数 学 物 理 方 法

第四章　解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 10 月 11 日

第四章 解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点

- 本章研究解析函数的 Taylor 展开式的推广，即 Laurent 展开式
- 它是研究解析函数的奇点的重要工具

§1 解析函数的 Laurent 展开

§1.1 双边幂级数

考虑**幂级数** $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 和**另一个级数** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$

它们之和 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 称为**双边幂级数**

假设**幂级数**的**收敛半径**为 R $(0 < R \leq +\infty)$，则它在**圆** $|z-a| < R$ 上**绝对收敛**且**内闭一致收敛**，并具有**解析**的**和函数**，记作 $f_1(z)$

§1　解析函数的 Laurent 展开

§1.1　双边幂级数

考虑**幂级数** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 和**另一个级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$

它们之和 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 称为**双边幂级数**

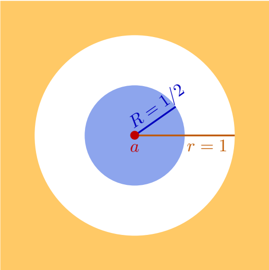
假设**幂级数**的**收敛半径**为 R $(0<R\le+\infty)$，则它在**圆** $|z-a|<R$ 上**绝对收敛**且**内闭一致收敛**，并具有**解析**的**和函数**，记作 $f_1(z)$

令 $\zeta = \frac{1}{z-a}$，那么**第二个级数**可改写为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n$，假设它的**收敛半径**为 $\frac{1}{r}$ $(0<\frac{1}{r}\le+\infty)$，则它在**圆** $|\zeta|<\frac{1}{r}$ 上**绝对收敛**且**内闭一致收敛**，具有解析的和函数

换句话说，**级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 当 $|z-a|>r$ $(0\le r<+\infty)$ 时**绝对收敛**且**内闭一致收敛**，并具有**解析**的**和函数**，记作 $f_2(z)$

例 1

若 $r > R$，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 没有公共收敛区域，因而双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 处处发散



例 1　双边幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

正幂部分在圆 $|z| < 1/2$ 内（即 $|2z| < 1$）绝对收敛

负幂部分在单位圆外 $|z| > 1$（即 $|1/z| < 1$）绝对收敛

所以原双边幂级数处处发散

例 2

若 $r = R$，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 也没有公共收敛区域，但圆周 $|z-a| = R = r$ 上可能存在收敛点

例 2 双边幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n^2}, \quad \zeta = \frac{1}{z}$

对于正幂部分，根据收敛半径的 d’Alembert 计算公式，有

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 1, \quad R = \frac{1}{l} = 1$$

因此正幂部分在单位圆内 $|z| < 1$ 绝对收敛

而负幂部分在单位圆外 $|z| > 1$ 绝对收敛，所以原双边幂级数没有公共收敛区域

在单位圆周 $|z| = 1$ 上，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$ 收敛（参考第三章选读的 §2.4），故原双边幂级数在单位圆周上绝对收敛

关于双边幂级数的定理

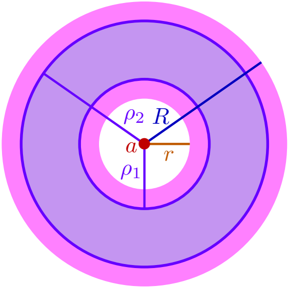
- 若 $r < R$，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 有公共的收敛区域，即环域

$$H: r < |z-a| < R \quad (0 \le r < R \le +\infty)$$

- 这时，根据上章的 Weierstrass 定理，有如下定理

定理　双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 具有下列性质

1. 在收敛环 H 内绝对收敛于 $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$，且在闭环 $r < \rho_1 \le |z-a| \le \rho_2 < R$ 上一致收敛（即在 H 上内闭一致收敛）
2. 和函数 $f(z)$ 在收敛环 H 内解析
3. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛环 H 内可以逐项求导和逐项积分



例 3

例 3 双边幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$

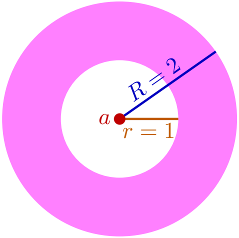
正幂部分在圆 $|z|<2$ 内 (即 $|z/2|<1$) 绝对收敛于函数 $\dfrac{1}{1-z/2}=\dfrac{2}{2-z}$

负幂部分在单位圆外 $|z|>1$ (即 $|1/z|<1$) 绝对收敛于函数 $\dfrac{1/z}{1-1/z}=\dfrac{1}{z-1}$

所以原双边幂级数在环域 $H:1<|z|<2$ 中绝对收敛

于函数

$$\frac{2}{2-z}+\frac{1}{z-1}=-\frac{z}{(z-1)(z-2)}$$



容易看出，该和函数在环域 H 中解析

§1.2 解析函数的 Laurent 展开

🕹 由上面的分析，双边幂级数在收敛环内具有解析的和函数，换句话说，它在收敛环内代表一个解析函数

❓ 反过来，在环域内解析的函数是否可以展开为双边幂级数呢?

❗ 下面的定理给出了肯定的答案

§1.2 解析函数的 Laurent 展开

Pierre Alphonse Laurent
(1813–1854)

🕹 由上面的分析，双边幂级数在收敛环内具有解析的和函数，换句话说，它在收敛环内代表一个解析函数

❓ 反过来，在环域内解析的函数是否可以展开为双边幂级数呢?

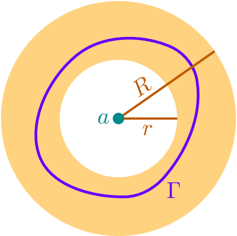
❗ 下面的定理给出了肯定的答案

💜 **Laurent 定理** 设函数 $f(z)$ 在环域 $H: r<|z-a|<R$ $(0 \leq r<R \leq +\infty)$ 内解析，则在 H 内可以展开为双边幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

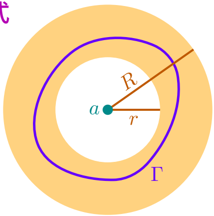
其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n \in \mathbb{Z})$,

而 Γ 是环内包围内圆的任一围线，且展开式是唯一的



Laurent 展开式

🎮 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 称为 $f(z)$ 在 a 点的 **Laurent 展开式**

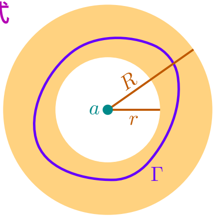


🎰 右边称为 **Laurent 级数**，c_n 称为 **Laurent 系数**

↩️ **注** **Laurent 定理**在形式上与 **Taylor 定理**非常相似，**证明**(见**选读内容**) 的方法也相似，了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的

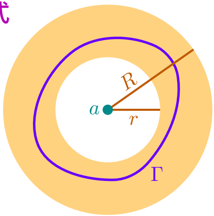
Laurent 展开式

- $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 称为 $f(z)$ 在 a 点的 **Laurent 展开式**
- 右边称为 **Laurent 级数**，c_n 称为 **Laurent 系数**
- **注** **Laurent 定理**在形式上与 **Taylor 定理**非常相似，**证明**(见**选读内容**) 的方法也相似，了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的



- 一般来说，即使**正幂项**的**系数** c_n 也**不能**表示为**高阶导数** $f^{(n)}(a)/n!$ 的形式
- 这是因为 $f(z)$ 可能在**闭圆** $|z-a|\le r$ 上有**奇点**，所以在 Γ 上的**积分不满足**应用 **Cauchy 高阶导数公式**的条件

Laurent 展开式



$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 称为 $f(z)$ 在 a 点的 **Laurent 展开式**

右边称为 **Laurent 级数**，c_n 称为 **Laurent 系数**

注 **Laurent 定理**在形式上与 **Taylor 定理**非常相似，**证明**（见**选读内容**）的方法也相似，了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的

一般来说，即使**正幂项**的**系数** c_n 也**不能**表示为**高阶导数** $f^{(n)}(a)/n!$ 的形式

这是因为 $f(z)$ 可能在**闭圆** $|z-a| \le r$ 上有**奇点**，所以在 Γ 上的**积分不满足**应用 **Cauchy 高阶导数公式**的条件

如果 $f(z)$ 在**闭圆** $|z-a| \le r$ 上确实**没有奇点**，那么就它就在**圆** $|z-a| \le R$ 上**解析**，这时 **Laurent 级数**应该退化为 **Taylor 级数**，**后者**是**前者**的特殊情况

事实上，这时有 $c_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} \mathrm{d}\zeta = 0$

$(n \in \mathbb{N}^+)$，这里用了 **Cauchy 积分定理**，因为**被积函数**中在 Γ **所包围的闭域**上**解析**

讨论

- 一般情况下，**Laurent 展开式**中有**负幂项**，因为 $f(z)$ 在**闭圆** $|z-a| \le r$ 上有**奇点**
- 但是，$f(z)$ 的**奇点不一定**在 a
- 所以，**不要**因为**展开式**中有 $z-a$ 的**负幂项**就**误以为** a 是 $f(z)$ 的**奇点**

讨论

- 一般情况下，**Laurent 展开式**中有**负幂项**，因为 $f(z)$ 在**闭圆** $|z-a| \le r$ 上有**奇点**
- 但是，$f(z)$ 的**奇点不一定**在 a
- 所以，**不要**因为**展开式**中有 $z-a$ 的**负幂项**就**误以为** a 是 $f(z)$ 的**奇点**
- 例如，当 $1 < |z| < +\infty$ 时，有 $|1/z| < 1$，则

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$$

- **这个展开式**中全是 z 的**负幂项**，但 $z=0$ **并不是被展开函数**的**奇点**
- 这是因为**展开式**在 $z=0$ **附近并不成立**

讨论

- 一般情况下，**Laurent 展开式**中有**负幂项**，因为 $f(z)$ 在**闭圆** $|z-a| \le r$ 上有**奇点**
- 但是，$f(z)$ 的**奇点不一定**在 a
- 所以，**不要**因为**展开式**中有 $z-a$ 的**负幂项**就**误以为** a 是 $f(z)$ 的**奇点**

- 例如，当 $1 < |z| < +\infty$ 时，有 $|1/z| < 1$，则

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$$

- **这个展开式**中全是 z 的**负幂项**，但 $z=0$ **并不是被展开函数**的**奇点**
- 这是因为**展开式**在 $z=0$ **附近并不成立**

- 知道了 **Laurent 展开式**的**唯一性**，就可以用**任何方法**来求展开式，而不一定要用 $c_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ 来计算**系数**
- 最常用的方法是利用**已知**的 **Taylor 级数展开式**，参见下面的展开实例

§1.3 展开实例

例 4 在 $a=0$ 处展开 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 为 **Laurent 级数**

解 $f(z)$ 有**奇点** $z=0$ 和 $z=1$

故 $f(z)$ 分别在 $H_1: 0<|z|<1$ 和 $H_2: 1<|z|<+\infty$ 上**解析**

在 H_1 上，

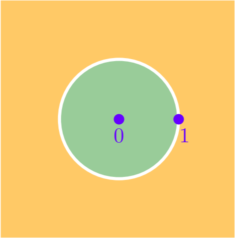
$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}z^n$$

最后一步**作替换** $n\to n+1$

在 H_2 上，有 $0<|1/z|<1$，则

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$$

最后一步**作替换** $n\to n-2$



§2 解析函数的零点与孤立奇点

§2.1 解析函数的零点

- 为了后面讨论的需要，这里简单介绍一下**解析函数**的**零点**的概念
- m **阶零点定义** 若函数 $f(z)$ 在 a **点解析**，且

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0,\quad f^{(m)}(a)\neq 0$$

则 a 称为 $f(z)$ 的 m **阶零点**

- **一阶零点**亦称为**单零点**，满足 $f(a)=0$ 和 $f'(a)\neq 0$

§2 解析函数的零点与孤立奇点

§2.1 解析函数的零点

为了后面讨论的需要，这里简单介绍一下**解析函数**的**零点**的概念

m 阶零点定义 若函数 $f(z)$ 在 a **点解析**，且

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0$$

则 a 称为 $f(z)$ 的 m **阶零点**

一阶零点亦称为**单零点**，满足 $f(a) = 0$ 和 $f'(a) \neq 0$

注 $f(z)$ 在 a **点解析**，即在**某圆** $K : |z-a| < R$ 内**解析**

在**该圆**内，$f(z)$ 可展开为 **Taylor 级数** $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$，其中 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

如果**所有的系数均为零**，则 $f(z)$ 在 K 内**恒为零**，而 $f^{(n)}(a) = n!\, c_n = 0 \ (n \in \mathbb{N})$

若 $f(z)$ 在 K 内**不恒为零**，则**定义**中的 m **值**总是**存在**的，$f^{(m)}(a) = m!\, c_m \neq 0$

零点举例

- **例 1** $f(z) = \sin z$ 的**零点**为 $z_n = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$
- 由于 $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-)^n \neq 0$，故**所有**的 z_n 都是**单零点**

零点举例

- **例 1** $f(z) = \sin z$ 的**零点**为 $z_n = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$
- 由于 $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-)^n \neq 0$，故**所有**的 z_n 都是**单零点**
- **例 2** 显然 $z = 0$ 是**函数** $f(z) = z - \sin z$ 的**零点**
- 由于 $f'(0) = (1 - \cos z)\big|_{z=0} = 0$，$f''(0) = \sin z\big|_{z=0} = 0$
- 而 $f'''(0) = \cos z\big|_{z=0} = 1 \neq 0$，故 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的**三阶零点**

零点举例

例 1 $f(z) = \sin z$ 的**零点**为 $z_n = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$

由于 $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-)^n \neq 0$，故**所有**的 z_n 都是**单零点**

例 2 显然 $z = 0$ 是**函数** $f(z) = z - \sin z$ 的**零点**

由于 $f'(0) = (1 - \cos z)\big|_{z=0} = 0$，$f''(0) = \sin z\big|_{z=0} = 0$

而 $f'''(0) = \cos z\big|_{z=0} = 1 \neq 0$，故 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的**三阶零点**

例 3 $f(z) = (z-a)^m \ (m \in \mathbb{N}^+)$

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}, \quad f''(z) = m(m-1)(z-a)^{m-2}, \quad \cdots$$

$$f^{(n)}(z) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(z-a)^{m-n} = \frac{m!\,(z-a)^{m-n}}{(m-n)!}, \quad n \leq m$$

有 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ 和 $f^{(m)}(a) = m! \neq 0$

故 a 是 $f(z)$ 的 m **阶零点**（同时，$z = a$ 是方程 $(z-a)^m = 0$ 的 m **重根**）

例 4

例 4 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$ $(m\in\mathbb{N}^+)$，其中 $\varphi(z)$ 在 a **点解析**且 $\varphi(a)\neq 0$

由 $f'(z)=m(z-a)^{m-1}\varphi(z)+(z-a)^m\varphi'(z)$ 得 $f'(a)=0$ $(m>1)$

类似可得 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$

但 $f^{(m)}(a)=m!\,\varphi(a)\neq 0$

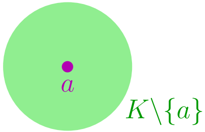
故 a 是 $f(z)$ 的 m **阶零点**

§2.2　解析函数的孤立奇点及其分类

孤立奇点定义　如果函数 $f(z)$ 以 a 为奇点，但在 a 的某去心邻域 $K\backslash\{a\}$：$0<|z-a|<R$ 中解析，则 a 称为 $f(z)$ 的孤立奇点 (isolated singularity)

粗略地说，如果函数 $f(z)$ 以 a 为奇点，但在 a 附近没有别的奇点，则 a 就是 $f(z)$ 的孤立奇点，所以这一定义是非常直观的

- 考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$
- $z_n=\dfrac{1}{n\pi}$ $(|n|\in\mathbb{N}^+)$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点
- $z=0$ 也是 $f(z)$ 的奇点，但它不是孤立奇点
- 这是因为，当 $n\to\infty$ 时 $z_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0$，导致在 $z=0$ 的任一去心邻域内都能找到其它奇点

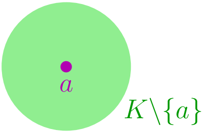


§2.2 解析函数的孤立奇点及其分类

孤立奇点定义 如果函数 $f(z)$ 以 a 为**奇点**，但在 a 的**某去心邻域** $K\backslash\{a\}$: $0<|z-a|<R$ 中**解析**，则 a 称为 $f(z)$ 的**孤立奇点** (isolated singularity)

粗略地说，如果函数 $f(z)$ 以 a 为**奇点**，但在 a **附近没有别的奇点**，则 a 就是 $f(z)$ 的**孤立奇点**，所以这一定义是非常直观的

去心邻域 $K\backslash\{a\}: 0<|z-a|<R$ 是**内半径为零**的**环域**，$f(z)$ 在其中**解析**，则可以展开为 **Laurent 级数** $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$



展开式中的**正幂部分** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 称为**正则部分**

而**负幂部分** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 称为**主要部分**

由于现在展开式在 a **点附近**成立，故其中**负幂项**的**多少**可以刻画 $f(z)$ 在 a **点**的**奇性**的**大小**，**Laurent 展开式**的**主要用途**正在于此

关于奇性的大小

- 粗略地说，所谓“奇性的大小”指的是函数在奇点处趋近于无穷大的速度
- 考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^m}$ $(m \in \mathbb{N}^+)$，$z = a$ 是它的孤立奇点
- 当 $z \to a$ 时，$f(z)$ 趋近于无穷大
- 若 $|z-a| \ll 1$，则 $\left|\dfrac{1}{z-a}\right| \gg 1$，$m$ 越大意味着 $|f(z)| = \left|\dfrac{1}{z-a}\right|^m$ 越大
- 比如，若 $\left|\dfrac{1}{z-a}\right| = 10^3$，则 $\left|\dfrac{1}{z-a}\right|^2 = 10^6$，$\left|\dfrac{1}{z-a}\right|^3 = 10^9$
- 可见，m 越大，则 $f(z)$ 趋近于无穷大的速度越快，即它在 $z = a$ 处的奇性越大

孤立奇点的分类

根据主要部分的不同情况，可以为孤立奇点分类

孤立奇点分类的定义

1. 如果主要部分为零，则 a 称为 $f(z)$ 的可去奇点 (removable singularity)

2. 如果主要部分为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$，其中 $c_{-m} \neq 0$，则 a 称为 $f(z)$ 的 m 阶极点 (pole)，$m=1$ 时亦称为单极点

3. 如果主要部分有无穷多项，则 a 称为 $f(z)$ 的本性奇点 (essential singularity)

§3 各种孤立奇点的判断

§3.1 可去奇点

例 1 函数 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 Laurent 级数

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

由于展开式的主要部分为零，按定义，$z=0$ 是可去奇点

§3 各种孤立奇点的判断

§3.1 可去奇点

例 1 **函数** $\frac{\sin z}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析，故可以展开为 **Laurent 级数**

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

由于展开式的主要部分为零，按定义，$z = 0$ 是可去奇点

如果只看右边幂级数，其收敛半径为 $+\infty$，故它在复平面上解析，包括 $z = 0$ 点

令 $\zeta = z^2$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\zeta^n$，其中 $c_n = \frac{(-)^n}{(2n+1)!}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0, \quad R = +\infty$$

幂级数的收敛圆是 $|z^2| = |\zeta| < +\infty$，即 $|z| < +\infty$

§3　各种孤立奇点的判断

§3.1　可去奇点

例 1　**函数** $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 **Laurent 级数**

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

由于展开式的主要部分为零，按定义，$z=0$ 是可去奇点

如果只看右边幂级数，其收敛半径为 $+\infty$，故它在复平面上解析，包括 $z=0$ 点

由于函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$ 在复平面上与以上幂级数相等，故 $f(z)$ 在复平面上解析，包括 $z=0$ 点

可见，只要对原来的函数 $\dfrac{\sin z}{z}$ 适当补上 $z=0$ 处的定义，即可构造出一个解析函数 $f(z)$，所以 $z=0$ 称为可去奇点是非常适当的

一般情况下，只要令 $f(a)=c_0$ 即可将可去奇点 a 变为解析点

判断可去奇点的定理

🧢 下面的定理用于判断可去奇点

💙 **可去奇点定理** 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为可去奇点的充要条件是

$$\boxed{\lim_{z\to a} f(z) = b}$$

其中 $b \neq \infty$

§3.2 极点

例 2 函数 $\dfrac{e^z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 **Laurent 级数**

$$\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

由于展开式的主要部分有一项，按定义，$z=0$ 是单极点

§3.2 极点

例 2 函数 $\dfrac{e^z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 Laurent 级数

$$\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

由于展开式的主要部分有一项，按定义，$z=0$ 是单极点

下面的定理用于判断极点

m 阶极点定理 若 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三条命题等价

1. $f(z)$ 在 a 的主要部分为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ $(c_{-m}\neq 0)$，即 a 为 m 阶极点
2. $f(z)$ 在 a 的某去心领域内可表达为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，其中 $\varphi(z)$ 在 a 解析，且 $\varphi(a)\neq 0$
3. $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点

注 其中第一条是 m 阶极点的定义，其它两条也很直观，证明见选读内容

极点举例

例 3 再回头看例 2 的函数 $\frac{e^z}{z}$，由于 e^z 解析，且 $e^0 = 1 \neq 0$，根据定理的第二条，$z = 0$ 是该函数的单极点

极点举例

例 3 再回头看**例 2** 的**函数** $\dfrac{e^z}{z}$，由于 e^z **解析**，且 $e^0 = 1 \neq 0$，根据**定理**的**第二条**，$z = 0$ 是该函数的**单极点**

例 4 考虑**函数** $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$，易知 $z = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 都是其**孤立奇点**

- 它们都是 $\dfrac{1}{\cot z} = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 的**单零点**，因为 $(\tan z)'\big|_{z=n\pi} = \dfrac{1}{\cos^2 z}\bigg|_{z=n\pi} = 1 \neq 0$
- 根据**定理**的**第三条**，$z = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 都是 $\cot z$ 的**单极点**

极点举例

例 3 再回头看**例 2** 的**函数** $\dfrac{e^z}{z}$，由于 e^z **解析**，且 $e^0 = 1 \neq 0$，根据**定理**的**第二条**，$z = 0$ 是该函数的**单极点**

例 4 考虑**函数** $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$，易知 $z = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 都是其**孤立奇点**

它们都是 $\dfrac{1}{\cot z} = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 的**单零点**，因为 $(\tan z)'\big|_{z=n\pi} = \dfrac{1}{\cos^2 z}\bigg|_{z=n\pi} = 1 \neq 0$

根据**定理**的**第三条**，$z = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 都是 $\cot z$ 的**单极点**

例 5 考虑**函数** $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$，由 **§2 例 2** 知 $z = 0$ 是 $z - \sin z$ 的**三阶零点**

根据**定理**的**第三条**，$z = 0$ 是 $f(z)$ 的**三阶极点**

极点举例

例 3 再回头看**例 2** 的**函数** $\frac{e^z}{z}$，由于 e^z **解析**，且 $e^0 = 1 \neq 0$，根据**定理**的**第二条**，$z = 0$ 是该函数的**单极点**

例 4 考虑**函数** $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$，易知 $z = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 都是其**孤立奇点**

它们都是 $\frac{1}{\cot z} = \frac{\sin z}{\cos z}$ 的**单零点**，因为 $(\tan z)'\big|_{z=n\pi} = \frac{1}{\cos^2 z}\Big|_{z=n\pi} = 1 \neq 0$

根据**定理**的**第三条**，$z = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 都是 $\cot z$ 的**单极点**

例 5 考虑**函数** $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$，由 **§2 例 2** 知 $z = 0$ 是 $z - \sin z$ 的**三阶零点**

根据**定理**的**第三条**，$z = 0$ 是 $f(z)$ 的**三阶极点**

由**上述定理**，容易得到以下关于**极点判定**的推论

推论 函数 $f(z)$ 的**孤立奇点** a 为**极点**的**充要条件**是 $\boxed{\lim_{z \to a} f(z) = \infty}$

这一推论主要用来判定一个**孤立奇点**是否**极点**

若要进一步判定其**阶数**，就需要用**上面的定理**

§3.3 本性奇点

- 由前面关于可去奇点和极点的讨论，容易得到以下判定本性奇点的定理
- **本性奇点定理** 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点的充要条件是

$$\boxed{\lim_{z\to a} f(z) \text{ 不存在}}$$

- 即 $\lim_{z\to a} f(z)$ 不为有限值，亦不为 ∞
- 这说明在本性奇点处极限 $\lim_{z\to a} f(z)$ 与 $z \to a$ 的方式有关

§3.3 本性奇点

- 由前面关于可去奇点和极点的讨论，容易得到以下判定本性奇点的定理
- **本性奇点定理** 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点的充要条件是

$$\boxed{\lim_{z\to a} f(z)\ \text{不存在}}$$

- 即 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不为有限值，亦不为 ∞
- 这说明在本性奇点处极限 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 与 $z\to a$ 的方式有关
- **例 6** 函数 $\mathrm{e}^{1/z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 Laurent 级数

$$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

- 展开式的主要部分有无穷多项，按定义，$z=0$ 是本性奇点
- 当 $z=x\in\mathbb{R}$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0+}\mathrm{e}^{1/x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{t}=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{1/x}=\lim\limits_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{t}=0$
- 可见，极限 $\lim\limits_{z\to 0}\mathrm{e}^{1/z}$ 不存在