

# 量子场论

## 第 8 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

## 8.4 节至 8.7 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期: 2022 年 7 月 11 日



## 8.4 节 $CP$ 变换

  $C$  变换和  $P$  变换相继作用，就形成  $CP$  变换

右手  $CP$  变换既反转动量的方向，又将正反粒子互换，但保持角动量不变

在弱相互作用中，左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$  和右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$  参与不同的规范相互作用，导致电荷共轭对称性和空间反射对称性都遭到极大的破坏

但弱相互作用的  $CP$  对称性却近似成立，只受到微小的破坏

另一方面，实验上还没有迹象表明电磁和强相互作用的  $CP$  对称性受到破坏

复标量场的  $CP$  变换

根据前面推出的  $C$ 、 $P$  变换性质, 复标量场  $\phi(x)$  产生湮灭算符的  $CP$  变换是

$$(CP)^{-1}a_p^\dagger CP = \eta_C P^{-1}b_p^\dagger P = \eta_C \eta_P^* b_{-p}^\dagger, \quad (CP)^{-1}a_p CP = \eta_C^* P^{-1}b_p P = \eta_C^* \eta_P b_{-p}$$

$$(CP)^{-1}b_p^\dagger CP = \eta_C^* P^{-1} a_p^\dagger P = \eta_C^* \eta_P a_{-p}^\dagger, \quad (CP)^{-1}b_p CP = \eta_C P^{-1} a_p P = \eta_C \eta_P^* a_{-p}$$

手写  $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  的  $CP$  变换为

$$(CP)^{-1}\phi(x)CP = \eta_C^* \eta_P \phi^\dagger(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}\phi^\dagger(x)CP = \eta_C \eta_P^* \phi(\mathcal{P}x)$$

算符  $\phi^\dagger \phi$  和  $\phi^\dagger i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$  的  $CP$  变换是

$$(CP)^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)CP = +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) i\partial^\mu \phi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^\dagger(\mathcal{P}x) i\partial^\nu \phi(\mathcal{P}x)$$

可见,  $\phi^\dagger \phi$  的  $CP$  宇称为偶

Dirac 旋量场的  $CP$  变换

对于 Dirac 旋量场  $\psi(x)$ ，各种旋量双线性型的  $CP$  变换是

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \psi(x) CP = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)CP = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)i\gamma^5\psi(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x) CP = - \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \sigma^{\rho\sigma} \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_{\text{R}}(x) \psi_{\text{L}}(x) CP = \bar{\psi}_{\text{L}}(\mathcal{P}x) \psi_{\text{R}}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_{\text{L}}(x) \psi_{\text{R}}(x) CP = \bar{\psi}_{\text{R}}(\mathcal{P}x) \psi_{\text{L}}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) CP = - \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) CP = - \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

••  $\bar{\psi}\psi$  的  $CP$  宇称为偶,  $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$  的  $CP$  宇称为奇

与  $\bar{\psi}_B \psi_L$  在  $CP$  变换下相互转化

左手流算符  $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$  和右手流算符  $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$  在  $CP$  变换后分别回到自身

### 有质量复矢量场的 $CP$ 变换

有质量复矢量场  $A^\mu(x)$  及其厄米共轭  $A^{\mu\dagger}(x)$  的  $CP$  变换是

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1} A^{\mu\dagger}(x) CP = \xi_C \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

口  $F^{\mu\nu}$  和  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $CP$  变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = -\xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)$$

### 有质量复矢量场的 $CP$ 变换

有质量复矢量场  $A^\mu(x)$  及其厄米共轭  $A^{\mu\dagger}(x)$  的  $CP$  变换是

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}A^{\mu\dagger}(x)CP = \xi_C \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

口  $F^{\mu\nu}$  和  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $CP$  变换为

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = -\xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)$$

另一方面，**自共轭场**的 *CP* 宇称是其 *C* 宇称与宇称之积

实标量场  $\phi(x)$  的  $CP$  宇称是  $\eta_C \eta_P$ ，取值为  $\pm 1$

Majorana 旋量场  $\psi(x)$  的  $CP$  宇称是  $\zeta_C \zeta_P$ ，取值为  $\pm 1$ 。

有质量实矢量场  $A^\mu(x)$  的  $CP$  守恒是  $\xi_C \xi_P$ ，取值为  $\pm 1$

### 电磁场的 $CP$ 变换

电磁场  $A^\mu(x)$  的  $CP$  宇称是  $\xi_C \xi_P = -1$ ， $CP$  变换为

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

场强张量  $F^{\mu\nu}$  和对偶场强张量  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的  $CP$  变换是

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

算符  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  和  $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  的  $CP$  变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) CP = + F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) CP = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

可见,  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  的  $CP$  宇称为偶,  $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  的  $CP$  宇称为奇

## 8.5 节 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 对称性



前文讨论的所有自由量子场理论都同时具有  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性

一个相互作用理论是否具有  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性，则取决于拉氏量中的相互作用项是否在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下不变

由于  $C$ 、 $P$ 、 $T$  相位因子的任意性，我们可以对它们取合适的值，使理论具有尽可能多的分立对称性

## 8.5 节 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 对称性



前文讨论的所有自由量子场理论都同时具有  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性



一个相互作用理论是否具有  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性，则取决于拉氏量中的相互作用项是否在  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换下不变



由于  $C$ 、 $P$ 、 $T$  相位因子的任意性，我们可以对它们取合适的值，使理论具有尽可能多的分立对称性



💡 在一些由量子场构成的算符的分立变换中，相位因子被抵消掉了，使得这些算符具有明确的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质，这些性质在分析分立对称性的过程中起着重要作用



为便于应用, 接下来用表格总结一些算符的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质



 将要用到的  $[-]^\mu$  符号定义为

$$[-]^\mu = \begin{cases} +1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

## 标量场和矢量场相关算符的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 变换性质

由复标量场  $\phi(x)$  和电磁场  $A^\mu(x)$  构成的一些算符的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质如下

算符	$C$	$P$	$T$	$CP$	$CPT$
$i$	+	+	-	+	-
$\partial^\mu$	+	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	-
$(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$	+	+	+	+	+
$\phi^\dagger \phi$	+	+	+	+	+
$\phi^\dagger i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$A^\mu$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$F^{\mu\nu}$	-	$[-]^\mu [-]^\nu$	$-[-]^\mu [-]^\nu$	$-[-]^\mu [-]^\nu$	+
$\tilde{F}^{\mu\nu}$	-	$-[-]^\mu [-]^\nu$	$[-]^\mu [-]^\nu$	$[-]^\mu [-]^\nu$	+
$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$	+	+	+	+	+
$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$	+	-	-	-	+

### 旋量场相关算符的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 变换性质

由 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  构成的一些算符的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换性质如下

算符	$C$	$P$	$T$	$CP$	$CPT$
$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	+	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	-	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	+
$\bar{\psi}_R\psi_L$	+	$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_L\psi_R$	$\bar{\psi}_L\psi_R$
$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_R\psi_L$	+	$\bar{\psi}_R\psi_L$	$\bar{\psi}_R\psi_L$
$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$-\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$[-]^\mu\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$-\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$[-]^\mu\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-

### Yukawa 理论的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 对称性

在相互作用项为  $\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$  的 Yukawa 理论中

实标量场  $\phi(x)$  与 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的相互作用算符是  $\phi\bar{\psi}\psi$

那么,  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性要求  $\phi(x)$  的相位因子为  $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$

则  $\phi(x)$  是狭义的标量场,  $C$  宇称和宇称均为偶

算符	$C$	$P$	$T$	$CP$	$CPT$
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+

### Yukawa 理论的 $C$ 、 $P$ 、 $T$ 对称性

在相互作用项为  $\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$  的 Yukawa 理论中

实标量场  $\phi(x)$  与 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的相互作用算符是  $\phi\bar{\psi}\psi$

那么,  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性要求  $\phi(x)$  的相位因子为  $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$

则  $\phi(x)$  是狭义的标量场,  $C$  宇称和宇称均为偶

算符	$C$	$P$	$T$	$CP$	$CPT$
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+

在相互作用项为  $\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} i\gamma^5 \psi$  的另一种 Yukawa 理论中

实标量场  $\phi(x)$  与 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的相互作用算符是  $\phi\bar{\psi}i\gamma^5\psi$

那么,  $C$ 、 $P$ 、 $T$  对称性要求  $\phi(x)$  的相位因子为  $\eta_C = +1$  和  $\eta_P = \eta_T = -1$

则  $\phi(x)$  是赝标量场,  $C$  宇称为偶,  $\bar{C}$  宇称为奇

### $CPT$ 变换

 将  $C$ 、 $P$ 、 $T$  变换相继作用，就得到  **$CPT$**  变换，相应的变换算符记作

$$\Theta = CPT$$

由  $\Theta^\dagger \Theta = T^\dagger P^\dagger C^\dagger C P T = 1$  得

$$\Theta^{-1} \equiv \Theta^\dagger \equiv T^\dagger P^\dagger C^\dagger \equiv T^{-1} P^{-1} C^{-1}$$

而且

$$\Theta^{-1}i\Theta = T^{-1}P^{-1}C^{-1}iCPT = T^{-1}iT = -i$$

可见,  $\Theta$  跟  $T$  一样是反线性反么正算符

### CPT 定理

从前面的表格可以看到，像  $\phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 、 $A^\mu$  这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在  $CPT$  变换下得到一个负号，即  $CPT$  相位因子为奇

另一方面, 像  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i \gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符, 在 *CPT* 变换下得到一个正号, 即 *CPT* 相位因子为偶

### CPT 定理

从前面的表格可以看到，像  $\phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 、 $A^\mu$  这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在  $CPT$  变换下得到一个负号，即  $CPT$  相位因子为奇

另一方面, 像  $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i \gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符, 在 *CPT* 变换下得到一个正号, 即 *CPT* 相位因子为偶

这种情况下是普遍的，可以对量子场选取适当的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在  $CPT$  变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同

即具有奇(偶)数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的  $CPT$  相位因子为奇(偶)

### CPT 定理

从前面的表格可以看到，像  $\phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 、 $A^\mu$  这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在  $CPT$  变换下得到一个负号，即  $CPT$  相位因子为奇

另一方面，像  $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$ 、 $\phi^\dagger\phi$ 、 $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 、 $\bar{\psi}\psi$ 、 $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ 、 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在  $CPT$  变换下得到一个正号，即  $CPT$  相位因子为偶

这种情况下是普遍的，可以对量子场选取适当的  $C$ 、 $P$ 、 $T$  相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在  $CPT$  变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同

即具有奇(偶)数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的  $CPT$  相位因子为奇(偶)

💡 在相对论性的局域量子场论里，拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  是一个厄米的 Lorentz 标量，必须由不携带末缩并 Lorentz 指标的厄米算符构成，因此  $\mathcal{L}(x)$  的  $CPT$  相位因子为偶，即  $\mathcal{L}(x)$  在  $CPT$  变换下不变，这就是  $CPT$  定理

### *CPT* 定理的准确表述



**CPT 定理**的准确表述如下

## CPT 定理



如果一个局域量子场论由一个在固有保时向 Lorentz 变换下不变的厄米拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  描述, 而且场的量子化遵循自旋-统计定理, 那么  $\mathcal{L}(x)$  在  $CPT$  变换下不变, 满足

$$\Theta^{-1} \mathcal{L}(x) \Theta = +\mathcal{L}(-x)$$



拉氏量的  $CPT$  不变性意味着作用量、场的运动方程和哈密顿量  $H$  都在  $CPT$  变换下不变，有

$$\Theta^{-1} H(t) \Theta = +H(-t)$$



因而理论具有 *CPT* 对称性

### 时间演化算符的 $CPT$ 变换

在相互作用绘景中,  $CPT$  对称性意味着相互作用哈密顿量  $H_1$  满足

$$\Theta^{-1} H_1(t) \Theta = +H_1(-t)$$

注意到  $\Theta$  算符是反线性的, 时间演化算符  $U(t, t_0)$  的  $CPT$  变换为

$$\begin{aligned}\Theta^{-1} U(t, t_0) \Theta &= \Theta^{-1} \mathsf{T} \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt H_1(t) \right] \Theta = \mathsf{T} \exp \left[ i \int_{t_0}^t dt \Theta^{-1} H_1(t) \Theta \right] \\ &= \mathsf{T} \exp \left[ i \int_{t_0}^t dt H_1(-t) \right] = \mathsf{T} \exp \left[ -i \int_{-t_0}^{-t} dt H_1(t) \right] = U(-t, -t_0)\end{aligned}$$

倒数第二步作了变量替换  $t \rightarrow -t$

从而  $S$  算符的  $CPT$  变换是

$$\Theta^{-1}S\Theta = \Theta^{-1}U(+\infty, -\infty)\Theta = U(-\infty, +\infty) = U^\dagger(+\infty, -\infty) = S^\dagger$$

CPT 对称性的推论

 **CPT 定理**的证明可追溯到 1954 年 **Gerhart Lüders** 和 **Wolfgang Pauli** 的工作

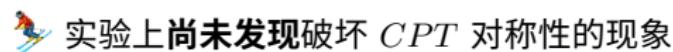


Gerhart Lüders  
(1920–1995)

由于 *CPT* 定理成立的条件在量子场论中普遍得到满足，因而 *CPT 对称性*被认为是一个广泛存在的对称性



Wolfgang Ernst Pauli  
(1900–1958)



💡 *CPT* 对称性保证正粒子和反粒子的质量和寿命完全相同，电荷等守恒荷的大小相等，符号相反

这些结论在电荷共轭对称性遭到破坏时仍然成立，因而并不庸

CPT 对称性与粒子质量

现在证明  $CPT$  对称性保证正反粒子的 **质量** 相同

一个静止的  $A$  粒子对应的态矢是哈密顿量  $H$  (可包含相互作用项)、自旋角动量平方  $S^2$  和自旋角动量第 3 分量  $S^3$  的共同本征态

相应本征值为  $A$  粒子质量  $m_A$ 、 $s(s+1)$  和  $\sigma$

由于  $CPT$  变换不改变自旋量子数  $s$ ，下面的讨论与  $s$  无关

CPT 对称性与粒子质量

现在证明  $CPT$  对称性保证正反粒子的 **质量** 相同

一个静止的  $A$  粒子对应的态矢是哈密顿量  $H$  (可包含相互作用项)、自旋角动量平方  $S^2$  和自旋角动量第 3 分量  $S^3$  的共同本征态

相应本征值为  $A$  粒子质量  $m_A$ 、 $s(s+1)$  和  $\sigma$

由于  $CPT$  变换不改变自旋量子数  $s$ ，下面的讨论与  $s$  无关

将这个态矢记作  $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$ ，满足  $\langle \mathcal{A}, \sigma | \mathcal{A}, \sigma \rangle = 1$  和

$$H |\mathcal{A}, \sigma\rangle = m_{\mathcal{A}} |\mathcal{A}, \sigma\rangle$$

 **CPT 对称性**意味着  $\Theta^{-1}H(t)\Theta = +H(-t)$ ，利用它将  $\mathcal{A}$  粒子质量表达为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle$$

*CPT* 对称性推论：正反粒子质量相同

作为  $C$ 、 $P$  和  $T$  的联合变换,  $CPT$  变换将正反粒子互换, 反转角动量的方向, 同时保持动量不变

 **CPT 变换**将  $S^3$  本征值为  $\sigma$  的  $A$  粒子转化为  $S^3$  本征值为  $-\sigma$  的反粒子  $\bar{A}$

相应的量子态是  $|\mathcal{A}, \sigma\rangle_\Theta \equiv \Theta|\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}}|\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ ，其中  $\chi_{\mathcal{A}}$  是相位因子

*CPT* 对称性推论：正反粒子质量相同

作为  $C$ 、 $P$  和  $T$  的联合变换,  $CPT$  变换将正反粒子互换, 反转角动量的方向, 同时保持动量不变

 **CPT 变换**将  $S^3$  本征值为  $\sigma$  的  $A$  粒子转化为  $S^3$  本征值为  $-\sigma$  的反粒子  $\bar{A}$

相应的量子态是  $|\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}} |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ ，其中  $\chi_{\mathcal{A}}$  是相位因子

反么正的  $\Theta$  算符满足  $\langle \Psi_1 | \Theta^\dagger \Psi_2 \rangle = \langle \Theta \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^*$ ，因而

$$\begin{aligned}
m_{\mathcal{A}} &= \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^\dagger H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta \\
&= {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle^*_\Theta = {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta
\end{aligned}$$

红旗  $|\bar{A}, -\sigma\rangle$  是静止的  $\bar{A}$  粒子的哈密顿量本征态, 本征值为  $\bar{A}$  粒子质量  $m_{\bar{A}}$ , 故

$$m_{\bar{\mathcal{A}}} = \langle \bar{\mathcal{A}}, -\sigma | H | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle = |\chi_{\mathcal{A}}|^2 \Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_{\Theta} = \Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_{\Theta} = m_{\mathcal{A}}$$

这样就证明了反粒子  $\bar{A}$  与正粒子  $A$  的质量相同

## 微扰论最低阶衰变宽度

接下来在 [微扰论最低阶](#) 证明  $CPT$  对称性保证正反粒子的 [寿命](#) 相同

■ 考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分

其中主要成分  $H_s$  描述较强的相互作用，如强相互作用

而微扰成分  $H_w$  描述引起衰变的较弱相互作用, 如电磁或弱相互作用

coli CPT 对称性意味着  $\Theta^{-1}H_s(t)\Theta = H_s(-t)$  和  $\Theta^{-1}H_w(t)\Theta = H_w(-t)$

## 微扰论最低阶衰变宽度

接下来在 [微扰论最低阶](#) 证明  $CPT$  对称性保证正反粒子的 [寿命](#) 相同

■ 考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分

其中主要成分  $H_s$  描述较强的相互作用，如强相互作用

而微扰成分  $H_w$  描述引起衰变的较弱相互作用，如电磁或弱相互作用

⌚ **CPT 对称性**意味着  $\Theta^{-1} H_s(t) \Theta = H_s(-t)$  和  $\Theta^{-1} H_w(t) \Theta = H_w(-t)$

考虑在  $t = 0$  时刻静止的  $A$  粒子发生衰变过程  $A \rightarrow J$

靶  $f$  代表所有可能的衰变末态，描述  $A$  粒子的态矢  $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$  是  $H_s$  的本征态

在  $H_w$  的最低阶,  $\mathcal{A}$  粒子的衰变宽度表达为

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle|^2$$

其中  $E_A = m_A$ ， $E_f$  是末态  $f$  中所有粒子的能量之和

时间演化算符  $U(+\infty, 0)$  只用  $H_s$  定义

## 反粒子衰变宽度

相应地, 反粒子  $\bar{A}$  的衰变过程是  $\bar{A} \rightarrow \bar{f}$

末态  $\bar{f}$  中的粒子都是  $f$  中的反粒子, 态矢  $|\bar{A}, \sigma\rangle$  也是  $H_s$  的本征态

✓  $\bar{\Lambda}$  粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_{\text{w}}(0) | \bar{\mathcal{A}}, \sigma \rangle \right|^2$$

注意  $\mathcal{A}$  和  $\bar{\mathcal{A}}$  的衰变宽度都不依赖于  $\sigma$  的取值

### 反粒子衰变宽度

相应地, 反粒子  $\bar{A}$  的衰变过程是  $\bar{A} \rightarrow \bar{f}$

末态  $\bar{f}$  中的粒子都是  $f$  中的反粒子, 态矢  $|\bar{A}, \sigma\rangle$  也是  $H_s$  的本征态

✓  $\bar{\Lambda}$  粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_{\text{w}}(0) | \bar{\mathcal{A}}, \sigma \rangle \right|^2$$

注意  $\mathcal{A}$  和  $\bar{\mathcal{A}}$  的衰变宽度都不依赖于  $\sigma$  的取值

对  $|f\rangle$  作 **CPT** 变换, 得  $|f\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |f\rangle = \chi_f |\bar{f}\rangle$ , 其中  $\chi_f$  是相位因子

利用  $CPT$  对称性, 由  $\Theta^{-1}U(t, t_0)\Theta = U(-t, -t_0)$  推出

$$\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle f | \Theta^{-1} U(-\infty, 0) \Theta \Theta^{-1} H_w(0) \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle$$

$$= \Theta \langle f | U(-\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle_{\Theta}^*$$

$$\begin{aligned} |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle|^2 &= |\Theta \langle f | U(-\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta^*|^2 \\ &= |\langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 \end{aligned}$$

CPT 对称性与衰变宽度

再利用  $U(-\infty, 0) = U(-\infty, +\infty)U(+\infty, 0) = S^\dagger U(+\infty, 0)$ ，有

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) |\mathcal{A}, \sigma \rangle|^2 \\
&= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | S^\dagger U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \sum_{\bar{f}'} \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}, \bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\
&\quad \times \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^*
\end{aligned}$$

倒数第二步插入了一组完备集  $\sum_{\bar{f}'} |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}'| = 1$

# CPT 对称性推论：正反粒子寿命相同

🍁 注意到  $S$  矩阵元只在初末态能量相等时非零，且  $SS^\dagger = 1$ ，对  $\bar{f}$  求和的部分化为

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* &= \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left( \langle \bar{f}' | S | \bar{f} \rangle \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle \right)^* \\ &= \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \langle \bar{f}' | SS^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* = \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}' \bar{f}''} \end{aligned}$$

⚽ 从而推出

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_{\bar{f}, \bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\ &\quad \times \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}' \bar{f}''} \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\ &\quad \times \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^* \\ &= 2\pi \sum_{\bar{f}'} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) |\langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 = \Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} \end{aligned}$$

█ 于是，正粒子  $\mathcal{A}$  与反粒子  $\bar{\mathcal{A}}$  的衰变宽度相等，因而寿命相同

## 8.6 节 Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量

### 8.6.1 小节 左手和右手 Weyl 旋量

 Dirac 旋量场和 Majorana 旋量场都可以分解为左手和右手的 Weyl 旋量场

为了更深刻地认识旋量场, 本节进一步研究 Weyl 旋量

用  $\sigma^\mu = (1, \sigma)$  和  $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$  定义  $2 \times 2$  矩阵  $s^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$

由  $(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$  和  $(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$  推出

$$(s^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{4}[(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger] = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$$

## 8.6 节 Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量

### 8.6.1 小节 左手和右手 Weyl 旋量

 Dirac 旋量场和 Majorana 旋量场都可以分解为左手和右手的 Weyl 旋量场

为了更深刻地认识旋量场, 本节进一步研究 [Weyl 旋量](#)

用  $\sigma^\mu = (1, \sigma)$  和  $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$  定义  $2 \times 2$  矩阵  $s^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$

由  $(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$  和  $(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$  推出

$$(s^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{4}[(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger] = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$$

从而将 Weyl 表象中的旋量表示生成元化为

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{\mu\nu} & \\ & (s^{\mu\nu})^\dagger \end{pmatrix}$$

也就是说,  $4 \times 4$  矩阵  $S^{\mu\nu}$  是  $2 \times 2$  矩阵  $s^{\mu\nu}$  和  $(s^{\mu\nu})^\dagger$  的直和

因而  $s^{\mu\nu}$  和  $(s^{\mu\nu})^\dagger$  是两个 Lorentz 群 2 维表示的生成元

## 左手和右手 Weyl 旋量所处 2 维表示

对于 Lorentz 变换  $\Lambda$  的一组变换参数  $\omega_{\mu\nu}$ ，用  $s^{\mu\nu}$  生成固有保时向有限变换

$$d(\Lambda) \equiv \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} s^{\mu\nu} \right)$$

它属于左手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

相应的逆变换矩阵为  $d^{-1}(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$ ，取厄米共轭，得

$$d^{-1\dagger}(\Lambda) = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (s^{\mu\nu})^\dagger \right]$$

这是用  $(s^{\mu\nu})^\dagger$  生成的固有保时向有限变换，属于右手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

## 左手和右手 Weyl 旋量所处 2 维表示

对于 Lorentz 变换  $\Lambda$  的一组变换参数  $\omega_{\mu\nu}$ ，用  $s^{\mu\nu}$  生成固有保时向有限变换

$$d(\Lambda) \equiv \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$$

它属于左手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

相应的逆变换矩阵为  $d^{-1}(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$ ，取厄米共轭，得

$$d^{-1\dagger}(\Lambda) = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (s^{\mu\nu})^\dagger \right]$$

这是用  $(s^{\mu\nu})^\dagger$  生成的固有保时向有限变换，属于右手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

于是，旋量表示的  $4 \times 4$  Lorentz 变换矩阵分解为

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}/2} & \\ & e^{-i\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\Lambda) & \\ & d^{-1\dagger}(\Lambda) \end{pmatrix}$$

因此, 4 维旋量表示  $\{D(\Lambda)\}$  是 2 维表示  $\{d(\Lambda)\}$  和  $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$  的直和

## 等价表示

利用  $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$  和  $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$  推出

$$\begin{aligned}\sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2 &= \frac{i}{4} (\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^\nu \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2) \\ &= \frac{i}{4} [(\bar{\sigma}^\mu)^T (\sigma^\nu)^T - (\bar{\sigma}^\nu)^T (\sigma^\mu)^T] = -(s^{\mu\nu})^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 &= \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2\right) = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (s^{\mu\nu})^T\right] \\ &= \left[\exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} s^{\mu\nu}\right)\right]^T = d^{-1T}(\Lambda)\end{aligned}$$

## 等价表示

利用  $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$  和  $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$  推出

$$\begin{aligned}\sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2 &= \frac{i}{4} (\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^\nu \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2) \\ &= \frac{i}{4} [(\bar{\sigma}^\mu)^T (\sigma^\nu)^T - (\bar{\sigma}^\nu)^T (\sigma^\mu)^T] = -(s^{\mu\nu})^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 &= \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2 \right) = \exp \left[ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (s^{\mu\nu})^T \right] \\ &= \left[ \exp \left( \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} s^{\mu\nu} \right) \right]^T = d^{-1T}(\Lambda)\end{aligned}$$

将 Pauli 矩阵  $\sigma^2$  看作一个幺正变换矩阵, 满足  $(\sigma^2)^{-1} = (\sigma^2)^\dagger = \sigma^2$

则  $d(\Lambda)$  与  $d^{-1T}(\Lambda)$  由一个相似变换联系起来, 相似变换矩阵为  $\sigma^2$

根据 1.4 节定义, 线性表示  $\{d(\Lambda)\}$  和  $\{d^{-1T}(\Lambda)\}$  是等价的

由于  $(\sigma^2)^* = -\sigma^2$ ,  $\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\top}(\Lambda)$  的复共轭为  $\sigma^2 d^*(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda)$

  $\{d^*(\Lambda)\}$  是  $\{d(\Lambda)\}$  的复共轭表示, 而线性表示  $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$  与  $\{d^*(\Lambda)\}$  等价

## 左手 Weyl 旋量



于是，左手 Weyl 旋量

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\eta'_a = [d(\Lambda)]_a{}^b \eta_b, \quad a, b = 1, 2$$



$\eta_a$  是表示  $\{d(\Lambda)\}$  中的态

## 左手 Weyl 旋量



于是，左手 Weyl 旋量

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\eta'_a = [d(\Lambda)]_a{}^b \eta_b, \quad a, b = 1, 2$$



$\eta_a$  是表示  $\{d(\Lambda)\}$  中的态



引入反对称的二维 Levi-Civita 符号  $\varepsilon^{ab}$ ，定义为

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$$



它与 Pauli 矩阵  $\sigma^2$  的关系是

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = (i\sigma^2)^{ab}$$

### 等价的左手 Weyl 旋量

通过  $\varepsilon^{ab}$  定义

$$\eta^a \equiv \varepsilon^{ab} \eta_b = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$$

则

$$\eta^1 = \eta_2, \quad \eta^2 = -\eta_1$$

因此  $\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1T}(\Lambda)$  等价于  $\sigma^2 d(\Lambda) = d^{-1T}(\Lambda) \sigma^2$ ，故  $\eta^a$  的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^a &= \varepsilon^{ab}\eta'_b = \varepsilon^{ab}[d(\Lambda)]_b{}^c\eta_c = i[\sigma^2 d(\Lambda)]^{ac}\eta_c \\ &= i[d^{-1T}(\Lambda)\sigma^2]^{ac}\eta_c = [d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b\varepsilon^{bc}\eta_c\end{aligned}$$

## 等价的左手 Weyl 旋量

通过  $\varepsilon^{ab}$  定义

$$\eta^a \equiv \varepsilon^{ab} \eta_b = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$$

则

$$\eta^1 = \eta_2, \quad \eta^2 = -\eta_1$$

因此  $\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1T}(\Lambda)$  等价于  $\sigma^2 d(\Lambda) = d^{-1T}(\Lambda) \sigma^2$ ，故  $\eta^a$  的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^a &= \varepsilon^{ab}\eta'_b = \varepsilon^{ab}[d(\Lambda)]_b{}^c\eta_c = i[\sigma^2 d(\Lambda)]^{ac}\eta_c \\ &= i[d^{-1T}(\Lambda)\sigma^2]^{ac}\eta_c = [d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b\varepsilon^{bc}\eta_c\end{aligned}$$

即

$$\eta'^a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b \eta^b$$

可见  $\eta^a$  是表示  $\{d^{-1T}(\Lambda)\}$  中的态

由于这个表示等价于  $\{d(\Lambda)\}$ ， $\eta^a$  也是左手 Weyl 旋量

$\varepsilon^{ab}$  和  $\varepsilon_{ab}$

两种左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  与  $\eta^a$  是等价的，它们之间的关系类似于 Lorentz 逆变矢量  $A^\mu$  与协变矢量  $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$  之间的关系

$\varepsilon^{ab}$  的作用类似于度规  $g_{\mu\nu}$ ，相当于 2 维旋量空间的度规，用于提升旋量指标

$\varepsilon^{ab}$  和  $\varepsilon_{ab}$

两种左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  与  $\eta^a$  是等价的，它们之间的关系类似于 Lorentz 逆变矢量  $A^\mu$  与协变矢量  $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$  之间的关系

$\varepsilon^{ab}$  的作用类似于度规  $g_{\mu\nu}$ ，相当于 2 维旋量空间的度规，用于提升旋量指标

用  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1$  和  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$  定义  $\varepsilon_{ab}$ ，则

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = (-i\sigma^2)_{ab}$$

$\varepsilon_{ab}$  是  $\varepsilon^{ab}$  的逆矩阵, 满足

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_a^c$$

$\varepsilon^{ab}$  和  $\varepsilon_{ab}$

两种左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  与  $\eta^a$  是等价的，它们之间的关系类似于 Lorentz 逆变矢量  $A^\mu$  与协变矢量  $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$  之间的关系

$\varepsilon^{ab}$  的作用类似于度规  $g_{\mu\nu}$ ，相当于 2 维旋量空间的度规，用于提升旋量指标

用  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1$  和  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$  定义  $\varepsilon_{ab}$ ，则

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = (-i\sigma^2)_{ab}$$

$\varepsilon_{ab}$  是  $\varepsilon^{ab}$  的逆矩阵, 满足

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_a^c$$

于是,  $\eta^1 = \eta_2$  和  $\eta^2 = -\eta_1$  表明

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta^2 \\ \eta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab} \eta^b$$

也就是说,  $\varepsilon_{ab}$  用于下降旋量指标

## 左手 Weyl 旋量的内积

任意两个左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  和  $\zeta_a$  的内积

$$\eta^a \zeta_a = \varepsilon^{ab} \eta_b \zeta_a = \varepsilon_{ab} \eta^a \zeta^b$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^a \zeta'_a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a_b \eta^b [d(\Lambda)]_a^c \zeta_c = \eta^b [d^{-1}(\Lambda)]_b^a [d(\Lambda)]_a^c \zeta_c = \eta^b \delta_b^c \zeta_c = \eta^a \zeta_a$$

第二步用了转置性质  $[d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b = [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a$ ，可见  $\eta^a \zeta_a$  是 Lorentz 标量

# 左手 Weyl 旋量的内积

任意两个左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  和  $\zeta_a$  的内积

$$\eta^a \zeta_a = \varepsilon^{ab} \eta_b \zeta_a = \varepsilon_{ab} \eta^a \zeta^b$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^a \zeta'_a = [d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b \eta^b [d(\Lambda)]_a{}^c \zeta_c = \eta^b [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a [d(\Lambda)]_a{}^c \zeta_c = \eta^b \delta_b{}^c \zeta_c = \eta^a \zeta_a$$

第二步用了转置性质  $[d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b = [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a$ ，可见  $\eta^a \zeta_a$  是 Lorentz 标量

由  $\eta^1 = \eta_2$ 、 $\eta^2 = -\eta_1$ 、 $\zeta^1 = \zeta_2$  和  $\zeta^2 = -\zeta_1$  得

$$\eta^a \zeta_a = \eta^1 \zeta_1 + \eta^2 \zeta_2 = \eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2 = -\eta_2 \zeta^2 - \eta_1 \zeta^1 = -\eta_a \zeta^a$$

即参与缩并的旋量指标一升一降会多出一个负号

这种性质与 Lorentz 矢量内积  $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$  截然不同

原因在于旋量空间度规  $\varepsilon^{ab}$  是反对称的

## Grassmann 数

  $\eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a$  表明  $\eta^a \eta_a = -\eta_a \eta^a$ ，如果  $\eta_a$  和  $\eta^a$  是通常的复数，则  $\eta^a \eta_a = 0$

为了使  $\eta^a \eta_a \neq 0$ ，必须要求左手 Weyl 旋量  $\eta^a$  与  $\eta_a$  反对易

即它们是 Grassmann 数，任意两个 Grassmann 数都是反对易的

 若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数

因此,  $\eta_a$  是 Grassmann 数意味着  $\eta^a = \varepsilon^{ab}\eta_b$  也是 Grassmann 数

## Grassmann 数

  $\eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a$  表明  $\eta^a \eta_a = -\eta_a \eta^a$ ，如果  $\eta_a$  和  $\eta^a$  是通常的复数，则  $\eta^a \eta_a = 0$

为了使  $\eta^a \eta_a \neq 0$ ，必须要求左手 Weyl 旋量  $\eta^a$  与  $\eta_a$  反对易

即它们是 Grassmann 数，任意两个 Grassmann 数都是反对易的

 若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数

因此,  $\eta_a$  是 Grassmann 数意味着  $\eta^a = \varepsilon^{ab}\eta_b$  也是 Grassmann 数

虽然如此，Grassmann 数是反对易的  $c$  数，不是算符

对 Grassmann 数表达的旋量场进行量子化，才得到旋量场算符，而 Grassmann 数的反对易性质与旋量场算符的反对易关系相匹配

## Grassmann 数

  $\eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a$  表明  $\eta^a \eta_a = -\eta_a \eta^a$ ，如果  $\eta_a$  和  $\eta^a$  是通常的复数，则  $\eta^a \eta_a = 0$

为了使  $\eta^a \eta_a \neq 0$ ，必须要求左手 Weyl 旋量  $\eta^a$  与  $\eta_a$  反对易

即它们是 Grassmann 数，任意两个 Grassmann 数都是反对易的

 若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数

因此,  $\eta_a$  是 Grassmann 数意味着  $\eta^a \equiv \varepsilon^{ab} \eta_b$  也是 Grassmann 数

虽然如此，Grassmann 数是反对易的  $c$  数，不是算符

对 Grassmann 数表达的旋量场进行量子化，才得到旋量场算符，而 Grassmann 数的反对易性质与旋量场算符的反对易关系相匹配

假设  $\eta_a$  和  $\zeta^a$  都是 Grassmann 数，则  $\eta_a \zeta^a = -\zeta^a \eta_a$ ，相应地，将省略旋量指标的内积写成  $\eta \zeta \equiv \eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a = \zeta^a \eta_a = \zeta \eta$ ，即内积  $\eta \zeta$  和  $\zeta \eta$  是相等的

内积  $\eta^a \eta_a$  有等价表达式  $\eta\eta = \eta^a \eta_a = \varepsilon_{ab} \eta^a \eta^b = -\eta^1 \eta^2 + \eta^2 \eta^1 = -2\eta^1 \eta^2$

$$= 2\eta_2\eta_1 = \eta_2\eta_1 - \eta_1\eta_2 = -\varepsilon^{ab}\eta_a\eta_b = -\eta_a\eta^a$$

左手 Weyl 旋量的复共轭

将左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  的复共轭记为  $\eta_a^\dagger = \begin{pmatrix} \eta_i^\dagger \\ \eta_j^\dagger \end{pmatrix}$

量子化之后，算符  $\eta_a$  和  $\eta_a^\dagger$  互为厄米共轭

对  $\eta'_a = [d(\Lambda)]_a^b \eta_b$  两边取复共轭，得到  $\eta_a^\dagger$  的 Lorentz 变换

$$\eta_{\dot{a}}'^{\dagger} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

左手 Weyl 旋量的复共轭

将左手 Weyl 旋量  $\eta_a$  的复共轭记为  $\eta_{\dot{a}}^\dagger = \begin{pmatrix} \eta_1^\dagger \\ \eta_2^\dagger \end{pmatrix}$

量子化之后，算符  $\eta_a$  和  $\eta_a^\dagger$  互为厄米共轭

对  $\eta'_a = [d(\Lambda)]_a^b \eta_b$  两边取复共轭，得到  $\eta_a^\dagger$  的 Lorentz 变换

$$\eta_{\dot{a}}'^{\dagger} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

## 引进指标上带着点号的二维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = (\mathrm{i}\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}}, \quad \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = (-\mathrm{i}\sigma^2)_{\dot{a}\dot{b}}$$

其分量数值与  $\varepsilon^{ab}$  和  $\varepsilon_{ab}$  分别相同

定义  $\eta^{\dagger a} \equiv \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^{\dagger} \\ \eta_2^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^{\dagger} \\ -\eta_1^{\dagger} \end{pmatrix}$ , 则有  $\eta^{\dagger i} = \eta_2^{\dagger}$  和  $\eta^{\dagger \dot{2}} = -\eta_1^{\dagger}$

## 右手 Weyl 旋量

等价于  $\sigma^2 d^*(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda)$

故  $\eta^{\dagger a}$  的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^{\dagger a} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta'_b{}^\dagger = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} [d^*(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger = i[\sigma^2 d^*(\Lambda)]^{\dot{a}\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger \\ &= i[d^{-1\dagger}(\Lambda) \sigma^2]^{\dot{a}\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger\end{aligned}$$

即

$$\eta'^{\dagger a} = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}}$$

### 右手 Weyl 旋量

等价于  $\sigma^2 d^*(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda)$

故  $\eta^{\dagger a}$  的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^{\dagger a} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta'_b{}^\dagger = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} [d^*(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger = i[\sigma^2 d^*(\Lambda)]^{\dot{a}\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger \\ &= i[d^{-1\dagger}(\Lambda) \sigma^2]^{\dot{a}\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} \eta_{\dot{c}}{}^\dagger\end{aligned}$$

即

$$\eta'^{\dagger \dot{a}} = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}}$$

可见,  $\eta^{\dagger a}$  是线性表示  $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$  中的态, 因而是右手 Weyl 旋量

由于表示  $\{d^*(\Lambda)\}$  等价于  $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ ， $\eta_a^\dagger$  也是右手 Weyl 旋量

因此，在这套符号约定中，不带点的旋量指标对应于左手 Weyl 旋量及其表示

而带点的旋量指标对应于右手 Weyl 旋量及其表示

### 右手 Weyl 旋量的内积

任意两个右手 Weyl 旋量  $\eta^{\pm a}$  和  $\zeta^{\pm a}$  的内积

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a} \dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a} \dot{b}} \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_a^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^\dagger [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger \dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^\dagger [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger \dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^\dagger \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger \dot{c}} = \eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}}$$

第二步用了转置性质  $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}}$ ，可见  $\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}}$  是 Lorentz 标量

### 右手 Weyl 旋量的内积

任意两个右手 Weyl 旋量  $\eta^{\pm a}$  和  $\zeta^{\pm a}$  的内积

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a} \dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a} \dot{b}} \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_a^{\dagger} \zeta^{\dagger a} = [d^*(\Lambda)]_a^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger \dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{\dagger}(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger \dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger \dot{c}} = \eta_a^{\dagger} \zeta^{\dagger a}$$

第二步用了转置性质  $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}}$ ，可见  $\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}}$  是 Lorentz 标量

由  $\eta^{\dagger i} = \eta_{\hat{2}}^{\dagger}$ 、 $\eta^{\dagger \hat{2}} = -\eta_{\hat{1}}^{\dagger}$ 、 $\zeta^{\dagger i} = \zeta_{\hat{2}}^{\dagger}$  和  $\zeta^{\dagger \hat{2}} = -\zeta_{\hat{1}}^{\dagger}$  得

$$\eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = \eta_{\dot{i}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{i}} + \eta_{\dot{2}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{2}} = -\eta^{\dagger \dot{2}} \zeta^{\dagger \dot{i}} + \eta^{\dagger \dot{i}} \zeta^{\dagger \dot{2}} = -\eta^{\dagger \dot{2}} \zeta_{\dot{2}}^\dagger - \eta^{\dagger \dot{i}} \zeta_{\dot{i}}^\dagger = -\eta^{\dagger \dot{a}} \zeta_{\dot{a}}^\dagger$$

 即参与缩并的带点旋量指标一升一降会多出一个负号

### 右手 Weyl 旋量的内积

任意两个右手 Weyl 旋量  $\eta^{\pm a}$  和  $\zeta^{\pm a}$  的内积

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a} \dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a} \dot{b}} \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dot{c}\dagger \dot{a}} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dot{c}\dagger} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{\dagger}(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dot{c}\dagger} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \zeta^{\dot{c}\dagger} = \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dot{a}}$$

第二步用了转置性质  $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}}$ ，可见  $\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}}$  是 Lorentz 标量

由  $\eta^{\dagger i} = \eta_{\hat{2}}^{\dagger}$ 、 $\eta^{\dagger \hat{2}} = -\eta_{\hat{1}}^{\dagger}$ 、 $\zeta^{\dagger i} = \zeta_{\hat{2}}^{\dagger}$  和  $\zeta^{\dagger \hat{2}} = -\zeta_{\hat{1}}^{\dagger}$  得

$$\eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = \eta_{\dot{i}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{i}} + \eta_{\dot{2}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{2}} = -\eta^{\dagger \dot{2}} \zeta^{\dagger \dot{i}} + \eta^{\dagger \dot{i}} \zeta^{\dagger \dot{2}} = -\eta^{\dagger \dot{2}} \zeta_{\dot{2}}^\dagger - \eta^{\dagger \dot{i}} \zeta_{\dot{i}}^\dagger = -\eta^{\dagger \dot{a}} \zeta_{\dot{a}}^\dagger$$

 即参与缩并的带点旋量指标一升一降会多出一个负号

⌚ 假设右手 Weyl 旋量  $\eta^{\dagger a}$  和  $\zeta_{\dot{a}}^\dagger$  都是 Grassmann 数，则  $\eta^{\dagger a}\zeta_{\dot{a}}^\dagger = -\zeta_{\dot{a}}^\dagger\eta^{\dagger a}$

将省略带点旋量指标的内积写成  $\eta^\dagger \zeta^\dagger \equiv \eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = -\eta^{\dagger \dot{a}} \zeta_{\dot{a}}^\dagger = \zeta_{\dot{a}}^\dagger \eta^{\dagger \dot{a}} = \zeta^\dagger \eta^\dagger$

则内积  $\eta^\dagger \zeta^\dagger$  和  $\zeta^\dagger \eta^\dagger$  相等

## Lorentz 不变量和 Weyl 旋量算符

可以看到，只要将不带点和带点的旋量指标分别缩并完全，就得到 Lorentz 标量

另一方面，缩并一个不带点的指标和一个带点的指标并不能得到 Lorentz 不变量

比如,  $\eta^a \zeta_{\dot{a}}$  和  $\eta^{\dot{a}} \zeta_a$  都不是 Lorentz 标量

## Lorentz 不变量和 Weyl 旋量算符

可以看到，只要将不带点和带点的旋量指标分别缩并完全，就得到 Lorentz 标量

另一方面，缩并一个不带点的指标和一个带点的指标并不能得到 Lorentz 不变量

比如,  $\eta^a \zeta_{\dot{a}}$  和  $\eta^{\dot{a}} \zeta_a$  都不是 Lorentz 标量

对于 Weyl 旋量算符  $\eta_a$  和  $\zeta_a$ ，有

$$(\eta\zeta)^\dagger = (\eta^a \zeta_a)^\dagger = (\zeta_a)^\dagger (\eta^a)^\dagger = \zeta_{\dot{a}}^\dagger \eta^{\dot{a}} = \zeta^\dagger \eta^\dagger$$

即  $\zeta^\dagger \eta^\dagger$  是  $\eta \zeta$  的厄米共轭算符

厄米共轭操作将左手和右手 Weyl 旋量算符相互转换

### 8.6.2 小节 Dirac 和 Majorana 旋量场的分解

依照上一小节关于旋量指标的约定, 将 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  分解成左手 Weyl 旋量场  $\eta_a(x)$  和右手 Weyl 旋量场  $\zeta^{\dagger a}(x)$ , 形式为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \zeta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

在量子化之前,  $\eta_a(x)$  和  $\zeta^{\dagger a}(x)$  是 Grassmann 数, 因而  $\psi(x)$  也是 Grassmann 数

这是在 8.2.1 小节中转置两个旋量场必须添加一个额外负号的原因

### 8.6.2 小节 Dirac 和 Majorana 旋量场的分解

依照上一小节关于旋量指标的约定, 将 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  分解成左手 Weyl 旋量场  $\eta_a(x)$  和右手 Weyl 旋量场  $\zeta^{\dagger a}(x)$ , 形式为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \zeta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

在量子化之前,  $\eta_a(x)$  和  $\zeta^{\dagger a}(x)$  是 Grassmann 数, 因而  $\psi(x)$  也是 Grassmann 数

这是在 8.2.1 小节中转置两个旋量场必须添加一个额外负号的原因

根据  $D(\Lambda) = \begin{pmatrix} d(\Lambda) & \\ & d^{-1\dagger}(\Lambda) \end{pmatrix}$ ,  $\psi(x)$  的固有保时向 Lorentz 变换表达成

$$\begin{pmatrix} \eta'_a(x') \\ \zeta'^{\dagger \dot{a}}(x') \end{pmatrix} = \psi'(x') = D(\Lambda) \psi(x) = \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_a{}^b \eta_b(x) \\ [d^{-1\dagger}(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} \zeta^{\dagger \dot{b}}(x) \end{pmatrix}$$

ψ(x) 的 Dirac 共轭是  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{a}}^\dagger & \zeta^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \delta^{\dot{b}}_{\dot{a}} \\ \delta_b{}^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix}$

## Dirac 矩阵的指标形式

保持旋量指标平衡，则 Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$  化为

$$\begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & i(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \\ i(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} = 0$$

因而 Dirac 矩阵的指标形式是

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}$$

注意,  $\gamma^\mu$  中的  $\gamma^0$  与 Dirac 共轭  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta_a^\dagger & \zeta^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \delta^b_{\dot{a}} \\ \delta_b^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_a^\dagger \end{pmatrix}$

中的  $\gamma^0$  具有不同的指标结构

两者本质不同，有些书将后者记为  $\beta$  以示区别

### $\sigma^\mu$ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 的 Lorentz 变换规则

于是,  $\gamma^\mu$  的 Lorentz 变换规则  $D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu_{\nu}\gamma^\nu$  左边变成

$$\begin{aligned}
& D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) \\
&= \begin{pmatrix} [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c & \\ & [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{c\dot{d}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_d{}^b & \\ & [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c (\sigma^\mu)_{c\dot{d}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} \\ [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d} [d(\Lambda)]_d{}^b & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

右边化为

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} & \Lambda^\mu{}_\nu (\sigma^\nu)_{ab} \\ \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} & \end{pmatrix}$$

两相比较，推出

$$[d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c (\sigma^\mu)_{cd} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^d{}_b = \Lambda^\mu{}_\nu (\sigma^\nu)_{ab}, \quad [d^\dagger(\Lambda)]^a{}_c (\bar{\sigma}^\mu)_{cd} [d(\Lambda)]_d{}^b = \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{ab}$$

这分别是  $\sigma^\mu$  和  $\bar{\sigma}^\mu$  的 Lorentz 变换规则

Lorentz 矢量  $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger$  和  $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta$

对于任意 Weyl 旋量  $\eta$  和  $\zeta$ ，定义  $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{ab}\zeta^{*\dagger b}$  和  $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta \equiv \eta^\dagger_a(\bar{\sigma}^\mu)^{ab}\zeta_b$

它们都是 Lorentz 矢量，相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \eta' \sigma^\mu \zeta'^\dagger &= [d^{-1\text{T}}(\Lambda)]^a{}_c \eta^c (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^b{}_d \zeta'^\dagger {}^d = \eta^c [d^{-1}(\Lambda)]_c{}^a (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^b{}_d \zeta'^\dagger {}^d \\ &= \eta^c \Lambda^\mu{}_\nu (\sigma^\nu)_{cd} \zeta'^\dagger {}^d = \Lambda^\mu{}_\nu \eta \sigma^\nu \zeta'^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta'^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta' &= [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} \eta_{\dot{c}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} [d(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^d \zeta_d = \eta_{\dot{c}}^\dagger [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{c}}{}_{\dot{a}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} [d(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^d \zeta_d \\ &= \eta_{\dot{c}}^\dagger \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}\dot{d}} \zeta_d = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta\end{aligned}$$

**Lorentz 矢量**  $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger$  和  $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta$

对于任意 Weyl 旋量  $\eta$  和  $\zeta$ ，定义  $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{ab}\zeta^{*\dagger b}$  和  $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta \equiv \eta^\dagger_a(\bar{\sigma}^\mu)^{ab}\zeta_b$

它们都是 Lorentz 矢量，相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \eta' \sigma^\mu \zeta'^\dagger &= [d^{-1\text{T}}(\Lambda)]^a_{\textcolor{brown}{c}} \eta^c (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{d}} \zeta^{\dagger \dot{d}} = \eta^c [d^{-1}(\Lambda)]_c^a (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{d}} \zeta^{\dagger \dot{d}} \\ &= \eta^c \textcolor{violet}{\Lambda}^\mu_{\nu} (\sigma^\nu)_{c\dot{d}} \zeta^{\dagger \dot{d}} = \Lambda^\mu_{\nu} \eta \sigma^\nu \zeta^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta'^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta' &= [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} \eta_{\dot{c}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} [d(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \zeta_{\dot{d}} = \eta_{\dot{c}}^\dagger [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{c}}{}_{\dot{a}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} [d(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \zeta_{\dot{d}} \\ &= \eta_{\dot{c}}^\dagger \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}\dot{d}} \zeta_{\dot{d}} = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta\end{aligned}$$

由  $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$  得  $(i\sigma^2) \sigma^\mu (i\sigma^2) = -(\bar{\sigma}^\mu)^T$ ，相应的指标形式为

$$\varepsilon^{ac}(\sigma^\mu)_{c\dot{d}}\varepsilon^{\dot{d}\dot{b}} = -[(\bar{\sigma}^\mu)^T]^{a\dot{b}} = -(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}a}$$

对于 Weyl 旋量场  $\eta_a(x)$  和  $\zeta^{\dagger a}(x)$ ，有

$$\begin{aligned}
[\eta^a(\sigma^\mu)_{ab}\zeta^{\dagger b}]^\dagger &= \zeta^b(\sigma^\mu)_{ba}\eta^{\dagger a} = -\eta^{\dagger a}(\sigma^\mu)_{ba}\zeta^b = -\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\eta_{\dot{c}}^\dagger(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\varepsilon^{bd}\zeta_d \\
&= \eta_{\dot{c}}^\dagger\varepsilon^{db}(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\zeta_d = -\eta_{\dot{c}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d}\zeta_d = -[\zeta_{\dot{d}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{d}c}\eta_c]^\dagger
\end{aligned}$$

第二步用到 Grassmann 数性质, 于是  $(\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger)^\dagger = \zeta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta = -(\zeta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta)^\dagger$

Lorentz 张量  $\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\zeta$  和  $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger$

类似地,  $\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\zeta \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{ab}(\bar{\sigma}^\nu)^{bc}\zeta_c$  和  $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger \equiv \eta^\dagger_a(\bar{\sigma}^\mu)^{ab}(\sigma^\nu)_{bc}\zeta^{\dagger c}$  都是二阶 Lorentz 张量

由  $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$  得  $(-\mathrm{i}\sigma^2) \bar{\sigma}^\mu (-\mathrm{i}\sigma^2) = -(\sigma^\mu)^T$ ，相应的指标形式为

$$\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d}\varepsilon_{db} = -[(\sigma^\mu)^T]_{\dot{a}b} = -(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}$$

再利用  $\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \delta_a{}^c$  和  $\varepsilon^{ac}(\sigma^\mu)_{cd}\varepsilon^{db} = -[(\bar{\sigma}^\mu)^T]^{ab} = -(\bar{\sigma}^\mu)^{ba}$  推出

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}(\sigma^\mu)_{d\dot{e}}\varepsilon^{\dot{e}\dot{b}} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}\delta_d^{\phantom{d}f}(\sigma^\mu)_{f\dot{e}}\varepsilon^{\dot{e}\dot{b}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}\varepsilon_{dg}\varepsilon^{gf}(\sigma^\mu)_{f\dot{e}}\varepsilon^{\dot{e}\dot{b}} \\ &= (-\sigma^\nu)_{g\dot{a}}(-\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}g} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}g}(\sigma^\nu)_{g\dot{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } [\eta^a(\sigma^\mu)_{ab}(\bar{\sigma}^\nu)^{bc}\zeta_c]^\dagger &= \zeta_{\dot{c}}^\dagger(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\eta^{\dot{a}} = -\eta^{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\zeta_{\dot{c}}^\dagger \\
&= -\varepsilon^{\dot{a}\dot{d}}\eta_{\dot{d}}^\dagger(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\varepsilon_{\dot{c}\dot{e}}\zeta^{\dot{e}} = \eta_{\dot{d}}^\dagger\varepsilon_{\dot{e}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\varepsilon^{\dot{a}\dot{d}}\zeta^{\dot{e}} \\
&= \eta_{\dot{d}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{d}g}(\sigma^\nu)_{g\dot{e}}\zeta^{\dot{e}} = [\zeta^e(\sigma^\nu)_{e\dot{g}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{g}d}\eta_d]^\dagger
\end{aligned}$$

即

$$(\eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \zeta)^\dagger = \zeta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger = \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \zeta^\dagger = (\zeta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta)^\dagger$$

## 旋量双线性型的分解



将 Dirac 旋量双线性型分解成由 Weyl 旋量表达的 Lorentz 张量，有

$$\bar{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_a^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger a} \end{pmatrix} = \zeta^a \eta_a + \eta_a^\dagger \zeta^{\dagger a} = \color{orange}\zeta \eta + \eta^\dagger \zeta^\dagger$$

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_a{}^b & \\ & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger b} \end{pmatrix} = -\zeta^a \eta_a + \eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = -\zeta \eta + \eta^\dagger \zeta^\dagger$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)_{ab} & \\ & (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dot{b}} \end{pmatrix} = \zeta^a (\sigma^\mu)_{ab} \zeta^{\dot{b}} + \eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \eta_b \\ &= \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi &= \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}b} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_b{}^c & \\ & \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_c \\ \zeta^{\dagger c} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}b} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_b \\ \zeta^{\dagger \dot{b}} \end{pmatrix} = \zeta^a (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{b}} - \eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}b} \eta_b \\
&= \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger - \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta
\end{aligned}$$

### 旋量双线性型的分解



还有

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b & \\ & (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2} \zeta^a (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b \eta_b + \frac{i}{2} \eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \zeta^{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \\
&= \frac{i}{2} \zeta (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \eta + \frac{i}{2} \eta^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \zeta^\dagger
\end{aligned}$$



## 进一步推出

$$\bar{\psi}_R \psi_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 - \gamma^5) \psi = \zeta \eta$$

$$\bar{\psi}_L \psi_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 + \gamma^5) \psi = \eta^\dagger \zeta^\dagger$$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5) \psi = \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta$$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5) \psi = \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger$$

## 拉氏量的分解



另一方面，自由 Dirac 旋量场的拉氏量分解为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m\delta_a^b & i(\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \partial_\mu \\ i(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \partial_\mu & -m\delta_{\dot{a}}^{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} \\
&= -m\zeta^a \eta_a + i\zeta^a (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \partial_\mu \zeta^{\dagger\dot{b}} + i\eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \partial_\mu \eta_b - m\eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger\dot{a}} \\
&= i\eta^{\dagger\dot{a}} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + i\zeta \sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger - m(\zeta \eta + \eta^\dagger \zeta^\dagger)
\end{aligned}$$



如果 **质量**  $m = 0$ ，则

$$\mathcal{L}_L = i\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta \quad \text{和} \quad \mathcal{L}_R = i\zeta \sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger$$

分别描述自由的左手 Weyl 旋量场  $\eta_a(x)$  和右手 Weyl 旋量场  $\zeta^{\dagger a}(x)$



相应的运动方程是 Weyl 方程

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger = 0$$

## Weyl 旋量场的 $C$ 变换

下面讨论 Weyl 旋量场的分立变换

首先，电荷共轭矩阵的指标形式为  $C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$

将  $\psi(x)$  的电荷共轭场  $\psi^C(x)$  分解成 Weyl 旋量场, 得到

$$\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x) = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) & \eta_b^\dagger(x) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) \\ \eta_b^\dagger(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_a(x) \\ \eta_b^\dagger(x) \end{pmatrix}$$

从而, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $C$  变换化为

$$\begin{pmatrix} C^{-1} \eta_a(x) C \\ C^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) C \end{pmatrix} = C^{-1} \psi(x) C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \begin{pmatrix} \zeta_C^* \zeta_a(x) \\ \zeta_C^* \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

## Weyl 旋量场的 $C$ 变换

下面讨论 Weyl 旋量场的分立变换

首先，电荷共轭矩阵的指标形式为  $C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$

将  $\psi(x)$  的电荷共轭场  $\psi^C(x)$  分解成 Weyl 旋量场, 得到

$$\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x) = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) & \eta_b^\dagger(x) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) \\ \eta_{\dot{b}}^\dagger(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_a(x) \\ \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

从而, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $C$  变换化为

$$\begin{pmatrix} C^{-1} \eta_a(x) C \\ C^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) C \end{pmatrix} = C^{-1} \psi(x) C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \begin{pmatrix} \zeta_C^* \zeta_a(x) \\ \zeta_C^* \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

即左右手 Weyl 旋量场的  $C$  变换是

$$C^{-1}\eta_a(x)C = \zeta_C^* \zeta_a(x), \quad C^{-1}\zeta^{\dagger a}(x)C = \zeta_C^* \eta^{\dagger a}(x)$$

可见，电荷共轭变换将  $\eta$  和  $\zeta$  相互转换。取厄米共轭，得  $C^{-1}\eta_b^\dagger(x)C = \zeta_C\zeta_b^\dagger(x)$  及  $C^{-1}\zeta^b(x)C = \zeta_C\eta^b(x)$ ，分别与  $\varepsilon^{ab}$  和  $\varepsilon_{ab}$  缩并，推出

$$C^{-1} \eta^{\dagger a}(x) C = \zeta_C \zeta^{\dagger a}(x), \quad C^{-1} \zeta_a(x) C = \zeta_C \eta_a(x)$$

## Weyl 旋量场的 $P$ 变换

其次, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $P$  变换表达为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^{-1} \eta_a(x) P \\ P^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) P \end{pmatrix} &= P^{-1} \psi(x) P = \zeta_P^* \gamma^0 \psi(\mathcal{P}x) \\ &= \zeta_P^* \begin{pmatrix} \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{P}x) \\ \zeta^{\dagger b}(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_P^* \zeta^{\dagger a}(\mathcal{P}x) \\ \zeta_P^* \eta_a(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意此处  $\gamma^0$  的指标结构与  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  中一样

## Weyl 旋量场的 $P$ 变换

其次, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $P$  变换表达为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^{-1} \eta_a(x) P \\ P^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) P \end{pmatrix} &= P^{-1} \psi(x) P = \zeta_P^* \gamma^0 \psi(\mathcal{P}x) \\ &= \zeta_P^* \begin{pmatrix} \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \\ \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{P}x) \\ \zeta^{\dagger b}(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_P^* \zeta^{\dagger a}(\mathcal{P}x) \\ \zeta_P^* \eta_a(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意此处  $\gamma^0$  的指标结构与  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  中一样

于是得到左右手 Weyl 旋量场的  $P$  变换

$$P^{-1} \eta_a(x) P = \zeta_P^* \zeta^{\dagger a}(\mathcal{P}x), \quad P^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) P = \zeta_P^* \eta_a(\mathcal{P}x)$$

也就是说，宇称变换将左手和右手 Weyl 旋量场相互转换

♣ 取厄米共轭得  $P^{-1}\eta_h^\dagger(x)P = \zeta_P\zeta^b(\mathcal{P}x)$  和  $P^{-1}\zeta^b(x)P = \zeta_P\eta_h^\dagger(\mathcal{P}x)$

◆ 两边与  $i\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab}$  缩并, 推出

$$P^{-1} \eta^{\dagger a}(x) P = -\zeta_P \zeta_a(\mathcal{P}x), \quad P^{-1} \zeta_a(x) P = -\zeta_P \eta^{\dagger a}(\mathcal{P}x)$$

## Weyl 旋量场的 $T$ 变换

骆驼 最后, 矩阵  $\mathcal{C}\gamma^5$  的指标形式是  $\mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{ab} \end{pmatrix}$

Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $T$  变换化为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T^{-1} \eta_a(x) T \\ T^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) T \end{pmatrix} &= T^{-1} \psi(x) T = \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 \psi(\mathcal{T}x) \\ &= \zeta_T^* \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} \\ -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{T}x) \\ \zeta^{\dagger \dot{b}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_T^* \eta^a(\mathcal{T}x) \\ -\zeta_T^* \zeta^{\dagger \dot{a}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Weyl 旋量场的 $T$ 变换

骆驼 最后, 矩阵  $\mathcal{C}\gamma^5$  的指标形式是  $\mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & & \\ & i\sigma^2 & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & & \\ & & -\varepsilon_{ab} \end{pmatrix}$

Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $T$  变换化为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T^{-1} \eta_a(x) T \\ T^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) T \end{pmatrix} &= T^{-1} \psi(x) T = \zeta_T^* \mathcal{C} \gamma^5 \psi(\mathcal{T}x) \\ &= \zeta_T^* \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} \\ -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{T}x) \\ \zeta^{\dagger \dot{b}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_T^* \eta^a(\mathcal{T}x) \\ -\zeta_T^* \zeta^{\dagger \dot{a}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则左手 Weyl 旋量场的  $T$  变换是

$$T^{-1} \eta_a(x) T = \zeta_T^* \eta^a(\mathcal{T}x), \quad T^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) T = -\zeta_T^* \zeta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x)$$

取厄米共轭, 有  $T^{-1}\eta_b^\dagger(x)T = \zeta_T \eta^{\dagger b}(\mathcal{T}x)$  和  $T^{-1}\zeta^b(x)T = -\zeta_T \zeta_b(\mathcal{T}x)$

与  $i\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab}$  缩并, 得

$$T^{-1} \eta^{\dagger a}(x) T = -\zeta_T \eta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x), \quad T^{-1} \zeta_a(x) T = \zeta_T \zeta^a(\mathcal{T}x)$$

## Majorana 旋量场的分解

下面讨论 Majorana 旋量场, Majorana 条件意味着  $\begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger a} \end{pmatrix} = \psi = \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} \zeta_a \\ \eta^{\dagger a} \end{pmatrix}$

即  $\eta = \zeta$ ，这表明 Majorana 旋量场中的左手和右手 Weyl 旋量场是相关的

因此，可以将 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  分解成  $\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$

## Majorana 旋量场的分解

下面讨论 Majorana 旋量场, Majorana 条件意味着  $\begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger a} \end{pmatrix} = \psi = \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} \zeta_a \\ \eta^{\dagger a} \end{pmatrix}$

即  $\eta = \zeta$ ，这表明 Majorana 旋量场中的左手和右手 Weyl 旋量场是相关的

因此，可以将 Majorana 旋量场  $\psi(x)$  分解成  $\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$

而自由 Majorana 旋量场的拉氏量分解为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & i(\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \partial_\mu \\ i(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}b} \partial_\mu & -m\delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \eta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [i\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + i\eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m(\eta \eta + \eta^\dagger \eta^\dagger)]\end{aligned}$$

⑧ 利用  $\zeta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta$  将方括号中第二项化为

$$i\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger = i\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger) - i(\partial_\mu\eta)\sigma^\mu\eta^\dagger = i\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger) + i\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta$$

扔掉全散度项  $i\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger)$ ，拉氏量变成

$$\mathcal{L} = i\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta - \frac{1}{2} m(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger)$$

### Majorana 旋量场的 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$

袋鼠  $\zeta \sigma^\mu \eta^\dagger = -\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta$ 、 $\eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \zeta = \zeta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta$  和  $\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \zeta^\dagger = \zeta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger$  意味着

$$\eta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta, \quad \eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\eta = \eta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\eta, \quad \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\eta^\dagger = \eta^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger$$

对于 Majorana 旋量场,  $\eta = \zeta$ ,  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta$  化为

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \eta \sigma^\mu \eta^\dagger + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta = -\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta = 0$$

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{2} \zeta (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \eta + \frac{i}{2} \eta^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \zeta^\dagger \text{ 化为}$$

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{2} (\eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \eta - \eta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta) + \frac{i}{2} (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \eta^\dagger - \eta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger) = 0$$

这样就验证了 8.2.2 小节的结论

## 8.7 节 Majorana 旋量场相关 Feynman 规则

6.1.1 小节提到, 由于 Dirac 旋量场可以携带某种  $U(1)$  荷, 相应费米子线上的箭头代表  $U(1)$  荷流动的方向, 或者说费米子数流动的方向

另一方面, Majorana 旋量场不能携带任何  $U(1)$  荷, 不存在费米子数流动的方向, 相应的费米子线则不应该具备箭头

如果相互作用过程涉及到 Majorana 旋量场与 Dirac 旋量场的耦合, 带箭头与不带箭头的费米子线将在顶点处交汇, 导致费米子数破坏 (fermion-number violation)

我们需要研究适用于这种情况的 Feynman 规则

本节讨论一个简单例子，更一般的情况可参考文献

- A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck, “Feynman rules for fermion number violating interactions,” Nucl. Phys. B 387 (1992) 467–481

### 8.7.1 小节 拉氏量和 $CP$ 对称性

考虑复标量场  $\phi(x)$ 、Dirac 旋量场  $\psi(x)$  和 Majorana 旋量场  $\chi(x)$  构成拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} \bar{\chi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi) \chi + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

相互作用拉氏量为  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$

⚠  $\kappa$  是一个复耦合常数,  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  是厄米的, 因为  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  中两项互为厄米共轭,

$$(\kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi)^\dagger = \kappa^* \psi^\dagger P_R \gamma^0 \chi = \kappa^* \psi^\dagger \gamma^0 P_L \chi = \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$$

这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用

### 8.7.1 小节 拉氏量和 $CP$ 对称性

考虑复标量场  $\phi(x)$ 、Dirac 旋量场  $\psi(x)$  和 Majorana 旋量场  $\chi(x)$  构成拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} \bar{\chi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi) \chi + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

相互作用拉氏量为  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$

⚠  $\kappa$  是一个复耦合常数,  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  是厄米的, 因为  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  中两项互为厄米共轭,

$$(\kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi)^\dagger = \kappa^* \psi^\dagger P_R \gamma^0 \chi = \kappa^* \psi^\dagger \gamma^0 P_L \chi = \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$$

这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用

作  $U(1)$  整体变换  $\phi'(x) = e^{i\varphi\theta}\phi(x)$  和  $\psi'(x) = e^{i\varphi\theta}\psi(x)$ ，则拉氏量  $\mathcal{L}$  不变

可见，这个理论具有一个  $U(1)$  整体对称性，而复标量场  $\phi(x)$  和 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的  $U(1)$  荷相同，均为  $q$

将耦合常数分解为实部和虚部,  $\kappa = \kappa_R + i\kappa_I$ , 则相互作用拉氏量化为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_{\text{R}} (\phi^\dagger \bar{\chi} P_{\text{R}} \psi + \phi \bar{\psi} P_{\text{L}} \chi) + \kappa_{\text{I}} (\text{i} \phi^\dagger \bar{\chi} P_{\text{R}} \psi - \text{i} \phi \bar{\psi} P_{\text{L}} \chi)$$

### **$C$ 破坏和 $P$ 破坏**

假设三个量子场的  $C$ 、 $P$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^* \phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^* \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\chi(x)C = \tilde{\zeta}_C^* \chi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\chi(x)P = \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x)$$

推出算符  $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$  的  $C$ 、 $P$  变换

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathbb{R}}\psi(x)C = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathbb{R}}\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{R}}\psi(x)P = \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_{\text{L}}\psi(\mathcal{P}x)$$

而算符  $\phi\bar{\psi}P_L\chi$  的  $C$ 、 $P$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{L}}\psi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\text{R}}\chi(\mathcal{P}x)$$

### $C$ 破坏和 $P$ 破坏

假设三个量子场的  $C$ 、 $P$  变换为

$$\begin{aligned} C^{-1}\phi(x)C &= \eta_C^*\phi^\dagger(x), & C^{-1}\psi(x)C &= \zeta_C^*\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), & C^{-1}\chi(x)C &= \tilde{\zeta}_C^*\chi(x) \\ P^{-1}\phi(x)P &= \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), & P^{-1}\psi(x)P &= \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), & P^{-1}\chi(x)P &= \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x) \end{aligned}$$

推出算符  $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$  的  $C$ 、 $P$  变换

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathbb{R}}\psi(x)C = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathbb{R}}\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathbb{R}}\psi(x)P = \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_L\psi(\mathcal{P}x)$$

而算符  $\phi\bar{\psi}P_L\chi$  的  $C$ 、 $P$  变换为

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\text{L}}\psi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\text{L}}\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\text{R}}\chi(\mathcal{P}x)$$

无论作  $C$  变换还是  $P$  变换, 相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$  都不能保持不变, 因此理论不具有电荷共轭对称性和空间反射对称性

换言之，这个理论既是 **C** 破坏 (*C*-violation) 的，又是 **P** 破坏 (*P*-violation) 的

## CP 破坏?

进一步, 算符  $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$  和  $\phi \bar{\psi} P_L \chi$  的  $CP$  变换为

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) P_R \psi(x) CP = \eta_{CP} \phi(\mathcal{P}x) \bar{\psi}(\mathcal{P}x) P_L \chi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)CP = \eta_{CP}^*\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_R\psi(\mathcal{P}x)$$

如果适当选取相位因子的值, 使得  $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$

则算符  $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi$  在  $CP$  变换下不变

而相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$  中  $\kappa_R$  对应的项具有  $CP$  对称性,  $\kappa_I$  对应的项引起  $CP$  破坏 ( $CP$ -violation)

## CP 破坏?

进一步, 算符  $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$  和  $\phi \bar{\psi} P_L \chi$  的  $CP$  变换为

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) P_R \psi(x) CP = \eta_{CP} \phi(\mathcal{P}x) \bar{\psi}(\mathcal{P}x) P_L \chi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \phi(x) \bar{\psi}(x) P_L \chi(x) CP = \eta_{CP}^* \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \bar{\chi}(\mathcal{P}x) P_R \psi(\mathcal{P}x)$$

如果适当选取相位因子的值, 使得  $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$

则算符  $\phi^\dagger \bar{\chi} P_B \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi$  在  $CP$  变换下不变

而相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$  中  $\kappa_R$  对应的项具有  $CP$  对称性,  $\kappa_I$  对应的项引起  $CP$  破坏 ( $CP$ -violation)

如果相位因子的取值使得  $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = -1$

则算符  $i\phi^\dagger \bar{\chi} P_B \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi$  在  $CP$  变换下不变

而  $\kappa_L$  对应的项具有  $CP$  对称性,  $\kappa_R$  对应的项引起  $CP$  破坏

因此, 当  $\kappa_R \neq 0$  且  $\kappa_I \neq 0$  时, 相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  看起来会破坏  $CP$  对称性

## CP 对称性

🦒 不过, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  是复场, 它的相位具有任意性, 可用于吸收耦合常数  $\kappa \equiv |\kappa|e^{-i\varphi}$  的相位  $\varphi$

⚙️ 如果将 Dirac 旋量场重新定义为  $\psi'(x) = e^{-i\varphi}\psi(x)$ , 则  $\bar{\psi}'(x) = e^{i\varphi}\bar{\psi}(x)$ , 于是  $\mathcal{L}_{\text{int}} = |\kappa|e^{-i\varphi} \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + |\kappa|e^{i\varphi} \phi \bar{\psi} P_L \chi = |\kappa|(\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi' + \phi \bar{\psi}' P_L \chi)$  描述同一个理论

⚖️ 但此时耦合常数  $|\kappa|$  是实数, 不会引起 CP 破坏

! 因此, 这个理论实际上是具有 CP 对称性的

!! 当一个理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时, 才会出现 CP 破坏

## CP 对称性

不过, Dirac 旋量场  $\psi(x)$  是复场, 它的相位具有任意性, 可用于吸收耦合常数  $\kappa \equiv |\kappa|e^{-i\varphi}$  的相位  $\varphi$

如果将 Dirac 旋量场重新定义为  $\psi'(x) = e^{-i\varphi}\psi(x)$ , 则  $\bar{\psi}'(x) = e^{i\varphi}\bar{\psi}(x)$ , 于是  $\mathcal{L}_{\text{int}} = |\kappa|e^{-i\varphi} \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + |\kappa|e^{i\varphi} \phi \bar{\psi} P_L \chi = |\kappa|(\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi' + \phi \bar{\psi}' P_L \chi)$  描述同一个理论

但此时耦合常数  $|\kappa|$  是实数, 不会引起 CP 破坏

因此, 这个理论实际上是具有 CP 对称性的

当一个理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时, 才会出现 CP 破坏

在下面的讨论中, 不失一般性, 将耦合常数  $\kappa$  取为实数, 相互作用拉氏量表达为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa(\phi^\dagger \bar{\chi} \Gamma_1 \psi + \phi \bar{\psi} \Gamma_2 \chi)$$

这里引入了  $\Gamma_1 = P_R$  和  $\Gamma_2 = P_L$

下面许多结论具有一般性, 与  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  的具体形式无关

### 8.7.2 小节 Feynman 规则

将 Dirac 旋量场、复标量场和 Majorana 旋量场的平面波展开式表达为

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\textcolor{brown}{c}_p e^{-ip \cdot x} + d_p^\dagger e^{ip \cdot x})$$

$$\chi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{f}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{f}_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

相应地, 引入以下单粒子态,

Dirac 正费米子  $\psi$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

Dirac 反费米子  $\bar{\psi}$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$

正标量玻色子  $\phi$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} c_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

反标量玻色子  $\bar{\phi}$  的单粒子态  $|\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} d_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$

Majorana 费米子  $\chi$  的单粒子态  $|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} f_{p, \lambda}^\dagger |0\rangle$

注意, Majorana 费米子  $\chi$  是纯中性的, 动量记号的右上角没有正负号

$S$  算符  $n = 1$  阶

 Dirac 旋量场和复标量场与初末态的缩并结果见第 6 章

Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\chi(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \chi^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle 0 | \bar{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \bar{\chi}^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{\chi(x)} | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi^{(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}
 \end{aligned}$$

$S$  算符  $n = 1$  阶

Dirac 旋量场和复标量场与初末态的缩并结果见第 6 章

Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \overline{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \chi^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle 0 | \bar{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle &\equiv \langle 0 | \bar{\chi}^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x} \\
 \langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{\chi}(x) | 0 \rangle &\equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi^{(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}
 \end{aligned}$$

由于相互作用哈密顿量密度  $\mathcal{H}_1 \equiv -\mathcal{L}_{\text{int}}$ ， $S$  算符展开式中  $n = 1$  的项为

$$\begin{aligned} iT^{(1)} &= -i \int d^4x \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x)] = i \int d^4x \mathsf{T}[\mathcal{L}_{\text{int}}(x)] \\ &= i\kappa \int d^4x \mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x) + \phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] \end{aligned}$$

根据 Wick 定理,  $iT^{(1)}$  只包含下面两项:

$$iT_1^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)], \quad iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$$

$\psi \rightarrow \chi\phi$  衰变过程

考慮  $\psi \rightarrow \chi\phi$  衰變，初末態為  $|p^+, \lambda\rangle$  和  $|q, \lambda'; k^+\rangle$ ， $iT_1^{(1)}$  貢獻的散射矩陣元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \overline{\mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)]} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= i \kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)
\end{aligned}$$

这是计算散射矩阵元的第一种方法，与 6.1 节介绍的方法一样

$\psi \rightarrow \chi\phi$  衰变过程

考慮  $\psi \rightarrow \chi\phi$  衰變，初末態為  $|p^+, \lambda\rangle$  和  $|q, \lambda'; k^+\rangle$ ， $iT_1^{(1)}$  貢獻的散射矩陣元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \overline{\mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)]} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= i \kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)
\end{aligned}$$

这是计算散射矩阵元的**第一种方法**，与 6.1 节介绍的方法一样

利用电荷共轭变换，可以引进第二种计算方法

将相互作用算符  $\bar{\chi}\Gamma_1\psi$  化为

$$\begin{aligned}\bar{\chi}\Gamma_1\psi &= (\bar{\chi}\Gamma_1\psi)^T = -\psi^T\Gamma_1^T\bar{\chi}^T = -\psi^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\Gamma_1^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^T \\ &= \psi^T\mathcal{C}\Gamma_1^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^T = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi^C\end{aligned}$$

同理推出  $\bar{\psi} \Gamma_2 \chi = \bar{\chi}^C \Gamma_2^C \psi^C$

## 第二种计算方法

老虎 通过 Majorana 条件  $\chi = \chi^C$  将  $\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi^C$  和  $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}^C\Gamma_2^C\psi^C$  化为

$$\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi, \quad \bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}\Gamma_2^C\psi^C$$

从而将  $iT_1^{(1)}$  和  $iT_2^{(1)}$  改写为

$$iT_1^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)] = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}^C(x) \Gamma_1^C \chi(x)]$$

$$iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] = i\kappa \int d^4x \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]$$

注意，此时旋量场算符排列的次序与原来相反

现在,  $iT_1^{(1)}$  贡献的  $\psi \rightarrow \chi\phi$  散射矩阵元也可以表达成

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathbf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \chi_b(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -i \kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) \chi_b^{(-)}(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^C(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle
\end{aligned}$$

电荷共轭场  $\psi^c(x)$  的平面波展开和初末态缩并

 Dirac 旋量场  $\psi(x)$  的电荷共轭场  $\psi^C(x)$  的平面波展开式是

$$\begin{aligned}\psi^C(x) &= \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[ \mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x}]\end{aligned}$$

跟  $\psi(x)$  展开式的差异只在于  $a$  与  $b$  互换, 相应 Dirac 共轭的展开式为

$$\bar{\psi}^C(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{b}_{\mathbf{p}, \lambda}^{\dagger} e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \mathbf{a}_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x}]$$

据此, 将电荷共轭场  $\psi^C(x)$  和  $\bar{\psi}^C(x)$  与初末态的缩并定义成

$$\langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \psi^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}^C(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \bar{\psi}^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle \bar{\mathbf{p}}^-, \lambda | \bar{\psi}^C(x) | 0 \rangle \equiv \langle \bar{\mathbf{p}}^-, \lambda | \bar{\psi}^{C(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\bar{\mathbf{p}}, \lambda) e^{i \bar{p} \cdot x}$$

$$\langle \overline{\mathbf{p}^+, \lambda} | \psi^C(x) | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}^+, \lambda | \psi^{C(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i p \cdot x}$$

## 第二种方法的计算结果

$\psi \rightarrow \chi\phi$  散射矩阵元变成

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -i\kappa \int d^4x \left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \right| \mathbf{N}[\phi^\dagger(x) \chi_b(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^C(x)] \left| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k) \cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= i\kappa \int d^4x \left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \right| \mathbf{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) \Gamma_1^C \chi_b(x)] \left| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

## 第二种方法的计算结果

$\psi \rightarrow \chi\phi$  散射矩阵元变成

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathbf{N}[\phi^\dagger(x)\chi_b(x)(\Gamma_1^C)_{ab}\bar{\psi}_a^C(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \mathbf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}_a^C(x)\Gamma_1^C\chi_b(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle
\end{aligned}$$

倒数第二行是第二种方法的计算结果，有

$$\begin{aligned} -\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') &= -u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C} \Gamma_1^C \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda') = u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda') \\ &= [u^T(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^T \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda')]^T = \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) \end{aligned}$$

第二种方法结果与第一种方法结果  $i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)$  相等

### $\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程：第一种方法

另一方面，考虑  $\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$  衰变过程，初态为  $|p^-, \lambda\rangle$ ，末态为  $|q, \lambda'; k^-\rangle$

根据  $iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$  按第一种方法计算

式中  $iT_2^{(1)}$  贡献的散射矩阵元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | iT_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\chi_b(x)(\Gamma_2)_{ab}\bar{\psi}_a(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_2)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)
\end{aligned}$$

### $\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程：第二种方法

根据  $iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]$  按**第二种方法**计算

  $iT_2^{(1)}$  贡献的散射矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | iT_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) &= v^T(\mathbf{q}, \lambda') \mathcal{C} \Gamma_2^C \mathcal{C} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = -v^T(\mathbf{q}, \lambda') \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) \\ &= -[v^T(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^T \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda)]^T = -\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda')\end{aligned}$$

## 两种方法的计算结果相等

## 费米子流方向

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。

现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 **Feynman 规则**，这样的规则将特别适用于处理 **费米子数破坏** 过程

为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示费米子流 (fermion flow) 的方向

费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法

### 费米子流方向

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。

现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 **Feynman 规则**，这样的规则将特别适用于处理 **费米子数破坏** 过程

为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示费米子流 (fermion flow) 的方向

费米子流的**两种方向**分别对应于上述**两种计算方法**

当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相同时，采用第一种计算方法

当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相反时，采用与电荷共轭场有关的第二种计算方法

这样一来，两种费米子流方向是等价的，对每条连续费米子线可采取任意一种方向进行计算

## 位置空间外线规则

于是, 位置空间中费米子的外线规则如下, 带箭头的点划线表示费米子流方向

### 1 Dirac 正费米子 $\psi$ 入射光线:

$$\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} x = \langle 0 | \psi(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\psi, \lambda \xrightarrow{p} \bullet x = \langle 0 | \bar{\psi}^C(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i p \cdot x}$$

## ② Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射光线:

$$\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \bar{\psi}(x) | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

### ③ Dirac 正费米子 $\psi$ 出射光线:

$$x \bullet \xrightarrow{p} \psi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^+}, \lambda | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i p \cdot x}$$

$$x \xrightarrow[p]{\quad} \psi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^+, \lambda} | \psi^C(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i p \cdot x}$$

## 位置空间外线规则

#### ④ Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射光线:

$$x \bullet \overrightarrow{p} \bar{\psi}, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^-}, \lambda | \psi(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

## 5 Majorana 费米子 $\chi$ 入射光线:

$$\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \overline{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\chi, \lambda \xleftarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \chi(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

## 6 Majorana 费米子 $\chi$ 出射外线:

$$x \bullet \xrightarrow{\substack{p \\ \text{---} \\ \text{---}}} \chi, \lambda = \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow{\substack{p \\ \text{---} \\ \text{---}}} \chi, \lambda = \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

Majorana 费米子线  
上没有箭头, Feynman 规  
则依赖于费米子流方向  
与动量方向之间的异同

从每条连续费米子线写出散射振幅时，总是逆着费米子流方向逐项写下费米子的贡献

## 第一种方法 Feynman 图

对于上述  $\psi \rightarrow \chi\phi$  和  $\bar{\psi} \rightarrow \chi\bar{\phi}$  过程，第一种计算方法对应于

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= \psi, \lambda \begin{array}{c} p \\ \nearrow x \\ \searrow q \end{array} \phi \chi, \lambda' \\
 &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \mathbf{\Gamma}_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k) \cdot x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | i T_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= \bar{\psi}, \lambda \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{q} \end{array} x \begin{array}{c} \nearrow k \\ \nearrow \bar{\phi} \end{array} \chi, \lambda' \\
 &= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x}
 \end{aligned}$$

## 第二种方法 Feynman 图

## 第二种计算方法对应于

种计算方法对应于

$$\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \psi, \lambda$$

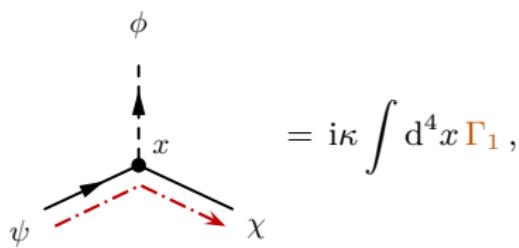
$$= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k) \cdot x}$$

两种方法在 Feynman 图上的差异只是费米子流方向不同，即点划线箭头方向不同

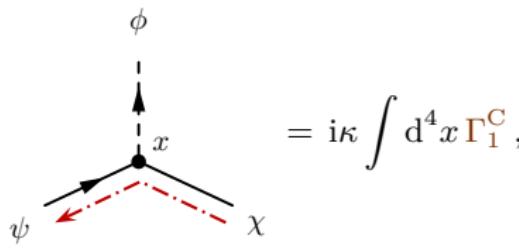
额外的负号来自两个费米子场算符的交换

## 位置空间顶点规则

hog 观察各个 Feynman 图元素与振幅表达式的关系，归纳出位置空间中的顶点规则



$$= i\kappa \int d^4x \Gamma_2$$



$$= i\kappa \int d^4x \Gamma_2^C$$

# Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

研究  $iT^{(2)}$  的散射矩阵元时可能遇到像  $N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)}\psi(x)\Gamma_2\chi(x)]$  这样的表达式

如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与 6.1.1 小节规则类似，表达为

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bullet y = \overline{\psi(y)}\psi(x) = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

## Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

研究  $iT^{(2)}$  的散射矩阵元时可能遇到像  $N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1\psi(y)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$  这样的表达式

如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与 6.1.1 小节规则类似，表达为

$$x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bullet y = \overline{\psi(y)\psi(x)} = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

由  $\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi$  和  $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}\Gamma_2^C\psi^C$  推出

$$\begin{aligned} \mathsf{N}[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)\psi(x)} \Gamma_2 \chi(x)] &= \mathsf{N}[\overline{\psi^C(y)\Gamma_1^C \chi(y)} \bar{\chi}(x)\Gamma_2^C \psi^C(x)] \\ &= \mathsf{N}[\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C \overline{\psi^C(x)\psi^C(y)} \Gamma_1^C \chi(y)] \end{aligned}$$

如果采用**第二种方法**进行计算，则相应的 **Feynman 传播子**是

$$x \bullet \xrightarrow{p} y = \overline{\psi^C(x)} \bar{\psi}^C(y) = \langle 0 | \mathsf{T}[\psi^C(x) \bar{\psi}^C(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathsf{T}[\mathcal{C} \bar{\psi}^T(x) \psi^T(y) \mathcal{C}] | 0 \rangle$$

## Majorana 旋量场的 Feynman 传播子



进一步计算得到



$$\begin{aligned}
 x \bullet \xrightarrow{p} \bullet y &= \overline{\psi^C(x)\bar{\psi}^C(y)} = \langle 0 | \mathsf{T}[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle \\
 &= -\mathcal{C}\{\langle 0 | \mathsf{T}[\psi(y)\bar{\psi}(x)] | 0 \rangle\}^T \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}[\overline{\psi(y)\bar{\psi}(x)}]^T \mathcal{C} \\
 &= \mathcal{C}^{-1}S_F^T(y-x)\mathcal{C} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{C}^{-1}i(\not{p} + m_\psi)^T \mathcal{C}}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}
 \end{aligned}$$



最后一步用到  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

## Majorana 旋量场的 Feynman 传播子



进一步计算得到

$$\begin{aligned}
x \bullet \xrightarrow[p]{} \bullet y &= \overline{\psi^C(x)} \bar{\psi}^C(y) = \langle 0 | \mathsf{T}[\mathcal{C} \bar{\psi}^T(x) \psi^T(y) \mathcal{C}] | 0 \rangle \\
&= -\mathcal{C} \{ \langle 0 | \mathsf{T}[\psi(y) \bar{\psi}(x)] | 0 \rangle \}^T \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1} [\overline{\psi(y) \bar{\psi}(x)}]^T \mathcal{C} \\
&= \mathcal{C}^{-1} S_F^T(y-x) \mathcal{C} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{C}^{-1} i(\not{p} + m_\psi)^T \mathcal{C}}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}
\end{aligned}$$



最后一步用到  $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$



另一方面, Majorana 旋量场的 Feynman 传播子为

$$x \bullet \overset{p}{\longrightarrow} \bullet y = \overbrace{\chi(y)\bar{\chi}(x)}^{\text{Feynman diagram}} = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p+m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

## 动量空间 Feynman 规则

转换到动量空间，推出以下 Feynman 规则

- 1 Dirac 正费米子  $\psi$  入射外线:  $\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda), \quad \psi, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$

2 Dirac 反费米子  $\bar{\psi}$  入射外线:  $\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bar{\psi}, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$

3 Dirac 正费米子  $\psi$  出射外线:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \psi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \psi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$

4 Dirac 反费米子  $\bar{\psi}$  出射外线:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bar{\psi}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \bar{\psi}, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$

5 Majorana 费米子  $\chi$  入射外线:  $\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda), \quad \chi, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$

6 Majorana 费米子  $\chi$  出射外线:  $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \chi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda), \quad \bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \chi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$

## 动量空间 Feynman 规则

### 7 Dirac 费米子传播子:

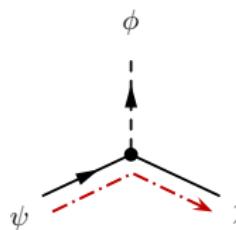
$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} = \frac{i(p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} p \\ \leftarrow \end{array} = \frac{i(-p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$$

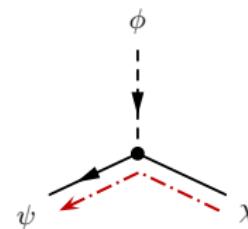
### 8 Majorana 费米子传播子

$$\text{子: } \frac{p}{\cancel{p}^2 - m_\chi^2 + i\epsilon} = \frac{i(p + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon}$$

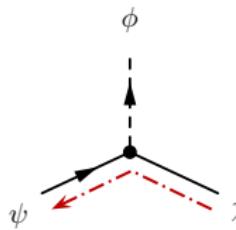
### 9 Yukawa 相互作用顶点:



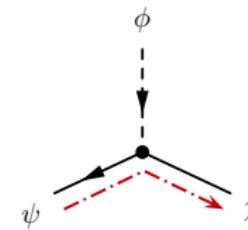
$$= i\kappa \Gamma_1$$



$$= i\kappa \Gamma_2$$



$$= i\kappa \Gamma_1^C$$



$$= i\kappa \Gamma_2^C$$

Majorana 旋量场与对称性因子



注意，Majorana 费米子是纯中性粒子



如果末态包含超过 1 个全同的 Majorana 费米子



 计算散射截面或衰变宽度时需要考虑**末态对称性因子**  $S$



假如拉氏量的某个相互作用项包含 2 个或以上全同的 Majorana 旋量场



类似于 6.3 节的讨论，在导出顶点 Feynman 规则时需要考虑组合因子



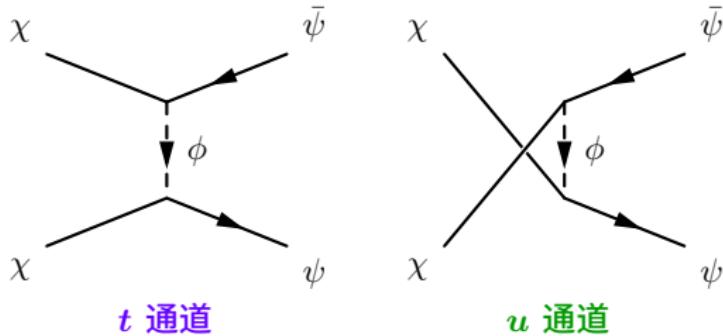
计算时还需要留意 Feynman 图的对称性因子

### 8.7.3 小节 应用

下面应用上一小节推导出来的 **Feynman 规则** 进行计算

考虑  $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$  湮灭过程

领头阶 Feynman 图如下图所示, 包含一个  $t$  通道和一个  $u$  通道的 Feynman 图



现在，费米子流方向有多种取法，但各种取法的计算结果应该是等价的。

### 费米子流方向第一种取法

设初态两个 Majorana 费米子  $\chi$  的四维动量为  $k_1^\mu$  和  $k_2^\mu$ ，末态 Dirac 费米子  $\psi$  和  $\bar{\psi}$  的四维动量为  $p_1^\mu$  和  $p_2^\mu$ ，令  $t = (k_1 - p_1)^2$ ， $u = (k_1 - p_2)^2$

添加带箭头的点划线表示费米子流方向

应用动量空间 Feynman 规则,  $t$  通道和  $u$  通道 Feynman 图贡献的不变振幅是

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_t &= \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \\
&\quad \text{Diagram: } \begin{array}{c} \chi \xrightarrow{k_2} \text{---} \xrightarrow{p_2} \bar{\psi} \\ \downarrow p_1 - k_1 \\ \text{---} \xrightarrow{k_1} \xrightarrow{p_1} \psi \end{array} \\
&= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)\bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2) \\
i\mathcal{M}_u &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_2) \\
&\quad \text{Diagram: } \begin{array}{c} \chi \xrightarrow{k_2} \text{---} \xrightarrow{p_2} \bar{\psi} \\ \downarrow k_1 - p_2 \\ \text{---} \xrightarrow{k_1} \xrightarrow{p_1} \psi \end{array} \\
&= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2)
\end{aligned}$$

### 第一种取法的相对符号



根据

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& = \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\bar{\chi}_c(y)\chi_b(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& - \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\chi_b(x)\bar{\chi}_c(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle
\end{aligned}$$



这两个 Feynman 图的相对符号为负



因而总振幅是  $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_t - i\mathcal{M}_u$

## 费米子流方向第二种取法

当然，也可以选择其它费米子流方向进行计算

比如,同时反转上述  $t$  通道 Feynman 图中两条点划线的方向,则  $t$  通道振幅变成

$$\begin{aligned}
i\tilde{\mathcal{M}}_t = & \begin{array}{c} \text{Feynman diagram} \\ \text{top row: } \chi \rightarrow \bar{\psi} \\ \text{middle row: } k_2 \rightarrow p_2 \\ \text{bottom row: } p_1 - k_1 \rightarrow p_1 \\ \text{left side: } \chi \\ \text{right side: } \bar{\psi} \end{array} = \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_2)(i\kappa\Gamma_1^C)u(k_2) \\
& \begin{array}{c} \text{Feynman diagram} \\ \text{top row: } \chi \rightarrow \bar{\psi} \\ \text{middle row: } k_1 \rightarrow p_1 \\ \text{bottom row: } \chi \rightarrow \bar{\psi} \\ \text{left side: } \chi \\ \text{right side: } \bar{\psi} \end{array} = -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2)
\end{aligned}$$

反转上述  $u$  通道 Feynman 图中一条点划线的方向,  $u$  通道振幅化为

$$\begin{aligned}
i\tilde{\mathcal{M}}_u &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \\
&= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1)
\end{aligned}$$

## 第二种取法的相对符号

根据

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\psi_b^C(x)\phi^\dagger(y)\bar{\psi}_c^C(y)(\Gamma_1^C)_{cd}\chi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\psi_b^C(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
= & \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\bar{\psi}_c^C(y)\psi_b^C(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1^C)_{cd}\chi_d(y)\bar{\chi}_a(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathcal{N}[\psi_d(y)\psi_b^C(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_a(x)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle
\end{aligned}$$

这两个 Feynman 图的相对符号为正

因而总振幅是  $i\tilde{M} = i\tilde{M}_t + i\tilde{M}_u$

## 两种取法的等价性

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\textcolor{blue}{C}} v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\textcolor{brown}{C}} u(k_2) &= u^T(k_1) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{v}^T(k_2) \\
&= [u^T(k_1) \Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \Gamma_1^T \bar{v}^T(k_2)]^T \\
&= \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1) &= \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)u^T(k_2)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^T\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^T(p_1) \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)[u^T(k_2)\Gamma_2^T\bar{u}^T(p_1)]^T \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}\tilde{\mathcal{M}}_t &= -\frac{\mathbf{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\mathbf{C}} v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\mathbf{C}} u(k_2) \\
 &= -\frac{\mathbf{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2} \bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)\bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2) = \mathbf{i}\mathcal{M}_t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}}_u &= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) \\ &= +\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2) = -i\mathcal{M}_u \end{aligned}$$

## 两种取法的等价性

$$\begin{aligned}\bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\text{C}}v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\text{C}}u(k_2) &= u^{\text{T}}(k_1)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\text{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^{\text{T}}(p_1)v^{\text{T}}(p_2)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_1^{\text{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{v}^{\text{T}}(k_2) \\ &= [u^{\text{T}}(k_1)\Gamma_2^{\text{T}}\bar{u}^{\text{T}}(p_1)v^{\text{T}}(p_2)\Gamma_1^{\text{T}}\bar{v}^{\text{T}}(k_2)]^{\text{T}} \\ &= \bar{v}(k_2)\Gamma_1v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2u(k_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1) &= \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)u^T(k_2)\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^T\mathcal{C}\bar{u}^T(p_1) \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)[u^T(k_2)\Gamma_2^T\bar{u}^T(p_1)]^T \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2)
\end{aligned}$$

→ 
$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}}_t &= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2) \Gamma_1^C u(k_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1) \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) = i\mathcal{M}_t \\ i\tilde{\mathcal{M}}_u &= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) \\ &= +\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2) = -i\mathcal{M}_u \end{aligned}$$

可见，根据费米子流方向的不同取法计算出来的结果确实是等价的

因此  $i\tilde{\mathcal{M}} = i\tilde{\mathcal{M}}_t + i\tilde{\mathcal{M}}_u = i\mathcal{M}_t - i\mathcal{M}_u = i\mathcal{M}$

## 非极化振幅模方

接下来计算  $xx \rightarrow \psi\bar{\psi}$  的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_u|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.})$$

使用具体形式  $\Gamma_1 \equiv P_R$  和  $\Gamma_2 \equiv P_L$ ，由第一种取法的振幅计算结果得到

$$i\mathcal{M}_t = -\frac{i\kappa^2}{t-m_\phi^2} \bar{u}(p_1)P_L u(k_1) \bar{v}(k_2)P_R v(p_2)$$

$$(\mathbf{i}\mathcal{M}_t)^* = \frac{\mathbf{i}\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(k_1) P_{\mathbf{R}} u(p_1) \bar{v}(p_2) P_{\mathbf{L}} v(k_2)$$

$$i\mathcal{M}_u = -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2)$$

$$(\mathbf{i}\mathcal{M}_u)^* = \frac{\mathbf{i}\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(p_2) P_{\text{L}} v(k_1) \bar{u}(k_2) P_{\text{R}} u(p_1)$$

### 单纯 $t$ 通道贡献

由  $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$ 、 $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ 、 $P_L^2 = P_L$ 、 $P_R^2 = P_R$  和  $P_L P_R = P_R P_L = 0$  得

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_1 + m_\chi) P_R] &= \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi)(\not{k}_1 P_R + m_\chi P_L) P_R] \\ &= \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) \not{k}_1 P_R] = \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) \not{k}_1 (1 + \gamma^5)] = \frac{1}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \not{k}_1) = 2 \not{k}_1 \cdot \not{p}_1 \\ \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] &= \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) \not{p}_2 (1 - \gamma^5)] = 2 \not{k}_2 \cdot \not{p}_2 \end{aligned}$$

从而，单纯  $t$  通道对非极化振幅模方的贡献是

$$\begin{aligned}
& \overline{|\mathcal{M}_t|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_t|^2 \\
&= \frac{\kappa^4}{4(t - m_\phi^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p_1) P_L u(k_1) \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{v}(k_2) P_R v(p_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \\
&= \frac{\kappa^4}{2 \cdot 2(t - m_\phi^2)^2} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_1 + m_\chi) P_R] \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] \\
&= \frac{\kappa^4 (\not{k}_1 \cdot \not{p}_1) (\not{k}_2 \cdot \not{p}_2)}{(t - m_\phi^2)^2}
\end{aligned}$$

### 单纯 $y$ 通道贡献和交叉贡献

另一方面，单纯  $u$  通道的贡献为

$$\begin{aligned}
& \overline{|\mathcal{M}_u|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_u|^2 \\
&= \frac{\kappa^4}{4(u - m_\phi^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{u}(k_2) P_R u(p_1) \\
&= \frac{\kappa^4}{2 \cdot 2(u - m_\phi^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_1 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_2 + m_\chi) P_R] \\
&= \frac{\kappa^4 (\not{k}_1 \cdot \not{p}_2) (\not{k}_2 \cdot \not{p}_1)}{(u - m_\phi^2)^2}
\end{aligned}$$

而  $t$  和  $u$  通道的交叉贡献是

$$\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u$$

$$= \frac{\kappa^4}{4(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \bar{v}(k_1) P_R v(p_2)$$

### $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 非极化振幅模方

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} u(p_1) \bar{u}(p_1) P_{\text{L}} u(k_2) \bar{v}(p_2) P_{\text{L}} v(k_2) \bar{v}(k_1) P_{\text{R}} v(p_2) \\
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} u(p_1) \bar{u}(p_1) P_{\text{L}} u(k_2) [u^T(p_2) \mathcal{C} P_{\text{L}} \mathcal{C} \bar{u}^T(k_2)]^T [u^T(k_1) \mathcal{C} P_{\text{R}} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_2)]^T \\
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_{\text{R}} u(p_1) \bar{u}(p_1) P_{\text{L}} u(k_2) \bar{u}(k_2) \mathcal{C}^T P_{\text{L}}^T \mathcal{C}^T u(p_2) \bar{u}(p_2) \mathcal{C}^T P_{\text{R}}^T \mathcal{C}^T u(k_1) \\
&= \text{tr}[(\not{k}_1 + m_\chi) P_{\text{R}} (\not{p}_1 + m_\psi) P_{\text{L}} (\not{k}_2 + m_\chi) \mathcal{C}^{-1} P_{\text{L}}^T \mathcal{C} (\not{p}_2 + m_\psi) \mathcal{C}^{-1} P_{\text{R}}^T \mathcal{C}] \\
&= \text{tr}[(\not{k}_1 + m_\chi) \not{p}_1 P_{\text{L}} (\not{k}_2 + m_\chi) P_{\text{L}} (\not{p}_2 + m_\psi) P_{\text{R}}] = m_\chi \text{tr}[(\not{k}_1 + m_\chi) \not{p}_1 P_{\text{L}} (\not{p}_2 + m_\psi) P_{\text{R}}] \\
&= [(\not{k}_1 + m_\chi) \not{p}_1 \not{p}_2 (1 + \gamma^5)] = \frac{m_\chi^2}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \not{p}_2) = 2m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{2(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} + \text{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)}$$

于是,  $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$  的非极化振幅模方为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.}) \\ &= \kappa^4 \left[ \frac{(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)^2} + \frac{(k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1)}{(u - m_\phi^2)^2} - \frac{m_\chi^2(p_1 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} \right] \end{aligned}$$