数 学 物 理 方 法

第一章　复变函数与解析函数

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 9 月 8 日

数学物理方法课程

- 本课程包括两部分内容：复变函数与数学物理方程
- 复变函数是微积分的内容从实变量到复变量的扩展
- 它是进一步学习数学物理方程和特殊函数的基础
- 其本身在物理、力学和工程问题中也具有多方面的应用

数学物理方法课程

- 本课程包括两部分内容：复变函数与数学物理方程
- 复变函数是微积分的内容从实变量到复变量的扩展
- 它是进一步学习数学物理方程和特殊函数的基础
- 其本身在物理、力学和工程问题中也具有多方面的应用
- 数学物理方程主要研究物理或工程问题中所涉及的各种偏微分方程和积分方程
- 本课程只研究偏微分方程，主要是二阶线性偏微分方程，包括波动方程、输运方程和稳定场方程
- 在偏微分方程的导出、求解和对解的物理分析三个方面，求解是课程的重点内容
- 本课程所涉及的方法在经典物理、近代物理和工程技术中都有广泛的应用

教材和参考书

主讲教材

- 我院林琼桂老师**自编讲义电子版**，已交稿至高等教育出版社，尚未出版

辅助教材

1. 梁昆淼编，刘法、缪国庆修订，《数学物理方法》，第 4 版，高等教育出版社，2010
2. 吴崇试，《数学物理方法》，修订版，高等教育出版社，2015

参考书

1. 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，第 2 版，高等教育出版社，北京，2002
2. 姚端正、梁家宝，《数学物理方法》，第 3 版，科学出版社，北京，2010
3. 邵惠民，《数学物理方法》，第 2 版，科学出版社，北京，2010
4. 杨孔庆，《数学物理方法》，高等教育出版社，北京，2012

更多参考书

5. 郭敦仁，《数学物理方法》，第 2 版，高等教育出版社，北京，1991
6. 钟玉泉，《复变函数论》，第 3 版，高等教育出版社，北京，2004
7. 王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，北京大学出版社，北京，2000
8. **E. T. Whittaker** and **G. N. Watson**, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927
9. **R. Courant** and **D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics*, New York, Interscience, 1953；**R. 柯朗、D. 希尔伯特著**，钱敏、郭敦仁译，《数学物理方法》，北京，科学出版社，2011
10. **S. Hassani**, *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*, 2nd ed., New York, Springer, 2013
11. 胡嗣柱、徐建军，《数学物理方法解题指导》，北京，高等教育出版社，1997
12. 周治宁、吴崇试、钟毓澍，《数学物理方法习题指导》，北京，北京大学出版社，2004

第一章　复变函数与解析函数

§1　复数

§1.1　复数的定义

- 形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为**复数** (complex number)，其中 $x \in \mathbb{R}$，$y \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ 表示**实数的集合**；**虚数单位** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$；**复数的集合**记作 $\mathbb{C}$
- x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作 $x = \mathrm{Re}\, z$ 和 $y = \mathrm{Im}\, z$
- 虚部为零的复数就是**实数**，实部为零而虚部非零的复数称为**纯虚数**
- **复数** $z^* = x - \mathrm{i}y$ 称为 z 的**共轭** (conjugate) **复数**或**复共轭**，亦记作 $\bar{z}$

第一章 复变函数与解析函数

§1 复数

§1.1 复数的定义

- 形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为**复数** (complex number)，其中 $x \in \mathbb{R}$，$y \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ 表示**实数的集合**；**虚数单位** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$；**复数的集合**记作 $\mathbb{C}$
- x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作 $x = \mathrm{Re}\, z$ 和 $y = \mathrm{Im}\, z$
- 虚部为零的复数就是**实数**，实部为零而虚部非零的复数称为**纯虚数**
- **复数** $z^* = x - \mathrm{i}y$ 称为 z 的**共轭** (conjugate) **复数**或**复共轭**，亦记作 $\bar{z}$
- **注** 一般认为 z^* 和 z 是**互相独立**的变量，犹如 x 和 y 是互相独立的变量
- 事实上，(z^*, z) 和 (x, y) 两组变量可以互相**线性**表出：

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^*)$$

- 给定 z，就能按照 $z^* = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, z$ 的规则得出 z，因此可将 z^* 看作 z **的函数**
- 但这**并非简单**的函数，在 **§3.1** 会看到，z^* 看作 z 的函数**处处连续**却**处处不可导**

§1.2 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，**复数的四则运算规则**为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) \pm \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

理解一　利用实数的四则运算和 $\mathrm{i}^2 = -1$ 即可得到这些结果：

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

§1.2 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的四则运算规则为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) \pm \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

理解一 利用实数的四则运算和 $\mathrm{i}^2 = -1$ 即可得到这些结果：

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

理解二 将以上结果当作运算的定义，则可以验证实数的四则运算规则如交换律、结合律、分配律等均对复数成立，如 $z_1 \pm z_2 = z_2 \pm z_1$、$z_1 z_2 = z_2 z_1$，且 $\mathrm{i}^2 = -1$

这正是所期望的，因为复数包含实数，它的运算规则当然要与实数运算规则相容

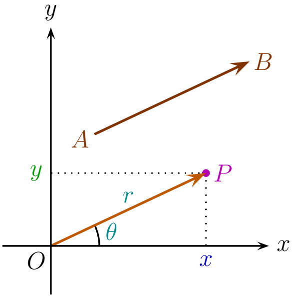
注 由上面的加法规则可见复数的加法与平面上矢量的加法一致

§1.3 复数的各种表示法

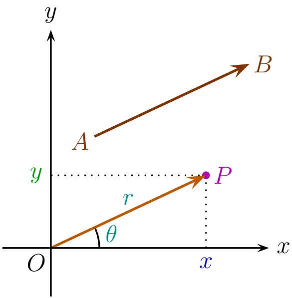
1. **代数表示**：$z = x + \mathrm{i}y$
2. **几何表示**：有两种表示方式

① 用 xy **平面**上的**点** P 来表示**复数** z

- P 的**横坐标**为 $x = \mathrm{Re}\, z$，**纵坐标**为 $y = \mathrm{Im}\, z$
- 这样复数与平面上的点是**一一对应**的
- 所以该 xy 平面亦称为**复平面**



§1.3　复数的各种表示法



1 **代数表示**：$z = x + \mathrm{i}y$

2 **几何表示**：有两种表示方式

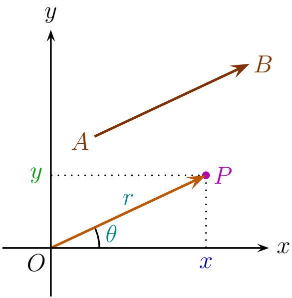
1 用 xy **平面**上的**点** P 来表示**复数** z

- P 的**横坐标**为 $x = \mathrm{Re}\, z$，**纵坐标**为 $y = \mathrm{Im}\, z$
- 这样复数与平面上的点是**一一对应**的
- 所以该 xy 平面亦称为**复平面**

2 用**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 来表示**复数** z

- **矢量** $\overrightarrow{OP}$ 在 x **轴**上的**投影**为 $x = \mathrm{Re}\, z$，在 y **轴**上的**投影**为 $y = \mathrm{Im}\, z$
- 这样复数与平面上的矢量也是**一一对应**的
- 注意：起点不同，但**方向**和**长度相同**的矢量是**等价**的
- 图上**矢量** $\overrightarrow{AB}$ 与**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 表示**同一复数**

§1.3 复数的各种表示法



1. **代数表示**：$z = x + \mathrm{i}y$
2. **几何表示**：有两种表示方式
   1. 用 xy **平面**上的**点** P 来表示**复数** z
      - P 的**横坐标**为 $x = \operatorname{Re} z$，**纵坐标**为 $y = \operatorname{Im} z$
      - 这样复数与平面上的点是**一一对应**的
      - 所以该 xy 平面亦称为**复平面**
   2. 用**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 来表示**复数** z
      - **矢量** $\overrightarrow{OP}$ 在 x **轴**上的**投影**为 $x = \operatorname{Re} z$，在 y **轴**上的**投影**为 $y = \operatorname{Im} z$
      - 这样复数与平面上的矢量也是**一一对应**的
      - 注意：起点不同，但**方向**和**长度相同**的矢量是**等价**的
      - 图上**矢量** $\overrightarrow{AB}$ 与**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 表示**同一复数**
3. **三角表示**：利用**点** P 的**极坐标** (r, θ)，以及 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，得到

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

复数的指数表示

4 **指数表示**：定义**纯虚数** $\mathrm{i}\theta$ 的**指数** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \equiv \exp(\mathrm{i}\theta) \equiv \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，将**复数** z 表达为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- r 称为复数 z 的**模** (module)，θ 称为**辐角** (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足 } \tan\theta = \frac{y}{x}$$

复数的指数表示

4 **指数表示**：定义**纯虚数** $\mathrm{i}\theta$ 的**指数** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \equiv \exp(\mathrm{i}\theta) \equiv \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，将**复数** z 表达为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- r 称为复数 z 的**模** (module)，θ 称为**辐角** (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足}\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 根据 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned}$$

- 可见，**宗量**为**纯虚数**的指数函数与**实变量**的指数函数具有**同样的运算性质**

注 函数的**自变量**可以是一个复杂的对象，这时通常称为**宗量** (argument)

复数的指数表示

4 **指数表示**：定义纯虚数 $\mathrm{i}\theta$ 的指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \equiv \exp(\mathrm{i}\theta) \equiv \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，将复数 z 表达为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- r 称为复数 z 的**模** (module)，θ 称为**辐角** (argument)，记作

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta \equiv \operatorname{Arg} z, \quad \text{满足} \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 根据 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

- 可见，宗量为纯虚数的指数函数与实变量的指数函数具有**同样的运算性质**

注　函数的自变量可以是一个复杂的对象，这时通常称为宗量 (argument)

- 若 θ 是 z 的**辐角**，则 $\theta + 2n\pi$ 也是 z 的**辐角**，其中 $n \in \mathbb{Z}$，而 $\mathbb{Z}$ 是**整数的集合**
- 若**限制** $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$，则所得**单值分支**称为**主值分支**，记作 $\arg z$

用级数理解 Euler 公式

- **Euler 公式** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 也可以用**级数**理解
- 由 **Taylor 级数** $\mathrm{e}^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$ 和 $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ 得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Leonhard Euler
(1707–1783)

用级数理解 Euler 公式

Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 也可以用**级数**理解

由 **Taylor 级数** $\mathrm{e}^{\theta}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}$ 和 $i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k$ 得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\theta^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

Leonhard Euler
(1707–1783)

在**指数表示**下，**复数**的**乘法**和**除法**变得非常简单：

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\qquad |z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

此外，有 $z^*=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^*=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^*=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，故

$$|z^*|=r=|z|,\qquad zz^*=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=r^2=|z|^2$$

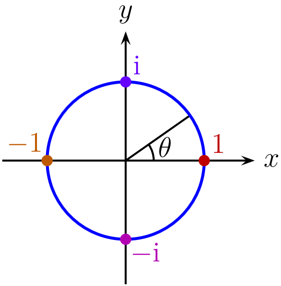
复数表示法举例

- $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ 的**模为** 1，对 θ 具有 2π **周期**
- 它对应于复平面上的**单位圆周**

$$e^{0i} = e^{2\pi i} = 1, \qquad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$$

$$e^{\pi i/2} = e^{-3\pi i/2} = i, \quad e^{3\pi i/2} = e^{-\pi i/2} = -i$$

- 对任意复数 z，有 $|ze^{i\theta}| = |z|$，特别地，$|-z| = |z|$

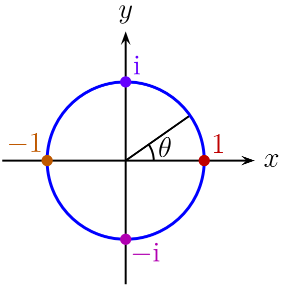


复数表示法举例

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ 的**模为** 1，对 θ 具有 2π **周期**
- 它对应于复平面上的**单位圆周**

$$\mathrm{e}^{0\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1, \qquad \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = -1$$

$$\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i}$$



- 对任意复数 z，有 $|z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = |z|$，特别地，$|-z| = |z|$

- $z = 3 + 4\mathrm{i}$ 的模为 $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，幅角为 $\operatorname{Arg} z = \arctan\dfrac{4}{3}$，可表示为

$$z = 5\exp\left(\mathrm{i}\arctan\frac{4}{3}\right) = 5\cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + 5\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right)$$

- $z = 2\mathrm{i}$ 可表示为

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

§1.4 乘方与开方

乘方是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

开方运算的结果是**多值**的，设 $z - a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，则

$$(z-a)^{1/n} \equiv \sqrt[n]{z-a} = \sqrt[n]{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

当 k 取**其它整数**时，所得结果与以上**重复**，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n **个不同的根**

§1.4 乘方与开方

- **乘方**是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

- **开方**运算的结果是**多值**的，设 $z - a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ，则

$$(z-a)^{1/n} \equiv \sqrt[n]{z-a} = \sqrt[n]{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

- 当 k 取**其它整数**时，所得结果与以上**重复**，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n **个不同的根**

- **根式函数** $\sqrt[n]{z-a}$ 的多值性源于**宗量** (此外为 $z - a$) 的**辐角多值性**，而非**自变量** (此处为 z) 的辐角多值性

- 如果取 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2j\pi)}$ ， $z - a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}$ ，其中 θ、ϕ 均为主值，而 $j, k \in \mathbb{Z}$，则 $\sqrt[n]{z-a}$ 的函数值**只与 k 有关**，而**与 j 无关**

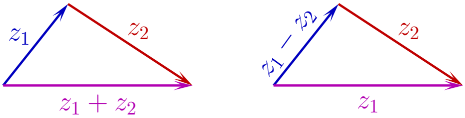
- 注意 ϕ 是 θ 的函数 (当然还依赖于 r 和 a)，但是 k 与 j 是**彼此独立**的，k 的取值不依赖于 j 的取值

§1.5 三角不等式

三角不等式有两条：

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$



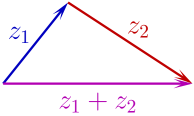
由于复数的加法与矢量的加法一样，上面两式就是关于三角形边长的不等式

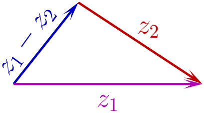
§1.5 三角不等式

三角不等式有两条：

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$$





由于复数的加法与矢量的加法一样，上面两式就是关于三角形边长的不等式

第一式的证明 利用 $\mathrm{Re}(z_1^* z_2) \le |z_1^* z_2| = |z_1||z_2|$ 得

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1^*+z_2^*)(z_1+z_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1^*z_2+z_1z_2^* \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1^*z_2)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1^*z_2)-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1^*z_2) \\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2 \end{aligned}$$

对上式两边开方即得第一式

第一式中等号成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z_1^*z_2)=|z_1z_2|$，而

$$\mathrm{Re}(z_1^*z_2) = \mathrm{Re}\left[r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}\right] = r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1) \le r_1r_2 = |z_1z_2|$$

可见，此充要条件是两个复数中有一个为 0，或两者方向相同

第二条三角不等式的证明

第二式的证明 由**第一式** $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ 得

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$$

也就是 $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

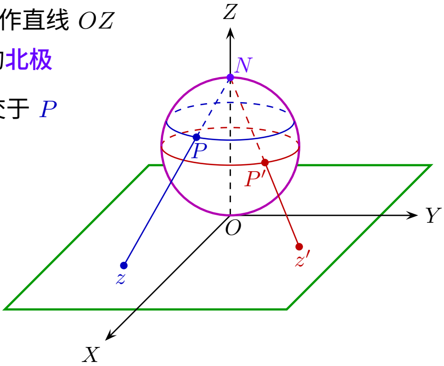
同理有 $|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1|$，故 $|z_1| - |z_2| \ge -|z_1 - z_2|$

合起来，得 $-|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

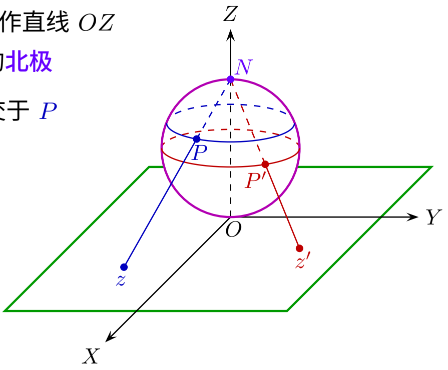
这等价于**第二式** $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

§1.6 复球面与无穷远点

- 作球面与复平面相切于原点 O，过 O 作直线 OZ 垂直于复平面，与球面交于 N，N 即球的北极
- 设 z 为任一复数，连接 Nz，与球面交于 P
- 易见 z 与 P 一一对应
- 故复数 z 亦可用球面上的点 P 表示
- 该球面称为复球面



§1.6 复球面与无穷远点



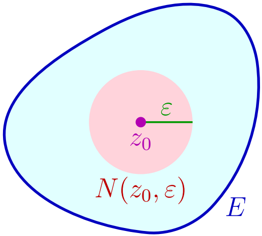
- 作**球面**与**复平面**相切于原点 O，过 O 作直线 OZ 垂直于**复平面**，与**球面**交于 N，N 即球的**北极**
- 设 z 为任一复数，连接 Nz，与**球面**交于 P
- 易见 z 与 P **一一对应**
- 故**复数** z 亦可用**球面**上的**点** P 表示
- 该球面称为**复球面**
- 当 $z \to \infty$ 时，$P \to N$
- 当 $z' \to \infty$ 时，亦有 $P' \to N$
- 因此，作为 N 的**对应点**，把**复平面**上的**无穷远点**当作一点，记作 ∞
- 包括 ∞ 的复平面称为**扩充复平面**
- **注** 将无穷远点当作一点是一种**规定**
- 以上复球面的作法**不是唯一**的，另一种常见的作法是将球心放在原点 O

§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念

1 **邻域** (neighborhood)：由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 **的** ε **邻域**，记作 $N(z_0, \varepsilon)$，它是以 z_0 为**圆心**、ε 为**半径**的**开圆**（不包含圆周）



§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念

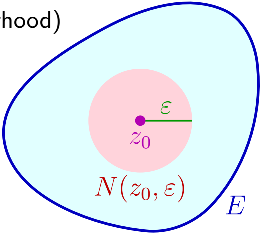
1 **邻域** (neighborhood)：由不等式 $|z-z_0|<\varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 **的** ε **邻域**，记作 $N(z_0,\varepsilon)$，它是以 z_0 为**圆心**、ε 为**半径**的**开圆**(不包含圆周)

注 这一定义是**一维空间**(**实轴**)的邻域概念——**开区间**——的推广

当然也可**等价**地将邻域定义为以 z_0 为中心的正方形内部，不过以上定义是方便的

在以上定义中并没有对 ε 的大小作任何规定，因此**邻域可以很大**

邻域去掉**圆心**后所得点集称为**去心邻域** (deleted neighborhood)



§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

由于复变函数总是定义在复平面的点集上，下面介绍关于点集的几个基本概念

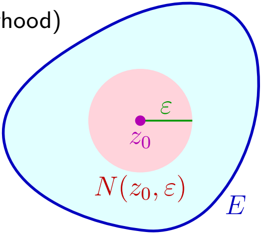
1 **邻域** (neighborhood)：由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集称为 z_0 **的** ε **邻域**，记作 $N(z_0, \varepsilon)$，它是以 z_0 为**圆心**、ε 为**半径**的**开圆**（不包含圆周）

注 这一定义是**一维空间**（**实轴**）的邻域概念——**开区间**——的推广

当然也可**等价**地将邻域定义为以 z_0 为中心的正方形内部，不过以上定义是方便的

在以上定义中并没有对 ε 的大小作任何规定，因此**邻域可以很大**

邻域去掉**圆心**后所得点集称为**去心邻域** (deleted neighborhood)



2 **内点** (interior point)：设 E 为**点集**，$z_0 \in E$，若存在 $\varepsilon > 0$，使 $N(z_0, \varepsilon) \subset E$，则 z_0 称为 E 的**内点**

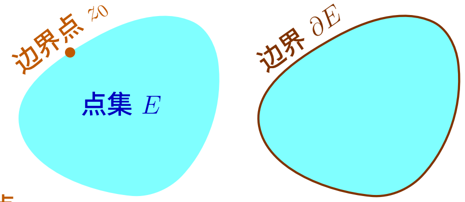
粗略地说，**内点**就是**该点及其周围**全属于**点集**

易见一个**邻域**内的**任意点**均为该邻域的**内点**

开集、边界点和边界

3 **开集** (open set)：若点集 E 中的点**皆为内点**，则称 E 为**开集**

显然，**邻域**就是开集



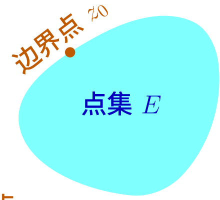
4 **边界点** (boundary point)：若点 z_0 的**任一邻域**内**既有**属于点集 E 的点，**又有**不属于 E 的点，则 z_0 为 E 的**边界点**

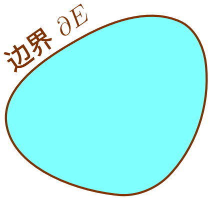
5 **边界** (boundary)：E 的**全部边界点**组成的点集称为 E 的**边界**，记作 ∂E

开集、边界点和边界

3 **开集** (open set)：若点集 E 中的点**皆为内点**，则称 E 为**开集**

显然，**邻域**就是开集



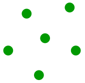


4 **边界点** (boundary point)：若点 z_0 的**任一邻域**内**既有**属于点集 E 的点，**又有**不属于 E 的点，则 z_0 为 E 的**边界点**

5 **边界** (boundary)：E 的**全部边界点**组成的点集称为 E 的**边界**，记作 ∂E

注　**边界点** z_0 本身**可以不属于** E；**开集**必不包含其**边界**

如果一点集由**有限个点**组成，或由**一弧段**组成，则所有的点均为**边界点**

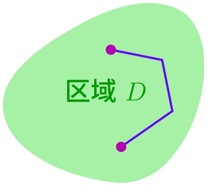


开圆或**闭圆**(包含圆周的圆) 的边界都是**圆周**

若点集 E 是由**开圆**(或**闭圆**) 内去掉若干点后所余部分构成的，则**去掉的点**均为**边界点**

区域

6 **区域** (domain)：非空点集 D 若满足以下两个条件，则称为**区域**



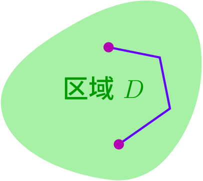
1. D 是**开集**
2. D 是**连通**的，即 D 中任意两点均可用**全属于 D 的折线连接**

注　区域是一种特殊的点集，是复变函数论中**最重要**的几何概念

显然，**邻域**或**开圆**就是**区域**

区域

6 **区域** (domain)：非空点集 D 若满足以下两个条件，则称为**区域**

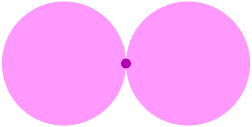


1. D 是**开集**
2. D 是**连通**的，即 D 中任意两点均可用**全属于 D 的折线连接**

注　区域是一种特殊的点集，是复变函数论中**最重要**的几何概念

显然，**邻域**或**开圆**就是**区域**

两个**不相交**的**开圆**的**并集**仍是**开集**，但**不是区域**，哪怕两个圆的圆周**相切**

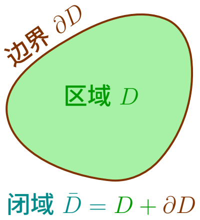


在相切的情况下，**两个圆加上切点仍不是区域**

因为**切点**是**边界点**，所以加上边界点以后虽然**连通**，但**不再是开集**

闭域、单通与复通区域

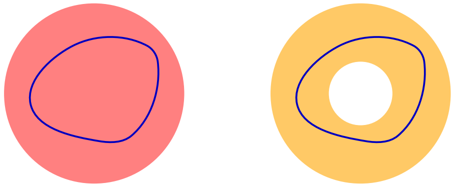
7 闭域 (closed domain)：区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域，记作 $\bar{D}$，即 $\bar{D} = D + \partial D$



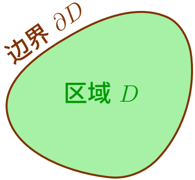
⏭ 注　区域都是开集，不包括边界

💍 以后提到圆或环时总不包括边界

💎 若包括边界，则称为闭圆或闭环



闭域、单通与复通区域



闭域 $\bar{D} = D + \partial D$

7 闭域 (closed domain)：区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域，记作 $\bar{D}$，即 $\bar{D} = D + \partial D$

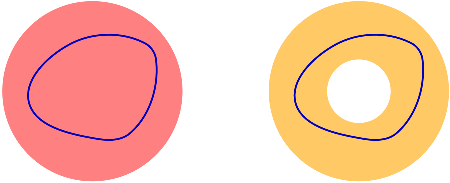
⏭ 注　区域都是开集，不包括边界

💍 以后提到圆或环时总不包括边界

💎 若包括边界，则称为闭圆或闭环

8 单通与复通区域：在区域 D 内画任意简单闭曲线，若其内部全含于 D，则称 D 为单通 (simply connected) 区域，否则称为复通 (multiply connected) 区域

⏫ 注　圆是单通的，而环是复通的

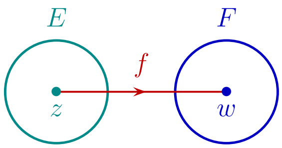


§2.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

设 E 是复平面上的点集，$\forall z \in E$，若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$



单值函数 $w = f(z)$

§2.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

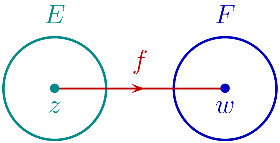
它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

设 E 是复平面上的点集，$\forall\, z \in E$，若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$

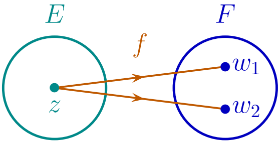
若对 $z \in E$ 有多个 (可以无穷多) 复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了多值函数 $w = f(z)$

E 称为函数 $w = f(z)$ 的定义域

$F = \{f(z) | z \in E\}$ 称为其值域



单值函数 $w = f(z)$



多值函数 $w = f(z)$

§2.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数

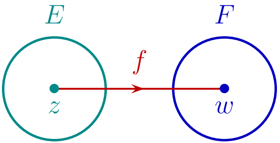
它不必在整个复平面上有定义，严格的定义如下

设 E 是复平面上的点集，$\forall z \in E$，若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$

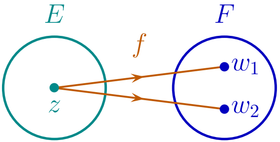
若对 $z \in E$ 有多个 (可以无穷多) 复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了多值函数 $w = f(z)$

E 称为函数 $w = f(z)$ 的定义域

$F = \{f(z) | z \in E\}$ 称为其值域



单值函数 $w = f(z)$



多值函数 $w = f(z)$

记 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$

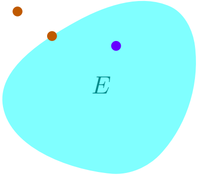
所以一个复变函数等价于两个二元实变函数，它给出了 z 平面到 w 平面的映射 (map) 或变换 (transform)

§2.3 复变函数的极限

📌 **复变函数** $w = f(z)$ 定义在**点集** E 上，z_0 是 E 的**聚点**

🔬 如果 $\forall \varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$，则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$



⏬ **注** 若在 z_0 的**任意小邻域**内均有**属于** E 而**异于** z_0 的点 (等价地，在 z_0 的**任意小去心邻域**内均有**属于** E 的点)，则称 z_0 为 E 的**聚点** (accumulation point)，它本身**可以不属于** E

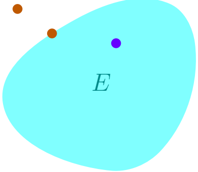
📍 **内点**就是典型的聚点；**边界点**则**可能是**聚点，也**可能不是**聚点

§2.3 复变函数的极限

📌 **复变函数** $w = f(z)$ 定义在**点集** E 上，z_0 是 E 的**聚点**

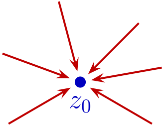
🔬 如果 $\forall \varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$，则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$



⏬ **注**　若在 z_0 的**任意小邻域**内均有**属于** E 而**异于** z_0 的点 (等价地，在 z_0 的**任意小去心邻域**内均有**属于** E 的点)，则称 z_0 为 E 的**聚点** (accumulation point)，它本身**可以不属于** E

📍 **内点**就是典型的聚点；**边界点**则**可能是**聚点，也**可能不是**聚点



🔱 在**复平面**上，$z \to z_0$ 的方式有**无穷多种**

✂️ 而在**实轴**上，$x \to x_0$ 的方式只有**两种**，即 $x \to x_0^+$ 和 $x \to x_0^-$

🛡️ 以上要求 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ 成立的范围是 $0 < |z - z_0| < \delta$，而不是 $|z - z_0| < \delta$

🧤 这对于函数的要求是**较弱**而非**较强**，因为这允许 $f(z_0)$ 与 w_0 **相差甚大**，甚至允许 $f(z)$ 在 z_0 **没有定义** (z_0 可以不在定义域 E 内)

§2.4 复变函数的连续性

复变函数 $w = f(z)$ 定义在**点集** E 上，$z_0 \in E$，如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ **在** z_0 **处连续**

注 易见**连续**就是不仅要有**极限**，而且该极限要**等于**该点处的**函数值**

显然，$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处**连续**的**充要条件**是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处**连续**

z_0 应该是 E 的**聚点**，否则极限没有意义，也就谈不上连续与否

若 $f(z)$ 在**点集** E 上的**各点连续**，则称 $f(z)$ **在点集** E **上连续**

§3 解析函数

🐷 解析函数是复变函数中最重要的一类

🐹 它的特点是可导或可微

🐔 为了研究解析函数，需要先定义复变函数的导数

🐸 今后研究的复变函数主要定义在区域上

§3.1 复变函数的导数

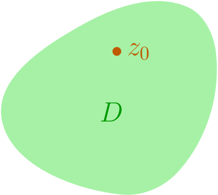
复变函数 $w=f(z)$ 定义在**区域** D 上，$z_0\in D$，如果**极限**

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且**有限**，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处**可导**或**可微** (differentiable)

该极限称为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的**导数** (derivative) 或**微商**，记作

$$f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$



§3.1 复变函数的导数

复变函数 $w=f(z)$ 定义在**区域** D 上，$z_0\in D$，如果**极限**

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

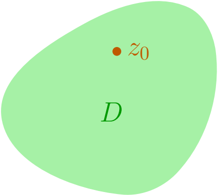
存在且有限，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处**可导**或**可微** (differentiable)

该极限称为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的**导数** (derivative) 或**微商**，记作

$$f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

若 $w=f(z)$ **在 z_0 处可导**，必有

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]=0$$



这等价于 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，因而 $f(z)$ **在 z_0 处连续**

导数举例

💙 **例 1 正整数次幂函数** $f(z) = z^n, \quad n = 1, 2, \cdots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{nz^{n-1}\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = nz^{n-1} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = nz^{n-1}$$

🐑 可见，**函数** $f(z) = z^n$ 在 z **平面**上**处处可导**

💜 **例 2 函数** $f(z) = z^*$ 显然**处处连续**，但**处处不可导**

🐐 这是因为 $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{(\Delta z)^*}{\Delta z}$ 的**极限不存在**：

$$\Delta z = \Delta x, \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\Delta z = \mathrm{i}\Delta y, \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} = \frac{-\mathrm{i}\Delta y}{\mathrm{i}\Delta y} = -1$$

§3.2 解析函数

🐅 若复变函数 $f(z)$ **在区域 D 内可导**，则称 $f(z)$ 是**区域 D** 内的**解析函数** (analytic function)，或称 $f(z)$ 在**区域 D** 内**解析**

🐆 解析函数也称为**全纯函数** (holomorphic function)

💙 **例 3　正整数次幂函数 $f(z) = z^n$** $(n = 1, 2, \cdots)$ 在**整个复平面**上**解析**

§3.2 解析函数

🐅 若复变函数 $f(z)$ **在区域 D 内可导**，则称 $f(z)$ 是**区域** D 内的**解析函数** (analytic function)，或称 $f(z)$ 在**区域** D 内**解析**

🐆 解析函数也称为**全纯函数** (holomorphic function)

💙 **例 3　正整数次幂函数 $f(z) = z^n$** $(n = 1, 2, \cdots)$ 在**整个复平面**上**解析**

⏪ **注**　函数 $f(z)$ 在区域 D 内**解析**与**可导**是一回事

🦌 有时候说函数 $f(z)$ **在点 z_0 处解析**，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的**某一邻域**内**可导**，而**不仅仅是在 z_0 处可导**

🦓 因此，函数**在一点解析**与**可导不是一回事**

§3.2 解析函数

🐅 若复变函数 $f(z)$ **在区域 D 内可导**，则称 $f(z)$ 是**区域 D** 内的**解析函数** (analytic function)，或称 $f(z)$ 在**区域 D** 内**解析**

🐆 解析函数也称为**全纯函数** (holomorphic function)

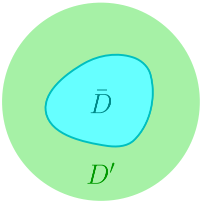
💙 **例 3 正整数次幂函数 $f(z) = z^n$** $(n = 1, 2, \cdots)$ 在**整个复平面**上**解析**

⏪ **注** 函数 $f(z)$ 在区域 D 内**解析**与**可导**是一回事

🦌 有时候说函数 $f(z)$ **在点 z_0 处解析**，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的**某一邻域**内**可导**，而**不仅仅是在 z_0 处可导**

🦓 因此，函数**在一点解析**与**可导不是一回事**

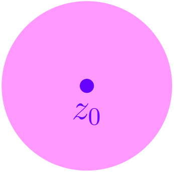
🐎 函数 $f(z)$ **在闭域 $\bar{D}$ 内解析**，指的是它在**某区域 D'** 内**解析**，而 $D' \supset \bar{D}$



§3.3 奇点

🦒 若复变函数 $f(z)$ 在某点 z_0 **不解析**，但在 z_0 的**任一邻域**内都有 $f(z)$ 的**解析点**，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点** (singular point)

❤️ **例 4** $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的**奇点**



⏮ **注** 函数 $f(z)$ 在某点 z_0 **不解析**，可能是在该点**没有定义**，也可能是有定义但不连续，还可能是连续但**不可导**，还可能是可导但仍**不解析**（见第 32 页**例 6**），等等

🦘 按上述定义，$f(z)$ 在点 z_0 **不解析**，**并不说明** z_0 就是奇点

🦙 比如**函数** $f(z)=z^*$ **处处不可导**，但**所有的点都不是奇点**

§3.4 求导法则

- 🐄 简单的基本初等函数的导数可以用定义计算
- 🐂 以上例 1 函数 $f(z) = z^n$ 是一个典型的例子
- 🐃 稍微复杂的基本初等函数 (如指数函数) 的导数计算方法在下一小节给出

§3.4 求导法则

🐄 简单的基本初等函数的导数可以用定义计算

🐂 以上例 1 函数 $f(z) = z^n$ 是一个典型的例子

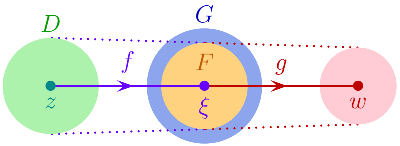
🐃 稍微复杂的基本初等函数 (如指数函数) 的导数计算方法在下一小节给出

🦬 初等函数的导数可由已知的基本初等函数的导数和以下求导法则得出

1️⃣ 若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在区域 D 内解析，则其和、差、积、商 (分母不为零) 均在 D 内解析，且求导法则与实变函数一致

🐈 例如，$[f_1(z)f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$ （**Leibniz 法则**）

§3.4 求导法则



初等函数的导数可由已知的基本初等函数的导数和以下求导法则得出

1 若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在区域 D 内解析，则其和、差、积、商 (分母不为零) 均在 D 内解析，且求导法则与实变函数一致

例如，$[f_1(z)f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$ （**Leibniz 法则**）

2 复合函数的求导法则

若函数 $\xi = f(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = g(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，且 $F = \{f(z) | z \in D\} \subset G$，则复合函数 $w = g[f(z)]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{\mathrm{d}g[f(z)]}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}g(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \qquad \text{（链式法则）}$$

注 $F \subset G$ 表示第一个函数的值域不能超出第二个函数的定义域

求导举例

💚 **例 5** 多项式 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n\in\mathbb{N})$

🐇 $\mathbb{N}$ 表示**自然数** $0,1,2,\cdots$ **的集合**

🐩 $P_n(z)$ 中各项是**常数函数**或**正整数次幂函数**，它们均在**整个复平面**上**解析**

🐕 因此，$P_n(z)$ 在**整个复平面**上**解析**

🦮 由**求导法则**得

$$
\begin{aligned}
P_n'(z) &= \sum_{k=0}^{n}(a_k z^k)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k)' = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k
\end{aligned}
$$

🐕‍🦺 最后一步作 $k\to k+1$ 的替换

§3.5 Cauchy-Riemann 条件

- 本小节研究怎样的函数**可导**，同时得出**导数**的一种**计算方法**
- 由于导数定义中 $\Delta z \to 0$ 的**方式**是**任意**的，**复变函数**的**可微性**是**非常苛刻**的
- 一般来说，如果 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 中的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ **相互独立**，那么即使 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都具有良好的解析性质，$f(z)$ 仍然**不一定**是**可微**的
- **例 2** 中**处处不可导**的**函数** $f(z) = z^* = x - \mathrm{i}y$ 就是典型的例子
- 因此，要使 $f(z)$ **可微**，则 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 之间必须满足一定的**关系**

§3.5 Cauchy-Riemann 条件

- 本小节研究怎样的函数**可导**，同时得出**导数**的一种**计算方法**
- 由于导数定义中 $\Delta z \to 0$ 的**方式**是**任意**的，**复变函数**的**可微性**是**非常苛刻**的
- 一般来说，如果 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 中的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ **相互独立**，那么即使 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都具有良好的解析性质，$f(z)$ 仍然**不一定**是**可微**的
- **例 2** 中**处处不可导**的**函数** $f(z) = z^* = x - \mathrm{i}y$ 就是典型的例子
- 因此，要使 $f(z)$ **可微**，则 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 之间必须满足一定的**关系**
- 事实上，由于 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ **与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关**
- 可先令 $\Delta y = 0$，$\Delta z = \Delta x \to 0$，得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) + \mathrm{i}v(x + \Delta x, y)] - [u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

- 然后令 $\Delta x = 0$，$\Delta z = \mathrm{i}\Delta y \to 0$，得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) + \mathrm{i}v(x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)]}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann 条件与可微的充要条件

- 比较以上两式，推出

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

- 这就是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须满足的条件
- 它称为 **Cauchy-Riemann 条件**，简称 **CR 条件**
- 它是 $f(z)$ 在点 z 处**可微**的**必要条件**，但**不是充分条件**
- $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 也给出**导数**的**计算公式**
- 即利用熟悉的**实变函数**的**偏导数**来计算**复变函数**的**导数**

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

Bernhard Riemann
(1826–1866)

Cauchy-Riemann 条件与可微的充要条件

- 比较以上两式，推出

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

- 这就是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须满足的条件
- 它称为 **Cauchy-Riemann 条件**，简称 **CR 条件**
- 它是 $f(z)$ 在点 z 处**可微**的**必要条件**，但**不是充分条件**
- $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 也给出**导数**的**计算公式**
- 即利用熟悉的**实变函数**的**偏导数**来计算**复变函数**的**导数**

定理　**函数** $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，$z \in D$，$f(z)$ 在**点** $z = x + \mathrm{i}y$ 处**可微**的**两个充要条件**是

1. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在**点** (x,y) 处**可微**
2. $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在**点** (x,y) 处满足 **CR 条件**

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

Bernhard Riemann
(1826–1866)

判断解析性的定理

🕊 将上述定理中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D，立得另一定理

🐓 不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

⚛ **定理**　**函数** $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 内解析的两个充要条件是

1. 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
2. $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 **CR 条件**

判断解析性的定理

- 将上述定理中的点 z 和点 (x,y) 同时换为区域 D，立得另一定理
- 不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 **函数** $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的两个充要条件是

1. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
2. $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内满足 **CR 条件**

注 充分性是很明显的：根据微积分的定理，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微，它们又在 D 内满足 **CR 条件**，于是根据上一个定理给出 $f(z)$ 在 D 内解析的结论

- 反过来看必要性，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 **CR 条件**；至于一阶偏导数连续，目前还未能论证

判断解析性的定理

将上述定理中的点 z 和点 (x, y) 同时换为区域 D，立得另一定理

不过，在实用上，下面的定理用来判断复变函数的解析性是最方便的

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 内解析的两个充要条件是

1. 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数
2. $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内满足 CR 条件

注 充分性是很明显的：根据微积分的定理，$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微，它们又在 D 内满足 CR 条件，于是根据上一个定理给出 $f(z)$ 在 D 内解析的结论

反过来看必要性，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 CR 条件；至于一阶偏导数连续，目前还未能论证

下一章将会看到，若 $f(z)$ 在 D 内解析，即一阶导数存在，则 $f(z)$ 在 D 内具有任意阶导数，从而 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数就不在话下了

类似结论对实变函数 $f(x)$ 不可想象，即使 $f^{(n)}(x)$ 连续也不保证 $f^{(n+1)}(x)$ 存在

不解析的例子

例 6 考虑**函数** $f(z)=|z|^2$，易知 $u(x,y)=x^2+y^2$ 和 $v(x,y)=0$，各偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

可见，**所有一阶偏导数连续**，故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ **处处可微**

但是，**CR 条件** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ **只在** $z=0$ **处成立**

因而 $f(z)$ **仅在** $z=0$ **处可微**，故 $f(z)$ **处处不解析**

不解析的例子

🧡 **例 6** 考虑函数 $f(z)=|z|^2$，易知 $u(x,y)=x^2+y^2$ 和 $v(x,y)=0$，各偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

🦎 可见，**所有一阶偏导数连续**，故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ **处处可微**

🦕 但是，**CR 条件** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ **只在** $z=0$ **处成立**

🦖 因而 $f(z)$ **仅在** $z=0$ **处可微**，故 $f(z)$ **处处不解析**

🐍 事实上，只要注意到 $f(z)=z^*z$，又已知 z^* **处处不解析**，则易得以上结论

🐊 如果一个函数包含 z^* 或 $|z|$ 这样的因子，那么一般来说它是**不解析**的

§4 初等单值函数

通常认为，基本初等函数包括常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数

初等函数 (elementary function) 是由基本初等函数经过有限次的加减乘除和复合所构成的函数，如 $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x + 2\tan x$ 和 $g(x) = \sin(x \ln x)$

在复变函数中，三角函数定义为指数函数的线性组合，所以与双曲函数类似

它们都不是最基本的，但它们很常用，下面会详细介绍

以上这些函数包括单值函数 (single-valued function) 和多值函数 (multivalued function)

本节和下节分别介绍其中较简单的几种

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- **常数函数** $f(z) = c$，其中 $c \in \mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z) = 0$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- **常数函数** $f(z)=c$，其中 $c\in\mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z)=0$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **正整数次幂函数** $f(z)=z^n$，其中 $n=1,2,\cdots$
- 前面已经证明，$f'(z)=nz^{(n-1)}$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **一般的幂函数** $f(z)=z^\alpha\ (\alpha\in\mathbb{C})$ 是**多值函数**，本节暂不考虑

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- 常数函数 $f(z)=c$，其中 $c\in\mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z)=0$，故 $f(z)$ 在复平面上解析
- 正整数次幂函数 $f(z)=z^n$，其中 $n=1,2,\cdots$
- 前面已经证明，$f'(z)=nz^{(n-1)}$，故 $f(z)$ 在复平面上解析
- 一般的幂函数 $f(z)=z^\alpha\ (\alpha\in\mathbb{C})$ 是多值函数，本节暂不考虑
- 多项式 (polynomial) $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\ (n\in\mathbb{N})$ 是常数和幂函数的线性组合
- 由上节例 5 可知，$P_n(z)$ 在整个复平面上解析，且导数为 $P_n'(z)=\sum_{k=0}^{n}ka_kz^{k-1}$

§4.1–§4.3 常数、幂函数、多项式和有理分式

- **常数函数** $f(z) = c$，其中 $c \in \mathbb{C}$
- 由定义易证 $f'(z) = 0$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **正整数次幂函数** $f(z) = z^n$，其中 $n = 1, 2, \cdots$
- 前面已经证明，$f'(z) = nz^{(n-1)}$，故 $f(z)$ **在复平面上解析**
- **一般的幂函数** $f(z) = z^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ 是**多值函数**，本节暂不考虑
- **多项式** (polynomial) $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ $(n \in \mathbb{N})$ 是**常数**和**幂函数**的线性组合
- 由上节**例 5** 可知，$P_n(z)$ 在**整个复平面上解析**，且导数为 $P_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}$
- 设 $Q_m(z) = \sum_{l=0}^{m} b_l z^l$ $(m \in \mathbb{N})$ 是另一个**多项式**，则 $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 称为**有理分式**，亦称**有理函数** (rational function)
- **除去**满足 $Q_m(z) = 0$ 的**点** z_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$（其中可能有相同的）**之外**，$f(z)$ **在复平面上处处解析**，z_i 是 $f(z)$ 的**奇点**

§4.4 指数函数

🏢 **指数函数** (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv \mathrm{e}^{z} \equiv \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

🚲 **恒等号**是**一般复变量**的指数函数的定义

🚴 **等号**则引用了前面关于**自变量为纯虚数**的指数函数的定义

§4.4 指数函数

指数函数 (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv \mathrm{e}^{z} \equiv \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

- **恒等号**是**一般复变量**的指数函数的定义
- **等号**则引用了前面关于**自变量为纯虚数**的指数函数的定义
- 易知 $u(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos y$ 和 $v(x,y) = \mathrm{e}^{x}\sin y$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\sin y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- 可见，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的**一阶偏导数处处连续**，**CR 条件处处满足**
- 从而，e^{z} 在**整个复平面上解析**

§4.4 指数函数

- **指数函数** (exponential function) 定义为

$$\exp(z) \equiv \mathrm{e}^{z} \equiv \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

- **恒等号**是**一般复变量**的指数函数的定义
- **等号**则引用了前面关于**自变量为纯虚数**的指数函数的定义
- 易知 $u(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos y$ 和 $v(x,y) = \mathrm{e}^{x}\sin y$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\sin y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- 可见，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的**一阶偏导数处处连续**，**CR 条件处处满足**
- 从而，e^{z} 在**整个复平面上解析**，根据 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，**指数函数**的**导数**为

$$(\mathrm{e}^{z})' = \frac{\partial(\mathrm{e}^{x}\cos y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial(\mathrm{e}^{x}\sin y)}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^{x}\sin y = \mathrm{e}^{z}$$

- 这一结果与**实变量**的**指数函数**完全一样

指数函数的性质

指数函数 $e^z = e^x e^{iy}$ 具有以下性质

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

   由定义有 $e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

2. $|e^z| > 0$

   由 $x \in \mathbb{R}$ 得 $|e^z| = e^x > 0$

3. e^z 是**周期函数**，**周期**为 $2\pi i$，即 $e^{z+2\pi i} = e^z$

   由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

§4.5 三角函数

复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数 } \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \text{正弦函数 } \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

注　由此定义易得 $e^{iz} = \cos z + i\sin z$，但不能将该式**误解**为 e^{iz} 的定义

当 $z = i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在整个复平面上解析

§4.5 三角函数

复变量的三角函数 (trigonometric function) 是通过指数函数来定义的：

$$\text{余弦函数 } \cos z \equiv \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \text{正弦函数 } \sin z \equiv \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

注 由此定义易得 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$，但不能将该式**误解**为 e^{iz} 的定义

当 $z=i\theta$ 为纯虚数时，回到前面给出的 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在整个复平面上解析

利用 $(e^{iz})'=i\,e^{iz}$ 和 $(e^{-iz})'=-i\,e^{-iz}$，易得它们的导数为

$$(\cos z)'=\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=-\sin z, \qquad (\sin z)'=\frac{i}{2i}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$$

三角函数还具有以下性质

1. 奇偶性：$\sin(-z)=\dfrac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\sin z, \quad \cos(-z)=\dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\cos z$

三角函数的性质 2

2. 满足各种三角恒等式，如

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} - 2) + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} + 2) = 1$$

$$\begin{aligned}
&\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\
={}& \frac{1}{4\mathrm{i}}[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})] \\
={}& \frac{1}{4\mathrm{i}}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}e^{\mathrm{i}z_2} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}] = \sin(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
={}& \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) \\
={}& \frac{1}{4}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}] = \cos(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

三角函数的性质 3 和 4

3. $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是**周期函数**，**周期**为 2π

由 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$ 得 $\sin(z+2\pi)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+2\pi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+2\pi)}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sin z$

$$\cos(z+2\pi)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+2\pi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+2\pi)}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\cos z$$

三角函数的性质 3 和 4

3. $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是**周期函数**，**周期**为 2π

由 $e^{2\pi i} = 1$ 得 $\sin(z+2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

4. $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都**可以大于** 1

这是与**实变**情况**不同**的

实际上，$\sin(iy) = \dfrac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})$，$\cos(iy) = \dfrac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})$

$|\sin(iy)|$ 和 $|\cos(iy)|$ 显然**可以大于任意实数**

三角函数的性质 3 和 4

3. $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是**周期函数**，**周期**为 2π

由 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$ 得 $\sin(z+2\pi)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+2\pi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+2\pi)}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sin z$

$$\cos(z+2\pi)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+2\pi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+2\pi)}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\cos z$$

4. $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都**可以大于 1**

这是与**实变**情况**不同**的

实际上，$\sin(\mathrm{i}y)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y})$，$\cos(\mathrm{i}y)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y})$

$|\sin(\mathrm{i}y)|$ 和 $|\cos(\mathrm{i}y)|$ 显然**可以大于任意实数**

类似于**实变函数**，还可以定义**更多三角函数**，如

$$\textbf{正切函数}\ \tan z\equiv\frac{\sin z}{\cos z},\quad \textbf{余切函数}\ \cot z\equiv\frac{\cos z}{\sin z}$$

进一步，可定义这些三角函数的**反函数**，这里就不详细讨论了

§4.6 双曲函数

复变量的双曲函数 (hyperbolic function) 也是通过指数函数来定义的：

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

它们称为双曲余弦函数和双曲正弦函数

由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面上解析

它们的导数为 $(\cosh z)' = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$ 和 $(\sinh z)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$

§4.6 双曲函数

- 复变量的双曲函数 (hyperbolic function) 也是通过指数函数来定义的：

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

- 它们称为双曲余弦函数和双曲正弦函数
- 由指数函数的解析性和求导法则，易知 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面上解析
- 它们的导数为 $(\cosh z)' = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$ 和 $(\sinh z)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$
- 由定义容易证明双曲函数与三角函数之间存在着以下关系：

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad \sin(iz) = i\sinh z, \quad \sinh(iz) = i\sin z$$

- 由此可以从三角函数的性质得到双曲函数的类似性质，如

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$$

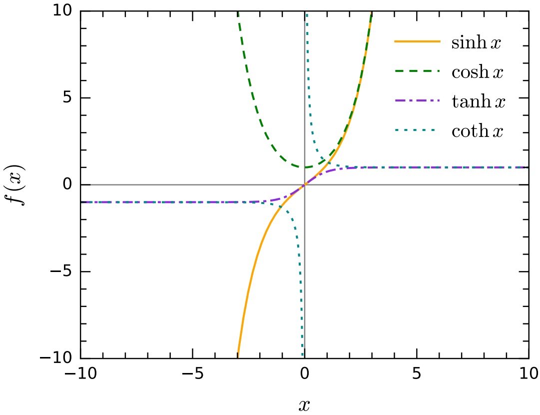
$$\begin{aligned} \cosh(z_1 + z_2) &= \cos(iz_1 + iz_2) = \cos(iz_1)\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\sin(iz_2) \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \end{aligned}$$

更多双曲函数

- 类似于**实变函数**，还可以定义**更多双曲函数及其反函数**，如

$$\textbf{双曲正切函数}\ \tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \textbf{双曲余切函数}\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

- **实变量双曲函数**的图象如下



§5 初等多值函数

§5.1 根式函数的支点

- 考虑**根式函数** $w=\sqrt{z-a}$，不失一般性，设 a 为**实数**
- 记 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z-a=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$（其中 θ 和 ϕ 不必是主值），则

$$w=\sqrt{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}=\sqrt{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}}=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi/2+k\pi)}$$

- 其中 $k\in\mathbb{Z}$，对于每一给定的 z，可能导致**不同结果**的 k **值**有 0 和 1 两种
- 所以有**两个函数值**

$$w_1=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2},\quad w_2=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi/2+\pi)}=-\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}=-w_1$$

- 前面已经指出，**根式函数**的**多值性**源于**宗量** $z-a$ 的**辐角** ϕ 的**多值性**，而不是**自变量** z 的**辐角** θ 的**多值性**

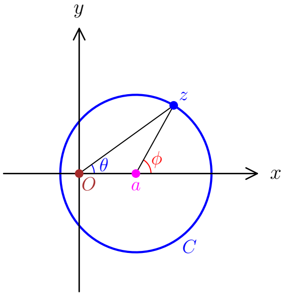
支点

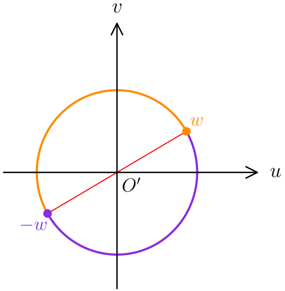
从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$

其中 $+$ 号和 $-$ 号分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行

函数值也就从 w_1 变成 w_2

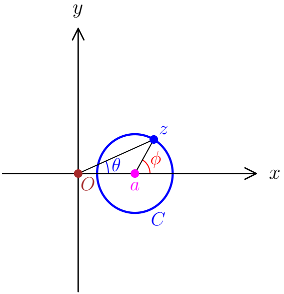
在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$

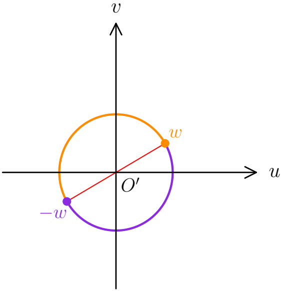




支点

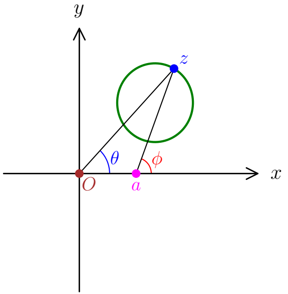
- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$
- 其中 $+$ 号和 $-$ 号分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$
- 如果**曲线** C 不包围**原点** O，则 θ **不变**
- 可见，影响函数值的是 ϕ **的变化**而不是 θ **的变化**

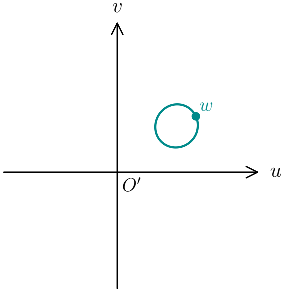




支点

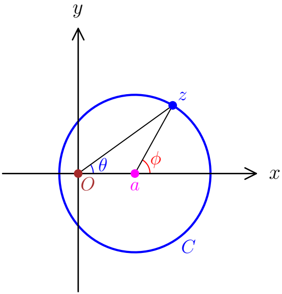
- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$
- 其中 $+$ 号和 $-$ 号分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$
- 如果**曲线** C 不包围**原点** O，则 θ **不变**
- 可见，影响函数值的是 ϕ **的变化**而不是 θ **的变化**
- 如果 z 沿**其它曲线**绕一周，而该曲线**不包围** a **点**，则 $z-a$ 的**辐角不变**，因而**函数值**也**不变**

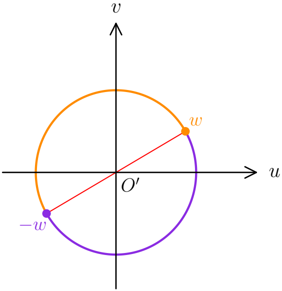




支点

- 从几何上看，如果让 z 沿**闭曲线** C 绕 a **点转一周**回到 z，则 $z-a$ 的**辐角**就从 ϕ 变成 $\phi\pm 2\pi$
- 其中 $+$ 号和 $-$ 号分别对应于**逆时针**和**顺时针**绕行
- **函数值**也就从 w_1 变成 w_2
- 在这一过程中，如果**曲线** C 包围**原点** O，则 z **的辐角**从 θ 变成 $\theta\pm 2\pi$
- 如果**曲线** C 不包围**原点** O，则 θ **不变**
- 可见，影响函数值的是 ϕ **的变化**而不是 θ **的变化**
- 如果 z 沿**其它曲线**绕一周，而该曲线**不包围** a **点**，则 $z-a$ 的**辐角不变**，因而**函数值**也**不变**
- a **点**具有特殊地位，让 z 沿**闭曲线**绕**它转一周**回到 z，**函数值**会**发生改变**，这样的点称为**多值函数**的**支点**
- **函数** $w=\sqrt{z-a}$ 只有一个**有限支点** a





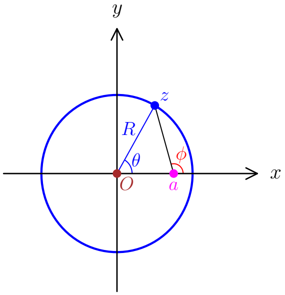
无穷远点

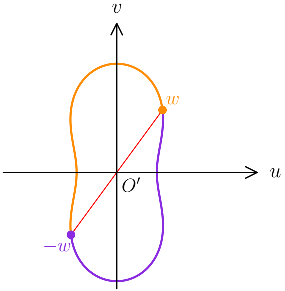
如果让 z 沿大圆 $|z| = R$ 转一周回到 z，则 $z - a$ 的辐角也从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$，函数值也从 w_1 变成 w_2

注 大圆指的是它包围所有的有限支点，对函数 $w = \sqrt{z - a}$ 来说就是包围 a 点

由于绕大圆一周也可以看作绕 ∞ 点一周，所以 ∞ 点也是函数 $w = \sqrt{z - a}$ 的支点

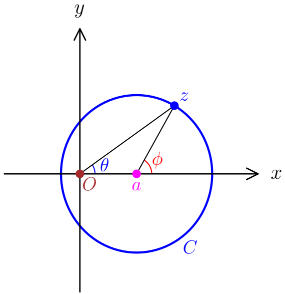
因此，函数 $w = \sqrt{z - a}$ 在扩充复平面上共有两个支点

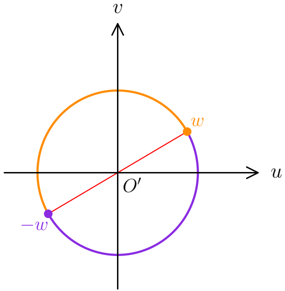




无穷远点

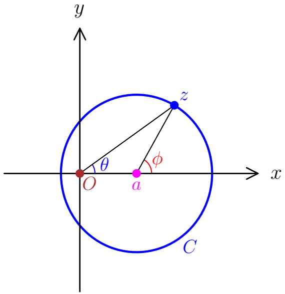
- 如果让 z 沿大圆 $|z| = R$ 转一周回到 z，则 $z - a$ 的辐角也从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$，函数值也从 w_1 变成 w_2
- 注　大圆指的是它包围所有的有限支点，对函数 $w = \sqrt{z-a}$ 来说就是包围 a 点
- 由于绕大圆一周也可以看作绕 ∞ 点一周，所以 ∞ 点也是函数 $w = \sqrt{z-a}$ 的支点
- 因此，函数 $w = \sqrt{z-a}$ 在扩充复平面上共有两个支点
- 如果让 z 沿闭曲线绕 a 点转两周（n 周）回到 z，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 4\pi$
- 这时 $w = \sqrt{z-a}$ 的函数值不变，所以 a 点称为它的一阶支点（$n-1$ 阶支点）
- 易知 ∞ 点也是一阶支点

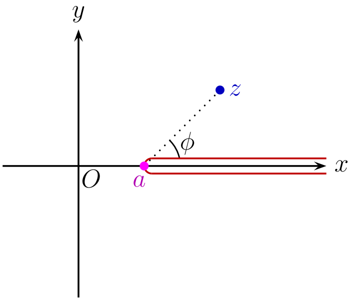




§5.2 割线与单值分支

- 前已指出，根式函数的多值性源于宗量的辐角的多值性
- 从几何上看，是因为自变量 z 可以绕支点不停转动，导致辐角的变化
- 如果以某种方式把 z 平面割破，使自变量 z 不能绕支点转动一周（等价于对宗量辐角的取值范围加以限制），则函数值就变成确定的，也就是得到了一个单值分支
- 对宗量辐角取值范围加以不同的限制可得到不同的单值分支





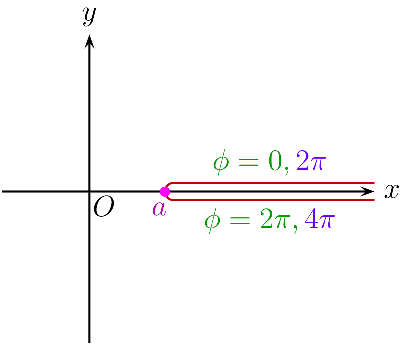
函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的割线和单值分支

以函数 $w=\sqrt{z-a}$ 来说，可把割线取为由 a 点出发沿 x 轴正向至 ∞ 点的射线

在这样割破的 z 平面上，自变量 z 再也不能绕支点 a 转动，宗量的辐角就被限制在一定的范围内，因而函数值也被限制在某个单值分支内

如果规定割线上岸的 $\phi=0$，则在整个割破的 z 平面上，$0\le\phi\le 2\pi$，就得到一个单值分支

如果规定割线上岸的 $\phi=2\pi$，则在整个割破的 z 平面上，$2\pi\le\phi\le 4\pi$，就得到另一个单值分支



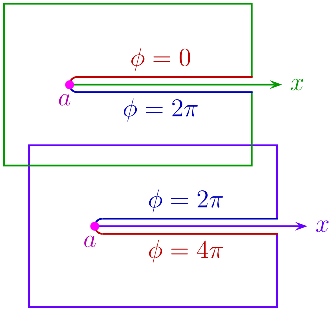
实际上，任何由 a 点出发到 ∞ 点的射线甚至曲线都可以作为该函数的割线

§5.3 Riemann 面

- 还是以函数 $w=\sqrt{z-a}$ 为例
- 如果规定割线上岸的 $\phi=0$，则在所得的单值分支中，$0\le\arg w<\pi$
- 如果规定割线上岸的 $\phi=2\pi$，则在所得的单值分支中，$\pi\le\arg w<2\pi$
- 两个分支的函数值合起来充满了整个 w 平面
- 然而，自变量却要用两张 z 平面来表示，不太令人满意

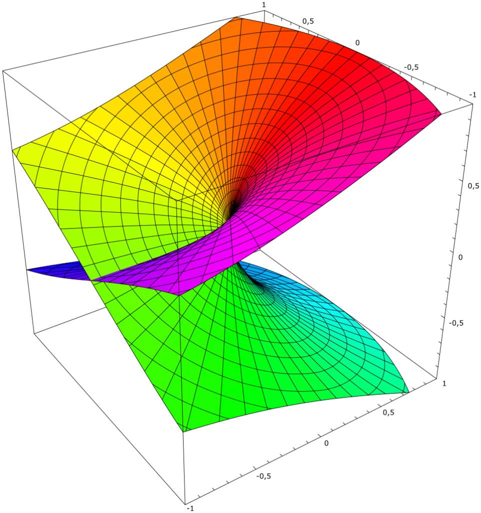
§5.3 Riemann 面

- 还是以函数 $w = \sqrt{z-a}$ 为例
- 如果规定割线上岸的 $\phi = 0$，则在所得的单值分支中，$0 \le \arg w < \pi$
- 如果规定割线上岸的 $\phi = 2\pi$，则在所得的单值分支中，$\pi \le \arg w < 2\pi$
- 两个分支的函数值合起来充满了整个 w 平面
- 然而，自变量却要用两张 z 平面来表示，不太令人满意
- 第一张 z 平面的下岸与第二张 z 平面的上岸都对应于 $\phi = 2\pi$，可将它们粘在一起
- 第二张 z 平面的下岸 $\phi = 4\pi$ 与第一张 z 平面的上岸 $\phi = 0$ 对于函数 $w = \sqrt{z-a}$ 来说是一回事，也可将它们粘在一起
- 这样粘合得到的具有两页的 z 平面称为函数 $w = \sqrt{z-a}$ 的 Riemann 面
- 在 Riemann 面上，函数 $w = \sqrt{z-a}$ 是单值的



函数 $f(z)=\sqrt{z}$ 的 Riemann 面

- 将**割线**取为**负实轴**，则**函数** $f(z)=\sqrt{z}$ 的 **Riemann 面**如下图所示



§5.4 对数函数

- **对数函数** (logarithmic function) 定义为**指数函数**的**反函数**
- 如果 w 满足 $\mathrm{e}^w = z$，则

$$w = \operatorname{Ln} z \text{ 是 } z \text{ 的对数函数}$$

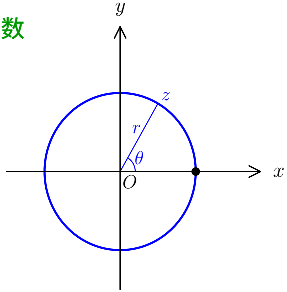
- 令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w = u + \mathrm{i}v$，有 $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
- 比较两边，得 $u = \ln r, \quad v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- 换句话说，$\operatorname{Ln} z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

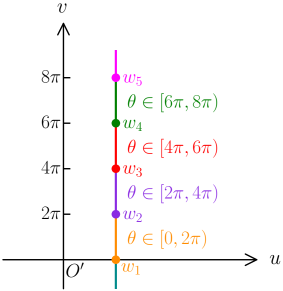
§5.4 对数函数

- **对数函数** (logarithmic function) 定义为**指数函数**的**反函数**
- 如果 w 满足 $\mathrm{e}^w = z$，则

$$w = \mathrm{Ln}\, z \text{ 是 } z \text{ 的对数函数}$$

- 令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w = u + \mathrm{i}v$，有 $\mathrm{e}^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
- 比较两边，得 $u = \ln r, \quad v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- 换句话说，$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
- 可见，**对数函数**也是一个**多值函数**，且具有**无穷多个单值分支**
- 由于**多值性**来自 z 的**幅角** θ，对数函数的**支点**是 $z = 0$ 和 $z = \infty$
- 由于自变量绕 $z = 0$ 转动**任意周**回到出发点，函数值都**不能复原**，$z = 0$ 称为**超越支点**
- 同样，$z = \infty$ 也是**超越支点**





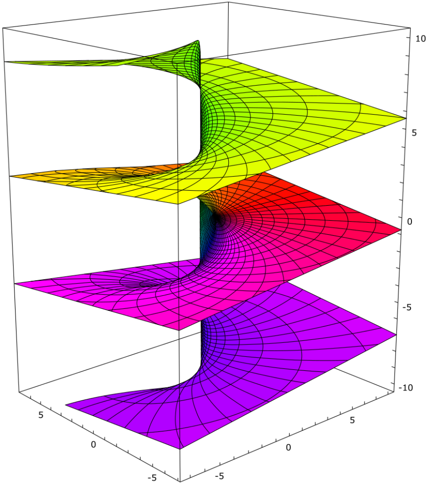
对数函数的 Riemann 面和主值分支

- 对数函数的割线可取为由 $z=0$ 出发沿 x 轴正向（或负向）至 $z=\infty$ 的射线，即 x 轴的正半轴（或负半轴）

- 相应的 Riemann 面具有无穷多页，类似于螺旋楼梯

- 若 θ 取为辐角主值并置 $k=0$，则所得单值分支称为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值分支，记作 $\ln z$，即

$$\ln z = \ln r + \mathrm{i}\theta = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$



§5.6 多值函数的解析性

- 多值函数在其 Riemann 面上变成单值的
- 所以可以像单值函数一样定义导数并讨论多值函数的解析性
- 但是，支点为 Riemann 面各页所共有
- 在支点的邻域内，函数值是**不确定**的
- 因而支点处的导数**没有定义**，所以支点必为奇点

§5.7 对数函数的导数

- 在多值函数的单值分支内，反函数存在
- 所以可以用与实变函数相同的反函数求导法来计算导数
- 这一方法可以方便地用于根式函数和对数函数
- 以对数函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 为例，由 $\mathrm{e}^w = z$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \mathrm{e}^w, \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-w} = \frac{1}{\mathrm{e}^w} = \frac{1}{z}$$

- 故对数函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\, z = \frac{1}{z}$$

- 注意，该导数是一个单值函数

§6 解析函数的物理意义

§6.1 调和函数

如果二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内具有连续的二阶偏导数，且满足二维 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数

类似地，可以定义三维或更高维的调和函数

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

§6.2 解析函数与调和函数的关系

♈ 若 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是 D 内的调和函数

⤵ **注** 由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部

§6.2 解析函数与调和函数的关系

♈ 若 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 D 内的调和函数

⤵️ 注　由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部

🟥 事实上，由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析，它就在 D 内具有各阶导数（见下章），所以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的各阶偏导数

🚊 又 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内满足 **CR 条件** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，求导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

👉 **二维 Laplace 方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

🚇 所以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 D 内的调和函数

共轭调和函数

由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 并不是相互独立的，而是由 CR 条件紧密联系起来的，它们称为**共轭调和函数**

若已知函数 $u(x,y)$，则由 CR 条件得

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

再进行**积分**，就可求出 $v(x,y)$，**反之亦然**

共轭调和函数

由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 并不是相互独立的，而是由 **CR 条件**紧密联系起来的，它们称为**共轭调和函数**

若已知函数 $u(x,y)$，则由 **CR 条件**得

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

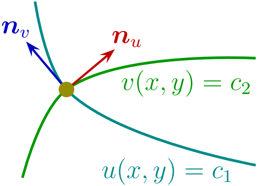
再进行**积分**，就可求出 $v(x,y)$，**反之亦然**

由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 满足**二维 Laplace 方程**，它们可以表示**无电荷区域**的**静电场**的**电势**

当然，它们也可以用来描述其它满足**二维 Laplace 方程**的物理量

§6.3 正交曲线族

♉ 若 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x,y) = c_1$ 和 $v(x,y) = c_2$ 相互正交



🟪 事实上，$\boldsymbol{n}_u = \nabla u$ 和 $\boldsymbol{n}_v = \nabla v$ 是曲线 $u(x,y) = c_1$ 和 $v(x,y) = c_2$ 的未归一化法向矢量

🚕 在交点处，自变量 (x,y) 相同，利用 CR 条件推出

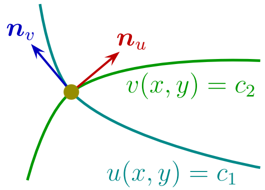
$$\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

🚙 因此，两曲线在交点处是正交的

🚓 这一结论与 c_1 和 c_2 的取值**无关**，所以两个曲线族是正交曲线族

§6.3 正交曲线族

♉ 若 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和 $v(x,y)=c_2$ 相互正交



■ 事实上，$\boldsymbol{n}_u=\nabla u$ 和 $\boldsymbol{n}_v=\nabla v$ 是曲线 $u(x,y)=c_1$ 和 $v(x,y)=c_2$ 的未归一化法向矢量

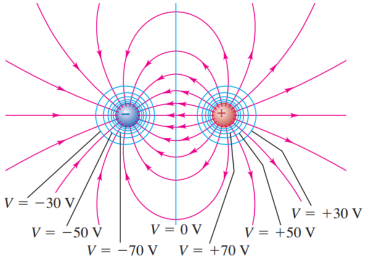
🚕 在交点处，自变量 (x,y) 相同，利用 CR 条件推出

$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=\nabla u\cdot\nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

🚙 因此，两曲线在交点处是正交的

🚓 这一结论与 c_1 和 c_2 的取值无关，所以两个曲线族是正交曲线族

🚌 由以上讨论可知，若 $u(x,y)=c_1$ 表示某平面静电场的等势线族，则 $v(x,y)=c_2$ 表示其电力线族，反之亦然



由电力线方程求等势线方程

💛 **例** 已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2 - y^2 = c_1$，求等势线方程

🟨 **解** 令 $v(x,y) = x^2 - y^2$，它是调和函数，可作为某解析函数的虚部

🚎 求出其实部 $u(x,y)$，则等势线方程为 $u(x,y) =$ 常数

🚖 根据 CR 条件，有 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x$，从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -2y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}(-2xy) \end{aligned}$$

🚘 故 $u(x,y) = -2xy + c'$，其中 c' 为常数

🚔 于是，等势线方程为

$$xy = c_2$$

由电力线方程求等势线方程

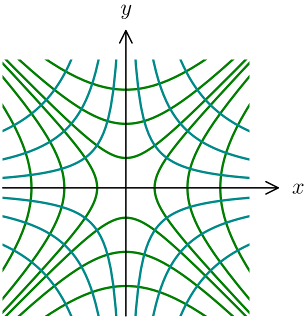
💛 例 已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2 - y^2 = c_1$，求等势线方程

🟨 解 令 $v(x,y) = x^2 - y^2$，它是调和函数，可作为某解析函数的虚部

🚎 求出其实部 $u(x,y)$，则等势线方程为 $u(x,y) =$ 常数

🚖 根据 CR 条件，有 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x$，从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -2y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}(-2xy) \end{aligned}$$



🚗 故 $u(x,y) = -2xy + c'$，其中 c' 为常数

🚓 于是，等势线方程为

$$xy = c_2$$

🚜 本例的电力线和等势线都是双曲线

讨论 1

注 如果给定的**电力线方程**为 $t(x,y)=c_1$，而 $t(x,y)$ **不是调和函数**，则不能直接把 $t(x,y)$ 作为某**解析函数**的**虚部**

此时应该寻找**函数** $v(x,y)=F(t)$ 使得**该函数**为**调和函数**，使 $v(x,y)$ 可作为某**解析函数**的**虚部**

讨论 1

注 如果给定的电力线方程为 $t(x,y)=c_1$，而 $t(x,y)$ 不是调和函数，则不能直接把 $t(x,y)$ 作为某解析函数的虚部

此时应该寻找函数 $v(x,y)=F(t)$ 使得该函数为调和函数，使 $v(x,y)$ 可作为某解析函数的虚部

若给定的是等势线方程，可类似求解电力线方程

比如给定等势线方程为 $t(x,y)=x^2+y^2=c_1$，它不是调和函数

可令 $u(x,y)=F(t)=F(x^2+y^2)$，求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xF'(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2F'(t)+4x^2F''(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2F'(t)+4y^2F''(t)$$

要求 $u(x,y)$ 是调和函数，则

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4F'(t)+4(x^2+y^2)F''(t)=4[F'(t)+tF''(t)]$$

故

$$\frac{\mathrm{d}F'(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{F'(t)}{t},\quad \frac{\mathrm{d}F'(t)}{F'(t)}=-\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

讨论 2

- 两边**积分**，得 $\ln F'(t) = -\ln t + c$，其中 c 是积分常数
- 从而 $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = F'(t) = \exp(-\ln t + c) = \dfrac{a}{t}$，其中 $a \equiv \mathrm{e}^c$
- 再次**积分**，求出**通解** $F(t) = a\ln t + b$，其中 b 是积分常数
- 取一**特解** $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t$，即得 $u(x,y) = F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln r$

讨论 2

两边**积分**，得 $\ln F'(t) = -\ln t + c$，其中 c 是积分常数

从而 $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = F'(t) = \exp(-\ln t + c) = \dfrac{a}{t}$，其中 $a \equiv \mathrm{e}^c$

再次**积分**，求出**通解** $F(t) = a\ln t + b$，其中 b 是积分常数

取一**特解** $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t$，即得 $u(x,y) = F(t) = \dfrac{1}{2}\ln t = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln r$

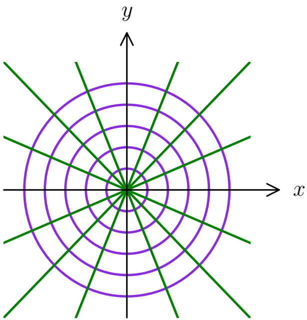
这一结果其实可以通过 $t(x,y) = x^2 + y^2$ 与 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 的关系猜测出来

因为 $\ln r$ 是**解析函数** $\operatorname{Ln} z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$ 的实部，必为**调和函数**

由此看出相应的**虚部**是

$$v(x,y) = \theta + c_2' = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} + c_2'$$

于是，**电力线族**的方程可以表达为 $y = c_2 x$，它与**等势线族**是**正交**的



讨论 3

- 如果只是求正交曲线族，则并不一定要借助于复变函数的技术
- 实际上，用微积分中学过的方法来处理可能更简单一些
- 以刚才的问题为例，设电力线方程为 $y = g(x)$
- 在点 (x, y) 处，电力线的切线斜率为 $k_2 = g'(x)$
- 对等势线方程为 $t(x, y) = x^2 + y^2 = c_1$ 两边求微分，得

$$\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

- 故等势线在点 (x, y) 处的切线斜率为 $k_1 = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y}$
- 两者要正交，必须满足垂直线的斜率关系 $k_1 k_2 = -1$，即 $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{y}{x}$
- 故 $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$，积分得到 $g(x) = c_2 x$
- 即电力线方程为 $y = c_2 x$