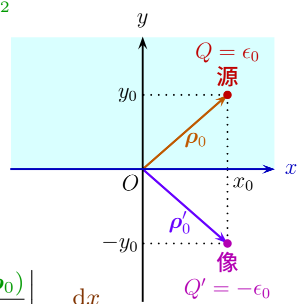
像电荷

为了保持 x 轴上的电势为零，显然应该在下半平面的点 $\boldsymbol{\rho}_0' = (x_0, -y_0)$ 处放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

从而，源电荷和像电荷在上半平面上产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0| - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'| = -\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0| + \frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'|$$

$$= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'|^2}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



这里正好不需要常数项

注意上半平面的外法线方向是 $-y$ 方向，有

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)}{\partial n} = -\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}$$

原定解问题的解表达为

$$u(x_0, y_0) = -\int_S \varphi(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}\right|_{y=0}\mathrm{d}x$$

原定解问题的解

- 由于 $\dfrac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\{\ln[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]-\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\}$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}-\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]$$

- 有 $\left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}\right|_{y=0} = \dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\dfrac{-2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\right] = \dfrac{y_0}{\pi}\dfrac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}$

- 最终，原定解问题的解是

$$u(x_0,y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}\right|_{y=0}\mathrm{d}x = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x$$

原定解问题的解

由于
$$\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\{\ln[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]-\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}-\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]$$

有
$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\frac{-2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\right]=\frac{y_0}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

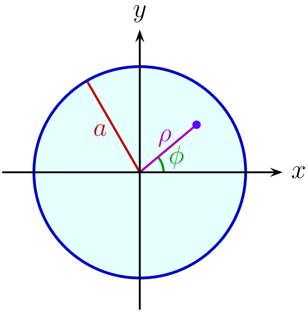
最终，原定解问题的解是
$$u(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial y}\right|_{y=0}\mathrm{d}x=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x$$

根据 $\delta(x)=\lim\limits_{b\to 0+}\dfrac{b}{\pi(x^2+b^2)}$，有 $\lim\limits_{y_0\to 0+}\dfrac{y_0}{\pi[(x_0-x)^2+y_0^2]}=\delta(x_0-x)$，故
$$u(x_0,0)=\lim_{y_0\to 0+}u(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left\{\lim_{y_0\to 0+}\frac{y_0}{\pi[(x_0-x)^2+y_0^2]}\right\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x_0-x)\,\mathrm{d}x=\varphi(x_0)$$
➡️ 验证了**边界条件**

§3.3 圆内 Laplace 方程第一边值问题

考虑平面上圆内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) = 0, & \rho < a \\ u(\boldsymbol{\rho})|_{\rho=a} = f(\phi) \end{cases}$$



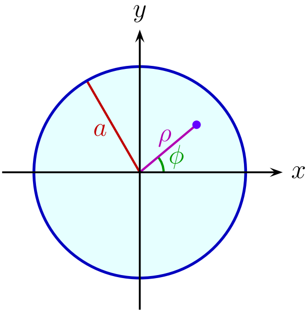
相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0), & \rho, \rho_0 < a \\ G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$$

§3.3 圆内 Laplace 方程第一边值问题

考虑平面上圆内 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) = 0, & \rho < a \\ u(\boldsymbol{\rho})|_{\rho=a} = f(\phi) \end{cases}$$

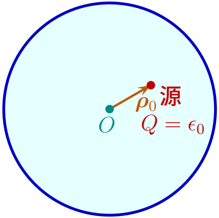


相应的 Green 函数定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0), & \rho, \rho_0 < a \\ G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$$

将它看作静电场问题，表述为：

圆内极坐标为 $\boldsymbol{\rho}_0 = (\rho_0, \phi_0)$ 的某点处有一个二维点电荷，电量为 $Q = \epsilon_0$，而圆周上的电势为零，求解圆内的电势分布

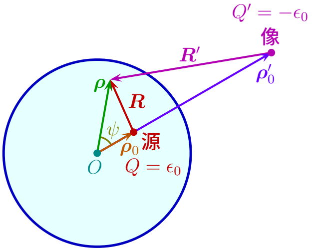


像电荷

今在**源点** $\boldsymbol{\rho}_0 = (\rho_0, \phi_0)$ 关于**圆周**的**对称点**

$\boldsymbol{\rho}_0' = \dfrac{a^2}{\rho_0^2}\,\boldsymbol{\rho}_0 = \left(\dfrac{a^2}{\rho_0}, \phi_0\right)$ [满足 $\rho_0\rho_0' = a^2$] 处

放置一个**二维像电荷**，**电量**为 $Q' = -\epsilon_0$

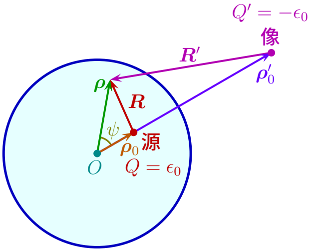


在**圆内**任取一点 $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \phi)$

$\boldsymbol{\rho}$ 与 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的**夹角**为 $\psi = \phi - \phi_0$

记 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0$，$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'$

像电荷



- 今在源点 $\boldsymbol{\rho}_0 = (\rho_0, \phi_0)$ 关于圆周的对称点

$\boldsymbol{\rho}_0' = \dfrac{a^2}{\rho_0^2}\boldsymbol{\rho}_0 = \left(\dfrac{a^2}{\rho_0}, \phi_0\right)$ [满足 $\rho_0\rho_0' = a^2$] 处

放置一个二维像电荷，电量为 $Q' = -\epsilon_0$

- 在圆内任取一点 $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \phi)$
- $\boldsymbol{\rho}$ 与 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的夹角为 $\psi = \phi - \phi_0$
- 记 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0$，$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'$，有 $R^2 = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi$ 和

$$R'^2 = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'|^2 = \rho^2 + \rho_0'^2 - 2\rho\rho_0'\cos\psi = \rho^2 + \frac{a^4}{\rho_0^2} - 2\rho\frac{a^2}{\rho_0}\cos\psi$$

- 源电荷与像电荷在 $\boldsymbol{\rho}$ 处产生的电势为

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\ln R - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln R' + c = -\frac{1}{2\pi}\ln R + \frac{1}{2\pi}\ln R' + c \\ &= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{R'^2}{R^2} + c = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho^2 + a^4/\rho_0^2 - 2\rho(a^2/\rho_0)\cos\psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi} + c \end{aligned}$$

- 注意其中有一个常数项，它依赖于电势零点的选择，这是二维问题的特点

Green 函数

源电荷与像电荷在圆周 $(\rho = a)$ 上产生的电势为

$$g(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)|_{\rho=a} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{a^2 + a^4/\rho_0^2 - 2(a^3/\rho_0)\cos\psi}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos\psi} + c$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{a^2}{\rho_0^2} \frac{\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0\cos\psi}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos\psi} \right) + c = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho_0} + c$$

从而，只要取 $c = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{a}{\rho_0}$，就能使圆周上的电势 $g(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)|_{\rho=a} = 0$

注意，**Green 函数定解问题**的变量是 $\boldsymbol{\rho}$，可将 $\boldsymbol{\rho}_0$ 视作固定的**常数**

将 c 值代入 $g(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)$，得到所求的 **Green 函数**为

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\rho^2 + a^4/\rho_0^2 - 2\rho(a^2/\rho_0)\cos\psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho_0}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{\rho^2 + a^4/\rho_0^2 - 2\rho(a^2/\rho_0)\cos\psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi} \frac{\rho_0^2}{a^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\rho^2\rho_0^2/a^2 + a^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi} \right)$$

Green 函数的导数

注意圆周的外法线方向就是半径方向，原定解问题的解表达为

$$u(\rho_0,\phi_0) = -\int_S \varphi(\boldsymbol{\rho})\,\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = -\int_0^{2\pi} f(\phi)\,\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} a\,\mathrm{d}\phi$$

Green 函数对 ρ 求导，得

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\ln\left(\frac{\rho_0^2\rho^2}{a^2}+a^2-2\rho\rho_0\cos\psi\right)-\ln(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\psi)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\rho_0^2\rho/a^2-\rho_0\cos\psi}{\rho_0^2\rho^2/a^2+a^2-2\rho\rho_0\cos\psi}-\frac{\rho-\rho_0\cos\psi}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\psi}\right)$$

故

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\rho_0^2/a-\rho_0\cos\psi}{\rho_0^2+a^2-2a\rho_0\cos\psi}-\frac{a-\rho_0\cos\psi}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos\psi}\right)$$

$$= \frac{\rho_0^2-a^2}{2\pi a[a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)]}$$

圆的 Poisson 积分

☃️ 最终，原定解问题的解是

$$u(\rho_0,\phi_0)=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\phi-\phi_0)}$$

☃️ 上式称为圆的 Poisson 积分

🌈 可以证明，它与第七章 §5 用分离变量法得到的结果是一致的