

# 量子场论

## 标准模型简介

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 1 月 29 日



# 粒子物理标准模型

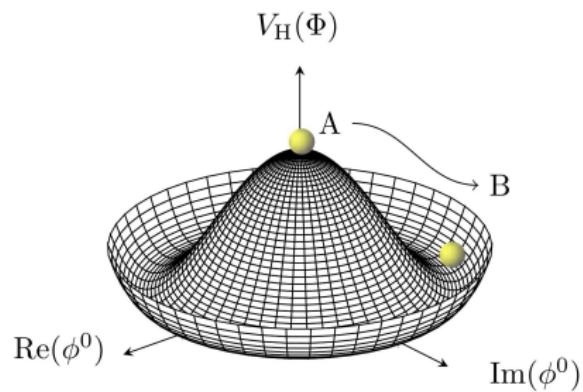
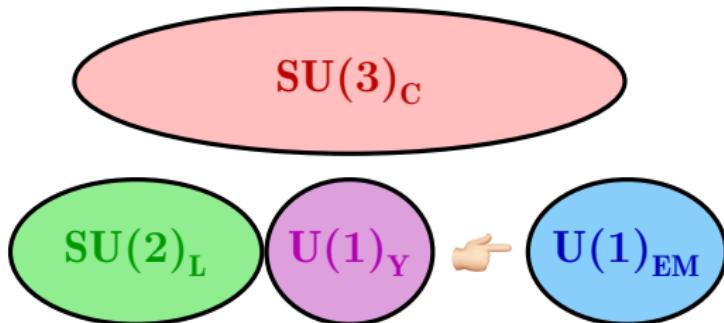


粒子物理**标准模型**是一个  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范场论

模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用

$SU(3)_C$  部分描述**强相互作用**，称为**量子色动力学**，规范玻色子是**胶子**

$SU(2)_L \times U(1)_Y$  部分描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱规范理论**，在这个理论中引入一个 **Higgs 标量二重态**，从而引起规范群的**对称性自发破缺**，使得  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  群破缺为  $U(1)_{EM}$  群



# 基本粒子质量起源

🍔 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

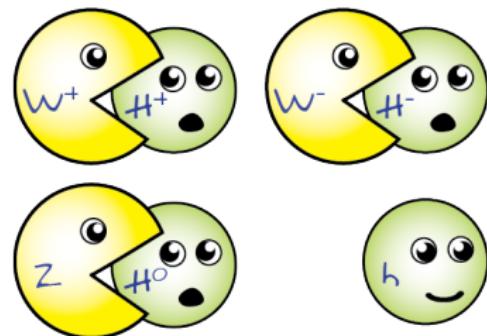
🍕 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得质量，成为  $W^\pm$  玻色子和  $Z^0$  玻色子，传递弱相互作用

🍰 剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递电磁相互作用

🌭 与 Higgs 场的 Yukawa 耦合导致左手和右手费米子组合成 Dirac 费米子，并获得质量

porr 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

🥐 1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理



Higgs 玻色子

# 非 Abel 规范理论

非 Abel 群的生成元彼此不对易，因而规范变换形式与 U(1) 群 (Abel 群) 不同

1954 年，杨振宁和 Robert Mills 提出**非 Abel 规范理论**，也称为 **Yang-Mills 理论**，其规范场称为 **Yang-Mills 场**

对于非 Abel 的 Lie 群，生成元  $t^a$  满足  $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$ ，依赖时空坐标的群么正变换为  $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ ，旋量场多重态  $\psi(x)$  和规范场  $A_\mu^a(x)$  的**规范变换**是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^a U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

定义**协变导数**  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$ ，就可以利用  $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$  推出

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[ \partial_\mu - ig \left( U A_\mu^a t^a U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \right) \right] U \psi \\ &= U U^\dagger (\partial_\mu U) \psi + U \partial_\mu \psi - ig U A_\mu^a t^a \psi + U (\partial_\mu U^\dagger) U \psi \\ &= U (\partial_\mu - ig U A_\mu^a t^a) \psi + U \partial_\mu (U^\dagger U) \psi = U(x) D_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

具有**非 Abel 规范对称性**的拉氏量是  $\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$ ，其中规范场的**场强张量**  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

# 量子色动力学

猿 量子色动力学 (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是  $SU(3)_C$  非 Abel 规范理论, 规范场  $G_\mu^a(x)$  对应于 8 种胶子, 夸克旋量场  $q(x)$  是  $SU(3)_C$  三重态, 拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q} (\text{i} \gamma^\mu D_\mu - m_q) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

◆ 协变导数  $D_\mu = \partial_\mu - \text{i} g_s G_\mu^a t^a$ , 场强张量  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

◆  $g_s$  称为**强耦合常数**, 结构常数  $f^{abc}$  对 3 个指标全反对称, 独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

◆  $t^a = \lambda^a/2$  是  $SU(3)_C$  基础表示的生成元, 其中  $\lambda^a$  是 8 个 **Gell-Mann 矩阵**

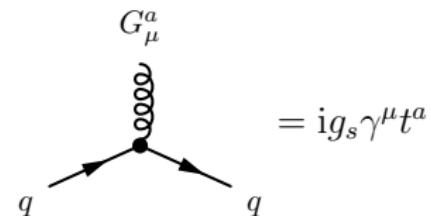
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{i} & 0 \\ \text{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{i} \\ 0 & \text{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# QCD 相互作用顶点

🍩  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  中  $g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$  项的相互作用顶点如右图

.–  $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$  项带来非 Abel 规范理论特有的以下规范玻色子自相互作用顶点——胶子的三线性和四线性自相互作用顶点



$$= g_s f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

$$\begin{aligned} & G_\mu^a \quad G_\nu^b \quad = -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & \quad \quad \quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & \quad \quad \quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})] \end{aligned}$$



# 渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标  $Q$

在 QED 中，电磁耦合常数  $\alpha = e^2/(4\pi)$  随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$  随能标升高而减小

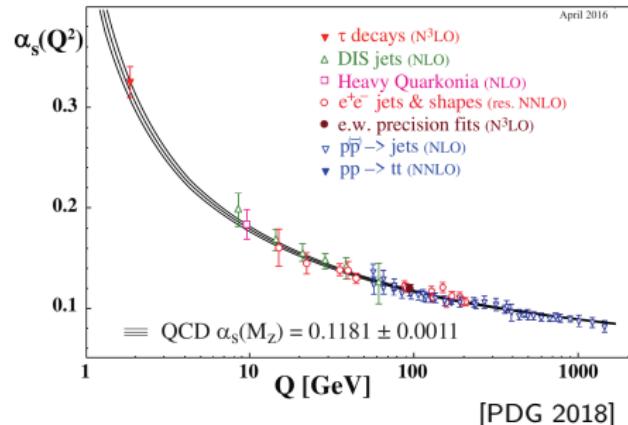
由于高能标意味着短距离，这个特性称为 QCD 的渐近自由

随着能标下降， $\alpha_s$  越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为夸克禁闭

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中



# 旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影算符  $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  和右手投影算符  $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场  $\psi(x)$  分解为左手旋量场  $\psi_L \equiv P_L\psi$  和右手旋量场  $\psi_R \equiv P_R\psi$

 对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

$$\text{左手场 } \psi_L(x) \begin{cases} \text{左旋正费米子} \\ \text{右旋反费米子} \end{cases} \quad \text{右手场 } \psi_R(x) \begin{cases} \text{右旋正费米子} \\ \text{左旋反费米子} \end{cases}$$

 质量项  $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  相当于左右手旋量场的耦合项

 在空间反射变换下，动量方向反转，自旋方向不变，因而螺旋度符号翻转

# 旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影算符  $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  和右手投影算符  $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场  $\psi(x)$  分解为左手旋量场  $\psi_L \equiv P_L\psi$  和右手旋量场  $\psi_R \equiv P_R\psi$

 对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

$$\begin{array}{ll} \text{左手场 } \psi_L(x) & \left\{ \begin{array}{l} \text{左旋正费米子} \\ \text{右旋反费米子} \end{array} \right. \\ \text{右手场 } \psi_R(x) & \left\{ \begin{array}{l} \text{右旋正费米子} \\ \text{左旋反费米子} \end{array} \right. \end{array}$$

 质量项  $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  相当于左右手旋量场的耦合项

 在空间反射变换下，动量方向反转，自旋方向不变，因而螺旋度符号翻转

 对于宇称守恒的理论，如量子电动力学和量子色动力学，存在空间反射对称性，左右手旋量场具有相同的相互作用

 在弱相互作用中，宇称不守恒，不存在空间反射对称性，其根源在于左右手旋量场参与不同的规范相互作用

# 电弱规范理论

 电弱规范理论是  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范理论

  $SU(2)_L$  的生成元称为 弱同位旋  $T^a$ ,  $U(1)_Y$  的生成元称为 弱超荷  $Y$

 电荷  $Q = T^3 + Y$  是  $T^3$  和  $Y$  的线性组合

 左手旋量场构成  $SU(2)_L$  二重态, 右手旋量场则是  $SU(2)_L$  单态

统一记号	第1代	第2代	第3代	$T^3$	$Y$	$Q$
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1/2 -1/2	-1/2 -1/2	0 -1
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	1/2 -1/2	1/6 1/6	2/3 -1/3
$\ell_{iR}$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	0	-1	-1
$u_{iR}$	$u_R$	$c_R$	$t_R$	0	2/3	2/3
$d'_{iR}$	$d'_R$	$s'_R$	$b'_R$	0	-1/3	-1/3

 规范本征态  $d'_i$  通过 CKM 矩阵  $V_{ij}$  与质量本征态  $d_i$  联系起来:  $d'_i = V_{ij}d_j$

# 费米子的电弱规范不变拉氏量



三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{Q}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{iR} + \bar{u}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\gamma^\mu D_\mu d'_{iR}$$

SU(2)<sub>L</sub> 二重态  $Q_{iL}$  和  $L_{iL}$  的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'YB_\mu$ ，其中  $T^a = \sigma^a/2$ ；SU(2)<sub>L</sub> 单态  $\ell_{iR}$ 、 $u_{iR}$  和  $d'_{iR}$  的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - ig'YB_\mu$

这里**没有质量项**：质量项耦合左右手旋量场，从而破坏规范对称性

# 费米子的电弱规范不变拉氏量



三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{Q}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{iR} + \bar{u}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\gamma^\mu D_\mu d'_{iR}$$

SU(2)<sub>L</sub> 二重态  $Q_{iL}$  和  $L_{iL}$  的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ , 其中  $T^a = \sigma^a/2$ ; SU(2)<sub>L</sub> 单态  $\ell_{iR}$ 、 $u_{iR}$  和  $d'_{iR}$  的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - ig' Y B_\mu$

这里**没有质量项**: 质量项耦合左右手旋量场, 从而破坏规范对称性

规范场  $W_\mu^a(x)$  ( $a = 1, 2, 3$ ) 和  $B_\mu(x)$  跟左手旋量场的耦合与右手旋量场不同, 而电磁场  $A_\mu(x)$  却相同 为了得到电磁相互作用, 需要把  $W_\mu^3$  和  $B_\mu$  **混合**起来

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_W \equiv \sqrt{1 - s_W^2}$$

$g$  是 SU(2)<sub>L</sub> 规范耦合,  $g'$  是 U(1)<sub>Y</sub> 规范耦合, 转动角  $\theta_W$  称为 **Weinberg 角**

$A_\mu$  对应于**光子**, 传递电磁相互作用, **电磁耦合**  $e = g s_W = g' c_W$

$Z_\mu$  和  $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$  对应于  **$Z^0$  和  $W^\pm$  玻色子**, 传递弱相互作用

# 费米子的电弱规范相互作用

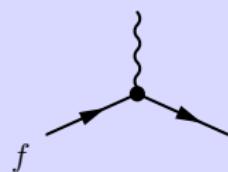


费米子电弱规范相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset e A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + g Z_\mu J_Z^\mu + g (W_\mu^+ J_W^{+, \mu} + \text{H.c.})$

$$\text{电磁流 } J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^\mu f, \quad \text{弱带电流 } J_W^{+, \mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{i\text{L}} \gamma^\mu V_{ij} d_{j\text{L}} + \bar{\nu}_{i\text{L}} \gamma^\mu \ell_{i\text{L}})$$

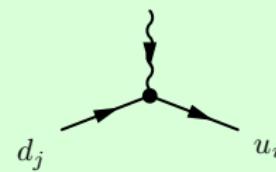
$$\text{弱中性流 } J_Z^\mu \equiv \frac{1}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f, \quad g_V^f \equiv T_f^3 - 2Q_f s_W^2, \quad g_A^f \equiv T_f^3$$

$$A_\mu$$



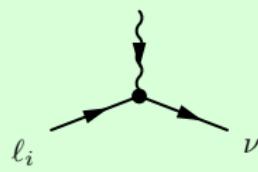
$$= i Q_f e \gamma^\mu$$

$$W_\mu$$



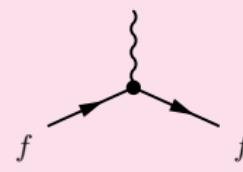
$$= \frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$

$$W_\mu$$



$$= \frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

$$Z_\mu$$



$$= \frac{ig}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5)$$

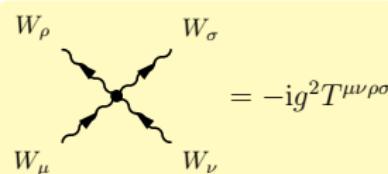
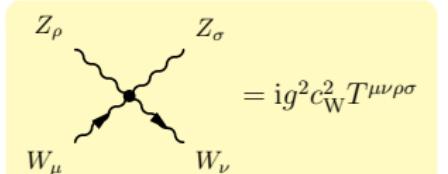
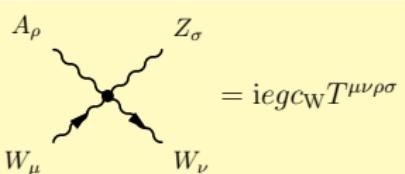
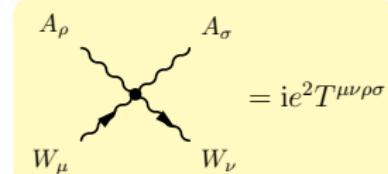
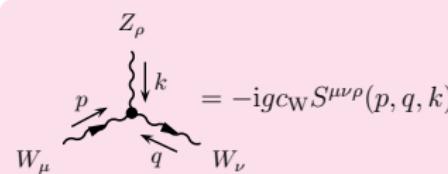
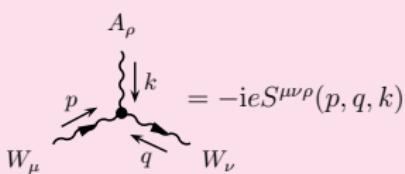
# 电弱规范玻色子的自相互作用



电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

场强张量  $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ ,  $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$



$$S^{\mu\nu\rho}(p, q, k) \equiv g^{\mu\nu}(p - q)^\rho + g^{\nu\rho}(q - k)^\mu + g^{\rho\mu}(k - p)^\nu$$

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$$

# Brout–Englert–Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 $Z^0$  和  $W^\pm$  都具有质量，但上述  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范理论的拉氏量还没有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

😢 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

😢 直接引入旋量场的质量项会破坏  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范对称性

# Brout–Englert–Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 $Z^0$  和  $W^\pm$  都具有质量，但上述  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范理论的拉氏量还没有任何质量项

规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

直接引入旋量场的质量项会破坏  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范对称性

为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入 Brout–Englert–Higgs (BEH) 机制，使  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  对称性自发破缺

引进 Higgs 标量场  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ ， $\phi^+$  和  $\phi^0$  都是复标量场； $\Phi$  是  $SU(2)_L$  二重态，具有弱超荷  $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ ， $T^a = \sigma^a / 2$

$V_H(\Phi)$  是 Higgs 标量场的势能项，依赖于  $\Phi^\dagger \Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

# 自发对称性破缺

 Higgs 场势能的行为由二次项系数  $\mu^2$  和四次项系数  $\lambda$  决定；假设  $\lambda > 0$

 如果  $\mu^2 < 0$ ，势能项  $V_H(\Phi)$  的最小值对应于  $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为  $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏

# 自发对称性破缺

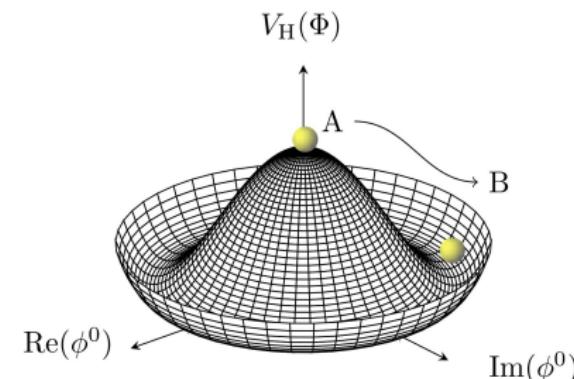
 Higgs 场势能的行为由二次项系数  $\mu^2$  和四次项系数  $\lambda$  决定；假设  $\lambda > 0$

 如果  $\mu^2 < 0$ ，势能项  $V_H(\Phi)$  的最小值对应于  $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为  $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏

 如果  $\mu^2 > 0$ ， $\Phi^\dagger \Phi = 0$  处变成  $V_H(\Phi)$  的极大值，而最小值位于  $\Phi^\dagger \Phi = v^2/2$  对应的 3 维球面上，其中  $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

 若压缩掉  $\phi^+$  的实部和虚部两个维度，则  $V_H(\Phi)$  在  $\phi^0$  的实部和虚部坐标上呈现右图所示墨西哥草帽状的形式；Higgs 场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点，不失一般性，可取为  $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

 电弱规范变换会改变这个期待值，故真空态不满足电弱规范对称性；这种拉氏量满足对称性、真空态却不能满足的现象称为对称性自发破缺



# 希格斯玻色子



以上述真空期待值  $\langle \Phi \rangle$  为基础, 考虑沿  $\phi^0$  实轴扰动的实标量场  $H(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2$$



这种参数化方法称为么正规范, 其它规范可由  $SU(2)_L$  规范变换得到

# 希格斯玻色子



以上述真空期待值  $\langle \Phi \rangle$  为基础, 考虑沿  $\phi^0$  实轴扰动的实标量场  $H(x)$

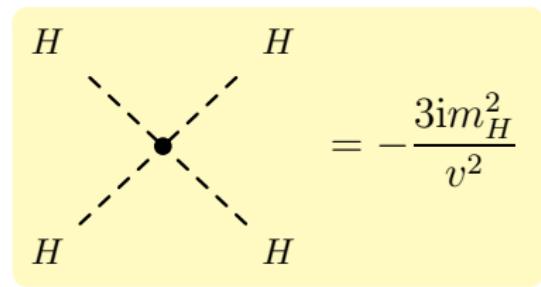
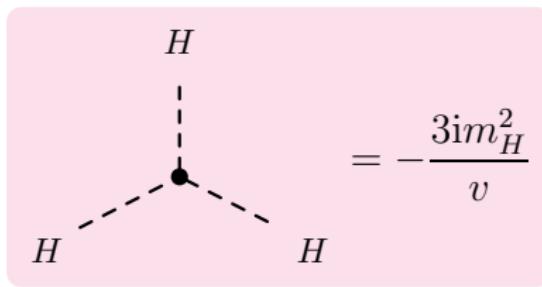
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2$$



这种参数化方法称为么正规范, 其它规范可由  $SU(2)_L$  规范变换得到

$$\text{🍔 } -V_H(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \frac{m_H^2}{2v} H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2} H^4$$

$m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ , 实标量场  $H$  对应于一个**质量为  $m_H$**  的中性标量粒子  $H^0$ , 称为 **Higgs 玻色子**, 具有**三线性和四线性自相互作用**



# 规范玻色子质量

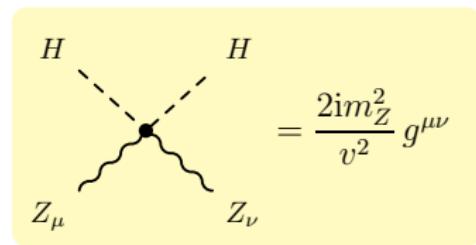
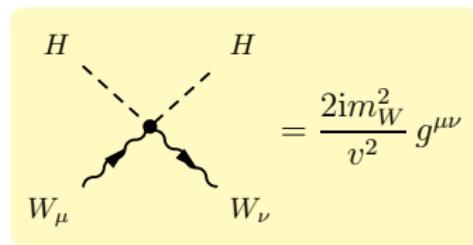
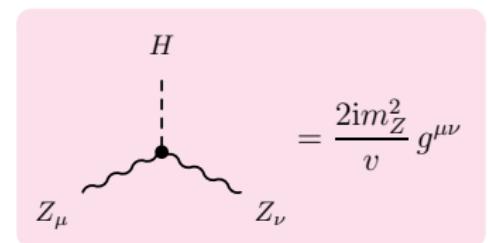
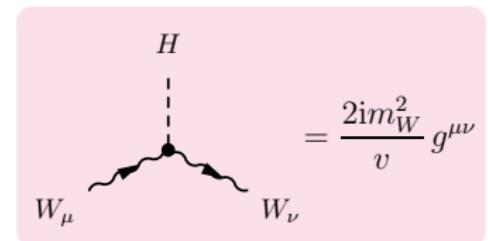
在么正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} (\partial^\mu H) (\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \\ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v} H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v} H Z_\mu Z^\mu \\ + \frac{m_W^2}{v^2} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2} H^2 Z_\mu Z^\mu$$

$m_W \equiv \frac{1}{2} g v, \quad m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v$

对称性自发破缺之后， $W^\pm$  和  $Z^0$  规范玻色

子获得质量  $m_W$  和  $m_Z$ ，有 3 个希格斯场自由度变成它们的纵向极化分量



# 费米子质量



Higgs 场与旋量场之间能够发生电弱规范不变的 Yukawa 相互作用

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_d^{ij} \bar{Q}_{iL} d'_{jR} \Phi - y_{u_i} \bar{Q}_{iL} u_{iR} \tilde{\Phi} - y_{\ell_i} \bar{\ell}_{iL} \ell_{iR} \Phi + \text{H.c.}, \quad \tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^*$$



Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵  $V$  将  $\tilde{y}_d^{ij}$  对角化，满足

$$V_{li}^\dagger \tilde{y}_d^{ij} V_{jk} = y_{dk} \delta_{lk}$$



对称性自发破缺之后，Yukawa 耦合项化为

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i$$



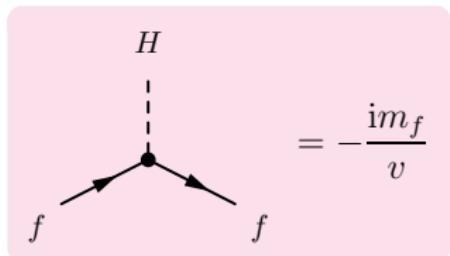
$$m_{d_i} \equiv \frac{y_{d_i} v}{\sqrt{2}}, \quad m_{u_i} \equiv \frac{y_{u_i} v}{\sqrt{2}}, \quad m_{\ell_i} \equiv \frac{y_{\ell_i} v}{\sqrt{2}}$$



可见，费米子获得了质量



费米子与 Higgs 玻色子发生 Yukawa 相互作用，耦合常数正比于费米子质量



# 夸克味混合



在标准模型中，不失一般性，可以将上型夸克的规范态就取为质量态，而下型夸克的规范态与质量态通过 **CKM 矩阵  $V$**  联系：

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

概率守恒要求  $V$  是正矩阵，标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ c_{23} & s_{23} & \\ -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} & \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & c_{13} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} s_{ij} &\equiv \sin \theta_{ij} \\ c_{ij} &\equiv \cos \theta_{ij} \end{aligned}$$

$V$  包含 3 个转动角  $\theta_{12} \simeq 13^\circ$ ,  $\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$ ,  $\theta_{13} \simeq 0.20^\circ$ ,  
1 个引起  **$CP$  破坏** 的复相角  $\delta \simeq 71^\circ$

# CKM 矩阵元



拟合实验数据得到 **CKM 矩阵元的模为**

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.97446 \pm 0.00010 & 0.22452 \pm 0.00044 & 0.00365 \pm 0.00012 \\ 0.22438 \pm 0.00044 & 0.97359^{+0.00010}_{-0.00011} & 0.04214 \pm 0.00076 \\ 0.00896^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.04133 \pm 0.00074 & 0.999105 \pm 0.000032 \end{pmatrix}$$



如果忽略第三代夸克的混合, CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_C \text{ 称为 } \textbf{Cabibbo 角}, \text{ 满足 } \sin \theta_C = |V_{12}|$$



CKM 矩阵的**非对角元**非零



**弱带电流可以耦合不同代的夸克**

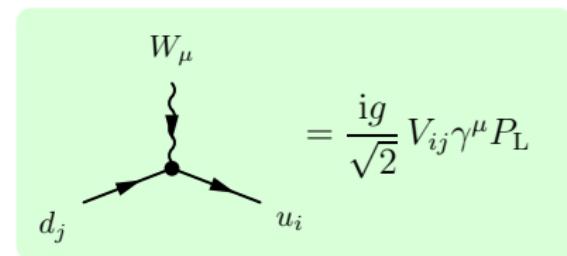


$W^+ \rightarrow u\bar{d}'$  过程在质量态上表现为

$$W^+ \rightarrow u\bar{d} \text{ ( $V_{11}$  引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{s} \text{ ( $V_{12}$  引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{b} \text{ ( $V_{13}$  引起)}$$



# 超出标准模型：中微子味混合

 中微子振荡实验表明，中微子具有微小质量，而且存在味混合

 Dirac 中微子的味道本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵  $U$  联系：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$

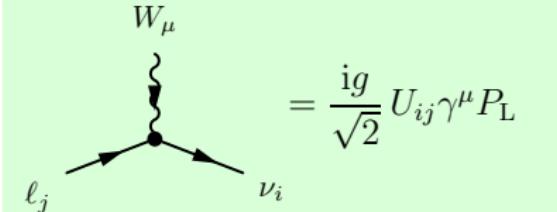
  $\bar{\theta}_{12} \sim 33^\circ$ ,  $\bar{\theta}_{23} \sim 41^\circ$  (质量正序) 或  $\bar{\theta}_{23} \sim 50^\circ$  (质量逆序),  $\bar{\theta}_{13} \sim 8.4^\circ$

 如果中微子是 Majorana 费米子，则额外存在 2 个  $CP$  破坏相角  $\rho$  和  $\sigma$ ，PMNS 矩阵应该再右乘  $\text{diag}(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$

 太阳中微子振荡   $\bar{\theta}_{12}$

 大气中微子振荡   $\bar{\theta}_{23}$

 反应堆中微子振荡   $\bar{\theta}_{13}$



# $e^+e^-$ 湮灭

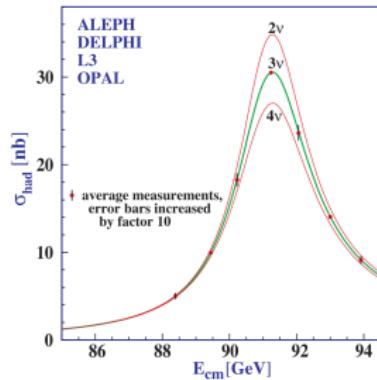
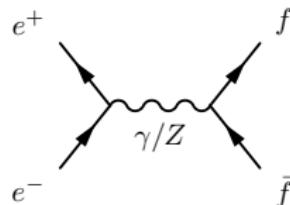


通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

$e^+e^-$  可湮灭成一对正反费米子  $f\bar{f}$



$\sqrt{s} \sim m_Z$  处出现  $Z$  的**共振峰**



# $e^+e^-$ 湮灭

通过电磁流和弱中性流相互作用，

$e^+e^-$  可湮灭成一对正反费米子  $f\bar{f}$

在  $\sqrt{s} \sim m_Z$  处出现  $Z$  的共振峰

受共振态和弱中性流影响较小时，

截面比  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$  体现

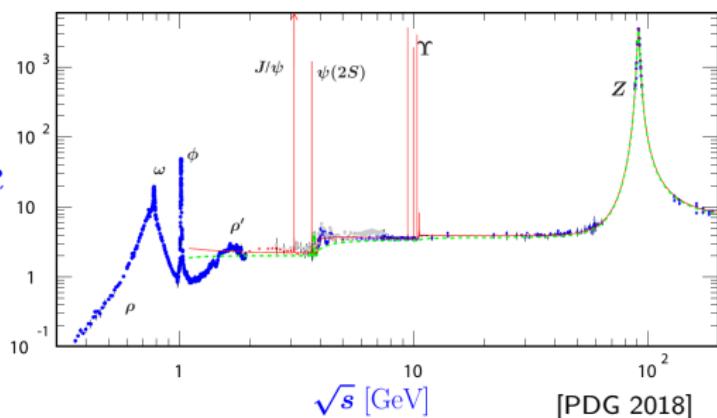
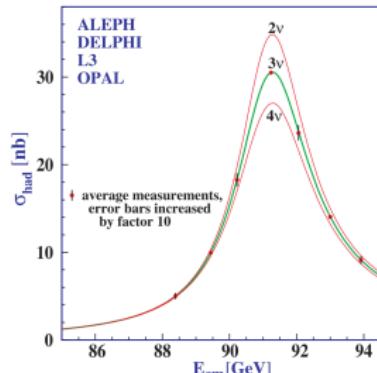
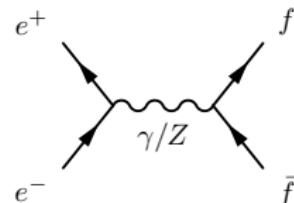
夸克味数、电荷跟  $\mu$  子的相对差异

在  $1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.6 \text{ GeV}$  处，

$$R \simeq 3 \left[ 2 \left( -\frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad \textcolor{blue}{R}$$

在  $3.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ GeV}$  处，

$$R \simeq 3 \left[ 2 \left( -\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$



# $\beta$ 衰变

弱相互作用引起原子核  $\beta$  衰变

质量数为  $A = Z + N$  的原子核具有  $Z$  个质子和  $N$  个中子，通过  $\beta$  衰变会变成具有  $Z + 1$  个质子和  $N - 1$  个中子的原子核  $A'$ ，即

$$A(Z, N) \rightarrow A'(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

在核子层次，以上过程体现为中子  $\beta$  衰变，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

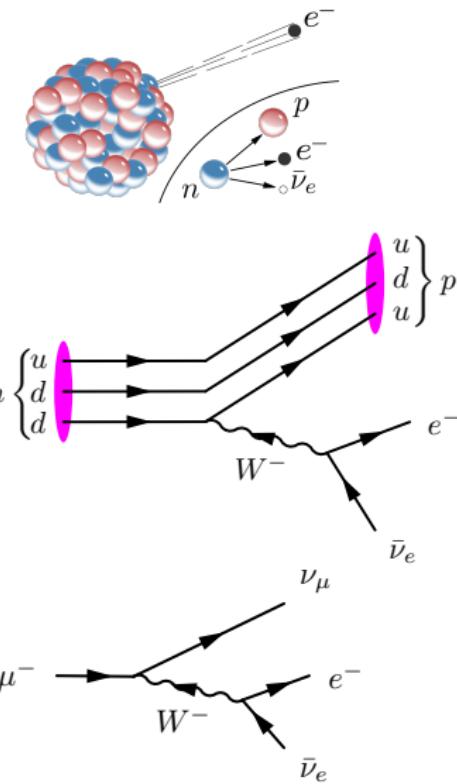
在夸克层次，以上过程体现为  $d$  夸克  $\beta$  衰变

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

此过程来自  $W^-$  玻色子传递的弱带电流相互作用

在轻子方面，类似的过程有  $\mu$  子衰变

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



# 介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变

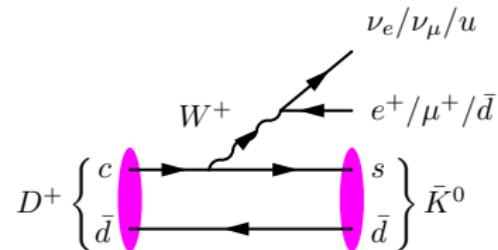


$D^+(c\bar{d})$  衰变到  $\bar{K}^0$  和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



$D^+$  中  $\bar{d}$  夸克实际没参与衰变, 称为旁观者



# 介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变



$D^+(c\bar{d})$  衰变到  $\bar{K}^0$  和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



$D^+$  中  $\bar{d}$  夸克实际没参与衰变, 称为旁观者

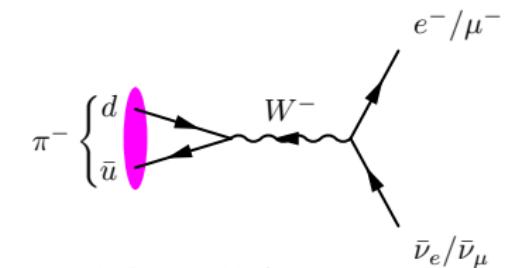
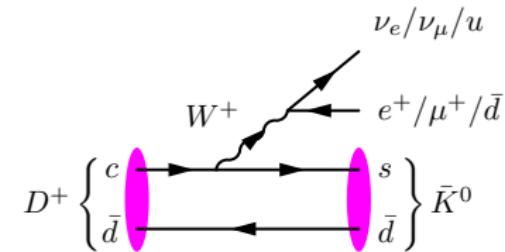


$\pi^-(\bar{u}d)$  衰变到带电轻子和反中微子

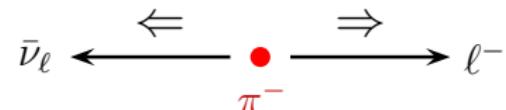
$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



$\pi^-$  静止系中, 角动量守恒要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同, 但弱带电流只耦合左旋费米子和右旋反费米子, 需要由质量翻转螺旋度



$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$



$\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$  分支比为 99.9877%,  $\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e$  分支比为 0.0123%