

手征性与螺旋度
○○○○○○○

$e^- \mu^-$ 散射
○○○○○○○

$e^- p$ 散射
○○○○○○○

Coulomb 势能
○○○○○○○

Yukawa 势能
○○○○○

交叉对称性
○○○○○○○

Mandelstam 变量
○○○○○○○○○○

量子场论

第 8 章 量子电动力学

8.3 节至 8.5 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2023 年 1 月 2 日



8.3 节 手征性与螺旋度

 本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

 在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

 它们是**厄米**的, 而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, **正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$, 由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

8.3 节 手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R ,

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的, 而且具有**投影性** $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, **正交性** $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 和**完备性** $P_L + P_R = 1$, 由 $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ 得 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

将 **Dirac 旋量场** ψ 分解为**左手 Weyl 旋量场** η_L 和**右手 Weyl 旋量场** η_R

左手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_L \equiv P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_L \\ 0 \end{pmatrix}$

右手的四分量**旋量场**定义为 $\psi_R \equiv P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_R \end{pmatrix}$

可见, 左右手投影矩阵正好挑选出具有**相应手征性**的分量

左右手投影分解

 将 $1 \pm \gamma^5$ 的简化地写成 $1 \pm \gamma^5$ ，左手旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

 同理得右手旋量场 ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

左右手投影分解

将 $1 \pm \gamma^5$ 的简化地写成 $1 \pm \gamma^5$, 左手旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} [(1 - \gamma^5) \psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) = \bar{\psi} P_R$$

同理得右手旋量场 ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$

对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解, 得

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (P_L + P_R) \psi = \bar{\psi} (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi + \bar{\psi} P_L \gamma^\mu P_R \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_R$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \psi_R$$

包含偶数(奇数)个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反(相同)的旋量场

拉氏量中的 Dirac 旋量场质量项分解为 $-m \bar{\psi} \psi = -m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$

也就是说, 质量 m 将左手旋量场 ψ_L 与右手旋量场 ψ_R 耦合起来

高能极限

↖ 在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

↗ 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$, $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

↖ 按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

高能极限

在高能极限下，忽略旋量场的质量 m ，则 $E_p \simeq |\mathbf{p}|$

故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_p}$, $\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|} \simeq 0$

按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

此时，螺旋度不同的 u 和 v 显示出不同手征性

$u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的， $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的

可见，高能极限下手征性等价于螺旋度

注意， $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与螺旋度为 λ 的正费米子相关

$v(\mathbf{p}, \lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与螺旋度为 λ 的反费米子相关

旋量系数的左右手投影



由于高能极限下 $u(\mathbf{p}, -)$ 和 $v(\mathbf{p}, +)$ 是左手的, $u(\mathbf{p}, +)$ 和 $v(\mathbf{p}, -)$ 是右手的



用投影矩阵作用, 得

$$u_L(\mathbf{p}, -) = P_L u(\mathbf{p}, -) \simeq u(\mathbf{p}, -), \quad u_R(\mathbf{p}, +) = P_R u(\mathbf{p}, +) \simeq u(\mathbf{p}, +)$$

$$u_L(\mathbf{p}, +) = P_L u(\mathbf{p}, +) \simeq 0, \quad u_R(\mathbf{p}, -) = P_R u(\mathbf{p}, -) \simeq 0$$

$$v_L(\mathbf{p}, +) = P_L v(\mathbf{p}, +) \simeq v(\mathbf{p}, +), \quad v_R(\mathbf{p}, -) = P_R v(\mathbf{p}, -) \simeq v(\mathbf{p}, -)$$

$$v_L(\mathbf{p}, -) = P_L v(\mathbf{p}, -) \simeq 0, \quad v_R(\mathbf{p}, +) = P_R v(\mathbf{p}, +) \simeq 0$$



相应的 Dirac 共轭满足

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq \bar{u}(\mathbf{p}, -), \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq u(\mathbf{p}, +)$$

$$\bar{u}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{u}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq 0, \quad \bar{u}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{u}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq 0$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_R \simeq v(\mathbf{p}, +), \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_L \simeq v(\mathbf{p}, -)$$

$$\bar{v}_L(\mathbf{p}, -) = \bar{v}(\mathbf{p}, -) P_R \simeq 0, \quad \bar{v}_R(\mathbf{p}, +) = \bar{v}(\mathbf{p}, +) P_L \simeq 0$$

高能极限下的手征旋量场

将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 平面波解上，得到**手征旋量场**的平面波解

$$\psi_L(x) = P_L \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

$$\psi_R(x) = P_R \psi(x) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[u(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} \right]$$

17 相应的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_L(x) = [\psi_L(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p}, -}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, +) b_{\mathbf{p}, +} e^{-ip \cdot x} \right]$$

$$\bar{\psi}_R(x) = [\psi_R(x)]^\dagger \gamma^0 \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}(\mathbf{p}, +) a_{\mathbf{p}, +}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, -) b_{\mathbf{p}, -} e^{-ip \cdot x} \right]$$

在高能极限下，忽略质量

左手旋量场 $\psi_L(x)$ 描述**左旋极化的正费米子**和**右旋极化的反费米子**

右手旋量场 $\psi_R(x)$ 描述**右旋极化的正费米子**和**左旋极化的反费米子**

$\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 成为两个**相互独立**的场

旋量系数的左右手投影

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

旋量系数的左右手投影

 在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -)u(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, -)P_R P_L u(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, +)u(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{u}(\mathbf{q}, +)P_L P_R u(\mathbf{p}, +) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, -)v(\mathbf{p}, -) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, -)P_L P_R v(\mathbf{p}, -) = 0$$

$$\bar{v}(\mathbf{q}, +)v(\mathbf{p}, +) \simeq \bar{v}(\mathbf{q}, +)P_R P_L v(\mathbf{p}, +) = 0$$

 此时两个旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$ 在旋量系数上的体现

 一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

旋量系数的左右手投影

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, -\lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho v(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$$

容易看出，在高能极限下，忽略质量，只有 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 且 $\lambda'_1 = -\lambda'_2$ 的螺旋度构型对 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 极化振幅

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = \frac{e^2}{E_{CM}^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$$

的贡献非零，与上一小节的计算结果一致

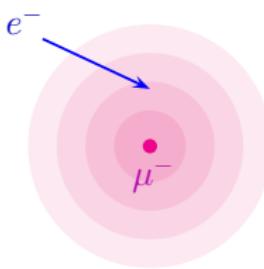
如果忽略质量，则其它螺旋度构型的贡献正比于质量，表现出螺旋度压低效应

8.4 节 Coulomb 散射

8.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

现在讨论与 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程

这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射



Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

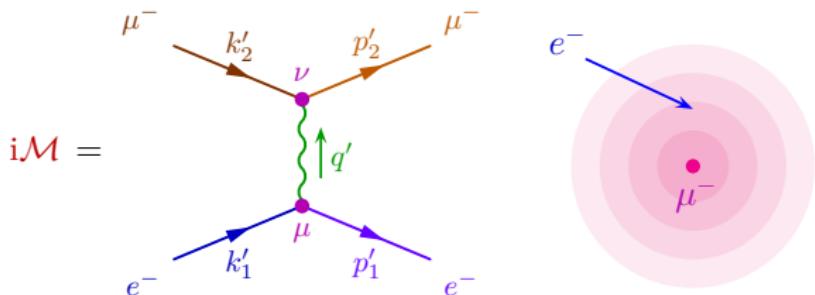
8.4 节 Coulomb 散射

8.4.1 小节 $e^- \mu^-$ 散射

💡 现在讨论与 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程

🏮 这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 Coulomb 散射

蠟烛 它的领头阶费曼图与 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 类似，但线的方向不同，相应的不变振幅为



$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(p'_1) (ie\gamma^\mu) u(k'_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q'^2} \bar{u}(p'_2) (ie\gamma^\nu) u(k'_2) \\ &= \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(k'_2) \end{aligned}$$



Charles-Augustin de Coulomb
(1736–1806)

蠟烛 这里将旋量系数 u 和 \bar{u} 简写成在壳四维动量的函数，且没有写出对螺旋度的依赖

💡 虚光子的四维动量 $q'^\mu = k'^\mu_1 - p'^\mu_1 = p'^\mu_2 - k'^\mu_2$

非极化振幅模方

$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2)$ 的复共轭是

$$(i\mathcal{M})^* = -\frac{ie^2}{q'^2} \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2)$$

非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu u(p'_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu u(p'_2) \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \sum_{\text{spins}} \text{tr}[u(p'_1)\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(k'_1) \bar{u}(k'_1)\gamma^\nu] \text{tr}[u(p'_2)\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(k'_2) \bar{u}(k'_2)\gamma_\nu] \\ &= \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu)\gamma_\nu] \end{aligned}$$

\sum_{spins} 表示对自旋求和，即对螺旋度求和

交叉对称性

比较 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 湮灭与 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射的非极化振幅模方：

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\nu]$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(q'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu) \gamma_\nu]$$

容易看出， $|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2$ 相当于对 $|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2$ 作动量替换

$$k_1^\mu \rightarrow k'_1{}^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p'_2{}^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$$

$\checkmark q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow q'^\mu = k'_1{}^\mu - p'_1{}^\mu$ ，这种关系称为交叉对称性 (crossing symmetry)

交叉对称性

比较 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 湮灭与 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射的非极化振幅模方：

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(\mathbf{q}^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\nu]$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2}{|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2} = \frac{e^4}{4(\mathbf{q}'^2)^2} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{k}'_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}'_2 + m_\mu) \gamma_\nu]$$

容易看出， $|\mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}|^2$ 相当于对 $|\mathcal{M}_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}|^2$ 作动量替换

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

勾 $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu \rightarrow q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu$ ，这种关系称为交叉对称性 (crossing symmetry)

通过这样的动量替换，从 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 的计算结果

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(\mathbf{q}^2)^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + 2m_e^2m_\mu^2]$$

直接得到 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 非极化振幅模方的表达式

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(\mathbf{q}'^2)^2} [(\not{k}'_1 \cdot \not{p}'_2)(\not{p}'_1 \cdot \not{k}'_2) + (\not{k}'_1 \cdot \not{k}'_2)(\not{p}'_1 \cdot \not{p}'_2) - m_e^2(\not{p}'_2 \cdot \not{k}'_2) - m_\mu^2(\not{k}'_1 \cdot \not{p}'_1) + 2m_e^2m_\mu^2]$$

质心系



在质心系中，根据 6.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子动量满足

$$|\mathbf{k}'_1| = |\mathbf{k}'_2| = |\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_e^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \equiv Q$$

也就是说，初末态四个粒子的动量大小都是 Q ，相应的能量是

$$k'^0_1 = p'^0_1 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_e, \quad k'^0_2 = p'^0_2 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_\mu$$

E_e 是初末态电子能量， E_μ 是初末态 μ 子能量

设散射角 θ 为 \mathbf{k}'_1 与 \mathbf{p}'_1 方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = k'^0_1 p'^0_1 - |\mathbf{k}'_1||\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e^2 - Q^2 \cos \theta$$

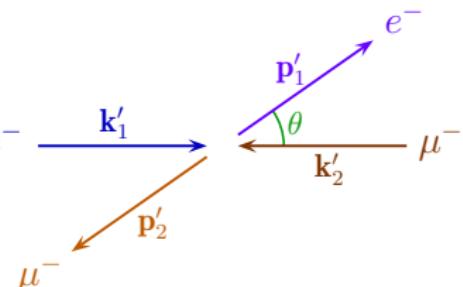
$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = k'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{k}'_1||\mathbf{p}'_2| \cos \theta = E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2 = k'^0_2 p'^0_2 - |\mathbf{k}'_2||\mathbf{p}'_2| \cos \theta = E_\mu^2 - Q^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}'_1 = k'^0_2 p'^0_1 + |\mathbf{k}'_2||\mathbf{p}'_1| \cos \theta = E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}'_2 = k'^0_1 k'^0_2 + |\mathbf{k}'_1||\mathbf{k}'_2| = E_e E_\mu + Q^2$$

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = p'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{p}'_1||\mathbf{p}'_2| = E_e E_\mu + Q^2$$



质心系中的非极化振幅模方

 虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2 k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

 对任意 $\theta > 0$ ，有 $q'^2 < 0$ ，即虚光子是类空的

质心系中的非极化振幅模方

虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^2 = (k'_1 - p'_1)^2 = 2m_e^2 - 2k'_1 \cdot p'_1 = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2 \cos \theta) = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

对任意 $\theta > 0$ ，有 $q'^2 < 0$ ，即虚光子是类空的

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1 - \cos \theta)^2} [(E_e E_\mu + Q^2 \cos \theta)^2 + (E_e E_\mu + Q^2)^2 \\ &\quad - m_e^2(E_\mu^2 - Q^2 \cos \theta) - m_\mu^2(E_e^2 - Q^2 \cos \theta) + 2m_e^2 m_\mu^2] \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1 - \cos \theta)^2} \{2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 + Q^4(1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad + Q^2[2E_e E_\mu(1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta]\} \end{aligned}$$

微分截面的入射流因子是

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = E_e E_\mu \left(\frac{Q}{E_e} + \frac{Q}{E_\mu} \right) = E_e E_\mu \frac{Q(E_\mu + E_e)}{E_e E_\mu} = QE_{CM}$$

质心系中的微分截面

于是, $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{QE_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos \theta)^2} \{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \\ &\quad + Q^4 (1 + \cos^2 \theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta] \}\end{aligned}$$

由于分母上的 $(1 - \cos \theta)^2$ 因子, 微分截面对于向前散射 ($\theta \rightarrow 0$) 具有奇性

这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

质心系中的微分截面

于是, $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{QE_{CM}} \frac{Q}{E_{CM}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2 Q^4 (1 - \cos \theta)^2} \{ 2E_e^2 E_\mu^2 - m_\mu^2 E_e^2 - m_e^2 E_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \\ &\quad + Q^4 (1 + \cos^2 \theta) + Q^2 [2E_e E_\mu (1 + \cos \theta) + (m_e^2 + m_\mu^2) \cos \theta] \}\end{aligned}$$

由于分母上的 $(1 - \cos \theta)^2$ 因子, 微分截面对于向前散射 ($\theta \rightarrow 0$) 具有奇性

这是 Coulomb 散射的一个普遍特征

当散射角 θ 很小时, $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \mathcal{O}(\theta^4)$, 有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta \rightarrow 0$$

$(1 - \cos \theta)^2$ 因子来源于光子传播子贡献的 $q'^2 = -2Q^2(1 - \cos \theta)$

故奇性来自接近质壳的虚光子 ($q'^2 \simeq 0$)

微分截面的近似



当 $E_{\text{CM}} \gg m_e$ 时, 忽略电子质量, 有 $E_e \simeq Q \simeq \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$, 微分截面化为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 Q^2 (1 - \cos \theta)^2} [2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2 \cos^2 \theta + 2QE_\mu \\ &\quad + 2QE_\mu \cos \theta + m_\mu^2 \cos \theta] \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 Q^2 (1 - \cos \theta)^2} [(E_\mu + Q)^2 + (E_\mu + Q \cos \theta)^2 - m_\mu^2 (1 - \cos \theta)] \end{aligned}$$



在高能极限 ($E_{\text{CM}} \gg m_\mu > m_e$) 下, $Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{\text{CM}}/2$, 则微分截面变成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2 [4 + (1 + \cos \theta)^2]}{2E_{\text{CM}}^2 (1 - \cos \theta)^2} = \frac{\alpha^2 [1 + \cos^4(\theta/2)]}{2E_{\text{CM}}^2 \sin^4(\theta/2)}$$



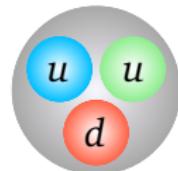
第二步用到三角函数倍角公式 $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$ 和 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$

8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

鼓 质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV

按钮 它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

旋 质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$



8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

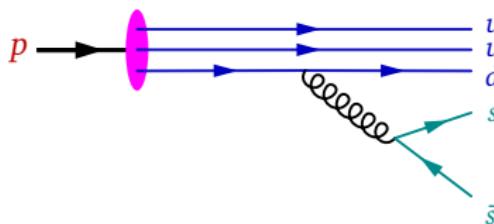
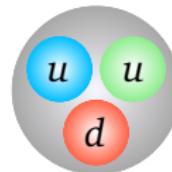
质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV

它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

像这样贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为价夸克 (valence quark)

由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$ ， q 与 \bar{q} 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)

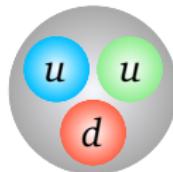


8.4.2 小节 $e^- p$ 散射

质子 (proton) p 是自旋为 $1/2$ 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV

它是一种复合粒子，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态

质子的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$

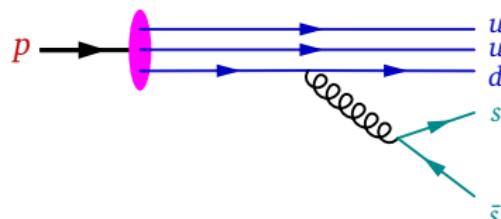


像这样贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为价夸克 (valence quark)

由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$ ， q 与 \bar{q} 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为海夸克 (sea quark)

一个相互作用过程通常涉及一个典型的能量

或动量大小，比如质心能 E_{CM} 或上一小节用到的动量 Q ，这样的量称为能标 (energy scale)



当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的点粒子一样

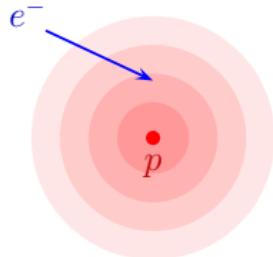
此时可以用 Dirac 旋量场 来描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点

Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 Coulomb 散射 $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p

从而可取 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的
初末态电子运动速率相同，记为 v ，运动方向相差散射角 θ



Rutherford 公式

接下来讨论电子与质子的 Coulomb 散射 $e^- p \rightarrow e^- p$

在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p

从而可取 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的

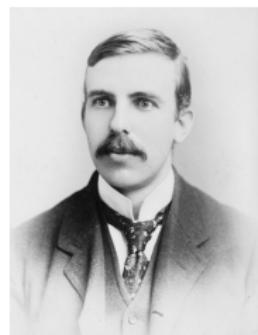
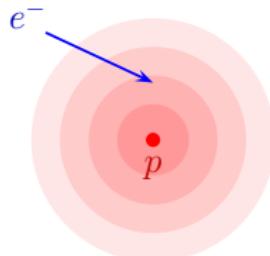
初末态电子运动速率相同，记为 v ，运动方向相差散射角 θ

那么，Coulomb 力引起的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

这个式子就是 Rutherford 公式

可见， $\theta \rightarrow 0$ 时 $d\sigma/d\Omega \propto \theta^{-4}$ 的奇性在经典物理层面就已经出现了



Ernest Rutherford
(1871–1937)

$e^- p$ Coulomb 散射

III 在 QED 中, $e^- p \rightarrow e^- p$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{Feynman diagram} = \bar{u}(p_1) (ie\gamma^\mu) u(k_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2) (-ie\gamma^\nu) u(k_2) \\
 &= -\frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(k_2)
 \end{aligned}$$

相比于 $e^- \mu^-$ 散射, 这个结果多出一个负号, 这是因为 $Q_p = -Q_\mu = +1$

由于这里只有一幅 Feynman 图, 这个符号差异不会影响振幅模方

○ 类比于 $e^- \mu^-$ 散射, $e^- p \rightarrow e^- p$ 非极化振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2) - m_e^2(p_2 \cdot k_2) - m_p^2(k_1 \cdot p_1) + 2m_e^2m_p^2]$$

手征性与螺旋度
○○○○○○○ $e^- \mu^-$ 散射
○○○○○○○ $e^- p$ 散射
○○○●○○○Coulomb 势能
○○○○○○○Yukawa 势能
○○○○交叉对称性
○○○○○○Mandelstam 变量
○○○○○○○○○○

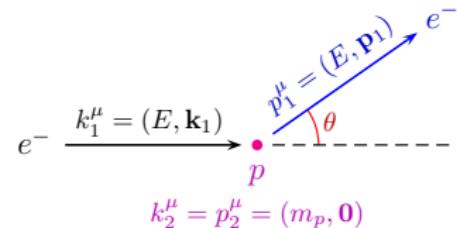
运动学

下面在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导

Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，
初末态电子的能量都是 E ，四维动量分解为

$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

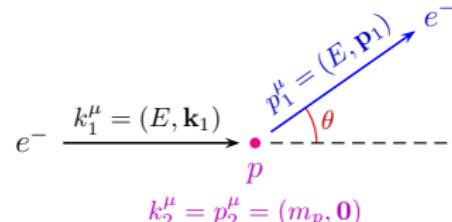


运动学

下面在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导

Rutherford 公式的 QED 相对论性修正

如右图所示，此时散射前后的质子是静止的，
初末态电子的能量都是 E ，四维动量分解为



$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0})$$

初末态电子的动量大小相等，记为 $Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$

根据狭义相对论中的定义，初末态电子的运动速率为 $v = \frac{Q}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}$

因而 $m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2)$ ，四维动量的内积可以表达成

$$k_1 \cdot p_1 = E^2 - Q^2 \cos \theta = E^2(1 - v^2 \cos \theta), \quad k_2 \cdot p_2 = m_p^2$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E$$

$$q^2 = (k_1 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2E^2 + 2Q^2 \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

非极化振幅模方

从而，**非极化振幅模方化为**

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1-v^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_e^2 m_p^2) \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_p^2 E^2 (1-v^2)] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 (1-\cos\theta)^2} [2 - v^2 (1-\cos\theta)] = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

非极化振幅模方

从而，**非极化振幅模方化为**

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 - m_e^2 m_p^2 - m_p^2 E^2(1-v^2 \cos\theta) + 2m_e^2 m_p^2] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} (m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_e^2 m_p^2) \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2} [m_p^2 E^2 + m_p^2 E^2 v^2 \cos\theta + m_p^2 E^2 (1-v^2)] \\
 &= \frac{32\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 (1-\cos\theta)^2} [2 - v^2 (1-\cos\theta)] = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

末态**两体不变相空间积分**是

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\
 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(k_1^0 + k_2^0 - p_1^0 - p_2^0) = \int \frac{d\Omega dQ Q^2}{16\pi^2 Em_p} \delta(E + m_p - \sqrt{Q^2 + m_e^2} - m_p) \\
 &= \int \frac{d\Omega Q^2}{16\pi^2 Em_p} \left| \frac{d(E - \sqrt{Q^2 + m_e^2})}{dQ} \right|^{-1} = \int \frac{d\Omega Q^2}{16\pi^2 Em_p} \frac{\sqrt{Q^2 + m_e^2}}{Q} = \int d\Omega \frac{Q}{16\pi^2 m_p}
 \end{aligned}$$

手征性与螺旋度
○○○○○○○ $e^- \mu^-$ 散射
○○○○○○○ $e^- p$ 散射
○○○○○●○Coulomb 势能
○○○○○○○Yukawa 势能
○○○○交叉对称性
○○○○○○Mandelstam 变量
○○○○○○○○○○

Mott 公式

 入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = Em_p \frac{Q}{E} = Qm_p$

 此过程末态对称性因子 $\mathcal{S} = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p} \int d\Omega \frac{Q \overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$

Mott 公式

 **入射流因子** $E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = Em_p \frac{Q}{E} = Qm_p$

 此过程末态对称性因子 $S = 1$ ，散射截面是

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p} \int d\Omega \frac{Q \overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p^2} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$



Nevill Francis Mott
(1905–1996)

 **微分散射截面为**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad Q \ll m_p$$

 这是 QED 对 Rutherford 公式的修正，称为 Mott 公式

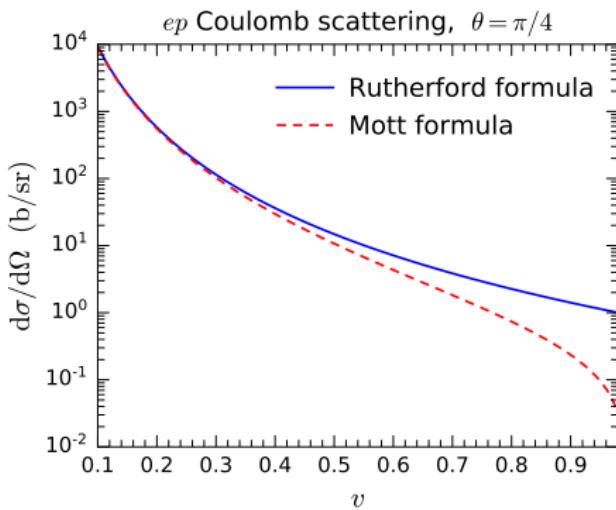
 Mott 公式跟 Rutherford 公式一样不依赖于 m_p ，因而 $m_p \rightarrow \infty$ 的极限是存在的

Mott 公式与 Rutherford 公式

在低速极限下, $v \ll 1$, $Q \simeq m_e v$, Mott 公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

退化成 Rutherford 公式 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$



8.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

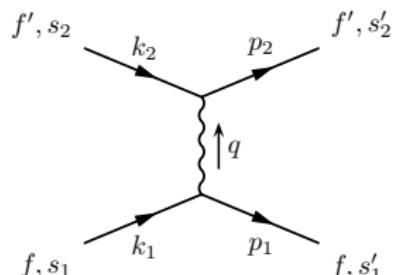
在**非相对论极限下**，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

这是接下来要**论证**的观点

考虑两种带电费米子 f 和 f' ，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$

讨论 **Coulomb 散射过程** $ff' \rightarrow ff'$

初态四维动量为 k_1 和 k_2 ，末态四维动量为 p_1 和 p_2



8.4.3 小节 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过**交换虚光子**发生 **Coulomb 散射**

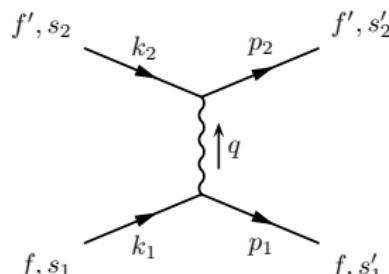
在**非相对论极限下**，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而**光子传播子**的效应应该等价于电动力学中的 **Coulomb 电势**

这是接下来要**论证**的观点

考虑两种带电费米子 f 和 f' ，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$

讨论 **Coulomb 散射过程** $ff' \rightarrow ff'$

初态四维动量为 k_1 和 k_2 ，末态四维动量为 p_1 和 p_2



在**非相对论极限下**， $|k_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$ ，粒子**能量近似为质量**，即

$$k_1^\mu \simeq (\mathbf{m}_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (\mathbf{m}_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (\mathbf{m}_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (\mathbf{m}_{f'}, \mathbf{p}_2)$$

在此极限下，可将正费米子的平面波旋量系数 u 表达为 $u(\mathbf{p}, s) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_s \end{pmatrix}$

p 是动量；不依赖于 \mathbf{p} 的 ζ_s 是某个固定方向上的**二分量自旋本征态**，**本征值**为 $s = \pm 1/2$ ，满足正交归一关系 $\zeta_s^\dagger \zeta_s = \delta_{s's}$ 和完备性关系 $\sum_{s=\pm 1/2} \zeta_s \zeta_s^\dagger = 1$

非相对论极限

这样的 $u(\mathbf{p}, s)$ 在 $\mathbf{p} \rightarrow 0$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, s) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

也满足正交归一关系, $u^\dagger(\mathbf{p}, s')u(\mathbf{p}, s) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{s'}^\dagger & \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = 2m\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s \simeq 2E_p \delta_{s' s}$

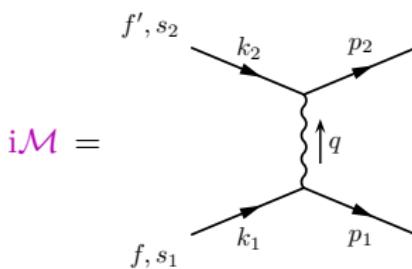
非相对论极限

这样的 $u(\mathbf{p}, s)$ 在 $\mathbf{p} \rightarrow 0$ 极限下满足运动方程,

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, s) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = 0$$

也满足正交归一关系, $u^\dagger(\mathbf{p}, s')u(\mathbf{p}, s) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{s'}^\dagger & \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_{s'} \end{pmatrix} = 2m\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s \simeq 2E_p \delta_{s' s}$

于是, $ff' \rightarrow ff'$ 散射过程的 QED 领头阶不变振幅为



$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) (-iQ_f e \gamma^\mu) u(\mathbf{k}_1, s_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) (-iQ_{f'} e \gamma^\nu) u(\mathbf{k}_2, s_2) \\ &= \frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_\mu u(\mathbf{k}_2, s_2) \end{aligned}$$

非相对论极限下的 Coulomb 散射振幅

由 $u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix}$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{s'_1}^\dagger \zeta_{s_1} = 2m_f \delta_{s'_1 s_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 0$$

同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_f \delta_{s'_2 s_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0$

因此在非相对论极限下只有时间分量 $\bar{u} \gamma^0 u$ 的贡献

非相对论极限下的 Coulomb 散射振幅

由 $u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix}$ 得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{s'_1}^\dagger \zeta_{s_1} = 2m_f \delta_{s'_1 s_1},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) \gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 0$$

同理有 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2}$ 和 $\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) \gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0$

因此在非相对论极限下只有时间分量 $\bar{u} \gamma^0 u$ 的贡献

再注意到 $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$ ，则 $q^2 = (q^0)^2 - |\mathbf{q}|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2$

将不变振幅化为 $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$

$i\mathcal{M}$ 只在 $s'_1 = s_1$ 且 $s'_2 = s_2$ 时非零

也就是说，非相对论性的 Coulomb 散射不改变费米子的自旋状态

非相对论性归一化

 $i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ 因子跟归一化取法有关

-  依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法, 正费米子态为 $|\mathbf{p}^+, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, s}^\dagger |0\rangle$
-  满足 $\langle \mathbf{k}^+, s' | \mathbf{p}^+, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

非相对论性归一化

$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$ 中的 $2m_{f/f'}$ 因子跟归一化取法有关

依照 5.5.4 小节的相对论性归一化取法, 正费米子态为 $|\mathbf{p}^+, s\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle$

满足 $\langle \mathbf{k}^+, s' | \mathbf{p}^+, s \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$

在非相对论性量子力学中, 通常将正费米子态定义为

$$|\mathbf{p}^+, s\rangle_{NR} \equiv a_{\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\mathbf{p}^+, s\rangle$$

满足内积关系 $_{NR} \langle \mathbf{k}^+, s' | \mathbf{p}^+, s \rangle_{NR} = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$, 相应外线规则变成

$$f, s \xrightarrow[p]{\quad} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} u(\mathbf{p}, s), \quad \bullet \xrightarrow[p]{\quad} f, s = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda).$$

非相对论性归一化不变振幅是 $i\mathcal{M}_{NR} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$

相应的散射矩阵元为

$$_{NR} \langle \mathbf{p}_2^+, s'_2; \mathbf{p}_1^+, s'_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2 \rangle_{NR} = i\mathcal{M}_{NR} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

手征性与螺旋度
○○○○○○ $e^- \mu^-$ 散射
○○○○○○ $e^- p$ 散射
○○○○○○Coulomb 势能
○○○●○○Yukawa 势能
○○○○交叉对称性
○○○○○Mandelstam 变量
○○○○○○○○

Born 近似

另一方面，对于 f 粒子进入势场 $V(x)$ 发生的散射过程，**非相对论性量子力学** 的 Born 近似给出散射矩阵元

$$_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_1^+, s_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1 \rangle_{\text{NR}} = -i \tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(x)$ 的 **Fourier 变换**，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(x) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

Born 近似

耳机 另一方面，对于 f 粒子进入势场 $V(x)$ 发生的散射过程，非相对论性量子力学的 Born 近似给出散射矩阵元

$$_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_1^+, s_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1 \rangle_{\text{NR}} = -i \tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi \delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1})$$

地球 其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(x)$ 的 Fourier 变换，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x V(x) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

钻石 这里相当于对引起势场 $V(x)$ 的 f' 粒子动量作积分

菱形 因而没有相关的三维动量 δ 函数因子

戒指 与以上 Coulomb 散射矩阵元 $_{\text{NR}} \langle \mathbf{p}_2^+, s'_2; \mathbf{p}_1^+, s'_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2 \rangle_{\text{NR}}$

$$= -\frac{i Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

比较，得到 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$

Coulomb 势能

🎬 对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 Fourier 逆变换, 记 $r \equiv |\mathbf{x}|$, 推出 Coulomb 势能

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right) \end{aligned}$$

Coulomb 势能

对 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$ 求 Fourier 逆变换，记 $r \equiv |\mathbf{x}|$ ，推出 Coulomb 势能

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right) \end{aligned}$$

作变量替换 $Q = -|\mathbf{q}|$ ，将第二个积分化为

$$-\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{e^{-i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \int_0^{-\infty} dQ \frac{e^{iQr}}{-Q} = \int_{-\infty}^0 dQ \frac{e^{iQr}}{Q} = \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$$

最后一步作了变量替换 $|\mathbf{q}| = Q$

因而可将 $V(\mathbf{x})$ 表达成 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

Coulomb 势

利用留数定理计算积分 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

被积函数在 $|\mathbf{q}| = 0$ 处存在单极点，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=0} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi$$

Coulomb 势能化为 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$

Coulomb 势

利用留数定理计算积分 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}$

被积函数在 $|\mathbf{q}| = 0$ 处存在单极点，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi \underset{|\mathbf{q}|=0}{\text{Res}} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = i\pi$$

Coulomb 势能化为 $V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}$

王冠 f' 粒子的 Coulomb 势 $\Phi(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}$

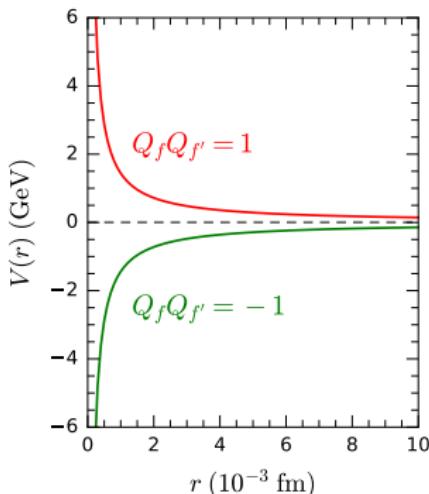
学士帽 这正是电动力学中点电荷电势的形式

水滴 Coulomb 势是长程势，以 r^{-1} 规律衰减

军帽 $V(r)$ 的符号由 Q_f 和 $Q_{f'}$ 的符号决定

红十字 当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 同号时， $V(r) > 0$ ， r 越小，势能越大，Coulomb 势是排斥势

军盔 当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 异号时， $V(r) < 0$ ， r 越小，势能越小，Coulomb 势是吸引势



Yukawa 势

我们已经看到，光子传播子在非相对论极限下的效应等价于 Coulomb 势

类似地，Yukawa 理论中标量玻色子 ϕ 的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

与光子不同的是， ϕ 具有质量 m_ϕ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

Yukawa 势

我们已经看到，光子传播子在非相对论极限下的效应等价于 Coulomb 势

类似地，Yukawa 理论中标量玻色子 ϕ 的传播子应该等价于一种 Yukawa 势

与光子不同的是， ϕ 具有质量 m_ϕ ，下面推导 Yukawa 势能的形式

假设存在两种参与 Yukawa 相互作用的费米子 f 和 f' ，相应的耦合常数均为 κ

根据 7.2 节的 Feynman 规则， $ff' \rightarrow ff'$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) (-i\kappa) u(\mathbf{k}_1, s_1) \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) (-i\kappa) u(\mathbf{k}_2, s_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1) u(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2) u(\mathbf{k}_2, s_2) \end{aligned}$$

Yukawa 理论的 $\tilde{V}(\mathbf{q})$

由于

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s'_1)u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s'_1}^\dagger & \zeta_{s'_1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{s'_1 s_1}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2, s'_2)u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2}$$

振幅化为

$$i\mathcal{M} = \frac{i\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2})$$

类比前面 Coulomb 散射的计算：

$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{iQ_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2} (2m_f \delta_{s'_1 s_1})(2m_{f'} \delta_{s'_2 s_2}) \quad \text{👉} \quad \tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

即得 Yukawa 势场 $V(x)$ 的 Fourier 变换

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$

Yukawa 势能

⌚ $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$ 对应的 Yukawa 势能为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{|\mathbf{q}|^2 e^{i|\mathbf{q}|r \cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \\ &= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}|r} - e^{-i|\mathbf{q}|r}}{i|\mathbf{q}|r} = -\frac{\kappa^2}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \end{aligned}$$

👜 被积函数在上半复平面 $|\mathbf{q}| = im_\phi$ 处存在单极点，沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \operatorname{Res}_{|\mathbf{q}|=im_\phi} \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2i\pi \left. \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}| + im_\phi} \right|_{|\mathbf{q}|=im_\phi} = i\pi e^{-m_\phi r}$$

🎒 因此，Yukawa 势能的形式是 $V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r}$

短程吸引势



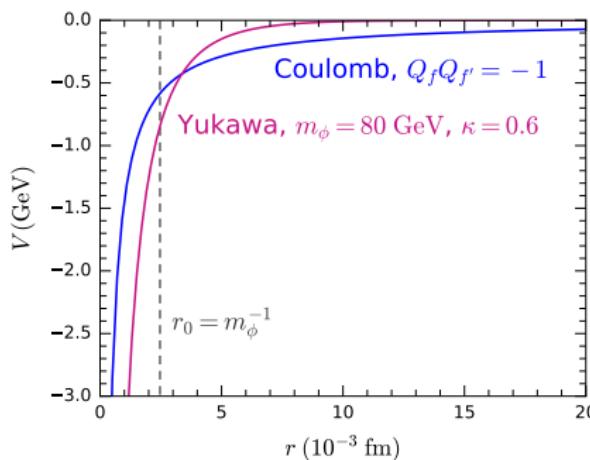
Yukawa 势能 $V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} < 0$

r 越小，势能越小，Yukawa 势是**吸引势**

在**长距离处**，**指数因子** $e^{-m_\phi r}$ 使 Yukawa 势**迅速衰减**，因而它是**短程势**

$r_0 \equiv 1/m_\phi$ 是 Yukawa 势的特征长度，即 Yukawa 相互作用的**力程**

若标量玻色子 ϕ **没有质量**，则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式**类似**



8.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

💡 上一节讨论表明, $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 与 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 过程具有交叉对称性, 利用相应的动量替换规则, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

📝 交叉对称性的一般表述如下

📝 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的粒子 Φ

📝 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的反粒子 $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程

📝 那么, 这两个过程的不变振幅可以通过动量替换 $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来,

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

8.5 节 交叉对称性和 Mandelstam 变量

 上一节讨论表明, $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 与 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 过程具有交叉对称性, 利用相应的动量替换规则, 可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方

 交叉对称性的一般表述如下

 如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的粒子 Φ

 从初态中移除 Φ 并在末态中添加四维动量为 k^μ 的反粒子 $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程

 那么, 这两个过程的不变振幅可以通过动量替换 $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来,

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$$

 物理的初末态粒子必须具有正能量, 但 $k^\mu = -p^\mu$ 意味着 Φ 和 $\bar{\Phi}$ 不可能同时具有正能量, 因而看起来有一个过程是非物理的

 实际上, 应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的数学技巧: 对第一个过程的振幅作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$, 再解析延拓到物理区域就得到第二个过程的振幅

 可以这样想象交叉对称性: 一个粒子沿着时间方向运动等价于它的反粒子逆着时间方向运动, 这样的反粒子具有负能量和相反动量

交叉对称性与动量替换

把 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 的过程如下

先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p'_1)，引起动量替换 $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$

再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k'_2)，引起动量替换 $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$

初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$$

交叉对称性与动量替换

把 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 的过程如下

先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p'_1)，引起动量替换 $k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu$

再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k'_2)，引起动量替换 $p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$

初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，直接修改相应的动量记号，这样就得到替换规则

$$k_1^\mu \rightarrow k'_1{}^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p'_1{}^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow p'_2{}^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow -k'_2{}^\mu$$

交叉一个粒子的 Feynman 图如右下图所示，灰色圆形象征一些 Feynman 图结构

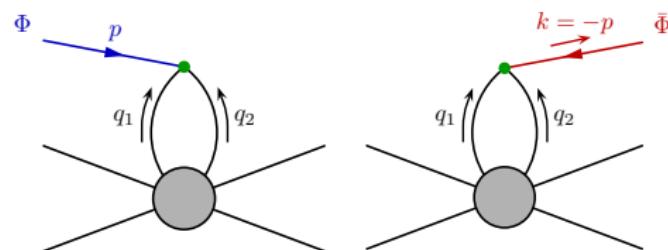
图 (a) 中有一个正粒子 Φ 进入顶点

图 (b) 相应地替换成一个反粒子 $\bar{\Phi}$

离开顶点，两幅图其余部分完全相同

由于顶点处能动量守恒，图 (a) 中四维动量满足 $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$

图 (b) 则满足 $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$



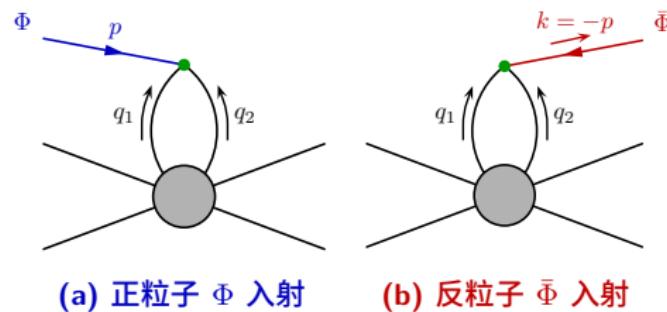
(a) 正粒子 Φ 入射

(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 出射

玻色子的交叉对称性

 只要 $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

 如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立



玻色子的交叉对称性

只要 $k^\mu = -p^\mu$ ，就能使能动量守恒，而两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异

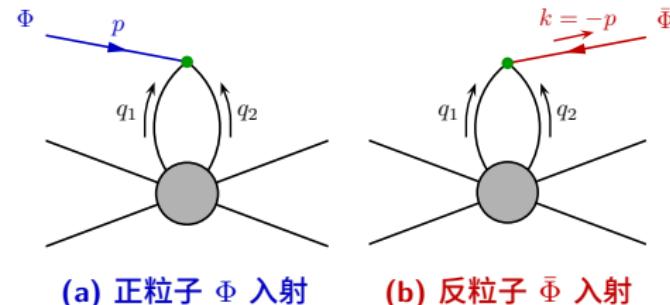
如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立

如果 Φ 是正矢量玻色子，则 $\Phi(p)$ 的外线因子为极化矢量 $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ ：

$$\varepsilon^\mu(p, 0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0 p^1 \\ p^0 p^2 \\ p^0 p^3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu(p, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}| \\ \mp p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_T|^2 \end{pmatrix}$$

可见， $\varepsilon_\mu(-p, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$ 对 $\lambda = 0, \pm$ 成立

因此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，有 $\varepsilon_\mu(p, \lambda) = \varepsilon_\mu(-k, \lambda) = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$ ，这恰好是 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子，故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立



费米子的交叉对称性

如果 Φ 是 Dirac 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$

在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k)$$

因而两个过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 相差一个整体负号

可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的 $|\mathcal{M}|^2$

费米子的交叉对称性

如果 Φ 是 Dirac 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子是旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$

在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$ ，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p) \bar{u}(p) = \cancel{p} + m = -(\cancel{k} - m) = - \sum_{\text{spins}} v(k) \bar{v}(k)$$

因而两个过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 相差一个整体负号

可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \rightarrow -k^\mu$ ，还需要去除一个整体负号才能得到正确的 $|\mathcal{M}|^2$

将 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 时，交叉了两个费米子，产生了两个整体负号，它们正好相互抵消

交叉一个费米子时，如果想让交叉对称性在振幅层面上成立，则需要对 $v(p, \lambda)$ 采取特殊的定义，而 $u(p, \lambda)$ 可保持原先的定义

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|p|} \xi_\lambda(p) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|p|} \xi_\lambda(p) \end{pmatrix}$$

$v(p, \lambda)$ 的特殊定义



由螺旋态本征值方程 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$, 故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即 $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态, 从而可以将 $v(p, \lambda)$ 的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

$v(p, \lambda)$ 的特殊定义



由螺旋态本征值方程 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(\mathbf{p})$ 得 $-(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$, 故

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda \xi_\lambda(-\mathbf{p})$$

即 $\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态, 从而可以将 $v(p, \lambda)$ 的定义取为

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

👉 $v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$, $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = i\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$, $\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p})$

💡 利用 $m = \sqrt{(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{(p^0 + \lambda|\mathbf{p}|)(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)}$, 推出

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{p} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{m} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ &= -\frac{i}{m} \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|} (p^0 - \lambda|\mathbf{p}|) \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -i\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|} \xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

⚠ 因此, 这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足运动方程 $(\not{p} + m)v(p, \lambda) = 0$

手征性与螺旋度
○○○○○○○

$e^- \mu^-$ 散射
○○○○○○○

$e^- p$ 散射
○○○○○○○

Coulomb 势能
○○○○○○○

Yukawa 势能
○○○○

交叉对称性
○○○○○●

Mandelstam 变量
○○○○○○○○○

振幅的费米子交叉对称性

☕ 也可以验证这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足正交归一关系和自旋求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

振幅的费米子交叉对称性

也可以验证这样定义的 $v(p, \lambda)$ 满足正交归一关系和自旋求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm} v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \not{p} - m$$

如此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，可以推出

$$\begin{aligned} u(p, \lambda) &= u(-k, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\text{e}^{i\pi}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ [\text{e}^{-i\pi}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{e}^{i\pi/2}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \text{e}^{-i\pi/2}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{k^0 + \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ -i\sqrt{k^0 - \lambda|\mathbf{k}|} \xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = v(k, \lambda) \end{aligned}$$

即 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子相等

故 $\mathcal{M}(\Phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\Phi}(k) + \dots)$ 成立

注意，平方根函数是多值函数，在上式推导过程中，利用 $\text{e}^{\pm i\pi} = -1$ 对两个平方根函数采用了不同的取值方式

Mandelstam 变量

现在定义一些便于应用**交叉关系**的物理量

对于 $2 \rightarrow 2$ 散射，按照右图表示的四维动量，定义三个 **Lorentz 不变的 Mandelstam 变量**：

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

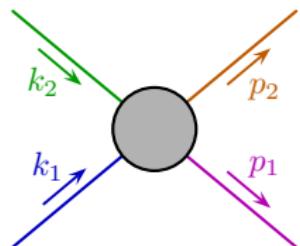
$$t \equiv (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2$$

第二步均用到**能动量守恒关系** $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

记这些四维动量对应的**质量**为 m_1 、 m_2 、 m'_1 、 m'_2 ，

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m'^2_1, \quad p_2^2 = m'^2_2$$



Stanley Mandelstam
(1928–2016)

Mandelstam 变量性质

四维动量的内积可以用 Mandelstam 变量和质量表示为

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}(s - k_1^2 - k_2^2) = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2), \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1'^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - k_1^2 - p_1^2) = -\frac{1}{2}(t - m_1^2 - m_1'^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(t - m_2^2 - m_2'^2)$$

$$k_1 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(u - k_1^2 - p_2^2) = -\frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2'^2), \quad k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_2^2 - m_1'^2)$$

因为 $|\mathcal{M}|^2$ 只是这些四维动量内积的函数，所以用 3 个 Mandelstam 变量就足以表达任意 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的非极化振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$

进一步推出

$$\begin{aligned} s + t + u &= (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - p_1)^2 + (k_1 - p_2)^2 \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_1 - p_2) \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2 \end{aligned}$$

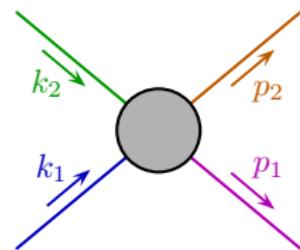
即 Mandelstam 变量之和是初末态粒子质量平方和

Mandelstam 变量的进一步说明

💡 $t = (k_1 - p_1)^2$ 和 $u = (k_1 - p_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

🧥 实际应用通常用初末态中两个性质相近的粒子定义 t

🧥 比如，对于 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k'_1 与末态电子动量 p'_1 定义 $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$



Mandelstam 变量的进一步说明

💡 $t = (k_1 - p_1)^2$ 和 $u = (k_1 - p_2)^2$ 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义

💡 实际应用通常用初末态中两个**性质相近**的粒子定义 t

💡 比如，对于 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散射过程，通常用**初态电子动量** k'_1 与**末态电子动量** p'_1 定义 $t = (k'_1 - p'_1)^2$ ，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$

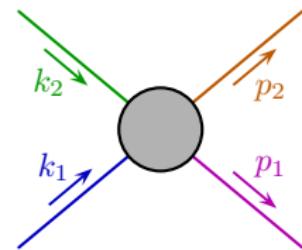
💡 在**质心系**中， $k_1 + k_2 = 0$ ，有 $s = (k_1 + k_2)^2 = (k_1^0 + k_2^0)^2 = E_{CM}^2$

💡 故 $\sqrt{s} = E_{CM}$ 就是**质心能**

💡 对于**任意** $2 \rightarrow n$ 散射过程，将 s 定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \left(\sum_i p_i \right)^2$$

💡 于是， \sqrt{s} 就是这个 $2 \rightarrow n$ 过程的**质心能**



$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方

可以用 Mandelstam 变量表达任意 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的非极化振幅模方

对于 8.2 节的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程，非极化振幅模方可化为

$$\begin{aligned}
 & |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2m_\mu^2] \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{1}{4}(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{4}(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + \frac{1}{2}m_\mu^2(s - 2m_e^2) + \frac{1}{2}m_e^2(s - 2m_\mu^2) \right. \\
 &\quad \left. + 2m_e^2m_\mu^2 \right] \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{t+u}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right]
 \end{aligned}$$

由 $s + t + u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$ 得 $t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) - s$ ，故

$$\begin{aligned}
 & |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \\
 &= \frac{8e^4}{s^2} \left[\frac{t^2 + u^2}{4} - \frac{2(m_e^2 + m_\mu^2) - s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) + \frac{1}{2}(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + \frac{s}{2}(m_e^2 + m_\mu^2) \right] \\
 &= \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]
 \end{aligned}$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

🍺 现在将 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

.SOCK 根据动量替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, 有

$$(k_1 + k_2)^2 \rightarrow (k'_1 - p'_1)^2, \quad (k_1 - p_1)^2 \rightarrow (k'_1 - p'_2)^2, \quad (k_1 - p_2)^2 \rightarrow (k'_1 + k'_2)^2$$

++) 即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

Mandelstam 变量与交叉对称性

现在将 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

根据动量替换规则 $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$, $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$, $p_1^\mu \rightarrow p_2'^\mu$, $p_2^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$, 有

$$(k_1 + k_2)^2 \rightarrow (k_1' - p_1')^2, \quad (k_1 - p_1)^2 \rightarrow (k_1' - p_2')^2, \quad (k_1 - p_2)^2 \rightarrow (k_1' + k_2')^2$$

即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s$$

可见, 交叉对称性对应于 Mandelstam 变量的调换

据此, 从 $\overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2} = \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$

直接得到 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 过程的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2} = \frac{2e^4}{t^2} [u^2 + s^2 + 4t(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2]$$

容易验证此结果与前面得到的 $\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2} = \frac{8e^4}{(q'^2)^2} [(k_1' \cdot p_2')(p_1' \cdot k_2') + (k_1' \cdot k_2')(p_1' \cdot p_2') - m_e^2(p_2' \cdot k_2') - m_\mu^2(k_1' \cdot p_1') + 2m_e^2m_\mu^2]$ 一致

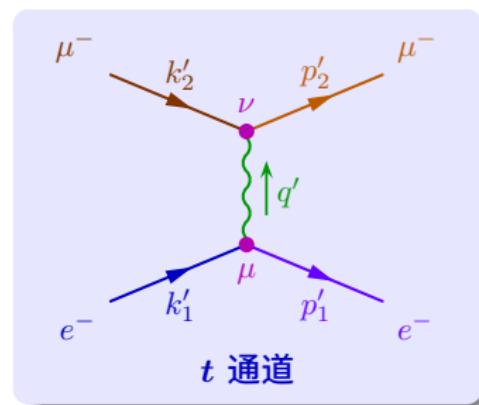
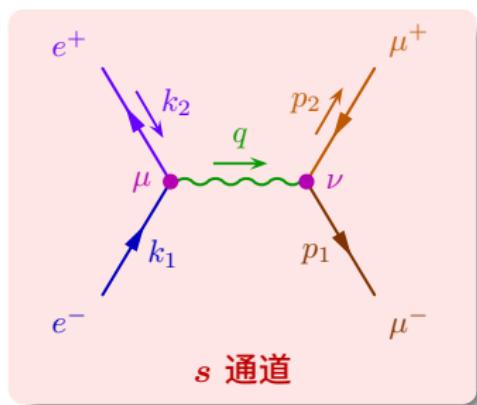
s 、 t 和 u 通道

🥃 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 过程的虚光子动量满足 $q^2 = s$ ，交叉成 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 过程之后，虚光子动量满足 $q'^2 = t$

👢 一般来说，当 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的 Feynman 图只包含一条内线时，内线动量的内积等于一个 Mandelstam 变量 s 、 t 或 u

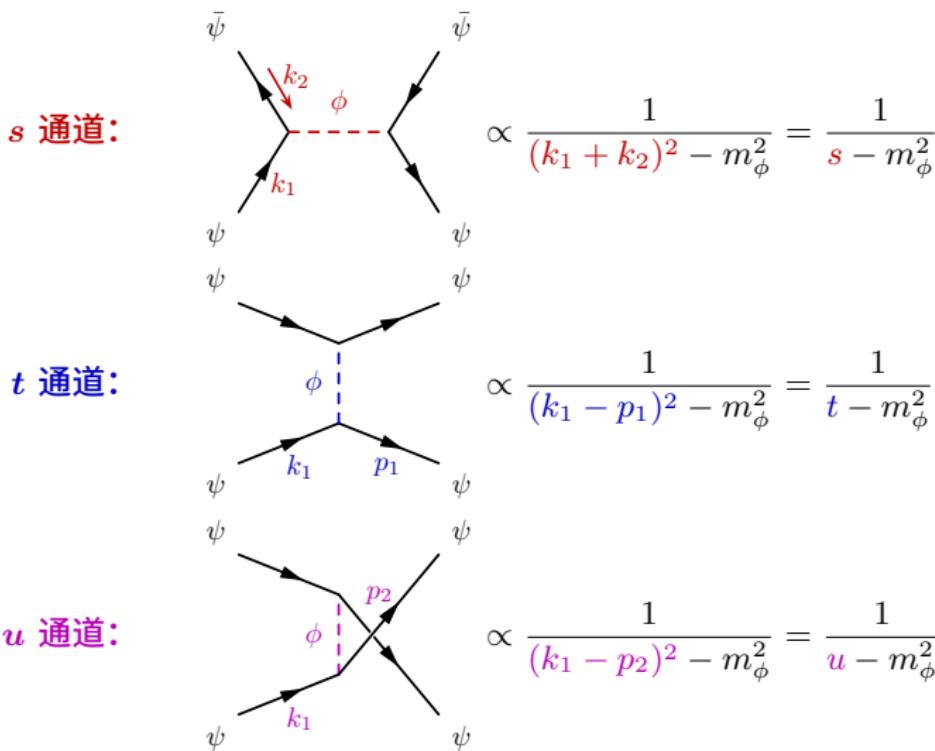
👠 相应地称这种图为 s 通道 (channel)、 t 通道或 u 通道的 Feynman 图

👞 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 和 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Feynman 图分别对应于 s 通道和 t 通道



三种通道的特点

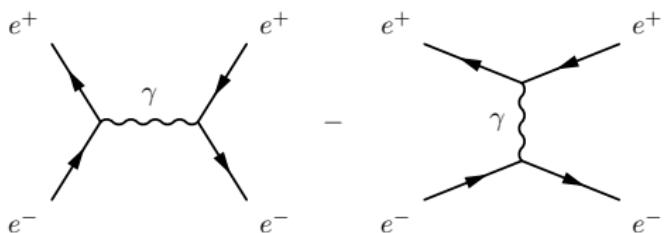
以 Yukawa 理论为例，三种通道具有如下特点



Bhabha 散射和 Møller 散射

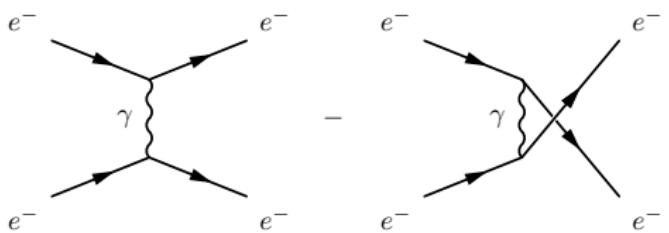
🍺 一个散射过程可以包含多个通道的 Feynman 图

👢 Bhabha 散射 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 具有 1 个 s 通道和 1 个 t 通
道领头阶 Feynman 图



Homi Jehangir Bhabha
(1909–1966)

👢 Møller 散射 $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ 具有 1 个 t 通道和 1 个 u 通
道领头阶 Feynman 图



Christian Møller
(1904–1980)

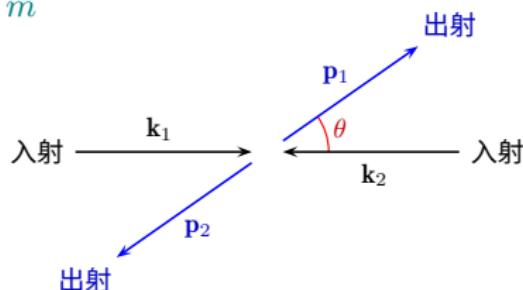
Mandelstam 变量与散射角的关系

🥂 在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是 m

🍴 动量如右图所示，则有

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{CM}}{2} = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \equiv Q$$



勺 从而得到

$$t = (k_1 - p_1)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_1^0 + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1| \cos \theta = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2k_1^0 p_2^0 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta = -2Q^2(1 + \cos \theta)$$

🍴 于是， $\theta \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$ ， $\theta \rightarrow \pi$ 时 $u \rightarrow 0$ ，而 $s = E_{CM}^2$ 与散射角 θ 无关

⌚ 三种通道的传播子对散射角 θ 的依赖截然不同