数学物理方法

第七章　分离变量法

第 3 节　非齐次方程与非齐次边界条件

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 10 月 30 日

§3 非齐次方程与非齐次边界条件

- 前两节介绍的分离变量法适用于齐次方程和齐次边界条件
- 但许多实际问题具有非齐次方程和非齐次边界条件，研究它们的求解是必要的
- 如果问题具有齐次边界条件，只有方程是非齐次的，那么可以用**改进**的分离变量法，即本征函数展开法来求解
- 但如果边界条件是非齐次的，则不管方程齐次与否，首先应该将边界条件齐次化

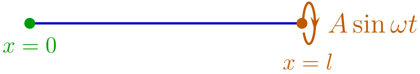
§3 非齐次方程与非齐次边界条件

- 前两节介绍的分离变量法适用于齐次方程和齐次边界条件
- 但许多实际问题具有非齐次方程和非齐次边界条件，研究它们的求解是必要的
- 如果问题具有齐次边界条件，只有方程是非齐次的，那么可以用**改进**的分离变量法，即本征函数展开法来求解
- 但如果边界条件是非齐次的，则不管方程齐次与否，首先应该将边界条件齐次化
- 如果原来是非齐次方程，边界条件齐次化后，方程一般仍然是非齐次的
- 即使方程原来是齐次的，边界条件齐次化后，通常也会变成非齐次方程
- 不管哪种情况，边界条件齐次化以后，都可以用本征函数展开法求解
- 至于初始条件齐次与否，则是无关紧要的

$$\text{非齐次边界条件} \xrightarrow{\text{齐次化}} \left.\begin{matrix}\text{齐次边界条件}\\ \text{非齐次方程}\end{matrix}\right\} \text{本征函数展开法}$$

§3.1 非齐次边界条件的齐次化

- 考虑弦振动问题，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端作振幅 A 很小的已知简谐振动 $A\sin\omega t$
- 弦的初始位移和初始速度均为零，且不受外力作用，求解弦的振动



- 定解问题为

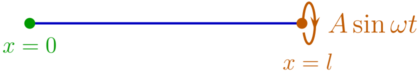
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l, \quad t>0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = A\sin\omega t & (t\geq 0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

§3.1 非齐次边界条件的齐次化

考虑弦振动问题，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端作振幅 A 很小的已知简谐振动 $A\sin\omega t$

弦的初始位移和初始速度均为零，且不受外力作用，求解弦的振动

定解问题为



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l, \quad t>0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = A\sin\omega t & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

将边界条件齐次化的思路是构造一个尽可能简单的函数 $u_0(x,t)$

它与 $u(x,t)$ 满足相同的边界条件，然后令 $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t)$

其中 $v(x,t)$ 是新的未知函数，它显然满足齐次的边界条件

但 $v(x,t)$ 满足的方程和初始条件当然就会**不同**于 $u(x,t)$

边界条件齐次化

💜 对于本问题，可取 $u_0(x,t) = \frac{x}{l} A\sin\omega t$

🚍 它满足与 $u(x,t)$ **相同**的**边界条件**，$u_0|_{x=0} = 0$ 和 $u_0|_{x=l} = A\sin\omega t$，以及

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\omega A x}{l}\cos\omega t, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2 A x}{l}\sin\omega t, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

$$u_0\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\omega A x}{l}$$

边界条件齐次化

💜 对于本问题，可取 $u_0(x,t)=\dfrac{x}{l}A\sin\omega t$

🚍 它满足与 $u(x,t)$ **相同**的**边界条件**，$u_0|_{x=0}=0$ 和 $u_0|_{x=l}=A\sin\omega t$，以及

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\omega Ax}{l}\cos\omega t,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=-\frac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0$$

$$u_0|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\omega Ax}{l}$$

🚍 从而，**未知函数** $v(x,t)=u(x,t)-u_0(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)=\frac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t$$

$$v|_{x=0}=u|_{x=0}-u_0|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=u|_{x=l}-u_0|_{x=l}=0$$

$$v|_{t=0}=u|_{t=0}-u_0|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}-\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{\omega Ax}{l}$$

🚐 这样**边界条件**就**齐次化**了，但**方程**变成**非齐次**的

🚎 不过这不要紧，下面会介绍**非齐次方程问题**的解法

同时使边界条件和方程齐次化

🚙 如果能够在将边界条件齐次化的同时，保持方程的齐次性，那无疑是值得尝试的

❤️ 对于上述问题，可取 $u_0(x,t) = A\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$

🚚 它满足与 $u(x,t)$ 相同的边界条件，$u_0|_{x=0} = 0$ 和 $u_0|_{x=l} = A\sin\omega t$，以及

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\omega^2 A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 A}{a^2}\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \quad u_0|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$$

🚛 从而，未知函数 $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$v|_{x=0} = u|_{x=0} - u_0|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = u|_{x=l} - u_0|_{x=l} = 0$$

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - u_0|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = -\omega A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$$

求解 $v(x,t)$

这样一来，$v(x,t)$ 的定解问题就同时具有齐次方程和齐次边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l,\quad t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = -\omega A\,\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

这是 **§1** 解过的定解问题的一种特殊情况，前面得到的一般解是

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件，有

$$v|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = -\omega A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$$

显然，$A_n = 0 \ (n\in\mathbb{N}^+)$

计算 B_n

由正弦 Fourier 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = -\omega A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}$ 的系数表达式得

$$B_n = \frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}\int_0^l \left[-\omega A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\omega A}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\int_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\omega A}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\int_0^l \left\{\cos\left[\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)x\right] - \cos\left[\left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)x\right]\right\}\mathrm{d}x \quad \text{积化和差}$$

$$= \frac{\omega A}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left\{\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left[\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)x\right] - \left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left[\left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)x\right]\right\}\Bigg|_0^l$$

$$= \frac{\omega A}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left\{\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left(\frac{\omega l}{a}+n\pi\right) - \left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\left(\frac{\omega l}{a}-n\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{(-)^n\omega A}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[\left(\frac{\omega}{a}+\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\frac{\omega l}{a} - \left(\frac{\omega}{a}-\frac{n\pi}{l}\right)^{-1}\sin\frac{\omega l}{a}\right] \quad \sin(x\pm n\pi) = (-)^n\sin x \ (n\in\mathbb{N})$$

$$= \frac{(-)^n\omega A}{n\pi a}\left(\frac{al}{\omega l+n\pi a} - \frac{al}{\omega l-n\pi a}\right) = \frac{(-)^n\omega Al}{n\pi}\left(\frac{\omega l-n\pi a}{\omega^2l^2-n^2\pi^2a^2} - \frac{\omega l+n\pi a}{\omega^2l^2-n^2\pi^2a^2}\right)$$

$$= \frac{(-)^n\omega Al}{n\pi}\frac{-2n\pi a}{\omega^2l^2-n^2\pi^2a^2} = -\frac{2\omega Aa}{l}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}$$

解

最后求得原问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

解

最后求得**原问题**的**解**为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\ &= A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

容易看出，如果 $\omega = \dfrac{n\pi a}{l}$，即**右端点**的**振动频率**等于弦的**某一个本征振动频率**

就会发生**共振**，因为此时解的表达式中有**两项**的**分母**变成**零**，而 $u(x,t)$ **发散**：

$$\sin\frac{\omega l}{a} = \sin n\pi = 0, \quad \omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 = 0$$

实际上，这时 $u_0(x,t) = A\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$ 的**分母**为**零**，是**不能使用**的

不过，用 $u_0(x,t) = \dfrac{x}{l}A\sin\omega t$ 就没有这个问题

解

解的动画演示

最后求得**原问题**的**解**为

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\
&= A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}$$

容易看出，如果 $\omega = \dfrac{n\pi a}{l}$ ，即**右端点**的**振动频率**等于弦的**某一个本征振动频率**

就会发生**共振**，因为此时解的表达式中有**两项**的**分母**变成**零**，而 $u(x,t)$ **发散**：

$$\sin\frac{\omega l}{a} = \sin n\pi = 0, \quad \omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 = 0$$

实际上，这时 $u_0(x,t) = A\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$ 的**分母**为**零**，是**不能使用**的

不过，用 $u_0(x,t) = \dfrac{x}{l}A\sin\omega t$ 就没有这个问题

讨论

🚉 给定一个具有非齐次边界条件的一维波动或热传导方程的定解问题

❓ 如何选择函数 $u_0(x,t)$，使得在将边界条件齐次化的同时保持齐次方程的齐次性，或者将非齐次方程也齐次化呢?

⛔ 应该指出，这**通常**是**做不到**的

🚊 所以一般只能将边界条件齐次化，然后求解非齐次方程的定解问题

讨论

🚈 给定一个具有非齐次边界条件的一维波动或热传导方程的定解问题

❓ 如何选择函数 $u_0(x,t)$，使得在将边界条件齐次化的同时保持齐次方程的齐次性，或者将非齐次方程也齐次化呢?

⛔ 应该指出，这**通常**是**做不到**的

🚊 所以一般只能将边界条件齐次化，然后求解非齐次方程的定解问题

🚄 另一方面，虽然在某些情况下可以找到函数 $u_0(x,t)$ 满足以上要求，但如果它的形式非常复杂，那么 $v(x,t)$ 的定解问题就会具有复杂的初始条件

🚟 从而计算 $v(x,t)$ 就会有很大的工作量

🏔 这时不如找一个简单的函数 $u_0(x,t)$，只求将边界条件齐次化

讨论

- 给定一个具有**非齐次边界条件**的**一维波动或热传导方程**的定解问题
- 如何选择**函数** $u_0(x,t)$，使得在**将边界条件齐次化**的同时保持**齐次方程的齐次性**，或者将**非齐次方程**也**齐次化**呢?
- 应该指出，这**通常**是**做不到**的
- 所以一般只能**将边界条件齐次化**，然后求解**非齐次方程**的定解问题
- 另一方面，虽然在某些情况下可以找到**函数** $u_0(x,t)$ 满足以上要求，但如果它的形式**非常复杂**，那么 $v(x,t)$ 的定解问题就会具有**复杂**的**初始条件**
- 从而计算 $v(x,t)$ 就会有**很大的工作量**
- 这时不如找一个**简单**的**函数** $u_0(x,t)$，只求**将边界条件齐次化**
- 当然，这样的函数**不是唯一**的，**不同**的函数 $u_0(x,t)$ 将给出**形式不同的解**
- 但是，可以一般地证明**解的唯一性**，即**不同形式的解**实际上是**相同**的
- 因此，应该选择**尽可能简单**的**函数** $u_0(x,t)$

弦振动方程第一边值问题一般形式

再举一个例子，弦振动方程第一边值问题的最一般形式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t) & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中 $f(x,t)$、$\mu(t)$、$\nu(t)$、$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 都是已知函数

为了将边界条件齐次化，取 $u_0(x,t) = \mu(t) + \dfrac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$，有

$$u_0|_{x=0} = \mu(t), \quad u_0|_{x=l} = \nu(t), \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \mu''(t) + \frac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)], \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

从而，未知函数 $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right) = f(x,t) - \mu''(t) - \frac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)]$$

$v(x,t)$ 的定解问题

- 于是，$v(x,t)$ 的定解问题为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \mu''(t) - \dfrac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] & (0<x<l, \quad t>0) \\
v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\
v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0) - \dfrac{x}{l}[\nu(0) - \mu(0)] & (0 \leq x \leq l) \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) - \mu'(0) - \dfrac{x}{l}[\nu'(0) - \mu'(0)] & (0 \leq x \leq l)
\end{cases}
$$

- 其中边界条件已经齐次化
- 至于方程和初始条件则与原来没有本质差异，只是形式上复杂了一些

$v(x,t)$ 的定解问题

于是，$v(x,t)$ 的定解问题为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \mu''(t) - \dfrac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] & (0 < x < l, \quad t > 0) \\
v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\
v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0) - \dfrac{x}{l}[\nu(0) - \mu(0)] & (0 \leq x \leq l) \\
\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \mu'(0) - \dfrac{x}{l}[\nu'(0) - \mu'(0)] & (0 \leq x \leq l)
\end{cases}
$$

其中边界条件已经齐次化

至于方程和初始条件则与原来没有本质差异，只是形式上复杂了一些

当然，也可以选择 $u_0(x,t) = \mu(t) + \dfrac{x^2}{l^2}[\nu(t) - \mu(t)]$ 来将边界条件齐次化

但显然不如 $u_0(x,t) = \mu(t) + \dfrac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$ 来得简单

§3.2 非齐次方程的本征函数展开法

假设边界条件已经齐次化，则弦振动方程第一边值问题的一般形式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (0<x<l, \quad t>0) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (t\geq 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

这可以看作两端固定的弦的受迫振动问题，现在求解它

§3.2 非齐次方程的本征函数展开法

- 假设边界条件已经齐次化，则弦振动方程第一边值问题的一般形式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

- 这可以看作两端固定的弦的受迫振动问题，现在求解它
- $u(x,t)$ 是 x 和 t 两个变量的函数，如果固定时刻 t，那么它就只是 x 的函数
- 这时它可以展开为某一完备的本征函数族的线性组合
- 比如利用前两节中出现的本征函数族 $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$
- 当时刻 t 变化时，展开系数也就相应地不同，所以展开系数变成 t 的函数，即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad 或 \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

本征函数族的选择

- 当然，还可以将 $u(x,t)$ 展开为**其它形式**
- 我们的思路是，通过选择**适当**的**函数族** $\{T_n(t)\}$，可以使**展开式**满足**定解问题**
- 如此，则**展开式** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$ 显然**不可取**
- 因为它**不满足边界条件** $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$

本征函数族的选择

- 当然，还可以将 $u(x,t)$ 展开为其它形式
- 我们的思路是，通过选择适当的函数族 $\{T_n(t)\}$，可以使展开式满足定解问题
- 如此，则展开式 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$ 显然**不可取**
- 因为它**不满足**边界条件 $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$
- 但是，满足边界条件的展开式也可能还有其它形式
- 选读的 §3.3 进一步讨论选择的依据，现在我们只是指出，

> 应该用相应齐次方程的定解问题中所解出的本征函数族来展开未知函数 $u(x,t)$

- 所以，如果相应齐次方程的定解问题不是熟悉的，就应该先对它进行求解
- 即令 $f(x,t)=0$ 进行求解，只需求解本征函数族，不必求一般解及其系数
- 获得本征函数族之后再作 $u(x,t)$ 的展开式

各个已知函数的展开式

- 对于目前的问题，**展开式** $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 正好是恰当的选择
- 它已经**满足边界条件** $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$
- 现在应该将它代入**方程**和**初始条件**以确定**函数族** $\{T_n(t)\}$ 所应满足的条件
- 为此，把**各式右边的函数**作相应的**展开**：

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 这里**各个展开系数** $f_n(t)$、φ_n 和 ψ_n 都是**已知**的
- 它们原则上可以通过上面的积分从**已知函数** $f(x,t)$、$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 计算出来

代入展开式

将这些展开式和 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 一起代入

方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$ 和初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

根据本征函数的正交性，容易知道以上各式两边的展开系数应该分别相等

只要将以上各式两边同时乘以某个本征函数 $\sin\frac{k\pi x}{l}$，然后从 0 到 1 积分，就可以得到这个结论

常微分方程初值问题

要求展开系数分别相等，就得到一系列常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

按照常微分方程的解法，可以解得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

根据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(\tau)g(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)g(t,t) + \int_0^t f(\tau)\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$，有

$$T_n'(t) = -\frac{n\pi a}{l}\varphi_n \sin\frac{n\pi at}{l} + \psi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \int_0^t f_n(\tau)\cos\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$\begin{aligned} T_n''(t) =& -\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} - \frac{n\pi a}{l}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l} \\ &+ f_n(t) - \frac{n\pi a}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau = -\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) + f_n(t) \end{aligned}$$

定解问题的解

将 $T_n(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$

代入 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$，就得到**定解问题的解**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}$$

如果 $f(x,t)=0$，则**所有** $f_n(t)=0$，解**退化**为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$$

这正是 **§1** 求解**齐次波动方程**时得到的**解**

虽然上面只讨论**波动方程**的**非齐次边界条件**的**齐次化**和**非齐次方程**的求解，但所用方法完全可用于处理**热传导方程**的类似定解问题；至于**稳定场方程**，**§4** 再作讨论

注

解式 $T_n(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$

主要用于显示一般结果，并与相应齐次方程的结果进行比较

在实际计算中，它并不方便，当 $f_n(t)$ 比较简单时，可以用一些特殊方法求解

对于一般的线性常微分方程，有

非齐次方程的通解 = 齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解

比如，若某一项 $f_n(t) = c$ 是常数，则方程 $T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 有一个特解 $\bar{T}_n(t) = c\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$，它满足 $\bar{T}_n''(t) = 0$ 和 $\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \bar{T}_n(t) = c$

故通解为 $T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + c\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$

其中任意常数 A_n 和 B_n 由初始条件 $T_n(0) = \varphi_n$ 和 $T_n'(0) = \psi_n$ 确定

其它例子

- 当某一项 $f_n(t) = c\,t$ 是**线性函数**时
- **方程** $T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 有一个**特解** $\hat{T}_n(t) = c\,t\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$
- 它满足 $\hat{T}_n''(t) = 0$ 和 $\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \hat{T}_n(t) = c\,t$，于是**通解**为

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l} + c\,t\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$$

其它例子

- 当某一项 $f_n(t)=c\,t$ 是**线性函数**时
- **方程** $T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t)$ 有一个**特解** $\hat{T}_n(t)=c\,t\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$
- 它满足 $\hat{T}_n''(t)=0$ 和 $\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\hat{T}_n(t)=c\,t$，于是**通解**为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}+c\,t\left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2$$

- 若某一项 $f_n(t)=c\cos\omega t+d\sin\omega t$ 是**三角函数**，其中 $\omega\neq\frac{n\pi a}{l}$ **（相应本征频率）**
- 则可**假定特解**的形式为 $\tilde{T}_n(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t$
- 将它和 $\tilde{T}_n''(t)=-C\omega^2\cos\omega t-D\omega^2\sin\omega t$ 代入**方程**，得

$$\begin{aligned}\tilde{T}_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tilde{T}_n(t)&=\left[\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-\omega^2\right](C\cos\omega t+D\sin\omega t)\\&=f_n(t)=c\cos\omega t+d\sin\omega t\end{aligned}$$

- 比较**三角函数**的**系数**，推出 $C=\frac{c}{(n\pi a/l)^2-\omega^2}$ 和 $D=\frac{d}{(n\pi a/l)^2-\omega^2}$

Laplace 变换法

- 从而得到 $f_n(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t$ 时的**通解**为

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{c\cos\omega t + d\sin\omega t}{(n\pi a/l)^2 - \omega^2}$$

- 这个解在 $\omega = \dfrac{n\pi a}{l}$ 处**发散**，意味着**共振**的发生，因而前面假定 $\omega \neq \dfrac{n\pi a}{l}$

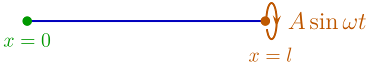
- 实际上，利用 **Laplace 变换法**可以简捷地求解**常微分方程初值问题**

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

- **Laplace 变换法**也可用于求解**偏微分方程**的**定解问题**，但**本课程不作介绍**

前面讨论的弦振动问题

回到一开始讨论的**弦振动**问题



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0<x<l,\quad t>0) \\ u\big|_{x=0} = 0,\quad u\big|_{x=l} = A\sin\omega t & (t\geq 0) \\ u\big|_{t=0} = 0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

前面在取 $u_0(x,t) = \dfrac{x}{l}A\sin\omega t$ 之后，$v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$ 满足**定解问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t & (0<x<l,\quad t>0) \\ v\big|_{x=0} = 0,\quad v\big|_{x=l} = 0 & (t\geq 0) \\ v\big|_{t=0} = 0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\dfrac{\omega Ax}{l} & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

这是 $f(x,t) = \dfrac{\omega^2 Ax}{l}\sin\omega t,\quad \varphi(x) = 0,\quad \psi(x) = -\dfrac{\omega Ax}{l}$ 时的**特例**

计算 $f_n(t)$

利用

$$\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = -\frac{l}{n\pi}\int_0^l x\,\mathrm{d}\cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{l}{n\pi}\left(x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{l}{n\pi}\left(l\cos n\pi - \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l\right) = -\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{(-)^n l^2}{n\pi}$$

得到 $f_n(t) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2\omega^2 A}{l^2}\sin\omega t\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{2\omega^2 A}{l^2}\sin\omega t\left[-\frac{(-)^n l^2}{n\pi}\right] = -\frac{2(-)^n\omega^2 A}{n\pi}\sin\omega t$$

与 $f_n(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t$ 比较，有 $c = 0,\quad d = -\dfrac{2(-)^n\omega^2 A}{n\pi}$

故 $T_n(t) = A_n\cos\dfrac{n\pi at}{l} + B_n\sin\dfrac{n\pi at}{l} + \dfrac{c\cos\omega t + d\sin\omega t}{(n\pi a/l)^2 - \omega^2}$

$$= A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{2\omega^2 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2 - (n\pi a/l)^2}\sin\omega t$$

计算 $T_n(t)$

$\varphi(x)=0$ 意味着 $A_n=T_n(0)=\varphi_n=0$，而 $\psi(x)=-\dfrac{\omega Ax}{l}$ 表明

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{2\omega A}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{2\omega A}{l^2}\frac{(-)^{n+1}l^2}{n\pi}=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}$$

$$B_n\frac{n\pi a}{l}+\frac{2\omega^3 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}=T_n'(0)=\psi_n=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{n\pi a}{l}B_n&=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}-\frac{2\omega^3 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}\left\{1-\frac{\omega^2}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\right\}\\&=\frac{2(-)^n\omega A}{n\pi}\frac{-(n\pi a/l)^2}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}=-\frac{2\omega An\pi a^2}{l^2}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\end{aligned}$$

因此 $B_n=-\dfrac{2\omega Aa}{l}\dfrac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}$，从而

$$\begin{aligned}T_n(t)&=-\frac{2\omega Aa}{l}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}+\frac{2\omega^2 A}{n\pi}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\omega t\\&=\frac{2\omega Aa}{l}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t-\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\end{aligned}$$

定解问题的解

于是，$v(x,t)$ 的解为

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t - \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

最终，原定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\ &= \frac{x}{l}A\sin\omega t + \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t - \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

定解问题的解

于是，$v(x,t)$ 的**解**为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$= \frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t-\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最终，**原定解问题**的**解**为

$$u(x,t) = u_0(x,t)+v(x,t)$$
$$= \frac{x}{l}A\sin\omega t+\frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t-\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

前面取 $u_0(x,t) = A\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$ 时求得的**解**为

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a}-\frac{2\omega Aa}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

定解问题的解具有**唯一性**，虽然这两个解的**形式不同**，但**实质**是**一样**的

定解问题的解

于是，$v(x,t)$ 的解为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \\
&= \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t-\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

最终，**原定解问题**的**解**为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t)+v(x,t) \\
&= \frac{x}{l}A\sin\omega t+\frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t-\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

当 $\omega\to\dfrac{n\pi a}{l}$ **时趋于** $\dfrac{(-)^n}{2n\pi a/l}\left(\dfrac{l}{n\pi a}\sin\dfrac{n\pi a t}{l}+t\cos\dfrac{n\pi a t}{l}\right)$

共振解的动画演示

比较两个解

为了从图像上比较两个解，定义

$$u_m(x,t) \equiv \frac{x}{l} A\sin\omega t + \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\omega t - \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\tilde{u}_m(x,t) \equiv \frac{A}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{2\omega A a}{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-)^n}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

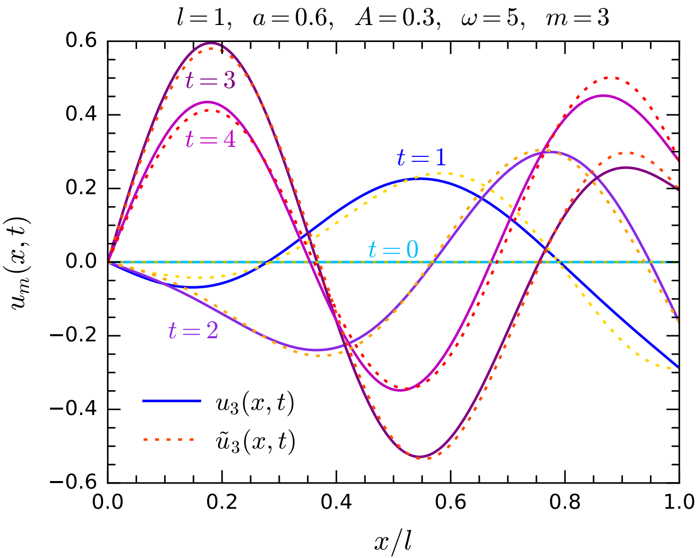
则两个解分别对应于

$$u(x,t) = \lim_{m\to\infty} u_m(x,t)$$

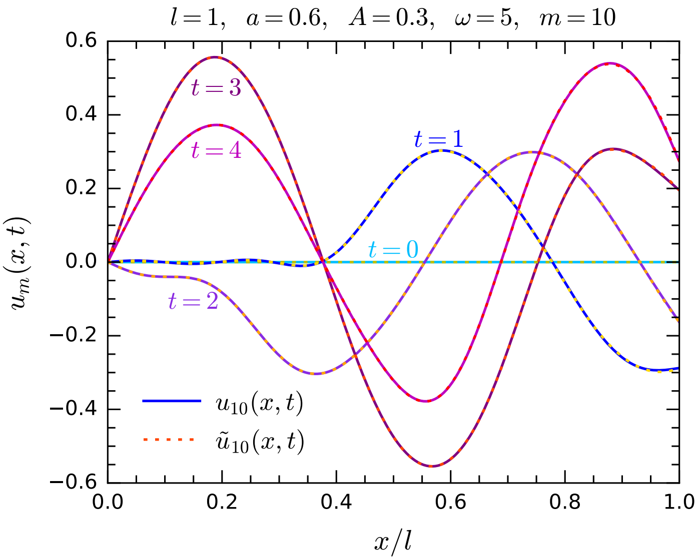
$$\tilde{u}(x,t) = \lim_{m\to\infty} \tilde{u}_m(x,t)$$

下面以 $m=3$、$m=10$ 和 $m=100$ 分别作图

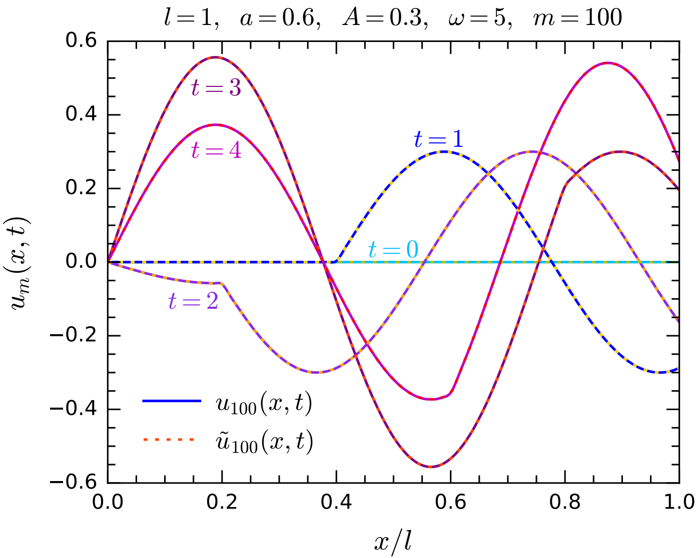
解的图像：$m=3$


$l=1,\quad a=0.6,\quad A=0.3,\quad \omega=5,\quad m=3$
$t=0$
$t=1$
$t=2$
$t=3$
$t=4$
$u_3(x,t)$
$\tilde{u}_3(x,t)$
$u_m(x,t)$
x/l
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

解的图像：$m = 10$


$l=1,\quad a=0.6,\quad A=0.3,\quad \omega=5,\quad m=10$
$t=3$
$t=4$
$t=1$
$t=0$
$t=2$
$u_{10}(x,t)$
$\tilde{u}_{10}(x,t)$
$u_m(x,t)$
x/l
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

解的图像：$m = 100$


$l=1,\quad a=0.6,\quad A=0.3,\quad \omega=5,\quad m=100$
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$u_m(x,t)$
x/l
$t=3$
$t=4$
$t=1$
$t=0$
$t=2$
$u_{100}(x,t)$
$\tilde{u}_{100}(x,t)$

§3.4 边界条件齐次化的一般方法

一维波动方程或热传导方程定解问题边界条件的最一般形式是

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geq 0$，但 α 和 β 不同时为零，γ 和 δ 不同时为零
- 注意两式中的符号差异

§3.4 边界条件齐次化的一般方法

- 一维波动方程或热传导方程定解问题边界条件的最一般形式是

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geq 0$，但 α 和 β **不同时为零**，γ 和 δ **不同时为零**
- 注意两式中的**符号差异**
- **上述形式**包括了第一、二、三类边界条件的各种情况
- 比如，**在 $x=0$ 端**，若 $\alpha=0$，则是**第一类**边界条件

  若 $\beta=0$，则是**第二类**边界条件

  若 $\alpha\beta=0$，则是**第三类**边界条件

§3.4 边界条件齐次化的一般方法

一维波动方程或热传导方程定解问题边界条件的最一般形式是

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geq 0$，但 α 和 β 不同时为零，γ 和 δ 不同时为零

注意两式中的符号差异

上述形式包括了第一、二、三类边界条件的各种情况

比如，在 $x=0$ 端，若 $\alpha=0$，则是第一类边界条件

若 $\beta=0$，则是第二类边界条件

若 $\alpha\beta=0$，则是第三类边界条件

前面指出，将边界条件齐次化的思路是构造一个尽可能简单的函数 $u_0(x,t)$

它与未知函数 $u(x,t)$ 满足相同的边界条件

然后令 $u(x,t)=v(x,t)+u_0(x,t)$，则新的未知函数 $v(x,t)$ 满足齐次的边界条件

构造 $u_0(x,t)$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\quad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 现在问题的关键是**构造** $u_0(x,t)$，它作为 t **的函数**，必定与 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 有关
- 由于**边界条件**只涉及 $x=0$ 和 $x=l$ 两个点，可以假设下列**对 x 为线性**的形式

$$u_0(x,t)=A(t)+xB(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$

构造 $u_0(x,t)$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\Bigg|_{x=0}=\mu(t),\qquad \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\Bigg|_{x=l}=\nu(t)$$

- 现在问题的关键是**构造** $u_0(x,t)$，它作为 t **的函数**，必定与 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 有关
- 由于**边界条件**只涉及 $x=0$ 和 $x=l$ 两个点，可以假设下列**对 x 为线性**的形式

$$u_0(x,t)=A(t)+xB(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$
- 如果**两端**都是**第二类**边界条件，则 $\beta=\delta=0$，符合**边界条件**的 $u_0(x,t)$ 必须满足

$$\left(\alpha\frac{\partial u_0}{\partial x}-\beta u_0\right)\Bigg|_{x=0}=\alpha B(t)=\mu(t),\qquad \left(\gamma\frac{\partial u_0}{\partial x}+\delta u_0\right)\Bigg|_{x=l}=\gamma B(t)=\nu(t)$$

- 这两个式子只有当 $\dfrac{\mu(t)}{\alpha}=\dfrac{\nu(t)}{\gamma}=B(t)$ 时才能同时满足
- 因而**一般情况**下**不能使用** $u_0(x,t)=A(t)+xB(t)$

第一类边界条件

- 对于这种**两端**都是**第二类**边界条件的情况，可以假设下列**对 x 为二次**的形式

$$u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$
- 除了**这种情况**，都可以使用**线性形式** $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$，下面举几个例子

第一类边界条件

- 对于这种**两端**都是**第二类**边界条件的情况，可以假设下列**对 x 为二次**的形式

$$u_0(x,t) = xA(t) + x^2 B(t)$$

- 然后代入**边界条件**以确定 $A(t)$ 和 $B(t)$
- 除了**这种情况**，都可以使用**线性形式** $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$，下面举几个例子

- **第一类边界条件：** $u|_{x=0} = \mu(t)$, $u|_{x=l} = \nu(t)$

- 将 $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$ 代入**边界条件**，得

$$u_0|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad u_0|_{x=l} = A(t) + lB(t) = \nu(t)$$

- 故 $B(t) = \frac{1}{l}[\nu(t) - A(t)] = \frac{1}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$，于是

$$u_0(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$$

第二类和混合边界条件

- **第二类边界条件：** $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t)$

- 将 $u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$ 代入**边界条件**，得

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=l} = A(t) + 2lB(t) = \nu(t)$$

- 故 $B(t) = \frac{1}{2l}[\nu(t) - A(t)] = \frac{1}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$，于是

$$u_0(x,t) = x\mu(t) + \frac{x^2}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$$

第二类和混合边界条件

- **第二类边界条件：** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t)$

- 将 $u_0(x,t) = xA(t) + x^2B(t)$ 代入**边界条件**，得

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=l} = A(t) + 2lB(t) = \nu(t)$$

- 故 $B(t) = \dfrac{1}{2l}[\nu(t) - A(t)] = \dfrac{1}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$，于是

$$u_0(x,t) = x\mu(t) + \frac{x^2}{2l}[\nu(t) - \mu(t)]$$

- **混合边界条件：** $u|_{x=0} = \mu(t), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t)$

- 将 $u_0(x,t) = A(t) + xB(t)$ 代入**边界条件**，得

$$u_0|_{x=0} = A(t) = \mu(t), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=l} = B(t) = \nu(t)$$

- 于是 $u_0(x,t) = \mu(t) + x\nu(t)$