量 子 场 论

第 1 章 预备知识

1.3 节至 1.5 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

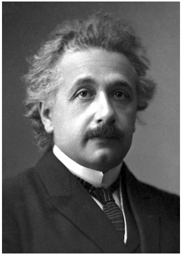
更新日期：2022 年 9 月 7 日

1.3 节 Lorentz 变换和 Lorentz 群

描述高速运动的系统需要用到狭义相对论，它的基本原理如下

1. 光速不变原理：在任意惯性参考系中，光速的大小不变
2. 狭义相对性原理：在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式

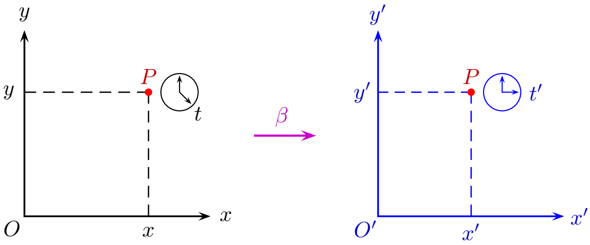
任意两个惯性参考系的直角坐标由 **Lorentz 变换**联系起来



Albert Einstein
(1879–1955)

Hendrik Lorentz
(1853–1928)

Lorentz 增速变换



- 设惯性坐标系 O' 沿着惯性坐标系 O 的 x 轴方向以**速度** β 匀速运动
- **事件** P 在 O 系中的坐标为 (t, x, y, z)，在 O' 系中的坐标为 (t', x', y', z')
- 相应 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z$$

- **Lorentz 因子** $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$
- 这种 Lorentz 变换称为沿 x 轴方向的**增速** (boost) 变换

Lorentz 不变量

- 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t-\beta x)^2 - \gamma^2(x-\beta t)^2 - y^2 - z^2$$
$$= \frac{1}{1-\beta^2}(t^2+\beta^2x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)
- Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同**的值
- 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 **Lorentz 对称性**

Lorentz 不变量

- 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t-\beta x)^2 - \gamma^2(x-\beta t)^2 - y^2 - z^2$$
$$= \frac{1}{1-\beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta x t - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta x t) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 Lorentz 不变量 (invariant)
- Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同**的值
- 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 Lorentz 对称性
- 结合时间和空间坐标，构成四维 Minkowski 时空，坐标为

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

- x^μ 是一个逆变 (contravariant) 的 Lorentz 四维矢量 (vector)
- “逆变”指它的指标 (index) μ 写在右上角
- 受到 $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 的启发，定义 Lorentz 不变的内积

$$x^2 \equiv x \cdot x \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$$

Hermann Minkowski
(1864–1909)

Minkowski 度规

- 引入对称的 **Minkowski 度规** (metric) $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
- 将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号，空白的矩阵元是零
- 也就是说，$g_{00} = +1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$，其它分量都是 0

Minkowski 度规

- 引入**对称**的 **Minkowski 度规** (metric) $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
- 将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作矩阵的行列编号，空白的矩阵元是零
- 也就是说，$g_{00} = +1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$，其它分量都是 0
- 利用度规把**内积** x^2 化为求和式，

$$x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

- 第二步采用了 **Einstein 求和约定**：**不写出求和符号**，**重复的指标**即表示**求和**
- 除非特别指出，后面默认使用这个约定
- 在上面的表达式中，用同个字母表示的指标分别在上标和下标重复出现并求和，这称为**缩并** (contraction)，是 Lorentz 不变量的特点

协变矢量

🔗 为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})$$

🪝 “协变”指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

⛓ 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 看成用**度规**缩并，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

协变矢量

为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x})$$

“协变”指的是指标 μ 写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 看成用**度规**缩并，使**逆变矢量** x^ν 的**指标降下来**，变成**协变矢量** x_μ

Leopold Kronecker
(1823–1891)

从方阵的角度看，**度规** $g_{\mu\nu}$ 的**逆**（矩阵）为 $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ 对应于 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$

这里 **Kronecker δ 符号**定义为 $\delta^a{}_b = \delta_a{}^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$

升降指标

- **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有**相同**的矩阵形式
- 但**更一般的度规**可能与它的逆不同
- 将 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu} x_\mu = g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

- 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将**协变矢量** x_μ 的**指标升起来**，变成**逆变矢量** x^σ
- 可见，逆变矢量与协变矢量**一一对应**，是对同一个 Lorentz 矢量的两种**等价**描述

升降指标

- Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有相同的矩阵形式
- 但更一般的度规可能与它的逆不同
- 将 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

- 这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将协变矢量 x_μ 的指标升起来，变成逆变矢量 x^σ
- 可见，逆变矢量与协变矢量一一对应，是对同一个 Lorentz 矢量的两种等价描述
- 利用 Kronecker 符号的定义、$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ 和度规的对称性，推出

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma} \\ g_{\mu\nu} &= g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

- 这两条式子表明，度规也可以用来对度规自身的指标进行升降

Lorentz 增速变换的矩阵形式

将 **Lorentz 增速变换** $t' = \gamma(t-\beta x)$，$x' = \gamma(x-\beta t)$，$y' = y$，$z' = z$ 表达成矩阵与列矢量的乘积形式，

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

用**四维矢量**记号改写为

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 视作矩阵时，**偏左**的指标 μ 表示**行**的编号，**偏右**的指标 ν 表示**列**的编号

$\Lambda^\mu{}_\nu$ 的特点是**保持内积 $x^2 = x^\mu x_\mu$ 不变**，使 $x^\mu x_\mu$ 在不同惯性系中具有**相同**的值

Lorentz 变换

- 进一步将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 推广为**所有保持 $x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换**，称为**（齐次）Lorentz 变换**
- 由于 $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$
- 要得到 $x'^2 = x^2$，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

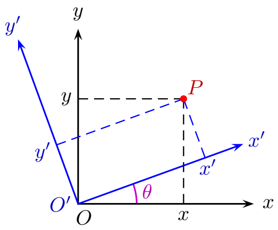
Lorentz 变换

- 进一步将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 推广为**所有保持 $x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换**，称为**（齐次）Lorentz 变换**
- 由于 $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$ 和 $x^2 = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$
- 要得到 $x'^2 = x^2$，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$
- 由于 $x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$，**保持 $|\mathbf{x}|^2$ 不变**的**空间旋转变换**也属于 Lorentz 变换
- 设惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角，则事件 P 在两系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z$$

- 因而相应的 Lorentz 变换矩阵为

$$[R_z(\theta)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



- 可以验证它满足**保度规条件**

Lorentz 逆变换

- $\delta^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是**单位矩阵 1**，是一个特殊的 Lorentz 变换
- 它使得 $x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$，即 x^μ 在这个变换下不变，可见 $\delta^\mu{}_\nu$ 是**恒等变换**
- 对于任意 **Lorentz 变换** $\Lambda^\alpha{}_\beta$，引入

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta$$

- 那么，由**保度规条件**得

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

- 上式表明，先作 Λ 变换，再作 Λ^{-1} 变换，相当于作**恒等变换**
- 也就是说，Λ^{-1} 是 Λ 的**逆变换**，因而也是一个 Lorentz 变换
- 在这些记号下，**协变矢量** x_μ 的 Lorentz 变换可以表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$$

保度规条件的等价形式

- Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$
- 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}g^{\mu\gamma}g_{\rho\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}g^{\nu\phi}g_{\sigma\tau}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\tau}\delta^{\gamma}{}_{\nu}g^{\nu\phi}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} = g^{\nu\phi}\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda^{\beta}{}_{\phi} \end{aligned}$$

- 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g^{\alpha\beta}$$

保度规条件的等价形式

- Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件** $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$
- 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\nu}g^{\mu\gamma}g_{\rho\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}g^{\nu\phi}g_{\sigma\tau}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\tau}\delta^{\gamma}{}_{\nu}g^{\nu\phi}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}\Lambda^{\tau}{}_{\phi} = g^{\nu\phi}\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda^{\beta}{}_{\phi} \end{aligned}$$

- 这给出了**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ 的**等价形式**

$$g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g^{\alpha\beta}$$

- 将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 视作矩阵 Λ，则其**转置矩阵** Λ^{T} 的分量满足 $(\Lambda^{\mathrm{T}})_{\nu}{}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$
- 保度规条件化为 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = (\Lambda^{\mathrm{T}})_{\alpha}{}^{\mu}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$，于是**重复**的**相邻指标**发生**缩并**，对应于**矩阵乘法**
- 用 $\mathbf{g}$ 代表**度规矩阵**，将**保度规条件**写成**矩阵等式**

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\Lambda = \mathbf{g}$$

时空体积元

- 对保度规条件 $\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\Lambda = \mathbf{g}$ 取行列式，得

$$\det(\mathbf{g}) = \det(\Lambda^{\mathrm{T}})\det(\mathbf{g})\det(\Lambda) = \det(\mathbf{g})[\det(\Lambda)]^2$$

- 因此 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1$$

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

- Lorentz 坐标变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ 的 **Jacobi 行列式**是

$$\mathcal{J} = \det\left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right] = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \det(\Lambda)$$

- 于是 Lorentz 变换将体积元 d^4x 变换为

$$\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\mathrm{d}^4x = |\det(\Lambda)|\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x$$

- 可见，**Minkowski 时空**的**体积元** d^4x 是 **Lorentz 不变**的

Lorentz 变换分类

- 可以用 $\det(\Lambda)$ 的值给 Lorentz 变换**分类**
- $\det(\Lambda) = +1$ 的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换
- $\det(\Lambda) = -1$ 的变换称为**非固有** (improper) Lorentz 变换
- 此外，由**保度规条件** $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ 得

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \sum_i (\Lambda^{i}{}_{0})^2$$

- 即 $(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^{i}{}_{0})^2 \geq 1$，故 $\Lambda^{0}{}_{0} \geq +1$ 或 $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$
- $\Lambda^{0}{}_{0} \geq +1$ 的变换称为**保时向** (orthochronous) Lorentz 变换
- $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$ 的变换称为**反时向** (antichronous) Lorentz 变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0}{}_{0} & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

群

- 在数学上，对称性由**群论**描述，对称变换的集合称为**群** (group)
- 群元素具有**乘法**，两个群元素的**乘积**就是两次对称变换**相继作用**，满足以下条件

1. 群对乘积具有**封闭性**，即群 G 中任意两个群元 g_1 和 g_2 的乘积仍属于此群

$$g_1 g_2 \in G, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

2. 群乘法满足**结合律**

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

3. 群 G 中必有一个**恒元** e，对应于恒等变换，它与任一群元 g 的乘积仍为 g

$$eg = ge = g, \quad \forall g \in G$$

4. 任一群元 g 都可以在群 G 中找到一个**逆元** g^{-1}，它对应于逆变换，两者之积为恒元，

$$\forall g \in G, \quad \exists g^{-1} \in G, \quad 使得\ g^{-1} g = g g^{-1} = e$$

更多群论概念

- 在**线性代数**中，矩阵具有乘法
- 可逆方阵能够依照自身乘法关系构成群，即**矩阵群**
- 群乘法讲究运算次序，g_1g_2 不一定等于 g_2g_1，也就是说，**交换律**不一定成立
- 满足交换律的群称为 **Abel 群**
- 不满足交换律的群称为**非 Abel 群**
- 如果群 G 的子集 H 中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称 H 是 G 的**子群** (subgroup)，记作 $H < G$

Niels Henrik Abel
(1802–1829)

$\mathrm{O}(N)$ 群和 $\mathrm{SO}(N)$ 群

- 满足 $O^{\mathrm{T}}O = OO^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$ 的实方阵 O 称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)
- 所有 N 阶实正交矩阵 $\{O\}$ 构成**正交群** $\mathrm{O}(N)$
- 对 $\mathbf{1} = O^{\mathrm{T}}O$ 取行列式，得 $1 = \det(O^{\mathrm{T}})\det(O) = [\det(O)]^2$
- 可见，实正交矩阵 O 的行列式为 $\det(O) = \pm 1$
- 由 $\det(O) = 1$ 的 N 阶实正交矩阵 O 构成的群称为**特殊正交群** $\mathrm{SO}(N)$
- 显然，$\mathrm{SO}(N) < \mathrm{O}(N)$
- 非 Abel 群 $\mathrm{SO}(3)$ 描述三维空间中的所有旋转变换，称为**空间旋转群**
- Abel 群 $\mathrm{SO}(2)$ 描述二维平面上的所有旋转变换，或者说，描述绕某条固定轴的旋转变换，如 $R_z(\theta)$，因而 $\mathrm{SO}(2) < \mathrm{SO}(3)$

U(N) 群和 SU(N) 群

- 满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ 的复方阵 U 称为**幺正矩阵** (unitary matrix)
- 所有 N 阶幺正矩阵 $\{U\}$ 构成**幺正群** $\mathrm{U}(N)$
- 对 $\mathbf{1} = U^\dagger U$ 取行列式，得 $1 = \det(U^\dagger)\det(U) = [\det(U)]^* \det(U) = |\det(U)|^2$
- 可见，幺正矩阵 U 的行列式满足 $|\det(U)| = 1$
- 由 $\det(U) = 1$ 的 N 阶幺正矩阵 U 构成的群称为**特殊幺正群** $\mathrm{SU}(N)$
- 显然，$\mathrm{SU}(N) < \mathrm{U}(N)$

Lorentz 群

所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群

保度规条件 $\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\Lambda = \mathbf{g}$ 是正交条件 $O^{\mathrm{T}}\mathbf{1}O = \mathbf{1}$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $\mathrm{O}(1,3)$

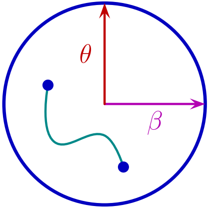
$\mathrm{O}(3)$ **群**对应于 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $\mathrm{O}(3) < \mathrm{O}(1,3)$

所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}(1,3)$

显然 $\mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$

Lorentz 群

- 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群
- **保度规条件** $\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\Lambda = \mathbf{g}$ 是正交条件 $O^{\mathrm{T}}\mathbf{1}O = \mathbf{1}$ 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $\mathrm{O}(1,3)$
- $\mathrm{O}(3)$ **群**对应于 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的**纯空间部分**，因而 $\mathrm{O}(3) < \mathrm{O}(1,3)$
- 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}(1,3)$
- 显然 $\mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$
- Lorentz 变换可用一组连续变化的参数 (如 β、θ 等) 描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数变化区域称为**群空间**
- 群空间中的一个**点**就是一个**群元**
- 如果群空间中任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通**的，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**

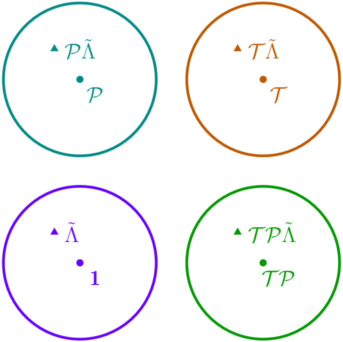


Lorentz 群的连通分支

Lorentz 群是个混合连续群，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支

非固有保时向分支
$\det(\Lambda) = -1$
${\Lambda^0}_0 \geq +1$

非固有反时向分支
$\det(\Lambda) = -1$
${\Lambda^0}_0 \leq -1$



固有保时向分支
（固有保时向 Lorentz 群）
$\det(\Lambda) = +1$
${\Lambda^0}_0 \geq +1$

固有反时向分支
$\det(\Lambda) = +1$
${\Lambda^0}_0 \leq -1$

恒元在固有保时向分支里面，这个分支是 $\mathrm{SO}(1,3)$ 的子群，称为固有保时向 Lorentz 群，记作 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$，它包含物理上联系惯性参考系的所有 Lorentz 变换

Lorentz 不变量通常指的是在固有保时向 Lorentz 变换下不变的量

$\mathrm{SO}(2) < \mathrm{SO}(3) < \mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3) < \mathrm{SO}(1,3) < \mathrm{O}(1,3)$

宇称变换和时间反演变换

- 🐘 定义**宇称** (parity) 变换为 $\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
- 🦏 它是一个**非固有保时向** Lorentz 变换，亦称为**空间反射**(space inversion) 变换
- 🦛 宇称变换的作用是让**所有空间分量反向**
- 🦣 定义**时间反演** (time reversal) 变换为 $\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{T}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$
- 🦬 它是一个**非固有反时向** Lorentz 变换，作用是让**时间分量反向**
- 🐄 对于**固有保时向 Lorentz 群**中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$，乘上宇称变换或（和）时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$、$\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支

1.4 节　Lorentz 矢量

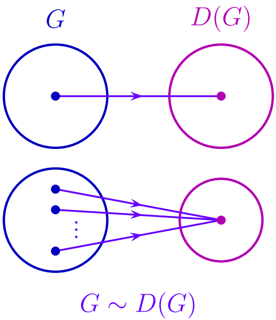
🌱 如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G

👉 这些矩阵构成群 G 的一个 m 维线性表示 (linear representation) $D(G)$

☘️ $D(G)$ 中的一个矩阵至少应该对应于 G 中的一个群元，可以对应于 G 中的多个群元，数学上称 G 与 $D(G)$ 同态 (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$

☘️ 具体来说，对于群 G 中任意群元 g_1 和 g_2，表示 $D(G)$ 中相应表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$ 满足同态关系

$$D(g_2 g_1) = D(g_2)D(g_1)$$



🌿 利用群的线性表示，可以将对称变换视作矩阵，将变换作用的态视作列矢量

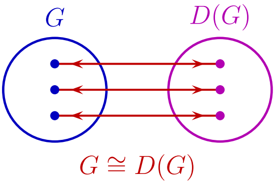
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & D(g) & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

群的特殊表示

取群中所有元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的恒等表示，也称为平庸表示

如果群 G 中的每个群元一一对应于表示 $D(G)$ 中每个矩阵，则 G 与 $D(G)$ 同构 (isomorphism)，记作 $G \cong D(G)$

此时称 $D(G)$ 是 G 的忠实表示 (faithful representation)



如果 $D(G)$ 中所有矩阵都是幺正的，则称 $D(G)$ 是幺正表示

矩阵群本身就是自己的一个表示，称为自身表示，也称为基础表示

等价表示和可约表示

如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

等价表示和可约表示

- 如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1}D_1(g)S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

- 如果每个表示矩阵 $D(g)$ 都可以通过同一个相似变换化为相同形式的阶梯矩阵，

$$S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G,$$

其中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 是方阵，$M(g)$ 可以是零矩阵，则称 $D(G)$ 是可约表示，否则称 $D(G)$ 为不可约表示 (irreducible representation)

- 可以证明，集合 $\{D_1(g)\}$ 和 $\{D_2(g)\}$ 分别构成群 G 的线性表示
- 可约表示能够通过不可约表示构造出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的不等价不可约表示

Lorentz 矢量

- 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$，可见 $\{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 **4 维线性表示**，即**基础表示**
- 它是一个**不可约忠实表示**，称为**矢量表示**
- 因此，**Lorentz 矢量** x^{ν} 可以看作 **Lorentz 变换** $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 所作用的**态**

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentz 矢量

🌴 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$，可见 $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 **4 维线性表示**，即**基础表示**

🌷 它是一个**不可约忠实表示**，称为**矢量表示**

🌸 因此，**Lorentz 矢量** x^ν 可以看作 **Lorentz 变换** $\Lambda^\mu{}_\nu$ 所作用的**态**

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad 👉 \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

🚗 一般地，**Lorentz 矢量** A^μ 在定义上要求它在**固有保时向** Lorentz 变换下满足

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

🚙 类似于 $x'_\mu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$，逆变矢量 A^μ 对应的协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$A'_\mu = A_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

Lorentz 矢量的内积

- 任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

- 由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

- 像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

Lorentz 矢量的内积

- 任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的**内积**定义为

$$A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

- 由 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

- 像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)
- 由于度规的对角元有正有负，Lorentz 矢量 A^μ 的自我内积 $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$ 的符号不是确定的，可以分为三类

1. 若 $A^2 > 0$，即 $|A^0| > |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类时** (timelike) 矢量
2. 若 $A^2 < 0$，即 $|A^0| < |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类空** (spacelike) 矢量
3. 若 $A^2 = 0$，即 $|A^0| = |\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类光** (lightlike) 矢量

- 由于 A^2 是 Lorentz 不变量，**不能**通过 Lorentz 变换改变 A^μ 的类型

极矢量和轴矢量

- 以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量
- 第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu},$$

- 经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量
- 极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$，$x^{\mu}$ 就是一个极矢量
- 另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu},$$

- 轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

极矢量和轴矢量

- 以上讨论的是**广义**的 Lorentz 矢量，可以通过**宇称变换**性质将它们分为两种矢量
- 第一种矢量称为**极矢量** (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu},$$

- 经常将极矢量简称为**矢量**，即**狭义**的矢量
- 极矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$，$x^{\mu}$ 就是一个极矢量
- 另一种矢量称为**赝矢量**，或者**轴矢量** (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu},$$

- 轴矢量空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$
- 在**经典力学**中，空间坐标 $\mathbf{x}$ 和动量 $\mathbf{p}$ 都是极矢量，而角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 是轴矢量
- 在**空间反射变换**下，$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$，$\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$，$\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{p}' = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$，与以上定义一致

四维动量

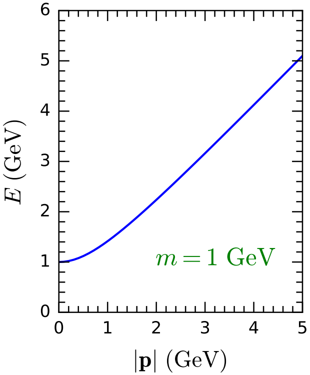
在狭义相对论中，质点的能量 E、动量 $\mathbf{p}$ 和 (静止) 质量 m 具有色散关系 (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

可以用 E 和 $\mathbf{p}$ 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

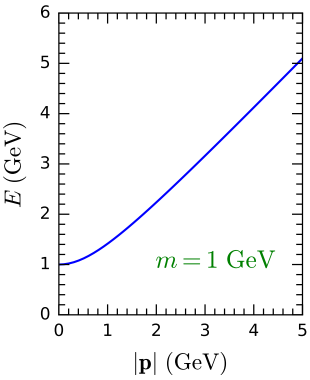
称为四维动量，是一个极矢量



四维动量

在狭义相对论中，质点的能量 E、动量 $\mathbf{p}$ 和 (静止) 质量 m 具有色散关系 (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$



可以用 E 和 $\mathbf{p}$ 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

称为四维动量，是一个极矢量

四维动量的自我内积为

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

这是合理的，因为质量 m 在狭义相对论中是一个 Lorentz 不变量

p^μ 在 $m > 0$ 时是类时矢量，在 $m = 0$ 时是类光矢量

$p^2 = m^2$ 称为质壳 (mass shell) 条件，对应于四维动量空间中由质量 m 决定的三维双曲面（质壳）

时空导数

- 将**对时空坐标的偏导数**记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

- 那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

- 上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数**指标位置的写法是合理的

时空导数

- 将**对时空坐标的偏导数**记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

- 那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

- 上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数**指标位置的写法是合理的
- 对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$
- 两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho\delta^\rho{}_\nu$，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$
- 故 $\partial'^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x'_\mu} = \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu$

时空导数

将**对时空坐标的偏导数**记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数**指标位置的写法是合理的

对时空坐标作 **Lorentz 变换** $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$

两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho\delta^\rho{}_\nu$，即 $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$

故 $\partial'^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x'_\mu} = \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu$

这是时空导数 ∂^μ 的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同

因而可以将 ∂^μ 看作一个 **Lorentz 矢量**

相应地，∂_μ 的 Lorentz 变换是 $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu$

d'Alembert 算符

定义 **d'Alembert 算符**

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$

由**保度规条件**得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu}\partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma}\partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

可见，∂^2 算符是 **Lorentz 不变**的

Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

d'Alembert 算符

定义 **d'Alembert 算符**

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$

由**保度规条件**得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu}\partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma}\partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

Jean le Rond d'Alembert
(1717–1783)

可见，∂^2 算符是 **Lorentz 不变**的

用它把 **Klein-Gordon 方程** $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ 改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2)\Psi(x) = 0$$

其中 x 表示四维时空坐标

$\partial^2 + m^2$ 是 **Lorentz 不变**的，因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有**相同**的形式，即具有 **Lorentz 协变性** (covariance)

1.5 节 Lorentz 张量

⚓ Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

🚢 一个 $p+q$ **阶**的 (p,q) **型 Lorentz 张量** $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 具有 p **个逆变指标**和 q **个协变指标**，并满足如下**固有保时向** Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}$$

🚢 这里的**逆变指标**和**协变指标**统称为 **Lorentz 指标**

🚢 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 **Lorentz 协变性**，在不同惯性系中具有**相同**的形式

1.5 节 Lorentz 张量

- Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

- 一个 $p+q$ 阶的 (p,q) 型 **Lorentz 张量** $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}$$

- 这里的逆变指标和协变指标统称为 **Lorentz 指标**

- 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 **Lorentz 协变性**，在不同惯性系中具有相同的形式

- **Lorentz 标量**是 0 阶 Lorentz 张量，不具有 Lorentz 指标

- **Lorentz 矢量**是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标

- **Minkowski 度规** $g_{\mu\nu}$ 是一个 2 阶的 $(0,2)$ 型 Lorentz 张量，不过，它是常数，在任何惯性系中不变，Lorentz 变换规则就是保度规条件 $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$

指标的升降和缩并

- 用**度规**可以**升降**任意 Lorentz 张量的**指标**，从而**改变**张量的**类型**
- 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是**等价**的
- 比如，$T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2,1)$ **型**张量 $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$
- 相应地，$T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2,1)$ **型**张量 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ 升为 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\rho}$

指标的升降和缩并

- 用**度规**可以**升降**任意 Lorentz 张量的**指标**，从而**改变**张量的**类型**
- 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是**等价**的
- 比如，$T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g_{\rho\sigma}T^{\mu\nu\sigma}$，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2,1)$ **型**张量 $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$
- 相应地，$T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma}T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2,1)$ **型**张量 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ 升为 $(3,0)$ **型**张量 $T^{\mu\nu\rho}$
- 对 (p,q) **型** Lorentz 张量的一个**逆变指标**和一个**协变指标**进行**缩并**，会得到一个 $(p-1,q-1)$ **型** Lorentz 张量，例如，

$$T'^{\mu\nu}{}_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\delta^{\gamma}{}_{\alpha} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta}{}_{\alpha}$$

- 可见，$T^{\mu\nu}{}_{\mu}$ 是一个 **Lorentz 矢量**
- 可以通过**缩并**若干个 Lorentz 张量的所有指标来构造 **Lorentz 不变量**
- 这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的 Λ **因子**和 Λ^{-1} **因子**总是**相互抵消**；比如，以下表达式都是 **Lorentz 标量**：

$$T^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu}A_{\mu}B_{\nu}, \quad T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}{}_{\rho}T^{\sigma\rho}{}_{\nu}$$

狭义张量和赝张量

- 类似于 Lorentz 矢量，按**宇称变换**性质将 Lorentz 张量分成两种
- 第一种张量是**狭义**的**张量**，宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q},$$

- 另一种张量称为**赝张量** (pseudotensor)，宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q},$$

- 因此，在宇称变换下，**狭义**的**标量** ϕ 满足 $\phi' = \phi$
- 而**赝标量** (pseudoscalar) φ 满足 $\varphi' = -\varphi$

四维 Levi-Civita 符号

引入**四维 Levi-Civita 符号**

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换 (如 } \varepsilon^{1032}) \\ -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换 (如 } \varepsilon^{1023}) \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

这里的**置换** (permutation) 指的是将指标重新排列

调换两个指标的位置称为**对换**

奇置换通过**奇数次对换**得到，**偶置换**通过**偶数次对换**得到

这样定义出来的 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是**全反对称**的，即关于任意两个指标反对称，如

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$$

Tullio Levi-Civita
(1873–1941)

协变的四维 Levi-Civita 符号

- $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的协变形式为 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 也是全反对称的，如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}(-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

- 根据这些定义，

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

- 而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\ \text{是}\ (0,1,2,3)\ \text{的偶置换} \\ +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\ \text{是}\ (0,1,2,3)\ \text{的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

- 从而

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4!$$

Levi-Civita 符号与行列式

- 利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照**行列式定义**写成

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta \Lambda^2{}_\gamma \Lambda^3{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\begin{vmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit \\ \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit \end{vmatrix}$$

	$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
$\spadesuit$	$(0,1,2,3)$	$+$
$\heartsuit$	$(1,2,3,0)$	$-$
$\clubsuit$	$(2,3,0,1)$	$+$
$\diamondsuit$	$(3,0,1,2)$	$-$

Levi-Civita 符号与行列式

- 利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照**行列式定义**写成

$$\begin{aligned}\det(\Lambda) &= \Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit \\ \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit \end{vmatrix}$$

	$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
$\spadesuit$	$(0,1,2,3)$	$+$
$\heartsuit$	$(1,2,3,0)$	$-$
$\clubsuit$	$(2,3,0,1)$	$+$
$\diamondsuit$	$(3,0,1,2)$	$-$

- 于是

$$\begin{aligned}\varepsilon^{0123} &= 1 = [\det(\Lambda)]^2 \\ &= \det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

- 利用 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性质得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1023} &= -\varepsilon^{0123} = -\det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\end{aligned}$$

- 依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

四维和三维 Levi-Civita 符号

- 对于**固有保时向 Lorentz 变换**，$\det(\Lambda) = +1$，则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- 对于**宇称变换**，$\det(\mathcal{P}) = -1$，则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\alpha}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\beta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- 可见，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个 **4 阶 Lorentz 赝张量**
- 不过，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是**常数**，在任何惯性系中**不变**

四维和三维 Levi-Civita 符号

- 对于**固有保时向 Lorentz 变换**，$\det(\Lambda)=+1$，则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- 对于**宇称变换**，$\det(\mathcal{P})=-1$，则 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-\mathcal{P}^{\mu}{}_{\alpha}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\beta}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\gamma}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- 可见，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个 **4 阶 Lorentz 赝张量**
- 不过，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是**常数**，在任何惯性系中**不变**
- **三维 Levi-Civita 符号**定义为

$$\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}+1, & (i,j,k)\text{ 是 }(1,2,3)\text{ 的偶置换}\\ -1, & (i,j,k)\text{ 是 }(1,2,3)\text{ 的奇置换}\\ 0, & \text{其它情况}\end{cases}$$

- 满足

$$\varepsilon^{ijk}=\varepsilon^{0ijk},\quad \varepsilon^{123}=+1$$

- 通常用 i,j,k 等**拉丁字母**代表**三维空间指标**
- 而用 μ,ν,ρ 等**希腊字母**代表**四维时空指标**

三维 Levi-Civita 符号求和关系

- ε^{ijk} 关于三个空间指标是**全反对称**的
- 有 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i23} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} = 1$ 和 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i32} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{132} = -1$
- 依此类推，归纳出求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$$

- 根据 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij3} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{213} = 2$ 和 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij1} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{121} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{211} = 0$
- 归纳出另一条求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$$

四维电流密度和四维矢势

- 接下来讨论真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式
- 电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 组成一个 Lorentz 矢量 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$，称为四维电流密度
- 将电流连续性方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ 写成 Lorentz 协变形式

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

- 用电势 Φ 和矢势 $\mathbf{A}$ 将电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 表达为

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$$

James Clerk Maxwell
(1831–1879)

- Φ 和 $\mathbf{A}$ 组成 Lorentz 矢量 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$，称为四维矢势，则上式的分量形式为

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k, \quad i,j,k = 1,2,3$$

场强张量

引入电磁场的场强张量 (field strength tensor)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$$

它是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量

由于两个时空导数的次序可以交换，从上述定义推出

$$\begin{aligned}
\partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= \partial^\mu\partial^\rho A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu A^\rho + \partial^\nu\partial^\mu A^\rho - \partial^\nu\partial^\rho A^\mu \\
&= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu}
\end{aligned}$$

Luigi Bianchi
(1856–1928)

即 **Bianchi 恒等式**

$$\boxed{\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0}$$

场强张量的分量

- $F^{\mu\nu}$ 的 $0i$ **分量**为 $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i$
- 可见，F^{0i} 对应于**电场强度**
- 由求和式 $\varepsilon^{jki}\varepsilon^{imn} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$ 得到

$$\varepsilon^{ijk}B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m A^n = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i$$

- 从而 $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk}B^k$
- 故 $F^{\mu\nu}$ 的 ij **分量**对应于**磁感应强度**
- 把 $F^{\mu\nu}$ 写成**矩阵形式**是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss 定律和 Ampère 环路定律

- **Gauss 定律**对应的方程 $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho$ 等价于

$$J^0=\rho=\partial_i E^i=-\partial_i F^{0i}=\partial_i F^{i0}=\partial_i F^{i0}+\partial_0 F^{00}=\partial_\mu F^{\mu 0}$$

- **Ampère 环路定律**对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k-\partial_0 E^i=-\partial_j F^{ij}+\partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji}+\partial_0 F^{0i}=\partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

- 归纳起来，有

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu}$$

- 这个方程完全是用 Lorentz 张量写的，具有 **Lorentz 协变性**
- 因而它在不同惯性系中具有**相同**形式，满足**狭义相对性原理**

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

André-Marie Ampère
(1775–1836)

Gauss 磁定律

由 $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{ijl} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$ 得 $\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$，即

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$$

Gauss 磁定律对应的方程 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ 等价于

$$0 = \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki}\partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij}\partial_k F^{ij})$$
$$= -\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}(\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij})$$

第三步通过**更换指标字母**写出三个相等的项

毕竟，对于参与**缩并**或**求和**的指标，更换指标字母**不会影响结果**

上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0$$

这是 **Bianchi 恒等式**取**纯空间分量**的形式

Faraday 电磁感应定律

- **Faraday 电磁感应定律**对应的 Maxwell-Faraday 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- 写成分量的形式，得

$$-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn}\partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0}$$

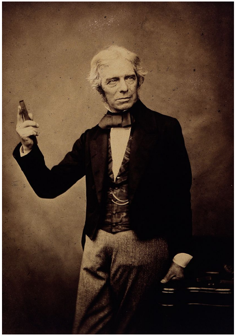
- 从 $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$ 推出

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{ij} &= -\varepsilon^{ijk}\partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0} \\ &= (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m F^{n0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0}\end{aligned}$$

- 即

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0$$

- 这也是 **Bianchi 恒等式**取**特定分量**的形式



Michael Faraday
(1791–1867)

对偶场强张量

利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (duel field strength tensor)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}$$

它是一个 **2 阶反对称 Lorentz 赝张量**，$\tilde{F}^{0i}$ 对应于**磁感应强度**：

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{0i\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{0ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}g_{j\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}g_{jm}g_{kn}F^{mn}\\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^{l} = -\frac{1}{2}\,2\delta^{il}B^{l} = -B^{i}\end{aligned}$$

第五步利用了 $g_{jm}F^{mn} = -\delta^{jm}F^{mn} = -F^{jn}$，倒数第二步用到**求和关系**

另一方面，$\tilde{F}^{ij}$ 对应于**电场强度**：

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk}F_{0k} = \varepsilon^{ijk}g_{0\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu}\\ &= \varepsilon^{ijk}g_{00}g_{kl}F^{0l} = -\varepsilon^{ijk}F^{0k} = \varepsilon^{ijk}E^{k}\end{aligned}$$

对偶场强张量与 Bianchi 恒等式

- 对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的**矩阵形式**是 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$

- 由 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义有

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{1}{6}(\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu}\partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho}\partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\
&= -\frac{1}{6}\,\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}(\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho})
\end{aligned}$$

- 因此 **Bianchi 恒等式** $\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$ 等价于

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

- 从这些讨论可以看到，用 **Lorentz 张量语言**表达 **Maxwell 方程组**是十分简单的，而且方程的 **Lorentz 协变性**非常明确