数学物理方法

第十一章　球函数

第 2 节　一般球函数

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 12 月 7 日

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P=0 \quad (-1<x<1) \\ P(\pm 1)=0 \quad (m\neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)|<\infty \quad (m=0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并**不具有**轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况 $m=0$ 以外，还需要研究 $m\neq 0$ 的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

§2　一般球函数

§2.1　非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P=0 \quad (-1<x<1) \\ P(\pm 1)=0 \quad (m\neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)|<\infty \quad (m=0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并**不具有**轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况 $m=0$ 以外，还需要研究 $m\neq 0$ 的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

作变换 $P(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，代入连带 Legendre 方程

由 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2-1}y$ 推出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)^{m/2+1}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y] \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}y''-(m+2)x(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y' \\ &\quad -m(1-x^2)^{m/2}y+m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y\end{aligned}$$

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在**球坐标**下对 **Laplace 方程**分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P=0 \quad (-1<x<1) \\ P(\pm 1)=0 \quad (m\neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)|<\infty \quad (m=0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并**不具有**轴对称性，则除了上节讨论的**特殊情况** $m=0$ 以外，还需要研究 $m\neq 0$ 的情况，即**连带 Legendre 方程**的本征值问题

作**变换** $P(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，代入**连带 Legendre 方程**

由 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2-1}y$ 推出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{m/2+1}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y\right] \\ &\qquad\qquad\qquad = -2(m+1)x(1-x^2)^{m/2}y' \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}y''-(m+2)x(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y' \\ &\quad -m(1-x^2)^{m/2}y+m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y\end{aligned}$$

$y(x)$ 满足的方程

因此，作**变换** $P(x) = (1-x^2)^{m/2}y(x)$ 之后，**连带 Legendre 方程**化为

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P \\
&= (1-x^2)^{m/2+1}y'' - 2(m+1)x(1-x^2)^{m/2}y' - m(1-x^2)^{m/2}y \\
&\quad + m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y + \lambda(1-x^2)^{m/2}y - m^2(1-x^2)^{m/2-1}y \\
&= (1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' - my - m^2\frac{-x^2}{1-x^2}y + \lambda y - m^2\frac{1}{1-x^2}y\right] \\
&= (1-x^2)^{m/2}\{(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y\}
\end{aligned}
$$

可见，$y(x)$ 满足的方程为

$$
(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y = 0
$$

对 Legendre 方程求导 m 次

- 另一方面，将 **Legendre 方程**中的函数 $P(x)$ 写作 $f(x)$，得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda f=(1-x^2)f''-2xf'+\lambda f$$

- 现在对它**求导 m 次**，注意到

$$(1-x^2)''=(-2x)'=-2,\quad C_m^0=1,\quad C_m^1=m,\quad C_m^2=\frac{m(m-1)}{2}$$

- 由**高阶导数的 Leibniz 公式**得到

$$\begin{aligned}
[(1-x^2)f'']^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} f''^{(m-k)} \\
&= C_m^0(1-x^2)f''^{(m)}+C_m^1(1-x^2)'f''^{(m-1)}+C_m^2(1-x^2)''f''^{(m-2)} \\
&= (1-x^2)f^{(m)''}-2mxf^{(m)'}-m(m-1)f^{(m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2xf')^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2x)^{(k)} f'^{(m-k)} = C_m^0\cdot 2xf'^{(m)}+C_m^1(2x)'f'^{(m-1)} \\
&= 2xf^{(m)'}+2mf^{(m)}
\end{aligned}$$

连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f\right]^{(m)} \\
&= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime} - 2mxf^{(m)\prime} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)}
\end{aligned}
$$

整理得 $(1-x^2)f^{(m)\prime\prime} - 2(m+1)xf^{(m)\prime} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$

连带 Legendre 方程的解

- 从而推出

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime} - 2mxf^{(m)\prime} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)} \end{aligned}$$

- 整理得 $(1-x^2)f^{(m)\prime\prime} - 2(m+1)xf^{(m)\prime} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$
- 与 $(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y = 0$ 比较，可知

$$y(x) = f^{(m)}(x)$$

- 这就是说，只要将 **Legendre 方程**的解 $f(x)$ **求导** m **次**，就能够得到**方程** $(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y = 0$ 的解 $y(x)$

连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-x^2)f''-2xf'+\lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2mxf^{(m)\prime}-m(m-1)f^{(m)}-2xf^{(m)\prime}-2mf^{(m)}+\lambda f^{(m)} \end{aligned}$$

整理得 $(1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2(m+1)xf^{(m)\prime}+[\lambda-m(m+1)]f^{(m)}=0$

与 $(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[\lambda-m(m+1)]y=0$ 比较，可知

$$y(x)=f^{(m)}(x)$$

这就是说，只要将 **Legendre 方程**的解 $f(x)$ **求导** m **次**，就能够得到**方程** $(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[\lambda-m(m+1)]y=0$ 的解 $y(x)$

由于 $P(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，为了满足**边界条件** $P(\pm1)=0$，$y(\pm1)$ 应该**有限**

因此 $f(\pm1)$ 也应该**有限**，这只有当 $\lambda=l(l+1)$ $(l\in\mathbb{N})$ 时才有可能

相应的解为 **Legendre 多项式**，即 $f(x)=\mathrm{P}_l(x)$，故 $P(x)=(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

连带 Legendre 方程本征值问题的本征值和本征函数

- 于是求得**连带 Legendre 方程本征值问题**的**本征值**

$$\lambda_l = l(l+1), \quad l = m, m+1, \cdots$$

- 相应的**本征函数**是**连带 Legendre 函数**

$$\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x), \quad l = m, m+1, \cdots$$

- 对于连带 Legendre 方程的本征值问题来说，m 是事先给定的
- 它来源于 $\Phi(\phi)$ **的本征值问题**
- 如果 $l < m$ 时，则 $\mathrm{P}_l^{(m)}(x) = 0$，本征函数化为**零**
- 所以 l 的取值**被** m **限制**为 $l = m, m+1, \cdots$
- 当 $m = 0$ 时，**连带 Legendre 函数**退化为 **Legendre 多项式**，即 $\mathrm{P}_l^0(x) = \mathrm{P}_l(x)$
- 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 线性独立的另一个解记作 $\mathrm{Q}_l^m(x)$，它在 $x = \pm 1$ 处有**奇性**

说明

- 文献中的**连带 Legendre 函数**有两种不同定义
- 上述 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$ 是 **Ferrer 定义**
- 另有一种 **Hobson 定义** $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (-)^m(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$
- 定义不同，有关公式 (如递推关系) 也会有所**不同**
- 因此读者在使用**不同参考书**时应该留意其所用定义

说明

- 文献中的**连带 Legendre 函数**有两种不同定义
- 上述 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$ 是 **Ferrer 定义**
- 另有一种 **Hobson 定义** $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (-)^m(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$
- 定义不同，有关公式 (如递推关系) 也会有所**不同**
- 因此读者在使用**不同参考书**时应该留意其所用定义
- 有些作者将连带 Legendre 函数称为**“连带 Legendre 多项式”**，这一名称**并不恰当**
- 当 m **不是偶数**时，$\mathrm{P}_l^m(x)$ 并**不是** x **的多项式**
- 如果令 $x=\cos\theta$，则 $(1-x^2)^{m/2} = (1-\cos^2\theta)^{m/2} = \sin^m\theta$
- $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 变成**两个宗量** $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多项式，显然**不是**通常意义下的多项式

§2.2 连带 Legendre 函数的微分表示

由 **Legendre 多项式的微分表示** $\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$ 得

$$\mathrm{P}_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\right]$$

可见，**连带 Legendre 函数的微分表示**为

$$\mathrm{P}_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

这也称为 **Rodrigues 公式**

§2.3 函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$

按照 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 并**没有意义**

因为**求导** $-m$ **次**是没有意义的

然而，只要 $0 \le m \le l$，就能用**微分表示** $\mathrm{P}_l^m(x) = \dfrac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$

定义**函数** $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$，即

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l$$

§2.3　函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$

- 按照 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 并**没有意义**
- 因为**求导** $-m$ **次**是没有意义的
- 然而，只要 $0 \le m \le l$，就能用**微分表示** $\mathrm{P}_l^m(x) = \dfrac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$

定义**函数** $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$，即

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l$$

- 由于 m 在**连带 Legendre 方程**中只以 m^2 形式出现，**方程**对于 $m \to -m$ 的**替换**是**不变**的，所以有理由**推测**，这样定义的 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ **也是**连带 Legendre 方程的**解**
- 根据 **Sturm-Liouville 本征值问题**的一般结论，只要不涉及周期性边界条件，**一个本征值**只对应于**一个线性独立的本征函数**
- 从而进一步推测，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 实质上应该相同，即**最多相差一个常数因子**

$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的关系

事实上，可以证明

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$$

对 $m > 0$ **证明上式**（见选读内容）之后，由 $|m| = m$ 推出

$$\mathrm{P}_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \mathrm{P}_l^{|m|}(x), \quad \mathrm{P}_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \mathrm{P}_l^{-|m|}(x)$$

$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的关系

事实上，可以证明

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$$

对 $m > 0$ **证明上式**（见选读内容）之后，由 $|m| = m$ 推出

$$\mathrm{P}_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \mathrm{P}_l^{|m|}(x), \quad \mathrm{P}_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \mathrm{P}_l^{-|m|}(x)$$

对于 $m < 0$，则 $|m| = -m$，就可以得到

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = \mathrm{P}_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \mathrm{P}_l^{-|m|}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$$

可见，$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$ 对于 $m > 0$ 和 $m < 0$ 两种情况**都成立**

如果对 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 中 m **的正负不作限制**，则 $l \geq |m|$

§2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**相同** m **不同** l 的**连带 Legendre 函数**在区间 $[-1,1]$ 上有**正交关系**

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的**模** (推导过程见选读内容) 为

$$\|\mathrm{P}_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(x)]^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

上式**对** $m>0$ **和** $m<0$ **均成立**，$m=0$ 时退化为 $\|\mathrm{P}_l^0\| = \|\mathrm{P}_l\| = \sqrt{\dfrac{2}{2l+1}}$

§2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**相同** m **不同** l 的**连带 Legendre 函数**在区间 $[-1,1]$ 上有**正交关系**

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的**模**（推导过程见选读内容）为

$$\|\mathrm{P}_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(x)]^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

上式**对** $m>0$ **和** $m<0$ **均成立**，$m=0$ 时退化为 $\|\mathrm{P}_l^0\| = \|\mathrm{P}_l\| = \sqrt{\dfrac{2}{2l+1}}$

以上两式可以统一写为 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$

等价地，有 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$

§2.6 广义 Fourier 级数

- 作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**连带 Legendre 函数**在区间 $[-1,1]$ 上是**完备**的
- 为**确定**起见，本小节讨论只取 $m>0$
- 于是，区间 $[-1,1]$ 上任意一个**解析良好**的**函数** $f(x)$ 必定可以用 $\{\mathrm{P}_l^m(x)\}_{l=m}^{\infty}$ 展开为**广义 Fourier 级数**

$$f(x)=\sum_{l=m}^{\infty} f_l \mathrm{P}_l^m(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

- 利用 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x) \mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x=\left\|\mathrm{P}_l^m\right\|^2 \delta_{ll'}$，求得**展开系数**为

$$f_l=\frac{1}{\left\|\mathrm{P}_l^m\right\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{P}_l^m(x)\,\mathrm{d}x, \quad l=m, m+1, \cdots$$

§2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

- 连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出
- 例如，对递推关系一 $(2l+1)x\mathrm{P}_l(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}(x)$ 求导 m 次
- 利用 $[x\mathrm{P}_l(x)]^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k x^{(k)}\mathrm{P}_l^{(m-k)}(x) = x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)$，推出

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m(2l+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

§2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

- **连带 Legendre 函数**的递推关系都可以从 **Legendre 多项式**的递推关系导出
- 例如，对**递推关系一** $(2l+1)x\mathrm{P}_l(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}(x)$ **求导 m 次**
- 利用 $[x\mathrm{P}_l(x)]^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k x^{(k)}\mathrm{P}_l^{(m-k)}(x) = x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)$，推出

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m(2l+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

- 对**递推关系三** $(2l+1)\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}'_{l+1}(x) - \mathrm{P}'_{l-1}(x)$ **求导 $m-1$ 次**，得

$$(2l+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x) = \mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x) - \mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

- 联立**消去** $\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)$，有

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m[\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x) - \mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)] = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

- 两边同**乘以** $(1-x^2)^{m/2}$，整理得到**连带 Legendre 函数的递推关系**

$$(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m(x) - (2l+1)x\mathrm{P}_l^m(x) + (l+m)\mathrm{P}_{l-1}^m(x) = 0$$

§2.8 球谐函数

- 在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量 $u(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$
- 那么，角向部分 $Y(\theta,\phi)$ 满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y=0$$

- 由于球坐标系的特点，函数 $Y(\theta,\phi)$ 应该满足以下两个自然边界条件

$$Y(0,\phi)\ \text{和}\ Y(\pi,\phi)\ \text{没有奇性},\quad Y(\theta,\phi+2\pi)=Y(\theta,\phi)$$

- 这里没有奇性指具有确切的定义，并且是有限的
- 上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题

§2.8 球谐函数

- 在**球坐标系**中对 **Laplace 方程**或 **Helmholtz 方程**作**分离变量** $u(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$
- 那么，**角向部分** $Y(\theta,\phi)$ 满足**球函数方程**

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0$$

- 由于球坐标系的特点，函数 $Y(\theta,\phi)$ 应该满足以下两个**自然边界条件**

$$Y(0,\phi) \text{ 和 } Y(\pi,\phi) \text{ 没有奇性}, \quad Y(\theta,\phi+2\pi) = Y(\theta,\phi)$$

- 这里没有奇性指**具有确切的定义**，并且是**有限**的
- 上述**方程**和**边界条件**构成一个**偏微分方程的本征值问题**
- 进一步作分离变量 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$
- 已经求得 $\Phi(\phi) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}\ (m \in \mathbb{N})$，相应的**本征值** m^2 进入 $H(\theta)$ 的方程
- 对于确定的 m，$H(\theta) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$，**本征值**为 $\lambda_l = l(l+1),\ l = m, m+1, \cdots$

球谐函数

🏇 对于一个确定**本征值** $\lambda_l = l(l+1)$，上述**偏微分方程本征值问题**有下列**本征函数**

$$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l$$

🚴 或者表达成

$$\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

球谐函数

- 对于一个确定**本征值** $\lambda_l = l(l+1)$，上述**偏微分方程本征值问题**有下列**本征函数**

$$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l$$

- 或者表达成

$$\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

- 由于 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 只**相差一个常数因子**，以上本征函数又等价于

$$S_{lm}(\theta, \phi) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

- 这些本征函数称为**球谐函数** (spherical harmonics)
- 可见，对应于一个**本征值** λ_l，本征函数是 $2l+1$ **个线性独立**的球谐函数
- 故本征值 λ_l 的**简并度**为 $2l+1$
- l 称为球谐函数的**阶**

归一化球谐函数

物理上更常用的是**归一化的球谐函数**

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) = (-)^m \frac{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)}{\|\mathrm{P}_l^m\|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}}{\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\|} = (-)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$l\in\mathbb{N},\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

归一化因子 $\|\mathrm{P}_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}$ 是函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 的**模**

归一化因子 $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}|^2\,\mathrm{d}\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi} = \sqrt{2\pi}$ 是函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ 的**模**

归一化球谐函数

- 物理上更常用的是**归一化的球谐函数**

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) = (-)^m \frac{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)}{\|\mathrm{P}_l^m\|} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}}{\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\|} = (-)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$l \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

- 归一化因子 $\|\mathrm{P}_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}$ 是函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 的**模**

- 归一化因子 $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}|^2\,\mathrm{d}\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi} = \sqrt{2\pi}$ 是函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ 的**模**

- **归一化**以后相位因子还可以**任取**，**相位因子** $(-)^m$ 的取法是历史上沿袭下来的

- 球谐函数有**不同**的**定义**，主要就在于相位因子的取法不同

- 定义不同，有关的公式也会有所不同，在使用时应该加以留意

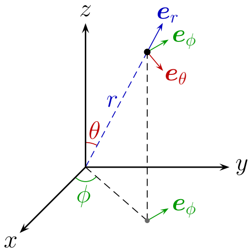
$l = 0, 1, 2$ 的球谐函数 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta, \phi)$

- $l = 0$ 且 $m = 0$ 的球谐函数为 $\mathrm{Y}_{0,0}(\theta, \phi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$

- $l = 1$ 且 $m = 0, \pm 1$ 的球谐函数为

$$\mathrm{Y}_{1,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

$$\mathrm{Y}_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\phi}$$

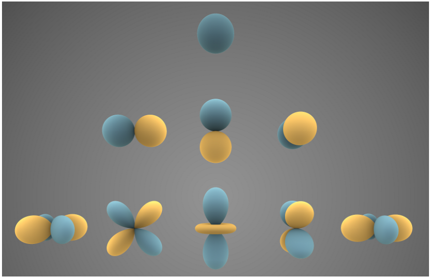


- $l = 2$ 且 $m = 0, \pm 1, \pm 2$ 的球谐函数为

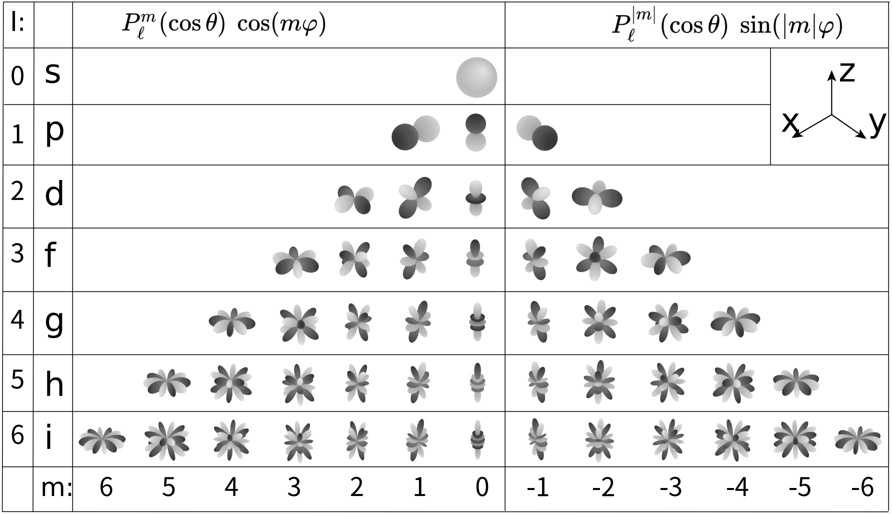
$$\mathrm{Y}_{2,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\mathrm{Y}_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\phi}$$

$$\mathrm{Y}_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\phi}$$



球谐函数图像


l:
$P_\ell^m(\cos\theta)\ \cos(m\varphi)$
$P_\ell^{|m|}(\cos\theta)\ \sin(|m|\varphi)$
0 s
1 p
2 d
3 f
4 g
5 h
6 i
z
x
y
m: 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6

球面上的广义 Fourier 级数

- 根据 $\int_0^{\pi} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$ 和 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-m')\phi}\mathrm{d}\phi = 2\pi\delta_{mm'}$
- 容易得到**归一化球谐函数**在**单位球面**上的**正交归一关系**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Y}_{l'm'}^*(\theta,\phi)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

球面上的广义 Fourier 级数

根据 $\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$ 和 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-m')\phi}\mathrm{d}\phi = 2\pi\delta_{mm'}$

容易得到**归一化球谐函数**在**单位球面**上的**正交归一关系**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{Y}_{l'm'}^*(\theta,\phi)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

由于 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ 在 $\phi\in[0,2\pi]$ 上**完备**，$\{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\}_{l=|m|}^{\infty}$ 在 $\theta\in[0,\pi]$ 上**完备**

球谐函数在**球面**上是**完备**的，**球面**上**任意解析良好**的**函数** $f(\theta,\phi)$ 一定可以展开为

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$$

根据**正交归一关系**，**展开系数**为

$$f_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\phi)f(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

球坐标系下 Laplace 方程的一般解

在球坐标下讨论 **Laplace 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$，**本征值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0 \\ Y(0,\phi) \text{ 和 } Y(\pi,\phi) \text{ 没有奇性，} \quad Y(\theta,\phi+2\pi) = Y(\theta,\phi) \end{cases}$$

的**本征值** $\lambda = l(l+1)$ **与** m **无关**

因此，**径向方程** $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ 的**解**仍然是 $R(r) = \left\{ r^l, \dfrac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，**球坐标系**下 Laplace 方程的**一般解**为

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$$

球坐标系下 Laplace 方程的一般解

在球坐标下讨论 **Laplace 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$，**本征值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0 \\ Y(0,\phi) \text{ 和 } Y(\pi,\phi) \text{ 没有奇性，} \quad Y(\theta,\phi+2\pi) = Y(\theta,\phi) \end{cases}$$

的**本征值** $\lambda = l(l+1)$ **与** m **无关**

因此，**径向方程** $r^2R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ 的**解**仍然是 $R(r) = \left\{ r^l, \dfrac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，**球坐标系**下 Laplace 方程的**一般解**为

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$$

本征函数族 $\{\cos m\phi, \sin m\phi\}_{m=0}^{\infty}$ 与 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}_{m=0}^{\infty}$ 等价，**一般解**也可以写成

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\Big[& r^l\left(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi\right) \\ & + \frac{1}{r^{l+1}}\left(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi\right)\Big]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) \end{aligned}$$

宇宙微波背景

$t \sim 380\ 000$ yr， $T \sim 3000$ K

电子 $+$ 原子核 $\to$ 原子

光子退耦

冷却到今天

2.7 K 宇宙微波背景

宇宙微波背景

$t \sim 380\ 000$ yr, $T \sim 3000$ K

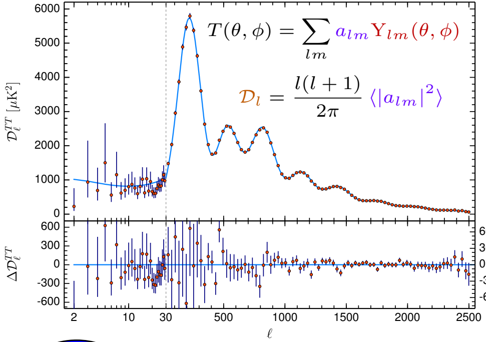
电子 + 原子核 → 原子

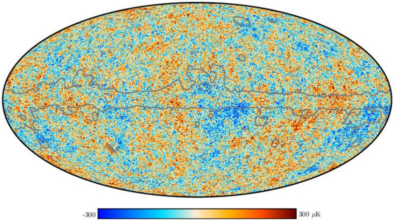
光子退耦

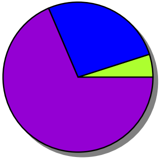
冷却到今天

2.7 K 宇宙微波背景

利用**球谐函数**计算**宇宙微波背景各向异性功率谱**，确定**冷暗物质比例** $\Omega_{\rm c}$、**重子物质比例** $\Omega_{\rm b}$ 和**暗能量比例** Ω_Λ







Planck 2018

[1807.06205, 1807.06209]

冷暗物质 (26.5%)

$\Omega_{\rm c}h^2 = 0.1200 \pm 0.0012$

重子物质 (4.9%)

$\Omega_{\rm b}h^2 = 0.02237 \pm 0.00015$

暗能量 (68.6%)

$\Omega_\Lambda = 0.6847 \pm 0.0073$