

# 粒子物理简介

## 第五节 量子色动力学

余钊煥

中山大学物理学院

<http://yzhxxzxy.github.io>



2020 年 8 月



# 夸克模型

1964 年，盖尔曼和茨威格分别提出**夸克模型**，当时认为存在 3 种**味道**的夸克， $u$ 、 $d$  和  $s$ ，属于  $SU(3)_F$  群的基础表示，强子具有  $SU(3)_F$  味对称性

介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**

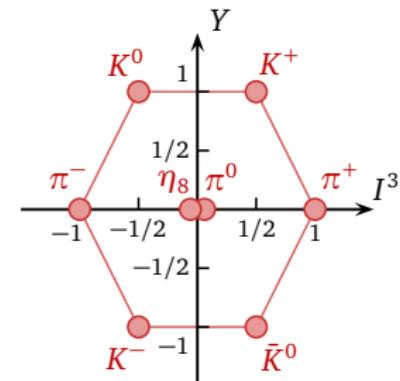
重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**

$u$  和  $d$  的味对称性就是  $SU(2)$  同位旋对称性， $SU(3)_F$  味对称性是进一步的推广；根据**群表示论**， $J^P = 0^-$  的赝标量介子是  $SU(3)_F$  八重态，成分为

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \pi^- = d\bar{u}, \quad \eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

$$K^+ = u\bar{s}, \quad K^0 = d\bar{s}, \quad \bar{K}^0 = s\bar{d}, \quad K^- = s\bar{u}$$

由于  $s$  夸克的质量大于  $u$  和  $d$  夸克的质量， $SU(3)_F$  味对称性不是严格成立的，同个多重态中的粒子存在不小的**质量差异**

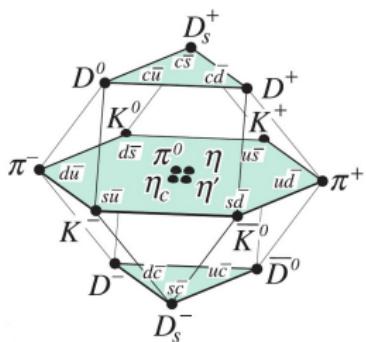


$SU(3)_F$  八重态的权图

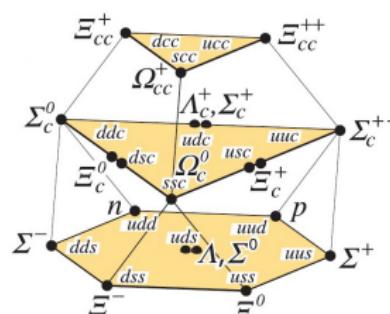
# SU(4)<sub>F</sub> 味对称性

把  $c$  夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为  $SU(4)_F$  味对称性

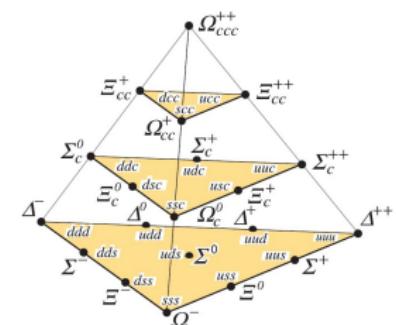
由于  $c$  夸克很重，同个多重态中粒子的质量差异更大



$J^P = 0^-$  介子 15 重态及单态



$J^P = \frac{1}{2}^+$  重子 20 重态



$J^P = \frac{3}{2}^+$  重子 20 重态

上述自旋为  $3/2$  的重子多重态中存在  $\Delta^{++} \sim uuu$ 、 $\Delta^- \sim ddd$ 、 $\Omega^- \sim sss$  和  $\Omega_{ccc}^{++} \sim ccc$  这样的重子。它们是 3 个同味夸克组成的  $L=0$  的态，因而 3 个夸克的自旋取向必须相同才能得到  $J=3/2$ 。根据 **泡利不相容原理**，全同费米子不能处于相同的状态，这预示着夸克具有额外的内部自由度——**颜色**。

# 颜色自由度

从实验上确立的强子态基本都可以用一个正夸克加一个反夸克（介子）、三个正夸克（正重子）和三个反夸克（反重子）组成的体系来描述

? 为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢？

! 颜色自由度的引入解决了这个问题

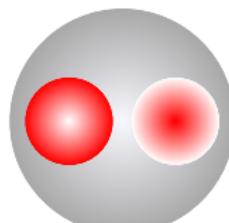
● 夸克具有  $SU(3)_C$  色对称性，每味夸克具有 3 种颜色，构成  $SU(3)_C$  群的基础表示，可记为

$$q^i \quad (i = 1, 2, 3; q = d, u, s, c, b, t)$$

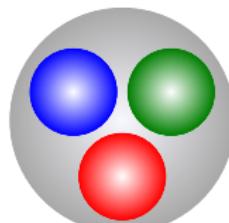
● 强子都是色单态；介子中两个夸克的颜色必须相反，以组成色单态；重子中三个夸克的颜色各不相同，组成全反对称的色单态

● 两个正夸克或四个正夸克不能组成色单态，因而不能构成强子态

● 用  $SU(3)_C$  色对称性构建规范理论，得到量子色动力学



介子



重子

# 非阿贝尔规范理论

SU(3) 群是个非阿贝尔群，它的生成元彼此不对易，因而它的规范变换形式与 U(1) 群（阿贝尔群）不同。非阿贝尔群的规范理论由杨振宁和米尔斯于 1954 年提出，也称为杨—米尔斯理论，其规范场也称为杨—米尔斯场。

对于非阿贝尔李群，生成元  $t^a$  满足  $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ ，依赖时空坐标的群变换为  $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ ；旋量场  $\psi$  和规范场  $A_\mu^a$  的规范变换是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^a U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

定义协变导数  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$ ，则可得  $D_\mu \psi(x) \rightarrow U(x)D_\mu \psi(x)$

从而，具有非阿贝尔规范对称性的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu},$$

其中规范场的场强张量  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$

# 量子色动力学

 **量子色动力学** (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是  $SU(3)_C$  非阿贝尔规范理论, 规范场记作  $G_\mu^a$ , 规范玻色子为 8 种胶子, 拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

 协变导数  $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a$ ,  $G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

  $g_s$  称为**强耦合常数**, **结构常数**  $f^{abc}$  对 3 个指标全反对称, 独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

  $t^a = \lambda^a/2$  是  $SU(3)_C$  基础表示的生成元, 其中  $\lambda^a$  是 8 个**盖尔曼矩阵**

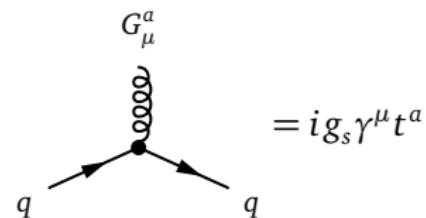
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# QCD 相互作用顶点

●  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  中  $g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$  项的相互作用顶点如右图

●  $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$  项带来非阿贝尔规范理论特有的以下规范玻色子自相互作用顶点——胶子的三线性和四线性自相互作用顶点



A Feynman diagram showing a gluon line  $G_\mu^a$  interacting with two gluon lines  $G_\rho^b$  and  $G_\rho^c$  through a quark loop. The loop consists of a quark line  $q$  and an antiquark line  $\bar{q}$ . External momenta  $p$ ,  $k$ , and  $q$  are shown.

$$= g_s f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

A Feynman diagram showing a four-point vertex for gluons. Two gluon lines  $G_\mu^a$  and  $G_\mu^b$  enter from the left, and two gluon lines  $G_\rho^c$  and  $G_\rho^d$  exit to the right. They interact via a quark loop consisting of a quark line  $q$  and an antiquark line  $\bar{q}$ .

$$\begin{aligned} &= -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})] \end{aligned}$$

# 渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标  $Q$

在量子电动力学中，电磁耦合常数  $\alpha = e^2/(4\pi)$  随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$  随能标升高而减小

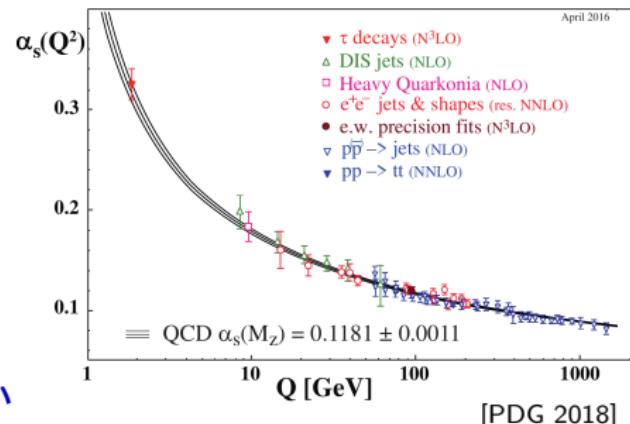
由于高能标意味着短距离，这个特性被称为 QCD 的渐近自由

随着能标下降， $\alpha_s$  越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为夸克禁闭

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中



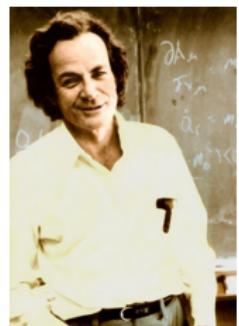
# 深度非弹性散射与部分子模型

1960 年代末，在高能轻子与核子散射的实验中发现，出现大动量转移过程的概率很高，即常常发生**深度非弹性散射**

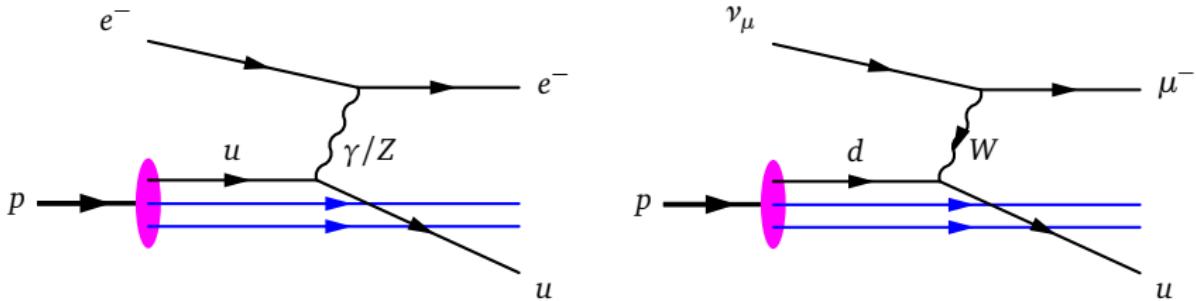
这意味着核子内部存在**局域的散射中心**，类似于卢瑟福散射实验中  $\alpha$  粒子与原子中局域的原子核发生散射的情况

据此，费曼于 1969 年提出**部分子模型**，假设强子由一些在深度非弹性散射中**几乎自由**的**部分子**组成

进一步实验数据和理论分析表明，有些部分子与夸克具有相同的量子数，它们就是**夸克**；其它部分子是电中性的，后来证实是**胶子**



R. Feynman  
(1918-1988)



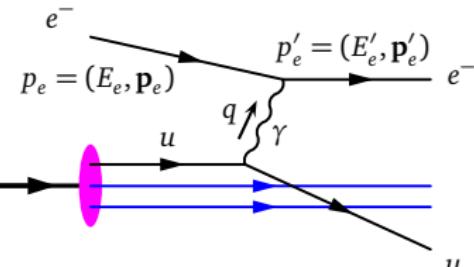
# $e^- + p \rightarrow e^- + X$ 深度非弹性散射

动量转移很大时，忽略电子质量，有

$$q^2 = (p_e - p'_e)^2 = 2m_e^2 - 2p_e \cdot p'_e$$

$$\simeq -2E_e E'_e + 2|\mathbf{p}_e||\mathbf{p}'_e| \cos \theta \simeq -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2)$$

定义  $Q^2 \equiv -q^2 \geq 0$ ,  $Q \equiv \sqrt{Q^2}$  即**动量转移**



具有**大动量转移**的散射过程可以探测靶粒子的**微小结构**，尺度  $\Delta x \sim 1/Q$

在**部分子模型**中， $e^- + p \rightarrow e^- + X$  **单举微分截面**表达为

$$\frac{d\sigma}{dy} = \sum_i \int_0^1 \left\{ \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} x s [(1-y)^2 + 1] \right\} Q_i^2 f_{i/p}(x) dx, \quad x = \frac{p_i^\mu}{p_p^\mu}, \quad y = \frac{E_e - E'_e}{E_e}$$

**是部分子  $i$  动量占质子  $p$  动量的**分数**, **是电子的**非弹性度******

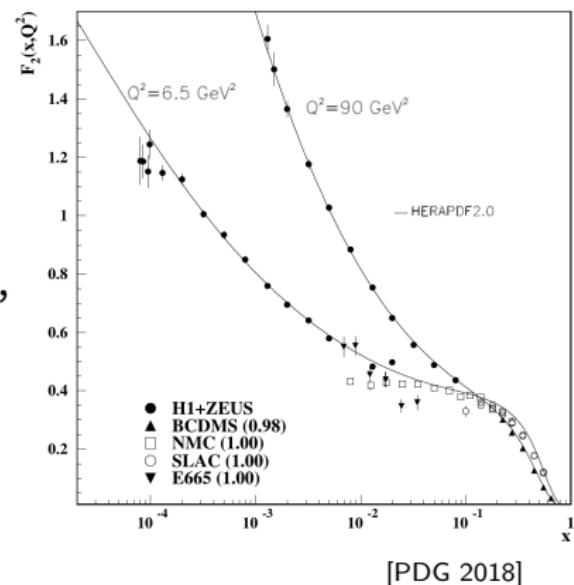
**花括号内的因子是 QED 领头阶**电子与单位点电荷的散射截面****

**$f_{i/p}(x)$  称为**部分子分布函数** (parton distribution function, **PDF**)，描述在质子  $p$  中找到动量分数为  $x$  的部分子  $i$  的数量**

# Bjorken 标度律

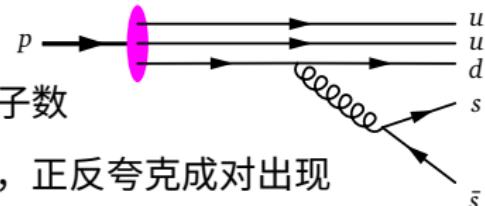
- 💡 从上述公式抽取**结构函数**  $F_2(x) = \sum_i Q_i^2 x f_{i/p}(x)$  来描述**质子的夸克结构**
- ☀️  $F_2(x)$  不依赖于  $Q^2$ , 这个现象称为 **Bjorken 标度律**(scaling)
- ✨ Bjorken 标度律是**近似的**, 它在  $Q^2$  变化范围较大时遭到**破坏**
- 🌙 部分子可以通过 **QCD 耦合**辐射出更多部分子;  $Q$  越大, 辐射部分子的数量越多
- 🌙 虚度为  $\mu^2 = p^\mu p_\mu > 0$  的部分子能够**自由**地参与空间尺度  $\Delta x \sim 1/\mu$  的散射过程
- 🌙  $\mu$  是能够**分辨**自由部分子的**因子化能标**, 受到动量转移  $Q$  的限制,  $\mu < Q$
- 🌙 受 QCD 耦合影响, PDF 实际上依赖于能标  $\mu$ , 结构函数依赖于动量转移  $Q$

$$f_{i/p}(x) \rightarrow f_{i/p}(x, \mu^2), \quad F_2(x) \rightarrow F_2(x, Q^2)$$



# 部分子分布函数

强子的部分子包括胶子和两种来源的夸克



价夸克：构成强子的组分夸克，贡献各种量子数

海夸克：来自真空极化，即由胶子分裂而来，正反夸克成对出现

质子的价夸克为  $uud$ ，反映为

$$\int_0^1 dx [f_{u/p}(x, \mu^2) - f_{\bar{u}/p}(x, \mu^2)] = 2$$

$$\int_0^1 dx [f_{d/p}(x, \mu^2) - f_{\bar{d}/p}(x, \mu^2)] = 1$$

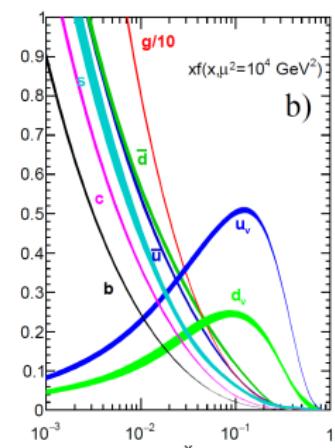
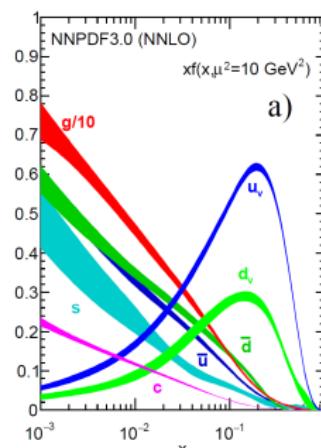
$$f_{s/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{s}/p}(x, \mu^2)$$

$$f_{c/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{c}/p}(x, \mu^2)$$

$$f_{b/p}(x, \mu^2) = f_{\bar{b}/p}(x, \mu^2)$$

能动量守恒体现为

$$\int_0^1 dx \sum_i x f_{i/p}(x, \mu^2) = 1, \quad i = g, d, u, s, c, b, \bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}$$



[PDG 2018]

# 部分子分布函数的演化

强子  $h$  中部分子  $i$  的 PDF 随能标的演化由 Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) 方程描述

$$\frac{\partial f_{i/h}(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \sum_j P_{i \leftarrow j}(z) f_{j/h}\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right)$$

在 QCD 领头阶, 分裂函数  $P_{i \leftarrow j}(z)$  为

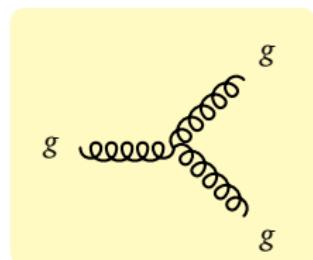
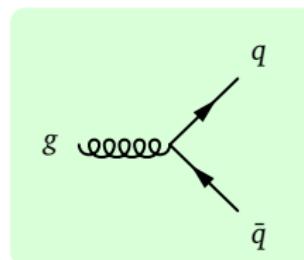
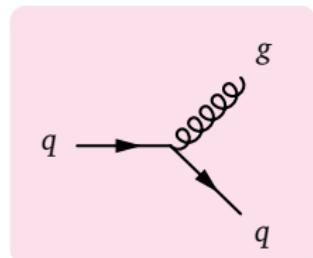
$$P_{q \leftarrow q}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z)$$

$$P_{g \leftarrow q}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+(1-z)^2}{z}$$

$$P_{q \leftarrow g}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$

$$P_{g \leftarrow g}(z) = 6 \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \right] + \left( \frac{11}{2} - \frac{n_f}{3} \right) \delta(1-z)$$

$n_f$  是满足  $m_q < \mu$  的有效轻夸克味数



# 部分子分布函数的确定

假设 PDF 具有一定的参数化形式，用 DGLAP 方程将 PDF 演化到不同能标以联系多个实验，再对实验数据进行全局拟合来确定参数

🔥 各个实验有各自敏感的  $x$  和  $Q^2$  范围

🌙 固定靶实验的  $\ell^\pm N$ 、 $NN$ 、 $\nu N$  ( $N = p, n$ )  
深度非弹性散射数据

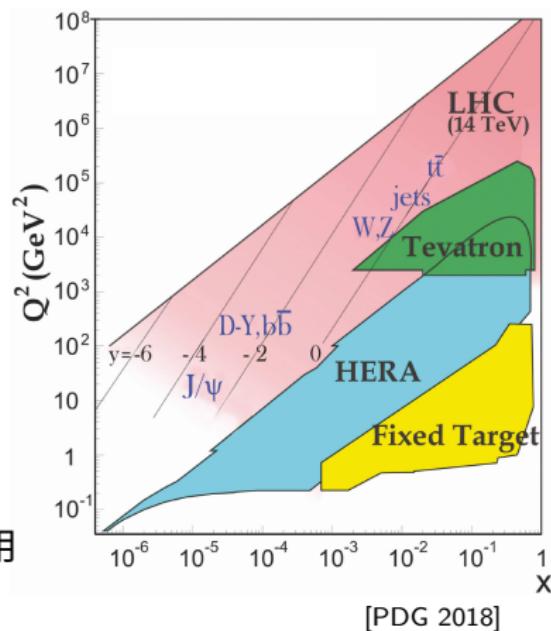
🌙  $e^\pm p$  对撞机 **HERA** 深度非弹性散射数据

🌙  $p\bar{p}$  对撞机 **Tevatron** 硬散射数据

🌙  $pp$  对撞机 **LHC** 硬散射数据

🌙 常用的 PDF 集包括 CT (CTEQ)、MSTW、NNPDF、MMHT、HERAPDF、ABMP、JR 等

☀️ 这些 PDF 集可以通过软件包 **LHAPDF** 调用  
<https://lhapdf.hepforge.org>



# 中微子—核子散射

☀ 由于**同位旋对称性**，质子  $p$  和中子  $n$  的 PDF 有一定的联系

$$f_{u/n} = f_{d/p}, \quad f_{d/n} = f_{u/p}, \quad f_{\bar{u}/n} = f_{\bar{d}/p}, \quad f_{\bar{d}/n} = f_{\bar{u}/p}$$

🌙 **反强子** PDF 与正强子 PDF 也有关联， $f_{q/\bar{p}} = f_{\bar{q}/p}$ ,  $f_{g/\bar{p}} = f_{g/p}$

⌚ 如果固定靶上有**等量**的质子和中子，设**同位旋单态核子**  $N = (p + n)/2$ ，则高能中微子**带电流**打靶过程  $\nu N \rightarrow \ell^- X$  的微分截面可表达为

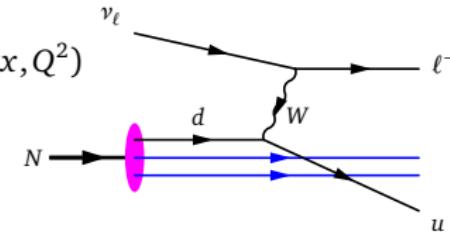
$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{2G_F^2 E_\nu m_N}{\pi} \left( \frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 x [q(x, Q^2) + (1-y)^2 \bar{q}(x, Q^2)]$$

$$q(x, Q^2) = \frac{1}{2} [f_{u/p}(x, Q^2) + f_{d/p}(x, Q^2)] + f_{s/p}(x, Q^2) + f_{b/p}(x, Q^2)$$

$$\bar{q}(x, Q^2) = \frac{1}{2} [f_{\bar{u}/p}(x, Q^2) + f_{\bar{d}/p}(x, Q^2)] + f_{\bar{c}/p}(x, Q^2) + f_{\bar{t}/p}(x, Q^2)$$

★  $q(x, Q^2) \leftrightarrow \bar{q}(x, Q^2)$  ↗  $\bar{\nu}N \rightarrow \ell^+ X$  微分截面

★ 中性流过程  $\nu N \rightarrow \nu X$  也有类似表达式



# 中微子深度非弹性散射

中微子深度非弹性散射具有下列特点

在中微子—核子散射过程中，**带电流截面比中性流截面大**

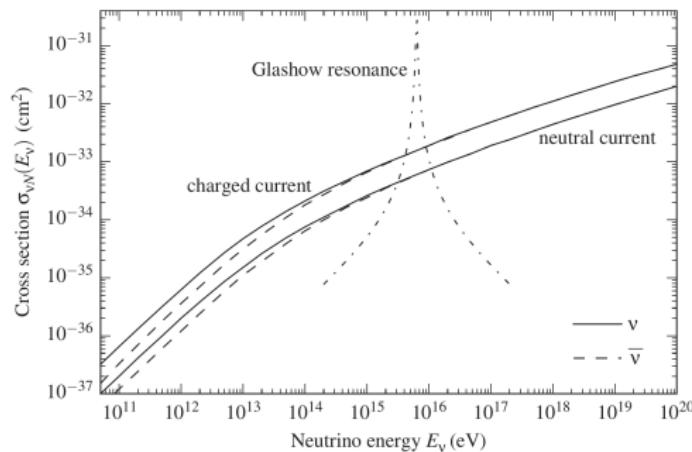
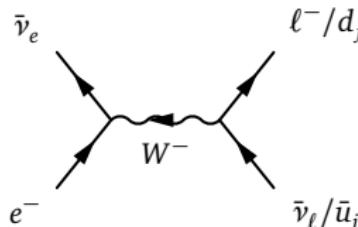
**弱相互作用破坏宇称**  当  $E_\nu \lesssim 1 \text{ PeV} = 10^{15} \text{ eV}$  时，**反中微子截面偏小**

**当中微子与原子散射时，中微子与电子的散射截面通常可以忽略**

**例外的是，反电子型中微子  $\bar{\nu}_e$**

在  $E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_W^2}{2m_e} \simeq 6.3 \text{ PeV}$  处通过  $W^-$

共振峰发生散射  $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow W^- \rightarrow X$ ，  
**截面非常大**，这就是**格拉肖共振**



[Gaisser et al., 2016]

# 强子-强子硬散射

 对于**大动量转移**，强子  $A$  与  $B$  的 **QCD 硬散射** 微分截面可用 PDF 表达为

$$\frac{d\sigma_{\text{hard}}(s)}{d^2 p_T} = \int dx_1 dx_2 \sum_{ijkl} \frac{1}{1 + \delta_{kl}} f_{i/A}(x_1, \mu^2) f_{j/B}(x_2, \mu^2) \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})}{d^2 p_T}$$

  $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}(\hat{s})$  是部分子散射过程  $ij \rightarrow kl$  的截面，可通过**微扰 QCD** 计算

 部分子层面上的质心能为  $\hat{s} = x_1 x_2 s = (p_i + p_j)^2 = (p_k + p_l)^2$

  $p_T$  是任一末态部分子的**横向动量**， $\hat{s}$  受到  $p_T$  的限制， $\hat{s} \geq 4p_T^2$

 可以用  $p_T$  的大小衡量散射过程的**软硬程度**

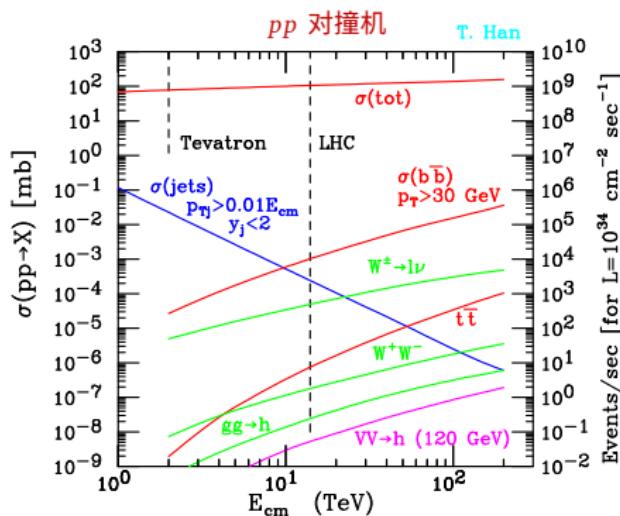
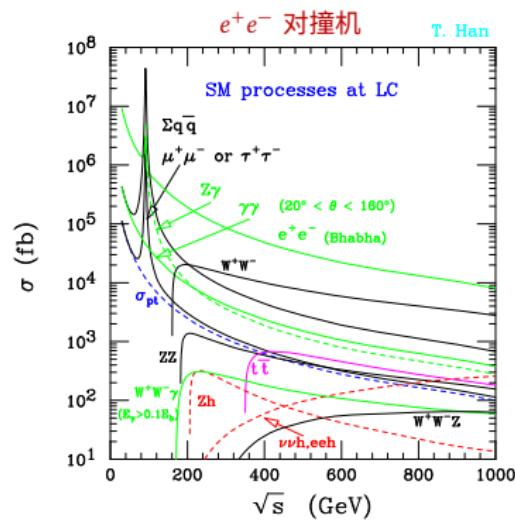
 质心能很高时胶子 PDF 很大， $gg \rightarrow gg$  主导， $\frac{d\hat{\sigma}_{gg \rightarrow gg}(\hat{s})}{d^2 p_T} \sim \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{2\pi} \frac{1}{p_T^4}$

 QCD 硬散射截面随  $\sqrt{s}$  增长的趋势为

$$\sigma_{\text{hard}}(s) \sim \int_{4p_T^2/s}^1 \frac{dx_1}{x_1} x_1^{-\lambda} \int_{4p_T^2/(x_1 s)}^1 \frac{dx_2}{x_2} x_2^{-\lambda} \sim s^\lambda \ln s$$

  $s^\lambda$  因子反映 PDF 在低  $x$  处的行为， $\ln s$  因子反映相空间的增大

# 对撞机过程产生截面



[Han, arXiv:hep-ph/0508097]

● 截面  $\sigma$  的单位:  $10^{-24} \text{ cm}^2 = 1 \text{ b} = 10^9 \text{ nb} = 10^{12} \text{ pb} = 10^{15} \text{ fb} = 10^{18} \text{ ab}$

● 瞬时亮度  $\mathcal{L}$  的单位:  $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \simeq 315 \text{ fb}^{-1} \text{ year}^{-1}$

● 积分亮度  $\int \mathcal{L}(t) dt$  表征数据量, 事例数  $N = \sigma \int \mathcal{L}(t) dt$

# 软过程

强子相互作用中的**软过程**具有很小的动量转移,  $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$

$\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$  是  $\alpha_s$  跑动到**无穷大**的低能标度, 因此处理软过程时关于  $\alpha_s(Q^2)$  的**微扰展开失效**, **非微扰效应**主导

由于**夸克禁闭**, 软过程中的部分子**不是自由的**

**可微扰过程**

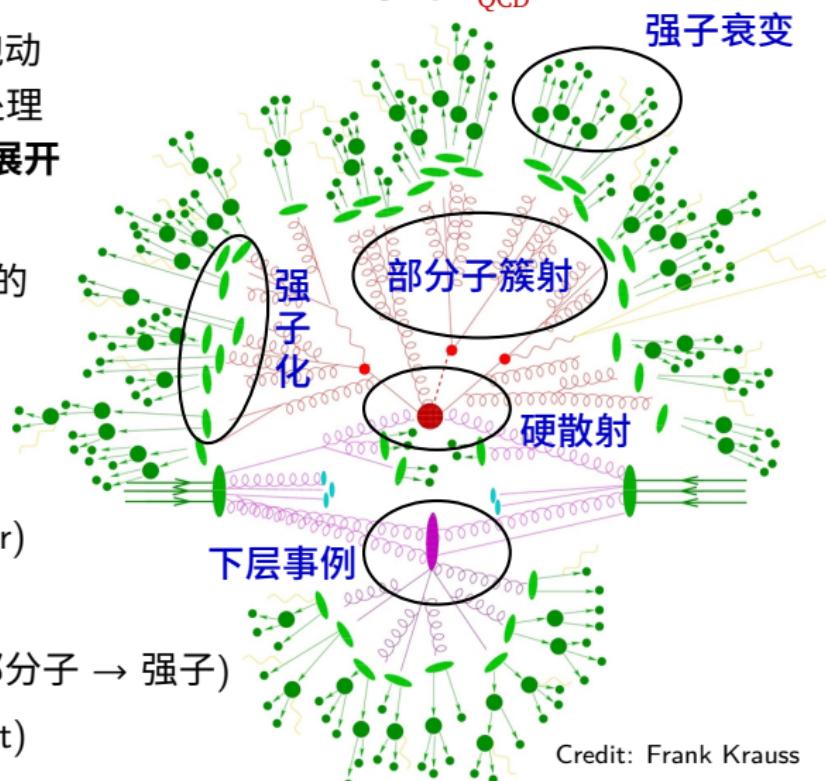
**硬散射** (hard scattering)

**部分子簇射** (parton shower)

**非微扰软过程**

**强子化** (hadronization, 部分子  $\rightarrow$  强子)

**下层事例** (underlying event)



# 碎裂函数

在单举截面的因子化微扰计算框架中，**强子化**过程可用**普适的碎裂函数**(fragmentation function) 描述

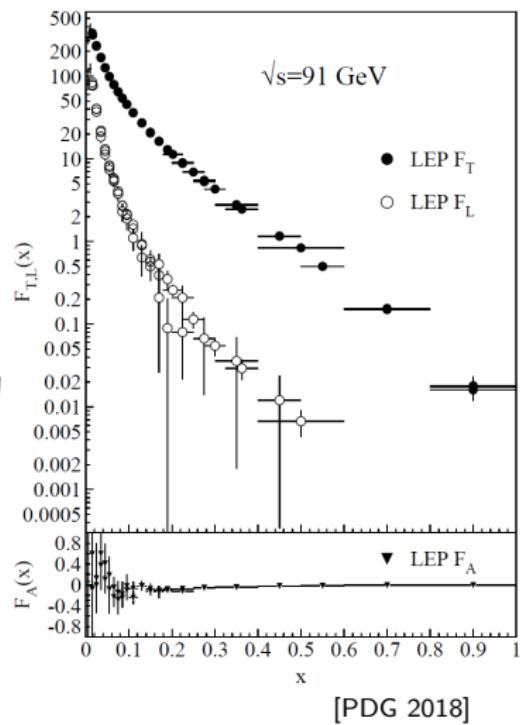
正负电子对撞过程  $e^+e^- \rightarrow \gamma/Z \rightarrow h + X$  中强子  $h$  的微分单举截面可以表达为

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx d\cos\theta} = \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) F_T^h(x, s) + \frac{3}{4}\sin^2\theta F_L^h(x, s) + \frac{3}{4}\cos\theta F_A^h(x, s)$$

$\sigma_0$  是归一化因子， $x = 2E_h/\sqrt{s} \leq 1$  是  $h$  的能量分数， $\theta$  是质心系中  $h$  运动方向与电子束流方向的夹角

横向碎裂函数  $F_T^h$  和纵向碎裂函数  $F_L^h$  分别对应于  $\gamma/Z$  的**横向极化**和**纵向极化**

不对称碎裂函数  $F_A^h$  描述**宇称破坏效应**



# 部分子碎裂函数

上述微分截面对  $\theta$  积分，就得到**总碎裂函数**  $F^h(x, s) = F_T^h(x, s) + F_L^h(x, s)$

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx} = F^h(x, s) = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} C_i \left( z, \alpha_s(\mu^2), \frac{s}{\mu^2} \right) D_i^h \left( \frac{x}{z}, \mu^2 \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \right)$$

系数函数  $C_i$  依赖于部分子类型

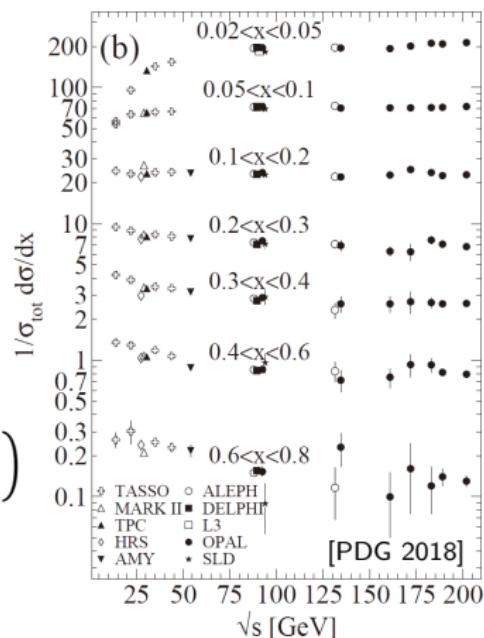
**部分子碎裂函数**  $D_i^h(z, \mu^2)$  描述部分子  $i$  碎裂出具有动量分数  $z$  的强子  $h$  的数量

能动量守恒要求  $\int_x^1 dz \sum_h z D_i^h(z, \mu^2) = 1$

$D_i^h(z, \mu^2)$  的演化由**微扰 QCD** 给出

$$\frac{\partial D_i^h(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \sum_j \int_x^1 \frac{dz}{z} \tilde{P}_{i \leftarrow j}(z, \alpha_s(\mu^2)) D_j^h \left( \frac{x}{z}, \mu^2 \right)$$

在 QCD 领头阶， $\tilde{P}_{i \leftarrow j}(z, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{i \leftarrow j}(z)$



# Lund 弦碎裂模型

💡 在蒙特卡洛产生子中，**强子化**过程通常用一些**唯象学模型**来描述

🎈 蒙特卡洛产生子 **PYTHIA** 采用著名的 **Lund 弦碎裂模型**

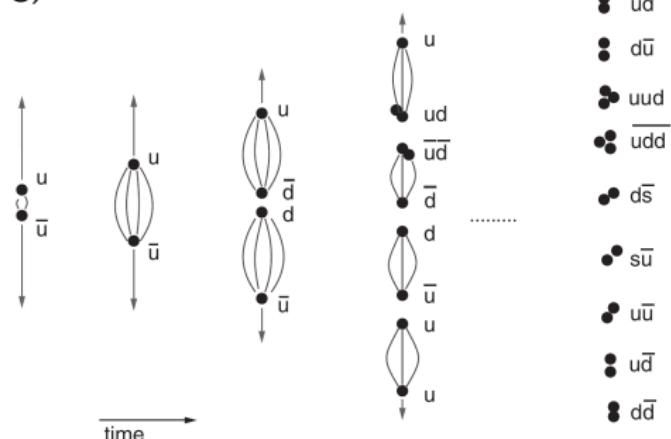
<http://home.thep.lu.se/~torbjorn/Pythia.html>

🟡 假设在高能对撞中产生一对正反夸克，构成**色单态系统**，认为夸克的动能储存在一根两端连接着它们的**弦** (string) 中

🟡 当弦储存的**能量密度足够高时**，  
**量子涨落**导致出现一对正反夸克或双  
夸克 (diquark)，将弦断开成两根弦

🟡 这些弦持续断裂，直到每根弦储  
存的**能量密度过低**，不足以提供给进  
一步的量子涨落

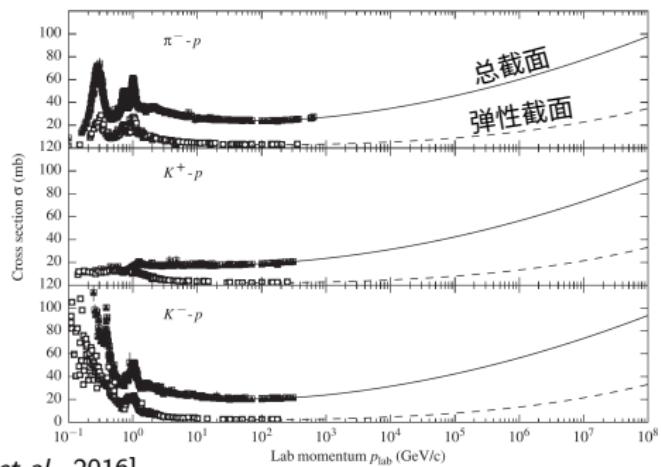
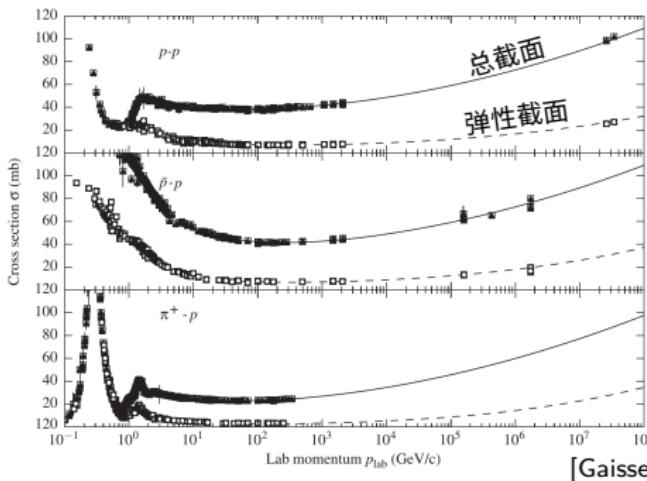
🟡 按照**夸克成分**和**不变质量**将每个  
色单态系统辨识为相应的**强子**



[Gaisser et al., 2016]

# 强子-强子散射截面

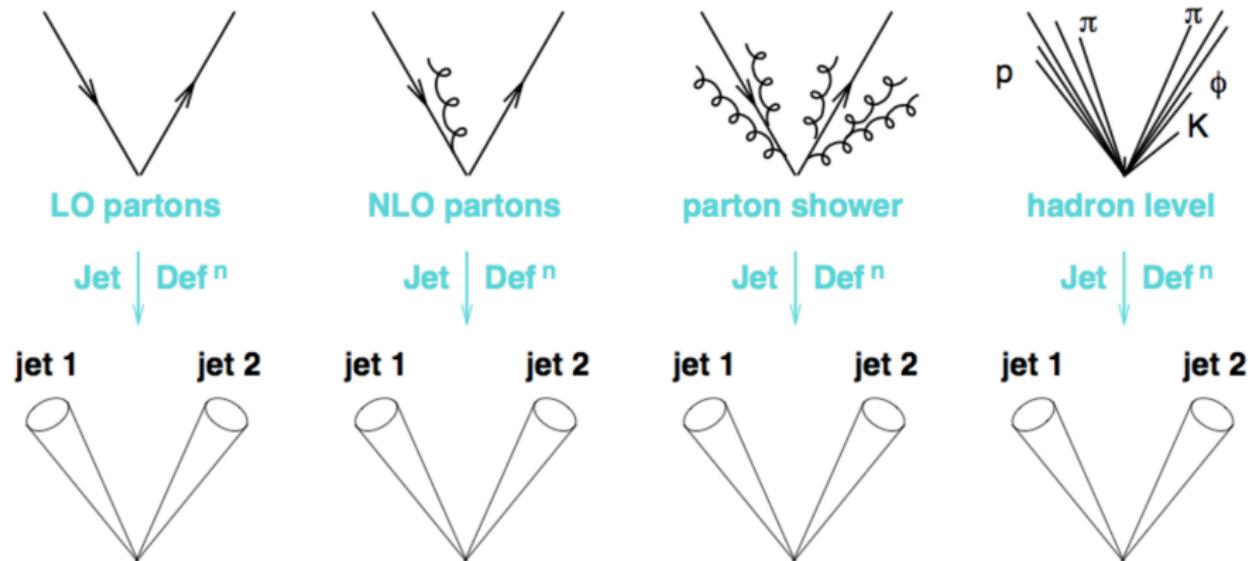
- ❗ 非微扰效应很大 ➡️ 微扰 QCD **不能够准确地计算强子-强子散射截面**
- ☀ 加速器上的截面测量 + **唯象学模型** ➡️ **高能区散射截面**
- **粒子产生阈能以下**, 如果没有湮灭道, 则总截面与弹性截面**相同**
- **粒子产生阈能以上**, 非弹性道打开, 总截面**大于**弹性截面
- 🌙 共振区域以上,  $\pi p$  与  $pp$  总截面之比  $\sim 2/3$ , 反映价夸克数目差异
- ✨ 高能处, 以  $\ln^2 s$  关系将截面**外推**



[Gaisser et al., 2016]

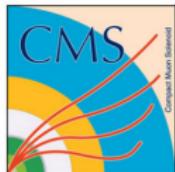
# 部分子与喷注

一个高能部分子产生之后，将经历末态辐射、部分子簇射和强子化过程，形成一串几乎从同一个方向出射的粒子（主要是强子），称为喷注（jet）

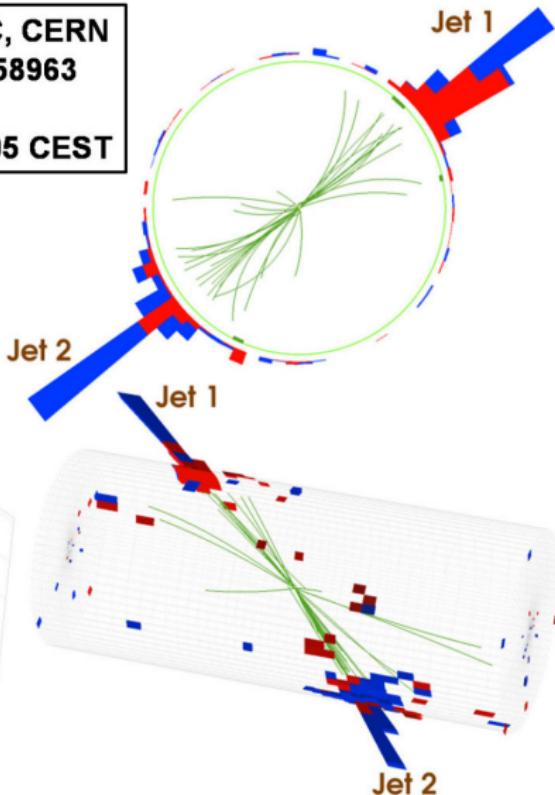
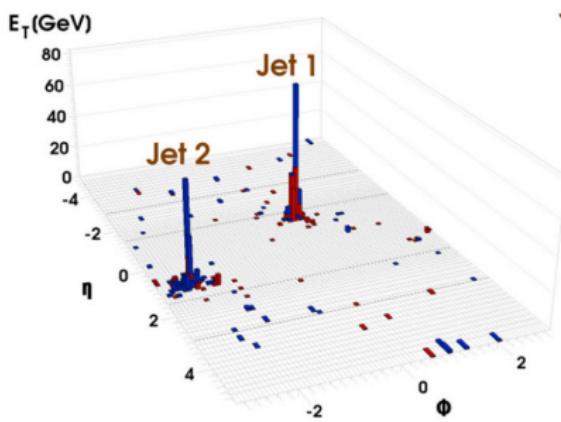


[From M. Cacciari's talk (2013)]

# LHC 上的双喷注事例

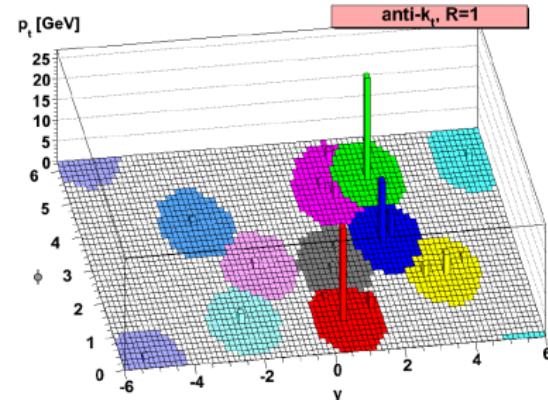
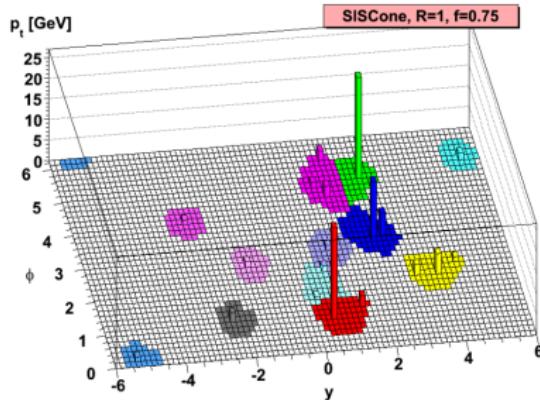
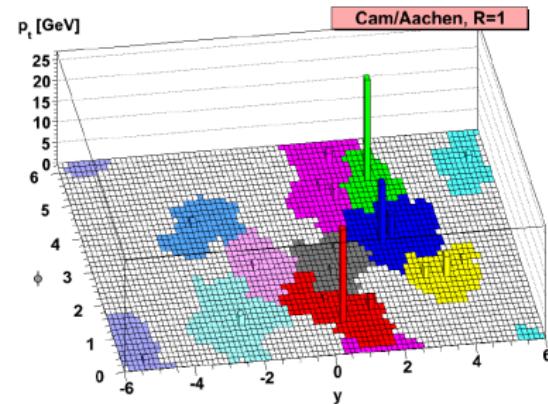
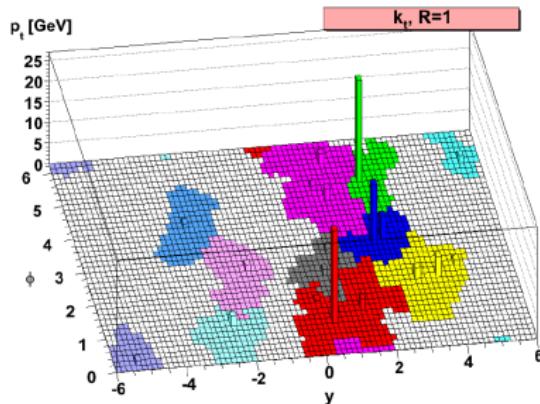


CMS Experiment at LHC, CERN  
Run 133450 Event 16358963  
Lumi section: 285  
Sat Apr 17 2010, 12:25:05 CEST



# 喷注聚团算法

- 💡 **红外一共线稳定**: 观测量在 QCD 无穷软辐射和共线分裂极限下**不变**
- 💥 将粒子结合成喷注，需要采取一定的**喷注聚团算法**
- 🎈 **Cone 算法**: 给定角半径  $R$ , 组合满足  $\Delta R < R$  的粒子, 寻找稳定圆锥
- ✨ 从种子开始的 **Cone 算法**: 只能找到部分稳定圆锥, **红外一共线不稳定**
- ⭐ **SISCone 算法**: 不需要种子, 能找到所有稳定圆锥, **红外一共线稳定**
- 🎈 **依序重组算法**: 用粒子的横向动量  $k_{T,i}$  和  $k_{T,j}$  定义“**距离**”  
$$d_{ij} = \min(k_{T,i}^{2p}, k_{T,j}^{2p}) \left( \frac{\Delta R_{ij}}{R} \right)^2$$
, 从“**距离**”最近的粒子逐步重组
- **$k_T$  算法**:  $p = 1$ , 从最软的粒子开始, **红外一共线稳定**
- **剑桥—亚琛算法**:  $p = 0$ , 从方向最接近的粒子开始, **红外一共线稳定**
- **Anti- $k_T$  算法**:  $p = -1$ , 从最硬的粒子开始, **红外一共线稳定**



[Cacciari, Salam, Soyez, arXiv:0802.1189, JHEP]

# b 喷注和 $\tau$ 喷注

💡 通过多种运动学变量发展**喷注标记技术**，能够区分来自  $b$  夸克和  $\tau$  轻子的喷注与来自轻夸克和胶子的喷注

🎈  **$b$  喷注**: 标记效率约为 60–80%

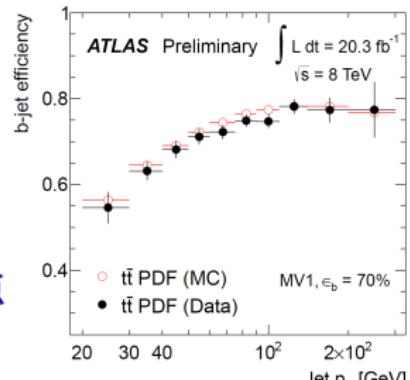
🎈  **$B$  介子** (如  $B^0$  和  $B^\pm$ ) 衰变引起偏移的**第二顶点**

🎈  **$b$  喷注中的软电子和软  $\mu$  子** 数量多于其它喷注

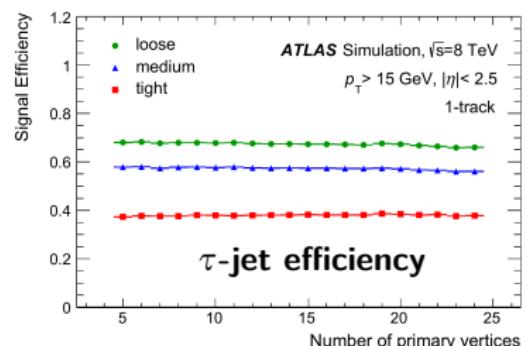
🎈  **$\tau$  喷注** 来自衰变到强子末态的  $\tau$  轻子

🎈 **单叉 (1-prong) 模式** (分支比 50%):  
衰变产物中的 1 个带电介子，中等标准的  
标注效率约为 60%

🎈 **三叉 (3-prong) 模式** (分支比 15%):  
衰变产物中的 3 个带电介子，中等标准的  
标注效率约为 40%



[ATLAS coll., CONF-2014-004]



$\tau$ -jet efficiency

[ATLAS coll., arXiv:1412.7086, EPJC]