

数学物理方法

第十一章 球函数

第 2 节 一般球函数

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2025 年 7 月 11 日



§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

 如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

 如果问题的边界条件并不具有轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况 $m = 0$ 以外，还需要研究 $m \neq 0$ 的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

 如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

 如果问题的边界条件并不具有轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况 $m = 0$ 以外，还需要研究 $m \neq 0$ 的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

 作变换 $P(x) = (1-x^2)^{m/2}y(x)$ ，代入连带 Legendre 方程

 由 $\frac{dP}{dx} = (1-x^2)^{m/2}y' - mx(1-x^2)^{m/2-1}y$ 推出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] &= \frac{d}{dx} [(1-x^2)^{m/2+1}y' - mx(1-x^2)^{m/2}y] \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}y'' - (m+2)x(1-x^2)^{m/2}y' - mx(1-x^2)^{m/2}y' \\ &\quad - m(1-x^2)^{m/2}y + m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y \end{aligned}$$

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

 如前所述，在球坐标下对 Laplace 方程分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

 如果问题的边界条件并不具有轴对称性，则除了上节讨论的特殊情况 $m = 0$ 以外，还需要研究 $m \neq 0$ 的情况，即连带 Legendre 方程的本征值问题

 作变换 $P(x) = (1-x^2)^{m/2}y(x)$ ，代入连带 Legendre 方程

 由 $\frac{dP}{dx} = (1-x^2)^{m/2}y' - mx(1-x^2)^{m/2-1}y$ 推出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] &= \frac{d}{dx} [(1-x^2)^{m/2+1}y' - mx(1-x^2)^{m/2}y] \\ &= -2(m+1)x(1-x^2)^{m/2}y' \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}y'' - (m+2)x(1-x^2)^{m/2}y' - mx(1-x^2)^{m/2}y' \\ &\quad - m(1-x^2)^{m/2}y + m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y \end{aligned}$$

$y(x)$ 满足的方程



因此，作变换 $P(x) = (1 - x^2)^{m/2}y(x)$ 之后，连带 Legendre 方程化为

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P \\
 &= (1 - x^2)^{m/2+1} y'' - 2(m+1)x(1 - x^2)^{m/2} y' - m(1 - x^2)^{m/2} y \\
 &\quad + m^2 x^2 (1 - x^2)^{m/2-1} y + \lambda(1 - x^2)^{m/2} y - m^2 (1 - x^2)^{m/2-1} y \\
 &= (1 - x^2)^{m/2} \left[(1 - x^2)y'' - 2(m+1)xy' - my - m^2 \frac{-x^2}{1 - x^2} y + \lambda y - m^2 \frac{1}{1 - x^2} y \right] \\
 &= (1 - x^2)^{m/2} \{(1 - x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y\}
 \end{aligned}$$



可见， $y(x)$ 满足的方程为

$$(1 - x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y = 0$$

对 Legendre 方程求导 m 次

 另一方面，将 Legendre 方程中的函数 $P(x)$ 写作 $f(x)$ ，得

$$0 = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \right] + \lambda f = (1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f$$

现在对它求导 m 次，注意到

$$(1-x^2)'' = (-2x)' = -2, \quad C_m^0 = 1, \quad C_m^1 = m, \quad C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$$

 由高阶导数的 Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned}
 [(1-x^2)f'']^{(m)} &= \sum_{k=0}^m C_m^k (1-x^2)^{(k)} f''^{(m-k)} \\
 &= C_m^0 (1-x^2) f''^{(m)} + C_m^1 (1-x^2)' f''^{(m-1)} + C_m^2 (1-x^2)'' f''^{(m-2)} \\
 &= (1-x^2) f^{(m)''} - 2mx f^{(m)'} - m(m-1) f^{(m)} \\
 (2xf')^{(m)} &= \sum_{k=0}^m C_m^k (2x)^{(k)} f'^{(m-k)} = C_m^0 \cdot 2x f'^{(m)} + C_m^1 (2x)' f'^{(m-1)} \\
 &= 2x f^{(m)'} + 2m f^{(m)}
 \end{aligned}$$

连带 Legendre 方程的解

 从而推出

$$\begin{aligned}0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\&= (1-x^2)f^{(m)''} - 2mx f^{(m)\prime} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)}\end{aligned}$$

 整理得 $(1 - x^2)f^{(m)''} - 2(m + 1)xf^{(m)'} + [\lambda - m(m + 1)]f^{(m)} = 0$

连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$\begin{aligned}0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\&= (1-x^2)f^{(m)''} - 2mx f^{(m)\prime} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)}\end{aligned}$$

整理得 $(1-x^2)f^{(m)''} - 2(m+1)xf^{(m)'} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$

 与 $(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$ 比较, 可知

$$y(x) = f^{(m)}(x)$$

也就是说，只要将 Legendre 方程的解 $f(x)$ 求导 m 次，就能够得到方程

$(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$ 的解 $y(x)$

连带 Legendre 方程的解

 从而推出

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)''} - 2mx f^{(m)\prime} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)} \end{aligned}$$

整理得 $(1-x^2)f^{(m)''} - 2(m+1)xf^{(m)'} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$

与 $(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$ 比较, 可知

$$y(x) = f^{(m)}(x)$$

也就是说，只要将 Legendre 方程的解 $f(x)$ 求导 m 次，就能够得到方程

($1 - x^2$) $y'' - 2(m + 1)xy' + [\lambda - m(m + 1)]y = 0$ 的解 $y(x)$

由于 $P(x) = (1 - x^2)^{m/2} y(x)$, 为了满足边界条件 $P(\pm 1) = 0$, $y(\pm 1)$ 应该有限

因此 $f(\pm 1)$ 也应该有限，这只有当 $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$) 时才有可能

相应的解为 Legendre 多项式, 即 $f(x) = P_l(x)$, 故 $P(x) = (1-x^2)^{m/2}P_l^{(m)}(x)$

连带 Legendre 方程本征值问题的本征值和本征函数

于是求得连带 Legendre 方程本征值问题的**本征值**

$$\lambda_l = l(l+1), \quad l = m, m+1, \dots$$

相应是**本征函数**是连带 Legendre 函数

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x), \quad l = m, m+1, \dots$$

对于连带 Legendre 方程的本征值问题来说, m 是事先给定的

它来源于 $\Phi(\phi)$ 的**本征值问题**

如果 $l < m$ 时, 则 $P_l^{(m)}(x) = 0$, 本征函数化为零

所以 l 的取值被 m 限制为 $l = m, m+1, \dots$

当 $m = 0$ 时, 连带 Legendre 函数退化为 Legendre 多项式, 即 $P_l^0(x) = P_l(x)$

与 $P_l^m(x)$ 线性独立的另一个解记作 $Q_l^m(x)$, 它在 $x = \pm 1$ 处有**奇性**

说明



文献中的连带 Legendre 函数有两种不同定义



上述 $P_l^m(x) \equiv (1 - x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$ 是 Ferrer 定义



另有一种 Hobson 定义 $P_l^m(x) \equiv (-)^m (1 - x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$



定义不同，有关公式（如递推关系）也会有所不同



因此读者在使用不同参考书时应该留意其所用定义

说明



文献中的连带 Legendre 函数有两种不同定义



上述 $P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$ 是 Ferrer 定义



另有一种 Hobson 定义 $P_l^m(x) \equiv (-)^m (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$



定义不同，有关公式（如递推关系）也会有所不同



因此读者在使用不同参考书时应该留意其所用定义



有些作者将连带 Legendre 函数称为“连带 Legendre 多项式”，这一名称并不恰当



当 m 不是偶数时， $P_l^m(x)$ 并不是 x 的多项式



如果令 $x = \cos \theta$ ，则 $(1-x^2)^{m/2} = \sin^m \theta$



$P_l^m(\cos \theta)$ 变成两个宗量 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的多项式，显然不是通常意义下的多项式

§2.2 连带 Legendre 函数的微分表示

由 Legendre 多项式的微分表示 $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$ 得

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right]$$

可见，连带 Legendre 函数的微分表示为

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$$

 这也称为 Rodrigues 公式

§2.3 函数 $P_l^{-m}(x)$

 按照 $P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$, $P_l^{-m}(x)$ 并没有意义

工 因为求导 $-m$ 次是没有意义的

然而，只要 $0 \leq m \leq l$ ，就能用微分表示 $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$

定义函数 $P_l^{-m}(x)$ ，即

$$P_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l$$

§2.3 函数 $P_l^{-m}(x)$

 按照 $P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$, $P_l^{-m}(x)$ 并没有意义

工 因为求导 $-m$ 次是没有意义的

然而，只要 $0 \leq m \leq l$ ，就能用微分表示 $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$

定义函数 $P_l^{-m}(x)$ ，即

$$P_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l$$

由于 m 在连带 Legendre 方程中只以 m^2 形式出现，方程对于 $m \rightarrow -m$ 的替换是不变的，所以有理由推测，这样定义的 $P_l^{-m}(x)$ 也是连带 Legendre 方程的解

 根据 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论，只要不涉及周期性边界条件，一个本征值只对应于一个线性独立的本征函数

从而进一步推测, $P_l^{-m}(x)$ 与 $P_l^m(x)$ 实质上应该相同, 即最多相差一个常数因子

P_l^{-m}(x) 与 P_l^m(x) 的关系

 事实上，可以证明

$$P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

 对 $m > 0$ 证明上式 (见选读内容) 之后, 由 $|m| = m$ 推出

$$P_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!} P_l^{|m|}(x), \quad P_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} P_l^{-|m|}(x)$$

P_l^{-m}(x) 与 P_l^m(x) 的关系

 事实上，可以证明

$$P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

 对 $m > 0$ 证明上式 (见选读内容) 之后, 由 $|m| = m$ 推出

$$P_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!} P_l^{|m|}(x), \quad P_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} P_l^{-|m|}(x)$$

对于 $m < 0$ ，则 $|m| = -m$ ，就可以得到

$$P_l^{-m}(x) = P_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} P_l^{-|m|}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

 可见, $P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$ 对于 $m > 0$ 和 $m < 0$ 两种情况都成立

 如果对 $P_l^m(x)$ 中 m 的正负不作限制，则 $l \geq |m|$

§2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, 相同 m 不同 l 的连带 Legendre 函数在区间 $[-1, 1]$ 上有正交关系

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的模 (推导过程见选读内容) 为

$$\|P_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

上式对 $m > 0$ 和 $m < 0$ 均成立, $m = 0$ 时退化为 $\|P_l^0\| = \|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

§2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, 相同 m 不同 l 的连带 Legendre 函数在区间 $[-1, 1]$ 上有正交关系

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0, \quad l \neq l'$$

 连带 Legendre 函数的模 (推导过程见选读内容) 为

$$\|P_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

 上式对 $m > 0$ 和 $m < 0$ 均成立, $m = 0$ 时退化为 $\|P_l^0\| = \|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

 以上两式可以统一写为 $\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \|P_l^m\|^2 \delta_{ll'}$

 等价地, 有 $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \|P_l^m\|^2 \delta_{ll'}$

§2.6 广义 Fourier 级数

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，连带 Legendre 函数在区间 $[-1, 1]$ 上是完备的

为确定起见，本小节讨论只取 $m > 0$

于是，区间 $[-1, 1]$ 上任意一个解析良好的函数 $f(x)$ 必定可以用 $\{\mathbf{P}_l^m(x)\}_{l=m}^{\infty}$ 展开为广义 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l \mathbf{P}_l^m(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

利用 $\int_{-1}^1 \mathbf{P}_l^m(x) \mathbf{P}_{l'}^m(x) dx = \|\mathbf{P}_l^m\|^2 \delta_{ll'}$ ，求得展开系数为

$$f_l = \frac{1}{\|\mathbf{P}_l^m\|^2} \int_{-1}^1 f(x) \mathbf{P}_l^m(x) dx, \quad l = m, m+1, \dots$$

§2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出

例如，对递推关系一 $(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$ 求导 m 次

利用 $[xP_l(x)]^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k x^{(k)} P_l^{(m-k)}(x) = xP_l^{(m)}(x) + mP_l^{(m-1)}(x)$ ，推出

$$(2l + 1)xP_l^{(m)}(x) + m(2l + 1)P_l^{(m-1)}(x) = (l + 1)P_{l+1}^{(m)}(x) + lP_{l-1}^{(m)}(x)$$

§2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

 连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出

例如，对递推关系— $(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$ 求导 m 次

 利用 $[xP_l(x)]^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k x^{(k)} P_l^{(m-k)}(x) = xP_l^{(m)}(x) + mP_l^{(m-1)}(x)$, 推出

$$(2l+1)xP_l^{(m)}(x) + m(2l+1)P_l^{(m-1)}(x) = (l+1)P_{l+1}^{(m)}(x) + lP_{l-1}^{(m)}(x)$$

 对递推关系三 $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$ 求导 $m-1$ 次，得

$$(2l+1)P_l^{(m-1)}(x) = P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x)$$

联立消去 $P_l^{(m-1)}(x)$, 有

$$(2l+1)xP_l^{(m)}(x) + m[P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x)] = (l+1)P_{l+1}^{(m)}(x) + lP_{l-1}^{(m)}(x)$$

两边同乘以 $(1 - x^2)^{m/2}$ ，整理得到连带 Legendre 函数的递推关系

$$(l-m+1)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)xP_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0$$

§2.8 球谐函数

在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量 $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$

那么，角向部分 $Y(\theta, \phi)$ 满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

由于球坐标系的特点，函数 $Y(\theta, \phi)$ 应该满足以下两个**自然边界条件**

$Y(0, \phi)$ 和 $Y(\pi, \phi)$ 没有奇性, $Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi)$

这里没有奇性指具有确切的定义，并且是有限的

上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题

§2.8 球谐函数

在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量 $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$

那么，角向部分 $Y(\theta, \phi)$ 满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

由于球坐标系的特点，函数 $Y(\theta, \phi)$ 应该满足以下两个**自然边界条件**

$Y(0, \phi)$ 和 $Y(\pi, \phi)$ 没有奇性, $Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi)$

这里没有奇性指具有确切的定义，并且是有限的

上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题

进一步作分离变量 $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$

已经求得 $\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}$ ($m \in \mathbb{N}$)，相应的**本征值** m^2 进入 $H(\theta)$ 的方程

对于确定的 m , $H(\theta) = P_l^m(\cos \theta)$, 本征值为 $\lambda_l = l(l+1)$, $l = m, m+1, \dots$

球谐函数

对于一个确定的本征值 $\lambda_l = l(l+1)$, 上述偏微分方程本征值问题有下列本征函数

$$P_l^m(\cos\theta)\{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, l$$

或者表达成

$$P_l^{(m)}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

球谐函数

对于一个确定本征值 $\lambda_l = l(l+1)$ ，上述偏微分方程本征值问题有下列本征函数

$$P_l^m(\cos \theta) \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, l$$

或者表达成

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

由于 $P_l^{-m}(x)$ 与 $P_l^m(x)$ 只相差一个常数因子，以上本征函数又等价于

$$S_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

这些本征函数称为球谐函数 (spherical harmonics)

可见，对应于一个本征值 λ_l ，本征函数是 $2l+1$ 个线性独立的球谐函数

故本征值 λ_l 的简并度为 $2l+1$

 l 称为球谐函数的阶

归一化球谐函数

物理上更常用的是归一化的球谐函数

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^m \frac{P_l^m(\cos \theta)}{\|P_l^m\|} \frac{e^{im\phi}}{\|e^{im\phi}\|} = (-)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$l \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

 归一化因子 $\|P_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}$ 是函数 $P_l^m(\cos \theta)$ 的模

 归一化因子 $\|e^{im\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |e^{im\phi}|^2 d\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi} d\phi} = \sqrt{2\pi}$ 是函数 $e^{im\phi}$ 的模

归一化球谐函数

 物理上更常用的是**归一化的球谐函数**

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^m \frac{P_l^m(\cos \theta)}{\|P_l^m\|} \frac{e^{im\phi}}{\|e^{im\phi}\|} = (-)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$l \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

 归一化因子 $\|P_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}$ 是函数 $P_l^m(\cos \theta)$ 的模

 归一化因子 $\|e^{im\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |e^{im\phi}|^2 d\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi} d\phi} = \sqrt{2\pi}$ 是函数 $e^{im\phi}$ 的模

 归一化以后相位因子还可以**任取**，相位因子 $(-)^m$ 的取法是历史上沿袭下来的

 球谐函数有**不同的定义**，主要就在于相位因子的取法不同

 定义不同，有关的公式也会有所不同，在使用时应该加以留意

$l = 0, 1, 2$ 的球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$

当 $l = 0$ 且 $m = 0$ 的球谐函数为

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

 $l = 1$ 且 $m = 0, \pm 1$ 的球谐函数为

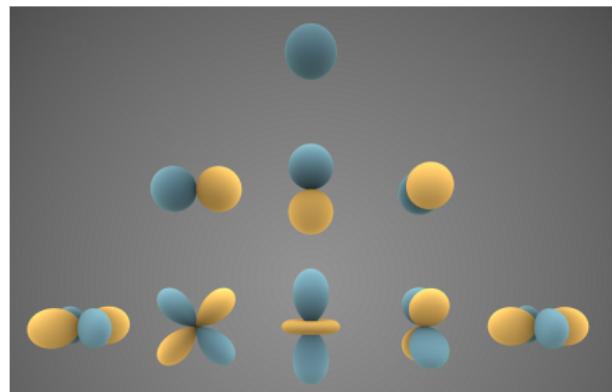
$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

 $l = 2$ 且 $m = 0, \pm 1, \pm 2$ 的球谐函数为

$$Y_{2,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$



球谐函数图像

$ l $		$P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$	$P_\ell^{ m }(\cos \theta) \sin(m \varphi)$	
0	s			
1	p			
2	d			
3	f			
4	g			
5	h			
6	i			
	$m:$	6 5 4 3 2 1 0	-1 -2 -3 -4 -5 -6	

球面上的广义 Fourier 级数

 根据 $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \|P_l^m\|^2 \delta_{ll'}$ 和 $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$

 容易得到归一化球谐函数在单位球面上的正交归一关系

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

球面上的广义 Fourier 级数

 根据 $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \|P_l^m(\cos \theta)\|^2 \delta_{ll'}$ 和 $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$

 容易得到归一化球谐函数在单位球面上的正交归一关系

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

 由于 $\{e^{im\phi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ 在 $\phi \in [0, 2\pi]$ 上完备, $\{P_l^m(\cos \theta)\}_{l=|m|}^{\infty}$ 在 $\theta \in [0, \pi]$ 上完备

 球谐函数在球面上是完备的, 球面上任意解析良好的函数 $f(\theta, \phi)$ 一定可以展开为

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

 根据正交归一关系, 展开系数为

$$f_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

球坐标系下 Laplace 方程的一般解

 在球坐标下讨论 Laplace 方程 $\nabla^2 u(r) = 0$, 本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \textcolor{blue}{\lambda} Y = 0 \\ Y(0, \phi) \text{ 和 } Y(\pi, \phi) \text{ 没有奇性, } \quad Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi) \end{cases}$$

的本征值 $\lambda = l(l+1)$ 与 m 无关

因此，径向方程 $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ 的解仍然是 $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，球坐标系下 Laplace 方程的一般解为

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

球坐标系下 Laplace 方程的一般解

在球坐标下讨论 Laplace 方程 $\nabla^2 u(r) = 0$, 本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \textcolor{blue}{\lambda} Y = 0 \\ Y(0, \phi) \text{ 和 } Y(\pi, \phi) \text{ 没有奇性, } \quad Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi) \end{cases}$$

的本征值 $\lambda = l(l+1)$ 与 m 无关

因此，径向方程 $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ 的解仍然是 $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，球坐标系下 Laplace 方程的一般解为

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

 本征函数族 $\{\cos m\phi, \sin m\phi\}_{m=0}^{\infty}$ 与 $\{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}_{m=0}^{\infty}$ 等价, 一般解也可以写成

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[r^l (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) + \frac{1}{r^{l+1}} (C_{lm} \cos m\phi + D_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta)$$

宇宙微波背景

$t \sim 380\,000 \text{ yr}$, $T \sim 3000 \text{ K}$

电子 + 原子核 \rightarrow 原子
光子退耦



冷却到今天

2.7 K 宇宙微波背景

宇宙微波背景

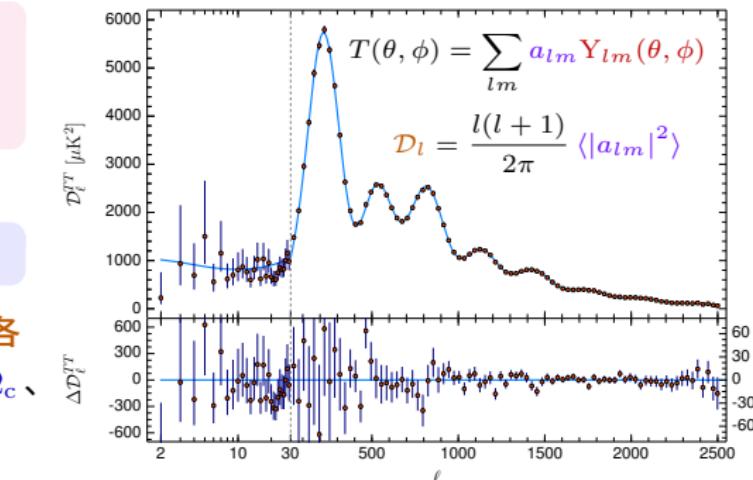
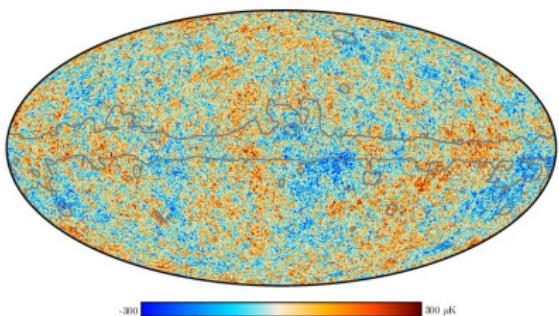
$t \sim 380\,000 \text{ yr}, T \sim 3000 \text{ K}$

电子 + 原子核 \rightarrow 原子
光子退耦



2.7 K 宇宙微波背景

利用球谐函数计算宇宙微波背景各向异性功率谱，确定冷暗物质比例 Ω_c 、重子物质比例 Ω_b 和暗能量比例 Ω_Λ



Planck 2018
[1807.06205, 1807.06209]

冷暗物质 (26.5%)
 $\Omega_c h^2 = 0.1200 \pm 0.0012$

重子物质 (4.9%)
 $\Omega_b h^2 = 0.02237 \pm 0.00015$

暗能量 (68.6%)
 $\Omega_\Lambda = 0.6847 \pm 0.0073$