量 子 场 论

第 6 章　量子场的相互作用

6.5 节　散射截面和衰变宽度

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2023 年 11 月 21 日

6.5 节　散射截面和衰变宽度

没有相互作用时，S 算符就是恒等算符 $\mathbb{I}$，S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|i\rangle$

存在相互作用时，$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的 $n=0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$，其中 T 算符包含所有 $n \geq 1$ 的项 ➡ S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见，S 矩阵中真正描述相互作用的项是 T 矩阵元 $\mathrm{i}T_{fi} \equiv \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

6.5 节　散射截面和衰变宽度

🚪 **没有相互作用**时，S **算符**就是恒等算符 $\mathbb{I}$，S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|i\rangle$

🪟 **存在相互作用**时，$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]$

🪑 这个级数的 $n=0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$，其中 T **算符**包含**所有 $n \geq 1$ 的项** 👉 S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

🛏️ 右边**第一项**意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率**自由**地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

🛋️ 由此可见，S 矩阵中**真正描述相互作用**的项是 T **矩阵元** $\mathrm{i}T_{fi} \equiv \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

🪞 由于**能动量守恒定律**，**初态** $|i\rangle$ 中所有粒子的**四维动量之和** p_i^μ 必定等于**末态** $|f\rangle$ 中所有粒子的**四维动量之和** p_f^μ，这意味着 T **矩阵元**的形式为

$$\mathrm{i}T_{fi} = \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)\, \mathrm{i}\mathcal{M}$$

🛁 **四维 δ 函数**体现了能动量守恒定律；$\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元**，或**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数

6.5.1 小节　跃迁概率

- 发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \dfrac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$
- 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$$

- 由于 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)$

6.5.1 小节　跃迁概率

- 发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \dfrac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$
- 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$$

- 由于 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)$
- 故 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \displaystyle\int \mathrm{d}^4x = \tilde{V}\tilde{T}$，$\tilde{V}$ 是空间区域的体积，$\tilde{T}$ 是时间范围的长度
- 对于全空间全时间积分，$\tilde{V}$ 和 $\tilde{T}$ 趋于无穷大
- 于是推出 $|T_{fi}|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$
- 对于时空坐标的函数 $f(x)$，将 Fourier 变换约定为 $\tilde{f}(p) = \displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}f(x)$
- Fourier 逆变换为 $f(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\tilde{f}(p)$

初态和末态

📗 现在讨论 **2 体初态**到 **n 体末态**的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n 个粒子**的末态 $|f\rangle$

🐧 设**初态**中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

🦉 此处**省略**了产生算符的**螺旋度指标**（或者说，**自旋指标**）

🦜 $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**

初态和末态

- 现在讨论 **2 体初态**到 **n 体末态**的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n 个粒子**的末态 $|f\rangle$
- 设**初态**中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\, a^{\dagger}_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} a^{\dagger}_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

- 此处**省略**了产生算符的**螺旋度指标**（或者说，**自旋指标**）
- $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**
- 类似地，**末态**可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{2E_j}\, a^{\dagger}_{\mathbf{p}_j}\right)|0\rangle, \quad E_j = p^0_j = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}$$

- 其中 $\mathbf{p}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 是 n 个末态粒子的动量
- 此时，初态和末态的**四维总动量**分别是 $p^{\mu}_i = p^{\mu}_{\mathcal{A}} + p^{\mu}_{\mathcal{B}}$ 和 $p^{\mu}_f = \sum_{j=1}^{n} p^{\mu}_j$

初末态内积

- 当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个**不同**的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

- 这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的**真空态**
- 参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} \,|\, \mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$
- 利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int \mathrm{d}^3x = \tilde{V}$，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

- 于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

初末态内积

- 当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个**不同**的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

- 这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的**真空态**
- 参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q} \,|\, \mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$
- 利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int \mathrm{d}^3x = \tilde{V}$，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

- 于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$
- 当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是由同一量子场描述的**全同粒子**时，若 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \neq \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，**也能推出这个结果**
- $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_1)]$
- 如果末态**不包含全同粒子**，同理可得 $\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，**跃迁概率**化为

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于**一组特定的末态动量** $\{p_j\}$，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，**跃迁概率**化为

$$P_{fi}=\frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\langle f|f\rangle}=\frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}=\frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于**一组特定的末态动量** $\{p_j\}$，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}}=\frac{P_{fi}}{\tilde{T}}=\left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

此处**四维 δ 函数**可以分解为

$$\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)=\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_{\mathcal{A}}+\mathbf{p}_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_j\right)\delta\left(E_{\mathcal{A}}+E_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}E_j\right)$$

在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取**任意满足运动学要求**的值，而**能动量守恒定律**对应的**运动学条件** $p_{\mathcal{A}}^{\mu}+p_{\mathcal{B}}^{\mu}-\sum_{j=1}^{n}p_j^{\mu}=0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

📙 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

☘️ 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

一维动量相空间

📙 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

🍀 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

🍀 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(\mathrm{i}px)$

🌿 结合周期性边界条件，有 $\exp(-\mathrm{i}pL/2) = \exp(\mathrm{i}pL/2)$，故 $\exp(\mathrm{i}pL) = 1$

🌾 这意味着 $pL = 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L\ (k \in \mathbb{Z})$

一维动量相空间

📙 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

🍀 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

🍀 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(\mathrm{i}px)$

🌿 结合周期性边界条件，有 $\exp(-\mathrm{i}pL/2) = \exp(\mathrm{i}pL/2)$，故 $\exp(\mathrm{i}pL) = 1$

🌾 这意味着 $pL = 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L\ (k \in \mathbb{Z})$

🌽 **当 $L \to \infty$ 时**，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \to \mathrm{d}p, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p$$

$$\text{👉}\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p$$

单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面**上**任意一点**视作与位于相对的面上的**对应点等同**

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \dfrac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3), \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \to \infty$ 时，有 $\displaystyle\sum_{k_1 k_2 k_3} \to \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p$

单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V}=L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面**上**任意一点**视作与位于相对的面上的**对应点等同**

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p}=\dfrac{2\pi}{L}(k_1,k_2,k_3),\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}$

当 $L\to\infty$ 时，有 $\displaystyle\sum_{k_1k_2k_3}\to\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p=\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p$

考虑 n 个末态粒子**所有动量取值**，对 $R_{\{p_j\}}$ 作**末态相空间积分**，得到**单位时间**内 $2\to n$ 散射过程的**跃迁概率**

$$R=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p_j\right)R_{\{p_j\}}$$

$$=\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

2.3.4 小节的讨论表明，上式中**相空间体积元** $\dfrac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 **Lorentz 不变**的，而且相应积分正好囊括了满足**质壳条件**且**能量为正**的**所有物理动量**

末态对称性因子

- 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立
- 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以**相应的**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，从而**避免**量子态的**重复计算**
- 如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$\mathcal{S} = \prod_k n_k!$$

- **单位时间跃迁概率**变成

$$R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

6.5.2 小节　散射截面

🚲 现在讨论**束流打靶**实验

🍏 如**右图**所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ **粒子**组成，**束流** (beam) 由 $\mathcal{B}$ **粒子**组成

🍊 设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的**运动速度**相同，记为 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$，按照**狭义相对论**，$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$

6.5.2 小节　散射截面

现在讨论**束流打靶**实验

如**右图**所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ **粒子**组成，**束流** (beam) 由 $\mathcal{B}$ **粒子**组成

设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的**运动速度**相同，记为 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$，按照**狭义相对论**，$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$

记束流的**横截面积**为 A，则 t **时间内**束流的一个横截面经过的**体积**为 $V = A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$

再设束流中 $\mathcal{B}$ 粒子的**数密度**为 $n_{\mathcal{B}}$，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}V = n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$

在**单位时间**内穿过**单位面积**的 $\mathcal{B}$ 粒子数称为**流密度**，记作 $j_{\mathcal{B}}$，通过下式计算，

$$j_{\mathcal{B}} = \frac{N_{\mathcal{B}}}{At} = \frac{n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t}{At} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$$

散射截面

考虑**流密度**为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$

这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定

散射截面

考虑**流密度**为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$

这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定

截面的常用单位是**靶** (barn)，记作 b，

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

带**词头**的**小单位**满足 $1\ \mathrm{b} = 10^9\ \mathrm{nb} = 10^{12}\ \mathrm{pb} = 10^{15}\ \mathrm{fb}$

从而 $1\ \mathrm{GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8\ \mathrm{pb} = 3.894 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm}^2$

散射截面

考虑**流密度**为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$

这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定

截面的常用单位是**靶** (barn)，记作 b，

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

带**词头**的**小单位**满足 $1\ \mathrm{b} = 10^9\ \mathrm{nb} = 10^{12}\ \mathrm{pb} = 10^{15}\ \mathrm{fb}$

从而 $1\ \mathrm{GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8\ \mathrm{pb} = 3.894 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm}^2$

单位时间单位体积内散射发生的**次数**为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_{\mathcal{A}} j_{\mathcal{B}} \sigma}{V} = \frac{N_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \sigma}{V} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$$

$n_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{A}}/V$ 相当于 $\mathcal{A}$ **粒子**在体积 V 中的**数密度**

$\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

🚜 如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} = 1/\tilde{V}$

🍌 **单位时间单位体积内散射次数** $\mathcal{R}$ 与**单位时间内跃迁概率** R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

🍑 将 $R = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 代入

🍎 得到 $2 \to n$ **散射过程**的**截面**表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

- 如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} = 1/\tilde{V}$
- **单位时间单位体积内散射次数** $\mathcal{R}$ 与**单位时间内跃迁概率** R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$
- 将 $R = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 代入
- 得到 $2 \to n$ **散射过程**的**截面**表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

- 上式对 $\mathcal{A}$ **粒子静止的参考系**成立
- 需要将上式推广到**任意惯性系**，以适用于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 处在**任意运动状态**的情况
- 为此应将散射截面 σ 定义为 **Lorentz 不变量**
- 上式最后一行中除**第二个因子** $(4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|)^{-1}$ 之外，其余部分是 **Lorentz 不变**的

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止**的参考系中，$|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的**相对速度**
- 记 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \dfrac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，则**相对速度** $v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$
- 然而，$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{rel}}$ **并不是 Lorentz 不变量**

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系中，$|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的相对速度
- 记 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \dfrac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，则相对速度 $v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$
- 然而，$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量
- 引入 Møller 速度 $v_{\mathrm{Møl}} \equiv \dfrac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$，则

入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

- 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

Christian Møller
(1904–1980)

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2 E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系中，$|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的相对速度
- 记 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \dfrac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，则相对速度 $v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$
- 然而，$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量
- 引入 Møller 速度 $v_{\mathrm{Møl}} \equiv \dfrac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$，则

入射流因子 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

Christian Møller
(1904–1980)

- 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2 E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

- 相应的单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v_{\mathrm{Møl}}$ 也是 Lorentz 不变的
- 当 $\mathcal{A}$ 粒子静止时，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$，故 $v_{\mathrm{Møl}} = \dfrac{1}{m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{m_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

$= \dfrac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \dfrac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$，此时散射截面恢复到上一页表达式

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

🦭 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right)$$

🐬 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \int \mathrm{d}\Pi_n \, |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

🦭 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right)$$

🐬 这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \int \mathrm{d}\Pi_n \, |\mathcal{M}|^2$$

🐳 如果在**散射截面表达式**中不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

🐋 注意，计算微分截面时**不需要**考虑**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，因而 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \int \mathrm{d}\sigma$

🦈 如果**末态不包含全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 1$

Møller 速度与相对速度

- 讲义中推出了 **Møller 速度**与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

- 如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$，则 $v_{\text{Møl}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}$，即 Møller 速度与**相对速度**相同
- **入射流因子**化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{rel}}$
- 满足**这个条件**的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子**静止**
- 另一种情况是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 运动方向**相同**或**相反**，后者在**对撞机** (collider) 上经常遇到
- 在束流**迎头对撞**时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

- 讲义中推出了 **Møller 速度**与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

- 如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$，则 $v_{\text{Møl}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}$，即 Møller 速度与**相对速度**相同
- **入射流因子**化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{rel}}$
- 满足**这个条件**的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子**静止**
- 另一种情况是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 运动方向**相同**或**相反**，后者在**对撞机** (collider) 上经常遇到
- 在束流**迎头对撞**时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向
- 当 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \displaystyle\int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$
- 在**非相对论近似**下，$v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 确实是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的相对速度
- 但是，对于**极端相对论极限**下的束流对撞，$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 1$ 且 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$
- 故 $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 2$，它是真空光速的 2 倍，显然**不是**真正意义的相对速度

质心系

- 对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的
- 不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系**（简称**质心系**，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多
- 质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

- 质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy) E_{CM}，满足

$$E_{\mathrm{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} E_j$$

- 它是 **Lorentz 不变量**，因为在质心系中有

$$(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 - (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 = E_{\mathrm{CM}}^2$$

$2 \to n$ 散射的运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当末态粒子动量 $\mathbf{p}_j$ **都为零**时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$

$2 \to n$ 散射的运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当末态粒子动量 $\mathbf{p}_j$ **都为零**时，**质心能最低**，为 $\sum_j m_j$
- 所以，发生 $2 \to n$ **散射**过程的**运动学条件**是

$$E_{\mathrm{CM}} > \sum_{j=1}^{n} m_j$$

- 即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**
- 若 $E_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j$，则末态相空间体积为零，散射过程**不能发生**
- 可以认为，**质心能** E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

6.5.3 小节　两体散射运动学

- 接下来讨论 $\mathbf{2 \to 2}$ **散射**，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子
- 在**质心系**中，有 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因而 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|$，$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$
- 可见，初态中 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ **大小相等**，**方向相反**，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$
- 末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是**大小相等**，**方向相反**
- 这些动量在质心系中的关系如**右图**所示

6.5.3 小节　两体散射运动学

- 接下来讨论 **$2 \to 2$ 散射**，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子
- 在**质心系**中，有 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因而 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|$，$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$
- 可见，初态中 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ **大小相等**，**方向相反**，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$
- 末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是**大小相等**，**方向相反**
- 这些动量在质心系中的关系如**右图**所示
- θ 是 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 之间的夹角，称为**散射角** (scattering angle)

- **质心能**满足 $E_{\text{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = E_1 + E_2$
- 发生这个过程的**运动学条件**是 $E_{\text{CM}} > m_1 + m_2$
- **$2 \to 2$ 散射截面**写成 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \displaystyle\int \mathrm{d}\Pi_2\, |\mathcal{M}|^2$

2 体不变相空间

🚎 计算 **2 体不变相空间**中的积分，得到

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\mathrm{CM}} - E_1 - E_2)$$

📮 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ **的积分**

📪 此积分看起来没有效果，但实际上**要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件** $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

📟 这个条件在**质心系**中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间

🚌 计算 **2 体不变相空间**中的积分，得到

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\mathrm{CM}} - E_1 - E_2)$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\Big(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\Big)$$

📮 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ **的积分**

📪 此积分看起来没有效果，但实际上**要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件** $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

📟 这个条件在**质心系**中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

📠 第三步建立**球坐标系**，以 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 方向为极轴方向，以散射角 θ 为**极角** (polar angle)

☎️ 将 $\mathbf{p}_1$ 投影在垂直于 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 的平面上以定义**方位角** (azimuthal angle) ϕ

📞 将 $\mathbf{p}_1$ 动量体积元分解为 $\mathrm{d}^3 p_1 = |\mathbf{p}_1|^2\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \mathrm{d}\Omega$，**立体角微分** $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$

📱 **极角** θ 的取值范围为 $[0, \pi]$，**方位角** ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

$2 \to 2$ 散射截面

🚐 现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，得到

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\
&= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \right|^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}
\end{aligned}
$$

$2 \to 2$ 散射截面

现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$，得到

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\
&= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \right|^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}
\end{aligned}
$$

$2 \to 2$ 散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系中的微分散射截面是 $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系能动量

- 利用末态粒子在**质心系**中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\mathrm{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

- 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\mathrm{CM}} - E_1)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 - 2E_{\mathrm{CM}}E_1 + E_1^2$
- 即 $2E_{\mathrm{CM}}E_1 = E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

- 可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**

质心系能动量

利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\mathrm{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\mathrm{CM}} - E_1)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 - 2E_{\mathrm{CM}}E_1 + E_1^2$

即 $2E_{\mathrm{CM}}E_1 = E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

可见，质量较大的末态粒子在质心系中分得的能量较多；根据质壳条件，有

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}[E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2] \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}(E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2) \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)
\end{aligned}$$

质心系微分散射截面

- λ 函数定义为 $\lambda(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$，它关于 x,y,z 对称
- 末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\sqrt{\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

- 质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2$$

质心系微分散射截面

- λ 函数定义为 $\lambda(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$，它关于 x,y,z 对称
- 末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\rm CM}}\sqrt{\lambda(E_{\rm CM}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\rm CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\rm CM}^2}\right)$$

- 质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\rm CM} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\rm CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\rm CM}^2}\right)|\mathcal{M}|^2$$

- 将类似分析应用到初态上，同理得到质心系中初态粒子能量是

$$E_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2E_{\rm CM}}(E_{\rm CM}^2 + m_{\mathcal{A}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2), \quad E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2E_{\rm CM}}(E_{\rm CM}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2)$$

- 动量大小是

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\rm CM}}{2}\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\rm CM}^2}, \frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\rm CM}^2}\right)$$

特殊情况

下面讨论一些特殊情况

(1) 如果散射过程**关于对撞轴** ($\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 对应的直线) **对称**，则不变振幅 $\mathcal{M}$ **与** ϕ **无关**，有

$$\int \mathrm{d}\Omega\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

🚙 下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴** ($\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 对应的直线) **对称**，则不变振幅 $\mathcal{M}$ **与 ϕ 无关**，有

$$\int \mathrm{d}\Omega\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

📧 **散射截面**为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

(2) 如果初态粒子质量相同，$m_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{B}} = m_i$，末态粒子质量相同，$m_1 = m_2 = m_f$，则 $E_1 = (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{\mathrm{CM}})$ 和 $E_2 = (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{\mathrm{CM}})$ 意味着

$$E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{B}} = E_1 = E_2 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}$$

📦 即初末态粒子分别**平分质心能**

📁 此时，如果末态 2 个粒子是**全同**的，那么末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$，否则 $\mathcal{S} = 1$

特殊情况

另一方面，由 $\lambda(x,y,y)=x^2+2y^2-4xy-2y^2=x(x-4y)$ 得

$$\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m^2}{E_{\rm CM}^2},\frac{m^2}{E_{\rm CM}^2}\right)=\sqrt{1-\frac{4m^2}{E_{\rm CM}^2}}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|=|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|=\frac{E_{\rm CM}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_i^2}{E_{\rm CM}^2},\frac{m_i^2}{E_{\rm CM}^2}\right)=\frac{E_{\rm CM}\beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{E_{\rm CM}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_f^2}{E_{\rm CM}^2},\frac{m_f^2}{E_{\rm CM}^2}\right)=\frac{E_{\rm CM}\beta_f}{2}$$

其中

$$\beta_i\equiv\sqrt{1-\frac{4m_i^2}{E_{\rm CM}^2}}=\frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}}=\frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}},\quad \beta_f\equiv\sqrt{1-\frac{4m_f^2}{E_{\rm CM}^2}}=\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1}=\frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义，β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况

从而，由 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}} = E_{\mathrm{CM}}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \left|\frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}} - \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}{E_{\mathcal{B}}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_i}{2}$$

于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} \, |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_i}$$

特殊情况

从而，由 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}} = E_{\mathrm{CM}}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \left|\frac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}} - \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}{E_{\mathcal{B}}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_i}{2}$$

于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同，$m_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{B}} = m_1 = m_2$，则 $\beta_i = \beta_f$，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2}$$

6.5.4 小节　衰变宽度

- 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定**的
- **不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子
- 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N=-\Gamma N\mathrm{d}t$
- 以此求得 $N(t)=N(0)\exp(-\Gamma t)$，即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按**指数规律**下降

6.5.4 小节　衰变宽度

- 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定**的
- **不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子
- 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N=-\Gamma N\mathrm{d}t$
- 以此求得 $N(t)=N(0)\exp(-\Gamma t)$，即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按**指数规律**下降
- 于是一个**静止** $\mathcal{A}$ 粒子在**衰变前存活的时间** t 服从**指数分布**，归一化概率密度为

$$P(t)=\Gamma\exp(-\Gamma t)=\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- 其中 $\tau\equiv\dfrac{1}{\Gamma}$ 称为粒子的**寿命** (lifetime)
- t 的期待值为 $\langle t\rangle=\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t=\tau$，可见寿命是静止粒子存活的**平均时间**
- 在自然单位制中，Γ 具有质量的量纲，称为**衰变宽度** (decay width)，简称**宽度**

分支比和分宽度

🚋 $\mathcal{A}$ 粒子可能有**多种**衰变过程

🪆 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

🎇 衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

🪄 Γ_f 是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中**衰变过程 $i \to f$ 在单位时间内发生的概率**

分支比和分宽度

🚋 $\mathcal{A}$ 粒子可能有**多种**衰变过程

🪆 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

🎇 衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

🪄 Γ_f 是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中**衰变过程 $i \to f$ 在单位时间内发生的概率**

🎲 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

🧩 **总宽度** Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

- 接下来通过**跃迁概率**计算衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**
- 现在，**初态** $|i\rangle$ 只包含 1 个**粒子** $\mathcal{A}$，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子
- 因此，$|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$
- 类似于散射的情况，**衰变过程** $i \to f$ **的跃迁概率**是

$$P_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_jV)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

- 对于一组**特定的末态动量** $\{p_j\}$，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式

将末态动量的**所有取值**考虑进来，可得**单位时间**内衰变过程 $i \to f$ 的**发生概率**为

$$
\begin{aligned}
R_f &= \frac{1}{\mathcal{S}}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p_j\right) R_{\{p_j\}} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2E_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{S}$ 是末态对称性因子

在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，而 R_f 的值就是**分宽度** Γ_f，故

$$
\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2
$$

可见，**衰变分宽度**和**总宽度**是 **Lorentz 不变**的，因而**寿命**也是 **Lorentz 不变量**

衰变末态分布和运动学条件

- 若 $\mathcal{A}$ 粒子是**标量玻色子**，**自旋为 0**，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向
- 任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布
- 若 $\mathcal{A}$ 粒子具有**非零自旋**，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向
- 末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴
- 在实际情况中，$\mathcal{A}$ 粒子**自旋取向**往往是**不确定**的，但它**取不同方向的概率相同**
- 那么，可对 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向**取平均**，从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布

衰变末态分布和运动学条件

- 若 $\mathcal{A}$ 粒子是**标量玻色子**，**自旋为 0**，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向
- 任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布
- 若 $\mathcal{A}$ 粒子具有**非零自旋**，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向
- 末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴
- 在实际情况中，$\mathcal{A}$ 粒子**自旋取向**往往是**不确定**的，但它**取不同方向的概率相同**
- 那么，可对 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向**取平均**，从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布
- 由于 **$\mathcal{A}$ 粒子静止系**就是末态粒子的**质心系**，有 $E_{\mathrm{CM}} = m_{\mathcal{A}}$
- 因此，发生**衰变**的**运动学条件**是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^{n} m_j$$

- 即 $\mathcal{A}$ 粒子只能向**质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$** 的其它粒子衰变

6.5.5 小节　衰变运动学

- 下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**，$n=2$，在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，由于 $E_{\rm CM}=m_{\mathcal{A}}$，末态能量为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2\right),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2\right)$$

- 末态动量为 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\dfrac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\dfrac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\dfrac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$
- **2 体不变相空间**变成 $\displaystyle\int \mathrm{d}\Pi_2=\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$
- $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$，其中 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角

6.5.5 小节　衰变运动学

下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**，$n=2$，在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，由于 $E_{\rm CM}=m_{\mathcal{A}}$，末态能量为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2\right),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2\right)$$

末态动量为 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\dfrac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\dfrac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\dfrac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$

2 体不变相空间变成 $\displaystyle\int \mathrm{d}\Pi_2=\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$

$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$，其中 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角

两体衰变分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f&=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int \mathrm{d}\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2}\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2\\&=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

如果 $m_1\neq m_2$，则两个末态粒子**必定不是全同粒子**，而 $\mathcal{S}=1$

两体衰变运动学

🚄 如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**

🎯 此时，$|\mathcal{M}|^2$ **与 θ、ϕ 无关**，对**立体角积分**只给出一个 4π **因子**，**分宽度**变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$$

两体衰变运动学

🚄 如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**

🎯 此时，$|\mathcal{M}|^2$ **与 θ、ϕ 无关**，对**立体角积分**只给出一个 4π **因子**，**分宽度**变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$$

🎮 进一步，如果**末态** 2 个粒子**质量相同**，$m_1 = m_2 = m$，则

$$\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

🕹️ **分宽度**化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

🎰 如果两个末态粒子是**全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 2$

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**，$n=3$，衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int \mathrm{d}\Pi_3 \, |\mathcal{M}|^2$$

🎉 **3 体不变相空间**为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_1 - p_2 - p_3)$$

🎋 这里只在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

👉 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**，$|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

三体衰变运动学

(2) 对于三体衰变，$n=3$，衰变过程 $i\to f$ 的分宽度表示成

$$\Gamma_f=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int \mathrm{d}\Pi_3\,|\mathcal{M}|^2$$

🎉 3 体不变相空间为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{\mathrm{d}^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}-p_1-p_2-p_3)$$

🎋 这里只在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中讨论它没有自旋或者对它的自旋方向取平均的情况

👉 此时末态粒子在动量方向上呈球对称分布，$|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向无关

🎋 动量守恒定律给出 $\mathbf{0}=\mathbf{p}_{\mathcal{A}}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3$，即末态 3 个粒子的三维动量之和为零

🎍 因而这 3 个三维动量矢量处在同一个平面内，如右上图所示

🎄 对于确定的 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$，第 2 个粒子的动量 $\mathbf{p}_2=-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3$ 由动量守恒定律决定

三体相空间

对 $\mathbf{p}_2$ 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{\mathrm{d}^3p_1\,\mathrm{d}^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}\Omega_1\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3|\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)\end{aligned}$$

Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的立体角

三体相空间

🚄 对 $\mathbf{p}_2$ 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{\mathrm{d}^3p_1\,\mathrm{d}^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}\Omega_1\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3|\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

🧸 Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的**立体角**

🧧 对粒子 1 的**质壳条件** $|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2=E_1^2$ 两边求微分，得 $2|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|=2E_1\mathrm{d}E_1$，对粒子 3 也可以得到类似的式子，故 $|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|=E_1\mathrm{d}E_1$，$|\mathbf{p}_3|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3|=E_3\mathrm{d}E_3$

🖼️ 从而

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \mathrm{d}\Omega_1\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

🎨 第二步作 Ω_1 **积分**，由于粒子 1 动量呈球对称分布，此积分只给出一个 4π **因子**

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

将 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3$ 方向之间的**夹角**记为 θ_{13}，则粒子 3 的立体角微分表示为

$$\mathrm{d}\Omega_3 = \sin\theta_{13}\,\mathrm{d}\theta_{13}\,\mathrm{d}\phi_3 = \mathrm{d}\cos\theta_{13}\,\mathrm{d}\phi_3$$

ϕ_3 是粒子 3 的方位角

这样的话，对 Ω_3 积分不是平庸的，因为 E_2 **依赖于** $\cos\theta_{13}$，

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}$$

因此 $\delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)$ 的宗量也依赖于 $\cos\theta_{13}$，有

$$\frac{\partial E_2}{\partial\cos\theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

$$\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

相空间积分

🚇 再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_3 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta_{13} \int \mathrm{d}E_1\, \mathrm{d}E_3\, \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\, \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_3 \int \mathrm{d}E_1\, \mathrm{d}E_3\, \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \mathrm{d}E_1\, \mathrm{d}E_3
\end{aligned}
$$

相空间积分

再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_{13}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\end{aligned}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}}\mathrm{d}E_1\int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}}\mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 E_1 **和** E_3 **的函数**，而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的**积分上下限**

变量替换

🚇 在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量

🔪 引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1+p_2)^2 = (p_{\mathcal{A}}-p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$
$$s_{23} \equiv (p_2+p_3)^2 = (p_{\mathcal{A}}-p_1)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_1$$

🔧 可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

🪓 由于 $p_{12}^2 = (p_1+p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 的**质心能**

变量替换

🚇 在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量

🔪 引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1+p_2)^2 = (p_{\mathcal{A}}-p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$
$$s_{23} \equiv (p_2+p_3)^2 = (p_{\mathcal{A}}-p_1)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_1$$

🔧 可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

🪓 由于 $p_{12}^2 = (p_1+p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 的**质心能**

🔨 类似地，$\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的**不变质量**

⛏️ s_{12} **和** s_{23} **的微分**分别正比于 E_3 **和** E_1 **的微分**，

$$\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3, \quad \mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1$$

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 利用 $\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3$ 和 $\mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1$ 将**分宽度**积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}}\mathrm{d}E_1\int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}}\mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2\\ &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}}\mathrm{d}s_{12}\int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}}\mathrm{d}s_{23}\,|\mathcal{M}(s_{12},s_{23})|^2\end{aligned}$$

- 使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} **和** s_{23} **的函数**
- 把**对** s_{23} **的积分**放在**内层**，**积分上下限依赖于** s_{12}

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 利用 $\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3$ 和 $\mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1$ 将分宽度积分式改写为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}}\mathrm{d}E_1\int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}}\mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}}\mathrm{d}s_{12}\int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}}\mathrm{d}s_{23}\,|\mathcal{M}(s_{12},s_{23})|^2$$

- 使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数
- 把对 s_{23} 的积分放在内层，积分上下限依赖于 s_{12}
- 接下来讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限
- 考虑粒子 1 和 2 的质心系，有 $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$
- 这里用波浪线标记此参考系中的物理量
- 在这个参考系中，质心能 $\tilde{E}_{\mathrm{CM}} = \sqrt{s_{12}}$
- 粒子 2 的能量为 $\tilde{E}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{s_{12}}}\left(s_{12} - m_1^2 + m_2^2\right)$

$\tilde{E}_3$ 与 s_{12} 的关系

🚔 动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$，由 s_{12} 的 **Lorentz 不变性**有

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_{\mathcal{A}} - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_{\mathcal{A}}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\,\tilde{p}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{p}_3 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3 + 2\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2
\end{aligned}
$$

$\tilde{E}_3$ 与 s_{12} 的关系

🚔 动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$，由 s_{12} 的 **Lorentz 不变性**有

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_{\mathcal{A}} - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_{\mathcal{A}}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\,\tilde{p}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{p}_3 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3 + 2\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\
&= m_{\mathcal{A}}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2
\end{aligned}
$$

🪚 整理得 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2$，两边平方，推出

$$
\begin{aligned}
4(\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2)\tilde{E}_3^2 &= (m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2)^2 \\
&= (m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)^2 + 4\tilde{E}_3^4 + 4(m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)\tilde{E}_3^2
\end{aligned}
$$

🔩 再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2 = (m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)^2$，故**粒子 3 的能量**为

$$
\tilde{E}_3 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_{\mathcal{A}}^2 - s_{12} - m_3^2)
$$

🔗 对于**确定的** s_{12}，$\tilde{E}_2$ 和 $\tilde{E}_3$ 是**确定**的，而且是 **Lorentz 不变**的

s_{23} 的积分上下限

🚕 另一方面，由 s_{23} 的 **Lorentz 不变性**有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

⛓️ 这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| \cos\tilde{\theta}_{23}$，$\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

🧹 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最小值**

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

s_{23} 的积分上下限

🚕 另一方面，由 s_{23} 的 **Lorentz 不变性**有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

⛓️ 这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| \cos\tilde{\theta}_{23}$，$\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

🧹 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最小值**

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

✂️ 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最大值**

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2| - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

🛡️ 对于**确定的 s_{12}**，以上两式分别给出 s_{23} 的积分**下限**和**上限**

🗡️ 注意，$s_{23}^{\min}$ 和 $s_{23}^{\max}$ 是 **Lorentz 不变**的

s_{12} 的积分上下限

🚗 在**粒子 1 和 2 的质心系**中，$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$，有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

📎 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得**最小值** $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

📌 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

📎 当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得**最大值**

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

🪛 注意，$s_{12}^{\min}$ 和 $s_{12}^{\max}$ 也是 **Lorentz 不变**的

s_{12} 的积分上下限

🚗 在粒子 1 和 2 的质心系中，$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$，有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

📎 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得最小值 $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

📌 在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中，前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

📎 当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

🪛 注意，$s_{12}^{\min}$ 和 $s_{12}^{\max}$ 也是 Lorentz 不变的