

Majorana 旋量场专题

第三节 费米子数破坏过程的 Feynman 规则

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



B 站账号：行星状星云



第二届江门中微子暑期学校
中国科学院大学杭州高等研究院
2025年8月17日至24日



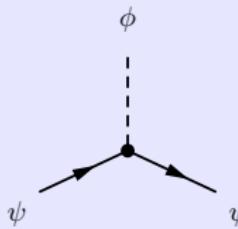
费米子数破坏

由于 Dirac 旋量场可以携带某种 $U(1)$ 荷, 相应费米子线上的箭头代表 $U(1)$ 荷流动的方向, 或者说费米子数流动的方向

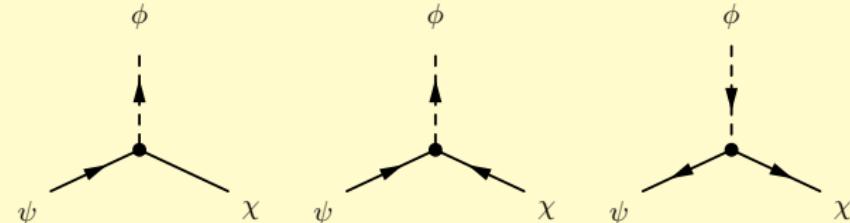
另一方面, Majorana 旋量场不能携带任何 $U(1)$ 荷, 不存在费米子数流动的方向, 相应的费米子线则不应该具备箭头

如果相互作用过程涉及到 Majorana 旋量场与 Dirac 旋量场的耦合, 带箭头与不带箭头的费米子线将在顶点处相连

从而导致一条连续的费米子线上不能处处具有相同的方向，这种情况称为费米子数破坏 (fermion-number violation)



费米子数守恒



费米子数破坏

费米子数破坏

由于 Dirac 旋量场可以携带某种 U(1) 荷，相应费米子线上的箭头代表 U(1) 荷流动的方向，或者说费米子数流动的方向

另一方面, Majorana 旋量场不能携带任何 $U(1)$ 荷, 不存在费米子数流动的方向, 相应的费米子线则不应该具备箭头

如果相互作用过程涉及到 Majorana 旋量场与 Dirac 旋量场的耦合, 带箭头与不带箭头的费米子线将在顶点处相连

从而导致一条连续的费米子线上不能处处具有相同的方向，这种情况称为费米子数破坏 (fermion-number violation)

我们需要研究适用于费米子数破坏过程的 Feynman 规则

本节讨论两个简单例子，更一般的情况可参考文献

- A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck, “Feynman rules for fermion number violating interactions,” Nucl. Phys. B 387 (1992) 467–481

拉氏量和 CP 对称性

考虑复标量场 $\phi(x)$ 、Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 构成拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi} (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} \bar{\chi} (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi) \chi + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

相互作用拉氏量为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$

⚠ κ 是一个复耦合常数, \mathcal{L}_{int} 是厄米的, 因为 \mathcal{L}_{int} 中两项互为厄米共轭,

$$(\kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi)^\dagger = \kappa^* \psi^\dagger P_R \gamma^0 \chi = \kappa^* \psi^\dagger \gamma^0 P_L \chi = \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$$

这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用

拉氏量和 CP 对称性

考虑复标量场 $\phi(x)$ 、Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 构成拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi} (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} \bar{\chi} (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi) \chi + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

相互作用拉氏量为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$

是复耦合常数， \mathcal{L}_{int} 是厄米的，因为 \mathcal{L}_{int} 中两项互为厄米共轭，

$$(\kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi)^\dagger = \kappa^* \psi^\dagger P_R \gamma^0 \chi = \kappa^* \psi^\dagger \gamma^0 P_L \chi = \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$$

这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用

作 $U(1)$ 整体变换 $\phi'(x) = e^{i\varphi\theta}\phi(x)$ 和 $\psi'(x) = e^{i\varphi\theta}\psi(x)$ ，则拉氏量 \mathcal{L} 不变

可见，这个理论具有一个 $U(1)$ 整体对称性，而复标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 $U(1)$ 荷相同，均为 q

将耦合常数分解为实部和虚部, $\kappa = \kappa_R + i\kappa_I$, 则相互作用拉氏量化为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$$

C 破坏和 P 破坏

假设三个量子场的 C 、 P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^* \phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\chi(x)C = \tilde{\zeta}_C^* \chi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\chi(x)P = \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x)$$

推出算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$ 的 C 、 P 变换

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_R\psi(x)C = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_R\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{R}}\psi(x)P = \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_{\text{L}}\psi(\mathcal{P}x)$$

而算符 $\phi\bar{\psi}P_L\chi$ 的 C 、 P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{L}}\psi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_R\chi(\mathcal{P}x)$$

C 破坏和 P 破坏

假设三个量子场的 C 、 P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^* \phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\chi(x)C = \tilde{\zeta}_C^* \chi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\chi(x)P = \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x)$$

推出算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$ 的 C 、 P 变换

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_R\psi(x)C = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_R\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{R}}\psi(x)P = \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_{\text{L}}\psi(\mathcal{P}x)$$

而算符 $\phi\bar{\psi}P_L\chi$ 的 C 、 P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{L}}\psi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\text{R}}\chi(\mathcal{P}x)$$

无论作 C 变换还是 P 变换，相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$ 都不能保持不变，因此理论不具有电荷共轭对称性和空间反射对称性

换言之，这个理论既是 **C** 破坏 (*C*-violation) 的，又是 **P** 破坏 (*P*-violation) 的

CP 破坏?

进一步, 算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$ 和 $\phi \bar{\psi} P_L \chi$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) P_R \psi(x) CP = \eta_{CP} \phi(\mathcal{P}x) \bar{\psi}(\mathcal{P}x) P_L \chi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \phi(x) \bar{\psi}(x) P_L \chi(x) CP = \eta_{CP}^* \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \bar{\chi}(\mathcal{P}x) P_R \psi(\mathcal{P}x)$$

其中 $\eta_{CP} \equiv \eta_C \eta_P^* \zeta_C^* \zeta_P \tilde{\zeta}_C \tilde{\zeta}_P^*$

注意，复场的分立变换相位因子的取值是任意的

如果适当选取 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 相位因子的值, 使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$

则算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi$ 在 CP 变换下不变

而相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$ 中 κ_R 对应的项具有 CP 对称性, κ_I 对应的项引起 CP 破坏 (CP -violation)

CP 破坏?

进一步, 算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$ 和 $\phi \bar{\psi} P_L \chi$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) P_R \psi(x) CP = \eta_{CP} \phi(\mathcal{P}x) \bar{\psi}(\mathcal{P}x) P_L \chi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)CP = \eta_{CP}^*\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_R\psi(\mathcal{P}x)$$

其中 $\eta_{CP} \equiv \eta_C \eta_P^* \zeta_C^* \zeta_P \tilde{\zeta}_C \tilde{\zeta}_P^*$

注意，复场的分立变换相位因子的取值是任意的

如果适当选取 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 相位因子的值, 使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$

则算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi$ 在 CP 变换下不变

而相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$ 中 κ_R 对应的项具有 CP 对称性, κ_I 对应的项引起 CP 破坏 (CP -violation)

如果相位因子的取值使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = -1$

则算符 $i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi$ 在 CP 变换下不变

而 κ_I 对应的项具有 CP 对称性, κ_R 对应的项引起 CP 破坏

因此, 当 $\kappa_R \neq 0$ 且 $\kappa_I \neq 0$ 时, 相互作用拉氏量 \mathcal{L}_{int} 看起来会破坏 CP 对称性

CP 对称性

不过, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 是 Hilbert 空间中的非自共轭算符, 它的相位具有任意性 ($\psi(x)|\Psi\rangle$ 与 $e^{-i\varphi}\psi(x)|\Psi\rangle$ 描述相同的量子态), 可用于吸收 $\kappa \equiv |\kappa|e^{-i\varphi}$ 的相位 φ

如果将 Dirac 旋量场重新定义为 $\psi'(x) = e^{-i\varphi}\psi(x)$ ，则 $\bar{\psi}'(x) = e^{i\varphi}\bar{\psi}(x)$ ，于是 $\mathcal{L}_{\text{int}} = |\kappa|e^{-i\varphi}\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi + |\kappa|e^{i\varphi}\phi\bar{\psi}P_L\chi = |\kappa|(\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi' + \phi\bar{\psi}'P_L\chi)$ 描述同一个理论

但此时耦合常数 $|\kappa|$ 是实数，不会引起 CP 破坏

! 因此,这个理论实际上是具有 CP 对称性的

当理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时，才会出现 CP 破坏

CP 对称性

不过, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 是 Hilbert 空间中的非自共轭算符, 它的相位具有任意性 ($\psi(x)|\Psi\rangle$ 与 $e^{-i\varphi}\psi(x)|\Psi\rangle$ 描述相同的量子态), 可用于吸收 $\kappa \equiv |\kappa|e^{-i\varphi}$ 的相位 φ

如果将 Dirac 旋量场重新定义为 $\psi'(x) = e^{-i\varphi}\psi(x)$ ，则 $\bar{\psi}'(x) = e^{i\varphi}\bar{\psi}(x)$ ，于是 $\mathcal{L}_{\text{int}} = |\kappa|e^{-i\varphi}\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi + |\kappa|e^{i\varphi}\phi\bar{\psi}P_L\chi = |\kappa|(\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi' + \phi\bar{\psi}'P_L\chi)$ 描述同一个理论

但此时耦合常数 $|\kappa|$ 是实数，不会引起 CP 破坏

! 因此, 这个理论实际上是具有 CP 对称性的

当理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时，才会出现 CP 破坏

另一方面，像实标量场、实矢量场和 Majorana 旋量场这样的实场必须满足自共轭条件，这导致它不具有相位任意性

在下面的讨论中, 不失一般性, 将耦合常数 κ 取为实数, 相互作用拉氏量表达为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa(\phi^\dagger \bar{\chi} \Gamma_1 \psi + \phi \bar{\psi} \Gamma_2 \chi)$$

这里引入了 $\Gamma_1 = P_R$ 和 $\Gamma_2 = P_L$ ，下面许多结论与 Γ_1 和 Γ_2 的具体形式无关

单粒子态

将 Dirac 旋量场、复标量场和 Majorana 旋量场的平面波展开式表达为

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\textcolor{brown}{c}_p e^{-ip \cdot x} + d_p^\dagger e^{ip \cdot x})$$

$$\chi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{f}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{f}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

相应地，引入以下单粒子态，

Dirac 正费米子 ψ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

正标量玻色子 ϕ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} c_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

反标量玻色子 $\bar{\phi}$ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} d_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

Majorana 费米子 χ 的单粒子态 $|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} f_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$

注意, Majorana 费米子 χ 是纯中性的, 动量记号的右上角没有正负号

iT 算符 $n = 1$ 阶

 Dirac 旋量场和复标量场与初末态的缩并结果在此省略

Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \chi^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle 0 | \bar{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \bar{\chi}^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi^{(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}
 \end{aligned}$$

iT 算符 $n = 1$ 阶

Dirac 旋量场和复标量场与初末态的缩并结果在此省略

Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \chi^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle 0 | \bar{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \bar{\chi}^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi^{(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}
 \end{aligned}$$

由于相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_{\text{int}}$ ， iT 算符展开式中 $n = 1$ 的项为

$$\begin{aligned} i\bar{T}^{(1)} &= -i \int d^4x \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x)] = i \int d^4x \mathsf{T}[\mathcal{L}_{\text{int}}(x)] \\ &= i\kappa \int d^4x \mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x) + \phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] \end{aligned}$$

根据 Wick 定理, $iT^{(1)}$ 只包含下面两项,

$$iT_1^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)], \quad iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$$

$\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变过程

考虑 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变, 初末态为 $|p^+, \lambda\rangle$ 和 $|q, \lambda'; k^+\rangle$, $iT_1^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \overline{\mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)]} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= i \kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)
\end{aligned}$$

这是计算 T 矩阵元的**第一种方法**，与通常的 Feynman 图方法一样

$\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变过程

考虑 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变, 初末态为 $|p^+, \lambda\rangle$ 和 $|q, \lambda'; k^+\rangle$, $iT_1^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \overline{\mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)]} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)
\end{aligned}$$

这是计算 T 矩阵元的**第一种方法**，与通常的 Feynman 图方法一样

利用电荷共轭变换，可以引进第二种计算方法

将相互作用算符 $\bar{\psi}\Gamma_1\psi$ 化为

$$\begin{aligned}\bar{\chi}\Gamma_1\psi &= (\bar{\chi}\Gamma_1\psi)^T = -\psi^T\Gamma_1^T\bar{\chi}^T = -\psi^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\Gamma_1^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^T \\ &= \psi^T\mathcal{C}\Gamma_1^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^T = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi^C\end{aligned}$$

同理推出 $\bar{\psi} \Gamma_2 \chi = \bar{\chi}^C \Gamma_2^C \psi^C$

第二种计算方法

老虎 通过 Majorana 条件 $\chi = \chi^c$ 将 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^c\Gamma_1^c\chi^c$ 和 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}^c\Gamma_2^c\psi^c$ 化为

$$\bar{\chi} \Gamma_1 \psi = \bar{\psi}^C \Gamma_1^C \chi, \quad \bar{\psi} \Gamma_2 \chi = \bar{\chi} \Gamma_2^C \psi^C$$

从而将 $iT_1^{(1)}$ 和 $iT_2^{(1)}$ 改写为

$$iT_1^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)] = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}^C(x) \Gamma_1^C \chi(x)]$$

$$iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]$$



注意，此时旋量场算符排列的次序与原来相反



现在, $iT_1^{(1)}$ 贡献的 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 过程 T 矩阵元也可以表达成

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathbf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \chi_b(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) \chi_b^{(-)}(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^C(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle
\end{aligned}$$

电荷共轭场 $\psi^c(x)$ 的平面波展开和初末态缩并

 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 的平面波展开式是

$$\begin{aligned}\psi^C(x) &= \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x}]\end{aligned}$$

跟 $\psi(x)$ 展开式的差异只在于 a 与 b 互换, 相应 Dirac 共轭的展开式为

$$\bar{\psi}^C(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x}]$$

据此, 将电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 和 $\bar{\psi}^C(x)$ 与初末态的缩并定义成

$$\langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \psi^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}^C(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \bar{\psi}^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle \bar{\mathbf{p}}^-, \lambda | \bar{\psi}^C(x) | 0 \rangle \equiv \langle \bar{\mathbf{p}}^-, \lambda | \bar{\psi}^{C(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle \left[\mathbf{p}^+, \lambda \right] \psi^C(x) | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}^+, \lambda | \psi^{C(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i p \cdot x}$$

第二种方法的计算结果

 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 的 T 矩阵元变成

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathcal{N}[\phi^\dagger(x)\chi_b(x)(\Gamma_1^C)_{ab}\bar{\psi}_a^C(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathcal{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}_a^C(x)\Gamma_1^C\chi_b(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle
\end{aligned}$$

第二种方法的计算结果

$\psi \rightarrow \chi\phi$ 的 T 矩阵元变成

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -i\kappa \int d^4x \left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \left| \mathbf{N}[\phi^\dagger(x) \chi_b(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^C(x)] \right| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= i\kappa \int d^4x \left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \left| \mathbf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) \Gamma_1^C \chi_b(x)] \right| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

倒数第二行是第二种方法的计算结果，有

$$\begin{aligned} -\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') &= -u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C} \Gamma_1^C \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda') = u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda') \\ &= [u^T(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^T \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda')]^T = \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) \end{aligned}$$

 第二种方法结果与第一种方法结果 $i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k})$ 相等

$\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程：第一种方法

另一方面，考虑 $\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程，初态为 $|p^-, \lambda\rangle$ ，末态为 $|q, \lambda'; k^-\rangle$

根据 $iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$ 按第一种方法计算

贡献的 T 矩阵元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{i}T_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= \mathbf{i}\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= \mathbf{i}\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= -\mathbf{i}\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\chi_b(x)(\Gamma_2)_{ab}\bar{\psi}_a(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= -\mathbf{i}\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda')(\Gamma_2)_{ab}\bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda)e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -\mathbf{i}\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)\Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)
\end{aligned}$$

$\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程：第二种方法

根据 $iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]$ 按**第二种方法**计算

 $iT_2^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | iT_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \overline{\mathbf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) &= v^T(\mathbf{q}, \lambda') \mathcal{C} \Gamma_2^C \mathcal{C} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = -v^T(\mathbf{q}, \lambda') \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) \\ &= -[v^T(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^T \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda)]^T = -\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda')\end{aligned}$$

两种方法的计算结果相等

费米子流方向

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。

现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 **Feynman 规则**，这样的规则将特别适用于处理 **费米子数破坏** 过程

为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示费米子流 (fermion flow) 的方向

费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法

费米子流方向

-  以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法
-  现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 Feynman 规则，这样的规则将特别适用于处理费米子数破坏过程
-  为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示费米子流 (fermion flow) 的方向
-  费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法
-  当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相同时，采用第一种计算方法
-  当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相反时，采用与电荷共轭场有关的第二种计算方法
-  这样一来，两种费米子流方向是等价的，对每条连续费米子线可采取任意一种方向进行计算

位置空间外线规则

于是, 位置空间中费米子的外线规则如下, 带箭头的点划线表示费米子流方向

① Dirac 正费米子 ψ 入射光线:

$$\psi, \lambda \xrightarrow{p} x = \langle 0 | \psi(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\bullet} x = \langle 0 | \bar{\psi}^C(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

② Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射光线:

$$\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \bar{\psi}(x) | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} x = \langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

③ Dirac 正费米子 ψ 出射光线:

$$x \bullet \xrightarrow{p} \psi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^+}, \lambda | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \xrightarrow[p]{\quad} \psi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^+, \lambda} | \psi^C(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}$$

位置空间外线规则

④ Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线:

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bar{\psi}, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}}, \lambda | \psi(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bar{\psi}, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}}, \lambda | \bar{\psi}^C(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

⑤ Majorana 费米子 χ 入射外线:

$$\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \chi(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \bar{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

⑥ Majorana 费米子 χ 出射外线:

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \chi, \lambda = \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \chi, \lambda = \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

熊 Majorana 费米子线上

没有箭头, Feynman 规则
依赖于费米子流方向

与动量方向之间的异同

猫 从每条连续费米子线
写出散射振幅时, 总是逆
着用点划线表示的费米子
流方向逐项写下费米子的
贡献

第一种方法 Feynman 图

对于上述 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 和 $\bar{\psi} \rightarrow \chi\bar{\phi}$ 过程，第一种计算方法对应于

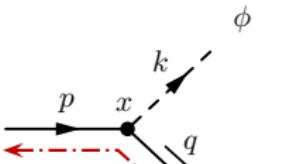
$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= \psi, \lambda \xrightarrow[p]{x} \phi \xleftarrow[q]{x} \chi, \lambda' \\
 &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x}
 \end{aligned}$$

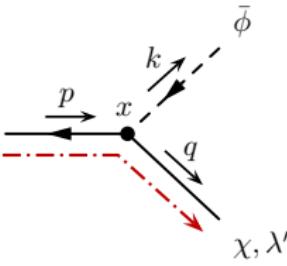
$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | i T_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= \bar{\psi}, \lambda \xleftarrow[p]{x} \bar{\phi} \xleftarrow[q]{x} \chi, \lambda' \\
 &= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k) \cdot x}
 \end{aligned}$$

第二种方法 Feynman 图

第二种计算方法对应于

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= \psi, \lambda \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 &= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | iT_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= \bar{\psi}, \lambda \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x}
 \end{aligned}$$







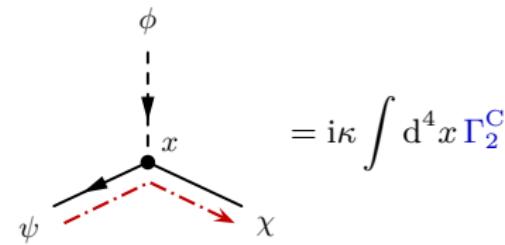
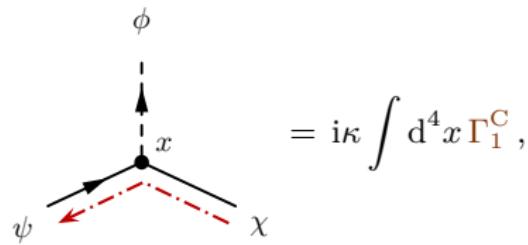
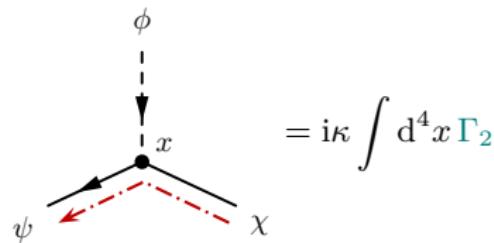
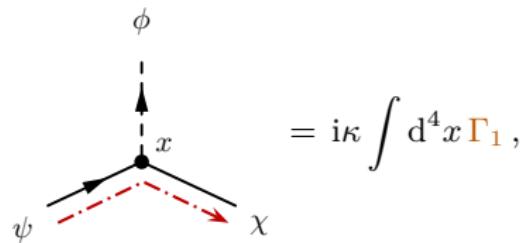
两种方法在 Feynman 图上的差异只是费米子流方向不同，即点划线箭头方向不同



额外的负号来自两个费米子场算符的交换

位置空间顶点规则

hog 观察各个 Feynman 图元素与振幅表达式的关系，归纳出位置空间中的顶点规则



这里实线和虚线上的箭头表征着 $U(1)$ 荷流动的方向， $U(1)$ 荷仍然是连续流动的

Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

研究 $iT^{(2)}$ 的 T 矩阵元时可能遇到像 $N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)\psi(x)}\Gamma_2\chi(x)]$ 这样的表达式

如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与通常规则一致，表达为

$$x \xrightarrow[p]{\quad} y = \overline{\psi(y)\psi(x)} = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

研究 $iT^{(2)}$ 的 T 矩阵元时可能遇到像 $N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)\psi(x)}\Gamma_2\chi(x)]$ 这样的表达式

如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与通常规则一致，表达为

$$x \xrightarrow[p]{\quad} y = \overline{\psi(y)\psi(x)} = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

由 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi$ 和 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}\Gamma_2^C\psi^C$ 推出

$$\begin{aligned} N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)\psi(x)}\Gamma_2\chi(x)] &= N[\overline{\bar{\psi}^C(y)\Gamma_1^C\chi(y)}\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)] \\ &= N[\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C \overline{\psi^C(x)}\bar{\psi}^C(y)\Gamma_1^C\chi(y)] \end{aligned}$$

如果采用第二种方法进行计算，则相应的 Feynman 传播子是

$$x \xrightarrow[p]{\quad} y = \overline{\psi^C(x)\bar{\psi}^C(y)} = \langle 0 | T[\psi^C(x)\bar{\psi}^C(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | T[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle$$

Majorana 旋量场的 Feynman 传播子

进一步计算得到

$$\begin{aligned}
 x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bullet y &= \overline{\psi^C(x)\psi^C(y)} = \langle 0 | \mathsf{T}[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle \\
 &= -\mathcal{C}\{\langle 0 | \mathsf{T}[\psi(y)\bar{\psi}(x)] | 0 \rangle\}^T \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1} \overline{[\psi(y)\bar{\psi}(x)]^T} \mathcal{C} \\
 &= \mathcal{C}^{-1} S_F^T(y-x) \mathcal{C} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{C}^{-1} i(\not{p} + m_\psi)^T \mathcal{C}}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}
 \end{aligned}$$

最后一步用到 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

Majorana 旋量场的 Feynman 传播子

进一步计算得到

$$\begin{aligned}
 x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bullet y &= \overline{\psi^C(x)\psi^C(y)} = \langle 0 | \mathsf{T}[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle \\
 &= -\mathcal{C}\{\langle 0 | \mathsf{T}[\psi(y)\bar{\psi}(x)] | 0 \rangle\}^T \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1} \overline{[\psi(y)\bar{\psi}(x)]^T} \mathcal{C} \\
 &= \mathcal{C}^{-1} S_F^T(y-x) \mathcal{C} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{C}^{-1} i(\not{p} + m_\psi)^T \mathcal{C}}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}
 \end{aligned}$$

最后一步用到 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

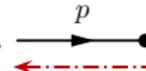
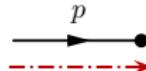
另一方面, Majorana 旋量场的 Feynman 传播子为

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bullet y = \overline{\chi(y)\bar{\chi}(x)} = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

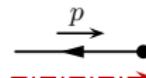
动量空间 Feynman 规则

转换到动量空间，推出以下 Feynman 规则

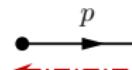
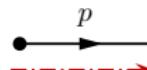
- ① Dirac 正费米子 ψ 入射光线: $\psi, \lambda \xrightarrow{p} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda), \quad \psi, \lambda \xrightarrow{p} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$



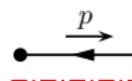
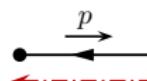
- ② Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线: $\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow{\text{入射外线}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bar{\psi}, \lambda \xrightarrow{\text{入射外线}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$



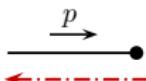
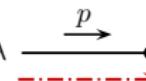
- ③ Dirac 正费米子 ψ 出射光线: $\bullet \xrightarrow{p} \psi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bullet \xrightarrow{p} \psi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$



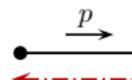
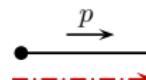
- ④ Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线: $\bullet \xrightarrow{\quad p \quad} \bar{\psi}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bullet \xleftarrow{\quad p \quad} \bar{\psi}, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$



- 5 Majorana 费米子 χ 入射外线: $\chi, \lambda \xrightarrow{\text{入射外线}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda), \quad \chi, \lambda \xrightarrow{\text{入射外线}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$



- ⑥ Majorana 费米子 χ 出射外线: $\bullet \xrightarrow{\stackrel{p}{\longrightarrow}} \chi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda), \bullet \xrightarrow{\stackrel{p}{\longrightarrow}} \chi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$



动量空间 Feynman 规则

7 Dirac 费米子传播子:

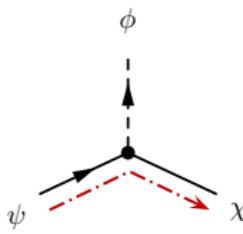
$$= \frac{i(p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$$

$$\bullet \xrightarrow[p]{} \bullet = \frac{i(-p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$$

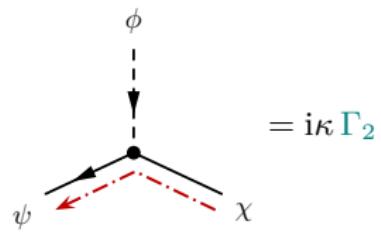
8 Majorana 费米子传播子

$$子: \frac{\xrightarrow{p}}{\xrightarrow{-m_\chi}} = \frac{i(p + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon}$$

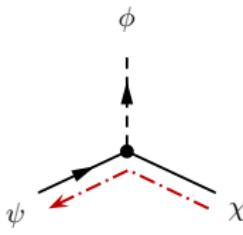
9 Yukawa 相互作用顶点:



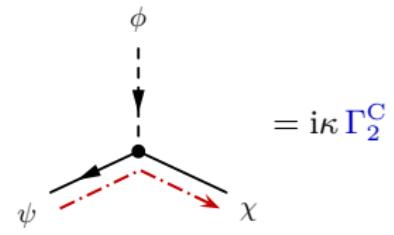
$$= i\kappa \Gamma_1,$$



$$= i\kappa \Gamma_2$$



$$= i\kappa \Gamma_1^C$$



$$= i\kappa \Gamma_2^C$$

Majorana 旋量场与对称性因子

owl 注意, Majorana 费米子是纯中性粒子

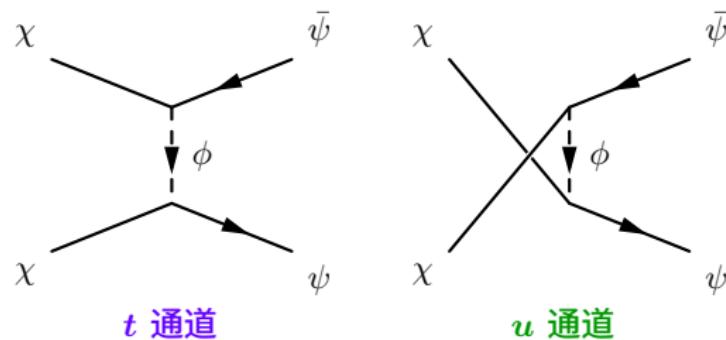
- car 如果末态包含超过 1 个全同的 Majorana 费米子
- car 计算散射截面或衰变宽度时需要在末态相空间积分之后除以末态对称性因子 S
- truck 假如拉氏量的某个相互作用项包含 2 个或以上全同的 Majorana 旋量场
- truck 那么, 在导出顶点 Feynman 规则时需要考虑组合因子
- truck 计算时还需要留意 Feynman 图的对称性因子

$\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 湮灭过程

下面应用上一小节推导出来的 **Feynman 规则** 进行计算

 考虑 $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 湮灭过程

领头阶 Feynman 图如下图所示，包含一个 t 通道和一个 u 通道的 Feynman 图



🏍 现在，费米子流方向有多种取法，但各种取法的计算结果应该是等价的

在画出拓扑不等价的 Feynman 图时，不需要考虑费米子流的方向

费米子流方向第一种取法

设初态两个 Majorana 费米子 χ 的四维动量为 k_1^μ 和 k_2^μ ，末态 Dirac 费米子 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的四维动量为 p_1^μ 和 p_2^μ ，令 $t = (k_1 - p_1)^2$ ， $u = (k_1 - p_2)^2$

添加带箭头的点划线表示费米子流方向

应用动量空间 Feynman 规则, t 通道和 u 通道 Feynman 图贡献的不变振幅是

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_t &= \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \\
&\quad \text{Diagram: } \begin{array}{c} \text{Two solid lines } \chi \text{ and } \bar{\psi} \text{ meet at a vertex.} \\ \text{From the vertex, two dashed lines } k_2 \text{ and } p_2 \text{ emerge.} \\ \text{From the vertex, a solid line } p_1 - k_1 \text{ emerges.} \\ \text{From the vertex, a dashed line } \psi \text{ emerges.} \end{array} \\
i\mathcal{M}_u &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_2) \\
&\quad \text{Diagram: } \begin{array}{c} \text{Two solid lines } \chi \text{ and } \bar{\psi} \text{ meet at a vertex.} \\ \text{From the vertex, two dashed lines } k_2 \text{ and } p_2 \text{ emerge.} \\ \text{From the vertex, a solid line } k_1 - p_2 \text{ emerges.} \\ \text{From the vertex, a dashed line } \psi \text{ emerges.} \end{array}
\end{aligned}$$

第一种取法的相对符号



根据

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& = \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\bar{\chi}_c(y)\chi_b(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& - \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\chi_b(x)\bar{\chi}_c(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle
\end{aligned}$$



这两个 Feynman 图的相对符号为负



因而总振幅是 $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_t - i\mathcal{M}_u$

费米子流方向第二种取法

当然，也可以选择其它费米子流方向进行计算

比如，同时反转上述 t 通道 Feynman 图中两条点划线的方向，则 t 通道振幅变成

$$\begin{aligned}
 i\tilde{\mathcal{M}}_t = & \begin{array}{c} \text{Feynman diagram} \\ \text{top row: } \chi \rightarrow \bar{\psi} \\ \text{middle row: } k_2 \text{ (solid), } p_2 \text{ (dashed)} \\ \text{bottom row: } p_1 - k_1 \end{array} = \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_2)(i\kappa\Gamma_1^C)u(k_2) \\
 & \begin{array}{c} \text{Feynman diagram} \\ \text{top row: } \chi \rightarrow \psi \\ \text{middle row: } k_1 \text{ (solid), } p_1 \text{ (dashed)} \\ \text{bottom row: } \psi \end{array} = -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2)
 \end{aligned}$$

反转上述 u 通道 Feynman 图中一条点划线的方向, u 通道振幅化为

$$\begin{aligned}
 i\tilde{\mathcal{M}}_u &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \\
 &= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1)
 \end{aligned}$$

第二种取法的相对符号

根据

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\psi_b^C(x)\phi^\dagger(y)\bar{\psi}_c^C(y)(\Gamma_1^C)_{cd}\chi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\psi_b^C(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
= & \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\bar{\psi}_c^C(y)\psi_b^C(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1^C)_{cd}\chi_d(y)\bar{\chi}_a(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\psi_d(y)\psi_b^C(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_a(x)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle
\end{aligned}$$

这两个 Feynman 图的相对符号为正

因而总振幅是 $i\tilde{M} = i\tilde{M}_t + i\tilde{M}_u$

两种取法的等价性

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2) &= u^T(k_1)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^T\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^T(p_1)v^T(p_2)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_1^T\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{v}^T(k_2) \\
&= [u^T(k_1)\Gamma_2^T\bar{u}^T(p_1)v^T(p_2)\Gamma_1^T\bar{v}^T(k_2)]^T \\
&= \bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1) \\
\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1) &= \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)u^T(k_2)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^T\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^T(p_1) \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)[u^T(k_2)\Gamma_2^T\bar{u}^T(p_1)]^T \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i} \tilde{\mathcal{M}}_t &= -\frac{\text{i} \kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2) \Gamma_1^C u(k_2) \\
 &= -\frac{\text{i} \kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1) \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) = \text{i} \mathcal{M}_t \\
 \text{i} \tilde{\mathcal{M}}_u &= -\frac{\text{i} \kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) \\
 &\equiv +\frac{\text{i} \kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2) \equiv -\text{i} \mathcal{M}_u
 \end{aligned}$$

两种取法的等价性

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2) &= u^T(k_1) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{v}^T(k_2) \\
&= [u^T(k_1) \Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \Gamma_1^T \bar{v}^T(k_2)]^T \\
&= \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1) \\
\bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) &= \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) u^T(k_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) \\
&= -\bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) [u^T(k_2) \Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1)]^T \\
&= -\bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i} \tilde{\mathcal{M}}_t &= -\frac{\text{i} \kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2) \Gamma_1^C u(k_2) \\
 &= -\frac{\text{i} \kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1) \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) = \text{i} \mathcal{M}_t \\
 \text{i} \tilde{\mathcal{M}}_u &= -\frac{\text{i} \kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) \\
 &= +\frac{\text{i} \kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2) = -\text{i} \mathcal{M}_u
 \end{aligned}$$

可见，根据费米子流方向的不同取法计算出来的结果确实是等价的



因此 $i\tilde{\mathcal{M}} = i\tilde{\mathcal{M}}_t + i\tilde{\mathcal{M}}_u = i\mathcal{M}_t - i\mathcal{M}_u = i\mathcal{M}$

非极化振幅模方

接下来计算 $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_u|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.})$$

使用具体形式 $\Gamma_1 = P_R$ 和 $\Gamma_2 = P_L$ ，由第一种取法的振幅计算结果得到

$$i\mathcal{M}_t = -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1) P_L u(k_1) \bar{v}(k_2) P_R v(p_2)$$

$$(\mathbf{i}\mathcal{M}_t)^* = \frac{\mathbf{i}\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} u(p_1) \bar{v}(p_2) P_{\text{L}} v(k_2)$$

$$i\mathcal{M}_u = -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2)$$

$$(\text{i}\mathcal{M}_u)^* = \frac{\text{i}\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(p_2) P_{\text{L}} v(k_1) \bar{u}(k_2) P_{\text{R}} u(p_1)$$

单纯 t 通道贡献

由 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$ 、 $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ 、 $P_L^2 = P_L$ 、 $P_R^2 = P_R$ 和 $P_L P_R = P_R P_L = 0$ 得

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_{\text{L}} (\not{k}_1 + m_\chi) P_{\text{R}}] &= \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi)(\not{k}_1 P_{\text{R}} + m_\chi P_{\text{L}}) P_{\text{R}}] \\ &= \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) \not{k}_1 P_{\text{R}}] = \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) \not{k}_1 (1 + \gamma^5)] = \frac{1}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \not{k}_1) = 2 \not{k}_1 \cdot \not{p}_1 \\ \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) P_{\text{R}} (\not{p}_2 - m_\psi) P_{\text{L}}] &= \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) \not{p}_2 (1 - \gamma^5)] = 2 \not{k}_2 \cdot \not{p}_2 \end{aligned}$$

从而，单纯 t 通道对非极化振幅模方的贡献是

$$\begin{aligned}
& \overline{|\mathcal{M}_t|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_t|^2 \\
&= \frac{\kappa^4}{4(t - m_\phi^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p_1) P_L u(k_1) \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{v}(k_2) P_R v(p_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \\
&= \frac{\kappa^4}{2 \cdot 2(t - m_\phi^2)^2} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_1 + m_\chi) P_R] \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] \\
&= \frac{\kappa^4 (k_1 \cdot p_1) (k_2 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)^2}
\end{aligned}$$

单纯 u 通道贡献和交叉贡献

 另一方面，单纯 u 通道的贡献为

$$\begin{aligned}
& \overline{|\mathcal{M}_u|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_u|^2 \\
&= \frac{\kappa^4}{4(u - m_\phi^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{u}(k_2) P_R u(p_1) \\
&= \frac{\kappa^4}{2 \cdot 2(u - m_\phi^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_1 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_2 + m_\chi) P_R] \\
&= \frac{\kappa^4 (k_1 \cdot p_2) (k_2 \cdot p_1)}{(u - m_\phi^2)^2}
\end{aligned}$$

而 t 和 u 通道的交叉贡献是

$$\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u$$

$$= \frac{\kappa^4}{4(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \bar{v}(k_1) P_R v(p_2)$$

$\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 非极化振幅模方

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} u(p_1) \bar{u}(p_1) P_{\text{L}} u(k_2) \bar{v}(\textcolor{brown}{p}_2) P_{\text{L}} v(k_2) \bar{v}(k_1) P_{\text{R}} v(p_2) \\
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} u(p_1) \bar{u}(p_1) P_{\text{L}} u(k_2) [\textcolor{brown}{u}^{\text{T}}(p_2) \mathcal{C} P_{\text{L}} \mathcal{C} \bar{u}^{\text{T}}(k_2)]^{\text{T}} [\textcolor{teal}{u}^{\text{T}}(k_1) \mathcal{C} P_{\text{R}} \mathcal{C} \bar{u}^{\text{T}}(p_2)]^{\text{T}} \\
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} \textcolor{blue}{u}(p_1) \bar{u}(\textcolor{brown}{p}_1) P_{\text{L}} \textcolor{red}{u}(k_2) \bar{u}(k_2) \mathcal{C}^{\text{T}} P_{\text{L}}^{\text{T}} \mathcal{C}^{\text{T}} u(p_2) \bar{u}(p_2) \mathcal{C}^{\text{T}} P_{\text{R}}^{\text{T}} \mathcal{C}^{\text{T}} \textcolor{blue}{u}(k_1) \\
&= \text{tr}[(\not{k}_1 + m_{\chi}) P_{\text{R}} (\not{p}_1 + m_{\psi}) P_{\text{L}} (\not{k}_2 + m_{\chi}) \mathcal{C}^{-1} P_{\text{L}}^{\text{T}} \mathcal{C} (\not{p}_2 + m_{\psi}) \mathcal{C}^{-1} P_{\text{R}}^{\text{T}} \mathcal{C}] \\
&= \text{tr}[(\not{k}_1 + m_{\chi}) \not{p}_1 P_{\text{L}} (\not{k}_2 + m_{\chi}) \textcolor{blue}{P}_{\text{L}} (\not{p}_2 + m_{\psi}) \textcolor{blue}{P}_{\text{R}}] = m_{\chi} \text{tr}[(\not{k}_1 + m_{\chi}) \not{p}_1 P_{\text{L}} (\not{p}_2 + m_{\psi}) P_{\text{R}}] \\
&= \frac{m_{\chi}}{2} \text{tr}[(\not{k}_1 + m_{\chi}) \not{p}_1 \not{p}_2 (1 + \gamma^5)] = \frac{m_{\chi}^2}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \not{p}_2) = 2m_{\chi}^2 (p_1 \cdot p_2)
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{2(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} + \text{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)}$$

于是, $\chi\chi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ 的非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.}) \\ &= \kappa^4 \left[\frac{(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)^2} + \frac{(k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1)}{(u - m_\phi^2)^2} - \frac{m_\chi^2(p_1 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} \right] \end{aligned}$$

另一个例子

在上面讨论的例子中，只要将费米子流方向取得跟 Dirac 费米子线上箭头一致，就能单单采用第一种计算方法，而无需涉及与电荷共轭场相关的第二种计算方法

不过，如果相互作用拉氏量必须使用**电荷共轭场**来构造，那么采用与之相关的**Feynman 规则**进行计算就是**不可避免的**

本小节将要讨论的另一个费米子数破坏的例子就属于这种情况

另一个例子

在上面讨论的例子中，只要将费米子流方向取得跟 Dirac 费米子线上箭头一致，就能单单采用第一种计算方法，而无需涉及与电荷共轭场相关的第二种计算方法

不过，如果相互作用拉氏量必须使用**电荷共轭场**来构造，那么采用与之相关的**Feynman 规则**进行计算就是**不可避免的**

本小节将要讨论的另一个费米子数破坏的例子就属于这种情况

假设理论中有一个复标量场 $\phi(x)$ 与两个无质量左手旋量场 $\psi_R(x)$ 和 $\chi_R(x)$ ，它们携带的 U(1) 荷分别是 $q_\phi = 3$ 、 $q_\psi = 2$ 和 $q_\chi = 1$

为了让理论具有 $U(1)$ 整体对称性, 将拉氏量写成

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + i \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i \bar{\chi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \chi_R + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

其中包含了 Yukawa 相互作用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa [\phi \bar{\psi}_{\text{R}} (\chi_{\text{R}})^{\text{C}} + \phi^{\dagger} \overline{(\chi_{\text{R}})^{\text{C}}} \psi_{\text{R}}]$$

这里已将耦合常数 κ 取为实数, 方括号中的两项互为厄米共轭

U(1) 整体变换

在 $U(1)$ 整体变换下，

$$\phi'(x) = e^{i\mathbf{q}_\phi \cdot \theta} \phi(x), \quad \psi'_R(x) = e^{i\mathbf{q}_\psi \cdot \theta} \psi_R(x), \quad \chi'_R(x) = e^{i\mathbf{q}_\chi \cdot \theta} \chi_R(x)$$

则 $\bar{\psi}'_R = e^{-i\mathbf{q}_\psi \theta} \bar{\psi}_R$, $[(\chi_R)^C]' = e^{-i\mathbf{q}_\chi \theta} (\chi_R)^C$, 故

$$\mathcal{L}'_{\text{int}} = \kappa [e^{i(\mathbf{q}_\phi - \mathbf{q}_\psi - \mathbf{q}_\chi)\theta} \phi \bar{\psi}_R(\chi_R)^C + \text{H.c.}] = \mathcal{L}_{\text{int}}$$

U(1) 整体变换

在 $U(1)$ 整体变换下，

$$\phi'(x) = e^{i\mathbf{q}_\phi\theta}\phi(x), \quad \psi'_{\text{R}}(x) = e^{i\mathbf{q}_\psi\theta}\psi_{\text{R}}(x), \quad \chi'_{\text{R}}(x) = e^{i\mathbf{q}_\chi\theta}\chi_{\text{R}}(x)$$

则 $\bar{\psi}'_R = e^{-i\mathbf{q}_\psi \theta} \bar{\psi}_R$ ， $[(\chi_R)^C]' = e^{-i\mathbf{q}_\chi \theta} (\chi_R)^C$ ，故

$$\mathcal{L}'_{\text{int}} = \kappa [e^{i(\mathbf{q}_\phi - \mathbf{q}_\psi - \mathbf{q}_\chi)\theta} \phi \bar{\psi}_R(\chi_R)^C + \text{H.c.}] = \mathcal{L}_{\text{int}}$$

可见，拉氏量在 $U(1)$ 整体变换下确实是不变的

由 $P_{L/R}\gamma^0 = \gamma^0 P_{R/L}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}P_L^T\mathcal{C} = P_L$ 得

$$\begin{aligned}
 (\chi_R)^C &= \mathcal{C}(\bar{\chi}_R)^T = \mathcal{C}[(P_R \chi)^\dagger \gamma^0]^T = \mathcal{C}(\chi^\dagger P_R \gamma^0)^T \\
 &= \mathcal{C}(\chi^\dagger \gamma^0 P_L)^T = \mathcal{C}P_L^T \bar{\chi}^T = \textcolor{red}{C}P_L^T \textcolor{red}{C}^{-1} \mathcal{C} \bar{\chi}^T = P_L \chi^C
 \end{aligned}$$

从而

$$\overline{(\chi_R)^C} = (P_L \chi^C)^\dagger \gamma^0 = (\chi^C)^\dagger P_L \gamma^0 = (\chi^C)^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\chi}^C P_R$$

相互作用拉氏量和 T 算符

以此将相互作用拉氏量改写为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa(\phi\bar{\psi}P_L P_L \chi^C + \phi^\dagger \bar{\chi}^C P_R P_R \psi) = \kappa(\phi\bar{\psi}P_L \chi^C + \phi^\dagger \bar{\chi}^C P_R \psi)$$

由第 1 阶的 T 算符表达为

$$iT^{(1)} = -i \int d^4x \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x)] = i \int d^4x \mathsf{T}[\mathcal{L}_{\text{int}}(x)] = iT_1^{(1)} + iT_2^{(1)}$$

其中

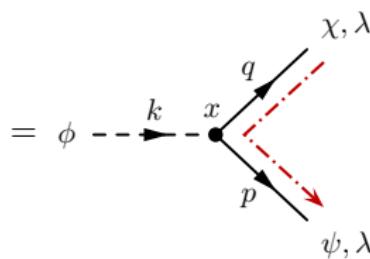
$$iT_1^{(1)} \equiv i\kappa \int d^4x \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi^C(x)], \quad iT_2^{(1)} \equiv i\kappa \int d^4x \, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}^C(x)P_R\psi(x)]$$

这里已经用了 Wick 定理

φ 玻色子衰变过程

考虑 ϕ 玻色子衰变过程 $\phi(k) \rightarrow \psi(p)\chi(q)$ ，圆括号中标注了每个粒子对应的动量记号， $iT_1^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^+, \lambda' | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}^+ \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^+, \lambda' | N[\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi^C(x)] | \mathbf{k}^+ \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \langle \overline{\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^+, \lambda'} | N[\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi^C(x)] | \mathbf{k}^+ \rangle \end{aligned}$$



三条粒子线上的箭头方向均对应于 $U(1)$ 荷流动的方向

费米子流方向与费米子线方向相反时涉及到电荷共轭场的缩并

两条费米子线上的箭头方向相互背离，这是费米子数破坏的体现

玻色子衰变过程

再考虑 $\bar{\phi}$ 玻色子衰变过程 $\bar{\phi}(k) \rightarrow \bar{\psi}(p)\bar{\chi}(q)$

帽子 $iT_2^{(1)}$ 贡献的 T 矩阵元为

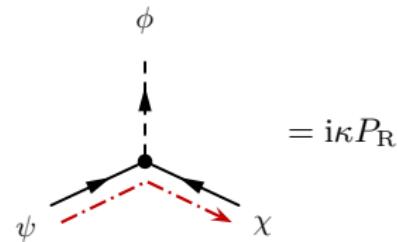
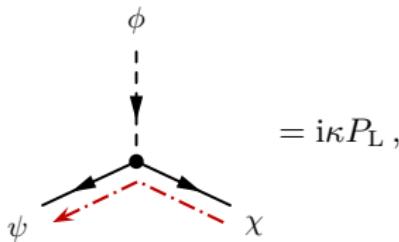
$$\langle \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda' | iT_2^{(1)} | \mathbf{k}^- \rangle = i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda' | N[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}^C(x)P_R\psi(x)] | \mathbf{k}^- \rangle$$

$$= i\kappa \int d^4x \langle \overline{\mathbf{p}^-}, \lambda; \overline{\mathbf{q}^-}, \lambda' | N[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}^C(x) P_R \psi(x)] | \mathbf{k}^- \rangle$$

$$= \bar{\phi} \quad \begin{array}{c} k \\ \hline x \end{array} \quad \begin{array}{c} q \\ \bar{\chi}, \lambda \\ \hline p \\ \bar{\psi}, \lambda \end{array}$$

此时，费米子数破坏体现为两条费米子线上的箭头方向相互交汇

顶点 Feynman 规则



相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa(\phi\bar{\psi}P_L\chi^C + \phi^\dagger\bar{\chi}^C P_R\psi)$ 是用**电荷共轭场** χ^C 表达的

导致这两条顶点规则中的费米子流方向与 χ 费米子线方向相反, 而与 ϕ 费米子线方向相同

相互作用拉氏量的等价形式

对 \mathcal{L}_{int} 中的旋量场进行转置操作，可以得到相互作用拉氏量的等价形式

$$(\bar{\psi} P_L \chi^C)^T = (\bar{\psi} P_L \mathcal{C} \bar{\chi}^T)^T = -\bar{\chi} \mathcal{C}^T P_L^T \bar{\psi}^T = \bar{\chi} \mathcal{C} P_L^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \bar{\chi} P_L \psi^C$$

$$(\bar{\chi}^C P_R \psi)^T = \bar{\psi}^C P_R \chi$$

有

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa [\phi (\bar{\psi} P_{\text{L}} \chi^{\text{C}})^{\text{T}} + \phi^{\dagger} (\bar{\chi}^{\text{C}} P_{\text{R}} \psi)^{\text{T}}] = \kappa \left(\phi \bar{\chi} P_{\text{L}} \psi^{\text{C}} + \phi^{\dagger} \bar{\psi}^{\text{C}} P_{\text{R}} \chi \right)$$

现在, \mathcal{L}_{int} 是用电荷共轭场 ψ^c 表达的

更进一步，推出 $iT_1^{(1)}$ 和 $T_2^{(1)}$ 的等价形式

$$iT_1^{(1)} \equiv i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)P_L\psi^C(x)], \quad iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}^C(x)P_R\chi(x)]$$

φ 玻色子衰变过程

于是, $iT_1^{(1)}$ 对 $\phi(k) \rightarrow \psi(p)\chi(q)$ 的贡献是

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^+, \lambda' | iT_1^{(1)} | \mathbf{k}^+ \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^+, \lambda' | N[\phi(x)\bar{\chi}(x)P_L\psi^C(x)] | \mathbf{k}^+ \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \langle \overbrace{\mathbf{p}^+, \lambda; \mathbf{q}^+, \lambda'}^{\text{Fermion}} | N[\phi(x)\bar{\chi}(x)P_L\psi^C(x)] | \mathbf{k}^+ \rangle \end{aligned}$$

$$= \phi \xrightarrow{k} x \xrightarrow{q} \chi, \lambda$$

玻色子衰变过程

另一方面, $iT_2^{(1)}$ 对 $\bar{\phi}(k) \rightarrow \bar{\psi}(p)\bar{\chi}(q)$ 的贡献是

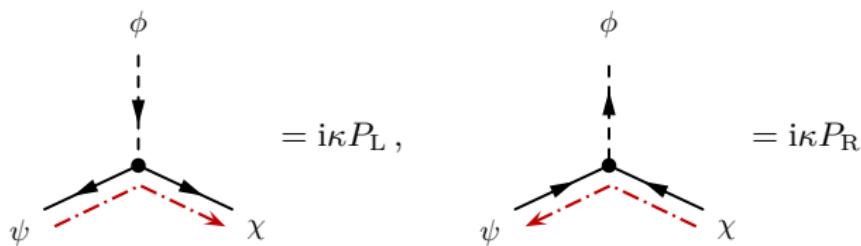
$$\langle \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda' | iT_2^{(1)} | \mathbf{k}^- \rangle = i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{p}^-, \lambda; \mathbf{q}^-, \lambda' | N[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}^C(x)P_R\chi(x)] | \mathbf{k}^- \rangle$$

$$= i\kappa \int d^4x \left\langle \overline{\mathbf{p}^-}, \lambda; \overline{\mathbf{q}^-}, \lambda' \right| \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}^C(x) P_R \chi(x)] \left| \mathbf{k}^- \right\rangle$$

顶点 Feynman 规则



由此归纳出动量空间中的另外两条顶点 Feynman 规则：



此时，费米子流方向与 ψ 费米子线方向相反，而与 χ 费米子线方向相同



原则上，以上得到的四条顶点规则足以应付各种各样的情况