

# 量子场论

第8章 量子电动力学

## 8.6 节 Compton 散射

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2023 年 6 月 20 日



## 8.6 节 Compton 散射



电子与光子的散射过程  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  称为 Compton 散射



1923 年，Arthur Compton 用 X 射线照射核外电子，发现 X 射线因失去能量而波长变长



 他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，因而核外电子可以看成是**自由的**



根据相对论运动学, Compton 推导出光子的波长变化  $\Delta\lambda$  与散射角  $\theta$  的关系  $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta)$



他的实验证实了这条公式，为光的粒子性提供了直接证据



Arthur Holly Compton  
(1892–1962)

8.6 节 Compton 散射



电子与光子的散射过程  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  称为 Compton 散射



1923 年，Arthur Compton 用 X 射线照射核外电子，发现 X 射线因失去能量而波长变长



 他使用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，因而核外电子可以看成是**自由的**



根据相对论运动学, Compton 推导出光子的波长变化  $\Delta\lambda$  与散射角  $\theta$  的关系  $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta)$



 他的实验证实了这条公式，为光的粒子性提供了直接证据



 另一方面，对于低能电磁辐射与电子散射的过程，Joseph Thomson 根据经典电磁学推导出微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \pi r_e^2 (1 + \cos^2 \theta) = \frac{\pi \alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2 \theta)$$



  $r_e \equiv \alpha/m_e$  是电子的经典半径



**QED** 将给出这条微分截面公式的相对论修正



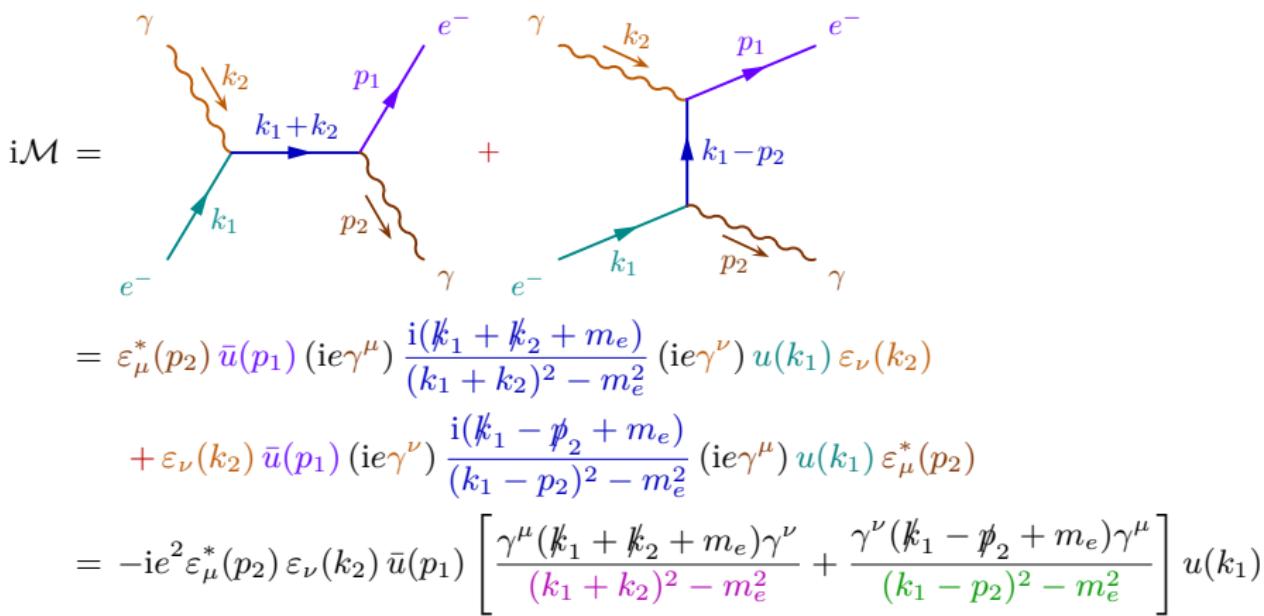
Arthur Holly Compton  
(1892–1962)



Joseph John Thomson  
(1856–1940)

## Compton 散射振幅

Compton 散射在 QED 领头阶具有  $s$  通道和  $u$  通道的 Feynman 图, 不变振幅为



 两幅图的电子线拓扑结构相同，可通过连续变形相互转换，因而相对符号为正

### 化简振幅

 根据质壳关系  $k_1^2 = m_e^2$  和  $k_2^2 = p_2^2 = 0$ ，传播子的分母化为

$$(k_1 + k_2)^2 - m_e^2 = 2 k_1 \cdot k_2, \quad (k_1 - p_2)^2 - m_e^2 = -2 k_1 \cdot p_2$$

利用  $k_1 \gamma^\nu = 2k_1^\nu - \gamma^\nu k_1$  和运动方程  $(k_1 - m_e)u(k_1) = 0$ ，有

$$\begin{aligned} (\not k_1 + m_e) \gamma^\nu u(k_1) &= (2k_1^\nu - \gamma^\nu \not k_1 + m_e \gamma^\nu) u(k_1) \\ &= 2k_1^\nu u(k_1) - \gamma^\nu (\not k_1 - m_e) u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1) \end{aligned}$$

 利用这些结果化简振幅，得

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left[ \frac{\gamma^\mu (\cancel{k}_1 + \cancel{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\cancel{k}_1 - \cancel{p}_2 + m_e) \gamma^\mu}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\ &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left( \frac{\gamma^\mu \cancel{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu \cancel{k}_1^\nu}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \cancel{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu \cancel{k}_1^\mu}{2 k_1 \cdot p_2} \right) u(k_1) \end{aligned}$$

### 8.6.1 小节 光子极化求和与 Ward 恒等式

接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算**非极化**振幅模方

 这将涉及**对光子螺旋度求和**，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p) \varepsilon_\nu(p) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p \cdot n}$$

 第二步用到极化矢量求和关系，本小节讨论光子极化求和的简化方法

### 8.6.1 小节 光子极化求和与 Ward 恒等式

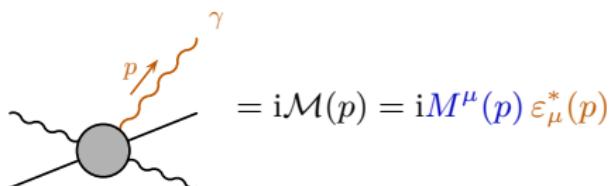
接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算**非极化**振幅模方

 这将涉及**对光子螺旋度求和**，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p) \varepsilon_\nu(p) = \sum_{\lambda=+} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p \cdot n}$$

 第二步用到极化矢量求和关系，本小节讨论光子极化求和的简化方法

 考虑出射一个动量为  $p^\mu$  的光子的任意 QED 过程，不变振幅为



 对光子极化求和，振幅模方变成

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 &= \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda) M^\mu(p) M^{\nu*}(p) \\ &= \left[ -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p \cdot n} \right] M^\mu(p) M^{\nu*}(p) \end{aligned}$$

守恒流方程的推论

QED 相互作用项为  $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu$ ，其中电磁流  $J_{\text{EM}}^\mu = \sum_f Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$

因此，上述过程的散射矩阵元具有以下形式，

$$\begin{aligned} \langle f | iT | i \rangle &\propto \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle \cdots ; \textcolor{brown}{\boxed{\mathbf{p}, \lambda}} | \mathsf{N}[\textcolor{brown}{A_\mu(x_1)} J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{i p \cdot x_1} \langle \cdots | \mathsf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \end{aligned}$$

可见  $M^\mu(p) \propto \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | N[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$

守恒流方程的推论

QED 相互作用项为  $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu$ ，其中电磁流  $J_{\text{EM}}^\mu = \sum Q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$

因此，上述过程的散射矩阵元具有以下形式，

$$\begin{aligned} \langle f | iT | i \rangle &\propto \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle \cdots ; \textcolor{brown}{p}, \lambda | \mathsf{N}[\textcolor{brown}{A}_\mu(x_1) J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | \mathsf{N}[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \end{aligned}$$

可见  $M^\mu(p) \propto \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | N[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$

 在经典层面上，电磁流  $J_{\text{EM}}^\mu$  满足守恒流方程  $\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu = 0$

如果假设  $\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu = 0$  在量子层面上也成立，就可以推出

$$0 = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | N[\partial_\mu J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$$

分部积分法

$$= - \int d^4x_1 \cdots d^4x_n (\partial_\mu e^{ip \cdot x_1}) \langle \cdots | N[J_{EM}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle$$

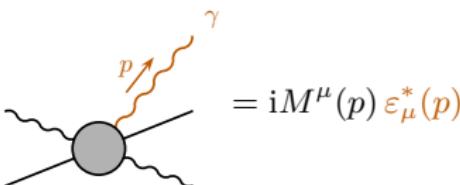
$$= -ip_\mu \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip \cdot x_1} \langle \cdots | N[J_{\text{EM}}^\mu(x_1) \cdots] | i \rangle \propto p_\mu M^\mu(p)$$

Ward 恒等式



于是得到 Ward 恒等式

$$p_\mu M^\mu(p) = 0$$



它对于入射光子的情况同样成立



Ward 恒等式表明，只要将**不变振幅**中任何一个**入射或出射子的极化矢量**替换成相应的**四维动量**，则结果为零

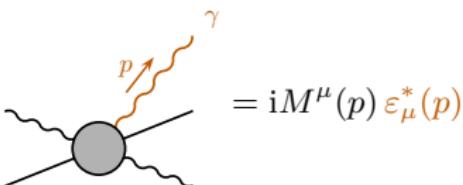


John Clive Ward  
(1924–2000)

Ward 恒等式

于是得到 Ward 恒等式

$$p_\mu M^\mu(p) = 0$$



它对于入射光子的情况同样成立

 Ward 恒等式表明，只要将不变振幅中任何一个入射或出射光子的极化矢量替换成相应的四维动量，则结果为零



John Clive Ward  
(1924–2000)

虽然这里利用了经典的守恒流方程，但实际上可以在量子场论中严格证明 Ward 恒等式，相关证明留待后文叙述

Ward 恒等式是电磁流守恒在量子层面上的体现，与 QED 的规范对称性密切相关

 规范变换  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$  在动量空间中体现为  $\varepsilon_\mu^*(p) \rightarrow \varepsilon_\mu^*(p) - i p_\mu$

因此振幅  $\varepsilon_\mu^*(p) M^\mu(p)$  的规范不变性等价于 Ward 恒等式  $p_\mu M^\mu(p) = 0$

光子极化求和



对前面的

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 &= \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda) M^\mu(p) M^{\nu*}(p) \\ &= \left[ -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p \cdot n} \right] M^\mu(p) M^{\nu*}(p) \end{aligned}$$



应用 Ward 恒等式  $p_\mu M^\mu(p) = 0$ ，则方括号中后两项都没有贡献，得到

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda) M^\mu(p) M^{\nu*}(p) = -g_{\mu\nu} M^\mu(p) M^{\nu*}(p)$$



也就是说，在 QED 计算中可以使用替换关系

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p) \varepsilon_\nu(p) \rightarrow -g_{\mu\nu}$$



这就是处理光子极化求和的简化方法

## 验证 Ward 恒等式

现在用  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  散射振幅验证 Ward 恒等式

将这个振幅表达为  $i\mathcal{M} = i\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)M^{\mu\nu}$

$$M^{\mu\nu} = -e^2 \bar{u}(p_1) \left[ \frac{\gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \gamma^\mu}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1)$$

电子场旋量系数的运动方程为  $(k_1 - m_e)u(k_1) = 0$ ，即

$$k_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$$

两边取厄米共轭，右乘  $\gamma^0$ ，得

同理  $\bar{u}(p_1)\mathbb{p}_1 = \bar{u}(p_1)m_e$

再利用  $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ ，推出

$$\not{p}_2 u(k_1) = -(\not{k}_1 - \not{p}_2 - \not{k}_1) u(k_1) = -(\not{k}_1 - \not{p}_2 - m_e) u(k_1)$$

$$\bar{u}(p_1)\not{p}_2 = \bar{u}(p_1)(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p}_1) = \bar{u}(p_1)(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{m}_e)$$

### 验证 Ward 恒等式：光子外线



$$\begin{aligned}
p_{2\mu} M^{\mu\nu} &= -e^2 \bar{u}(p_1) \left[ \frac{\not{p}_2 (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \not{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\
&= -e^2 \bar{u}(p_1) \left[ \frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2 - m_e)(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e)(\not{k}_1 - \not{p}_2 - m_e)}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1) \\
&= -e^2 \bar{u}(p_1) \left[ \frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 - m_e^2}{(k_1 + k_2)^2 - m_e^2} \gamma^\nu - \gamma^\nu \frac{(\not{k}_1 - \not{p}_2)^2 - m_e^2}{(k_1 - p_2)^2 - m_e^2} \right] u(k_1)
\end{aligned}$$

由  $\not{p} \not{p} = p^2$  得  $(\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$  和  $(\not{k}_1 - \not{p}_2)^2 = (k_1 - p_2)^2$

故 Ward 恒等式  $p_{2\mu}M^{\mu\nu} = 0$  对  $i\mathcal{M} = i\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)M^{\mu\nu}$  成立

同理可以验证 Ward 恒等式  $k_{2\nu} M^{\mu\nu} = 0$  成立

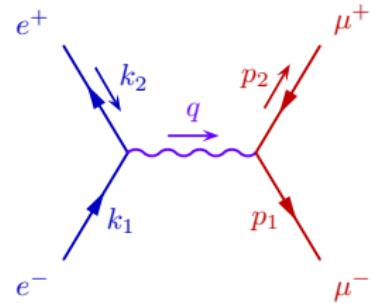
### 验证 Ward 恒等式：光子内线

 其实，Ward 恒等式不仅对光子外线成立，对光子内线也成立

 光子传播子动量  $q^\mu$  流入或流出的振幅  $M^\mu(q)$  满足 **Ward 恒等式**  $q_\mu M^\mu(q) = 0$

以  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  振幅  $i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)$  为例

 光子传播子动量为  $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$ , 电子线部分振幅为  $M^\mu(q) = i e \bar{v}(k_2) \gamma^\mu u(k_1)$



### 验证 Ward 恒等式：光子内线

 其实，Ward 恒等式不仅对光子外线成立，对光子内线也成立

 光子传播子动量  $q^\mu$  流入或流出的振幅  $M^\mu(q)$  满足 **Ward 恒等式**  $q_\mu M^\mu(q) = 0$

以  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  振幅  $i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)$  为例

 光子传播子动量为  $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$ , 电子线部分振幅为  $M^\mu(q) = i e \bar{v}(k_2) \gamma^\mu u(k_1)$

 运动方程  $(k_2 + m_e)v(k_2) = 0$  表明  $k_2 v(k_2) = -m_e v(k_2)$

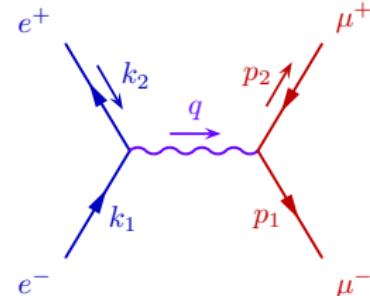
 两边取厄米共轭，右乘  $\gamma^0$ ，得  $\bar{v}(k_2)k_2 = -\bar{v}(k_2)m_e$

再利用  $k_1 u(k_1) = m_e u(k_1)$  即可推出 Ward 恒等式

$$q_\mu M^\mu(q) = ie\bar{v}(k_2)\not{q}u(k_1) = ie\bar{v}(k_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2)u(k_1)$$

$$= ie\bar{v}(k_2)(m_e - m_e)u(k_1) = 0$$

同理可验证  $\mu$  子线部分振幅也满足 Ward 恒等式



### 8.6.2 小节 非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式

对  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  不变振幅

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \bar{u}(p_1) \left( \frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2 k_1 \cdot p_2} \right) u(k_1)$$

 取复共轭，利用  $[\bar{u}(p_1)\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu u(k_1)]^* = u^\dagger(k_1)(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\rho)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 u(p_1)$

$$= u^\dagger(k_1) \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(k_1) \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu u(p_1)$$

$$\text{得 } (\mathrm{i}\mathcal{M})^* = \mathrm{i}e^2 \varepsilon_\rho(p_2) \varepsilon_\sigma^*(k_2) \bar{u}(k_1) \left( \frac{\gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2 k_1 \cdot p_2} \right) u(p_1)$$

## 非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p_2) \varepsilon_\rho(p_2) \varepsilon_\nu(k_2) \varepsilon_\sigma^*(k_2) \\ &\quad \times \text{tr} \left[ u(p_1) \bar{u}(p_1) \left( \frac{\gamma^\mu k_2^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2 k_1 \cdot p_2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times u(k_1) \bar{u}(k_1) \left( \frac{\gamma^\sigma k_2^\rho + 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2^\sigma - 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2 k_1 \cdot p_2} \right) \right] \end{aligned}$$

非极化振幅模方

对光子极化态和费米子螺旋度求和，得

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{4} (-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma}) \text{tr} \left[ (\not{p}_1 + m_e) \left( \frac{\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu}{2 k_1 \cdot p_2} \right) \right. \\ &\quad \times (\not{k}_1 + m_e) \left( \frac{\gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho + 2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2 k_1 \cdot k_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2 k_1 \cdot p_2} \right) \Big] \\ &= \frac{e^4}{16} \left[ \frac{A}{(k_1 \cdot k_2)^2} + \frac{B + C}{(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1 \cdot p_2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$A \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

$$B \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

$$C \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

$$D \equiv \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

  $A$  来自  $s$  通道 Feynman 图,  $D$  来自  $u$  通道 Feynman 图

 *B* 和 *C* 是两个通道的交叉项

化簡  $A$

利用 8.2.2 小节提供的求迹和缩并公式化简  $A$ , 经过繁琐的计算, 得到

$$A = 32(k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_2) - 32m_e^2 p_1 \cdot k_2 - 32m_e^2 p_1 \cdot k_1 + 64m_e^2 k_1 \cdot k_2 + 64m_e^4$$

用 Mandelstam 变量  $s = (k_1 + k_2)^2$ 、 $t = (k_1 - p_1)^2$  和  $u = (k_1 - p_2)^2$  表达，有

$$k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_e^2), \quad k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - 2m_e^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{t}{2},$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_e^2), \quad s + t + u = 2m_e^2$$

 进而将  $A$  化为

$$\begin{aligned}
A &= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(u - m_e^2) + 2m_e^2(t - 2m_e^2) + 4m_e^2(s - m_e^2) + 8m_e^4] \\
&= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(2s + t + u) - 2m_e^4] \\
&= 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2s + 2m_e^4] \\
&\equiv 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(s - m_e^2) + 4m_e^4]
\end{aligned}$$

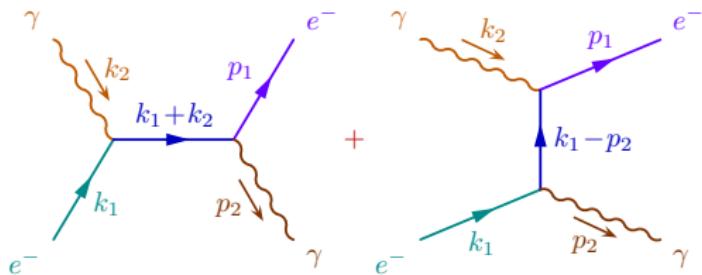
这里消去  $t$ , 保留  $s$  和  $u$ , 毕竟,  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  是  $s$  和  $u$  通道的过程

### A 与 D 的交叉对称性

容易看出，对  $A = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$  作动量替换  $\not{k}_2^\mu \leftrightarrow -\not{p}_2^\mu$ ，就得到

$$D = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$$

注意到光子是自身的反粒子，将  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  过程 **s 通道** Feynman 图的初态和末态光子相互交叉，就得到 **u 通道** Feynman 图，因而动量替换规则是  $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$



据此, 对上面得到的  $A = 8[-(s - m_e^2)(u - m_e^2) + 2m_e^2(s - m_e^2) + 4m_e^4]$  作替换  $(k_1 + k_2)^2 = s \leftrightarrow u = (k_1 - p_2)^2$ , 就得到  $D$  的表达式

$$D = 8[-(\textcolor{red}{s} - m_e^2)(\textcolor{green}{u} - m_e^2) + 2m_e^2(\textcolor{green}{u} - m_e^2) + 4m_e^4]$$

B 与 C

对  $B = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu k_{1\mu})]$  作动量替换  $k_2^\mu \leftrightarrow -p_2^\mu$ , 即

$$C = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)(\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1 + m_e)(\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu + 2\gamma_\mu k_{1\nu})]$$

经过复杂的计算，得到

$$\begin{aligned}
 B &= -32(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2) - 32(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_1) + 32(p_1 \cdot k_1)(k_1 \cdot k_2) \\
 &\quad + 16m_e^2 p_1 \cdot p_2 - 16m_e^2 p_1 \cdot k_2 - 16m_e^2 p_1 \cdot k_1 + 16m_e^2 p_2 \cdot k_2 \\
 &\quad + 32m_e^2 p_2 \cdot k_1 - 32m_e^2 k_1 \cdot k_2 - 16m_e^4 \\
 &= -8[m_e^2(\textcolor{red}{s} - m_e^2) + m_e^2(\textcolor{green}{u} - m_e^2) + 4m_e^4]
 \end{aligned}$$

 作替换  $s \leftrightarrow u$ ，就得到

$$\textcolor{violet}{C} = -8[m_e^2(\textcolor{red}{u} - m_e^2) + m_e^2(\textcolor{blue}{s} - m_e^2) + 4m_e^4] = \textcolor{violet}{B}$$

  $s$  与  $u$  通道的交叉项  $B$  和  $C$  恰好相等

非极化振幅模方



现在重新用**四维动量内积**表达，有

$$A = 32[(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2) + m_e^2 k_1 \cdot k_2 + m_e^4]$$

$$B = C = 16(-m_e^2 k_1 \cdot k_2 + m_e^2 k_1 \cdot p_2 - 2m_e^4)$$

$$D = 32[(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2) - m_e^2 k_1 \cdot p_2 + m_e^4]$$



代入到非极化振幅模方中，得

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{16} \left[ \frac{A}{(k_1 \cdot k_2)^2} + \frac{2B}{(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2)} + \frac{D}{(k_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ &= 2e^4 \left[ \frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{m_e^2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{m_e^4}{(k_1 \cdot k_2)^2} - \frac{m_e^2}{k_1 \cdot p_2} + \frac{m_e^2}{k_1 \cdot k_2} - \frac{2m_e^4}{(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} - \frac{m_e^2}{k_1 \cdot p_2} + \frac{m_e^4}{(k_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ &= 2e^4 \left[ \frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left( \frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left( \frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

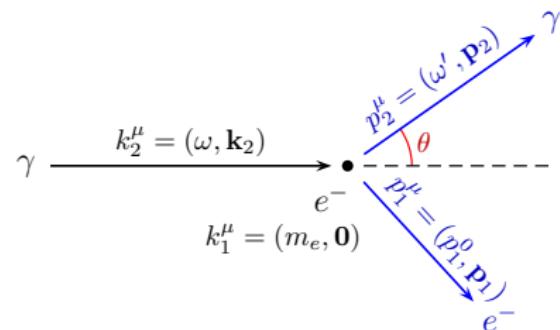
实验室参考系

 考虑实验室参考系，初态电子静止

 初态光子通过 Compton 散射将能动量传递给末态电子，如右图所示

 在自然单位制中， $\hbar = c = 1$ ，光子的能量  $E$  等于角频率  $\omega$ ，即  $E = \hbar\omega = \omega$ ，而波长  $\lambda$  与角频率的关系为  $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$

因此可用角频率  $\omega$  和  $\omega'$  分别表示初末态光子的能量





考虑实验室参考系，初态电子静止



给末态电子，如右图所示



 在自然单位制中， $\hbar = c = 1$ ，光子的能量  $E$  等于角频率  $\omega$ ，即  $E = \hbar\omega = \omega$ ，而波长  $\lambda$  与角频率的关系为  $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$



因此可用角频率  $\omega$  和  $\omega'$  分别表示初末态光子的能量



 初末态四维动量表示为

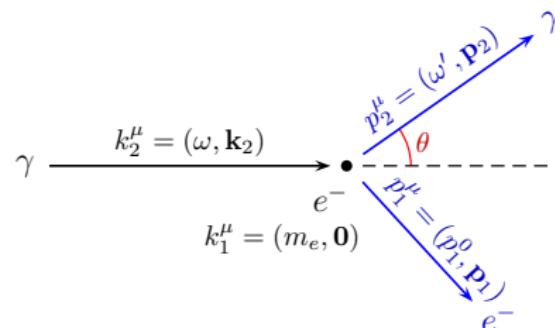
$$k_1^\mu = (m_e, \mathbf{0}), \quad k_2^\mu = (\omega, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu = (p_1^0, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (\omega', \mathbf{p}_2)$$



其中  $\omega = |\mathbf{k}_2|$ ,  $\omega' = |\mathbf{p}_2|$ , 利用质壳条件和能动量守恒推出

$$\begin{aligned} m_e^2 &= p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_2)^2 = k_1^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_2) - 2k_2 \cdot p_2 \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$$(p_1^0)^2 = m_e^2 + |\mathbf{p}_1|^2 = m_e^2 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2|^2 = m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta$$



实验室系运动学

于是得到  $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$  和  $p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}$

由  $\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \omega'}{\omega' \omega} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e}$  得到出射光子与入射光子的波长之差

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi \left( \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{2\pi}{m_e} (1 - \cos\theta)$$

 这就是 Arthur Compton 得到的关系式

实验室系运动学

于是得到  $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$  和  $p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}$

由  $\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \omega'}{\omega' \omega} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e}$  得到出射光子与入射光子的波长之差

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi \left( \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{2\pi}{m_e} (1 - \cos\theta)$$

 这就是 Arthur Compton 得到的关系式

用入射光子角频率  $\omega$  和散射角  $\theta$  将出射光子角频率表达成

$$\omega' = \left( \frac{1 - \cos \theta}{m_e} + \frac{1}{\omega} \right)^{-1} = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m_e}(1 - \cos \theta)}$$

再利用  $k_1 \cdot k_2 = m_e \omega$  和  $k_1 \cdot p_2 = m_e \omega'$ , 将非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m_e \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + m_e^2 \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2m_e \frac{1 - \cos \theta}{m_e} + m_e^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{m_e^2} \right] = 2e^4 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

### 末态相空间积分

对末态两体不变相空间积分，得

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\
&= \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^2 4p_1^0 p_2^0} \delta(m_e + \omega - \cancel{p_1^0} - \omega') \\
&= \int \frac{d\phi d\cos\theta d\omega' \omega'^2}{16\pi^2 \omega' p_1^0} \delta\left(m_e + \omega - \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} - \omega'\right) \\
&= \int \frac{d\cos\theta \omega'}{8\pi p_1^0} \left| \frac{\partial(\sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} + \omega')}{\partial\omega'} \right|^{-1} \\
&= \int \frac{d\cos\theta \omega'}{8\pi p_1^0} \left| \frac{2\omega' - 2\omega \cos\theta}{2p_1^0} + 1 \right|^{-1} = \int \frac{d\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{\omega' + \cancel{p_1^0} - \omega \cos\theta} \\
&= \int \frac{d\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{m_e + \omega(1 - \cos\theta)} = \int \frac{d\cos\theta}{8\pi} \frac{\omega'}{m_e + m_e(\omega - \omega')/\omega'} \\
&= \int d\cos\theta \frac{\omega'^2}{8\pi m_e \omega}
\end{aligned}$$

倒数第三步用到能量守恒关系  $p_1^0 + \omega' = m_e + \omega$

倒数第二步用到  $m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$

## Klein-Nishina 公式



散射截面表达为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{1}{4k_1^0 k_2^0 |\mathbf{k}_2| / k_2^0} \int d\cos\theta \frac{\omega'^2}{8\pi m_e \omega} \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \int d\cos\theta \frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2 \omega^2} \overline{|\mathcal{M}|^2}\end{aligned}$$



Oskar Benjamin Klein  
(1894–1977)



微分散射截面是

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d \cos \theta} &= \frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2 \omega^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4 \omega'^2}{32\pi m_e^2 \omega^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{\pi \alpha^2 \omega'^2}{m_e^2 \omega^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right)\end{aligned}$$



仁科芳雄 (Yoshio Nishina)  
(1890–1951)



上式称为 Klein-Nishina 公式，它是 Thomson 微分截面

$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2 \theta)$  的 QED 修正

非相对论近似

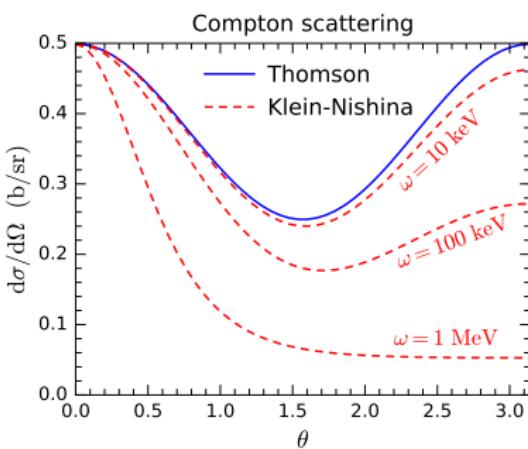
 在非相对论近似下，入射光子能量  $\omega \approx 0$ ，

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m_e}(1 - \cos\theta)} \simeq 1$$

从而得到

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2 \omega'^2}{m_e^2 \omega^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right)$$

$$\simeq \frac{\pi \alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2 \theta)$$



此时 Klein-Nishina 公式退化到 Thomson 微分截面公式

散射截面近似为 Thomson 散射截面

$$\sigma \simeq \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1 + \cos^2\theta) = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}$$

### 8.6.3 小节 高能行为和极化振幅

## 下面讨论 Compton 散射的高能极限

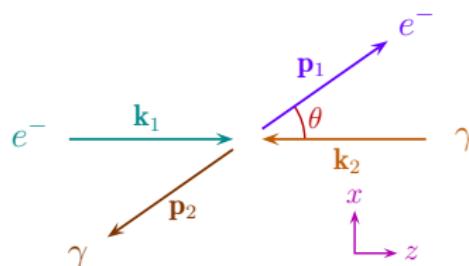
在质心系中，动量如右图所示

 散射角  $\theta$  定义为初末态电子动量  $k_1$  与  $p_1$  方向之间的夹角

 根据 6.5.3 小节知识，粒子能量为

$$k_1^0 = p_1^0 = \frac{s + m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv E_e$$

$$k_2^0 = p_2^0 = \frac{s - m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv \omega$$



 动量大小为  $|k_1| = |k_2| = |p_1| = |p_2| = \omega$

于是得到

$$k_1 \cdot k_2 = k_1^0 k_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \omega(E_e + \omega)$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \omega(E_e + \omega \cos \theta)$$

$$\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{E_e + \omega \cos \theta}{E_e + \omega}$$

高能极限

在高能极限下， $\sqrt{s} \gg m_e$ ，或者说， $\omega \gg m_e$ ，因而可以忽略电子质量，得到

$$E_e \simeq \omega \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}$$

利用上述  $\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{E_e + \omega \cos \theta}{E_e + \omega}$ ，将非极化振幅模方近似为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= 2e^4 \left[ \frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left( \frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left( \frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right] \\ &\simeq 2e^4 \left( \frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} \right) = 2e^4 \left( \frac{E_e + \omega \cos \theta}{E_e + \omega} + \frac{E_e + \omega}{E_e + \omega \cos \theta} \right) \\ &\simeq 4e^4 \left( \frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

对于向后散射， $\theta = \pi$ ，而  $\cos \theta = -1$ ，上式发散，奇性来自圆括号中的第二项

### 避免发散

 若要避免发散，则在奇性项分母处不能忽略  $m_e$

将  $E_e$  展开到  $m_e^2/\omega^2$  阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2 + \omega^2} = \omega \sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega \left( 1 + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$$

 奇性项分母化为  $E_e + \omega \cos \theta \simeq \omega \left( 1 + \cos \theta + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$

## 避免发散

 若要避免发散，则在奇性项分母处不能忽略  $m_e$

将  $E_e$  展开到  $m_e^2/\omega^2$  阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2 + \omega^2} = \omega \sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega \left( 1 + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$$

 奇性项分母化为  $E_e + \omega \cos \theta \simeq \omega \left( 1 + \cos \theta + \frac{m_e^2}{2\omega^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m_e^4}{\omega^4} \right)$

因此，不发散的表达式是

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \simeq 4e^4 \left[ \frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos \theta + m_e^2/(2\omega^2)} \right]$$

 微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} \simeq \frac{2\pi}{64\pi^2} \frac{1}{2\omega^2} \frac{\omega}{2\omega} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}|^2} \simeq \frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2} \left[ \frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{1 + \cos \theta + m_e^2/(2\omega^2)} \right]$$

当  $\omega \gg m_e$  时，微分截面虽然在  $\theta = \pi$  处没有发散，但数值非常大

### 极化振幅



接下来分析 Compton 散射的极化振幅



不变振幅按 Feynman 图分解为  $s$  和  $u$  通道贡献的两个部分,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$



将螺旋度依赖<sup>1</sup>明显写出来，两个通道的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = -\frac{e^2}{s-m^2} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e) \gamma^\nu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

$$\simeq -\frac{e^2}{4c_1^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{f}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) (\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{f}(\mathbf{k}_2, \lambda_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

$$\mathcal{M}_u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) = -\frac{e^2}{u - m_e^2} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_2 + m_e) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$

$$\simeq \frac{e^2}{4\omega^2 c_{\theta/2}^2} \bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{=} (\mathbf{k}_2, \lambda_2) (\not{k}_1 - \not{p}_2)^* \not{u}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$$



 第二步在高能极限下忽略电子质量，并利用了

$$s - m_e^2 = (k_1 + k_2)^2 - m_e^2 = 2 k_1 \cdot k_2 = 2\omega(E_e + \omega) \simeq 4\omega^2$$

$$u - m_e^2 = (k_1 - p_2)^2 - m_e^2 = -2 k_1 \cdot p_2 = -2\omega(E_e + \omega \cos \theta) \simeq -4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

奇性分析

容易看出,  $\theta = \pi$  处的奇性来自  $u$  通道振幅  $\mathcal{M}_u \propto (2c_{\theta/2}^2)^{-1}$

不过, 因子  $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1 + \cos \theta)^{-1}$  在模方  $|\mathcal{M}_u|^2$  中变成  $(1 + \cos \theta)^{-2}$

这样的奇性看起来强于非极化振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$  中  $\sim (1 + \cos \theta)^{-1}$  的奇性

通过下面的计算将看到奇性是如何减弱的

 容易看出， $\theta = \pi$  处的奇性来自  $u$  通道振幅  $\mathcal{M}_u \propto (2c_{\theta/2}^2)^{-1}$

不过, 因子  $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1 + \cos \theta)^{-1}$  在模方  $|\mathcal{M}_u|^2$  中变成  $(1 + \cos \theta)^{-2}$

这样的奇性看起来强于非极化振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$  中  $\sim (1 + \cos \theta)^{-1}$  的奇性

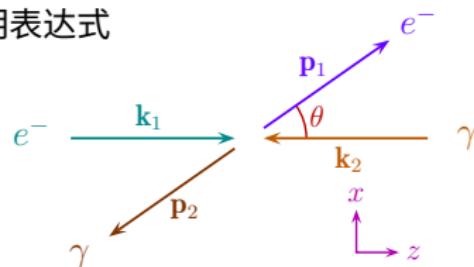
通过下面的计算将看到奇性是如何减弱的

为计算极化振幅，先导出振幅中各个因子的显明表达式

 在高能极限下，初末态电子四维动量近似为

$$k_1^\mu \simeq \omega(1, 0, 0, 1), \quad p_1^\mu \simeq \omega(1, s_\theta, 0, c_\theta)$$

 参照 8.2.4 小节，相应的螺旋态为



$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

### 电子的平面波旋量系数

根据 8.3 节, 高能极限下的平面波旋量系数为

$$u(\mathbf{k}_1, +) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{k}_1) \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{k}_1, -) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{k}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(\mathbf{p}_1, +) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}_1, -) \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $u(\mathbf{p}_1, \lambda'_1)$  的 Dirac 共轭是

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) &= u^\dagger(\mathbf{p}_1, +)\gamma^0 \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & \xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) & 0 \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{u}(\mathbf{p}_1, -) &\simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & \xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s_{\theta/2} & c_{\theta/2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 光子的极化矢量

另一方面，初末态光子的四维动量是

$$k_2^\mu = \omega(1, 0, 0, -1), \quad p_2^\mu = \omega(1, -s_\theta, 0, -c_\theta)$$

## 根据极化矢量表达式

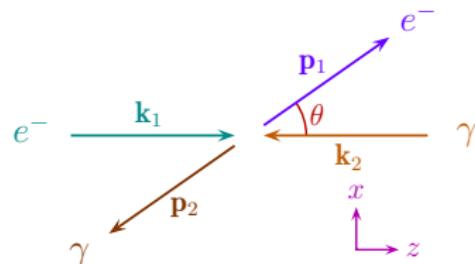
$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|}(0, p^1 p^3 - i p^2 |\mathbf{p}|, p^2 p^3 + i p^1 |\mathbf{p}|, -|\mathbf{p}_T|^2)$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_T|}(0, p^1 p^3 + i p^2 |\mathbf{p}|, p^2 p^3 - i p^1 |\mathbf{p}|, -|\mathbf{p}_T|^2)$$

求得末态光子极化矢量为

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, c_\theta, -i, -s_\theta)$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, c_\theta, i, -s_\theta)$$



令  $\theta = 0$ ，即得**初态光子极化矢量**

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)$$

初态极化矢量缩并



初态极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\not{e}(\mathbf{k}_2, +) = \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^1 - i\gamma^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sigma^1 + i\sigma^2 \\ \sigma^1 - i\sigma^2 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\not{f}(\mathbf{k}_2, -) = \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma^1 - i\gamma^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & -\sigma^1 - i\sigma^2 \\ \sigma^1 + i\sigma^2 & \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

末态极化矢量缩并

### 末态极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\not{g}^*(\mathbf{p}_2, +) = \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, +) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta \gamma^1 - i \gamma^2 + s_\theta \gamma^3)$$

$$= \sqrt{2} \begin{pmatrix} s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 \\ -s_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\not{g}^*(\mathbf{p}_2, -) = \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2, -) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta \gamma^1 + i \gamma^2 + s_\theta \gamma^3)$$

$$= \sqrt{2} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2} & s_{\theta/2}^2 \\ -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2} c_{\theta/2} \\ -s_{\theta/2} c_{\theta/2} & -s_{\theta/2}^2 \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2} c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

# s 通道极化振幅计算之一

第一步计算  $s$  通道极化振幅， $\mathcal{M}_s$  中的因子  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$  化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，当末态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献为零

（ $(k_1 + k_2)^\mu \simeq (2\omega, 0, 0, 0)$  与 Dirac 矩阵的缩并表达成

$$\not{k}_1 + \not{k}_2 = (k_1 + k_2)_\mu \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \simeq 2\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

乘到  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)$  后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} & -c_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{\theta/2} & s_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## s 通道极化振幅计算之二



$\mathcal{M}_s$  中最后两个因子  $\not{e}(\mathbf{k}_2, \lambda_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$  的表达式是

$$\not{e}(\mathbf{k}_2, +) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{e}(\mathbf{k}_2, +) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\not{e}(\mathbf{k}_2, -) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{e}(\mathbf{k}_2, -) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当初态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献也为零

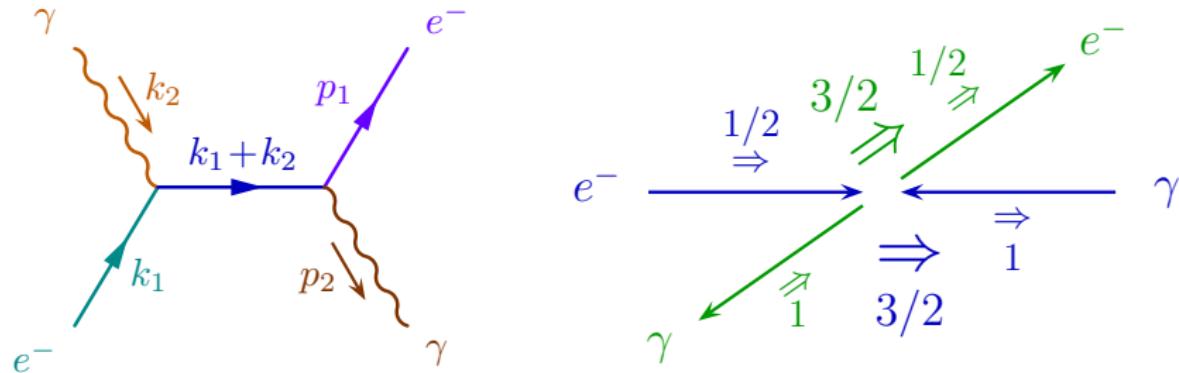
将这些因子乘起来，就得到  $\mathcal{M}_s$  的计算结果

# 零贡献原因

以上结果表明，无论是初态还是末态，只要电子与光子具有相反螺旋度，对  $s$  通道振幅的贡献就是零

这是因为螺旋度相反的电子和光子组成一个角动量为  $3/2$  的系统，而  $s$  通道电子传播子对应于一个自旋为  $1/2$  的类时虚粒子，违背角动量守恒

如果忽略电子质量，则会出现受到螺旋度压低的非零贡献



# *s* 通道极化振幅计算之三



$M_s$  的初末态平面波旋量系数之间夹着 3 个 Dirac 矩阵

由  $\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$  推断螺旋度相反的初末态电子在高能极限下没有贡献, 即  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0$ ,  $\lambda = \pm$

对于初末态电子螺旋度相同的情况, 高能极限下的非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

## s 通道极化振幅计算之三



$\mathcal{M}_s$  的初末态平面波旋量系数之间夹着 3 个 Dirac 矩阵

由  $\bar{u}(\mathbf{q}, -\lambda) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho u(\mathbf{p}, \lambda) \simeq 0$  推断螺旋度相反的初末态电子在高能极限下没有贡献, 即  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0$ ,  $\lambda = \pm$

对于初末态电子螺旋度相同的情况, 高能极限下的非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -)(\not{k}_1 + \not{k}_2) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}$$



相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(+, +, +, +) = \mathcal{M}_s(-, -, -, -) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

■ s 通道贡献只来自四个粒子全部右旋极化和全部左旋极化的螺旋度构型

这两种构型在宇称变换下相互转换

由于宇称守恒, 它们的振幅至多相差一个相位因子, 此处相位因子为 1

# $u$ 通道极化振幅计算之一

第二步计算  $u$  通道极化振幅,  $\mathcal{M}_u$  中因子  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not\propto (\mathbf{k}_2, \lambda_2)$  化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not\propto (\mathbf{k}_2, +) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not\propto (\mathbf{k}_2, -) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not\propto (\mathbf{k}_2, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} c_{\theta/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not\propto (\mathbf{k}_2, -) \simeq -2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 & s_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(k<sub>1</sub> - p<sub>2</sub>)<sup>μ</sup> ≈ ω(0, s<sub>θ</sub>, 0, 1 + c<sub>θ</sub>) = 2ω(0, s<sub>θ/2</sub>c<sub>θ/2</sub>, 0, c<sub>θ/2</sub><sup>2</sup>) 与 Dirac 矩阵的缩并是

$$k_1 - p_2 = (k_1 - p_2)_μ \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \simeq 2\omega \begin{pmatrix} & & & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 - c_{\theta/2}^2\sigma^3 \\ & & & s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1 + c_{\theta/2}^2\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$= 2\omega \begin{pmatrix} & -c_{\theta/2}^2 & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} \\ & -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & c_{\theta/2}^2 \\ c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & \\ s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -c_{\theta/2}^2 & \end{pmatrix}$$

## $u$ 通道极化振幅计算之二

将  $\not{k}_1 - \not{p}_2$  乘到  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda'_1) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$  后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{\theta/2}^2 c_{\theta/2} & -s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, -)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq 4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} -s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 & c_{\theta/2}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not{\epsilon}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \simeq -4\omega^{3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{\theta/2}^3 & s_{\theta/2} c_{\theta/2}^2 \end{pmatrix}$$

中最后两个因子  $\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, \lambda'_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$  的表达式是

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2} \\ s_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, +) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2} c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} s_{\theta/2} c_{\theta/2} \\ -c_{\theta/2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2, -) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq 2\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_{\theta/2}^2 \\ s_{\theta/2} c_{\theta/2} \end{pmatrix}$$

*u* 通道极化振幅计算之三

同样，螺旋度相反的初末态电子没有贡献，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -\lambda) \notin (\mathbf{k}_2, \lambda_2)(\mathbb{k}_1 - \mathbb{p}_2) \notin (\mathbf{p}_2, \lambda'_2) u(\mathbf{k}_1, \lambda) \simeq 0, \quad \lambda = \pm$$

对于初末态电子螺旋度相同的情况，高能极限下的非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not{f}(\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2) \not{f}^*(\mathbf{p}_2, +) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 \not{c}_{\theta/2}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not\in (\mathbf{k}_2, -)(\not k_1 - \not p_2) \not f^*(\mathbf{p}_2, -) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2 \not c_{\theta/2}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, +) \not\in (\mathbf{k}_2, -)(k_1 - p_2) \not\in (\mathbf{p}_2, -) u(\mathbf{k}_1, +) \simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, -) \not\in (\mathbf{k}_2, +)(\not{k}_1 - \not{p}_2)^* (\mathbf{p}_2, +) u(\mathbf{k}_1, -) \simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3$$

$$\mathcal{M}_u(+,+,-,+,-) = \mathcal{M}_u(-,-,-,-,-) \simeq -\frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}}$$

$$\mathcal{M}_u(+,-,+,-) = \mathcal{M}_u(-,+,-,+) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$

$\theta = \pi$  处的奇性来自全部粒子螺旋度相同的  $u$  通道振幅  $\mathcal{M}_u(\pm, \pm, \pm, \pm)$

  $\bar{u}(\mathbf{p}_1, \pm) \not\in (\mathbf{k}_2, \pm)(k_1 - p_2) \not\in {}^*(\mathbf{p}_2, \pm) u(\mathbf{k}_1, \pm)$  包含一个  $c_{\theta/2}$  因子

👉 将振幅中原本  $\sim c_{\theta/2}^{-2}$  的奇性减弱成  $\sim c_{\theta/2}^{-1}$  的奇性

# 非极化振幅模方



将  $s$  和  $u$  通道的贡献加起来,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$ , 得到**非零极化振幅**

$$\mathcal{M}(+, +, +, +) = \mathcal{M}(-, -, -, -) \simeq -2e^2 c_{\theta/2} - \frac{2e^2 s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}} = -\frac{2e^2}{c_{\theta/2}},$$

$$\mathcal{M}(+, -, +, -) = \mathcal{M}(-, +, -, +) \simeq -2e^2 c_{\theta/2}$$



于是, **非极化振幅模方**为

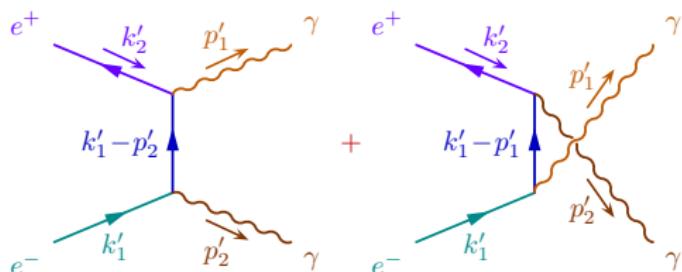
$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{1}{4} [2|\mathcal{M}(+, -, +, -)|^2 + 2|\mathcal{M}(+, +, +, +)|^2] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left( 4e^4 c_{\theta/2}^2 + \frac{4e^4}{c_{\theta/2}^2} \right) = 4e^4 \left( \frac{1 + c_\theta}{4} + \frac{1}{1 + c_\theta} \right) \end{aligned}$$



与前面通过**求迹运算**得到的表达式**一致**

#### 8.6.4 小节 正负电子湮灭到双光子

冰激凌 在 QED 领头阶，正负电子湮灭到双光子过程  $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$  的 Feynman 图如右上图所示



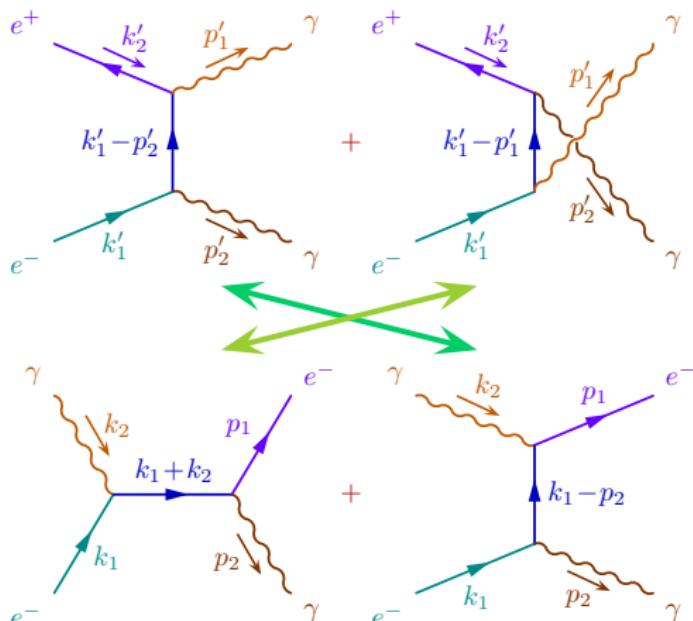
#### 8.6.4 小节 正负电子湮灭到双光子

在 QED 领头阶，正负电子湮灭到双光子过程  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  的 Feynman 图如右上图所示

它与 Compton 散射过程(右下图)具有交叉对称性

 设初态  $e^-$  和  $e^+$  的动量为  $k'_1$  和  $k'_2$ ，末态两个光子的动量为  $p'_1$  和  $p'_2$

将  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  交叉成  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$  时，需要把初态  $\gamma$  (动量为  $k_2$ ) 换成末态  $\gamma$  (动量为  $p'_1$ )，同时把末态  $e^-$  (动量为  $p_1$ ) 换成初态  $e^+$  (动量为  $k'_2$ )，



$$k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \rightarrow -k_2'^\mu, \quad p_2^\mu \rightarrow p_2'^\mu$$

非极化振幅模方

  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left[ \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2} + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2} + 2m_e^2 \left( \frac{1}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2} \right) + m_e^4 \left( \frac{1}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2} \right)^2 \right]$$

应用上面的替换规则  $k_1^\mu \rightarrow k_1'^\mu$ ,  $k_2^\mu \rightarrow -p_1'^\mu$ ,  $p_1^\mu \rightarrow -k_2'^\mu$ ,  $p_2^\mu \rightarrow p_2'^\mu$

**中** 由于只交叉一个费米子，需要移除一个整体负号

从而得到  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left[ \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} + 2m_e^2 \left( \frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} \right) - m_e^4 \left( \frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} + \frac{1}{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2} \right)^2 \right]$$

质心系中的微分散射截面

在质心系中，记  $k'_1$  与  $p'_1$  之间的夹角为  $\theta$ ， $\beta_e = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ ，则

$$k'_1 \cdot p'_1 = k'^0_1 p'^0_1 - |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 - \beta_e \cos \theta)$$

$$k'_1 \cdot p'_2 = k'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 + \beta_e \cos \theta)$$

$$\frac{\frac{k'_1 \cdot p'_2}{k'_1 \cdot p'_1} + \frac{k'_1 \cdot p'_1}{k'_1 \cdot p'_2}}{2} = \frac{1 + \beta_e \cos \theta}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1 - \beta_e \cos \theta}{1 + \beta_e \cos \theta} = \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{k'_1 \cdot p'_1} + \frac{1}{k'_1 \cdot p'_2} = \frac{4}{s} \left( \frac{1}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1}{1 + \beta_e \cos \theta} \right) = \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)}$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2 \alpha^2 \left[ \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + 2m_e^2 \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - m_e^4 \frac{64}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

## 质心系中的微分散射截面

在质心系中，记  $k'_1$  与  $p'_1$  之间的夹角为  $\theta$ ， $\beta_e = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ ，则

$$k'_1 \cdot p'_1 = k'^0_1 p'^0_1 - |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 - \beta_e \cos \theta)$$

$$k'_1 \cdot p'_2 = k'^0_1 p'^0_2 + |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{p}'_2| \cos \theta = \frac{s}{4} (1 + \beta_e \cos \theta)$$

$$\frac{k'_1 \cdot p'_2}{k'_1 \cdot p'_1} + \frac{k'_1 \cdot p'_1}{k'_1 \cdot p'_2} = \frac{1 + \beta_e \cos \theta}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1 - \beta_e \cos \theta}{1 + \beta_e \cos \theta} = \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{k'_1 \cdot p'_1} + \frac{1}{k'_1 \cdot p'_2} = \frac{4}{s} \left( \frac{1}{1 - \beta_e \cos \theta} + \frac{1}{1 + \beta_e \cos \theta} \right) = \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)}$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2 \alpha^2 \left[ \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + 2m_e^2 \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - m_e^4 \frac{64}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s \beta_e} = \frac{\alpha^2}{s \beta_e} \left[ \frac{1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + \frac{8m_e^2}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

对上式积分计算散射截面  $\sigma$  时，应当注意此过程的末态对称性因子  $S = 2$

# 与实验数据对比

1983 年, PETRA 对撞机上 **JADE 探测器** 测量了质心能  $\sqrt{s} = 14, 22, 34.6 \text{ GeV}$  的  $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$  微分散射截面, 数据如下图所示

将以上 QED 领头阶预言值用实线画在图上, 与实验数据基本吻合。

