量 子 场 论

第 1 章　预备知识

1.3 节至 1.5 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

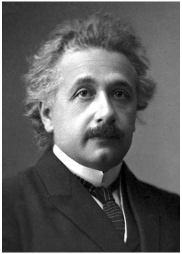
更新日期：2025 年 5 月 19 日

1.3 节 Lorentz 变换和 Lorentz 群

- 描述高速运动的系统需要用到**狭义相对论**，它的基本原理如下

1. **光速不变原理**：在任意惯性参考系中，真空中的**光速**具有**相同**的大小
2. **狭义相对性原理**：在任意惯性参考系中，**物理定律**具有**相同**的形式

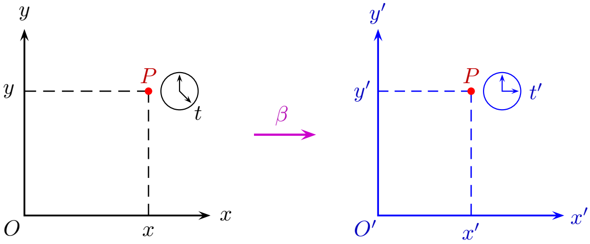
- 任意两个惯性参考系的直角坐标由 **Lorentz 变换**联系起来



Albert Einstein
(1879–1955)

Hendrik Lorentz
(1853–1928)

Lorentz 增速变换



- 设惯性坐标系 O' 沿着惯性坐标系 O 的 x 轴方向以**速度** β 匀速运动
- **事件** P 在 O 系中的坐标为 (t, x, y, z)，在 O' 系中的坐标为 (t', x', y', z')
- 相应 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z$$

- **Lorentz 因子** $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$，而 $0 \le |\beta| < 1$
- 这种 Lorentz 变换称为沿 x 轴方向的**增速** (boost) 变换

Lorentz 不变量

- 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t-\beta x)^2 - \gamma^2(x-\beta t)^2 - y^2 - z^2$$
$$= \frac{1}{1-\beta^2}(t^2+\beta^2x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)
- Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同**的值
- 这体现了 Lorentz 变换对应的对称性，即 **Lorentz 对称性**

Lorentz 不变量

- 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t-\beta x)^2 - \gamma^2(x-\beta t)^2 - y^2 - z^2$$
$$= \frac{1}{1-\beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)
- Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同**的值
- 这体现了 Lorentz 变换对应的对称性，即 **Lorentz 对称性**
- 结合时间和空间坐标，构成四维 **Minkowski 时空**，**坐标**为

$$\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3}$$

- x^μ 是一个**逆变** (contravariant) 的 **Lorentz 四维矢量** (vector)
- “逆变”指它的**指标** (index) μ 写在**右上角**

Hermann Minkowski
(1864–1909)

- 受到 $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 的启发，定义 **Lorentz 不变的内积**

$$x^2 \equiv x \cdot x \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$$

Minkowski 度规

- 引入对称的 Minkowski 度规 (metric) $$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$
- 将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号，空白的矩阵元是零
- 也就是说，$g_{00} = +1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$，其它分量都是 0

Minkowski 度规

- 引入对称的 **Minkowski 度规** (metric)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- 将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号，空白的矩阵元是零
- 也就是说，$g_{00} = +1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$，其它分量都是 0
- 利用度规把内积 x^2 化为求和式，

$$x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

- 第二步采用 **Einstein 求和约定**：**不写出求和符号，重复的指标即表示求和**
- 除非特别指出，后面默认使用这个约定
- 在上面的表达式中，用同个字母表示的指标分别在上标和下标重复出现并求和，这称为缩并 (contraction)，是 **Lorentz 不变量**的特点

协变矢量

为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$\boxed{x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})}$$

“协变”指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

将 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ 看成用**度规**缩并掉 ν 指标，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

协变矢量

为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$\boxed{x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})}$$

“协变”指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 看成用**度规**缩并掉 ν 指标，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

Leopold Kronecker (1823–1891)

从方阵的角度看，**度规** $g_{\mu\nu}$ 的**逆** (矩阵) 为 $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ 对应于 $\boxed{g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu}$

这里 **Kronecker δ 符号**定义为 $\delta^a{}_b = \delta_a{}^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$

升降指标

- **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有**相同**的矩阵形式
- 但**更一般的度规**可能与它的逆不同
- 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

- 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 缩并掉 μ 指标，将**协变矢量** x_μ 的**指标升起来**，变成**逆变矢量** x^σ
- 可见，逆变矢量与协变矢量**一一对应**，是对同一个 Lorentz 矢量的两种**等价**描述

升降指标

- **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有**相同**的矩阵形式
- 但**更一般的度规**可能与它的逆不同
- 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

- 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 缩并掉 μ 指标，将**协变矢量** x_μ 的**指标升起来**，变成**逆变矢量** x^σ
- 可见，逆变矢量与协变矢量**一一对应**，是对同一个 Lorentz 矢量的两种**等价**描述
- 利用 Kronecker 符号的定义、$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ 和度规的对称性，推出

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma} \\ g_{\mu\nu} &= g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

- 这两条式子表明，度规也可以用来对**度规自身的指标**进行**升降**

Lorentz 增速变换的矩阵形式

将 **Lorentz 增速变换** $t' = \gamma(t - \beta x)$，$x' = \gamma(x - \beta t)$，$y' = y$，$z' = z$ 表达成矩阵与列矢量的乘积形式，

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

用**四维矢量**记号改写为

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 视作矩阵时，**偏左**的指标 μ 表示**行**的编号，**偏右**的指标 ν 表示**列**的编号

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 的特点是**保持内积** $x^2 = x^{\mu} x_{\mu}$ **不变**，使 $x^{\mu} x_{\mu}$ 在不同惯性系中具有**相同**的值

Lorentz 变换

- 进一步将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 推广为**所有保持 $x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换**，称为**（齐次）Lorentz 变换**
- 由于 $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$
- 要得到 $x'^2 = x^2$，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须满足**保度规条件** $\boxed{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}}$

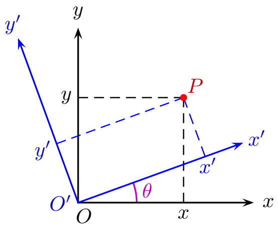
Lorentz 变换

- 进一步将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 推广为**所有保持 $x^{\mu}x_{\mu}$ 不变的线性变换**，称为**（齐次）Lorentz 变换**
- 由于 $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$
- 要得到 $x'^2 = x^2$，Lorentz 变换 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 必须满足**保度规条件** $\boxed{g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}}$
- 由于 $x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$，**保持 $|\mathbf{x}|^2$ 不变**的**空间旋转变换**也属于 Lorentz 变换
- 设惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角，则事件 P 在两系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z$$

- 因而相应的 Lorentz 变换矩阵为

$$[R_z(\theta)]^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



- 可以验证它满足**保度规条件**

Lorentz 逆变换

- $\delta^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是**单位矩阵 1**，它是一个特殊的 Lorentz 变换
- 它使得 $x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$，即 x^μ 在这个变换下不变，可见 $\delta^\mu{}_\nu$ 是**恒等变换**
- 对于任意 **Lorentz 变换** $\Lambda^\alpha{}_\beta$，引入

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta}$$

- 那么，由**保度规条件**得

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

- 上式表明，先作 Λ 变换，再作 Λ^{-1} 变换，相当于作**恒等变换**
- 也就是说，Λ^{-1} 是 Λ 的**逆变换**，因而也是一个 Lorentz 变换
- 在这些记号下，**协变矢量** x_μ 的 Lorentz 变换可以表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$$

保度规条件的等价形式

- Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$
- 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}g^{\mu\gamma}g_{\rho\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}g^{\nu\phi}g_{\sigma\tau}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\tau}\delta^{\gamma}{}_{\nu}g^{\nu\phi}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} = g^{\nu\phi}\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda^{\beta}{}_{\phi} \end{aligned}$$

- 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g^{\alpha\beta}$$

保度规条件的等价形式

- Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$
- 于是

$$g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}g^{\mu\gamma}g_{\rho\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}g^{\nu\phi}g_{\sigma\tau}\Lambda^{\tau}{}_{\phi}$$

$$= \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\tau}\delta^{\gamma}{}_{\nu}g^{\nu\phi}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} = g^{\nu\phi}\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda^{\beta}{}_{\phi}$$

- 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g^{\alpha\beta}$$

- 将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 视作矩阵 Λ，则其**转置矩阵** Λ^{T} 的分量满足 $(\Lambda^{\mathrm{T}})_{\nu}{}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$
- 保度规条件化为 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = (\Lambda^{\mathrm{T}})_{\alpha}{}^{\mu}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$，于是**重复**的**相邻指标**发生**缩并**，对应于**矩阵乘法**
- 用 g 代表**度规矩阵**，将**保度规条件**写成**矩阵等式**

$$\Lambda^{\mathrm{T}}g\,\Lambda = g$$

时空体积元

对保度规条件 $\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$ 取行列式，得

$$\det(g) = \det(\Lambda^{\mathrm{T}}) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g)[\det(\Lambda)]^2$$

因此 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1$$

Lorentz 坐标变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ 的 **Jacobi 行列式**是

$$\mathcal{J} = \det\left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right] = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \det(\Lambda)$$

于是 Lorentz 变换将体积元 $\mathrm{d}^4 x$ 变换为

$$\mathrm{d}^4 x' = |\mathcal{J}|\, \mathrm{d}^4 x = |\det(\Lambda)|\, \mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}^4 x$$

可见，**Minkowski 时空**的**体积元** $\mathrm{d}^4 x$ 是 **Lorentz 不变**的

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

Lorentz 变换分类

- 可以用 $\det(\Lambda)$ 的值给 Lorentz 变换**分类**
- $\det(\Lambda) = +1$ 的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换
- $\det(\Lambda) = -1$ 的变换称为**非固有** (improper) Lorentz 变换
- 此外，由**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ 得

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2$$

- 即 $(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2 \geq 1$，故 $\Lambda^{0}{}_{0} \geq +1$ 或 $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$
- $\Lambda^{0}{}_{0} \geq +1$ 的变换称为**保时向** (orthochronous) Lorentz 变换
- $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$ 的变换称为**反时向** (antichronous) Lorentz 变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0}{}_{0} & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

群

- 在数学上，对称性由**群论**描述，同一类对称变换的集合称为一个**群** (group)
- 群元素具有**乘法**，两个群元素的**乘积**就是两次对称变换**相继作用**，满足以下条件

1. 群对乘积具有**封闭性**，即群 G 中任意两个群元的乘积仍属于此群：

$$g_2 g_1 \in G, \quad \forall\, g_1, g_2 \in G$$

2. 群乘法满足**结合律**：

$$g_3(g_2 g_1) = (g_3 g_2) g_1, \quad \forall\, g_1, g_2, g_3 \in G$$

3. 群 G 中必有一个**恒元** e，对应于恒等变换，它与任一群元 g 的乘积仍为 g：

$$eg = ge = g, \quad \forall\, g \in G$$

4. 任一群元 g 都可以在群 G 中找到一个**逆元** g^{-1}，它对应于逆变换，两者之积为恒元：

$$\forall\, g \in G, \quad \exists\, g^{-1} \in G, \quad \text{使得 } g^{-1} g = g g^{-1} = e$$

更多群论概念

- 在**线性代数**中，矩阵具有乘法
- 可逆方阵能够依照自身乘法关系构成群，即**矩阵群**
- 群乘法讲究运算次序，g_1g_2 不一定等于 g_2g_1，也就是说，**交换律**不一定成立
- 满足交换律的群称为 **Abel 群**
- 不满足交换律的群称为**非 Abel 群**
- 如果群 G 的子集 H 中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称 H 是 G 的**子群** (subgroup)，记作 $H < G$

Niels Henrik Abel
(1802–1829)

$\mathrm{O}(N)$ 群和 $\mathrm{SO}(N)$ 群

- 满足 $O^{\mathrm{T}}O = OO^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$ 的实方阵 O 称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)
- 所有 N 阶实正交矩阵 $\{O\}$ 构成**正交群** $\mathrm{O}(N)$
- 对 $\mathbf{1} = O^{\mathrm{T}}O$ 取行列式，得 $1 = \det(O^{\mathrm{T}})\det(O) = [\det(O)]^2$
- 可见，实正交矩阵 O 的行列式为 $\det(O) = \pm 1$
- 由 $\det(O) = 1$ 的 N 阶实正交矩阵 O 构成的群称为**特殊正交群** $\mathrm{SO}(N)$
- 显然，$\mathrm{SO}(N) < \mathrm{O}(N)$
- 非 Abel 群 $\mathrm{SO}(3)$ 描述三维空间中的所有旋转变换，称为**空间旋转群**
- Abel 群 $\mathrm{SO}(2)$ 描述二维平面上的所有旋转变换，或者说，描述绕某条固定轴的旋转变换，如 $R_z(\theta)$，因而 $\mathrm{SO}(2) < \mathrm{SO}(3)$

U(N) 群和 SU(N) 群

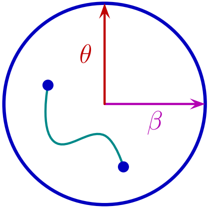
- 满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ 的复方阵 U 称为**幺正矩阵** (unitary matrix)
- 所有 N 阶幺正矩阵 $\{U\}$ 构成**幺正群** $\mathrm{U}(N)$
- 对 $\mathbf{1} = U^\dagger U$ 取行列式，得 $1 = \det(U^\dagger)\det(U) = [\det(U)]^* \det(U) = |\det(U)|^2$
- 可见，幺正矩阵 U 的行列式满足 $|\det(U)| = 1$
- 由 $\det(U) = 1$ 的 N 阶幺正矩阵 U 构成的群称为**特殊幺正群** $\mathrm{SU}(N)$
- 显然，$\mathrm{SU}(N) < \mathrm{U}(N)$

Lorentz 群

- 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群
- **保度规条件** $\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$ 是正交条件 $O^{\mathrm{T}} \mathbf{1} O = \mathbf{1}$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $\mathrm{O}(1,3)$
- $\mathrm{O}(3)$ **群**对应于 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $\mathrm{O}(3) < \mathrm{O}(1,3)$
- 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}(1,3)$
- 显然 $\mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$

Lorentz 群

- 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群
- **保度规条件** $\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$ 是正交条件 $O^{\mathrm{T}} \mathbf{1} O = \mathbf{1}$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $\mathrm{O}(1,3)$
- $\mathrm{O}(3)$ **群**对应于 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $\mathrm{O}(3) < \mathrm{O}(1,3)$
- 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}(1,3)$
- 显然 $\mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$
- Lorentz 变换可用一组连续变化的参数（如 β、θ 等）描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数变化区域称为**群空间**
- 群空间中的一个**点**就对应着一个**群元**
- 如果群空间中任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通**的，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**



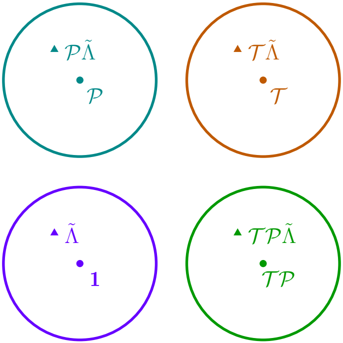
Lorentz 群的连通分支

Lorentz 群是一个**混合连续群**，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支

非固有保时向分支

$\det(\Lambda) = -1$

$\Lambda^0{}_0 \geq +1$



非固有反时向分支

$\det(\Lambda) = -1$

$\Lambda^0{}_0 \leq -1$

固有保时向分支

（固有保时向 Lorentz 群）

$\det(\Lambda) = +1$

$\Lambda^0{}_0 \geq +1$

固有反时向分支

$\det(\Lambda) = +1$

$\Lambda^0{}_0 \leq -1$

恒元在**固有保时向分支**里面，这个分支是 $\mathrm{SO}(1,3)$ 的子群，称为**固有保时向 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$，它包含物理上**联系惯性参考系**的所有 Lorentz 变换

Lorentz 不变量通常指的是在**固有保时向** Lorentz 变换下不变的量

子群从属关系：$\mathrm{SO}(2) < \mathrm{SO}(3) < \mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3) < \mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$

宇称变换和时间反演变换

- 定义**宇称** (parity) 变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- 它是一个**非固有保时向** Lorentz 变换，亦称为**空间反射** (space inversion) 变换
- $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ 的作用是让**所有空间分量反向**
- 定义**时间反演** (time reversal) 变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

- 它是一个**非固有反时向** Lorentz 变换，作用是让**时间分量反向**
- 对于**固有保时向 Lorentz 群**中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$，乘上宇称变换或 (和) 时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$、$\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支

宇称变换和时间反演变换

- 定义**宇称** (parity) 变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- 它是一个**非固有保时向** Lorentz 变换，亦称为**空间反射** (space inversion) 变换
- $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ 的作用是让**所有空间分量反向**
- 定义**时间反演** (time reversal) 变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

- 它是一个**非固有反时向** Lorentz 变换，作用是让**时间分量反向**
- 对于**固有保时向 Lorentz 群**中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$，乘上宇称变换或 (和) 时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$、$\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支
- 类似地，$\mathrm{O}(3)$ **群**也是混合连续群，具有两个连通分支
- 包含**恒元**的连通分支是 $\mathrm{SO}(3)$ **群**，对应于 $\det(O) = 1$；另一个连通分支对应于 $\det(O) = -1$，里面任意元素可由 $\mathrm{diag}(-1, -1, -1)$ 乘以 $\mathrm{SO}(3)$ **群元素**得到

1.4 节 Lorentz 矢量

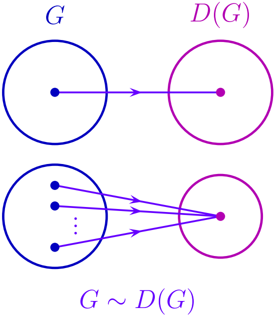
如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G

这些矩阵构成群 G 的一个 m 维线性表示 (linear representation) $D(G)$

具体来说，群 G 中任意群元 g_1 和 g_2 分别对应于表示 $D(G)$ 中的表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$，而 g_2g_1 对应于表示矩阵 $D(g_2g_1)$，且满足同态关系

$$\boxed{D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1)}$$

$D(G)$ 中的一个矩阵可以一一对应于 G 中的一个群元，或者对应于 G 中的多个群元；数学上称 G 与 $D(G)$ 同态 (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$



1.4 节　Lorentz 矢量

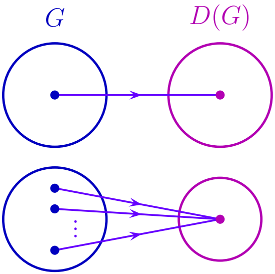
- 如果一些 m **阶方阵**的乘法关系与**群** G 中元素的**乘法关系完全相同**，就可以用这些矩阵来表示 G
- 这些矩阵构成群 G 的一个 m **维线性表示** (linear representation) $D(G)$
- 具体来说，群 G 中任意群元 g_1 和 g_2 分别对应于表示 $D(G)$ 中的表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$，而 g_2g_1 对应于表示矩阵 $D(g_2g_1)$，且满足**同态关系**

$$\boxed{D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1)}$$

- $D(G)$ 中的一个矩阵可以一一对应于 G 中的一个群元，或者对应于 G 中的多个群元；数学上称 G 与 $D(G)$ **同态** (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$
- 利用群的 m 维线性表示，可将**对称变换**视作 $m \times m$ **矩阵**，将变换作用的**对象**视作 m **维列矢量**

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & D(g) & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

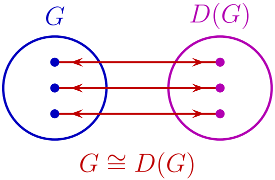
- 所有这样的列矢量构成了一个 m 维线性空间，称为相应的**表示空间**



$G \sim D(G)$

群的特殊表示

- 取群中**所有**元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的**恒等表示**，也称为**平庸表示**
- 如果群 G 中每个群元**一一对应**于表示 $D(G)$ 中每个矩阵，则称 G 与 $D(G)$ **同构** (isomorphism)，记作 $G \cong D(G)$
- 此时称 $D(G)$ 是 G 的**忠实表示** (faithful representation)



- 如果 $D(G)$ 中所有矩阵都是**幺正**的，则称 $D(G)$ 是**幺正表示**
- **矩阵群本身**就是自己的一个表示，称为**自身表示**，也称为**基础表示**

等价表示和可约表示

如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中对应的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall\, g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

等价表示和可约表示

如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中对应的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall\, g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

如果每个表示矩阵 $D(g)$ 都可以通过同一个相似变换化为相同形式的阶梯矩阵，

$$S^{-1} D(g) S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G,$$

其中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 是方阵，$M(g)$ 可以是零矩阵，则称 $D(G)$ 是可约表示，否则称 $D(G)$ 为不可约表示 (irreducible representation)

可以证明 (见讲义)，集合 $\{D_1(g)\}$ 和 $\{D_2(g)\}$ 分别构成群 G 的线性表示

可约表示能够通过不可约表示构造出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的不等价不可约表示

Lorentz 矢量

- 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$，可见 $\{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 **4 维线性表示**，即**基础表示**
- 它是一个**不可约忠实表示**，称为**矢量表示**
- **Lorentz 矢量** x^{ν} 是**矢量表示空间**中 **Lorentz 变换矩阵** $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 所作用的**列矢量**

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentz 矢量

🌴 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$，可见 $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 **4 维线性表示**，即**基础表示**

🌷 它是一个**不可约忠实表示**，称为**矢量表示**

🌸 **Lorentz 矢量** x^ν 是**矢量表示空间**中 **Lorentz 变换矩阵** $\Lambda^\mu{}_\nu$ 所作用的**列矢量**

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad 👉 \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

🚗 一般地，**Lorentz 矢量** A^μ 在定义上要求它在**固有保时向** Lorentz 变换下满足

$$\boxed{A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu}$$

🚙 类似于 $x'_\mu = x_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$，逆变矢量 A^μ 对应的协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\boxed{A'_\mu = A_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu}$$

Lorentz 矢量的内积

任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$\boxed{A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}$$

由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

Lorentz 矢量的内积

任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$\boxed{A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}$$

由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

由于度规的对角元有正有负，Lorentz 矢量 A^μ 的自我内积 $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$ 的符号不是确定的，可以分为三类

1. 若 $A^2 > 0$，即 $|A^0| > |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类时** (timelike) 矢量
2. 若 $A^2 < 0$，即 $|A^0| < |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类空** (spacelike) 矢量
3. 若 $A^2 = 0$，即 $|A^0| = |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类光** (lightlike) 矢量

由于 A^2 是 Lorentz 不变量，**不能**通过 Lorentz 变换改变 A^μ 的类型

极矢量和轴矢量

- 以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量
- 第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

- 经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量
- 极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$；时空坐标 x^{μ} 就是一个极矢量
- 另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

- 轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

极矢量和轴矢量

- 以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量
- 第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

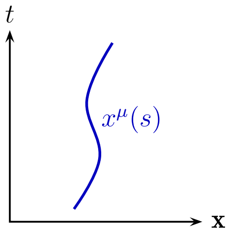
- 经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量
- 极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$；时空坐标 x^{μ} 就是一个极矢量
- 另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

- 轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$
- 在经典力学中，空间坐标 $\mathbf{x}$ 和动量 $\mathbf{p}$ 都是极矢量，而角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 是轴矢量
- 在空间反射变换下，$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$，$\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$，$\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{p}' = (-\mathbf{x}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$，与以上定义一致

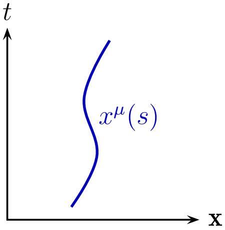
相对论性质点运动

- 时空坐标 x^μ 的微分 $\mathrm{d}x^\mu$ 是一个 **Lorentz 矢量**
- $\mathrm{d}x^\mu$ 的自我内积 $\boxed{\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^0)^2 - \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}$ 是一个 **Lorentz 标量**
- $\mathrm{d}s = \sqrt{|\mathrm{d}s^2|}$ 称为 Minkowski 时空的**线元**
- Minkowski 时空中任意一条**曲线**的**弧长** s 可通过对 $\mathrm{d}s$ 沿曲线积分来得到



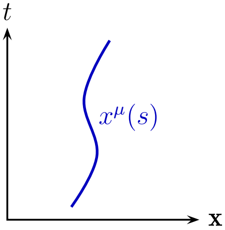
相对论性质点运动

- 时空坐标 x^μ 的微分 $\mathrm{d}x^\mu$ 是一个 **Lorentz 矢量**
- $\mathrm{d}x^\mu$ 的自我内积 $\boxed{\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^0)^2 - \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}$ 是一个 **Lorentz 标量**
- $\mathrm{d}s = \sqrt{|\mathrm{d}s^2|}$ 称为 Minkowski 时空的**线元**
- Minkowski 时空中任意一条**曲线**的**弧长** s 可通过对 $\mathrm{d}s$ 沿曲线积分来得到
- 一个**质点**在四维时空中的**运动轨迹**可以参数化为 $x^\mu(s)$
- 运动轨迹的**弧长** s 是一个 Lorentz 标量，称为质点的**固有时** (proper time)
- 在质点的**静止参考系中**，它的轨迹是一条沿着 x^0 方向运动的直线，则 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^0$
- 因而固有时 s 就是质点在静止系中经历的**时间**



相对论性质点运动

- 时空坐标 x^μ 的微分 $\mathrm{d}x^\mu$ 是一个 **Lorentz 矢量**
- $\mathrm{d}x^\mu$ 的自我内积 $\boxed{\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^0)^2 - \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}$ 是一个 **Lorentz 标量**
- $\mathrm{d}s = \sqrt{|\mathrm{d}s^2|}$ 称为 Minkowski 时空的**线元**
- Minkowski 时空中任意一条**曲线**的**弧长** s 可通过对 $\mathrm{d}s$ 沿曲线积分来得到
- 一个**质点**在四维时空中的**运动轨迹**可以参数化为 $x^\mu(s)$
- 运动轨迹的**弧长** s 是一个 Lorentz 标量，称为质点的**固有时** (proper time)
- 在质点的**静止参考系中**，它的轨迹是一条沿着 x^0 方向运动的直线，则 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^0$
- 因而固有时 s 就是质点在静止系中经历的**时间**
- 在任意惯性系中，质点的**运动速度**定义为 $\mathbf{v} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0}$
- 从而推出 $\dfrac{\mathrm{d}s^2}{(\mathrm{d}x^0)^2} = 1 - \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} = 1 - |\mathbf{v}|^2$
- 引入依赖于 $\mathbf{v}$ 的 **Lorentz 因子** $\gamma_{\mathbf{v}} \equiv \dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}}$



四维动量

质点的**四维动量**定义为 $p^\mu \equiv m\,\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$

其中 $m>0$ 是质点的（静止）**质量**，它是一个 Lorentz 标量

从定义看出，p^μ 是一个逆变的 **Lorentz 极矢量**，它和相应协变矢量 $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换分别是 $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ 和 $p'_\mu = p_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

p^μ 的自我内积是 $p^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2\,\dfrac{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s^2}$

即 $\boxed{p^2 = m^2}$，这个式子称为**质壳** (mass shell) **条件**

$m>0$ 意味着质点的四维动量 p^μ 是一个类时矢量

四维动量

- 质点的**四维动量**定义为 $p^\mu \equiv m\,\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$
- 其中 $m > 0$ 是质点的（静止）**质量**，它是一个 Lorentz 标量
- 从定义看出，p^μ 是一个逆变的 **Lorentz 极矢量**，它和相应协变矢量 $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换分别是 $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ 和 $p'_\mu = p_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$
- p^μ 的自我内积是 $p^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2\,\dfrac{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s^2}$
- 即 $\boxed{p^2 = m^2}$，这个式子称为**质壳** (mass shell) **条件**
- $m > 0$ 意味着质点的四维动量 p^μ 是一个类时矢量
- 将四维动量分解为 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$，把 $E = p^0 = m\,\dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \gamma_{\mathrm{v}} m$ 定义为质点的**能量**
- 而 $\mathbf{p} = m\,\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = m\,\dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\,\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} = \gamma_{\mathrm{v}} m\mathbf{v}$ 定义为质点的**动量**
- 将 $m_{\mathrm{v}} \equiv \gamma_{\mathrm{v}} m$ 看作质点的**“运动质量”**，则 $\mathbf{p} = m_{\mathrm{v}}\mathbf{v}$ 与 **Newton 力学**的关系类似
- $E = m_{\mathrm{v}}$ 就是自然单位制下的**质能关系**

相对论性色散关系

由质壳条件 $p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ 和 $E = \gamma_{\mathbf{v}} m > 0$

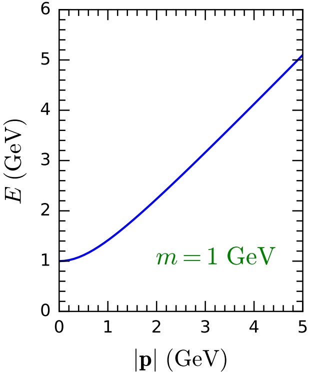
推出相对论性色散关系 (dispersion relation)

$$\boxed{E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}$$

这个关系对应于四维动量空间中由质量 m 决定的一个三维双曲面，即质壳

质点的运动速度可以表达为

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}}$$



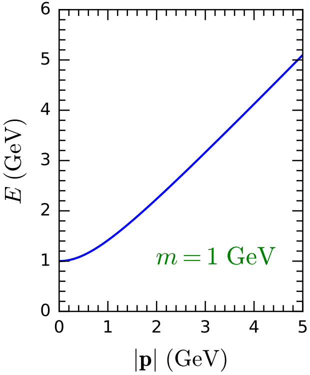
在质点的静止系中，$\mathbf{p} = \mathbf{0}$，而能量 E 等于质量 m

相对论性色散关系

🚆 由质壳条件 $p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ 和 $E = \gamma_{\mathbf{v}} m > 0$

推出相对论性色散关系 (dispersion relation)

$$\boxed{E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}$$



🚇 这个关系对应于四维动量空间中由质量 m 决定的一个三维双曲面，即质壳

💜 质点的运动速度可以表达为

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}}$$

🐾 在质点的静止系中，$\mathbf{p} = \mathbf{0}$，而能量 E 等于质量 m

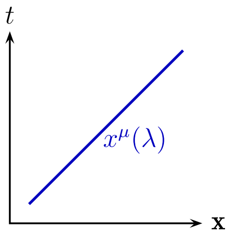
🟡 上述关于质点的讨论同样适用于有质量的粒子

无质量粒子的运动

- 对于无质量粒子，比如光子，可将其运动轨迹参数化为 $x^\mu(\lambda)$
- 其中 λ 是一个在运动轨迹上单调递增的参数
- 无质量粒子的自由运动轨迹是类光测地线，满足 $ds^2 = (dx^0)^2 - d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = 0$
- 从而 $(dx^0)^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$，运动速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dx^0$ 满足

$$|\mathbf{v}|^2 = \frac{d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}}{(dx^0)^2} = 1$$

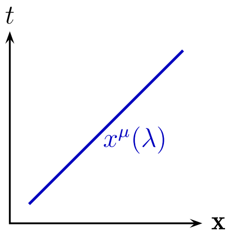
- 即无质量粒子以光速运动



无质量粒子的运动

- 对于**无质量粒子**，比如**光子**，可将其**运动轨迹**参数化为 $x^\mu(\lambda)$
- 其中 λ 是一个在运动轨迹上单调递增的**参数**
- 无质量粒子的自由运动轨迹是**类光测地线**，满足 $ds^2 = (dx^0)^2 - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = 0$
- 从而 $(dx^0)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$，**运动速度** $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dx^0$ 满足

$$|\mathbf{v}|^2 = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{(dx^0)^2} = 1$$



- 即无质量粒子以**光速**运动
- $ds^2 = 0$ 意味着**线长** s **恒为零**，因而**不能**将 λ 取为 s
- 不过，可以要求无质量粒子的**四维动量** $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 满足

$$p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

- 从而**间接地定义** λ

无质量粒子的质壳条件

于是，无质量粒子的质壳条件为

$$p^2 = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0$$

它与有质量粒子的质壳条件 $p^2 = m^2$ 在 $m = 0$ 时的结果一致

故色散关系化为 $E = |\mathbf{p}|$，且

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathbf{p}}{E}$$

即运动速度、动量与能量之间的关系也与有质量粒子相同

无质量粒子的质壳条件

于是，无质量粒子的质壳条件为

$$p^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{ds^2}{d\lambda^2} = 0$$

它与有质量粒子的质壳条件 $p^2 = m^2$ 在 $m = 0$ 时的结果一致

故色散关系化为 $E = |\mathbf{p}|$，且

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dx^0} = \frac{d\mathbf{x}/d\lambda}{dx^0/d\lambda} = \frac{\mathbf{p}}{E}$$

即运动速度、动量与能量之间的关系也与有质量粒子相同

在量子场论中，有时会用到**更一般的四维动量** p^μ，它仍然满足 **Lorentz 矢量的变换规则**，但**不需要**满足质壳条件

时空导数

将**对时空坐标的偏导数**记为

$$\boxed{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu}$$

那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

上式中的**指标**始终是**平衡**的，因而这里关于**时空导数指标位置**的写法是**合理**的

时空导数

将**对时空坐标的偏导数**记为

$$\boxed{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu}$$

那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

上式中的**指标**始终是**平衡**的，因而这里关于**时空导数指标位置**的写法是**合理**的

对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$

两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho\delta^\rho{}_\nu$，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$

故 $\partial'^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x'_\mu} = \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu$

时空导数

🚃 将**对时空坐标的偏导数**记为

$$\boxed{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu}$$

🚋 那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

🚝 上式中的**指标**始终是**平衡**的，因而这里关于**时空导数指标位置**的写法是**合理**的

🚎 对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$

🚑 两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho \delta^\rho{}_\nu$，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$

🚌 故 $\partial'^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x'_\mu} = \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$

🚐 这是时空导数 ∂^μ 的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同

🚚 因而可以将 ∂^μ 看作一个 **Lorentz 矢量**

🚛 相应地，∂_μ 的 Lorentz 变换是 $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

d’Alembert 算符

定义 **d’Alembert 微分算符**

$$\boxed{\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2}$$

由**保度规条件**得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu}\partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma}\partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

可见，∂^2 算符是 **Lorentz 不变**的

Jean le Rond d’Alembert
(1717–1783)

d'Alembert 算符

定义 **d'Alembert 微分算符**

$$\boxed{\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2}$$

由**保度规条件**得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu}\partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma}\partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

可见，∂^2 算符是 **Lorentz 不变**的

用它把 **Klein-Gordon 方程** $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ 改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2)\Psi(x) = 0$$

其中 x 表示**四维时空坐标**

Klein-Gordon 微分算符 $\partial^2 + m^2$ 是 **Lorentz 不变**的，因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有**相同**的形式，即具有 **Lorentz 协变性** (covariance)

1.5 节 Lorentz 张量

⚓ Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

🚢 一个 $p+q$ **阶**的 (p,q) **型 Lorentz 张量** $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 具有 p **个逆变指标**和 q **个协变指标**，并满足如下**固有保时向** Lorentz 变换规则：

$$\boxed{T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}}$$

🛳 这里的**逆变指标**和**协变指标**统称为 **Lorentz 指标**

🛳 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 **Lorentz 协变性**，在不同惯性系中具有**相同**的形式，从而满足**狭义相对性原理**

1.5 节 Lorentz 张量

- Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广
- 一个 $p+q$ **阶**的 (p,q) **型 Lorentz 张量** $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 具有 p **个逆变指标**和 q **个协变指标**，并满足如下**固有保时向** Lorentz 变换规则：

$$\boxed{T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}}$$

- 这里的**逆变指标**和**协变指标**统称为 **Lorentz 指标**
- 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 **Lorentz 协变性**，在不同惯性系中具有**相同**的形式，从而满足**狭义相对性原理**
- **Lorentz 标量**是 0 阶 Lorentz 张量，具有 0 个 Lorentz 指标（不计入已缩并指标）
- **Lorentz 矢量**是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标
- **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 是一个 2 阶的 $(0,2)$ 型 Lorentz 张量，不过，它是**常数**，在任何惯性系中**不变**，Lorentz 变换规则就是保度规条件 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta$
- $\delta^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho\delta^\rho{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu$ 表明 **Kronecker 符号** $\delta^\mu{}_\nu$ 是 $(1,1)$ 型常数 Lorentz 张量
- 注意，虽然 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 具有两个指标，它却**不是**Lorentz 张量

指标的升降和缩并

- 利用**度规**可以**升降**任意 Lorentz 张量的**指标**，从而**改变**张量的**类型**
- 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是**等价**的
- 比如，${T^{\mu\nu}}_{\rho} = g_{\rho\sigma}T^{\mu\nu\sigma}$，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2,1)$ **型**张量 ${T^{\mu\nu}}_{\rho}$
- 相应地，$T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma}{T^{\mu\nu}}_{\sigma}$，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2,1)$ **型**张量 ${T^{\mu\nu}}_{\sigma}$ 升为 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\rho}$

指标的升降和缩并

- 利用**度规**可以**升降**任意 Lorentz 张量的**指标**，从而**改变**张量的**类型**
- 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是**等价**的
- 比如，$T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2,1)$ **型**张量 $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$
- 相应地，$T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2,1)$ **型**张量 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ 升为 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\rho}$
- 对 (p,q) **型** Lorentz 张量的一个**逆变指标**和一个**协变指标**进行**缩并**，会得到一个 $(p-1,q-1)$ **型** Lorentz 张量，例如，

$$T'^{\mu\nu}{}_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} (\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \delta^{\gamma}{}_{\alpha} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\alpha}$$

- 可见，$T^{\mu\nu}{}_{\mu}$ 是一个 **Lorentz 矢量**
- 可以通过**缩并**若干个 Lorentz 张量的**所有指标**来构造 **Lorentz 不变量**
- 这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的 Λ **因子**和 Λ^{-1} **因子**总是**相互抵消**；比如，以下表达式都是 **Lorentz 标量**：

$$T^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu}, \quad T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\rho} T^{\sigma\rho}{}_{\nu}$$

狭义张量和赝张量

- 类似于 Lorentz 矢量，按**宇称变换**性质将 Lorentz 张量分成两种
- 第一种张量是**狭义**的**张量**，宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}$$

- 另一种张量称为**赝张量** (pseudotensor)，宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}$$

- 因此，在宇称变换下，**狭义**的**标量** ϕ 满足 $\phi' = \phi$
- 而**赝标量** (pseudoscalar) φ 满足 $\varphi' = -\varphi$

四维 Levi-Civita 符号

引入四维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换（如 } \varepsilon^{1032}\text{）} \\ -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换（如 } \varepsilon^{1023}\text{）} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

- 这里的置换 (permutation) 指的是将指标重新排列
- 调换两个指标的位置称为对换
- 奇置换通过奇数次对换得到，偶置换通过偶数次对换得到
- 这样定义出来的 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是全反对称的，即关于任意两个指标反对称，如

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$$

- 全反对称性意味着具有 2 个或以上相同指标的 Levi-Civita 符号为零，比如，$\varepsilon^{0120} = -\varepsilon^{0120} = 0$，这属于定义式中的“其它情况”

Tullio Levi-Civita
(1873–1941)

协变的四维 Levi-Civita 符号

- $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的协变形式为 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 也是全反对称的，如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}(-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

- 根据定义，$\varepsilon_{0123} = g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123} = -\varepsilon^{0123}$，有

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

- 而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\ \text{是}\ (0,1,2,3)\ \text{的偶置换} \\ +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\ \text{是}\ (0,1,2,3)\ \text{的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

- 从而

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4!}$$

Levi-Civita 符号与行列式

- 利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照**行列式定义**写成

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta \Lambda^2{}_\gamma \Lambda^3{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\begin{vmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit \\ \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit \end{vmatrix}$$

	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
$\spadesuit$	$(0, 1, 2, 3)$	$+$
$\heartsuit$	$(1, 2, 3, 0)$	$-$
$\clubsuit$	$(2, 3, 0, 1)$	$+$
$\diamondsuit$	$(3, 0, 1, 2)$	$-$

Levi-Civita 符号与行列式

- 利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照**行列式定义**写成

$$\begin{aligned}\det(\Lambda) &= \Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\\ &= -\frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit \\ \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit \end{vmatrix}$$

	$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	$(0,1,2,3)$	$+$
♡	$(1,2,3,0)$	$-$
♣	$(2,3,0,1)$	$+$
♢	$(3,0,1,2)$	$-$

- 于是

$$\begin{aligned}\varepsilon^{0123} &= 1 = [\det(\Lambda)]^2\\ &= \det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

- 利用 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性质得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1023} &= -\varepsilon^{0123} = -\det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\\ &= -\det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\end{aligned}$$

- 依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Levi-Civita 符号的 Lorentz 变换

- 对于**固有保时向 Lorentz 变换**，$\det(\Lambda) = +1$，则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

- 对于**宇称变换**，$\det(\mathcal{P}) = -1$，则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\alpha}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\beta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

- 可见，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 $(4,0)$ **型 Lorentz 赝张量**，不过它是**常数**，在任何惯性系中**不变**
- 于是，$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 $(0,4)$ **型 Lorentz 赝张量**，相应的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\delta}{}_{\sigma}$$

- 从而

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\gamma}{}_{\rho}\Lambda^{\delta}{}_{\sigma} \\
= \ &\varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}(\Lambda^{-1})^{\kappa}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\lambda}{}_{\beta}(\Lambda^{-1})^{\tau}{}_{\gamma}(\Lambda^{-1})^{\varepsilon}{}_{\delta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\gamma}{}_{\rho}\Lambda^{\delta}{}_{\sigma} \\
= \ &\varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}\delta^{\kappa}{}_{\mu}\delta^{\lambda}{}_{\nu}\delta^{\tau}{}_{\rho}\delta^{\varepsilon}{}_{\sigma}
\end{aligned}$$

- 即

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\gamma}{}_{\rho}\Lambda^{\delta}{}_{\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

三维 Levi-Civita 符号

三维 Levi-Civita 符号定义为

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) \text{ 是 } (1,2,3) \text{ 的偶置换} \\ -1, & (i,j,k) \text{ 是 } (1,2,3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

满足

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{0ijk}, \quad \varepsilon^{123} = +1$$

显然，ε^{ijk} 关于三个空间指标是**全反对称**的

通常用 i, j, k 等**拉丁字母**代表**三维空间指标**，取值范围是 $1, 2, 3$

而用 μ, ν, ρ 等**希腊字母**代表**四维时空指标**，取值范围是 $0, 1, 2, 3$

三维 Levi-Civita 符号求和关系

由 ε^{ijk} 的**全反对称性**有 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i23} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} = 1$ 和 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i32} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{132} = -1$

依此类推，归纳出求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$$

根据 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij3} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{213} = 2$ 和 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij1} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{121} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{211} = 0$

归纳出另一条求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$$

利用 ε^{ijk}，可以将**三维矢量外积**

$$a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2c^3 - b^3c^2)\mathbf{e}_1 + (b^3c^1 - b^1c^3)\mathbf{e}_2 + (b^1c^2 - b^2c^1)\mathbf{e}_3$$

表达为 $a^i = \varepsilon^{ijk}b^jc^k$

四维电流密度和四维矢势

- 接下来讨论真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式
- 电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 组成一个 Lorentz 矢量 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$，称为四维电流密度
- 将电流连续性方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ 写成 Lorentz 协变形式

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

- 用电势 Φ 和矢势 $\mathbf{A}$ 将电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 表达为

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$$

James Clerk Maxwell
(1831–1879)

- Φ 和 $\mathbf{A}$ 组成 Lorentz 矢量 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$，称为四维矢势，则上式的分量形式为

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k, \quad i,j,k = 1,2,3$$

场强张量

引入**电磁场**的**场强张量** (field strength tensor)

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}}$$

它是一个 2 阶**反对称** Lorentz 张量

由于两个**时空导数**的次序**可以交换**，从上述定义推出

$$\begin{aligned}
\partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= \partial^\mu\partial^\rho A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu A^\rho + \partial^\nu\partial^\mu A^\rho - \partial^\nu\partial^\rho A^\mu \\
&= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu}
\end{aligned}$$

即 **Bianchi 恒等式**

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$

Luigi Bianchi (1856–1928)

场强张量的分量

$F^{\mu\nu}$ 的 $0i$ **分量**为 $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i$

可见，F^{0i} 对应于**电场强度**

由求和式 $\varepsilon^{jki}\varepsilon^{imn} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$ 得到

$$\varepsilon^{ijk}B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m A^n = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i$$

从而 $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk}B^k$

故 $F^{\mu\nu}$ 的 ij **分量**对应于**磁感应强度**

把 $F^{\mu\nu}$ 写成**矩阵形式**是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss 定律和 Ampère 环路定律

- **Gauss 定律**对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ 等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

- **Ampère 环路定律**对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

- 归纳起来，得到 **Maxwell 方程** $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu}$

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

André-Marie Ampère
(1775–1836)

Gauss 定律和 Ampère 环路定律

- **Gauss 定律**对应的方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ 等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

- **Ampère 环路定律**对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

- 归纳起来，得到 **Maxwell 方程** $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu}$

- 这个方程完全是用 Lorentz 张量写的，具有 **Lorentz 协变性**
- 在**固有保时向 Lorentz 变换**下，有

$$\begin{aligned} \partial'_\mu F'^{\mu\nu} &= \partial_\alpha[(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma F^{\beta\gamma}] = \partial_\alpha(\delta^\alpha{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma F^{\beta\gamma}) \\ &= \Lambda^\nu{}_\gamma \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} = \Lambda^\nu{}_\gamma J^\gamma = J'^\nu \end{aligned}$$

- 可见它在**不同惯性系**中具有**相同**形式，满足**狭义相对性原理**

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

André-Marie Ampère
(1775–1836)

Gauss 磁定律

由 $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{ijl} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$ 得 $\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$，即

$$B^i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}F^{jk}$$

Gauss 磁定律对应的方程 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki}\partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij}\partial_k F^{ij}) \\ &= -\frac{1}{6}\,\varepsilon^{ijk}(\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij}) \end{aligned}$$

第三步通过**更换指标字母**写出三个相等的项

毕竟，对于参与**缩并**或**求和**的指标，更换指标字母**不会影响结果**

上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0$$

这是 **Bianchi 恒等式**取**纯空间分量**的形式

Faraday 电磁感应定律

- **Faraday 电磁感应定律**对应的 Maxwell-Faraday 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- 写成分量的形式，得

$$-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn}\partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0}$$

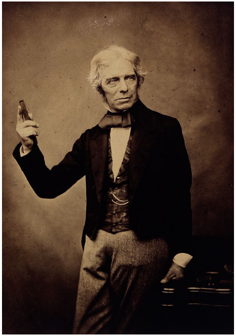
- 从 $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$ 推出

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{ij} &= -\varepsilon^{ijk}\partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0} \\ &= (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m F^{n0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0}\end{aligned}$$

- 即

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0$$

- 这也是 **Bianchi 恒等式**取**特定分量**的形式



Michael Faraday
(1791–1867)

对偶场强张量

利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (dual field strength tensor)

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}}$$

它也是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，$\tilde{F}^{0i}$ 对应于**磁感应强度**：

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{0i\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{0ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}g_{j\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}g_{jm}g_{kn}F^{mn}\\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^{l} = -\frac{1}{2}\,2\delta^{il}B^{l} = -B^{i}\end{aligned}$$

第五步利用了 $g_{jm}F^{mn} = -\delta^{jm}F^{mn} = -F^{jn}$，倒数第二步用到**求和关系**

另一方面，$\tilde{F}^{ij}$ 对应于**电场强度**：

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk}F_{0k} = \varepsilon^{ijk}g_{0\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu}\\ &= \varepsilon^{ijk}g_{00}g_{kl}F^{0l} = -\varepsilon^{ijk}F^{0k} = \varepsilon^{ijk}E^{k}\end{aligned}$$

对偶场强张量与 Bianchi 恒等式

- 对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的**矩阵形式**是 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$

- 由 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义有

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{6}(\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu}\partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho}\partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{6}\,\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}(\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

- 因此 **Bianchi 恒等式** $\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$ 等价于

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

- 从这些讨论可以看到，用 **Lorentz 张量语言**表达 **Maxwell 方程组**是十分简单的，而且方程的 **Lorentz 协变性**非常明确