量 子 场 论

第 1 章　预备知识

1.6 节和 1.7 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2023 年 3 月 22 日

1.6 节 作用量原理 1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

- 在经典力学中，质点力学系统可以用拉格朗日量（Lagrangian）描述
- 对于具有 n 个自由度的系统，可以定义 n 个相互独立的广义坐标 (generalized coordinate) q_i ，它们的时间导数是广义速度 (generalized velocity) $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$
- 拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$
- 拉格朗日量的时间积分称为作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$$

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

1.6 节　作用量原理　　1.6.1 小节　经典力学中的作用量原理

- 在**经典力学**中，**质点力学系统**可以用**拉格朗日量**（Lagrangian）描述
- 对于具有 n **个自由度**的系统，可以定义 n 个相互独立的**广义坐标** (generalized coordinate) q_i，它们的时间导数是**广义速度** (generalized velocity) $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$
- 拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$
- 拉格朗日量的时间积分称为**作用量**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$$

- (最小) **作用量原理**指出，作用量的**变分极值** ($\delta S = 0$) 对应于系统的**经典运动轨迹**
- 假设时间的变分 $\delta t = 0$，即不作时间坐标的变换，则

$$\delta\dot{q}_i = \delta\,\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_i$$

- 也就是说，时间导数的变分等于变分的时间导数

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Euler-Lagrange 方程

从而得到

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta \dot{q}_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta q_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}
$$

分部积分

Euler-Lagrange 方程

- 从而得到

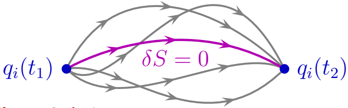
Leonhard Euler
(1707–1783)

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta \dot{q}_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta q_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}
$$

分部积分

- 再**假设**在初始和结束时刻广义坐标的变分为零，即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$
- 则**最后一行第二项为零**，由于变分 $\delta q_i(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ 是**任意**的，$\delta S = 0$ 等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$



- 这是 **Euler-Lagrange 方程**，它给出质点系统的**经典运动方程**

广义动量和哈密顿量

引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

反解由上式表示的 n 个方程，就可以用 q_i 和 p_i **将 $\dot{q}_i$ 表达出来**，然后用 **Legendre 变换**定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$

Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)

William Rowan Hamilton
(1805–1865)

广义动量和哈密顿量

引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

反解由上式表示的 n 个方程，就可以用 q_i 和 p_i **将 $\dot{q}_i$ 表达出来**，然后用 **Legendre 变换**定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$

H 是 q_i 和 p_i 的函数

用 H 取替 L 来表达作用量 S，则**作用量的变分**为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta(p_i \dot{q}_i - H)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

William Rowan Hamilton (1805–1865)

Hamilton 正则运动方程

🍙 由 $p_i\delta\dot{q}_i = p_i \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i$ 得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\dot{q}_i\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\delta p_i\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] + p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

🍣 根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，上式最后一行第二项为零

Hamilton 正则运动方程

- 由 $p_i\delta\dot{q}_i = p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i$ 得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\dot{q}_i\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right]\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] + p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

- 根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，上式最后一行第二项为零
- 于是 $\delta S = 0$ 给出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i = 1,\cdots,n$$

- 这是 **Hamilton 正则运动方程**
- 相当于用 **$2n$ 个一阶方程**代替 **n 个二阶 Euler-Lagrange 方程** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- **广义坐标** q_i 和**广义动量** p_i 统称为**正则变量**

1.6.2 小节 经典场论中的作用量原理

- 场是时空坐标 x^μ 的函数
- 在经典场论中，场 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 都是一个自由度
- 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学
- 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量 $L = \int d^3x\, \mathcal{L}(x)$
- 其中 $\mathcal{L}(x)$ 称为拉格朗日量密度，下文将它简称为拉氏量
- 这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ，没有再依赖于其它时空点

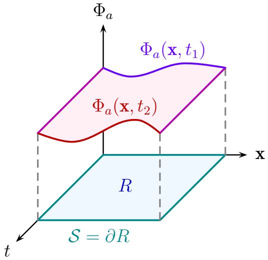
1.6.2 小节　经典场论中的作用量原理

- 场是时空坐标 x^μ 的函数
- 在经典场论中，场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 都是一个自由度
- 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学
- 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量 $L=\int d^3x\,\mathcal{L}(x)$
- 其中 $\mathcal{L}(x)$ 称为拉格朗日量密度，下文将它简称为拉氏量
- 这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ，没有再依赖于其它时空点
- 设 $\mathcal{L}$ 是系统中 n 个场 $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ $(a=1,\cdots,n)$ 及其时空导数 $\partial_\mu\Phi_a$ 的函数
- 作用量表达为 $S=\int dt\,L=\int d^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a,\partial_\mu\Phi_a)$
- 由于 d^4x 是 Lorentz 不变的，如果 $\mathcal{L}$ 也是 Lorentz 不变的，则 S 就是 Lorentz 不变的，从而由作用量原理得到的运动方程满足狭义相对性原理
- 因此，构建相对论性场论的关键在于要求拉氏量 $\mathcal{L}$ 是一个 **Lorentz 标量**

经典场论的作用量变分

- 类似于前面质点力学的处理方式，假设时空坐标的变分 $\delta x^\mu = 0$
- 即不作时空坐标的变换，则对场的时空导数的变分等于场变分的时空导数，

$$\delta(\partial_\mu \Phi_a) = \partial_\mu(\delta\Phi_a)$$



- 于是推出

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\, \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a}\delta\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\delta(\partial_\mu \Phi_a)\right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a}\delta\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\partial_\mu(\delta\Phi_a)\right] \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a}\delta\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\delta\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\right]\delta\Phi_a\right\} \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\right]\delta\Phi_a + \int d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\delta\Phi_a\right]
\end{aligned}$$

- 上式最后一行第二项的被积函数是关于时空坐标的**全散度** (total divergence)

场的 Euler-Lagrange 方程

利用广义 Stokes 定理将上述全散度转化为边界面积分：

$$\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right]=\int_{\mathcal{S}}d\sigma_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a$$

其中 $\mathcal{S}$ 是积分区域 R 的边界面，$d\sigma_\mu$ 是 $\mathcal{S}$ 上的面元

进一步假设在边界面 $\mathcal{S}$ 上 $\delta\Phi_a=0$，则上式为零

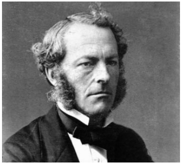
我们通常讨论整个时空区域上的场，这里相当于假设 Φ_a 在无穷远时空边界上的变分为零，于是

$$0=\delta S=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a+\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right]$$

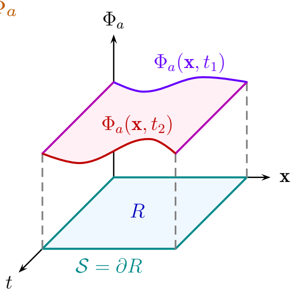
推出

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}=0$$

这就是场的 Euler-Lagrange 方程，它给出场的经典运动方程



George Stokes
(1819–1903)



共轭动量密度

- 引入场的**共轭动量密度** (conjugate momentum density) $\pi_a(\mathbf{x},t) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}$
- π_a 也称为**正则共轭场**，接着用 Legendre 变换将**哈密顿量**定义为

$$H \equiv \int d^3x\, \pi_a \dot{\Phi}_a - L \equiv \int d^3x\, \mathcal{H}$$

- 其中 $\mathcal{H}(\Phi_a, \pi_a, \nabla\Phi_a) = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$ 是**哈密顿量密度**，**作用量变分**为

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\, \delta\mathcal{L} = \int d^4x\, \delta(\pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{H}) \\
&= \int d^4x \left[\dot{\Phi}_a \delta\pi_a + \pi_a \delta\dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} \delta\Phi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \delta\pi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \cdot \delta(\nabla\Phi_a) \right]
\end{aligned}$$

- 方括号中的第二项和最后一项分别化为

$$\begin{aligned}
\pi_a \delta\dot{\Phi}_a &= \pi_a \frac{d}{dt} \delta\Phi_a = \frac{d}{dt}(\pi_a \delta\Phi_a) - \dot{\pi}_a \delta\Phi_a, \\
-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \cdot \nabla(\delta\Phi_a) &= -\nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \delta\Phi_a \right] + \left[\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \right] \delta\Phi_a
\end{aligned}$$

场的正则运动方程

- 从而得到

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \left\{ \left(\dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \right) \delta\pi_a - \left[\dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \right] \delta\Phi_a \right\}$$
$$+ \int \mathrm{d}^4x \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a \delta\Phi_a) - \int \mathrm{d}^4x \, \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)} \delta\Phi_a \right]$$

- 与前面一样，假设在**时空区域边界面上** $\delta\Phi_a = 0$
- 则上式最后一行的两个**全导数积分项均为零**
- 于是，$\delta S = 0$ 给出**场的正则运动方程**

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}$$

- **场** Φ_a 和它的**共轭动量密度** π_a 是系统的**正则变量**

1.7 节　Noether 定理、对称性与守恒定律

- 如前所述，若一种对称变换可用连续变化的参数描述，则它是一种**连续变换**，连续变换对应的对称性称为**连续对称性**
- Lorentz 对称性就是一种连续对称性
- **Noether 定理**指出，

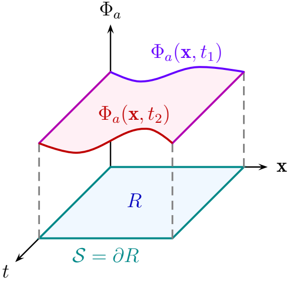
> 如果系统具有**一种连续对称性**，就必然存在**一条**对应的**守恒定律**

- Noether 定理首先是在**经典物理**中给出的，但实际上它适用于所有物理行为由**作用量原理**决定的系统
- 因此，可以将它推广到**量子物理**中

Emmy Noether
(1882–1935)

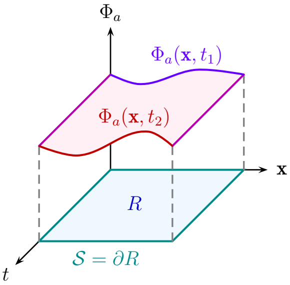
1.7.1 小节 场论中的 Noether 定理

- 下面在**场论**中证明 **Noether 定理**
- 在**时空区域** R 中的作用量为 $S=\int_R \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a,\partial_\mu\Phi_a)$
- 考虑一个**连续变换**，使得 $\Phi_a(x)\to\Phi'_a(x')$
- 其中已包含了**坐标变换** $x^\mu\to x'^\mu$
- 它引起的**拉氏量变换**为 $\mathcal{L}(x)\to\mathcal{L}'(x')$



1.7.1 小节 场论中的 Noether 定理

- 下面在**场论**中证明 **Noether 定理**
- 在**时空区域** R 中的作用量为 $S = \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$
- 考虑一个**连续变换**，使得 $\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x')$
- 其中已包含了**坐标变换** $x^\mu \to x'^\mu$
- 它引起的**拉氏量变换**为 $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x')$
- 我们可以对连续对称性**取极限**，即考虑**无穷小变换**
- 记**上述连续变换**的**无穷小**变换形式为



$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a, \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}$$

- 如果在此变换下，$\delta S = \int_{R'} \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) = 0$，则系统具有相应的**连续对称性**

体积元的变化

- 体积元的变化为 $\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\mathrm{d}^4x$，$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \simeq \det\left[\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]$
- 上式中约等于号表示只展开到一阶小量，下同
- 任意方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\det[\exp(\mathbf{A})] = \exp[\mathrm{tr}(\mathbf{A})]$，其中 $\exp(\mathbf{A}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$
- 对于无穷小的 $\mathbf{A}$，把上式两边展开至一阶小量，得 $\det(\mathbf{1} + \mathbf{A}) \simeq 1 + \mathrm{tr}(\mathbf{A})$
- 利用上式将 Jacobi 行列式 $\mathcal{J}$ 化为 $\mathcal{J} \simeq 1 + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$
- 从而，**体积元**的**无穷小变换**形式为 $\mathrm{d}^4x' \simeq [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]\mathrm{d}^4x$

体积元的变化

- 体积元的变化为 $\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\mathrm{d}^4x$，$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \simeq \det\left[\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]$
- 上式中约等于号表示只展开到一阶小量，下同
- 任意方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\det[\exp(\mathbf{A})] = \exp[\mathrm{tr}(\mathbf{A})]$，其中 $\exp(\mathbf{A}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}$
- 对于无穷小的 $\mathbf{A}$，把上式两边展开至一阶小量，得 $\det(\mathbf{1}+\mathbf{A}) \simeq 1 + \mathrm{tr}(\mathbf{A})$
- 利用上式将 Jacobi 行列式 $\mathcal{J}$ 化为 $\mathcal{J} \simeq 1 + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$
- 从而，体积元的无穷小变换形式为 $\mathrm{d}^4x' \simeq [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]\mathrm{d}^4x$
- 作用量在此无穷小变换下的变分是

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{R'}\mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x) \\
&\simeq \int_R \mathrm{d}^4x\,[1+\partial_\mu(\delta x^\mu)][\mathcal{L}(x)+\delta\mathcal{L}] - \int_R \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x) \simeq \int_R \mathrm{d}^4x\,[\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(x)\partial_\mu(\delta x^\mu)] \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta(\partial_\mu\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right]
\end{aligned}$$

两种变分算符

记 x^μ **固定**时的变分算符为 $\bar{\delta}$，满足

$$\bar{\delta}\Phi_a(x) = \Phi'_a(x) - \Phi_a(x)$$

$\bar{\delta}$ **算符**可以**与时空导数交换**，$\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a)$，$\delta$ **算符**则**不一定**可以

$\delta\Phi_a$ 与 $\bar{\delta}\Phi_a$ 的关系为

$$\begin{aligned}\delta\Phi_a &= \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \Phi'_a(x) - \Phi_a(x)\\ &= \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \bar{\delta}\Phi_a \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu\end{aligned}$$

即

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu$$

将上面的 Φ_a 替换为 $\partial_\mu\Phi_a$，即得

$$\delta(\partial_\mu\Phi_a) = \bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu$$

作用量变分

从而得到

$$
\begin{aligned}
\delta S \;=\; & \int_R \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta(\partial_\mu\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) \right] \\
= & \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}[\bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}[\partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu] + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) \right\} \\
= & \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\bar{\delta}\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar{\delta}\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a \right. \\
& \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\,\partial_\mu(\partial_\nu\Phi_a)\delta x^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) \right\} \\
= & \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar{\delta}\Phi_a\right] \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\frac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\,\frac{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu + \mathcal{L}\,\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right] \right\} \\
= & \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right] \right\}
\end{aligned}
$$

第二步用到导数的乘积法则，最后一步用到涉及多元复合函数的求导关系

Noether 守恒流

- **Euler-Lagrange 方程**表明 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} = 0$

- 由于**积分区域** R 可以是**任意**的，

$$0 = \delta S = \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \right] \bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \right\}$$

等价于

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = 0$$

- 定义 **Noether 守恒流** $j^\mu \equiv \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu$

- 则有**守恒流方程** $\partial_\mu j^\mu = 0$

Noether 守恒流

Euler-Lagrange 方程表明 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} = 0$

由于**积分区域** R 可以是**任意**的，

$$0 = \delta S = \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \right] \bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \right\}$$

等价于

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = 0$$

定义 **Noether 守恒流** $j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu$

则有**守恒流方程** $\partial_\mu j^\mu = 0$，两边对**空间区域** R 积分，运用 **Gauss 定理**，得到

$$0 = \int_R \mathrm{d}^3x\, \partial_\mu j^\mu = \int_R \mathrm{d}^3x\, \partial_0 j^0 + \int_R \mathrm{d}^3x\, \nabla\cdot\mathbf{j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_S \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是**边界面** $\mathcal{S}$ 上的**定向面元**，以**外法线方向**为**正向**

守恒荷

- 引入**守恒荷** $Q \equiv \int_R \mathrm{d}^3x\, j^0$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_S \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_S \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

- 即区域 R 中的守恒荷减少率（增加率）等于从边界面流出（流入）的通量
- 这表明守恒荷**不能**凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度

守恒荷

- 引入**守恒荷** $Q \equiv \int_R \mathrm{d}^3x\, j^0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \mathrm{d}^3x\, j^0 + \int_S \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_S \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

- 即**区域** R 中的**守恒荷减少率**（**增加率**）等于从**边界面流出**（**流入**）的**通量**
- 这表明守恒荷**不能**凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度
- 对于**整个三维空间**而言，**边界面** S 位于**无穷远**处
- 通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在**无穷远处** $\mathbf{j} \to \mathbf{0}$
- 故**全空间**的**守恒荷** $Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$
- 可见，Q 不随时间变化，是一个**守恒量**

守恒荷

- 引入**守恒荷** $Q \equiv \int_R d^3x\, j^0$，则 $\dfrac{d}{dt}\int_R d^3x\, j^0 + \int_S \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$ 化为

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_S \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

- 即**区域** R 中的**守恒荷减少率**（**增加率**）等于从**边界面流出**（**流入**）的**通量**
- 这表明守恒荷**不能**凭空产生或消失，而 j^0 是守恒荷的空间密度
- 对于**整个三维空间**而言，**边界面** S 位于**无穷远**处
- 通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在**无穷远处** $\mathbf{j} \to \mathbf{0}$
- 故**全空间**的**守恒荷** $Q = \int d^3x\, j^0$ 满足 $\dfrac{dQ}{dt} = 0$
- 可见，Q 不随时间变化，是一个**守恒量**
- 综上，在场论中，如果一个系统具有某种**连续对称性**，则存在相应的**守恒流** j^μ
- 它满足**守恒流方程** $\partial_\mu j^\mu = 0$，而**全空间**的**守恒荷** Q 不随时间变化

1.7.2 小节　时空平移对称性

- 时空坐标的**平移** (translation) 变换定义为

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

- 其中 a^{μ} 是**平移变换参数**，**不依赖于** x^{μ}，故 $\mathrm{d}x'^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}$
- 从而，时空平移变换保持 $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ 不变，即

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$$

Henri Poincaré
(1854–1912)

- 因此，时空平移变换**保持** **Minkowski 时空**的**线元** (line element) $\mathrm{d}s$ **不变**
- 所有时空平移变换构成**时空平移群**
- **保持线元平方** $\mathrm{d}s^2$ **不变**的变换称为 **Poincaré 变换**，也称为**非齐次** Lorentz 变换

Poincaré 群

- 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**
- **线元不变**意味着**距离不变**
- 因而 Poincaré 群是 **Minkowski 时空**的**等距群** (isometry group)，记作 $\mathrm{ISO}(1,3)$
- **Lorentz 群**是 Poincaré 群的**子群**，$\mathrm{O}(1,3) < \mathrm{ISO}(1,3)$

Poincaré 群

- 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**
- **线元不变**意味着**距离不变**
- 因而 Poincaré 群是 **Minkowski 时空**的**等距群** (isometry group)，记作 $\mathrm{ISO}(1,3)$
- **Lorentz 群**是 Poincaré 群的**子群**，$\mathrm{O}(1,3) < \mathrm{ISO}(1,3)$
- 任意 Poincaré 变换可表示成 **Lorentz 变换**和**时空平移变换**的组合
- 也就是说，时空坐标的 **Poincaré 变换**表达为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

- 利用**保度规条件**，容易验证这样的变换**保持** $\mathrm{d}s^2$ **不变**：

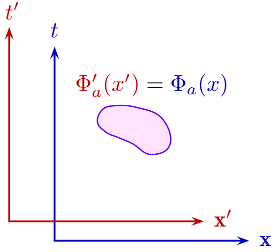
$$\mathrm{d}s'^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma} = g_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma} = \mathrm{d}s^2$$

- 数学上称 Poincaré 群是 **Lorentz 群**与**时空平移群**的**半直积群**

时空平移对称性

- Minkowski 时空是均匀 (homogeneous) 的，处于其中的系统具有时空平移对称性
- 在时空平移变换 $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的形状不会改变，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$$

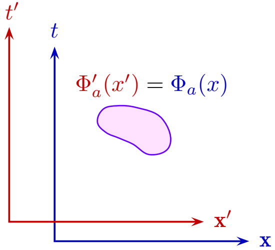


时空平移对称性

Minkowski 时空是均匀 (homogeneous) 的，处于其中的系统具有时空平移对称性

在时空平移变换 $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ 的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的形状不会改变，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$$



对于无穷小变换，将变换参数 a^{μ} 改记为 ε^{μ}，则

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}, \quad \delta\Phi_a = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = 0$$

故 $\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^{\mu} = -\varepsilon^{\rho}\partial_\rho\Phi_a$

代入到 Noether 守恒流表达式，得

$$j^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^{\mu} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\varepsilon^{\rho}\partial_\rho\Phi_a + \mathcal{L}\varepsilon^{\mu}$$

$$= -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\rho\Phi_a - \delta^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{L}\right]\varepsilon^{\rho}$$

能动张量

从而，$\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu{}_\rho \mathcal{L} \right] = 0$$

各项乘以 $g^{\rho\nu}$，缩并，得

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0$$

上式方括号部分是场的**能动张量** (energy-momentum tensor)

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

它满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

因此，对 $T^{0\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ 作**全空间积分**，就得到 **4 个守恒荷**

只要保证 $\mathcal{L}$ 是 **Lorentz 标量**，那么 $T^{\mu\nu}$ 就是 **2 阶 Lorentz 张量**

能量守恒定律和动量守恒定律

- 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 分量为 $T^{00} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$
- 可见，T^{00} 就是哈密顿量密度 $\mathcal{H}$，对应于时间平移变换 $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$
- T^{00} 的全空间积分 $H = \int d^3x\, T^{00} = \int d^3x\, \mathcal{H}$ 是场的哈密顿量，或者说总能量
- 它是时间平移变换的守恒荷，因此时间平移对称性对应于能量守恒定律

能量守恒定律和动量守恒定律

- 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 **分量**为 $T^{00} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$
- 可见，T^{00} 就是**哈密顿量密度** $\mathcal{H}$，对应于**时间平移变换** $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$
- T^{00} 的全空间积分 $H = \displaystyle\int d^3x\, T^{00} = \int d^3x\, \mathcal{H}$ 是场的**哈密顿量**，或者说**总能量**
- 它是时间平移变换的**守恒荷**，因此**时间平移对称性**对应于**能量守恒定律**
- 能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 $0i$ **分量** $T^{0i} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\partial^i\Phi_a = \pi_a\partial^i\Phi_a$ 是场的**动量密度**
- 它对应于**空间平移变换** $x'^i = x^i + \varepsilon^i$
- T^{0i} 的全空间积分 $P^i = \displaystyle\int d^3x\, T^{0i} = \int d^3x\, \pi_a\partial^i\Phi_a$ 是场的**总动量**
- 三维矢量形式为 $\mathbf{P} = -\displaystyle\int d^3x\, \pi_a\nabla\Phi_a$
- 总动量是空间平移变换的**守恒荷**，因此**空间平移对称性**对应于**动量守恒定律**

1.7.3 小节 Lorentz 对称性

在相对论性场论中，要求拉氏量 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 标量，因而作用量 S 是 Lorentz 不变量，系统具有 Lorentz 对称性

考虑无穷小固有保时向 Lorentz 变换

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$$

其中 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 是变换的无穷小参数，由保度规条件有

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \omega^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \omega^{\nu}{}_{\beta}) \\ &\simeq g_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + g_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\omega^{\nu}{}_{\beta} + g_{\mu\nu}\omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

可见，$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu}$ 关于两个指标反对称，

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

因此，$\omega_{\mu\nu}$ 只有 6 个独立分量

分别对应于沿 3 个空间轴方向的增速变换和绕 3 个空间轴的旋转变换

无穷小旋转变换

- 下面举两个例子说明 $\omega_{\mu\nu}$ 的具体形式
- 对于**绕 z 轴旋转 θ 角**的变换矩阵

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 利用三角函数展开式 $\cos\theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ 和 $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$，得

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

无穷小增速变换

🚲 对于**沿 x 轴增速变换**，引入**快度** (rapidity) $\xi \equiv \tanh^{-1}\beta$，则 $\beta = \tanh\xi$

🚴 利用双曲函数公式 $\tanh\xi = \sinh\xi/\cosh\xi$ 和 $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1$ 推出

$$\begin{aligned}\gamma &= (1-\beta^2)^{-1/2} = (1-\tanh^2\xi)^{-1/2} = \left(\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right)^{-1/2} = \cosh\xi \\ \beta\gamma &= \tanh\xi\cosh\xi = \sinh\xi\end{aligned}$$

🚵 增速变换矩阵改写成 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & & \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

🏁 根据双曲函数展开式 $\cosh\xi = 1 + \mathcal{O}(\xi^2)$ 和 $\sinh\xi = \xi + \mathcal{O}(\xi^3)$，有

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentz 群表示的生成元

🏇 在**无穷小 Lorentz 变换**的作用下，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) x^{\nu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

🏇 对变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 在 $\omega_{\mu\nu} = 0$ **附近**作 **Taylor 级数**，展开到 $\omega_{\mu\nu}$ **的第一阶**，得

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu} \left. \frac{\partial \Phi'_a(x')}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right|_{\omega_{\mu\nu}=0}$$

Brook Taylor
(1685–1731)

Lorentz 群表示的生成元

在无穷小 Lorentz 变换的作用下，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

对变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 在 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 附近作 Taylor 级数，展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 的第一阶，得

$$\begin{aligned}\Phi'_a(x') &= \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu}\left.\frac{\partial\Phi'_a(x')}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=0} \\ &= \Phi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) \\ &= \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)\end{aligned}$$

Brook Taylor
(1685–1731)

群表示	场 Φ_a	$(I^{\mu\nu})_{ab}$
恒等表示	标量场 ϕ	0
矢量表示	矢量场 A^μ	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma$
旋量表示	旋量场 ψ_a	$(\mathcal{S}^{\mu\nu})_{ab}$

其中 $(I^{\mu\nu})_{ab} \equiv \dfrac{2\mathrm{i}}{\Phi_b(x)}\left.\dfrac{\partial\Phi'_a(x')}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=0}$ 是 Φ_a 所属 Lorentz 群表示的生成元 (generator)

由于 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的，$(I^{\mu\nu})_{ab}$ 关于 μ 和 ν 反对称，$(I^{\mu\nu})_{ab} = -(I^{\nu\mu})_{ab}$

Lorentz 对称性的 Noether 流

现在 $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$，有

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\Phi_a &= \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\nu\rho}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - (\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

Noether 流 $j^\mu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu$

$$\begin{aligned}&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right]\omega^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

其中 $T^\mu{}_\nu \equiv T^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$ 是**能动张量** $T^{\mu\nu}$ 的另一种写法

注意参与**缩并的 Lorentz 指标一升一降不会改变**表达式的结果，

$$T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho = T^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\sigma\omega^\sigma{}_\rho = T^\mu{}_\nu g^{\nu\alpha}g_{\alpha\sigma}\omega^\sigma{}_\rho = T^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}$$

Lorentz 对称性的守恒荷

再利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的**反对称性**推出

$$T^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}{}_{\rho}x^{\rho} = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^{\rho} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^{\rho} - T^{\mu\nu}\omega_{\rho\nu}x^{\rho}) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^{\rho} - T^{\mu\rho}\omega_{\nu\rho}x^{\nu})$$
$$= \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu})$$

于是，**Noether 流**化为

$$j^{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu}) = \frac{1}{2}\mathbb{J}^{\mu\nu\rho}\omega_{\nu\rho}$$

其中 $\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho}x^{\nu} - T^{\mu\nu}x^{\rho} - \mathrm{i}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b$

$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$ 给出 $\partial_{\mu}\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0$，Lorentz 对称性的**守恒荷**为

$$J^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3x\,\mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int \mathrm{d}^3x\,[T^{0\rho}x^{\nu} - T^{0\nu}x^{\rho} - \mathrm{i}\pi_a(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b]$$

易见 $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$，因而一共有 **6 个独立的守恒荷**，满足 $\mathrm{d}J^{\nu\rho}/\mathrm{d}t = 0$

守恒荷的分解

为明确物理含义，将守恒荷分解成两项，

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}$$

第一项为 $L^{\nu\rho} \equiv \int d^3x\,(T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho)$

关于指标的反对称性意味着它的纯空间分量 L^{jk} 中只有 3 个是独立的

利用三维 Levi-Civita 符号将 L^{jk} 对偶成三维矢量

$$L^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}L^{jk} = (L^{23}, L^{31}, L^{12})$$

由此推出

$$L^i = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\int d^3x\,(T^{0k}x^j - T^{0j}x^k) = \int d^3x\,\varepsilon^{ijk}x^j \underbrace{T^{0k}}_{\text{动量密度}} = \int d^3x\,\varepsilon^{ijk}x^j\pi_a\partial^k\Phi_a$$

写成矢量形式是 $\mathbf{L} = -\int d^3x\;\mathbf{x}\times(\pi_a\nabla\Phi_a)$，这是场的轨道角动量

角动量守恒定律

- 第二项为 $S^{\nu\rho} \equiv -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x\, \pi_a (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b$
- 同样，$S^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$S^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk} S^{jk} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ijk} \int \mathrm{d}^3x\, \pi_a (I^{jk})_{ab} \Phi_b$$

- 这是场的**自旋角动量**
- $J^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk} J^{jk} = L^i + S^i$$

- 这是场的**总角动量**
- 固有保时向 Lorentz 群的**纯空间部分**就是**空间旋转群** $\mathrm{SO}(3)$
- 而**空间旋转对称性**对应于**角动量守恒定律**

质心运动守恒定律

$L^{\nu\rho}$ 的 $i0$ **分量**为

$$L^{i0}=\int \mathrm{d}^3x\,(T^{00}x^i-T^{0i}x^0)=\int \mathrm{d}^3x\,(x^i\mathcal{H}-x^0\pi_a\partial^i\Phi_a)=\int \mathrm{d}^3x\,x^i\mathcal{H}-tP^i$$

若 $\dfrac{\mathrm{d}S^{i0}}{\mathrm{d}t}=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}J^{i0}}{\mathrm{d}t}=0$ 意味着 $\dfrac{\mathrm{d}L^{i0}}{\mathrm{d}t}=0$，再结合**动量守恒** $\dfrac{\mathrm{d}P^i}{\mathrm{d}t}=0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}L^{i0}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,x^i\mathcal{H}-P^i=0$$

即

$$P^i=Hv_{\mathrm{C}}^i,\quad v_{\mathrm{C}}^i\equiv\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,x^i\mathcal{H}$$

在**低速极限**下，**总能量**约等于**总质量**，$H\simeq M$，故**总动量** $\mathbf{P}\simeq M\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$

$\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$ 是**质心** (即质量中心，center of mass) 的**运动速度**

应用 **Newton 第二定律**，**外力** $\mathbf{F}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}=M\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$，这就是**质心运动定理**

因此，L^{i0} **的守恒**在经典力学中对应于**质心运动守恒定律**：当没有外力存在时，质心的加速度为零，质心保持静止或作匀速直线运动

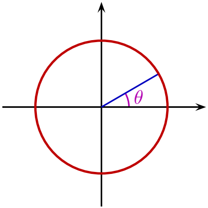
1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

- 考虑包含**复场** $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的**拉氏量** $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 对 ϕ 作 **U(1) 整体变换** $\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)$
- 其中**有理数** q 是常数，**连续变换参数** θ 是实数
- **整体** (global) 指 θ **不依赖于时空坐标** x^μ

1.7.4 小节　U(1) 整体对称性

- 考虑包含**复场** $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的**拉氏量** $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)\partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
- 对 ϕ 作 **U(1) 整体变换** $\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x)$
- 其中**有理数** q 是常数，**连续变换参数** θ 是实数
- **整体** (global) 指 θ **不依赖于时空坐标** x^μ
- $e^{iq\theta}$ 是一个**模为** 1 的**相位因子** (phase factor)
- 可看作一个 **1 维幺正矩阵** $U = e^{iq\theta}$，满足 $U^\dagger U = 1$
- 故 $\{U\}$ 构成 **U(1) 群**，它是与 **SO(2)** 同构的 Abel 群
- 如右图所示，**SO(2) 群空间**是一个**圆周**

$\mathrm{SO}(2): \ \theta \to [0, 2\pi]$



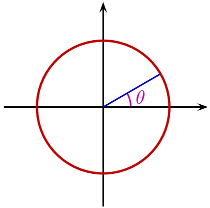
$U = e^{iq\theta}: \ \theta \to [0, 2\pi/q]$

$U(0) = U(2\pi/q) = 1$

1.7.4 小节　U(1) 整体对称性

- 考虑包含**复场** $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的**拉氏量** $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^*)\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi$
- 对 ϕ 作 **U(1) 整体变换** $\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)$
- 其中**有理数** q 是常数，**连续变换参数** θ 是实数
- **整体** (global) 指 θ **不依赖于时空坐标** x^μ
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$ 是一个**模为** 1 的**相位因子** (phase factor)
- 可看作一个 **1 维幺正矩阵** $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$，满足 $U^\dagger U = 1$
- 故 $\{U\}$ 构成 **U(1) 群**，它是与 **SO(2)** 同构的 Abel 群
- 如右图所示，**SO(2) 群空间**是一个**圆周**

$\mathrm{SO}(2):\ \theta \to [0, 2\pi]$



$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}:\ \theta \to [0, 2\pi/q]$

$U(0) = U(2\pi/q) = 1$

- 相应地，ϕ^* 的 U(1) 整体变换为 $[\phi^*(x)]' = [\phi'(x)]^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^*(x)$
- **拉氏量** $\mathcal{L}$ 在这种变换下不变，即具有 **U(1) 整体对称性**，q 称为相应的 **U(1) 荷**
- 与前面叙述的时空平移对称性和 Lorentz 对称性不同，这里的对称性出现在由场构成的**抽象空间**中，与时间和空间**相对独立** ($\delta x^\mu = 0$)，因而是一种**内部对称性**

无穷小 U(1) 整体变换

- U(1) 整体变换的**无穷小**形式为

$$\phi'(x) = \phi(x) + \mathrm{i}q\theta\phi(x), \quad [\phi^*(x)]' = \phi^*(x) - \mathrm{i}q\theta\phi^*(x)$$

- 结合 $\delta x^\mu = 0$，有

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi = \mathrm{i}q\theta\phi, \quad \bar{\delta}\phi^* = \delta\phi^* = -\mathrm{i}q\theta\phi^*$$

- $\phi(x)$ 与 $\phi^*(x)$ 是**线性独立**的，代表两个**相互独立**的**自由度**，**Noether 流**表达为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\bar{\delta}\phi^* = \partial^\mu\phi^*(\mathrm{i}q\theta\phi) + \partial^\mu\phi(-\mathrm{i}q\theta\phi^*) \\ &= \mathrm{i}q\theta[(\partial^\mu\phi^*)\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*] = -\mathrm{i}q\theta\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi \end{aligned}$$

- 其中，$\overleftrightarrow{\partial^\mu}$ **符号**定义为 $\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi \equiv \phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi$

U(1) 守恒流和守恒荷

扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 U(1) 守恒流

$$J^{\mu} \equiv \mathrm{i}q\phi^{*}\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}\phi$$

则 Noether 定理给出 $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$，相应的守恒荷是

$$Q = \int \mathrm{d}^{3}x\, J^{0} = \mathrm{i}q \int \mathrm{d}^{3}x\, \phi^{*}\overleftrightarrow{\partial^{0}}\phi$$

满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$

U(1) 守恒流和守恒荷

- 扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv \mathrm{i}q\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$$

- 则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$，相应的守恒荷是

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = \mathrm{i}q \int \mathrm{d}^3x\, \phi^* \overleftrightarrow{\partial^0}\phi$$

- 满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$

- 在实际应用中，q 是由 Φ 场描述的粒子所携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等

- 因此，一种 U(1) 整体对称性对应于一条荷数守恒定律

- 比如，电磁 U(1) 整体对称性对应于电荷守恒定律