量 子 场 论

第 3 章　量子矢量场

3.1 节　量子 Poincaré 变换

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 10 月 7 日

第 3 章 量子矢量场

🏆 本章介绍**矢量场** (vector field) 的**正则量子化**

🥇 从 Lorentz 群的线性表示来看，**标量场**对应于**恒等表示**，**矢量场**对应于**矢量表示**，而 Lorentz 群的**其它表示**则对应于**其它类型的场**

🎖️ 为了更加深刻地理解各种量子场的性质，有必要了解 **Lorentz 群的表示理论**

第 3 章　量子矢量场

🏆 本章介绍**矢量场** (vector field) 的**正则量子化**

🏅 从 Lorentz 群的线性表示来看，**标量场**对应于**恒等表示**，**矢量场**对应于**矢量表示**，而 Lorentz 群的**其它表示**则对应于**其它类型的场**

🎖 为了更加深刻地理解各种量子场的性质，有必要了解 **Lorentz 群的表示理论**

🏁 在**量子理论**中，粒子由 **Hilbert 空间**中的**态矢**描述

🥇 **相对论性**的粒子运动与 Poincaré 变换对态矢的作用有关

🥈 因此先来研究**量子 Poincaré 变换**

🥉 相关讨论会涉及到**量子 Lorentz 变换**和 **Lorentz 群的表示理论**

3.1 节　量子 Poincaré 变换　　3.1.1 小节　生成元算符

1.7.2 小节提到，时空坐标的 **Poincaré 变换** (Λ, a) 为 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

它是 **Lorentz 变换** Λ 和**时空平移变换** a 的组合

如果**量子系统**同时具有 **Lorentz 对称性**和**时空平移对称性**，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在**物理 Hilbert 空间**中诱导出**态矢** $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle$

其中 Λ 为**固有保时向** Lorentz 变换，而 $U(\Lambda, a)$ 描述**量子 Poincaré 变换**

$U(\Lambda, a)$ 是一个**线性幺正算符**，满足

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^{\dagger}(\Lambda, a) = 1, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^{\dagger}(\Lambda, a)$$

3.1 节 量子 Poincaré 变换 3.1.1 小节 生成元算符

1.7.2 小节提到，时空坐标的 **Poincaré 变换** (Λ, a) 为 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

它是 **Lorentz 变换** Λ 和**时空平移变换** a 的组合

如果**量子系统**同时具有 **Lorentz 对称性**和**时空平移对称性**，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在**物理 Hilbert 空间**中诱导出**态矢** $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle$

其中 Λ 为**固有保时向** Lorentz 变换，而 $U(\Lambda, a)$ 描述**量子 Poincaré 变换**

$U(\Lambda, a)$ 是一个**线性幺正算符**，满足

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^{\dagger}(\Lambda, a) = 1, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^{\dagger}(\Lambda, a)$$

$U(\Lambda, a)$ 的幺正性保证**态矢的内积**在量子 Poincaré 变换下**不变**

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\, U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle$$

$U(\mathbf{1}, 0) = 1$ 是**恒等变换算符**，$U(\mathbf{1}, a)$ 描述**量子时空平移变换**

$a^{\mu} = 0$ 对应于 Lorentz 变换，因此 $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$ 描述**量子 Lorentz 变换**

它满足 $U^{-1}(\Lambda) = U^{\dagger}(\Lambda)$

同态关系

- 对时空坐标**先作 Poincaré 变换** (Λ_1, a_1)，得到 $x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu$
- **再作 Poincaré 变换** (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu [(\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu$$

- 这相当于作 **Poincaré 变换** $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，因而存在**同态关系**

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

同态关系

🎺 对时空坐标**先作 Poincaré 变换** (Λ_1, a_1)，得到 $x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu$

🎷 **再作 Poincaré 变换** (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu [(\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu$$

🪗 这相当于作 **Poincaré 变换** $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，因而存在**同态关系**

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

🕺 因此，集合 $\{U(\Lambda, a)\}$ 和 $\{U(\Lambda)\}$ 分别构成 **Poincaré 群**和 **Lorentz 群**的**无限维幺正线性表示**，根据

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = 1 = U(\mathbf{1}, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$$

💃 推出**逆变换算符**

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a), \quad U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda^{-1})$$

生成元算符

- 无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ 的矩阵形式是 $\Lambda = \mathbf{1} + \omega$
- 无穷小时空平移变换表达为 $a^{\mu} = \varepsilon^{\mu}$，其中 ω 和 ε^{μ} 是无穷小量
- 从而，无穷小 Poincaré 变换 $(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)$ 诱导的无穷小幺正算符为

$$
\begin{aligned}
U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) &= 1 + \omega_{\mu\nu} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu} = 0} + \varepsilon_{\mu} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_{\mu}}\right|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu} = 0} \\
&= 1 - \frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_{\mu} P^{\mu}
\end{aligned}
$$

- 这是在 $(\omega_{\mu\nu}, \varepsilon_{\mu}) = (0, 0)$ 附近对 $U(\Lambda, a)$ 作 Taylor 级数
- 上式只展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_{μ} 的一阶项，而

$$
J^{\mu\nu} \equiv 2\mathrm{i} \left.\frac{\partial U(\Lambda)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu} = 0} \quad \text{和} \quad P^{\mu} \equiv \mathrm{i} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_{\mu}}\right|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu} = 0}
$$

- 分别是量子 Lorentz 变换和量子时空平移变换的生成元算符

$J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的厄米性

根据 1.7.3 小节讨论，实参数 $\omega_{\mu\nu}$ 是**反对称**的，因而 $J^{\mu\nu} = 2\mathrm{i}\left.\dfrac{\partial U(\Lambda)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0}$ 也是**反对称**的，$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$

于是，$J^{\mu\nu}$ 有 **6 个独立分量**，而 P^{μ} 有 **4 个独立分量**

由 $U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)$ 的**幺正性**推出

$$\begin{aligned} 1 &= U^\dagger(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) \\ &= = \left[1+\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\dagger + \mathrm{i}\varepsilon_\mu(P^\mu)^\dagger\right]\left[1-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right] \\ &= 1+\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}[(J^{\mu\nu})^\dagger - J^{\mu\nu}] + \mathrm{i}\varepsilon_\mu[(P^\mu)^\dagger - P^\mu], \end{aligned}$$

最后一步**忽略**了 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的**二阶项**

可见，$J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的所有分量都是**厄米算符**，$(J^{\mu\nu})^\dagger = J^{\mu\nu}$，$(P^\mu)^\dagger = P^\mu$

无穷小变换的相似变换

- 根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，有

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, (\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] \\
&= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\
&= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)
\end{aligned}
$$

无穷小变换的相似变换

根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，有

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, (\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] \\ &= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\ &= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) \end{aligned}$$

对上式左边和最后一步分别展开，得

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U^{-1}(\Lambda, a)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right)U(\Lambda, a) \\ &= 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) - \mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) \end{aligned}$$

$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) = 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu$$

无穷小变换的相似变换

根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2,a_2)U(\Lambda_1,a_1)=U(\Lambda_2\Lambda_1,\Lambda_2a_1+a_2)$，有

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a) &= U(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda,(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon]\\ &= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda,\Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon]-\Lambda^{-1}a\}\\ &= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)\end{aligned}$$

对上式左边和最后一步分别展开，得

$$U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a)=U^{-1}(\Lambda,a)\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right)U(\Lambda,a)$$

$$=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)-\mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)$$

$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)=1-\frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu$$

利用 $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta=g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma$，有

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)^\alpha{}_\nu J^{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}\\ &= g_{\mu\alpha}g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}=\Lambda^\rho{}_\mu\omega_{\rho\gamma}\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}\end{aligned}$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Poincaré 变换

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= g_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= \delta^\beta{}_\mu\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega_{\alpha\sigma}a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha P^\mu)=\omega_{\alpha\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\\
&= \frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Poincaré 变换

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= g_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= \delta^\beta{}_\mu\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega_{\alpha\sigma}a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha P^\mu)=\omega_{\alpha\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\\
&= \frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)\\
&=1-\frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu\\
&=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}+\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)-\mathrm{i}\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a)\\
&=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)-\mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)
\end{aligned}
$$

比较，推出

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a) &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}+\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho\\
U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a) &= \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Lorentz 变换

取 $a^\mu = 0$，得

$$U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$$

$$U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^{\nu}$$

因此，生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ 中的期待值与它们在 $|\Psi\rangle$ 中的期待值之间的关系为

$$\langle\Psi'|J^{\mu\nu}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma \langle\Psi|J^{\rho\sigma}|\Psi\rangle$$

$$\langle\Psi'|P^{\mu}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu \langle\Psi|P^{\nu}|\Psi\rangle$$

可将 $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)$ 和 $U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda)$ 分别看作由量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 诱导出来的 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 算符的 Lorentz 变换，

$$J'^{\mu\nu} \equiv U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P'^{\mu} \equiv U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^{\nu}$$

这表明 $J^{\mu\nu}$ 是一个 2 阶 Lorentz 张量，而 P^μ 是一个 Lorentz 矢量

3.1.2 小节　Lorentz 代数和 Poincaré 代数

- 研究 $U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)=\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\Lambda^{\mu}{}_{\rho}a^{\nu}P^{\rho}-\Lambda^{\nu}{}_{\rho}a^{\mu}P^{\rho}$ 的无穷小形式
- 考虑**无穷小 Poincaré 变换**，忽略二阶小量，$U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)$ 化为

$$\begin{aligned}
&U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)J^{\mu\nu}U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)\\
&=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}+\mathrm{i}\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}\right)J^{\mu\nu}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}-\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha}P^{\alpha}\right)\\
&=J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha}J^{\mu\nu}P^{\alpha}+\mathrm{i}\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}J^{\mu\nu}\\
&=J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]-\mathrm{i}\varepsilon_{\rho}[J^{\mu\nu},P^{\rho}]
\end{aligned}$$

- 利用 $J^{\mu\nu}$ 和 $\omega_{\mu\nu}$ 的**反对称性**，$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}$ 变成

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}\\
&=(\delta^{\mu}{}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma}+\omega^{\nu}{}_{\sigma})J^{\rho\sigma}=\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\delta^{\mu}{}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\omega^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}\\
&=J^{\mu\nu}+\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\mu\sigma}+\omega^{\mu}{}_{\rho}J^{\rho\nu}=J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\omega_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}\\
&=J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})
\end{aligned}$$

生成元算符的对易关系

- 利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的**反对称性**，得

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma} &= J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})\\
&= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})+\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})\\
&= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})
\end{aligned}
$$

- $\Lambda^{\mu}{}_{\rho}a^{\nu}P^{\rho}-\Lambda^{\nu}{}_{\rho}a^{\mu}P^{\rho}$ 化为

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}\varepsilon^{\nu}P^{\rho}-(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\rho}\varepsilon^{\mu}P^{\rho} &= (\delta^{\mu}{}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho})\varepsilon^{\nu}P^{\rho}-(\delta^{\nu}{}_{\rho}+\omega^{\nu}{}_{\rho})\varepsilon^{\mu}P^{\rho}\\
&= \varepsilon^{\nu}P^{\mu}-\varepsilon^{\mu}P^{\nu}=\varepsilon_{\rho}(g^{\nu\rho}P^{\mu}-g^{\mu\rho}P^{\nu})
\end{aligned}
$$

- 比较上面各式，由 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ε_{ρ} 的**任意性**推出**生成元算符的对易关系**

$$
\begin{aligned}
[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})\\
[J^{\mu\nu},P^{\rho}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}P^{\mu}-g^{\mu\rho}P^{\nu})
\end{aligned}
$$

Lorentz 代数

可将 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的**对易关系**改写为

$$
\begin{aligned}
[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\
&= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma)
\end{aligned}
$$

$(\mu \leftrightarrow \nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}$

同理，$(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $\mathrm{i}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

这个**等式右边**既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ,ν) 和 (ρ,σ) 反对称，这样的**反对称性**与**等式左边**一致

Lorentz 代数

线性空间 + 矢量乘法 = 代数

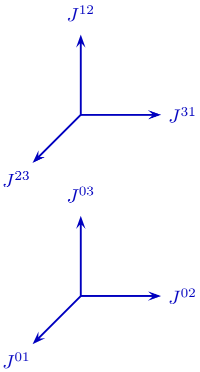
可将 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的对易关系改写为

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$
$$= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma)$$

$(\mu \leftrightarrow \nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}$

同理，$(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $\mathrm{i}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

这个等式右边既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ,ν) 和 (ρ,σ) 反对称，这样的反对称性与等式左边一致



以生成元 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量作为基底张成线性空间，空间中的任意矢量是 $J^{\mu\nu}$ 的线性组合，用以上对易关系定义矢量乘法，则任意矢量乘积仍是此空间中的矢量，即乘法运算是封闭的，称此线性空间为 Lorentz 代数

Lie 群

- **Lie 群**是一类特殊的连续群
- **n 维 Lie 群**的群空间由 **n 个独立的连续实参数** θ^a $(a = 1, 2 \cdots, n)$ 描述，具有 **n 维微分流形**的结构
- $\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(N)$ 是 $N(N-1)/2$ **维**Lie 群
- $\mathrm{U}(N)$ 是 N^2 **维** Lie 群，$\mathrm{SU}(N)$ 是 N^2-1 **维** Lie 群

Sophus Lie
(1842–1899)

Lie 群

- **Lie 群**是一类特殊的连续群
- n **维 Lie 群**的群空间由 n **个独立的连续实参数** θ^a $(a = 1, 2 \cdots, n)$ 描述，具有 n **维微分流形**的结构
- $\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(N)$ 是 $N(N-1)/2$ **维**Lie 群
- $\mathrm{U}(N)$ 是 N^2 **维** Lie 群，$\mathrm{SU}(N)$ 是 $N^2 - 1$ **维** Lie 群

Sophus Lie
(1842–1899)

对于 n 维 Lie 群的一个 m **维线性表示**，在单位矩阵附近，无穷小变换对应的表示矩阵可展开为

$$\mathbf{1} + \mathrm{i}\theta^a t^a + \mathcal{O}(\theta^a \theta^b)$$

t^a 是 n 个独立的 m **阶生成元矩阵**，具有**对易关系**

$$[t^a, t^b] = \mathrm{i} f^{abc} t^c, \quad a, b, c = 1, 2 \cdots, n$$

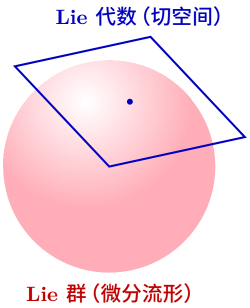
实数 f^{abc} 称为**结构常数** (structure constant)，满足 $f^{abc} = -f^{bac}$

Lie 代数

- 不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵
- 不过，同一个 Lie 群所有线性表示的结构常数都是一样的，描述 Lie 群的局域性质
- 如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则结构常数都是零

Lie 代数

- **不同维**的线性表示具有**不同阶**的生成元矩阵
- 不过，同一个 Lie 群所有线性表示的**结构常数**都是**一样**的，描述 Lie 群的**局域**性质
- 如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则**结构常数**都是**零**
- 生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种**乘法运算**
- 以生成元为基底张成的**线性空间**对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**
- **Lie 代数**刻画 **Lie 群**在**恒元附近的局域结构**



Lie 代数

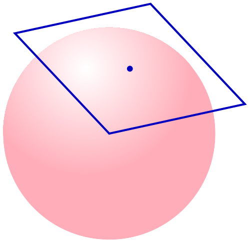
不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵

不过，同一个 Lie 群所有线性表示的结构常数都是一样的，描述 Lie 群的局域性质

如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则结构常数都是零

生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种乘法运算

以生成元为基底张成的线性空间对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**



Lie 代数刻画 **Lie 群**在恒元附近的局域结构

Lorentz 群是一个 **6 维 Lie 群**

它对应的 **Lie 代数**就是 **Lorentz 代数**

Lorentz 群任何线性表示生成元都要满足 **Lorentz 代数关系**

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

反过来，通过构造满足上式的生成元矩阵，可以得到 Lorentz 群的线性表示

三维矢量生成元算符

把生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量组合成 2 个三维矢量算符

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}, \quad K^i \equiv J^{0i}$$

即 $\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$，$\mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03})$

纯空间部分的生成元 J^i 与 J^j 的对易关系为

$$\begin{aligned}[J^i, J^j] &= \frac{1}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}[J^{kl}, J^{mn}] = \frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}\{[g^{lm}J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] - (m \leftrightarrow n)\} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}[g^{lm}J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}g^{lm}J^{kn} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jln}J^{kn} \\ &= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jnl}J^{kn} = \mathrm{i}(\delta^{ij}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{kj})J^{kn} = -\mathrm{i}J^{ji} = \mathrm{i}J^{ij}\end{aligned}$$

由 $J^{23} = J^1 = \varepsilon^{231}J^1$、$J^{31} = J^2 = \varepsilon^{312}J^2$ 和 $J^{12} = J^3 = \varepsilon^{123}J^3$ 归纳出

$$J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k$$

从而得到

$$[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$$

量子旋转变换

- 引入 2 个三维矢量

$$\theta^i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}$$

- 即 $\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12})$，$\boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03})$
- 这里 $\theta^3 = -\omega_{12}$ 是绕 z 轴转动的角度，而 $\xi^1 = -\omega_{01}$ 是沿 x 轴增速的快度
- 从而，无穷小量子 Lorentz 变换化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}+\omega) &= 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\ &= 1 - \mathrm{i}\omega_{23}J^{23} - \mathrm{i}\omega_{31}J^{31} - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} - \mathrm{i}\omega_{01}J^{01} - \mathrm{i}\omega_{02}J^{02} - \mathrm{i}\omega_{03}J^{03} \\ &= 1 + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K} \end{aligned}$$

量子旋转变换

引入 2 个三维矢量

$$\theta^i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}$$

即 $\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12})$，$\boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03})$

这里 $\theta^3 = -\omega_{12}$ 是绕 z 轴转动的**角度**，而 $\xi^1 = -\omega_{01}$ 是沿 x 轴增速的**快度**

从而，**无穷小量子 Lorentz 变换**化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}+\omega) &= 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\ &= 1 - \mathrm{i}\omega_{23}J^{23} - \mathrm{i}\omega_{31}J^{31} - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} - \mathrm{i}\omega_{01}J^{01} - \mathrm{i}\omega_{02}J^{02} - \mathrm{i}\omega_{03}J^{03} \\ &= 1 + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K} \end{aligned}$$

对于**绕 z 轴的旋转变换** $R_z(\theta^3)$，$\theta^1 = \theta^2 = \xi^i = 0$

则 $U[R_z(\theta^3)] = 1 + \mathrm{i}\theta^3 J^3 + \mathcal{O}[(\theta^3)^2]$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}U[R_z(\theta^3)]}{\mathrm{d}\theta^3}\right|_{\theta^3=0} = \mathrm{i}J^3$

由初始条件 $U[R_z(0)] = 1$ 求得相应的**量子旋转变换** $U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3)$

总角动量算符

- 1.7.3 小节提到，**空间旋转对称性**对应着**角动量守恒定律**
- $U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3)$ 表明 J^3 就是总角动量算符在 z **轴**上的分量
- 同理，J^1 和 J^2 分别是总角动量算符在 x 轴和 y 轴上的分量
- 也就是说，**生成元算符 $\mathbf{J}$** 就是**总角动量算符**
- **空间旋转群 SO(3)** 是 Lorentz 群在**纯空间部分**的**子群**
- 总角动量算符 $\mathbf{J}$ 是**量子空间旋转变换**的生成元算符
- $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} J^k$ 就是 3 维 Lie 群 **SO(3)** 的 **Lie 代数**关系
- 相应的**结构常数**是 **Levi-Civita 符号** ε^{ijk}

SU(2) 群的基础表示

- SO(3) 群 与 3 维 Lie 群 SU(2) 有着紧密的联系
- 在 SU(2) 群基础表示中，生成元矩阵表达为 $\tau^i \equiv \dfrac{\sigma^i}{2}$
- 其中 σ^i 是 3 个 2×2 的 **Pauli 矩阵**，

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

- 它们都是既厄米又幺正的，$(\sigma^i)^{-1} = (\sigma^i)^\dagger = \sigma^i$
- Pauli 矩阵的两两乘积为

$$(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = \mathbf{1}$$
$$\sigma^1\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^2\sigma^3 = \mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^3\sigma^1 = \mathrm{i}\sigma^2$$
$$\sigma^2\sigma^1 = -\mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^3\sigma^2 = -\mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^1\sigma^3 = -\mathrm{i}\sigma^2$$

- 归纳起来，有 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$，右边第一项省略了 2×2 单位矩阵 $\mathbf{1}$

Wolfgang Ernst Pauli
(1900–1958)

SU(2) 和 SO(3) 的局域性质

- 由 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ 推出

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k - \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} \equiv \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k + \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\delta^{ij}$$

- 于是，**SU(2) 生成元 τ^i** 的**对易关系**为

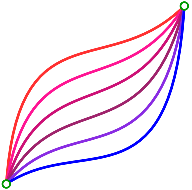
$$[\tau^i, \tau^j] = \frac{1}{4}[\sigma^i, \sigma^j] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma^k = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\tau^k$$

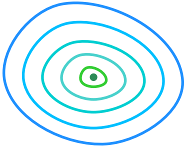
- 与 $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$ 比较发现，**SU(2) 群** 的 **Lie 代数关系** 与 **SO(3) 群完全一致**

- 这意味着 SU(2) 群在**恒元附近的局域性质**与 SO(3) 群**一样**

单连通和双连通

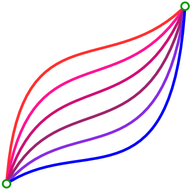
- 但是，SU(2) 群的**整体拓扑性质**与 SO(3) 群**不一样**
- SU(2) 和 SO(3) 的**群空间**都是**连通**的，根据 1.3 节的说法，它们都是**简单 Lie 群**
- 更仔细地讲，**SU(2)** 的群空间是**单连通**的
- **连接**群空间中**两点**的任意**两条曲线**可以**连续地形变成彼此**
- 等价地，群空间内任意一条**闭合曲线**可以**连续地收缩为一点**



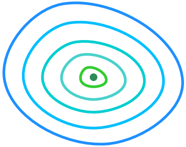


单连通和双连通

- 但是，SU(2) 群的**整体拓扑性质**与 SO(3) 群**不一样**
- SU(2) 和 SO(3) 的**群空间**都是**连通**的，根据 1.3 节的说法，它们都是**简单 Lie 群**
- 更仔细地讲，**SU(2)** 的群空间是**单连通**的
- **连接**群空间中**两点**的任意**两条曲线**可以**连续地形变成彼此**
- 等价地，群空间内任意一条**闭合曲线**可以**连续地收缩为一点**

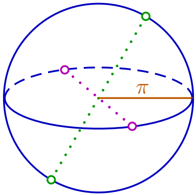


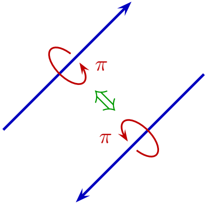
- **SO(3)** 的群空间是**双连通**的，即**连通度**为 **2**
- 连接群空间中两点的曲线分成 **2 类**，**同一类**曲线能够连续地变化成彼此，**不同类**曲线则不能
- 相应地，闭合曲线也分为 2 类，有一类**能**连续收缩成一点，另一类**不能**



SO(3) 群空间

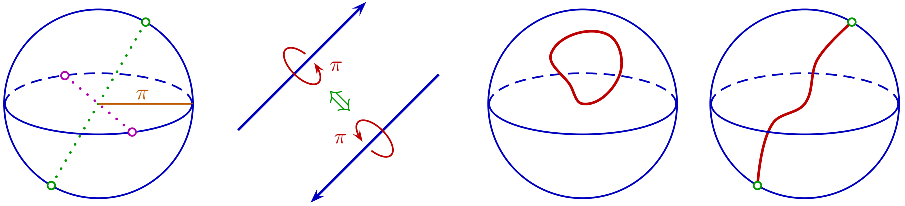
- 具体来说，SO(3) 的群空间是半径为 π 的球体
- 每一点的两个角度坐标代表转动轴的方向，径向坐标代表绕轴转动的角度
- 由于绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这两个旋转变换是一样的，球面上直径两端的点对应于同一个群元，这样的点称为对径点





SO(3) 群空间

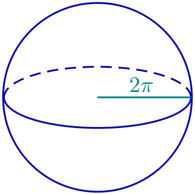
- 具体来说，SO(3) 的群空间是半径为 π 的球体
- 每一点的两个角度坐标代表转动轴的方向，径向坐标代表绕轴转动的角度
- 由于绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这两个旋转变换是一样的，球面上直径两端的点对应于同一个群元，这样的点称为对径点



- 如果一条闭合曲线上的点都不在球面上，那么曲线可以连续收缩成一点
- 如果一条闭合曲线通过球面上的某个点跳跃到它的对径点以形成闭合路径，那么对曲线进行连续形变时，参与跳跃的两个对径点只能成对地在球面上移动，不能通过连续形变消除这种跳跃，于是曲线不能连续收缩成一点

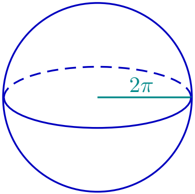
覆盖群

- $\mathrm{SU}(2)$ 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 -1
- 即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃
- 故任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1

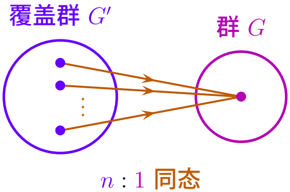


覆盖群

- SU(2) 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 -1

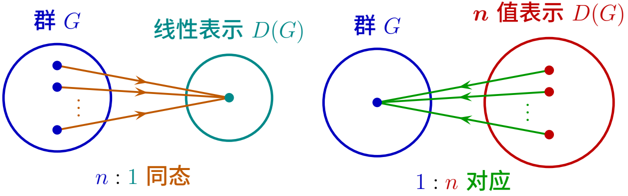


- 即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃
- 故任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1
- 在数学上可以证明，如果简单 Lie 群 G 的群空间是 n 度连通的 $(n>1)$，那么必然存在一个单连通的简单 Lie 群 G' 与之同态，$G'\sim G$
- 同态对应关系为 $n:1$，即 G' 中的 n 个元素对应于 G 中的 1 个元素
- 此时称 G' 为 G 的覆盖群 (covering group)
- 而 G' 的忠实表示是 G 的 n 值表示，G' 与 G 具有相同的 Lie 代数



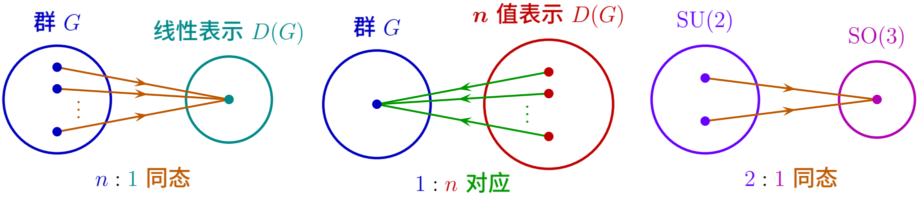
SU(2) 与 SO(3) 的同态关系

- 在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的同态对应关系
- 但是，在群的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系
- 因此，n 值表示不是线性表示



SU(2) 与 SO(3) 的同态关系

- 在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的同态对应关系
- 但是，在群的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系
- 因此，n 值表示不是线性表示



- **SU(2)** 群与 **SO(3)** 群具有一种 $2:1$ 的同态关系，$\mathrm{SU}(2)\sim\mathrm{SO}(3)$
- **SO(3)** 任意一个群元同态地对应于 **SU(2)** 的两个群元
- 因此 **SU(2)** 是 **SO(3)** 的覆盖群，**SU(2)** 的忠实表示是 **SO(3)** 的双值表示

增速算符

- 回到生成元算符的讨论，**K** 是**增速算符**，**总角动量算符 J** 与它的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[J^i, K^j] &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikl}[J^{kl}, J^{0j}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ikl}\{[g^{l0}J^{kj} - (k \leftrightarrow l)] - (0 \leftrightarrow j)\} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}[g^{l0}J^{kj} - (0 \leftrightarrow j)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj} - g^{lj}J^{k0}) = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}g^{lj}J^{k0} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikj}J^{k0} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^{0k} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k
\end{aligned}
$$

增速算符

- 回到生成元算符的讨论，**K** 是增速算符，**总角动量算符 J** 与它的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[J^i, K^j] &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikl}[J^{kl}, J^{0j}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ikl}\{[g^{l0}J^{kj} - (k\leftrightarrow l)] - (0\leftrightarrow j)\} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}[g^{l0}J^{kj} - (0\leftrightarrow j)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj} - g^{lj}J^{k0}) = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}g^{lj}J^{k0} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikj}J^{k0} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^{0k} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k
\end{aligned}
$$

- 而 **K** 自身的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[K^i, K^j] &= [J^{0i}, J^{0j}] = \mathrm{i}(g^{i0}J^{0j} - g^{00}J^{ij} - g^{ij}J^{00} + g^{0j}J^{i0}) \\
&= -\mathrm{i}J^{ij} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k
\end{aligned}
$$

- 归纳起来，有

$$
[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k
$$

- 这是 **Lorentz 代数关系**的另一种表达方式，符合**标准形式** $[t^a, t^b] = \mathrm{i}f^{abc}t^c$
- 可见，**三个生成元 J^i 自己**就可以构成**封闭的代数**，而**三个生成元 K^i 不能**

对易子 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}]$ 和 $[P^\mu, P^\nu]$

- 下面研究 $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的无穷小形式
- 考虑**无穷小 Poincaré 变换**，忽略二阶小量，$U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)$ 化为

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)P^\mu U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)\\
&= \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta} + \mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)P^\mu\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} - \mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right)\\
&= P^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu - \mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha + \mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu\\
&= P^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu, J^{\rho\sigma}] - \mathrm{i}\varepsilon_\nu[P^\mu, P^\nu]
\end{aligned}
$$

对易子 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}]$ 和 $[P^\mu, P^\nu]$

- 下面研究 $U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)=\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的无穷小形式
- 考虑**无穷小 Poincaré 变换**，忽略二阶小量，$U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)$ 化为

$$\begin{aligned}
&U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)P^\mu U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)\\
&=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}+\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)P^\mu\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}-\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right)\\
&=P^\mu-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu-\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha+\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu\\
&=P^\mu-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu,J^{\rho\sigma}]-\mathrm{i}\varepsilon_\nu[P^\mu,P^\nu]
\end{aligned}$$

- $\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 变成 $(\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\nu P^\nu$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\nu P^\nu &= P^\mu+\omega^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu+\omega_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}P^\sigma\\
&= P^\mu+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho)
\end{aligned}$$

- 两相比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的**任意性**推出生成元算符的对易关系

$$[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=\mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho),\quad [P^\mu,P^\nu]=0$$

- 注意，第一个对易关系**等价于**前面推出的 $[J^{\mu\nu},P^\rho]=\mathrm{i}(g^{\nu\rho}P^\mu-g^{\mu\rho}P^\nu)$

Poincaré 代数

以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的 **10 个独立分量**作为**基底**张成**线性空间**，用对易关系

$$
\begin{aligned}
[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\
[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^{\sigma} - g^{\mu\sigma}P^{\rho}) \\
[P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0
\end{aligned}
$$

定义**矢量乘法**，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数

Lorentz 代数是 **Poincaré 代数**的**子代数**

Poincaré 代数

- 以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的 **10 个独立分量**作为**基底**张成**线性空间**，用对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

$$[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^{\sigma} - g^{\mu\sigma}P^{\rho})$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0$$

- 定义**矢量乘法**，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数
- **Lorentz 代数**是 **Poincaré 代数**的**子代数**
- 令 $H \equiv P^0$，则 $P^{\mu} = (H, \mathbf{P})$，进一步推出

$$[P^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}P^k, \quad [P^i, K^j] = \mathrm{i}\delta^{ij}H, \quad [H, K^i] = \mathrm{i}P^i$$

$$[H, J^i] = [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0$$

- 结合 **Lorentz 代数关系**

$$[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$$

- 就得到 **Poincaré 代数关系**的另一种表达方式

量子时间平移变换

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (t_*, \mathbf{0})$ 时，$P^\mu \equiv \mathrm{i}\left.\dfrac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0}$ 意味着

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{1}, a)}{\mathrm{d}t_*}\right|_{t_*=0} = -\mathrm{i}H$$

若 H 不依赖于 t_*，则由初始条件 $U(\mathbf{1}, 0) = 1$ 求得**量子时间平移变换**

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}Ht_*)$$

它将态矢从 t 时刻**平移**到 $t' = t + t_*$ 时刻

量子时间平移变换

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (t_*, \mathbf{0})$ 时，$P^\mu \equiv \mathrm{i}\left.\dfrac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0}$ 意味着

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{1}, a)}{\mathrm{d}t_*}\right|_{t_*=0} = -\mathrm{i}H$$

若 H 不依赖于 t_*，则由初始条件 $U(\mathbf{1}, 0) = 1$ 求得**量子时间平移变换**

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}Ht_*)$$

它将态矢从 t 时刻**平移**到 $t' = t + t_*$ 时刻

1.7.2 小节提到，**时间平移对称性**对应着**能量守恒定律**

因而生成元算符 H 就是**哈密顿量算符**

实际上，Schrödinger 绘景中态矢随时间演化的关系 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 里面的幺正变换 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 就是一个**量子时间平移变换**

$e^{A+B} = e^A e^B$ 对 $[A, B] = 0$ 成立

- 若两个**算符** A **和** B **相互对易**，即 $[A, B] = 0$，则**二项式定理**成立：

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$$

- **阶乘**的定义可以推广到**负整数**：对于**整数** $m < 0$，定义 $m! \to \infty$，则 $\frac{1}{m!} \to 0$
- 从而，对于 $j > n$，有 $[(n-j)!]^{-1} \to 0$
- 这样一来，可以将以上级数化成**无穷级数**，$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$

$e^{A+B}=e^Ae^B$ 对 $[A,B]=0$ 成立

若两个**算符** A **和** B **相互对易**，即 $[A,B]=0$，则**二项式定理**成立：

$$(A+B)^n=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}$$

阶乘的定义可以推广到**负整数**：对于**整数** $m<0$，定义 $m!\to\infty$，则 $\dfrac{1}{m!}\to 0$

从而，对于 $j>n$，有 $[(n-j)!]^{-1}\to 0$

这样一来，可以将以上级数化成**无穷级数**，$(A+B)^n=\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}$

由此推出

$$\begin{aligned}e^{A+B}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{n-j}}{(n-j)!}\right]=e^Ae^B\end{aligned}$$

即 $e^{A+B}=e^Ae^B$ 对 $[A,B]=0$ 成立

值得注意的是，上式不仅对**相互对易**的**算符**成立，也对**相互对易**的**同阶方阵**成立

量子空间平移变换

- 当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时，

$$P^\mu \equiv \mathrm{i} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \quad \text{意味着} \quad \left.\frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial x_*^i}\right|_{\mathbf{x}_*=\mathbf{0}} = \mathrm{i} P^i$$

- 由于 $[P^i, P^j] = 0$，可利用 $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ 求得**量子空间平移变换**

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(\mathrm{i} P^1 x_*^1) \exp(\mathrm{i} P^2 x_*^2) \exp(\mathrm{i} P^3 x_*^3) = \exp(\mathrm{i}\, \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*)$$

- 它将态矢从 $\mathbf{x}$ 位置**平移**到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置，**空间平移对称性**对应着**动量守恒定律**
- 因此生成元算符 $\mathbf{P}$ 就是**动量算符**，从而 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是**四维动量算符**

量子空间平移变换

- 当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时，

$$P^\mu \equiv \mathrm{i}\, \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\bigg|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \quad \text{意味着} \quad \frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial x_*^i}\bigg|_{\mathbf{x}_*=\mathbf{0}} = \mathrm{i}P^i$$

- 由于 $[P^i, P^j] = 0$，可利用 $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ 求得量子空间平移变换

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(\mathrm{i}P^1 x_*^1) \exp(\mathrm{i}P^2 x_*^2) \exp(\mathrm{i}P^3 x_*^3) = \exp(\mathrm{i}\, \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*)$$

- 它将态矢从 $\mathbf{x}$ 位置平移到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置，空间平移对称性对应着动量守恒定律
- 因此生成元算符 $\mathbf{P}$ 就是动量算符，从而 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是四维动量算符
- 在量子力学中，与哈密顿量对易的力学量是守恒量
- 于是 $[H, \mathbf{P}] = [H, \mathbf{J}] = 0$ 意味着动量和总角动量都是守恒量
- 由于 $[H, \mathbf{P}] = 0$，一般的量子时空平移变换可表达为

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}Ht_*) \exp(\mathrm{i}\, \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*) = \exp(-\mathrm{i}P^\mu a_\mu)\text{，满足} \quad \frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial a_\mu}\bigg|_{a_\mu=0} = -\mathrm{i}P^\mu$$

3.1.3 小节　粒子

- **粒子**在 **Minkowski 时空**中运动，Minkowski 时空的对称性由 **Poincaré 群**描述
- 不同种类的粒子由**质量**、**自旋**和一些量子数加以区分
- **每个粒子**具有一定的**四维动量**和**自旋**在某个空间方向上**投影**出来的量子数
- 对它作**空间旋转**或 **Lorentz 增速变换**时，**四维动量**会发生变化，而**自旋投影**的值有可能改变，变化方式由相应 **Lorentz 变换**决定
- 但**质量**、**自旋**和其它量子数不会改变

3.1.3 小节　粒子

- 粒子在 Minkowski 时空中运动，Minkowski 时空的对称性由 Poincaré 群描述
- 不同种类的粒子由质量、自旋和一些量子数加以区分
- 每个粒子具有一定的四维动量和自旋在某个空间方向上投影出来的量子数
- 对它作空间旋转或 Lorentz 增速变换时，四维动量会发生变化，而自旋投影的值有可能改变，变化方式由相应 Lorentz 变换决定
- 但质量、自旋和其它量子数不会改变
- 当 $\Lambda = \mathbf{1}$ 时，$U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 化为 $U^{-1}(\mathbf{1}, a)P^\mu U(\mathbf{1}, a) = P^\mu$
- 因此四维动量算符 P^μ 在量子时空平移变换下不变，内积 $P^2 = P^\mu P_\mu$ 也不变
- 此外，P^2 还是 Lorentz 标量，于是它的本征值 p^2 是 Poincaré 变换的不变量
- 对单个粒子而言，质壳关系表明 $p^2 = m^2$，则这个不变量是粒子质量 m 的平方

粒子态

- 实际上，**粒子态**由 **Poincaré 群**的**不可约幺正表示**描述
- 1939 年 Eugene Wigner 完成了**这些表示**的分类工作
- **一个粒子**可以用**一组**在**量子 Poincaré 变换**下相互转化的**态矢** $\{|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle\}$ 来定义，其中**四维动量** p^μ 是**四维动量算符** P^μ 在**态矢** $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 上的本征值，

$$P^\mu\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = p^\mu\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$$

- 而**指标** σ 表征**所有其它自由度**，通常取**分立值**
- 2.3.4 小节定义的**标量场单粒子态** $|\mathbf{p}\rangle$ 就是这样的态矢

Eugene Wigner
(1902–1995)

粒子态的 Poincaré 变换

在**量子时空平移变换**的作用下，**单粒子态** $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 变换为

$$U(\mathbf{1},a)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$$

只出现**相位**上的**改变**

另一方面，用**量子 Lorentz 变换** $U(\Lambda)$ 作用得到**单粒子态** $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda)P^\nu\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \end{aligned}$$

粒子态的 Poincaré 变换

- 在量子时空平移变换的作用下，单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 变换为

$$U(\mathbf{1},a)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$$

只出现相位上的改变

- 另一方面，用量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用得到单粒子态 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda)P^\nu\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \end{aligned}$$

- 因此，$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 的四维动量本征值为 $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$
- 这意味着它必定是态矢 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$ 的线性组合，即

$$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$$

- 通过下面的方法可以得到系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ 的形式

标准四维动量

🌱 在**固有保时向 Lorentz 变换**下，p^μ 的内积 p^2 **不变**，p^0 **的符号也不会改变**

🐢 它们是**所有惯性参考系**的**不变量**

🌿 p^2 **的每个数值**和 p^0 **的每种符号**决定了**一组四维动量** $\{p^\mu\}$，彼此之间由**固有保时向 Lorentz 变换**联系着，可以选取一个**标准四维动量** $k^\mu \in \{p^\mu\}$，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p)k^\nu$$

🐐 $V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的**固有保时向 Lorentz 变换**

🐑 从而，标准四维动量 k^μ **代表**了**这组四维动量** $\{p^\mu\}$

标准四维动量

🌱 在固有保时向 Lorentz 变换下，p^μ 的内积 p^2 不变，p^0 的符号也不会改变

🐢 它们是所有惯性参考系的不变量

🌿 p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$，彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着，可以选取一个标准四维动量 $k^\mu \in \{p^\mu\}$，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p)k^\nu$$

🐐 $V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换

🐏 从而，标准四维动量 k^μ 代表了这组四维动量 $\{p^\mu\}$

🐃 可以将 $\{p^\mu\}$ 中任意元素 p^μ 对应的单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 定义为

$$|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

🐂 $N(p)$ 是依赖于 p^μ 的归一化因子

🐄 左右两边出现同个指标 σ，实际上以此规定指标 σ 与四维动量 p^μ 之间的关系

小群

对**单粒子态** $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 作**量子 Lorentz 变换** $U(\Lambda)$，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U^{-1}[V(\Lambda p)]U(\Lambda)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \end{aligned}$$

其中，**固有保时向 Lorentz 变换**

$$W^\mu{}_\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu$$

先将 k^μ **变换到** p^μ，再**变换到** $(\Lambda p)^\mu$，最后**变换回** k^μ：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda]^\mu{}_\nu p^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)]^\mu{}_\nu (\Lambda p)^\nu = k^\mu$$

即 $W^\mu{}_\nu$ **保持** k^μ **不变**

所有保持 k^μ **不变**的固有保时向 Lorentz 变换 $\{W^\mu{}_\nu\}$ 构成 Lorentz 群的一个子群，称为**标准动量** k^μ 对应的**小群** (little group)

小群的线性表示

- 类似于 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$，$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ 意味着

$$U(W)|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

- $D_{\sigma'\sigma}(W)$ 是**线性组合系数**
- 对于**小群**中任意两个变换 $(W_1)^\mu{}_\nu$ 和 $(W_2)^\mu{}_\nu$，由上式推出

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = U(W_2W_1)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = U(W_2)U(W_1)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

$$= U(W_2)\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma''}(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

- 从而得到**同态关系**

$$D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)$$

- 可见，矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成这个小群的一个**线性表示**

系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$

🌳 进一步推出

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)\left|\Psi_\sigma(p^\mu)\right\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)\left|\Psi_\sigma(k^\mu)\right\rangle \\
&= N(p)U[V(\Lambda p)]\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle \\
&= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]U[V(\Lambda p)]\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle
\end{aligned}$$

🦍 根据定义，有 $\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle = N(\Lambda p)U[V(\Lambda p)]\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle$，即

$$U[V(\Lambda p)]\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle = \frac{1}{N(\Lambda p)}\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle$$

🐆 代入得 $U(\Lambda)\left|\Psi_\sigma(p^\mu)\right\rangle = \dfrac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle$

🐅 与 $U(\Lambda)\left|\Psi_\sigma(p^\mu)\right\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle$ 比较，推出**系数公式**

$$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\, D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]$$

质量非零的粒子

⚛️ 上述讨论表明，可以通过**标准四维动量** k^μ 和相应的**小群**为**单粒子态**分类，**物理**上遇到以下**三种情况**

(1) 质量非零的粒子：$\boldsymbol{p^2 = m^2}$ 且 $\boldsymbol{p^0 > 0}$，其中质量 $\boldsymbol{m > 0}$

🌴 此时 p^μ 是**类时**的，取**标准四维动量**为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$

🥥 沿任意方向的 Lorentz 增速变换会**改变** k^μ，**任意空间旋转变换**则**保持** k^μ **不变**

🐒 因此相应的**小群**是 $\mathbf{SO(3)}$

质量非零的粒子

上述讨论表明，可以通过**标准四维动量** k^μ 和相应的**小群**为**单粒子态**分类，**物理**上遇到以下**三种情况**

(1) 质量非零的粒子：$p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$，其中质量 $m > 0$

- 此时 p^μ 是**类时**的，取**标准四维动量**为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$
- 沿任意方向的 Lorentz 增速变换会**改变** k^μ，**任意空间旋转变换**则**保持** k^μ **不变**
- 因此相应的**小群**是 $\mathbf{SO(3)}$
- 在**量子力学**中，归一化后的态矢仍然具有一定的任意性，态矢 $|\Psi\rangle$ 与**相差一个相位因子**的态矢 $e^{i\varphi}|\Psi\rangle$ (φ 为实数) 描述**相同的量子态**
- 一般地，**量子 Lorentz 变换**的**同态关系** $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$ 应修正为

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = e^{i\varphi(\Lambda_2,\Lambda_1)}U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

- 若**实相位** $\varphi(\Lambda_2, \Lambda_1)$ **不恒为零**，则集合 $\{U(\Lambda)\}$ 不是 Lorentz 群的线性表示，而是**投影表示** (projective representation)

小群 SO(3) 的双值表示

🌵 对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \mathrm{SO}(3)$，则有

$$U(W_2)U(W_1) = e^{i\varphi(W_2,W_1)}U(W_2W_1)$$

🐫 作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，利用 $U(W)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$，得

$$\sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = e^{i\varphi(W_2,W_1)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

🐫 故
$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) = e^{i\varphi(W_2,W_1)}D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)$$

小群 SO(3) 的双值表示

- 对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \mathrm{SO}(3)$，则有

$$U(W_2)U(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}U(W_2W_1)$$

- 作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，利用 $U(W)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$，得

$$\sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

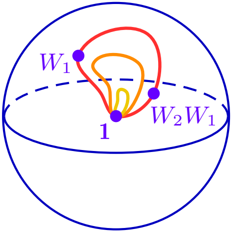
- 故

$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)$$

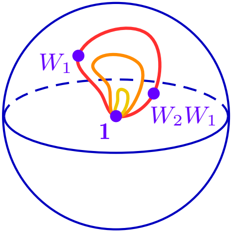
- 若 $\varphi(W_2, W_1)$ **不恒为零**，则矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成**小群 SO(3)** 的**投影表示**
- 这里遇到的投影表示就是 3.1.2 小节提到的 $\boldsymbol{n}$ **值表示**
- 它的存在意味着群空间的**连通度** $n > 1$，将这个群扩充为一个**单连通**的**覆盖群**，则相关的投影表示对应于覆盖群的**线性表示**
- 因此，应该用**覆盖群**的**不等价不可约线性表示**为粒子态分类

闭合曲线与恒等变换

- 在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元
- 由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点
- 从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元连续地组合成这条曲线



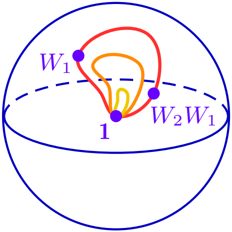
闭合曲线与恒等变换

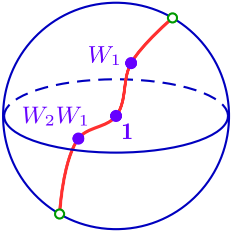


- 在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元
- 由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点
- 从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元连续地组合成这条曲线
- 考虑 SO(3) 群空间内一条闭合曲线，它从恒元 1 出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，相应的量子变换是 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$
- 如果这条曲线能连续地收缩成恒元这一点，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 是恒等变换 1

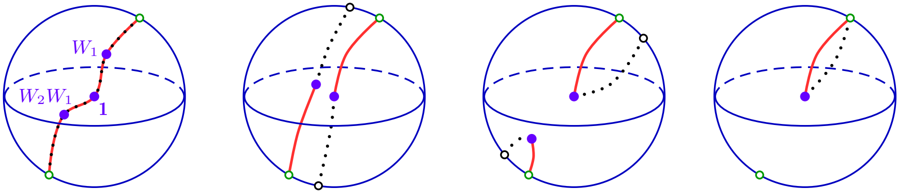
闭合曲线与恒等变换

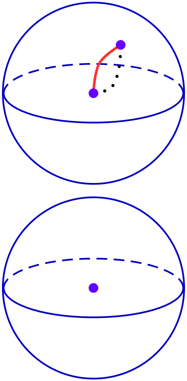
- 在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元
- 由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点
- 从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元连续地组合成这条曲线
- 考虑 SO(3) 群空间内一条闭合曲线，它从恒元 1 出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，相应的量子变换是 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$
- 如果这条曲线能连续地收缩成恒元这一点，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 是恒等变换 1
- 如果这条曲线包含奇数次对径点跳跃，就不能连续收缩成恒元一点，而 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 不一定是恒等变换





闭合曲线与双值表示





对于**第二种情形**，**重复**走**闭合曲线**的路径**两次**，则包含**偶数次对径点跳跃**，可通过**连续形变消除**这些**跳跃**，从而**收缩成恒元一点**，也就是说，$[U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)]^2 = 1$

由此得到 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \pm 1$，即

$$U(W_2)U(W_1) = \pm U(W_2W_1)$$

可见，**SO(3) 群**的**相位因子** $e^{i\varphi(W_2,W_1)}$ **可取** ± 1

相位因子即能取 $+1$ 又能取 -1 的情况对应于**双值表示**

SU(2) 群的不等价不可约线性表示

- SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任意经过恒元的闭合曲线都能收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示
- 群论知识告诉我们，SU(2) 群的不等价不可约线性表示都是幺正表示，记为

$$D^{(s)}, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$$

- s 就是自旋量子数，线性表示 $D^{(s)}$ 的维度为 $2s+1$，表示矩阵元记为 $D^{(s)}_{\sigma'\sigma}(W)$
- $\sigma', \sigma = -s, -s+1, \cdots, s-1, s$ 是自旋在某个方向上投影出来的本征值

SU(2) 群的不等价不可约线性表示

SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任意经过恒元的闭合曲线都能收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示

群论知识告诉我们，SU(2) 群的不等价不可约线性表示都是幺正表示，记为

$$D^{(s)}, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$$

s 就是自旋量子数，线性表示 $D^{(s)}$ 的维度为 $2s+1$，表示矩阵元记为 $D^{(s)}_{\sigma'\sigma}(W)$

$\sigma', \sigma = -s, -s+1, \cdots, s-1, s$ 是自旋在某个方向上投影出来的本征值

因此，自旋为 s 的有质量粒子具有 $2s+1$ 种自旋极化态

根据前面的结果，自旋为 s 的有质量单粒子态 $|\Psi_{s,\sigma}(p^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda)\,|\Psi_{s,\sigma}(p^\mu)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D^{(s)}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{s,\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$$

量子 Lorentz 变换将 σ 对应的极化态变换成不同 σ' 对应的极化态的线性组合

整数自旋和半奇数自旋

🍊 当 s 为整数 $(0, 1, 2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 **SU(2)** 群的非忠实线性表示，同时也是 **SO(3)** 群的线性表示，描述整数自旋的粒子

🐸 $D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示，描述零自旋粒子

🐷 $D^{(1)}$ 是 **SO(3)** 群的基础表示，描述自旋为 **1** 的粒子

整数自旋和半奇数自旋

当 s 为整数 $(0, 1, 2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的非忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的线性表示，描述整数自旋的粒子

- $D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示，描述零自旋粒子
- $D^{(1)}$ 是 SO(3) 群的基础表示，描述自旋为 1 的粒子

当 s 为半奇数 $(1/2, 3/2, 5/2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的双值表示，描述半奇数自旋的粒子

- $D^{(1/2)}$ 是 SU(2) 群的基础表示，描述自旋为 1/2 的粒子
- 可见，半奇数自旋是量子理论特有的

Lorentz 群和 Poincaré 群的覆盖群

🍉 与子群 $\mathrm{SO}(3)$ 一样，固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 也是双连通的

🦕 它的覆盖群是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 2 阶特殊线性群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

🍌 在 Poincaré 群空间中，与恒元连通的部分对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 与时空平移群的半直积群，它是双连通的

🦖 相应的覆盖群是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 与时空平移群的半直积群

🥝 3.1.1 和 3.1.2 小节的讨论没有在量子 Poincaré 变换的同态关系

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

中引入相位因子

🐍 这相当于在覆盖群的线性表示中进行讨论，因而导出的结果是合理的

质量为零的粒子

(2) 质量为零的粒子：$p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$

- 此时 p^μ 是**类光**的，取**标准四维动量**为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$，其中 $\kappa > 0$
- 相应三维动量 $\mathbf{k}$ **沿 z 轴方向**，相应**小群**中的任意**变换** $W^\mu{}_\nu$ 满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$
- 为了知道保持 k^μ 不变的小群是什么，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu/\kappa = (1, 0, 0, 1)$
- 由 $W^\mu{}_\nu \tilde{k}^\nu = W^\mu{}_\nu k^\nu/\kappa = k^\mu/\kappa = \tilde{k}^\mu$ 得知，$\tilde{k}^\mu$ 也在小群变换下不变

质量为零的粒子

(2) 质量为零的粒子：$p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$

- 此时 p^μ 是类光的，取标准四维动量为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$，其中 $\kappa > 0$
- 相应三维动量 $\mathbf{k}$ 沿 z 轴方向，相应小群中的任意变换 $W^\mu{}_\nu$ 满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$
- 为了知道保持 k^μ 不变的小群是什么，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu/\kappa = (1, 0, 0, 1)$
- 由 $W^\mu{}_\nu \tilde{k}^\nu = W^\mu{}_\nu k^\nu/\kappa = k^\mu/\kappa = \tilde{k}^\mu$ 得知，$\tilde{k}^\mu$ 也在小群变换下不变
- 相应协变矢量满足 $\tilde{k}_\mu = \tilde{k}_\nu (W^{-1})^\nu{}_\mu$，再引入类时 Lorentz 矢量 $\tilde{t}^\mu = (1, 0, 0, 0)$
- 记 $t^\mu \equiv W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu$，推出 $t^\mu \tilde{k}_\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho (W^{-1})^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho = \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\nu = 1$
- 满足这样一个 $1 = t^\mu \tilde{k}_\mu = t^0 - t^3$ 条件的 t^μ 一般形式为 $t^\mu = (1 + \zeta, \alpha, \beta, \zeta)$
- 由于 $(1+\zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = t^\mu t_\mu = \delta^\nu{}_\mu t^\mu t_\nu = W^\rho{}_\mu t^\mu t_\nu (W^{-1})^\nu{}_\rho = \tilde{t}^\rho \tilde{t}_\rho = 1$
- ζ 与 α、β 的关系为 $\zeta = \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad \alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$
- 实数 α 和 β 的取值不受约束

小群变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)$

- 考虑**固有保时向 Lorentz 变换** $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{pmatrix}$
- 它满足 $\mathbf{g} = S^{\mathrm{T}}\mathbf{g}S$ 和 $\det(S) = 1$，且第一列是 $t^\mu = (1+\zeta,\alpha,\beta,\zeta)$
- $S(\alpha,\beta)$ 对 $\tilde{t}^\mu = (1,0,0,0)$ 的作用为 $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)\tilde{t}^\nu = t^\mu = W^\mu{}_\nu\tilde{t}^\nu$

小群变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)$

- 考虑固有保时向 Lorentz 变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}$
- 它满足 $\mathbf{g}=S^{\mathrm{T}}\mathbf{g}S$ 和 $\det(S)=1$，且第一列是 $t^\mu=(1+\zeta,\alpha,\beta,\zeta)$
- $S(\alpha,\beta)$ 对 $\tilde{t}^\mu=(1,0,0,0)$ 的作用为 $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)\tilde{t}^\nu=t^\mu=W^\mu{}_\nu\tilde{t}^\nu$
- 这意味着 $\tilde{t}^\rho=[S^{-1}(\alpha,\beta)]^\rho{}_\mu S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)\tilde{t}^\nu=[S^{-1}(\alpha,\beta)]^\rho{}_\mu W^\mu{}_\nu\tilde{t}^\nu$
- 变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 保持类时矢量 $\tilde{t}^\mu=(1,0,0,0)$ 不变，必定是空间旋转变换
- 由 $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)k^\nu=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\kappa\\0\\0\\\kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\kappa\\0\\0\\\kappa\end{pmatrix}=k^\nu$ 可知
- $S(\alpha,\beta)$ 是一个小群变换

小群变换的一般形式

- 从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 是保持 $k^\mu = (\kappa,0,0,\kappa)$ 不变的空间旋转变换
- 它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$，满足

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 于是，小群变换的最一般形式是 $W(\alpha,\beta,\theta) = S(\alpha,\beta)R_z(\theta)$

小群变换的一般形式

- 从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 是保持 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 不变的空间旋转变换
- 它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$，满足

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W=R_z(\theta)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\cos\theta&\sin\theta&\\&-\sin\theta&\cos\theta&\\&&&1\end{pmatrix}$$

- 于是，小群变换的最一般形式是 $W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta)$
- 通过计算可知，$S(\alpha,\beta)$ 和 $R_z(\theta)$ 分别满足

$$\begin{aligned}S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2)&=S(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)\\R_z(\theta_1)R_z(\theta_2)&=R_z(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

- 从而 $S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2)=S(\alpha_2,\beta_2)S(\alpha_1,\beta_1)$，$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2)=R_z(\theta_2)R_z(\theta_1)$
- 因此 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 和 $\{R_z(\theta)\}$ 分别构成小群的两个 **Abel 子群**

小群 ISO(2)

- 进一步推出 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$
- 这意味着 $S(\alpha,\beta)$ 在**任意小群元素**的**相似变换**下变换到**子群** $\{S(\alpha,\beta)\}$ 中的元素
- 在这种情况下，数学上称 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 是**小群**的**不变子群** (invariant subgroup)

小群 ISO(2)

进一步推出 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$

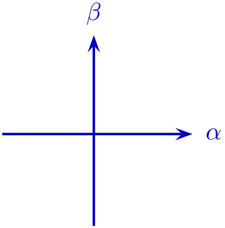
这意味着 $S(\alpha,\beta)$ 在**任意小群元素**的**相似变换**下变换到**子群** $\{S(\alpha,\beta)\}$ 中的元素

在这种情况下，数学上称 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 是**小群**的**不变子群** (invariant subgroup)

由于 α 和 β 的取值范围都是全体实数，**全体坐标点** (α,β) 组成一个**二维平面**

$S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2) = S(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$ 表明 $S(\alpha,\beta)$ 是**这个平面**上的**平移变换**

$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2) = R_z(\theta_1+\theta_2)$ 和**以上相似变换关系式**表明 $R_z(\theta)$ 是**这个平面**上的**旋转变换**



Euclid
(约前 325 至约前 270)

这些变换都**保持**二维平面的 **Euclid 线元平方** $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2$ **不变**

由它们构成的**小群**是**二维 Euclid 空间**的**等距群** $\mathrm{ISO}(2)$

ISO(2) 无穷小变换

现在讨论**小群 ISO(2)** 的**生成元算符**，**ISO(2) 变换**

$$W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta)=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

的**无穷小形式**是 $W^\mu{}_\nu(\alpha,\beta,\theta)=\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu$，其中**无穷小参数**为

$$\omega^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta & 0\\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha\\ \beta & -\theta & 0 & -\beta\\ 0 & \alpha & \beta & 0\end{pmatrix},\quad \omega_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta & 0\\ -\alpha & 0 & -\theta & \alpha\\ -\beta & \theta & 0 & \beta\\ 0 & -\alpha & -\beta & 0\end{pmatrix}$$

故 $\alpha=\omega_{13}=\omega_{01}$，$\beta=\omega_{23}=\omega_{02}$，$\theta=\omega_{21}$

容易验证 $\omega^\mu{}_\nu k^\nu=0$，因而这样的无穷小变换**保持** $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ **不变**

ISO(2) 生成元算符

相应的无穷小量子变换为

$$
\begin{aligned}
U(\mathbf{1}+\omega) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu \\
&= 1 - \mathrm{i}(\omega_{31}J^{31} + \omega_{01}J^{01}) - \mathrm{i}(\omega_{23}J^{23} + \omega_{02}J^{02}) - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} \\
&= 1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J^3
\end{aligned}
$$

其中 $J^3 = J^{12}$，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$
A \equiv J^{31} - J^{01} = J^2 - K^1, \quad B \equiv -J^{23} - J^{02} = -J^1 - K^2
$$

ISO(2) 生成元算符

相应的**无穷小量子变换**为

$$\begin{aligned} U(1+\omega) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu \\ &= 1 - \mathrm{i}(\omega_{31}J^{31} + \omega_{01}J^{01}) - \mathrm{i}(\omega_{23}J^{23} + \omega_{02}J^{02}) - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} \\ &= 1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J^3 \end{aligned}$$

其中 $J^3 = J^{12}$，而**生成元算符** A 和 B 定义为

$$A \equiv J^{31} - J^{01} = J^2 - K^1, \quad B \equiv -J^{23} - J^{02} = -J^1 - K^2$$

由 Lorentz 代数关系推出**小群 ISO(2)** 的**生成元算符** J^3、A 和 B 的**对易关系**

$$\begin{aligned} [J^3, A] &= [J^3, J^2] - [J^3, K^1] = -\mathrm{i}J^1 - \mathrm{i}K^2 = \mathrm{i}B, \\ [J^3, B] &= -[J^3, J^1] - [J^3, K^2] = -\mathrm{i}J^2 + \mathrm{i}K^1 = -\mathrm{i}A, \\ [A, B] &= -[J^2, J^1] - [J^2, K^2] + [K^1, J^1] + [K^1, K^2] = \mathrm{i}J^3 - \mathrm{i}J^3 = 0 \end{aligned}$$

这与 Poincaré 代数关系中 $[J^3, P^2] = \mathrm{i}P^1$、$[J^3, P^1] = -\mathrm{i}P^2$ 和 $[P^2, P^1] = 0$ **相同**

毕竟 J^3、P^1 和 P^2 生成了 xy **平面的 ISO(2) 群**

A 和 B 的共同本征态

- A 与 B 是**相互对易**的**厄米算符**，能够具有**共同的本征态** $|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$
- 本征值分别为 a 和 b，满足

$$A\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = a\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle\,, \quad B\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = b\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$$

- 根据 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$
- 小群 ISO(2) 的**量子变换**满足**同态关系**

$$U^{-1}[R_z(\theta)]U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = U[S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)]$$

- 将上式展开到无穷小参数 α 和 β 的第一阶，得

$$U^{-1}[R_z(\theta)](1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)U[R_z(\theta)] = 1 + \mathrm{i}(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)A + \mathrm{i}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)B$$

- 由 α 和 β 的**任意性**推出

$$\begin{aligned} U^{-1}[R_z(\theta)]AU[R_z(\theta)] &= A\cos\theta + B\sin\theta \\ U^{-1}[R_z(\theta)]BU[R_z(\theta)] &= -A\sin\theta + B\cos\theta \end{aligned}$$

态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle$ 的 A、B 本征值

- 两边左乘 $U[R_z(\theta)]$，得 $AU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](A\cos\theta + B\sin\theta)$

$$BU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta + B\cos\theta)$$

- 那么，态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle \equiv U[R_z(\theta)]|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$ 是 A 和 B 的共同本征态，

$$\begin{aligned}
A\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle &= AU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = U[R_z(\theta)](A\cos\theta + B\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\
&= U[R_z(\theta)](a\cos\theta + b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\
&= (a\cos\theta + b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle \\
B\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle &= BU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta + B\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\
&= U[R_z(\theta)](-a\sin\theta + b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\
&= (-a\sin\theta + b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle
\end{aligned}$$

- 由于**转动角 θ 取连续值**，本征值 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 和 $-a\sin\theta + b\cos\theta$ 也是**连续**的

螺旋度

- 因此，只要 a 和 b **不全为零**，就有一系列**连续**的本征态 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle$
- 但是，实验上**没有观测到**无质量粒子具有以**转动角** θ 作为**连续自由度**的物理态
- 因此，自然界中的**物理态**是 $a=b=0$ 的本征态，只由剩下的**小群生成元算符** J^3 的**本征值** σ 标记，记作 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$，满足

$$A\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = 0, \quad B\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = 0, \quad J^3\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sigma\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

- J^3 是**自旋角动量算符 $\mathbf{J}$ 沿 z 轴方向**的分量
- 标准四维动量 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 对应的**三维动量 $\mathbf{k}$ 也沿着 z 轴方向**
- 因此 σ 就是**自旋角动量**在**动量方向**上的**投影本征值**，称为**螺旋度** (helicity)

小群表示矩阵 $D_{\sigma'\sigma}(W)$

🦭 无穷小量子变换 $U(1+\omega) = 1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J^3$ 表明

$$\left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \mathrm{i}A, \quad \left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \mathrm{i}B, \quad \left.\frac{dU[R_z(\theta)]}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \mathrm{i}J^3$$

🐋 由此求得 $U[S(\alpha,\beta)] = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)$ 和 $U[R_z(\theta)] = \exp(\mathrm{i}\theta J^3)$

🐬 一般小群变换 $W(\alpha,\beta,\theta) = S(\alpha,\beta)R_z(\theta)$ 对应的量子变换为

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)] = U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)\exp(\mathrm{i}\theta J^3)$$

🐙 作用到单粒子物理态 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，得

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \exp(\mathrm{i}\sigma\theta)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

🦞 与 $U(W)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$ 式比较，有

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(\mathrm{i}\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}$$

无质量粒子螺旋度的 Lorentz 不变性

- 另一方面，$V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p)]R_z[\theta(\Lambda,p)]$ 决定了 θ 对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系

- 一般单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} \exp(\mathrm{i}\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle
\end{aligned}
$$

无质量粒子螺旋度的 Lorentz 不变性

另一方面，$V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)]R_z[\theta(\Lambda, p)]$ 决定了 θ **对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系**

一般单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 的**量子 Lorentz 变换**为

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} \exp(\mathrm{i}\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp[\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda, p)]\,|\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \end{aligned}$$

这表明 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 与变换后的态 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 具有**相同的 σ**

也就是说，量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ **不会混合**具有**不同螺旋度**的无质量粒子态

对**无质量粒子**来说，**螺旋度 σ** 是**固有保时向 Lorentz 变换**的**不变量**，在所有惯性系中取值**相同**

因此，无质量粒子可根据螺旋度 σ 的值**分类**

无质量粒子的螺旋度

- 前面提到，**固有保时向 Lorentz 群 $SO^{\uparrow}(1,3)$** 的群空间是**双连通**的
- 与 $\mathrm{SO}(3)$ 的情况**类似**，群空间内从**恒元**出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到**恒元**的**闭合曲线**分为**两类**，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能
- 由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$
- 对于无质量粒子态，$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \dfrac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp[i\sigma\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$

无质量粒子的螺旋度

前面提到，固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的群空间是双连通的

与 $\mathrm{SO}(3)$ 的情况类似，群空间内从恒元出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到恒元的闭合曲线分为两类，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能

由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$

对于无质量粒子态，$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \dfrac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[i\sigma\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$

相位因子 ±1 起源于绕 z 轴转动角度 $\theta = 2\pi$ 形成闭合曲线时引起的 $\exp(2i\pi\sigma)$ 因子，即

$$\exp(2i\pi\sigma) = \pm 1$$

这个条件限制了无质量粒子螺旋度 σ 的取值，要求

$$\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}, \pm2, \cdots$$

σ 为整数对应于 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的线性表示，σ 为半奇数对应于 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的双值表示

无质量粒子的自旋量子数

- 由于**螺旋度**是**自旋角动量**在动量方向上的投影，**无质量粒子自旋量子数**可取

$$s = |\sigma| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$$

- 这与**有质量粒子**的取值情况**一样**
- 于是，**自旋为 s** 的**无质量粒子**具有 **2 种自旋极化态**，对应于 **2 种螺旋度 $\sigma = \pm s$**
- 如果**没有额外条件**，可以把 s 相同而 σ **不同**的两种无质量粒子当作**不同粒子**对待

无质量粒子的自旋量子数

- 由于**螺旋度**是**自旋角动量**在动量方向上的投影，**无质量粒子自旋量子数**可取

$$s = |\sigma| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$$

- 这与**有质量粒子**的取值情况**一样**
- 于是，**自旋为 s** 的**无质量粒子**具有 **2 种自旋极化态**，对应于 **2 种螺旋度** $\sigma = \pm s$
- 如果**没有额外条件**，可以把 s 相同而 σ **不同**的两种无质量粒子当作**不同粒子**对待
- 不过，额外的条件是存在的
- **宇称变换**会**改变 σ 的符号**，而**电磁相互作用**、**强相互作用**和**引力相互作用**都保持**宇称守恒**
- 如果**无质量粒子不具有破坏宇称的相互作用**，则**螺旋度相反**的两种粒子具有**相同**的**相互作用**行为，从而可以把它们当作**同一种粒子**的**两种自由度**
- 比如，作为电磁场的量子，**光子**是**自旋为 1** 的**无质量粒子**，具有 -1 和 $+1$ **两种螺旋度**，分别对应于真空电磁波的**左旋圆极化**和**右旋圆极化**

引力子、中微子和真空

- 假想的**引力子** (graviton) 是**自旋为** 2 的**无质量粒子**，具有 -2 和 $+2$ **两种螺旋度**
- 在**标准模型**中，**自旋为** $1/2$ 的**中微子没有质量**，参与**破坏宇称**的**弱相互作用**
- 因而可以把螺旋度相反的两种中微子当作两种粒子，**螺旋度为** $-1/2$ 的**左旋**中微子是狭义的**中微子**，**螺旋度为** $+1/2$ 的**右旋**中微子称为**反中微子**

引力子、中微子和真空

- 假想的引力子 (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度
- 在标准模型中，自旋为 $1/2$ 的中微子没有质量，参与破坏宇称的弱相互作用
- 因而可以把螺旋度相反的两种中微子当作两种粒子，螺旋度为 $-1/2$ 的左旋中微子是狭义的中微子，螺旋度为 $+1/2$ 的右旋中微子称为反中微子

(3) 真空：$p^\mu = (0,0,0,0)$

- 此时取标准四维动量为 $k^\mu = (0,0,0,0)$，它在任意 Lorentz 变换下不变
- 相应的小群是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$