

数学物理方法

第八章 Fourier 变换法

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 11 月 22 日



第八章 Fourier 变换法

- 上一章研究了求解数理方程定解问题的分离变量法
 - 由于所考虑的问题都只涉及两个自变量，所以情况比较简单
 - 如果问题涉及多个自变量，情况就会比较复杂
 - 在曲线坐标系中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程
 - 它们的解就是所谓的特殊函数
 - 所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法

第八章 Fourier 变换法

上一章研究了求解数理方程定解问题的分离变量法

由于所考虑的问题都只涉及两个自变量，所以情况比较简单

如果问题涉及多个自变量，情况就会比较复杂

在曲线坐标系中对数理方程分离变量，还常常导出一些特殊的常微分方程

它们的解就是所谓的特殊函数

所以分离变量法是一个很大的课题，今后还有较多章节研究这一方法

分离变量法适用于有界区间或有界区域

对于无界区间或无界区域上的数学物理方程定解问题，常常使用 Fourier 变换法

Fourier 变换法是积分变换法的一种，另一种常用的积分变换法是 Laplace 变换法

积分变换法的基本精神也是分离变量，只是形式上不甚明显

本章介绍 Fourier 变换法，对于其它积分变换法，本课程不作介绍

§1 Fourier 变换

§1.1 复数形式的 Fourier 级数

 函数族 $\{e^{inx/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 中任意两个函数在区间 $[-l, l]$ 上的内积定义为

$$(e^{im\pi x/l}, e^{in\pi x/l}) \equiv \int_{-l}^l (e^{im\pi x/l})^* e^{in\pi x/l} dx = \int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

 注意内积定义中出现的**复共轭**，这是第七章关于**实函数内积定义**的**推广**

 注 内积是普通三维空间中矢量点积的推广

由于矢量 a 与自身的内积 $a \cdot a = |a|^2$ 是其长度平方，一定是实数

 作为它的推广，函数与自身的内积（即模方）应该是实数

 在复值函数的内积定义中使用复共轭可以保证模方为实数

内积表达式

当 $m \neq n$ 时, $e^{im\pi x/l}$ 与 $e^{in\pi x/l}$ 的内积为

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx &= \frac{l e^{i(n-m)\pi x/l}}{i(n-m)\pi} \Big|_{-l}^l = \frac{l [e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}]}{i(n-m)\pi} \\ &= \frac{2l \sin[(n-m)\pi]}{(n-m)\pi} = 0 \end{aligned}$$

这说明函数族 $\{e^{in\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上是正交的

当 $m = n$ 时，内积变成 $\int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx = \int_{-l}^l dx = 2l$

 可以将这两种情况合起来，**内积**表达为

$$(e^{im\pi x/l}, e^{in\pi x/l}) = \int_{-l}^l e^{i(n-m)\pi x/l} dx = 2l \delta_{mn}$$

完备性

 可以证明，函数族 $\{e^{in\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上还是完备的

因此，区间 $[-l, l]$ 上任何解析性质良好的函数 $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\pi x/l}$$

完备性

 可以证明，函数族 $\{e^{inx/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上还是完备的

因此，区间 $[-l, l]$ 上任何解析性质良好的函数 $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\pi x/l}$$

$$\text{由 } \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e^{i(m-n)\pi\xi/l} d\xi = 2l \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m \delta_{mn} = 2l f_n$$

得到系数表达式

$$f_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

完备性

 可以证明，函数族 $\{e^{inx/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上还是完备的

因此，区间 $[-l, l]$ 上任何解析性质良好的函数 $f(x)$ 都可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\pi x/l}$$

$$\text{由 } \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e^{i(m-n)\pi\xi/l} d\xi = 2l \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m \delta_{mn} = 2l f_n$$

得到系数表达式

$$f_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\pi\xi/l} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

如果 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，则 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx/l}$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$

成立，它就是微积分中的复数形式 Fourier 级数

注 函数族 $\{e^{in\phi}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 等价于 $\{\cos n\phi, \sin n\phi\}_{n=0}^{+\infty}$ ，它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是完备的，令 $\phi = \pi x/l$ ，容易知道函数族 $\{e^{in\pi x/l}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在区间 $[-l, l]$ 上是完备的

§1.2 Fourier 变换

现在考虑展开式 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx/l}$ 当 $l \rightarrow \infty$ 的极限

将系数表达式 $f_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-inx/\textcolor{brown}{l}} d\xi$ 代入这个展开式，得

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-inx/\textcolor{brown}{l}} d\xi \right] e^{inx/\textcolor{brown}{l}}$$

令 $k_n \equiv \frac{n\pi}{l}$ ， $\Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{l}$ ，则 $\frac{\Delta k_n}{2\pi} = \frac{1}{2l}$ ，将上式改写为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] e^{ik_n x} \Delta k_n$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时， $\Delta k_n \rightarrow 0$ ， k_n 的取值由分立变为连续，上式的求和变为积分，得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk$$

Fourier 变换和反变换

 观察 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk$

如果定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$ 为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$



Joseph Fourier (1768–1830)

则 $F(k)$ 的 Fourier 反变换 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

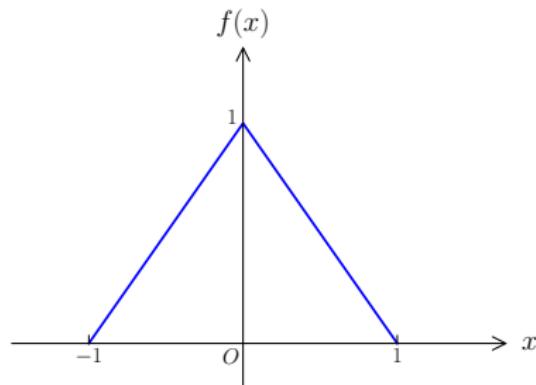
例 1

例 1 计算三角形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

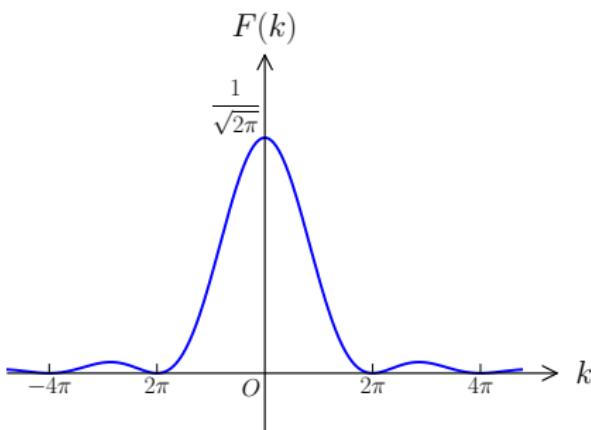
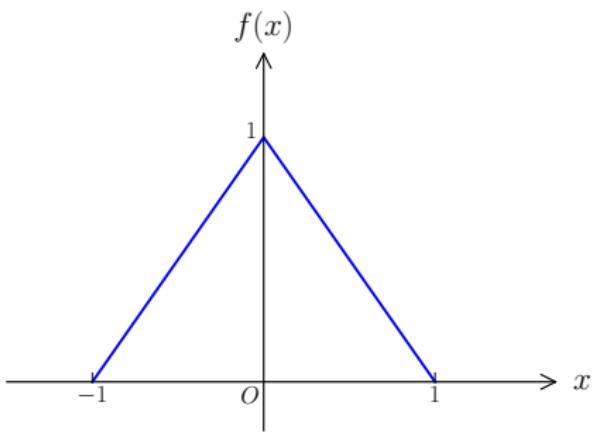
的 Fourier 变换 $F(k)$

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为



$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1 - |x|)(\cos kx + i \sin kx) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - x) \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^1 (1 - x) d \sin kx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \left[(1 - x) \sin kx \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin kx dx \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} (1 - \cos k) \end{aligned}$$

例 1 图像



$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} (1 - \cos k)$$

例 2

例 2 计算函数 $f(x) = e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换 $F(k)$ ，其中 $a > 0$

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

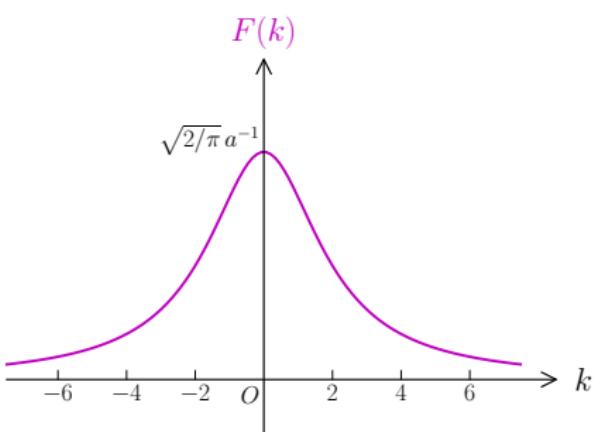
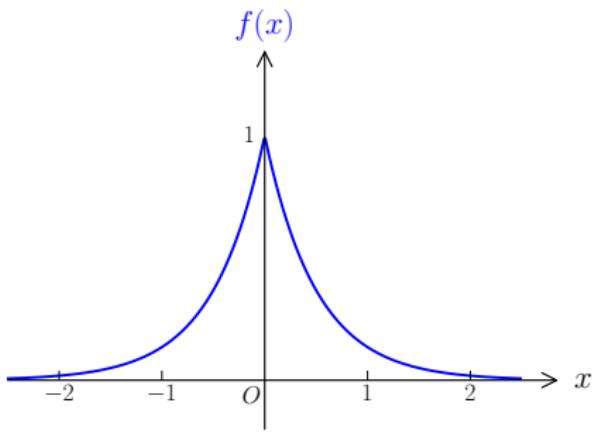
$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I$$

其中积分

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \int_0^\infty e^{-ax} \cos kx \, dx = -\frac{1}{a} \int_0^\infty \cos kx \, de^{-ax} \\
 &= -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos kx \Big|_0^\infty - \frac{k}{a} \int_0^\infty e^{-ax} \sin kx \, dx = \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} \int_0^\infty \sin kx \, de^{-ax} \\
 &= \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} e^{-ax} \sin kx \Big|_0^\infty - \frac{k^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \cos kx \, dx = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2} I
 \end{aligned}$$

故 $I = \frac{a}{a^2 + k^2}$, 从而得到 $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$

例 2 图像 (取 $a = 2$)



$$f(x) = e^{-a|x|}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

§1.3 二维与三维 Fourier 变换

 考虑二元函数 $f(x, y)$, 先把 y 看作参数, 对 x 作 Fourier 变换

 得到像函数 $\tilde{F}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-ikx} dx$

 再把 k 当作参数, 对 y 作 Fourier 变换, 得到像函数

$$F(k, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(k, y) e^{-il y} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

§1.3 二维与三维 Fourier 变换

考虑二元函数 $f(x, y)$, 先把 y 看作参数, 对 x 作 Fourier 变换

得到像函数 $\tilde{F}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-ikx} dx$

再把 k 当作参数, 对 y 作 Fourier 变换, 得到像函数

$$F(k, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(k, y) e^{-ily} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

反过来, 把 k 当作参数, 对 l 作 Fourier 反变换, 有

$$\tilde{F}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, l) e^{ily} dl$$

再把 y 当作参数, 对 k 作 Fourier 反变换, 得到原函数

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(k, y) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, l) e^{i(kx+ly)} dk dl$$

多维 Fourier 变换关系

这样就建立了二维 Fourier 变换与反变换关系

$$F(k, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, l) e^{i(kx+ly)} dk dl$$

类似地，对于三元函数 $f(x, y, z)$ ，简记 $r = (x, y, z)$, $k = (k_1, k_2, k_3)$

则 $k \cdot r = k_1 x + k_2 y + k_3 z$ ，有三维 Fourier 变换与反变换关系

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{-ik \cdot r} dr$$

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ik \cdot r} dk$$

对于一般的 n 元函数，也有类似结果

§1.4 Fourier 变换的性质

 接下来介绍 Fourier 变换的性质

 在作 Fourier 变换和反变换计算时，可以引用有关性质

 也可以直接计算，相当于把有关性质的证明包含在计算过程中

 接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$ ， $f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)$ ($i = 1, 2$)，则有以下性质

§1.4 Fourier 变换的性质

接下来介绍 Fourier 变换的性质

在作 Fourier 变换和反变换计算时，可以引用有关性质

也可以直接计算，相当于把有关性质的证明包含在计算过程中

接下来设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$, $f_i(x) \leftrightarrow F_i(k)$ ($i = 1, 2$)，则有以下性质

1 线性定理： $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \leftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$ ，其中 a_1 和 a_2 是常数

这一性质显而易见，直接来源于积分的线性性质

证：
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{-ikx} dx + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{-ikx} dx \\ &= a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k) \end{aligned}$$

微分定理

2 微分定理：如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$ ，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (ik)^n F(k)$$

微分定理

2 微分定理：如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$ ，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (ik)^n F(k)$$

注 学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$ ，则意味着它在远处是平坦的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$ ，于是以上条件只需要第一个就可以了

但是，这在数学上并非总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$

它的一阶导数为 $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ ，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

所以同时列出这些条件是必要的

微分定理

2 微分定理：如果 $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$ ，则

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (ik)^n F(k)$$

注 学物理的人可能会认为，一个函数 $f(x)$ 如果满足 $f(\pm\infty) = 0$ ，则意味着它在远处是平坦的，从而也有 $f'(\pm\infty) = 0$ ，于是以上条件只需要第一个就可以了

但是，这在数学上并非总是正确的，一个简单的例子是 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$

它的一阶导数为 $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ ，显然有 $f(\pm\infty) = 0$ 和 $f'(\pm\infty) \neq 0$

所以同时列出这些条件是必要的

证：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{-ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = ikF(k) \end{aligned}$$

第二步用了分部积分，同理可证 $n > 1$ 的情况成立



若 $f(\pm\infty) = 0$ ，对 Fourier 反变换 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$ 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk &= f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ikF(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \frac{de^{ikx}}{dx} dk\end{aligned}$$

可见，微分定理意味着求导与积分可以交换，但应注意需要满足的条件

卷积

 若 $f(\pm\infty) = 0$ ，对 Fourier 反变换 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$ 求导，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk &= f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ikF(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \frac{de^{ikx}}{dx} dk \end{aligned}$$

可见，微分定理意味着求导与积分可以交换，但应注意需要满足的条件

 函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积定义为 $f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$

令 $y = x - \xi$, 则 $d\xi = -dy$, $f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)f_2(y)(-dy)$

 将积分变量 y 换成 ξ ，得 $f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi$

 这是卷积定义的等价表达式，它表明 $f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$

卷积定理

3 卷积定理: $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注 这一定理主要用于由像函数求原函数

基本前提是像函数 $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的原函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 已经知道或容易求出

卷积定理

3 卷积定理: $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$

注 这一定理主要用于由**像函数**求原函数

基本前提是**像函数** $F_1(k)$ 和 $F_2(2)$ 的**原函数** $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 已经知道或容易求出

证:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right] e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x - \xi) e^{-ikx} dx \right] d\xi \\
 y = x - \xi \quad \rightarrow \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-ik(y+\xi)} dy \right] d\xi \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-iky} dy \right] \\
 &= F_1(k)F_2(k)
 \end{aligned}$$

延迟定理和积分定理

4 延迟定理: $f(x - \xi) \leftrightarrow e^{-ik\xi} F(k)$, 其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证: 作变量替换 $y = x - \xi$, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x - \xi)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik(y+\xi)} dy \\ &= e^{-ik\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy = e^{-ik\xi} F(k)\end{aligned}$$

延迟定理和积分定理

4 延迟定理: $f(x - \xi) \leftrightarrow e^{-ik\xi} F(k)$, 其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证: 作变量替换 $y = x - \xi$, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x - \xi)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik(y+\xi)} dy \\ &= e^{-ik\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy = e^{-ik\xi} F(k)\end{aligned}$$

5 积分定理: 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$, 则 $g(x) \equiv \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \leftrightarrow \frac{F(k)}{ik}$

证: 设 $g(x) \leftrightarrow G(k)$, 由于 $g(\pm\infty) = 0$, 应用微分定理得 $\mathcal{F}[g'(x)] = ikG(k)$

另一方面, 有 $g'(x) = f(x)$, 故 $\mathcal{F}[g'(x)] = \mathcal{F}[f(x)] = F(k)$

比较两式, 得 $ikG(k) = F(k)$, 即 $G(k) = \frac{F(k)}{ik}$

相似定理

6 相似定理: $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$, 其中常数 $a \neq 0$

 证: 若 $a > 0$, 则

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ikx} dx$$

$$y = ax \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky/a} dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

 若 $a < 0$, 则

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ikx} dx$$

$$y = ax \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y) e^{-iky/a} dy = -\frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

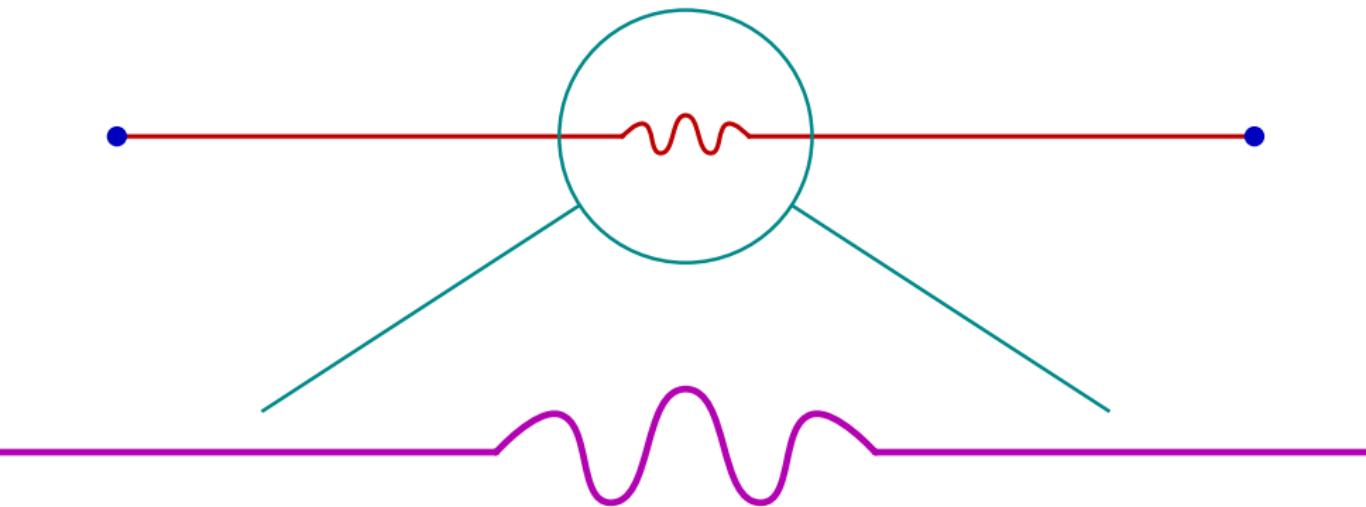
§2 无界弦的自由振动

无界弦指无穷长的弦，实际上并不存在

但是，如果弦较长，而我们所关心的部分离边界较远

在较短时间内，边界对所关心的部分尚未发生作用

就可以忽略边界的存在，从而将有界弦抽象为无界弦



§2.1 Fourier 变换法

 考虑无界弦在初始激励下的自由振动，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

 注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm\infty} = 0$

§2.1 Fourier 变换法

 考虑无界弦在初始激励下的自由振动，定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

 注 这是忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm\infty} = 0$

 下面用 Fourier 变换法求解这个定解问题

 由于 t 的变化范围是 $(0, +\infty)$ ， x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$

 因此应该对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x, t) \leftrightarrow U(k, t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

常微分方程初值问题

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

 对一维齐次波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 x 方向上作 Fourier 变换，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-ikx} dx$$

$$\text{线性定理 } \rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-ikx} dx - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} dx$$

$$\text{微分定理 } \rightarrow = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (\mathbf{i}k)^2 U = \frac{d^2 U}{dt^2} + k^2 a^2 U$$

常微分方程初值问题

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k), \quad \psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$$

 对一维齐次波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 在 x 方向上作 Fourier 变换，得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-ikx} dx$$

$$\text{线性定理 } \rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-ikx} dx - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} dx$$

$$\text{微分定理 } \rightarrow = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 (\mathbf{i}k)^2 U = \frac{d^2 U}{dt^2} + k^2 a^2 U$$

从而得到常微分方程的初值问题 $\begin{cases} \frac{d^2U}{dt^2} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$

初值条件来自初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ 的 Fourier 变换

解 $U(k, t)$

常微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{d^2U}{dt^2} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k), \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = \Psi(k) \end{cases}$ 的解是

$$U(k, t) = \Phi(k) \cos kat + \Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}$$

$$\frac{dU}{dt} = -ka\Phi(k) \sin kat + \Psi(k) \cos kat$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -k^2 a^2 \Phi(k) \cos kat - ka\Psi(k) \sin kat = -k^2 a^2 U$$

 剩下的问题是对 $U(k, t)$ 作 Fourier 反变换求出原函数 $u(x, t)$ ，有

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] + \mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right]$$

Fourier 反变换计算

根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$ ，有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat}) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x-at)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x+at)} dk \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]\end{aligned}$$

Fourier 反变换计算

根据 $\cos kat = \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat})$ 和 $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) \frac{1}{2}(e^{-ikat} + e^{ikat}) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x-at)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik(x+at)} dk \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]\end{aligned}$$

利用 $\int_0^t \cos k a \tau d\tau = \frac{\sin k a \tau}{k a} \Big|_0^t = \frac{\sin k a t}{k a}$ 、 $\psi(x) \leftrightarrow \Psi(k)$ 和上式结果, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin k a t}{k a} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^t \Psi(k) \cos k a \tau d\tau \right] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1} [\Psi(k) \cos k a \tau] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\psi(x-a\tau) + \psi(x+a\tau)] d\tau\end{aligned}$$

第二步利用了 Fourier 反变换的线性性, 即交换了对 τ 积分和对 k 积分的顺序

d'Alembert 公式

🌵 作变量替换 $\xi = x - a\tau$ ，则 $d\tau = -\frac{d\xi}{a}$ ，有

$$\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - a\tau) d\tau = -\frac{1}{2a} \int_x^{x-at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^x \psi(\xi) d\xi$$

🌾 令 $\xi = x + a\tau$ ，则 $d\tau = \frac{d\xi}{a}$ ，有 $\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + a\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

d'Alembert 公式

作变量替换 $\xi = x - a\tau$ ，则 $d\tau = -\frac{d\xi}{a}$ ，有

$$\frac{1}{2} \int_0^{\textcolor{red}{t}} \psi(x - a\tau) \, d\tau = -\frac{1}{2a} \int_x^{\textcolor{red}{x-a\tau}} \psi(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^x \psi(\xi) \, d\xi$$

令 $\xi = x + a\tau$ ，则 $d\tau = \frac{d\xi}{a}$ ，有 $\frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + a\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka} \right] = \frac{1}{2} \int_0^t \psi(\textcolor{blue}{x} - a\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(\textcolor{violet}{x} + a\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_{\textcolor{red}{x}-at}^{\textcolor{red}{x}+at} \psi(\xi) d\xi$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] + \mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right] \text{ 化为}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$



 这是最终结果，称为 d'Alembert 公式

Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

🌴 如果初始速度 $\psi(x) = 0$ ，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$$

⌚ $x = x_0$ 处的初始位移为 $\varphi(x_0)$

⌚ 令 $x_0 = x - at$ ，则 $x = x_0 + at$ ， $\varphi(x - at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x - at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形随时间 t 向右移动至 $x = x_0 + at$ 处

右行波和左行波

$$\text{d'Alembert 公式 } u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

🌴 如果初始速度 $\psi(x) = 0$ ，则 d'Alembert 公式化为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$$

⌚ $x = x_0$ 处的初始位移为 $\varphi(x_0)$

🥕 令 $x_0 = x - at$ ，则 $x = x_0 + at$ ， $\varphi(x - at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x - at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形随时间 t 向右移动至 $x = x_0 + at$ 处

🍓 令 $x_0 = x + at$ ，则 $x = x_0 - at$ ， $\varphi(x + at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x + at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形随时间 t 向左移动至 $x = x_0 - at$ 处

🍒 因此， $\psi(x) = 0$ 时的物理图像是初始位移的波形一半向右传播，一半向左传播

🍑 $\psi(x) \neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列右行波和一列左行波叠加而成

右行波和左行波

d'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

🌴 如果初始速度 $\psi(x) = 0$ ，则 **d'Alembert 公式**化为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$$

解的动画演示

⌚ $x = x_0$ 处的初始位移为 $\varphi(x_0)$

🍎 令 $x_0 = x - at$ ，则 $x = x_0 + at$ ， $\varphi(x - at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x - at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形随时间 t 向右移动至 $x = x_0 + at$ 处

🍓 令 $x_0 = x + at$ ，则 $x = x_0 - at$ ， $\varphi(x + at) = \varphi(x_0)$ ，故 $\varphi(x + at)$ 描述 $x = x_0$ 处初始位移为 $\varphi(x_0)$ 的波形随时间 t 向左移动至 $x = x_0 - at$ 处

🍒 因此， $\psi(x) = 0$ 时的物理图像是初始位移的波形一半向右传播，一半向左传播

🍑 $\psi(x) \neq 0$ 时情况略为复杂，但整个波形仍然由一列右行波和一列左行波叠加而成

Fourier 变换法的本质

 对无界问题用 Fourier 变换法，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解

 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解

 两者的精神一致

Fourier 变换法的本质

 对无界问题用 Fourier 变换法，能够将偏微分方程的定解问题化为常微分方程的初值问题求解

 对有界问题用分离变量法，也是把偏微分方程化作常微分方程来求解

 两者的精神一致

 由 $u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k, t) e^{ikx} dk$ 可以看出

 $u(x, t)$ 是一系列 “本征振动” $U(k, t) e^{ikx} / \sqrt{2\pi}$ 的叠加 (即对 k 积分)

 每一本征振动是两个因子的乘积，一个只是 t 的函数，一个只是 x 的函数

 这与用分离变量法求解有界弦的振动所得一般解 $u(x, t) = \sum_n X_n(x) T_n(t)$ 在形式上相同

 可见，Fourier 变换法本质上也是分离变量法

利用延迟定理、线性定理和积分定理

● $\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$ 可通过**延迟定理**和**线性定理**得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{-ikat}] + \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{ikat}]\} \\ &\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]\end{aligned}$$

利用延迟定理、线性定理和积分定理

● $\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$ 可通过**延迟定理**和**线性定理**得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) \cos kat] &\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2}\{\mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{-ikat}] + \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k) e^{ikat}]\} \\ &\xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]\end{aligned}$$

● $\mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right] = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$ 可通过**延迟定理**、**线性定理**和**积分定理**

得到：由**延迟定理**和**线性定理**有 $\psi(x + at) - \psi(x - at) \leftrightarrow \Psi(k)(e^{ikat} - e^{-ikat})$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka}\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(e^{ikat} - e^{-ikat})}{2ika}\right] \\ &\xrightarrow{\text{线性}} \frac{1}{2a} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(k)(e^{ikat} - e^{-ikat})}{ik}\right] \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^x [\psi(y + at) - \psi(y - at)] dy\end{aligned}$$

● 这里应用**积分定理的条件**已经满足，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(x + at) - \psi(x - at)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(\xi) - \psi(\xi)] d\xi = 0$$

化简

 令 $\xi = y + at$ ，则 $\int_{-\infty}^x \psi(y + at) dy = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$

 令 $\xi = y - at$ ，则 $\int_{-\infty}^x \psi(y - at) dy = \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi$

 故

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\Psi(k) \frac{\sin kat}{ka} \right] = \frac{1}{2a} \left[\int_{-\infty}^x \psi(y + at) dy - \int_{-\infty}^x \psi(y - at) dy \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\int_{-\infty}^{x-at} + \int_{x-at}^{x+at} - \int_{-\infty}^{x-at} \right] \psi(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

§2.2 行波法简介

 d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到

 思路是先求出偏微分方程的通解，其中含两个任意函数，再用初始条件确定它们

 对于无界弦的振动，这一方法非常简单

 但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍

§2.2 行波法简介

d'Alembert 公式也可以通过下面介绍的行波法得到

思路是先求出偏微分方程的通解，其中含两个任意函数，再用初始条件确定它们

对于无界弦的振动，这一方法非常简单

但是，行波法不具有一般性，所以只在这里作简单介绍

令 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ ，推出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

从而将一维齐次波动方程化为 $0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$

一维自由波动方程的通解

🥂 现在，一维齐次波动方程变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ，即 $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$

🍸 所以 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 与 η 无关，即 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ ，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ 的任意函数

🍹 对 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$ ，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f_0(\xi)$

一维自由波动方程的通解

🥂 现在，**一维齐次波动方程**变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ，即 $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$

🍸 所以 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 与 η 无关，即 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ ，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ 的任意函数

🍺 对 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$ ，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f_0(\xi)$

☕ 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是**任意函数**

🍵 根据 $\xi = x - at$ 和 $\eta = x + at$ ，重新用变量 x 和 t 写出来，得到

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

🍜 这是一维自由波动方程在未曾考虑任何定解条件时的最一般解，即**真正的通解**

一维自由波动方程的通解

🥂 现在，一维齐次波动方程变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ，即 $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$

🍸 所以 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 与 η 无关，即 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ ，其中 $f_0(\xi)$ 是 ξ 的任意函数

🍺 对 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_0(\xi)$ 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$ ，其中 $f(\xi)$ 满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f_0(\xi)$

☕ 实际上，这里 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 都是任意函数

🍵 根据 $\xi = x - at$ 和 $\eta = x + at$ ，重新用变量 x 和 t 写出来，得到

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

🍜 这是一维自由波动方程在未曾考虑任何定解条件时的最一般解，即真正的通解

🍺 可惜能够这样求出通解的方程甚少

🍻 即使能够求出通解，如果定解条件比较复杂，要决定其中的任意函数也绝非易事

🥤 对于有限区间上的自由振动，由定解条件确定以上 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 就比较困难

推出 d'Alembert 公式

 将通解 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ 代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x)$$

 对 $-f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a} \psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - 2c$

 其中 c 是常数， x_0 可视方便取定

推出 d'Alembert 公式

 将通解 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ 代入初始条件，得

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x)$$

对 $-f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a} \psi(x)$ 两边积分，得 $-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - 2c$

其中 c 是常数, x_0 可视方便取定, 与 $f(x) + g(x) = \varphi(x)$ 结合, 推出

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) \, d\xi + c, \quad g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) \, d\xi - c$$

 于是，满足初始条件的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - at) + g(x + at) \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

这样就再次得到 d'Alembert 公式，结果与 x_0 和 c 无关

§3 δ 函数

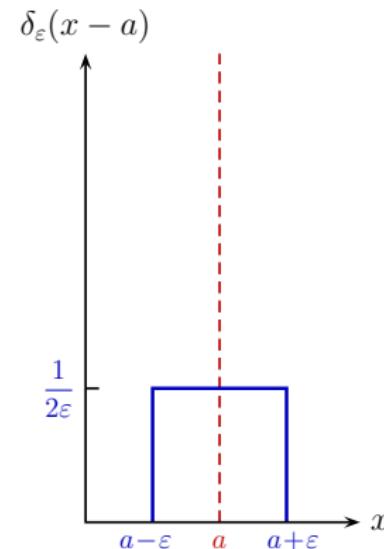
§3.1 定义一

独角兽 考虑位于 x 轴上 $x = a$ 处具有单位质量的质点

小马 为了描述它的质量密度(这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

小马 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度



§3 δ 函数

§3.1 定义一

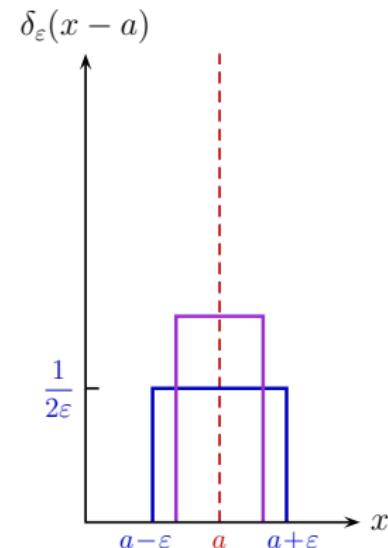
🦄 考虑位于 x 轴上 $x = a$ 处具有单位质量的质点

🐴 为了描述它的质量密度 (这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

🐴 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度

🐉 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时



§3 δ 函数

§3.1 定义一

独角兽 考虑位于 x 轴上 $x = a$ 处具有单位质量的质点

骏马 为了描述它的质量密度(这里指线密度)，引入函数

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

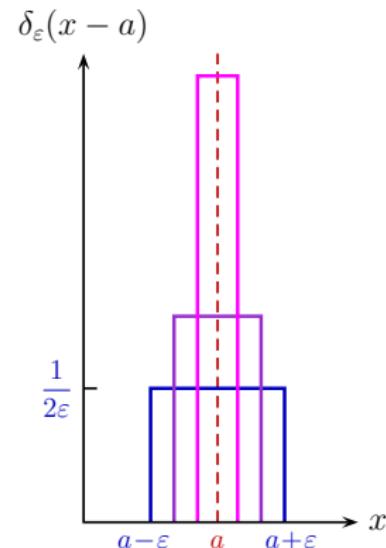
骏马 这个函数描述的是均匀分布在区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 内质量为 1 的物体的质量密度

恐龙 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，就得到上述质点的质量密度

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x - a)$$

恐龙 它满足 $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$ ，这是 δ 函数的定义一

恐龙 若质点的质量为 m ，则质量密度为 $\rho(x) = m\delta(x - a)$



δ 函数的历史和意义



δ 函数是数学物理中的重要概念



一般认为最早由物理学家 P. Dirac 引入



实际上，在 Dirac 之前，O. Heaviside 已经给出明确定义



至于这一函数的雏形，则具有更长的历史



不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

δ 函数的历史和意义



δ 函数是数学物理中的重要概念



一般认为最早由物理学家 P. Dirac 引入



实际上，在 Dirac 之前，O. Heaviside 已经给出明确定义



至于这一函数的雏形，则具有更长的历史



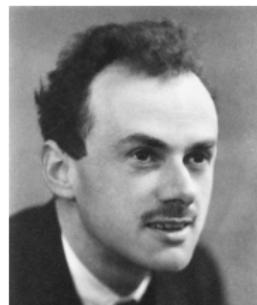
不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



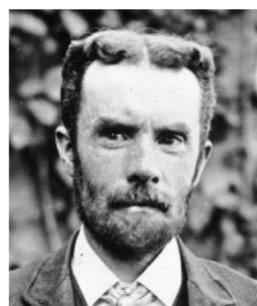
δ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度



比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度



Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

δ 函数的历史和意义



δ 函数是数学物理中的重要概念



一般认为最早由物理学家 P. Dirac 引入



实际上，在 Dirac 之前，O. Heaviside 已经给出明确定义



至于这一函数的雏形，则具有更长的历史



不过，它在近代物理中才获得广泛的应用



δ 函数可以描述任何处于一点、总量为 1 的物理量的密度



比如，上述单位质点的质量密度，单位点电荷的电荷密度，集中在一点的单位磁通的磁感应强度



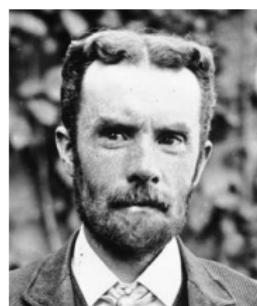
如果自变量是时间 t 而不是位置 x ，那么 δ 函数描述的是存在于瞬时、总量为 1 的物理量的强度



比如，具有单位冲量的瞬时力，具有单位电荷的瞬时电流



Paul Dirac
(1902–1984)



Oliver Heaviside
(1850–1925)

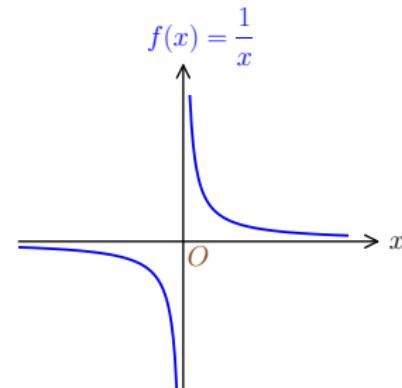
广义函数

🐰 δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同

🐰 后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值

🐭 虽然也可能有奇点，但奇点通常不在定义域内

🐭 比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，虽然 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$ ，但 $x = 0$ 并不在定义域内



广义函数

δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同

后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值

虽然也可能有奇点，但奇点通常不在定义域内

比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，虽然 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$ ，但 $x = 0$ 并不在定义域内

然而， δ 函数 $\delta(x - a)$ 在 $x = a$ 处的函数值是 ∞

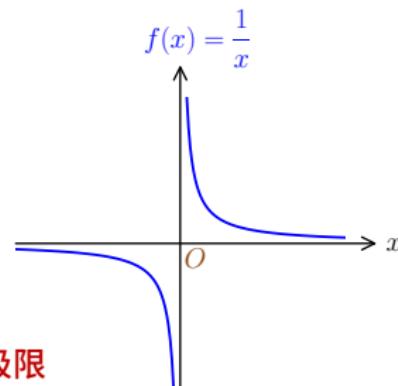
而且这一点对 δ 函数来说是最重要的

所以 δ 函数不是一个经典的函数，而是一个广义函数

严格的广义函数理论超出了本课程的论题

我们总是从极限的意义上对 δ 函数作直观的理解

即把 δ 函数当作某种经典函数序列 [如 $\delta_\varepsilon(x - a)$] 的极限



广义函数

δ 函数与我们过去所熟悉的函数颇为不同

后者通常是连续或分段连续的，起码在定义域内的每一点应该有确定的函数值

虽然也可能有奇点，但奇点通常不在定义域内

比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，虽然 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$ ，但 $x = 0$ 并不在定义域内

然而， δ 函数 $\delta(x - a)$ 在 $x = a$ 处的函数值是 ∞

而且这一点对 δ 函数来说是最重要的

所以 δ 函数不是一个经典的函数，而是一个广义函数

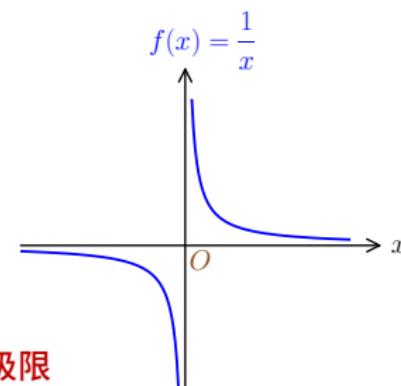
严格的广义函数理论超出了本课程的论题

我们总是从极限的意义上对 δ 函数作直观的理解

即把 δ 函数当作某种经典函数序列 [如 $\delta_\varepsilon(x - a)$] 的极限

此外，由 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$ 可以看到， δ 函数的量纲是其宗量量纲的倒数

这一点不同于三角函数、指数函数、对数函数等无量纲函数



§3.2 定义二

🦁 根据 δ 函数的定义一 $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$

🐯 对于任何连续函数 $f(x)$ ，有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

🐯 上式可看作 δ 函数的另一种定义（定义二）， $f(x)$ 与 $\delta(x - a)$ 相乘之后，通过积分挑选出了 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的值 $f(a)$ ，这也称为 δ 函数的挑选性

§3.2 定义二

根据 δ 函数的定义一 $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$

对于任何连续函数 $f(x)$ ，有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

上式可看作 δ 函数的另一种定义（定义二）， $f(x)$ 与 $\delta(x - a)$ 相乘之后，通过积分挑选出了 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的值 $f(a)$ ，这也称为 δ 函数的挑选性

证明 由于 $\delta(x - a)$ 只在 a 点不为零，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x - a) dx = f(a + \theta\varepsilon) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x - a) dx = f(a + \theta\varepsilon)$$

其中 $\theta \in [-1, 1]$ ，第二步用了积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号，则存在 $c \in [a, b]$ ，使得 $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$

由于正实数 ε 的大小可以任意，令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，就得到 $f(a + \theta\varepsilon) \rightarrow f(a)$ 证毕

严格的证明

🐻 上述证明实际上是会引起质疑的

🐘 因为其中引用了积分中值定理，而它只适用于经典的函数

严格的证明

熊 上述证明实际上是会引起质疑的

象 因为其中引用了积分中值定理，而它只适用于经典的函数

象 但是，如果用经典函数 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x - a)$

牛 那么，每一步都是严格成立的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx = f(a + \theta \varepsilon)$$

猪 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，就得到要证明的 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

严格的证明

上述证明实际上是会引起质疑的

因为其中引用了积分中值定理，而它只适用于经典的函数

但是，如果用经典函数 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 代替证明过程中的 $\delta(x - a)$

那么，每一步都是严格成立的，于是就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx = f(a + \theta \varepsilon)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，就得到要证明的 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$

? 也许有人会问，取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得到的 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx$ 是否真的等于 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx$ ？即取极限与积分是否可以交换次序？

! 正确的理解是， $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx$ 正是用 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x - a) dx$ 来定义的

说明和推广

使用 δ 函数，使我们可以省略用经典函数序列 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 计算然后取极限的过程

需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 不一定是前面用

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

定义的函数

只要 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 在 $|x - a| > \varepsilon$ 时为零，在 $|x - a| < \varepsilon$ 时为正，且积分为 1 即可

说明和推广

使用 δ 函数，使我们可以省略用经典函数序列 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 计算然后取极限的过程

需要指出的是，这里的 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 不一定是前面用

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & |x - a| > \varepsilon \end{cases}$$

定义的函数

只要 $\delta_\varepsilon(x - a)$ 在 $|x - a| > \varepsilon$ 时为零，在 $|x - a| < \varepsilon$ 时为正，且积分为 1 即可

很容易将 δ 函数的定义二推广到三维或其它维数的情况

比如，三维 δ 函数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ 可以由下式定义，

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{a})$$

记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ，我们也可以用 3 个一维 δ 函数等价地定义

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_1)\delta(y - a_2)\delta(z - a_3)$$

§3.3 δ 函数的基本性质



δ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)[f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\delta(x - a) dx - f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x - a) dx \\ &= \varphi(a)f(a) - f(a)\varphi(a) = 0 \end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的，必须有 $f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a) = 0$

§3.3 δ 函数的基本性质



δ 函数的基本性质主要有以下几条

1 若 $f(x)$ 为连续函数, 则 $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$

证: 设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数, 根据 δ 函数的定义二, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)[f(x)\delta(x-a) - f(a)\delta(x-a)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\delta(x-a) dx - f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-a) dx \\ &= \varphi(a)f(a) - f(a)\varphi(a) = 0 \end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 是任意的, 必须有 $f(x)\delta(x-a) - f(a)\delta(x-a) = 0$

2 $x\delta(x) = 0$

上式可改写成 $\frac{\delta(x)}{x^{-1}} = 0$, 它说明 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 处的奇性弱于 $\frac{1}{x}$

由此可见, δ 函数的奇性其实并不是很大

证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x \delta(x) dx = \varphi(0) \cdot 0 = 0$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $x \delta(x) = 0$

偶函数

 证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x \delta(x) dx = \varphi(0) \cdot 0 = 0$$

 由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $x \delta(x) = 0$

3 δ 函数是偶函数，即 $\delta(-x) = \delta(x)$

 证：设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数，根据 δ 函数的定义二，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-x) \delta(x) dx$$

$$y = -x \rightarrow = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(y) \delta(-y) (-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(-x) dx$$

 由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $\delta(-x) = \delta(x)$

$\delta(ax)$

4 $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$, 其中 $a \neq 0$

证: 设 $\varphi(x)$ 为任意连续函数, 若 $a > 0$, 令 $y = ax$, 由 δ 函数的定义二得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y) \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \varphi(0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性得 $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a} = \frac{\delta(x)}{|a|}$

若 $a < 0$, 则 $-a > 0$, 由 δ 函数的偶函数性质得

$$\delta(ax) = \delta(-ax) = \frac{\delta(x)}{-a} = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

§3.4 δ 函数的几种表达式

)V $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

W $\delta(x)$ 的 Fourier 变换为 $\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

M 由 Fourier 反变换公式即得 $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

§3.4 δ 函数的几种表达式

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

$\delta(x)$ 的 Fourier 变换为 $\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

由 Fourier 反变换公式即得 $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

实际上，上式右边的积分并不存在，那么如何理解这个结果呢？

如果用 $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ 代替 $\delta(x)$ ，就可以得到

$$\Delta_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\cos kx}{2\varepsilon} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx}{2k\varepsilon} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k \cos k\varepsilon}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{L'Hospital 法则})$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

最后一步实际上是对这个不存在的积分的定义

第二种表达式

 $\delta(x) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}$

 根据上述 $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk$, 有

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-K}^K \Delta_\varepsilon(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon(k) \right] e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K (\cos kx + i \sin kx) dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_0^K \cos kx dk \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\sin kx}{x} \Big|_0^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}\end{aligned}$$

 第二步交换了两个极限的顺序, 其合理性这里不作深究

 随后的积分是普通定积分, 只要 $\delta_\varepsilon(x)$ 是 x 和 ε 的连续函数, 则 $\Delta_\varepsilon(k)$ 是 k 和 ε 的连续函数, 从而取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限与积分可以交换次序 (第三步)

$\frac{\sin Kx}{\pi x}$ 的性质和图像

🐸 这里介绍函数 $\frac{\sin Kx}{\pi x}$ ($K > 0$) 的性质

🐢 它的零点位于 $x = \pm \frac{n\pi}{K}$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

🐍 当 $x \rightarrow 0$ 时, 由 L'Hospital 法则得

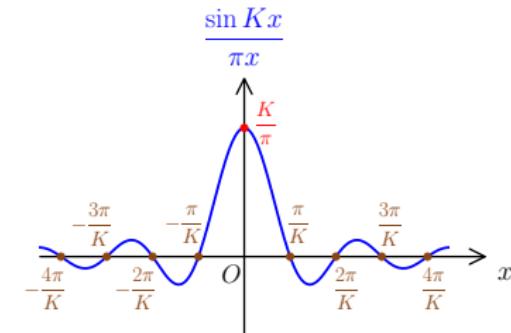
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Kx}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K \cos Kx}{\pi} = \frac{K}{\pi}$$

🦕 根据第五章 §7 例 3, $K > 0$ 时 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin Kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

🦕 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Kx}{\pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin Kx}{x} dx = 1$

🐍 当 $K \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\sin Kx}{\pi x}$ 整体行为趋近于 $\delta(x)$



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

第三种表达式

Ⅱ $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \rho_\sigma(x)$, 其中 $\rho_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ 是 **Gauss 分布**, $\sigma > 0$

duckie 当 $x \neq 0$ 时, 令 $t = \frac{1}{\sigma}$, 由 **L'Hospital 法则** 得

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \rho_\sigma(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi} e^{x^2 t^2/2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} x^2 t e^{x^2 t^2/2}} = 0 \end{aligned}$$

egg 当 $x = 0$ 时, 有 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \rho_\sigma(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \infty$

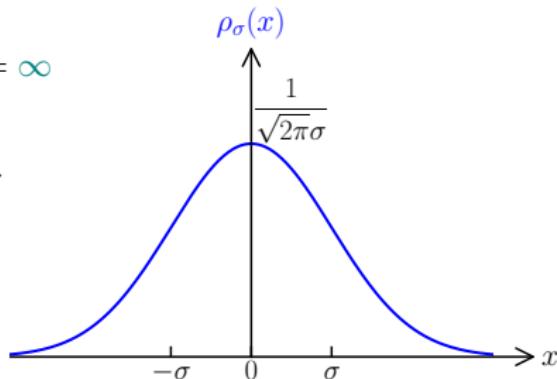
duckie 由于 $\rho_\sigma(x)$ 是概率分布, 已经归一化, 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x) dx = 1$$

duckie 这样就符合 δ 函数定义一中的所有条件



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



第四种表达式

⌚ $\delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \rho_b(x)$, 其中 $\rho_b(x) = \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)}$ 是 Lorentz 分布, $b > 0$

🐓 Lorentz 分布也称为 Cauchy 分布、Breit-Wigner 分布

🐓 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{b \rightarrow 0} \rho_b(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)} = 0$

🦆 当 $x = 0$ 时, $\lim_{b \rightarrow 0} \rho_b(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\pi b} = \infty$

天鹅 作为归一化的概率分布, $\rho_b(x)$ 满足

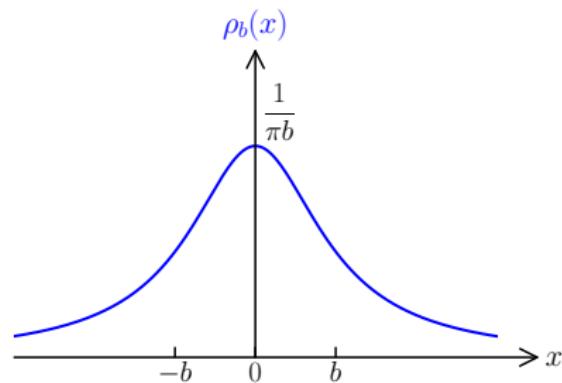
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_b(x) dx = 1$$

🦅 这样就符合 δ 函数定义一中的所有条件

🦉 事实上, 任何概率分布取其宽度趋于零的极限 (从而高度趋于无穷大), 都可以得到 δ 函数



Hendrik Lorentz
(1853–1928)



第五种表达式

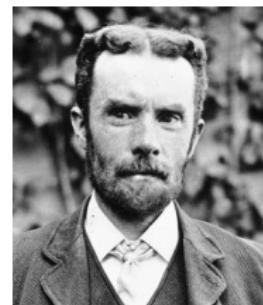
 $\delta(x) = \theta'(x)$, 其中 **Heaviside 阶跃函数** 定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

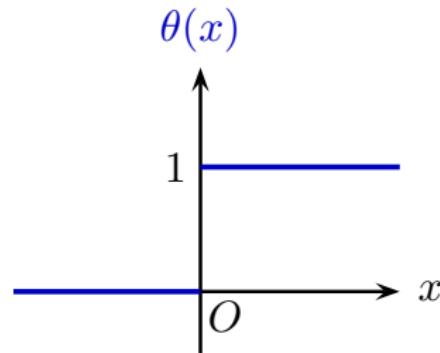
 对于任意连续函数 $f(x)$, 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\theta'(x) dx &= f(x)\theta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\theta(x) dx \\ &= f(+\infty) - \int_0^{+\infty} f'(x) dx \\ &= f(+\infty) - f(x) \Big|_0^{+\infty} = f(0) \end{aligned}$$

 可见 $\theta'(x)$ 符合 δ 函数的**定义二**



Oliver Heaviside
(1850–1925)



§4 无界杆的热传导问题

考虑无穷长导热细杆在热源和初始温度作用下的热传导问题

这是一个一维无界问题，关于温度分布 $u(x, t)$ 的定解问题如下

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

这里忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm\infty} = 0$

§4 无界杆的热传导问题

考虑无穷长导热细杆在热源和初始温度作用下的热传导问题

这是一个一维无界问题，关于温度分布 $u(x, t)$ 的定解问题如下

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

这里忽略了默认的边界条件 $u|_{x=\pm\infty} = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm\infty} = 0$

令 $u = u_1 + u_2$ ，将问题分解为由初始温度引起的热传导问题（无源问题）

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

和由热源引起的热传导问题（有源问题）

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u_2|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

§4.1 无源问题

 将 u_1 改记为 u ，无源问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

 对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x, t) \leftrightarrow U(k, t), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k)$$

 对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + k^2 a^2 U = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(k) \end{cases}$$

 这个常微分方程初值问题的解为 $U(k, t) = \Phi(k) e^{-k^2 a^2 t}$

Fourier 反变换计算

- ⌚ 剩下的问题是 对 $U(k, t) = \Phi(k) e^{-k^2 a^2 t}$ 作 Fourier 反变换 求出 原函数 $u(x, t)$
- ⚠ 根据 卷积定理 $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$ ，只要求出 $e^{-k^2 a^2 t}$ 的 原函数 $E(x)$
- ⌚ 再与 $\Phi(k)$ 的 原函数 $\varphi(x)$ 作 卷积 即可得到 $u(x, t)$

Fourier 反变换计算

剩下的问题是求对 $U(k, t) = \Phi(k) e^{-k^2 a^2 t}$ 作 Fourier 反变换求出原函数 $u(x, t)$

根据卷积定理 $f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(k)F_2(k)$ ，只要求出 $e^{-k^2 a^2 t}$ 的原函数 $E(x)$

再与 $\Phi(k)$ 的原函数 $\varphi(x)$ 作卷积即可得到 $u(x, t)$

由反变换公式得

$$\begin{aligned} E(x) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2 a^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} (\cos kx + i \sin kx) dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} \cos kx dk \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \end{aligned}$$

倒数第二步用到积分公式 ($y \rightarrow k$, $\alpha \rightarrow a^2 t$, $\beta \rightarrow x$)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} \cos \beta y dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad \alpha > 0$$

无源问题的解



由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-k^2 a^2 t}] = \varphi(x) * E(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \\
 &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi
 \end{aligned}$$

无源问题的解



由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-k^2 a^2 t}] = \varphi(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \end{aligned}$$



考虑特例 $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$ ，即初始时刻有一定的热量集中在 x_0 处



将 $\varphi(\xi) = \delta(\xi - x_0)$ 代入解的表达式，得到 t 时刻的温度分布为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\right]$$



这是 $\sigma = \sqrt{2a^2 t}$ 的 Gauss 分布，其宽度随着 t 的增大而增大



高度随着 t 的增大而减小，但对 x 积分始终为 1

无源问题的解



由卷积表达式得到无源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-k^2 a^2 t}] = \varphi(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \end{aligned}$$



考虑特例 $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$ ，即初始时刻有一定的热量集中在 x_0 处



将 $\varphi(\xi) = \delta(\xi - x_0)$ 代入解的表达式，得到 t 时刻的温度分布为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\right]$$

这是 $\sigma = \sqrt{2a^2 t}$ 的 Gauss 分布，其宽度随着 t 的增大而增大

高度随着 t 的增大而减小，但对 x 积分始终为 1

解的动画演示

物理图像

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2 t}\right]$$

🍪 这样的结果表明，热量不断向远处传播，但总能量守恒

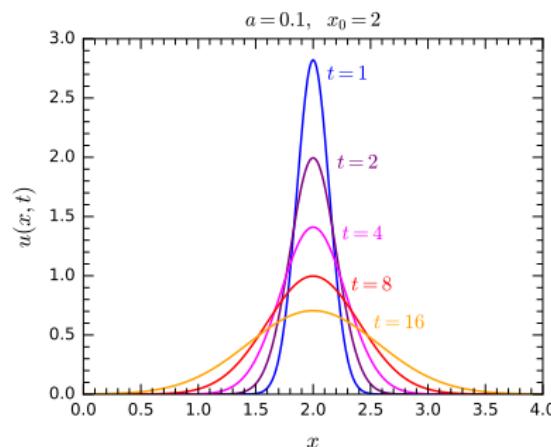
🍿 但是，不管 t 多么小，只要 $t > 0$ ，杆上各处的温度均不为零

🍩 这表明温度的传播速度为无穷大，显然不符合实际情况

🍪 引起这一结果的原因是推导热传导方程时没有考虑热传导过程的微观机制

🍰 即所用模型过于简化

🍩 不过，当 t 较大以后，由热传导方程解得的结果还是符合实际情况的



§4.2 有源问题

 将 u_2 改记为 u , 有源问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial \textcolor{brown}{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \textcolor{brown}{u}}{\partial x^2} = \textcolor{blue}{f}(x, t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ \textcolor{brown}{u}|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

对 x 作 Fourier 变换，设 $u(x, t) \leftrightarrow U(k, t)$ ， $f(x, t) \leftrightarrow F(k, t)$

对定解问题作 Fourier 变换，利用微分定理，得到

这个常微分方程初值问题的解为 $U(k, t) = \int_0^t F(k, \tau) e^{-k^2 a^2(t-\tau)} d\tau$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} U(k,t) &= F(k,t) e^{-k^2 a^2 (t-t)} + \int_0^t F(k,\tau) [-k^2 a^2 e^{-k^2 a^2 (t-\tau)}] d\tau \\ &= F(k,t) - k^2 a^2 U(k,t)\end{aligned}$$

有源问题的解

由前面得到的 **Fourier 变换关系** $e^{-k^2 a^2 t} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$ 推出

$$e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

应用卷积定理求得有源问题的解为

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[F(k,\tau) e^{-k^2 a^2(t-\tau)}] d\tau$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

第二步利用了 Fourier 反变换的线性性，即交换了对 k 积分和对 τ 积分的次序

有源问题的解

 由前面得到的 Fourier 变换关系 $e^{-k^2 a^2 t} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$ 推出

$$e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

 应用卷积定理求得有源问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k, t)] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[F(k, \tau) e^{-k^2 a^2 (t-\tau)}] d\tau \\ &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{f(\xi, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \end{aligned}$$

 第二步利用了 Fourier 反变换的线性性，即交换了对 k 积分和对 τ 积分的次序

 若 $f(x, t) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0)$ ，则 $u(x, t) = \frac{\theta(t - t_0)}{2a\sqrt{\pi(t - t_0)}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2(t - t_0)}\right]$

 此时热源只在 t_0 时刻作用于 x_0 点，故 t_0 时刻以前温度一直保持初始温度 0

 t_0 时刻以后热量从 x_0 点向外传播，温度分布为 $\sigma = \sqrt{2a^2(t - t_0)}$ 的 Gauss 分布