

数学物理方法补充讲义

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzy.github.io/cn/teaching.html>

2022 年 11 月 20 日

目 录

1	$X'' + \lambda X = 0$ 本征值问题	2
2	Fourier 变换例题	4
3	球坐标系和柱坐标系示意图	6
4	Legendre 多项式函数图像	7
5	连带 Legendre 函数的应用	8
6	柱函数图像	10

1 $X'' + \lambda X = 0$ 本征值问题

考虑常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.1)$$

其中 λ 为常数, 分别结合下面几种边界条件组成本征值问题。

(1) 结合边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X(l) = 0$ 时, 本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.2)$$

本征函数图象如图 1(a) 所示。

(2) 结合边界条件 $X'(0) = 0$ 和 $X'(l) = 0$ 时, 本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

本征函数图象如图 1(b) 所示。

(3) 结合边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X'(l) = 0$ 时, 本征值和本征函数为

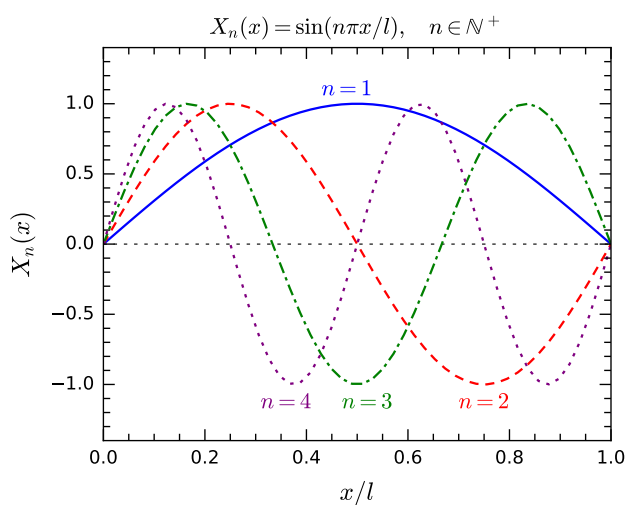
$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.4)$$

本征函数图象如图 2(a) 所示。

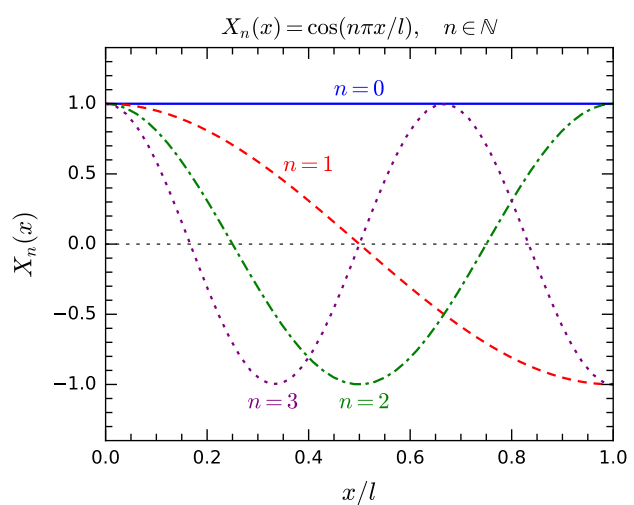
(4) 结合边界条件 $X'(0) = 0$ 和 $X(l) = 0$ 时, 设 $\lambda > 0$ 对应的解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$, 其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$, 则 $X'(x) = -C\mu \sin \mu x + D\mu \cos \mu x$, 而

$$X'(0) = 0 \Rightarrow D = 0, \quad (1.5)$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow \cos \mu l = 0 \Rightarrow \mu = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1.6)$$



(a) 本征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$



(b) 本征函数 $X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$

图 1: 本征函数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ 和 $X_n(x) = \cos(n\pi x/l)$ 的图像。

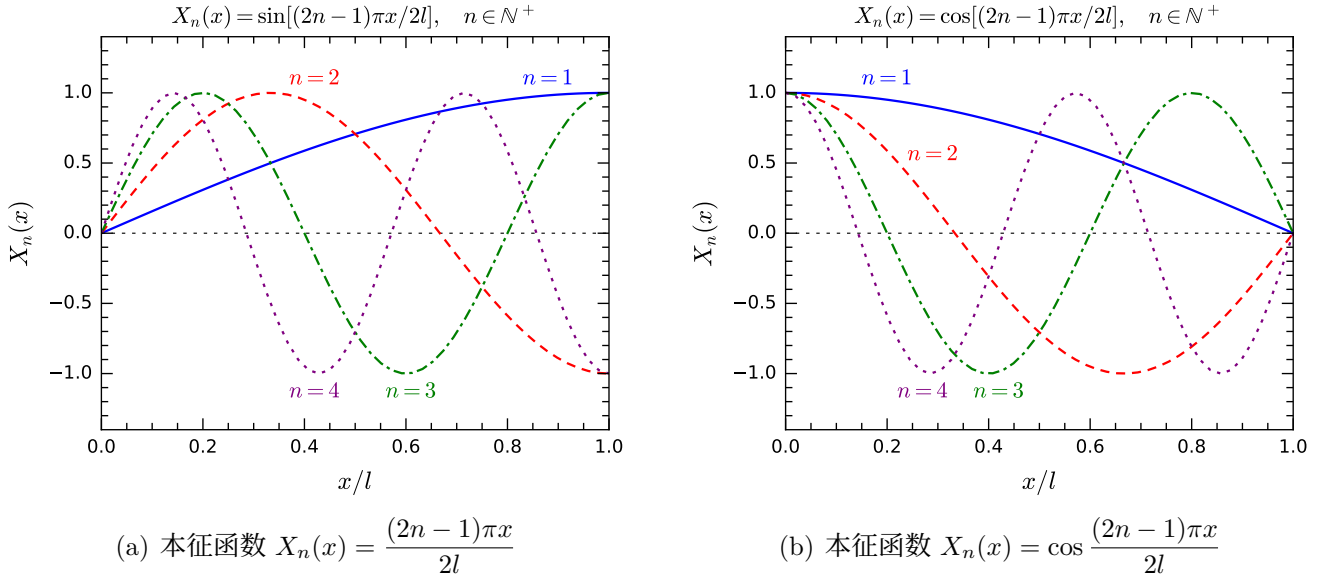


图 2: 本征函数 $X_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2l]$ 和 $X_n(x) = \cos[(2n-1)\pi x/2l]$ 的图像。

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.7)$$

本征函数图象如图 2(b) 所示。

(5) 结合边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X(l) + hX'(l) = 0$ 时, 设 $\lambda > 0$ 对应的解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$, 其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$, 则

$$X(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad (1.8)$$

$$X(l) + hX'(l) = 0 \Rightarrow D \sin \mu l + Dh\mu \cos \mu l = 0 \Rightarrow \tan \mu l = -\mu h, \quad (1.9)$$

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1.10)$$

其中 μ_n ($n \in \mathbb{N}^+$) 是超越方程 $\tan \mu l = -\mu h$ 的正根, 满足 $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ 。当 $l = h = 1$ 时, 图 3(a) 展示了方程 $\tan \mu l = -\mu h$ 的根 μ_n , 相应本征函数 $X_n(x)$ 的图象如图 3(b) 所示。

(6) 结合边界条件 $X'(0) = 0$ 和 $X(l) + hX'(l) = 0$ 时, 设 $\lambda > 0$ 对应的解为 $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$, 其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$, 则

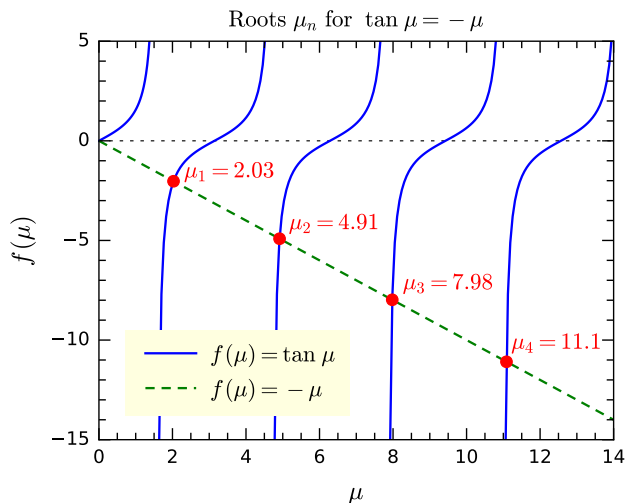
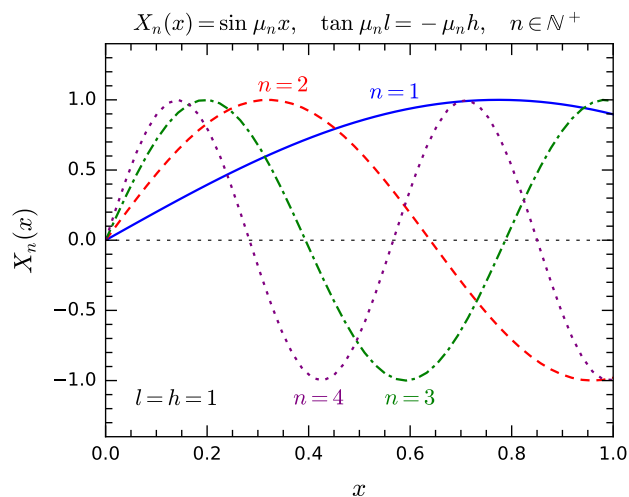
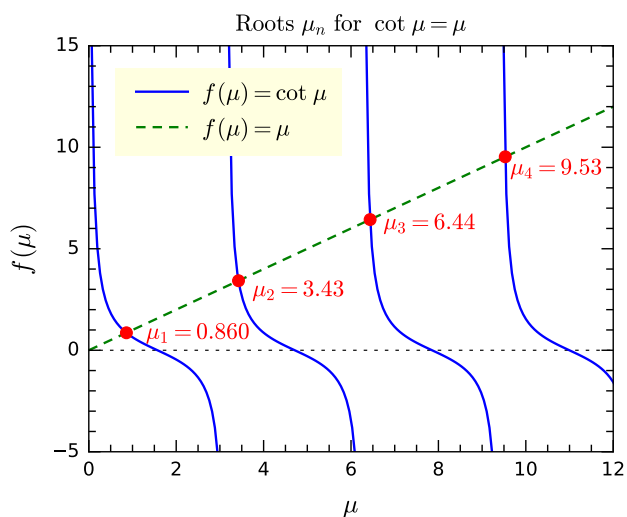
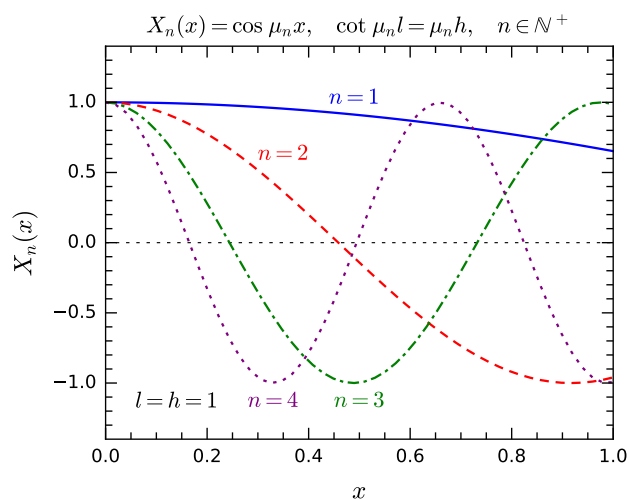
$$X'(0) = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (1.11)$$

$$X(l) + hX'(l) = 0 \Rightarrow C \cos \mu l - Ch\mu \sin \mu l = 0 \Rightarrow \cot \mu l = \mu h \quad (1.12)$$

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1.13)$$

其中 μ_n ($n \in \mathbb{N}^+$) 是超越方程 $\cot \mu l = \mu h$ 的正根, 满足 $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ 。当 $l = h = 1$ 时, 图 4(a) 展示了方程 $\cot \mu l = \mu h$ 的根 μ_n , 相应本征函数 $X_n(x)$ 的图象如图 4(b) 所示。

(a) $\tan \mu = -\mu$ 的根 μ_n (b) 本征函数 $X_n(x) = \sin \mu_n x$ 图 3: 方程 $\tan \mu = -\mu$ 的根 μ_n 和 $l = h = 1$ 时本征函数 $X_n(x) = \sin \mu_n x$ 的图像。(a) $\cot \mu = \mu$ 的根 μ_n (b) 本征函数 $X_n(x) = \cos \mu_n x$ 图 4: 方程 $\tan \mu = -\mu$ 的根 μ_n 和 $l = h = 1$ 时本征函数 $X_n(x) = \cos \mu_n x$ 的图像。

2 Fourier 变换例题

例 1 计算矩形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

的 Fourier 变换 $F(k)$ 。

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}. \quad (2.2)$$

原函数和像函数的图像见图 5。

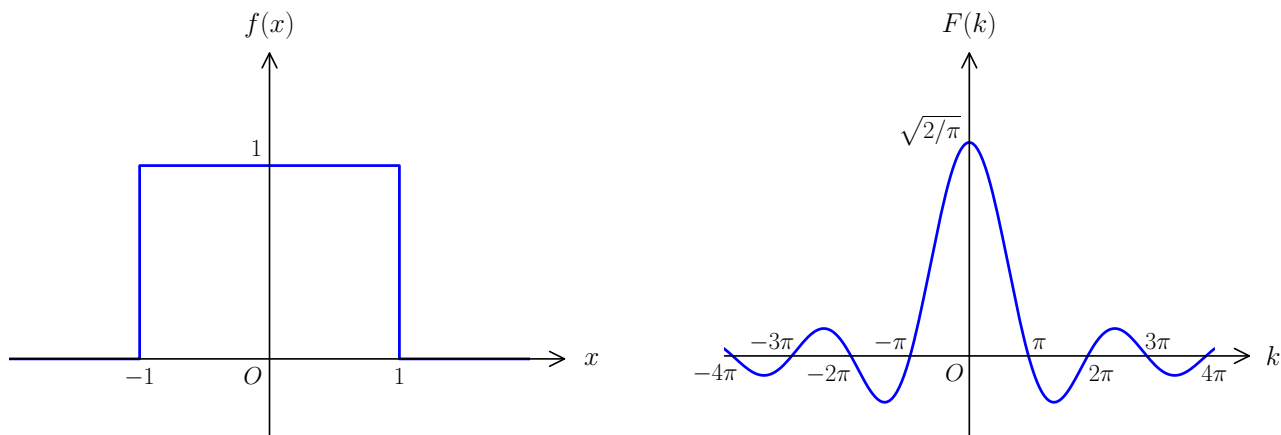


图 5: 矩形函数 $f(x)$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$ 。

例 2 计算三角形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

的 Fourier 变换 $F(k)$ 。

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1 - |x|)(\cos kx + i \sin kx) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - x) \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^1 (1 - x) d \sin kx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \left[(1 - x) \sin kx \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin kx dx \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} (1 - \cos k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

原函数和像函数的图像见图 6。

例 3 计算函数 $f(x) = e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换 $F(k)$, 其中 $a > 0$ 。

解 Fourier 变换

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I. \quad (2.5)$$

这里, 积分

$$I \equiv \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = -\frac{1}{a} \int_0^{\infty} \cos kx de^{-ax} = -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos kx \Big|_0^{\infty} - \frac{k}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin kx dx$$

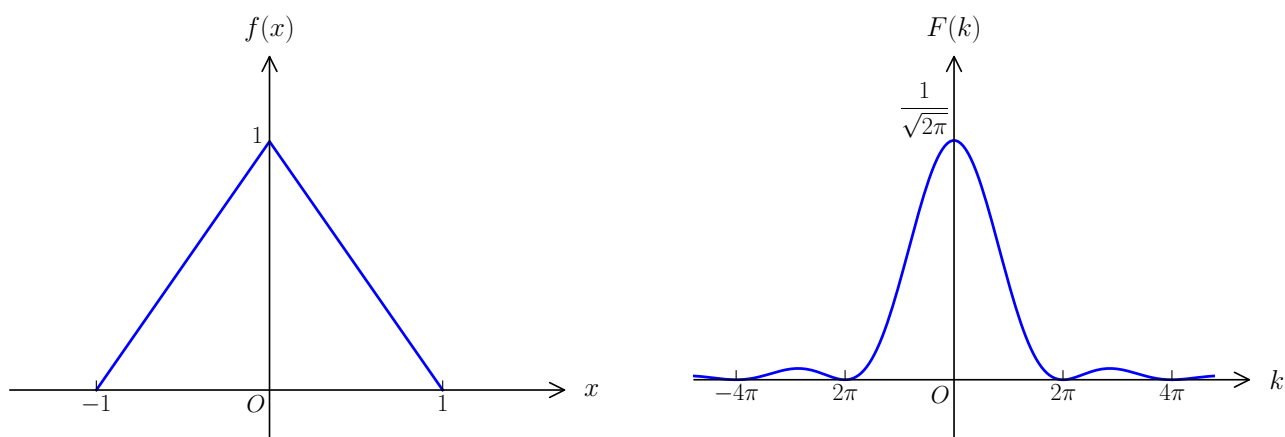


图 6: 三角形函数 $f(x)$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$ 。

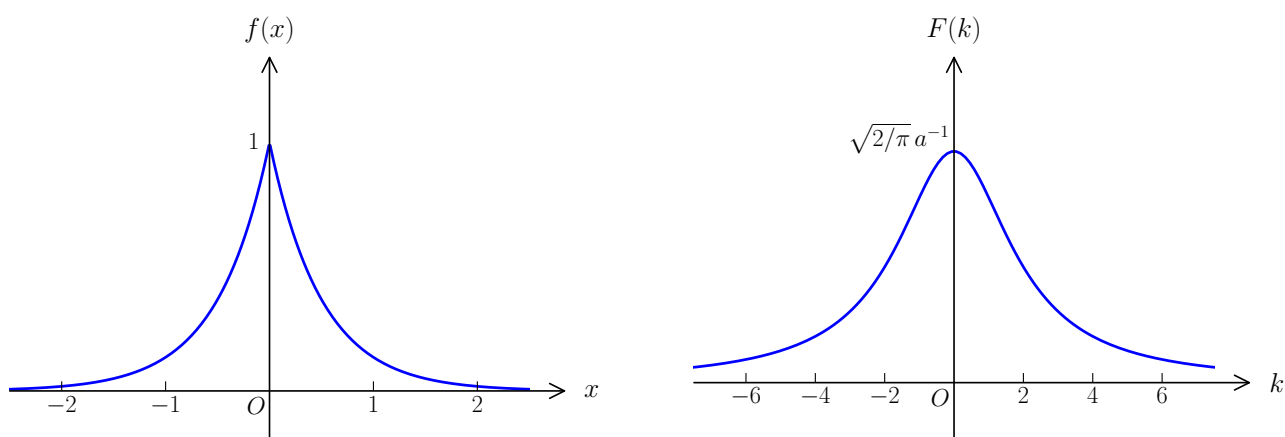


图 7: $a = 2$ 时的函数 $f(x) = e^{-a|x|}$ 和它的 Fourier 变换 $F(k)$ 。

$$= \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} \int_0^\infty \sin kx \, de^{-ax} = \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} e^{-ax} \sin kx \Big|_0^\infty - \frac{k^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \cos kx \, dx = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2} I, \quad (2.6)$$

故

$$I = \frac{a}{a^2 + k^2}. \quad (2.7)$$

从而得到

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}. \quad (2.8)$$

原函数和像函数的图像见图 7。

3 球坐标系和柱坐标系示意图

球坐标系 (r, θ, ϕ) 的定义如图 8(a) 所示, 图中还标出相互正交的单位矢量 e_r 、 e_θ 和 e_ϕ 。球坐标系的三族坐标线处处相互正交, 如图 8(b) 所示。

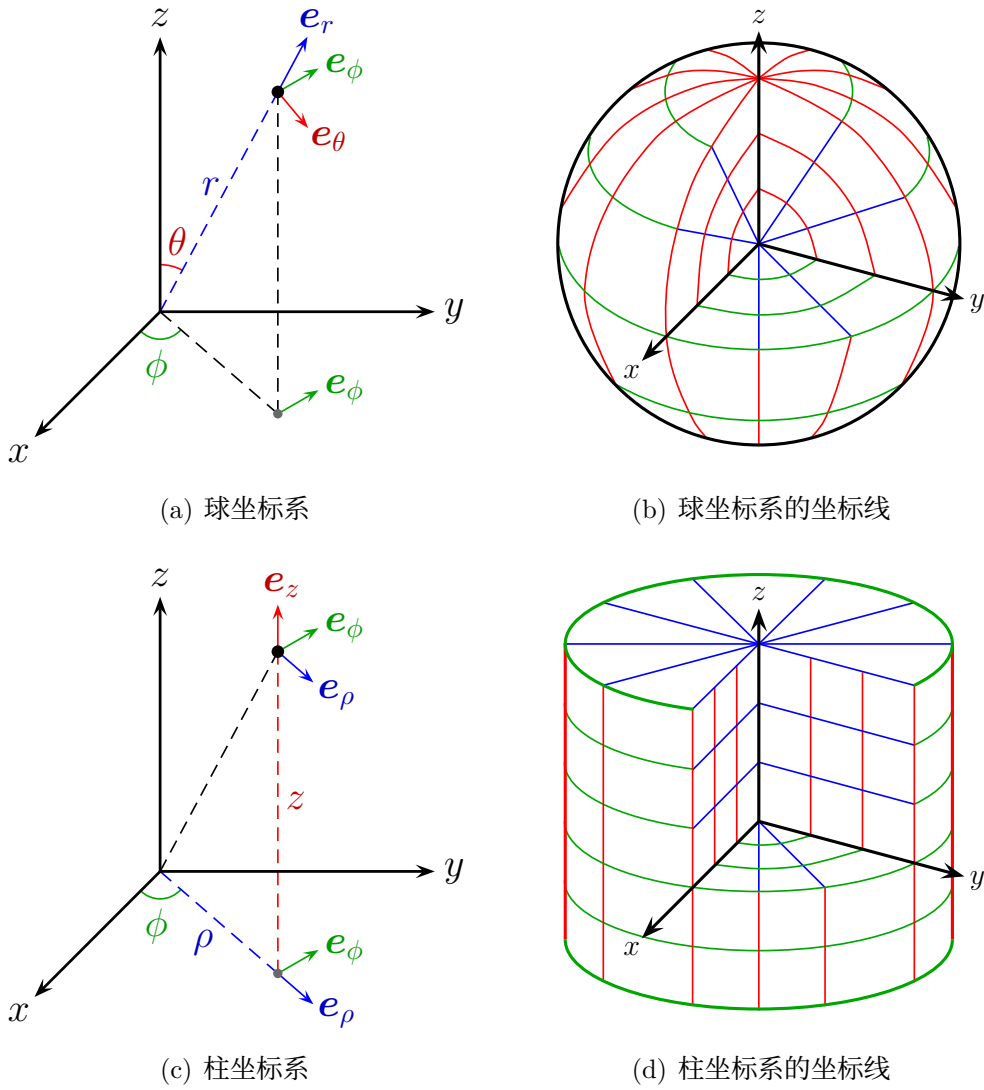


图 8: 球坐标系和柱坐标系示意图。

柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 的定义如图 8(c) 所示，图中还标出相互正交的单位矢量 e_ρ 、 e_ϕ 和 e_z 。柱坐标系的三族坐标线处处相互正交，如图 8(d) 所示。

4 Legendre 多项式函数图像

头五个 Legendre 多项式的具体形式为

$$P_0(x) = 1, \quad (4.1)$$

$$P_1(x) = x, \quad (4.2)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.3)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad (4.4)$$

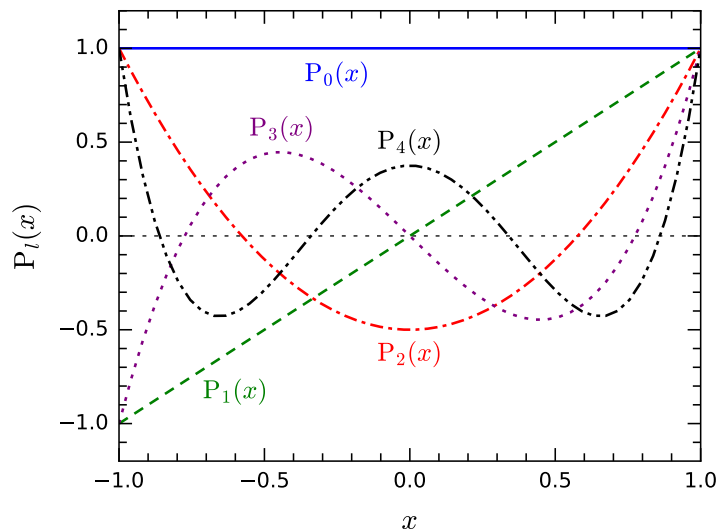


图 9: Legendre 多项式 $P_l(x)$ ($l = 0, 1, 2, 3, 4$) 的函数图像。

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \quad (4.5)$$

它们的函数图像如图 9 所示。

5 连带 Legendre 函数的应用

在球坐标系下对 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1)$$

分离变量, 寻找形如

$$u(\mathbf{r}) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi) \quad (5.2)$$

的解。考虑到关于 ϕ 的周期性边界条件, 可得

$$\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

或者,

$$\Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

令 $\cos \theta = x$, $H(\theta) = P(x)$, 考虑到 $\theta = 0, \pi$ 处的自然边界条件, $P(x)$ 应该满足本征值问题

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0, \quad (5.5)$$

$$P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0). \quad (5.6)$$

$m = 0$ 时对应于 Legendre 方程的本征值问题, $m \neq 0$ 时对应于连带 Legendre 方程的本征值问题。两种情况的本征值和本征函数可以统一写作

$$\lambda_l = l(l+1), \quad P(x) = \{P_l^m(x)\}, \quad l = m, m+1, \dots \quad (5.7)$$

这里 $P_l^m(x)$ 是连带 Legendre 函数。将本征值代回径向方程

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \lambda_l R(r) = 0, \quad (5.8)$$

可以解出

$$R(r) = \{r^l, r^{-(l+1)}\}. \quad (5.9)$$

因此，一般解为

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[r^l (A_{lm} e^{im\phi} + B_{lm} e^{-im\phi}) + \frac{1}{r^{l+1}} (C_{lm} e^{im\phi} + D_{lm} e^{-im\phi}) \right] P_l^m(\cos \theta), \quad (5.10)$$

也可以写成

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[r^l (\tilde{A}_{lm} \cos m\phi + \tilde{B}_{lm} \sin m\phi) + \frac{1}{r^{l+1}} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta). \quad (5.11)$$

例 已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $u_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi$ ，球内外无电荷，电势零点取在无穷远处，求空间各处的电势。

由于球内外无电荷，故电势在球内外均满足 Laplace 方程，定解问题为

$$\nabla^2 u = 0 \quad (r < a, r > a), \quad (5.12)$$

$$u|_{r=a} = u_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi, \quad u|_{r=\infty} = 0. \quad (5.13)$$

由 $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ 可得 $P_2''(x) = (3x)' = 3$ ，因而

$$P_2^2(x) = (1 - x^2)P_2''(x) = 3(1 - x^2), \quad P_2^2(\cos \theta) = 3(1 - \cos^2 \theta) = 3 \sin^2 \theta. \quad (5.14)$$

因此， $r = a$ 处的边界条件可以改写为

$$u|_{r=a} = u_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi = \frac{u_0}{6} 3 \sin^2 \theta \sin 2\phi = \frac{u_0}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.15)$$

首先，求解球内 ($r < a$) 的电势，为了计算方便，将一般解写作

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^l (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) + \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} (C_{lm} \cos m\phi + D_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta). \quad (5.16)$$

由于球内没有电荷，球心 ($r = 0$) 处电势应该有限，故对所有 l 和 m 均有 $C_{lm} = D_{lm} = 0$ 。从而，球内的解应为

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^l (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta). \quad (5.17)$$

代入 $r = a$ 处的边界条件, 得

$$u_1(a, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta) = \frac{u_0}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.18)$$

可见, 非零系数只有

$$B_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \quad (5.19)$$

其它系数均为零。于是得到球内的解为

$$u_1(r, \theta, \phi) = \frac{u_0}{6} \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.20)$$

其次, 求解球外 ($r > a$) 的电势, 将一般解写作

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^l (\tilde{A}_{lm} \cos m\phi + \tilde{B}_{lm} \sin m\phi) + \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta). \quad (5.21)$$

由于无穷远 ($r = \infty$) 处的电势已取为零, 故对所有 l 和 m 均有 $\tilde{A}_{lm} = \tilde{B}_{lm} = 0$ 。从而, 球外的解应为

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta). \quad (5.22)$$

代入 $r = a$ 处的边界条件, 得

$$u_2(a, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta) = \frac{u_0}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.23)$$

可见, 非零系数只有

$$\tilde{D}_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \quad (5.24)$$

其它系数均为零。于是得到球外的解为

$$u_2(r, \theta, \phi) = \frac{u_0}{6} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.25)$$

6 柱函数图像

头三个 Bessel 函数 $J_m(x)$ 和头三个 Neumann 函数 $N_m(x)$ 的图像如图 10 所示。

头三个虚宗量 Bessel 函数 $I_m(x)$ 和头三个虚宗量 Hankel 函数 $K_m(x)$ 的图像如图 11 所示。

当 $x \rightarrow \infty$ 且 $-\pi < \arg x < \pi$ 时, Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 和 Neumann 函数 $N_\nu(x)$ 的渐近形式为

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (6.1)$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.2)$$

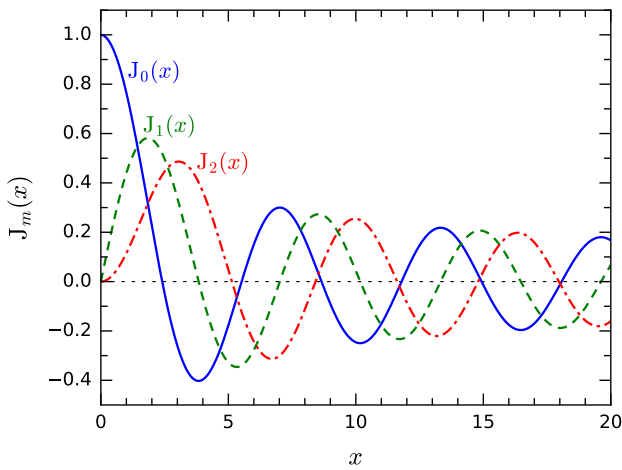
$J_0(x)$ 和 $N_0(x)$ 的渐近行为如图 12(a) 所示。

当 $x \rightarrow \infty$ 时，虚宗量 Bessel 函数 $I_\nu(x)$ 、虚宗量 Hankel 函数 $K_\nu(x)$ 的渐近形式为

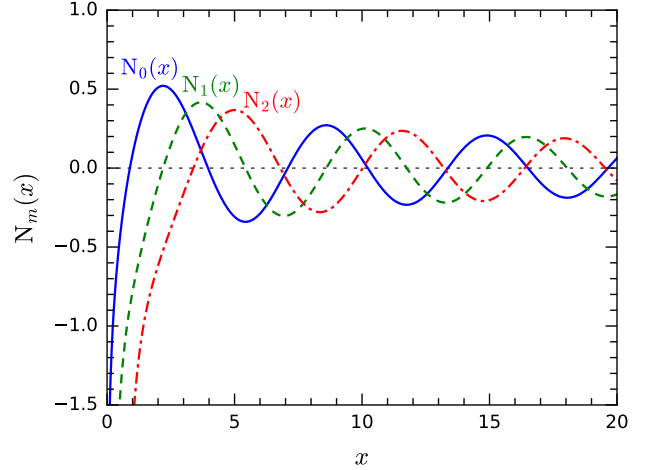
$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2} \quad (6.3)$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad -\pi < \arg x < \pi. \quad (6.4)$$

$I_0(x)$ 和 $K_0(x)$ 的渐近行为如图 12(b) 所示。

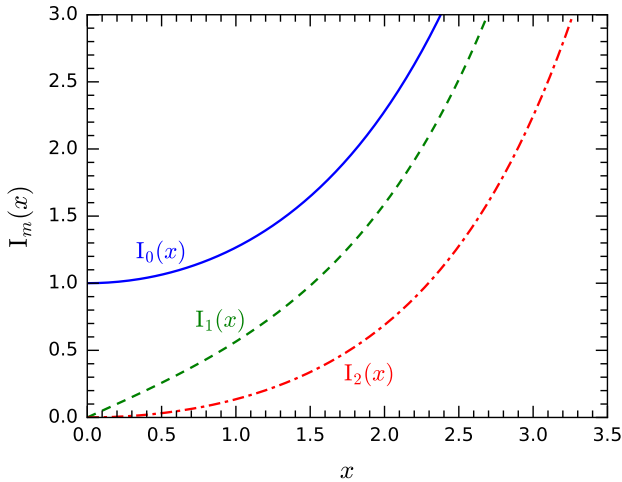


(a) Bessel 函数 $J_m(x)$

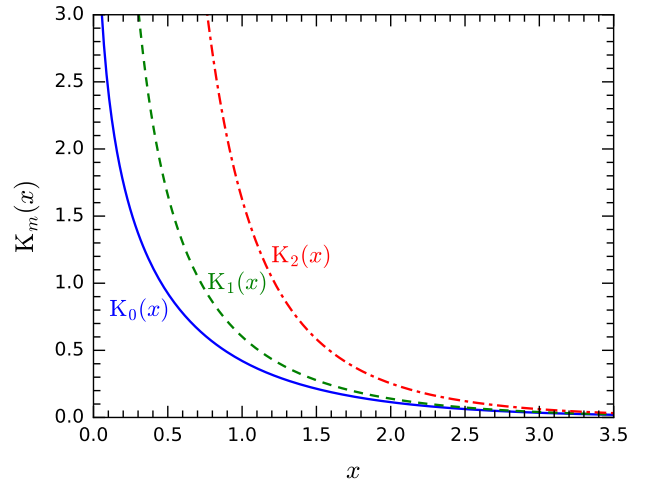


(b) Neumann 函数 $N_m(x)$

图 10: Bessel 函数 $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$ 、 $J_2(x)$ 和 Neumann 函数 $N_0(x)$ 、 $N_1(x)$ 、 $N_2(x)$ 的图像。



(a) 虚宗量 Bessel 函数 $I_m(x)$



(b) 虚宗量 Hankel 函数 $K_m(x)$

图 11: 虚宗量 Bessel 函数 $I_0(x)$ 、 $I_1(x)$ 、 $I_2(x)$ 和虚宗量 Hankel 函数 $K_0(x)$ 、 $K_1(x)$ 、 $K_2(x)$ 的图像。

头三个球 Bessel 函数 $j_l(x)$ 的具体形式为

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (6.5)$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad (6.6)$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3 \cos x}{x^2}. \quad (6.7)$$

它们的图像如图 13(a) 所示。

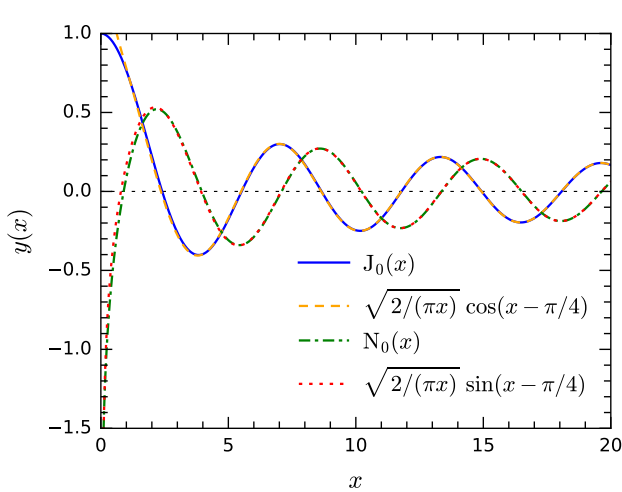
头三个球 Neumann 函数 $n_l(x)$ 的具体形式为

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad (6.8)$$

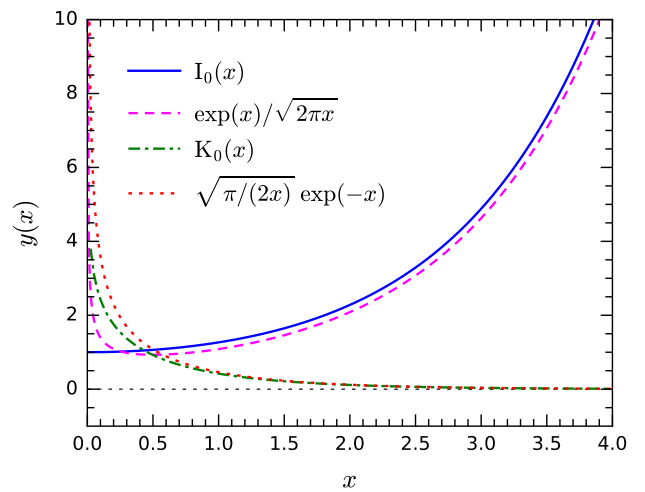
$$n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \quad (6.9)$$

$$n_2(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + 1 \right) \frac{\cos x}{x} - \frac{3 \sin x}{x^2}. \quad (6.10)$$

它们的图像如图 13(b) 所示。

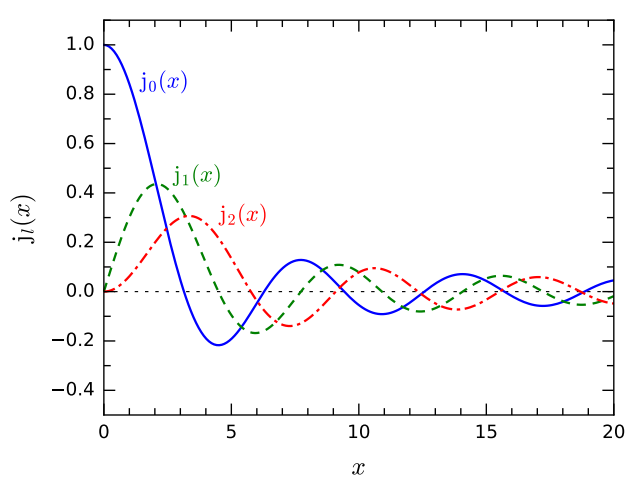


(a) $J_0(x)$ 和 $N_0(x)$ 的渐近行为

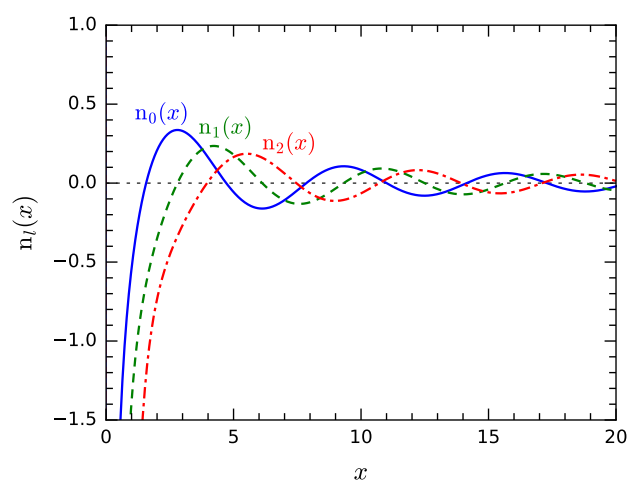


(b) $I_0(x)$ 和 $K_0(x)$ 的渐近行为

图 12: Bessel 函数 $J_0(x)$ 、Neumann 函数 $N_0(x)$ 、虚宗量 Bessel 函数 $I_0(x)$ 、虚宗量 Hankel 函数 $K_0(x)$ 的渐近行为。



(a) 球 Bessel 函数 $j_l(x)$



(b) 球 Neumann 函数 $n_l(x)$

图 13: 球 Bessel 函数 $j_0(x)$ 、 $j_1(x)$ 、 $j_2(x)$ 和球 Neumann 函数 $n_0(x)$ 、 $n_1(x)$ 、 $n_2(x)$ 的图像。