量 子 场 论

第 10 章　散射矩阵元与多点关联函数

10.1 节至 10.3 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2024 年 7 月 13 日

第 10 章　散射矩阵元与多点关联函数

为深入了解量子场相互作用，本章**更加严格**地讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点关联函数，并初步讨论重整化

第 10 章　散射矩阵元与多点关联函数

10.1 节　渐近态和渐近场

💗 为深入了解量子场相互作用，本章**更加严格**地讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点关联函数，并初步讨论重整化

▶️ 不存在相互作用时量子场具有简单的平面波展开式

🏈 相应的产生湮灭算符具有确定的动量和极化

🏉 通过它们可以定义具有明确意义的真空态 $|0\rangle$ 和粒子态

🎳 然而，引入相互作用之后，虽然 Heisenberg 绘景中的量子场包含着完整的动力学信息，但它**不再**具有简单的平面波展开式，也**不能**直接给出粒子态的具体形式

第 10 章　散射矩阵元与多点关联函数

10.1 节　渐近态和渐近场

为深入了解量子场相互作用，本章**更加严格**地讨论 S 矩阵元，介绍量子场的 n 点关联函数，并初步讨论重整化

- 不存在相互作用时量子场具有简单的平面波展开式
- 相应的产生湮灭算符具有确定的动量和极化
- 通过它们可以定义具有明确意义的真空态 $|0\rangle$ 和粒子态
- 然而，引入相互作用之后，虽然 Heisenberg 绘景中的量子场包含着完整的动力学信息，但它**不再**具有简单的平面波展开式，也**不能**直接给出粒子态的具体形式
- 另一方面，如 6.2 节所述，在散射实验中，初末态应当具有确定的动量
- 它们是遥远过去和遥远未来处不受相互作用影响的渐近态
- 相应地，遥远过去和遥远未来处的量子场是自由的渐近场 (asymptotic field)
- 渐近态和渐近场与自由理论中的粒子态和量子场性质相似，比较容易处理

入场和出场

- 可以寻找**相互作用理论**中**量子场**与**渐近场**的关系，从而适当处理**量子场相互作用**
- ❗ 接下来的讨论**不再**求助于**相互作用绘景**，而是在 **Heisenberg 绘景**中进行**严格处理**
- 下面主要以**实标量场** $\phi(x)$ 为例进行讨论，相关结论可以推广到其它量子场
- 将**遥远过去** $(x^0 \to -\infty)$ 和**遥远未来**$(x^0 \to +\infty)$ 处的渐近场分别称为**入场** (in field) $\phi_{\rm in}(x)$ 和**出场** (out field) $\phi_{\rm out}(x)$，它们与**自由场**一样满足 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi_{\rm in} = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi_{\rm out} = 0$$

入场和出场

- 可以寻找**相互作用理论**中**量子场**与**渐近场**的关系，从而适当处理**量子场相互作用**
- 接下来的讨论**不再**求助于**相互作用绘景**，而是在 **Heisenberg 绘景**中进行**严格处理**
- 下面主要以**实标量场** $\phi(x)$ 为例进行讨论，相关结论可以推广到其它量子场
- 将**遥远过去** $(x^0 \to -\infty)$ 和**遥远未来**$(x^0 \to +\infty)$ 处的渐近场分别称为**入场** (in field) $\phi_{\rm in}(x)$ 和**出场** (out field) $\phi_{\rm out}(x)$，它们与**自由场**一样满足 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi_{\rm in} = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi_{\rm out} = 0$$

- 上式中的 m 是实验上能够测量的 ϕ 玻色子**物理质量** (physical mass)
- 实际上，在领头阶之外的**高阶计算**中，相互作用会对 ϕ 玻色子的质量产生**修正**
- 因而物理质量 m 与**拉氏量**中的**质量参数**不同
- 称原来拉氏量的质量参数为**裸质量** (bare mass)，在下文中改记作 m_0

入算符和出算符

- 与**自由场**类似，$\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}(x)$ 满足**等时对易关系**

$$[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t),\pi_{\text{in}}(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t),\phi_{\text{in}}(\mathbf{y},t)] = [\pi_{\text{in}}(\mathbf{x},t),\pi_{\text{in}}(\mathbf{y},t)] = 0$$

$$[\phi_{\text{out}}(\mathbf{x},t),\pi_{\text{out}}(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi_{\text{out}}(\mathbf{x},t),\phi_{\text{out}}(\mathbf{y},t)] = [\pi_{\text{out}}(\mathbf{x},t),\pi_{\text{out}}(\mathbf{y},t)] = 0$$

- 它们也具有**平面波展开式**

$$\phi_{\text{in}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}(a_{\mathbf{p},\text{in}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}(a_{\mathbf{p},\text{out}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})$$

- **入算符** $(a_{\mathbf{p},\text{in}}, a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}})$ 和**出算符** $(a_{\mathbf{p},\text{out}}, a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}})$ 各自满足**产生湮灭算符的对易关系**

$$[a_{\mathbf{p},\text{in}}, a^\dagger_{\mathbf{q},\text{in}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [a_{\mathbf{p},\text{in}}, a_{\mathbf{q},\text{in}}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}}, a^\dagger_{\mathbf{q},\text{in}}] = 0$$

$$[a_{\mathbf{p},\text{out}}, a^\dagger_{\mathbf{q},\text{out}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [a_{\mathbf{p},\text{out}}, a_{\mathbf{q},\text{out}}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}}, a^\dagger_{\mathbf{q},\text{out}}] = 0$$

入态和出态

- 假设在遥远过去和遥远未来存在稳定且唯一的真空态 $|0\rangle$，满足

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad a_{\mathbf{p},\text{in}}|0\rangle = a_{\mathbf{p},\text{out}}|0\rangle = 0$$

- 以此定义包含 n 个粒子的入态 (in state)

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{in}}|0\rangle$$

- 以及出态 (out state) $|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{out}}|0\rangle$
- 对于从 n 个粒子的入态到 m 个粒子的出态的散射过程，6.2 节引入的 S 矩阵元可以被更严格地定义为 $\boxed{S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}\,|\,\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle}$
- 相应地，S 算符给出联系入算符和出算符的相似变换，通过下式定义：

$$\boxed{\phi_{\text{out}}(x) = S^\dagger \phi_{\text{in}}(x) S, \quad a_{\mathbf{p},\text{out}} = S^\dagger a_{\mathbf{p},\text{in}} S, \quad a^\dagger_{\mathbf{p},\text{out}} = S^\dagger a^\dagger_{\mathbf{p},\text{in}} S}$$

- 真空态的稳定性和唯一性意味着 $S|0\rangle = S^\dagger|0\rangle = |0\rangle$
- 这保证了 $\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|S^\dagger|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$

入态与出态的关系

⏯️ 由 S 算符的**幺正性** $S^\dagger S = \mathbb{I}$ 得

$$\begin{aligned}|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle &= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{in}} |0\rangle = C_1 S a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} S^\dagger \cdots S a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{out}} S^\dagger |0\rangle \\ &= S C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n,\text{out}} |0\rangle\end{aligned}$$

🏋️ 其中 $C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$，故

$$\boxed{|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in}\rangle = S\, |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{out}\rangle}$$

🤼 即 S **算符**将**出态**转换成**入态**；类似地，

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}| &= C_2 \langle 0| a_{\mathbf{p}_m,\text{out}} \cdots a_{\mathbf{p}_1,\text{out}} = C_2 \langle 0| S^\dagger a_{\mathbf{p}_m,\text{in}} S \cdots S^\dagger a_{\mathbf{p}_1,\text{in}} S \\ &= C_2 \langle 0| a_{\mathbf{p}_m,\text{in}} \cdots a_{\mathbf{p}_1,\text{in}} S = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{in}|\, S\end{aligned}$$

🤸 其中 $C_2 = \sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{q}_m}}$，从而 $|\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out}\rangle = S^\dagger |\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{in}\rangle$

🧘 可见，$S|0\rangle = S^\dagger |0\rangle = |0\rangle$ 等价于 $|0; \text{in}\rangle = |0; \text{out}\rangle = |0\rangle$，确实表征着真空态的**稳定性**和**唯一性**

S 矩阵元与 T 矩阵元

于是，可以将 S 矩阵元 $S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} \,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in} \rangle$ 表达为

$$S_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{in} | \, S \, | \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} | \, S \, | \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{out} \rangle$$

之前 $S_{fi} = \langle f | \, S \, | i \rangle$ 中使用的初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 是在自由理论中定义的粒子态，可以把它们都当作这里的入态，或者都当作这里的出态

将 S 算符分解为 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$，则真正表征相互作用的 T 矩阵元表达为

$$T_{fi} = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{in} | \, T \, | \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} | \, T \, | \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{out} \rangle$$

如果动量集合 $\{\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ 与 $\{\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m\}$ 不完全相同，那么

$$\langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{in} \,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} \,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{out} \rangle = 0$$

从而 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$ 中恒等算符 $\mathbb{I}$ 对 S 矩阵元没有贡献，有

$$S_{fi} = \mathrm{i}T_{fi}$$

单粒子渐近态

- 单个粒子到自身的跃迁过程应当与自由运动一样，因此

$$\langle \mathbf{q}; \mathrm{out} \,|\, \mathbf{p}; \mathrm{in} \rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q}; \mathrm{in} \,|\, \mathbf{p}; \mathrm{in} \rangle$$

- 这意味着

$$|\mathbf{p}; \mathrm{in}\rangle = |\mathbf{p}; \mathrm{out}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$$

- 即单粒子的入态等同于出态，可以将它们统一简记为 $|\mathbf{p}\rangle$
- 如果局限在单粒子态空间进行讨论，那么

$$S\,|\mathbf{p}; \mathrm{in}\rangle = S\,|\mathbf{p}; \mathrm{out}\rangle = |\mathbf{p}; \mathrm{in}\rangle = |\mathbf{p}; \mathrm{out}\rangle$$

- 即 S 算符对单粒子入态或出态的作用等同于恒等算符

10.2 节 Källén-Lehmann 谱表示

🌱 **自由**的实标量场 $\phi_{\text{free}}(x)$ 等价于**相互作用绘景**中的实标量场 $\phi^{\text{I}}(x)$

🦆 因而用 $\phi_{\text{free}}(x)$ 计算的 **Feynman 传播子**就是 6.4.1 小节推出来的

$$
\begin{aligned}
D_{\text{F}}(x-y) &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\text{free}}(x)\phi_{\text{free}}(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\text{I}}(x)\phi^{\text{I}}(y)]\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}
\end{aligned}
$$

🐓 引入**相互作用**之后，在 **Heisenberg 绘景**中用实标量场 $\phi(x)$ 构造出来的**两点关联函数** (two-point correlation function)

$$
\boxed{G^{(2)}(x,y) \equiv \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle}
$$

将**不再等同**于 Feynman 传播子 $D_{\text{F}}(x-y)$，也会失去简单的形式

🦃 这个两点关联函数是**相互作用理论**中的**完整传播子**，下面对它的结构进行分析

中间态完备集

- 为了计算两点关联函数 $\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle$，先考虑**期待值** $\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle$
- 在这个期待值里面插入一组**中间态**的**完备集** $\{|\Psi\rangle\}$，它满足**完备性关系**

$$\sum_{\Psi} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathbb{I}$$

- $\{|\Psi\rangle\}$ 中包含满足 $p^2 = m^2$ 和 $p^0 > 0$ 的**单粒子态** $|\mathbf{p}\rangle$，也包含各种**多粒子态**
- 具体来说，里面任意的 $|\Psi\rangle$ 都是**四维动量算符** P^μ 的**本征态**，满足

$$P^\mu |\Psi\rangle = p^\mu_\Psi |\Psi\rangle, \quad p^2_\Psi \geq 0, \quad p^0_\Psi \geq 0$$

- 在**相互作用理论**中，应该把这些 $|\Psi\rangle$ 看作**自由**的**渐近态**，而 p^μ_Ψ 是 $|\Psi\rangle$ 中**所有粒子**的**四维动量之和**
- 根据 3.2 节知识，对 $\phi(0)$ 作**量子时空平移变换** $U(\mathbf{1}, x) = \exp(\mathrm{i}P^\mu x_\mu)$，得

$$\phi(x) = U(\mathbf{1}, x)\phi(0)U^{-1}(\mathbf{1}, x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x}$$

谱密度

☘ 再注意到**真空态不具有能动量**，$P^\mu |0\rangle = 0 |0\rangle$，推出

$$
\begin{aligned}
&\langle 0| \phi(x)\phi(y) |0\rangle \\
&= \sum_\Psi \langle 0| \phi(x) |\Psi\rangle \langle \Psi| \phi(y) |0\rangle = \sum_\Psi \langle 0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x} |\Psi\rangle \langle \Psi| \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot y}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot y} |0\rangle \\
&= \sum_\Psi \langle 0| \phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\Psi\cdot x}|\Psi\rangle \langle \Psi| \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\Psi\cdot y}\phi(0) |0\rangle = \sum_\Psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\Psi\cdot(x-y)} |\langle \Psi| \phi(0) |0\rangle|^2 \\
&= \int \mathrm{d}^4p \sum_\Psi \delta^{(4)}(p-p_\Psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} |\langle \Psi| \phi(0) |0\rangle|^2
\end{aligned}
$$

🐏 令

$$
\sum_\Psi \delta^{(4)}(p-p_\Psi) |\langle \Psi| \phi(0) |0\rangle|^2 = \frac{\theta(p^0)\rho(p^2)}{(2\pi)^3}
$$

🐐 其中 $\rho(p^2)$ 称为**谱密度** (spectral density)，则

$$
\langle 0| \phi(x)\phi(y) |0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\, \theta(p^0)\rho(p^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}
$$

谱密度的性质

- $\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p - p_\Psi) \left|\langle\Psi| \phi(0) |0\rangle\right|^2 = \frac{\theta(p^0)\rho(p^2)}{(2\pi)^3}$ 左边是实值、正定、Lorentz 不变的
- 从而右边的谱密度 $\rho(p^2)$ 是依赖于 p^2 的实值、正定、Lorentz 不变的函数
- 由于 $p_\Psi^2 \geq 0$ 且 $p_\Psi^0 \geq 0$，四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p - p_\Psi)$ 保证具有物理意义的 p^μ 也满足 $p^2 \geq 0$ 和 $p^0 \geq 0$，这是等式右边引入 $\theta(p^0)$ 的理由

谱密度的性质

- $\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2 = \dfrac{\theta(p^0)\rho(p^2)}{(2\pi)^3}$ 左边是实值、正定、Lorentz 不变的
- 从而右边的谱密度 $\rho(p^2)$ 是依赖于 p^2 的实值、正定、Lorentz 不变的函数
- 由于 $p_\Psi^2 \geq 0$ 且 $p_\Psi^0 \geq 0$，四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p-p_\Psi)$ 保证具有物理意义的 p^μ 也满足 $p^2 \geq 0$ 和 $p^0 \geq 0$，这是等式右边引入 $\theta(p^0)$ 的理由
- 进一步，利用 $\rho(p^2) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\delta(p^2-s)\rho(s)$ 推出

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\,\theta(p^0)\rho(p^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\,\theta(p^0)\delta(p^2-s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\Delta(x-y,s)
\end{aligned}
$$

- 其中 $$\Delta(x-y,s) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\,\theta(p^0)\delta(p^2-s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$
- 这样就把谱密度挪到四维动量积分之外了

两点关联函数

- 现在，将**两点关联函数**表达为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle &= \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s)\end{aligned}$$

- 其中

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s) \equiv \theta(x^0-y^0)\Delta(x-y,s) + \theta(y^0-x^0)\Delta(y-x,s)$$

- 这表明两点关联函数实际上**只是** $x^\mu - y^\mu$ **的函数**，即 $G^{(2)}(x,y) = G^{(2)}(x-y)$

- 利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ 推出

$$\begin{aligned}\Delta(x-y,s) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}p^0\,\theta(p^0)\,\delta[(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-s]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0\cdot(x^0-y^0)}}{2p^0}\Bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}\end{aligned}$$

$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s)$

将 $\theta(x^0-y^0)\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}+\theta(y^0-x^0)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$

(6.4.2 小节公式) 中的 m^2 替换成 s，得

$$\left[\theta(x^0-y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0}+\theta(y^0-x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0}\right]\Bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}=\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}$$

从而推出

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s)=\theta(x^0-y^0)\Delta(x-y,s)+\theta(y^0-x^0)\Delta(y-x,s)$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\left[\theta(x^0-y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0}+\theta(y^0-x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{2p^0}\right]\Bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$

注意第二步对第二项的积分变量作了**替换** $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$

Källén-Lehmann 谱表示

这里得到的 $\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$ 与

Feynman 传播子 $D_{\mathrm{F}}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$

具有相同的形式，只是将 m^2 替换成 s

两点关联函数 $\langle 0|\,\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle=\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,s)$ 化为

$$\langle 0|\,\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle=\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$

这样的表示方式称为 **Källén-Lehmann 谱表示** (spectral representation)

对于**自由**的实标量场，**谱密度** $\rho(s)=\delta(s-m^2)$，而**上式**退化为 **Feynman 传播子**

Gunnar Källén (1926–1968)

Harry Lehmann (1924–1998)

动量空间中的完整传播子

🌴 对 $G^{(2)}(x,0) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(0)]\,|0\rangle$ 作 **Fourier 变换**，得

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\equiv \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}G^{(2)}(x,0) = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(0)]\,|0\rangle \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int \frac{\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-p)\cdot x} \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int \mathrm{d}^4q\,\frac{\mathrm{i}}{q^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\delta^{(4)}(q-p) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\end{aligned}$$

🦧 这是**动量空间**中的**完整传播子**

🦍 它是动量空间中的 **Feynman 传播子**

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) &\equiv \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}D_{\mathrm{F}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-p)\cdot x} \\ &= \int \mathrm{d}^4q\,\delta^{(4)}(q-p)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\end{aligned}$$

的**推广**

另一种 Källén-Lehmann 谱表示

🌲 用 $\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\Delta(x-y,s)$ 将 $[\phi(x),\phi(y)]$ **的真空期待值**表达为

$$\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle - \langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)$$

🐅 这也是一种 **Källén-Lehmann 谱表示**，其中

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s) &\equiv \Delta(x-y,s) - \Delta(y-x,s)\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2p^0}\Bigg|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}\end{aligned}$$

🐆 $\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)$ 与 6.2 节的 **Pauli-Jordan 传播函数**

$$D_{\mathrm{PJ}}(x-y) = [\phi_{\mathrm{free}}(x),\phi_{\mathrm{free}}(y)] = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}$$

具有相同的形式，只是将 m^2 替换为 s

$\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s)$ 的偏导数

🌳 $\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{2p^0}\Big|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}$ 对 x^0 求导，得

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})\big|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+s}}$$

🦓 取 $x^0=0$，推出

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x,s)\Big|_{x^0=0}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})=-\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

🦒 从而

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)\Big|_{x^0=y^0}=-\frac{\partial}{\partial(x^0-y^0)}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)\big|_{x^0=y^0}=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

谱密度的归一化条件

🌺 $\langle 0|\,\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$ 这样的 **Källén-Lehmann 谱表示**表明，**谱密度** $\rho(s)$ 是在**态矢** $\phi(x)\,|0\rangle$ 里面找到**不变质量平方为** s 的**自由态**的**概率密度**，而 s 可以取物理上能够得到的任何数值

🐿️ 作为概率密度，$\rho(s)$ 应该是**归一化**的

谱密度的归一化条件

🌺 $\langle 0|\,\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$ 这样的 **Källén-Lehmann 谱表示**表明，**谱密度** $\rho(s)$ 是在**态矢** $\phi(x)\,|0\rangle$ 里面找到**不变质量平方为** s 的**自由态**的**概率密度**，而 s 可以取物理上能够得到的任何数值

🐿️ 作为概率密度，$\rho(s)$ 应该是**归一化**的

🐇 假设相互作用拉氏量不涉及 $\partial_\mu\phi$，则 $\phi(x)$ 的共轭动量密度为 $\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \dot\phi(x)$

🦔 Heisenberg 绘景**等时对易关系**为 $[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = [\phi(\mathbf{x},t),\dot\phi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$

🦦 另一方面，注意到 $[\phi(\mathbf{x},t),\dot\phi(\mathbf{y},t)]$ 是一个 c 数，有

$$
\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\dot\phi(\mathbf{y},t)] &= \frac{\partial}{\partial y^0}\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle\Big|_{x^0=y^0=t} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\frac{\partial}{\partial y^0}\Delta_{\mathrm{PJ}}(x-y,s)\Big|_{x^0=y^0=t} = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

🦥 与等时对易关系比较，即得**归一化条件** $\boxed{\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s) = 1}$

单粒子态的完备性关系

- 根据单粒子态内积的表达式，有

$$|\mathbf{q}\rangle = \int \mathrm{d}^3p\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|\mathbf{p}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle\cdot 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}\,|\,\mathbf{q}\rangle$$

- 观察得到单粒子态的完备性关系 $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}| = \mathbb{I}_{\text{1-particle}}}$

- 其中 $\mathbb{I}_{\text{1-particle}}$ 代表局限于单粒子态时的恒等算符

- 于是，$\sum_{\Psi}|\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathbb{I}$ 中对单粒子态的求和部分可作以下替换

$$\sum_{|\mathbf{p}\rangle} \to \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\,\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)$$

- 这里用到 $\int \mathrm{d}p^0\,\theta(p^0)\delta(p^2-m^2) = \frac{1}{2p^0}\Big|_{p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$

场强重整化常数

- 从而，将 $\sum_{\Psi} \delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2 = \dfrac{\theta(p^0)\rho(p^2)}{(2\pi)^3}$ 化为

$$
\begin{aligned}
&\theta(p^0)\rho(p^2)\\
&= (2\pi)^3\sum_{|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-q)\left|\langle\mathbf{q}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2 + (2\pi)^3\sum_{|\Psi\rangle\neq|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2\\
&= \int \mathrm{d}^4q\,\theta(q^0)\delta(q^2-m^2)\delta^{(4)}(p-q)\left|\langle\mathbf{q}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2 + \theta(p^0)\hat{\rho}(p^2)\\
&= \theta(p^0)\delta(p^2-m^2)\left|\langle\mathbf{p}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2 + \theta(p^0)\hat{\rho}(p^2)
\end{aligned}
$$

- 其中 $\theta(p^0)\hat{\rho}(p^2) \equiv (2\pi)^3\sum_{|\Psi\rangle\neq|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2$

场强重整化常数

🌼 从而，将 $\sum_{\Psi}\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2=\dfrac{\theta(p^0)\rho(p^2)}{(2\pi)^3}$ 化为

$$\begin{aligned}
&\theta(p^0)\rho(p^2)\\
&=(2\pi)^3\sum_{|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-q)\left|\langle\mathbf{q}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2+(2\pi)^3\sum_{|\Psi\rangle\neq|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2\\
&=\int\mathrm{d}^4q\,\theta(q^0)\delta(q^2-m^2)\delta^{(4)}(p-q)\left|\langle\mathbf{q}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2+\theta(p^0)\hat{\rho}(p^2)\\
&=\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)\left|\langle\mathbf{p}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2+\theta(p^0)\hat{\rho}(p^2)
\end{aligned}$$

🦜 其中 $\theta(p^0)\hat{\rho}(p^2)\equiv(2\pi)^3\sum_{|\Psi\rangle\neq|\mathbf{q}\rangle}\delta^{(4)}(p-p_\Psi)\left|\langle\Psi|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2$

🦚 令 $Z\equiv\left|\langle\mathbf{p}|\,\phi(0)\,|0\rangle\right|^2$，得到 $\boxed{\rho(s)=Z\,\delta(s-m^2)+\hat{\rho}(s)}$

🐧 第一项和第二项分别是**单粒子态**和**多粒子态**的贡献

🦩 Z 是在**态矢** $\phi(0)\,|0\rangle$ 里面找到**质量为** m 的**单粒子态** $|\mathbf{p}\rangle$ 的**概率**，称为**场强重整化常数** (field strength renormalization constant)，它与量子场论的**重整化**问题密切相关

典型谱密度

- 谱密度的具体形式依赖于相互作用理论，一个典型谱密度 $\rho(s)$ 的图像如右图所示
- 它在 $s = m^2$ 处的形式为 $Z\,\delta(s - m^2)$，用竖线表示，对应于物理质量为 m 的单粒子中间态，概率为 Z
- 产生双粒子末态的运动学条件是 $s > 4m^2$，因而从 $s > 4m^2$ 开始出现多粒子中间态引起的连续谱 (continuum)
- 连续谱有可能呈现出比较复杂的结构

- 图中 $s \sim m_r^2$ 处存在一个共振态 (resonance) r，它具有一定宽度，中心质量为 m_r

典型谱密度

- 谱密度的具体形式依赖于相互作用理论，一个典型谱密度 $\rho(s)$ 的图像如右图所示
- 它在 $s = m^2$ 处的形式为 $Z\,\delta(s - m^2)$，用竖线表示，对应于物理质量为 m 的单粒子中间态，概率为 Z
- 产生双粒子末态的运动学条件是 $s > 4m^2$，因而从 $s > 4m^2$ 开始出现多粒子中间态引起的连续谱 (continuum)
- 连续谱有可能呈现出比较复杂的结构

- 图中 $s \sim m_r^2$ 处存在一个共振态 (resonance) r，它具有一定宽度，中心质量为 m_r
- 在某些相互作用理论中，还可能存在由两个粒子构成的若干个束缚态 (bound state)，它们表现为 s 略小于 $4m^2$ 处正比于 δ 函数的竖线

动量空间中的 Källén-Lehmann 谱表示

- 将 $\rho(s) = Z\,\delta(s-m^2) + \hat{\rho}(s)$ 代入归一化条件 $\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s) = 1$，得

$$1 = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s) = Z + \int_{\sim 4m^2}^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)$$

- 注意在 $s > m^2$ 处 $\rho(s) = \hat{\rho}(s)$；由此可见，$\boxed{0 \le Z < 1}$
- 存在**相互作用**时，$\phi(x)$ 作用到 $|0\rangle$ 上除了得到**单粒子态**之外，还有一定概率得到**多粒子态**，体现为 $Z < 1$
- 在**自由理论**中，则有 $Z = 1$
- **动量空间**中的**完整传播子** $\tilde{G}^{(2)}(p) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\rho(s)\,\dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}$ 化为

$$\boxed{\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{i}\rho(s)}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}}$$

- 这是**动量空间**中的 **Källén-Lehmann 谱表示**

$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的解析结构

$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 **复平面**上的**解析结构**如右图所示，在实轴上 $p^2 = m^2$ 处存在一个**单极点**(考虑到无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$，极点位置实际上在 $p^2 = m^2 - \mathrm{i}\epsilon$ 处，与实轴**略有偏离**)

故**物理质量** m 也称为**极点质量** (pole mass)

场强重整化常数 Z 对应着 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在这个单极点处的**留数**，有

$$Z = \lim_{p^2 \to m^2} [-\mathrm{i}(p^2 - m^2)\tilde{G}^{(2)}(p)]$$

$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的解析结构

$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的解析结构如右图所示，在实轴上 $p^2 = m^2$ 处存在一个单极点（考虑到无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$，极点位置实际上在 $p^2 = m^2 - \mathrm{i}\epsilon$ 处，与实轴略有偏离）

故物理质量 m 也称为极点质量 (pole mass)

场强重整化常数 Z 对应着 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在这个单极点处的留数，有

$$Z = \lim_{p^2 \to m^2} [-\mathrm{i}(p^2 - m^2)\tilde{G}^{(2)}(p)]$$

如果存在束缚态，则实轴上 p^2 略小于 $4m^2$ 的地方还会有更多的单极点

此外，在 $p^2 > 4m^2$ 的实轴区间上存在一条割线 (branch cut)，割线两边的函数值不连续

这是因为 $\displaystyle\int_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{i}\rho(s)}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}$ 的被积函数在 $p^2 = s$ 处存在单极点，对无穷多个单极点位置 s 进行积分会导致割线，可以通过下面的例子理解

对割线的理解

- 函数 $f_s(z) = (z-s)^{-1}$ 在 $z = s$ 处存在单极点，对 s 从 -1 到 1 积分，得

$$g(z) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s\, f_s(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{z-s} = \ln \frac{z+1}{z-1}$$

- 对数函数 $\ln z$ 的支点 (branch point) 位于原点 $z = 0$ 和无穷远点 $z = \infty$ 处
- 可将割线取为负实轴 $z < 0$，用割线将复平面割开，可以得到单值分支

对割线的理解

- 函数 $f_s(z) = (z-s)^{-1}$ 在 $z = s$ 处存在单极点，对 s 从 -1 到 1 积分，得

$$g(z) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s\, f_s(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{z-s} = \ln \frac{z+1}{z-1}$$

- 对数函数 $\ln z$ 的支点 (branch point) 位于原点 $z = 0$ 和无穷远点 $z = \infty$ 处
- 可将割线取为负实轴 $z < 0$，用割线将复平面割开，可以得到单值分支
- $\dfrac{z+1}{z-1} = 0$ 和 $\dfrac{z+1}{z-1} = \infty$ 分别给出 $z = -1$ 和 $z = 1$
- 这是 $g(z)$ 的两个支点，它们之间存在一条割线
- $\dfrac{z+1}{z-1} < 0$ 意味着 $-1 < z < 1$
- 因而 $g(z)$ 的割线可取为实区间 $(-1, 1)$
- $g(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{z-s}$ 表明，可将这条割线看作排列在实区间 $(-1, 1)$ 上具有无穷小留数 $\mathrm{d}s$ 的无穷多个单极点的集合

场强重整化常数与渐近场

- 定义式 $Z \equiv |\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle|^2$ 表明，$\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle$ 的模是 $\sqrt{Z}$
- 假设它的**相位因子**是 1，则 $\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle = \sqrt{Z}$
- 从而 $\langle \mathbf{p}| \phi(x) |0\rangle = \langle \mathbf{p}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x} |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle = \sqrt{Z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$
- 另一方面，**渐近场** $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 和 $\phi_{\mathrm{out}}(x)$ 等价于**自由场**，有

$$\langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{in}}(x) |0\rangle = \langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{out}}(x) |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

- 可见 $\langle \mathbf{p}| \phi(x) |0\rangle = \sqrt{Z}\,\langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{in}}(x) |0\rangle = \sqrt{Z}\,\langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{out}}(x) |0\rangle$

场强重整化常数与渐近场

- 定义式 $Z \equiv |\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle|^2$ 表明，$\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle$ 的模是 $\sqrt{Z}$
- 假设它的**相位因子**是 1，则 $\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle = \sqrt{Z}$
- 从而 $\langle \mathbf{p}| \phi(x) |0\rangle = \langle \mathbf{p}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x} |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\langle \mathbf{p}| \phi(0) |0\rangle = \sqrt{Z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$
- 另一方面，**渐近场** $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 和 $\phi_{\mathrm{out}}(x)$ 等价于**自由场**，有

$$\langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{in}}(x) |0\rangle = \langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{out}}(x) |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

- 可见 $\langle \mathbf{p}| \phi(x) |0\rangle = \sqrt{Z}\,\langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{in}}(x) |0\rangle = \sqrt{Z}\,\langle \mathbf{p}| \phi_{\mathrm{out}}(x) |0\rangle$
- 这**并不意味着** $\phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{in}}(x)$ **或** $\phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{out}}(x)$
- **否则** $\phi(x)$ 会满足**自由场**的运动方程 $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$
- 不过，可以推测

$$\lim_{x^0\to-\infty} \phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{in}}(x), \qquad \lim_{x^0\to+\infty} \phi(x) = \sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{out}}(x)$$

- 即 $\sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 和 $\sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{out}}(x)$ 分别是 $\phi(x)$ 在 $x^0 \to -\infty$ 和 $x^0 \to +\infty$ 的**渐近极限**

渐近条件

- 但 $\lim\limits_{x^0\to-\infty}\phi(x)=\sqrt{Z}\,\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\lim\limits_{x^0\to+\infty}\phi(x)=\sqrt{Z}\,\phi_{\text{out}}(x)$ **并不合理**，它们意味着

$$\lim_{t\to-\infty}[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]=Z[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t),\dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}Z\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

- 仅当 $Z=1$ 时才能与**等时对易关系相容**，但**相互作用**的存在却要求 $Z<1$
- 其实，这是**算符层面**上的**渐近极限**，在收敛性方面要求太高

渐近条件

- 但 $\lim\limits_{x^0\to-\infty}\phi(x)=\sqrt{Z}\,\phi_{\text{in}}(x)$ 和 $\lim\limits_{x^0\to+\infty}\phi(x)=\sqrt{Z}\,\phi_{\text{out}}(x)$ **并不合理**，它们意味着

$$\lim_{t\to-\infty}[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]=Z[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t),\dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}Z\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

- 仅当 $Z=1$ 时才能与**等时对易关系相容**，但**相互作用**的存在却要求 $Z<1$
- 其实，这是**算符层面**上的**渐近极限**，在收敛性方面要求太高
- 需要把它们**弱化**成**期待值层面**上的**渐近极限**，即下列**渐近条件**，

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x^0\to-\infty}\langle\Psi_2|\,\phi(x)\,|\Psi_1\rangle&=\sqrt{Z}\,\langle\Psi_2|\,\phi_{\text{in}}(x)\,|\Psi_1\rangle\\ \lim_{x^0\to+\infty}\langle\Psi_2|\,\phi(x)\,|\Psi_1\rangle&=\sqrt{Z}\,\langle\Psi_2|\,\phi_{\text{out}}(x)\,|\Psi_1\rangle\end{aligned}}$$

- 其中 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 是 Hilbert 空间中两个**任意**的态矢；这样的**渐近条件不能保证** $\lim\limits_{t\to-\infty}\langle\Psi_2|\,[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]\,|\Psi_1\rangle=Z\,\langle\Psi_2|\,[\phi_{\text{in}}(\mathbf{x},t),\dot{\phi}_{\text{in}}(\mathbf{y},t)]\,|\Psi_1\rangle$ 成立，因而**不会**跟等时对易关系**矛盾**

推广到 Dirac 旋量场

- 上述讨论可以推广到具有自旋的量子场，但需要定义多个谱函数来描述多粒子态
- 推广到 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 时，动量空间中的完整传播子表达为

$$\boxed{\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \langle 0|\, \mathsf{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)]\, |0\rangle = \frac{\mathrm{i}Z_2(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} + \cdots}$$

- 这里省略了多粒子态贡献
- 场强重整化常数 Z_2 对应于物理质量为 m 的单粒子态的概率，满足

$$\langle 0|\, \psi(0)\, |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \sqrt{Z_2}\, u(\mathbf{p}, \lambda), \qquad \langle 0|\, \bar{\psi}(0)\, |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \sqrt{Z_2}\, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$$

$$\langle \mathbf{p}^+, \lambda|\, \bar{\psi}(0)\, |0\rangle = \sqrt{Z_2}\, \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda), \qquad \langle \mathbf{p}^-, \lambda|\, \psi(0)\, |0\rangle = \sqrt{Z_2}\, v(\mathbf{p}, \lambda)$$

- 相应地，存在渐近条件

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x^0\to-\infty} \langle \Psi_2|\, \psi(x)\, |\Psi_1\rangle &= \sqrt{Z_2}\, \langle \Psi_2|\, \psi_{\mathrm{in}}(x)\, |\Psi_1\rangle \\ \lim_{x^0\to+\infty} \langle \Psi_2|\, \psi(x)\, |\Psi_1\rangle &= \sqrt{Z_2}\, \langle \Psi_2|\, \psi_{\mathrm{out}}(x)\, |\Psi_1\rangle \end{aligned}}$$

10.3 节 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

前面将**实标量场** $\phi(x)$ 的**两点关联函数**定义为

$$G^{(2)}(x,y) \equiv \langle 0| \mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)] |0\rangle$$

它是**两个时空点**处的场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的时序乘积的真空期待值

类似地推广到 n **个时空点**，将 n **点关联函数**定义为

$$\boxed{G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) \equiv \langle 0| \mathrm{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] |0\rangle}$$

它也称为 n **点 Green 函数**

本节探讨这种**多点关联函数**与**散射矩阵元**之间的关系，即

Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) 约化公式

Kurt Symanzik
(1923–1983)

Wolfhart Zimmermann
(1928–2016)

处理 S 矩阵元

对于 $n \to m$ 散射过程，从 S 矩阵元的入态中抽出第一个产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}$，得到

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} \,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}} \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
&\quad + \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \, (a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}) \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle
\end{aligned}
$$

从第一项的出态抽出第一个湮灭算符 $a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}$，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \text{out} | \, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
= &\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_2, \cdots \mathbf{q}_m; \text{out} | \, a_{\mathbf{q}_1,\text{out}} a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
= &\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_2, \cdots \mathbf{q}_m; \text{out} | \, [a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} a_{\mathbf{q}_1,\text{out}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)] \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
= &\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{p}_1}} \langle \mathbf{q}_2, \cdots \mathbf{q}_m; \text{out} | \, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} a_{\mathbf{q}_1,\text{out}} \, | \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle \\
&+ 2E_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle \mathbf{q}_2, \cdots \mathbf{q}_m; \text{out} \,|\, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n; \text{in} \rangle
\end{aligned}
$$

避免可约化的情况

- 依次从**出态**中抽出余下的**湮灭算符**，并作**对易**，最后利用 $\langle 0|\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} = 0$ 推出

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\
=\ &\sqrt{8E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_3,\cdots\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}a_{\mathbf{q}_2,\mathrm{out}}a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\
&+2E_{\mathbf{q}_2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\,\langle \mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3,\cdots\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\
&+2E_{\mathbf{q}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,\langle \mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\
=\ &\cdots=\sum_{k=1}^{m}2E_{\mathbf{q}_k}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_k)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_{k-1},\mathbf{q}_{k+1},\cdots\mathbf{q}_m;\mathrm{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
$$

避免可约化的情况

- 依次从出态中抽出余下的湮灭算符，并作对易，最后利用 $\langle 0|\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} = 0$ 推出

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle \\
=\ &\sqrt{8E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_3,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}|\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}} a_{\mathbf{q}_2,\text{out}} a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle \\
&+2E_{\mathbf{q}_2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2)\,\langle \mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle \\
&+2E_{\mathbf{q}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,\langle \mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle \\
=\ &\cdots=\sum_{k=1}^{m}2E_{\mathbf{q}_k}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_k)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_{k-1},\mathbf{q}_{k+1},\cdots\mathbf{q}_m;\text{out}\,|\,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle
\end{aligned}
$$

- 如果出态中有一个动量 $\mathbf{q}_k$ 与 $\mathbf{p}_1$ 相同，则 S_{fi} 第一项约化为 $(n-1)\to(m-1)$ 散射矩阵元与 $2E_{\mathbf{q}_k}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_k)$ 的乘积
- 它意味着第 1 个入态粒子只发生自由运动，根本不参与散射
- 为了避免处理这种可约化的情况，在下面的推导中假设 m 个出态粒子的动量与 n 个入态粒子的动量各不相同，从而 S_{fi} 第一项的贡献为零，只需要考虑第二项
- 此时 S 算符中的恒等算符没有贡献，可以用 T 矩阵元代替 S 矩阵元，即

$$
\mathrm{i}T_{fi}=S_{fi}=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\text{out}})\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\text{in}\rangle
$$

处理 $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}$

现在处理上述表达式中的**算符** $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}$，由 **2.3.1 小节结果**推出

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{in}} &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}[\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x) + \mathrm{i}p^0\phi_{\mathrm{in}}(x)] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x) - \phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{in}}(x)
\end{aligned}
$$

其中 $\partial_{x^0} \equiv \partial/\partial x^0$；类似地，有 $a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{out}}(x)$

处理 $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}$

现在处理上述表达式中的**算符** $a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}$，由 **2.3.1 小节结果**推出

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{in}} &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}[\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x) + \mathrm{i}p^0\phi_{\mathrm{in}}(x)] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x) - \phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{in}}(x)
\end{aligned}
$$

其中 $\partial_{x^0} \equiv \partial/\partial x^0$；类似地，有 $a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{out}}(x)$

从而
$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}[\phi_{\mathrm{out}}(x) - \phi_{\mathrm{in}}(x)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\left(\lim_{x^0\to+\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right)\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x)
\end{aligned}
$$

第二步用到**渐近条件** $\displaystyle\lim_{x^0\to-\infty}\langle\Psi_2|\,\phi(x)\,|\Psi_1\rangle = \sqrt{Z}\,\langle\Psi_2|\,\phi_{\mathrm{in}}(x)\,|\Psi_1\rangle$ 和

$$\lim_{x^0\to+\infty}\langle\Psi_2|\,\phi(x)\,|\Psi_1\rangle = \sqrt{Z}\,\langle\Psi_2|\,\phi_{\mathrm{out}}(x)\,|\Psi_1\rangle$$

扩充成四维积分

当然，渐近条件在期待值层面上才成立，这里的算符

$$a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\left(\lim_{x^0\to+\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right)\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x)$$

将被用到 $\mathrm{i}T_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\left(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}\right)|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle$ 的期待值中，因而使用渐近条件是合理的

这里为了书写方便没有在这个算符表达式上添加相应的左矢和右矢

扩充成四维积分

当然，渐近条件在期待值层面上才成立，这里的算符

$$a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\left(\lim_{x^0\to+\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right)\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x)$$

将被用到 $\mathrm{i}T_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}})\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle$ 的期待值中，因而使用渐近条件是合理的

这里为了书写方便没有在这个算符表达式上添加相应的左矢和右矢

利用积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^0\,\partial_{x^0}f(x) = f(x)\big|_{x^0\to-\infty}^{x^0\to+\infty} = \left(\lim_{x^0\to+\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right)f(x)$ 将上面的三维积分 $\int\mathrm{d}^3x$ 扩充成四维积分 $\int\mathrm{d}^4x$，推出

$$\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_{x^0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_{x^0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial_{x^0}\phi(x) - \partial_{x^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial^2_{x^0}\phi(x) - \partial^2_{x^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]
\end{aligned}$$

利用运动方程化简

- $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$ 其实是 **Klein-Gordon 方程**的**平面波解**，满足 $(\partial_x^2+m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}=0$
- 故 $\partial_{x^0}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}=(\nabla_x^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$，于是

$$
\begin{aligned}
a_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}^\dagger-a_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}^\dagger &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial_{x^0}^2\phi(x)-\partial_{x^0}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial_{x^0}^2\phi(x)-(\nabla_x^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]
\end{aligned}
$$

利用运动方程化简

- $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$ 其实是 **Klein-Gordon 方程**的**平面波解**，满足 $(\partial_x^2+m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}=0$
- 故 $\partial_{x^0}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}=(\nabla_x^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$，于是

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial_{x^0}^2\phi(x)-\partial_{x^0}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\partial_{x^0}^2\phi(x)-(\nabla_x^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]
\end{aligned}
$$

- 被积函数中包含 **Laplace 算符**的项可化为

$$
\begin{aligned}
\nabla_x^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x) &= \nabla_x\cdot[\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]-\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\cdot\nabla_x\phi(x)\\
&= \nabla_x\cdot[\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)]-\nabla_x\cdot[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\nabla_x\phi(x)]+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\nabla_x^2\phi(x)
\end{aligned}
$$

- 从而

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_{x^0}^2-\nabla_x^2+m^2)\phi(x)\\
&\qquad -\nabla_x\cdot[\nabla_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\phi(x)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\nabla_x\phi(x)]\}
\end{aligned}
$$

丢弃三维全散度项 ➡️ $=\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2+m^2)\phi(x)$

减少一个入态粒子的表达式

这样就可以在散射矩阵元中减少一个动量为 $\mathbf{p}_1$ 的入态粒子，得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}} - a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}})\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2+m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\phi(x)\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
$$

把它转换成受到 **Klein-Gordon 微分算符** $(\partial_x^2+m^2)$ 作用的**场算符** $\phi(x)$ 的 **Fourier 变换** $\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$，并出现一个 $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}$ **因子**

减少一个入态粒子的表达式

🎹 这样就可以在散射矩阵元中减少一个动量为 $\mathbf{p}_1$ 的入态粒子，得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\left(a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{in}}-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\mathrm{out}}\right)|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2+m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\phi(x)\,|\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
$$

🚋 把它转换成受到 **Klein-Gordon 微分算符** $(\partial_x^2+m^2)$ 作用的**场算符** $\phi(x)$ 的 **Fourier 变换** $\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}$，并出现一个 $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}$ **因子**

🚃 接下来重复操作，依次减少散射矩阵元中每个粒子，转化成用场算符表达的结果

🚇 将动量为 $\mathbf{p}_2$ 的入态粒子的产生算符抽出来，得

$$
\mathrm{i}T_{fi} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2+m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}}\,|\mathbf{p}_3,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle
$$

处理 $\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}}$

由 $a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{in}} = -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 推出

$$\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}[\phi(x)\phi_{\mathrm{in}}(y)]$$

渐近条件 ➡️

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}[\phi(x)\phi(y)]$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\right\}$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$$

🚋 $y^0\to-\infty$ 时必有 $x^0>y^0$，在第三步将 $\phi(x)\phi(y)$ 改写成**时序乘积** $\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$

🚅 第四步用到积分公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^0\,\partial_{x^0}f(x) = \left(\lim_{x^0\to+\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right)f(x)$

处理 $\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}}$ 中的两项

- 参考前面推出的

$$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_{x^0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\phi(x)] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2+m^2)\phi(x)$$

- $\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}}$ 中**第一项**化为 $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\right\}$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$$

- **第二项**变成 $-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi(y)\phi(x)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi_{\mathrm{out}}(y)\phi(x) = a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{out}}\phi(x)$$

- 第一步用到 $y^0\to+\infty$ 时必有 $y^0>x^0$ 的情况，第二步用到**渐近条件**

处理所有入态粒子

从而给出

$$\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] + a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{out}}\phi(x)$$

代入到 $\mathrm{i}T_{fi}$ 表达式中，**第二项贡献为零**，得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_{fi} &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x}(\partial_x^2+m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\phi(x)a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\mathrm{in}}\,|\mathbf{p}_3,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle \\ &= \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\right)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x+p_2\cdot y)} \\ &\quad\times(\partial_x^2+m^2)(\partial_y^2+m^2)\,\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|\mathbf{p}_3,\cdots,\mathbf{p}_n;\mathrm{in}\rangle\end{aligned}$$

按照上述做法依次处理**入态**中**剩余的粒子**，推出

$$\mathrm{i}T_{fi} = \int\left[\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2+m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\langle \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_m;\mathrm{out}|\,\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle$$

处理出态粒子

🎵 下面处理出态中的粒子，将动量为 $\mathbf{q}_1$ 的出态粒子的湮灭算符抽出来，得

$$\mathrm{i}T_{fi} = \sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}} \int \left[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i \, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \times \langle \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} | \, a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{out}} \mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \, |0\rangle$$

🛶 由 2.3.1 小节结果推出

$$a_{\mathbf{p},\mathrm{out}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[\partial_{x^0}\phi_{\mathrm{out}}(x) - \mathrm{i}p^0\phi_{\mathrm{out}}(x)] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \overleftrightarrow{\partial_{x^0}} \phi_{\mathrm{out}}(x)$$

⛵ 故

$$\begin{aligned}
& a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{out}} \mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}}} \int \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y} \overleftrightarrow{\partial_{y^0}} \phi_{\mathrm{out}}(y) \mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
\text{渐近条件} \Rightarrow \quad &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0\to+\infty} \int \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y} \overleftrightarrow{\partial_{y^0}} \phi(y) \mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} Z}} \lim_{y^0\to+\infty} \int \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y} \overleftrightarrow{\partial_{y^0}} \mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]
\end{aligned}$$

减少一个出态粒子的表达式

$$
\begin{aligned}
a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{out}}\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\right\} \\
&\quad+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\{\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\phi(y)\} \\
\text{渐近条件}\ \Rightarrow\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
&\quad+\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]a_{\mathbf{q}_1,\mathrm{in}}
\end{aligned}
$$

减少一个出态粒子的表达式

$$
\begin{aligned}
a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to+\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\partial_{y^0}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\right\} \\
&\quad+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\lim_{y^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\{\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\phi(y)\} \\
\text{渐近条件}\ \Rightarrow\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] \\
&\quad+\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]a_{\mathbf{q}_1,\text{in}}
\end{aligned}
$$

代入到 $\mathrm{i}T_{fi}$ 表达式中，**第二项没有贡献**，得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}_1}}\int\left[\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2+m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \\
&\qquad\times\langle\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,a_{\mathbf{q}_1,\text{out}}\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}(\partial_y^2+m^2)\left[\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2+m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \\
&\qquad\times\langle\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_m;\text{out}|\,\mathsf{T}[\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

依次处理出态中剩余的粒子，推出实标量场的 LSZ 约化公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} =& \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} \,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in} \rangle \\
=& \int \left[\prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j \, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j \cdot y_j} (\partial_{y_j}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i \, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\
& \times \langle 0 | \, \mathsf{T}[\phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \, | 0 \rangle
\end{aligned}
$$

$n \to m$ 散射矩阵元由 $(n+m)$ 点关联函数 $G^{(n+m)}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ 决定

对于一个动量为 $\mathbf{p}_i$ 的入态粒子，需要对 $(n+m)$ 点关联函数中一个实标量场算符 $\phi(x_i)$ 应用 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_{x_i}^2 + m^2)$，作 Fourier 变换 $\int \mathrm{d}^4 x_i \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i \cdot x_i}$，再乘上一个 $\mathrm{i}/\sqrt{Z}$ 因子

对于一个动量为 $\mathbf{q}_j$ 的出态粒子，需要对 $(n+m)$ 点关联函数中一个实标量场算符 $\phi(y_j)$ 应用 Klein-Gordon 微分算符 $(\partial_{y_j}^2 + m^2)$，作 Fourier 变换 $\int \mathrm{d}^4 y_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j \cdot y_j}$，再乘上一个 $\mathrm{i}/\sqrt{Z}$ 因子

Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

依次处理出态中剩余的粒子，推出实标量场的 LSZ 约化公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} =& \langle \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m; \mathrm{out} \,|\, \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n; \mathrm{in} \rangle \\
=& \int \left[\prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j \, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j \cdot y_j} (\partial_{y_j}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \left[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i \, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2)}{\sqrt{Z}} \right] \\
& \times \langle 0 | \, \mathsf{T}[\phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] \, | 0 \rangle
\end{aligned}
$$

在 LSZ 约化公式中，入态粒子和出态粒子仅由 Fourier 变换因子指数上的正负号来区分

如果要把一个动量为 p^μ 的粒子从入态移动到出态，变换成动量为 k^μ 的反粒子，相应的 T 矩阵元只需要对原来的 T 矩阵元作动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$ 来得到

这就是 8.5 节讨论的交叉对称性：$\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots)$

利用分部积分改写 LSZ 约化公式

🎤 利用**分部积分**，可以将 LSZ 约化公式中的各个 **Klein-Gordon 微分算符**作用到**平面波解** $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}$ 上面；具体来说，推出

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial^2\phi(x) &= \partial^\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_\mu\phi(x)] - (\partial^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\partial_\mu\phi(x)\\ &= \partial^\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_\mu\phi(x)] - \partial_\mu[(\partial^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\phi(x)] + (\partial^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\phi(x)\\ &= \partial^\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\partial_\mu\phi(x) - (\partial^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})\phi(x)] - p^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\phi(x)\end{aligned}$$

🛬 其中第一项是对全时空积分**没有贡献**的**四维全散度**

✈️ 从而，在 LSZ 约化公式中可作**替换** $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(\partial_{x_i}^2 + m^2) \to -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(p_i^2 - m^2)$

🛩️ 类似地，也可作**替换** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(\partial_{y_j}^2 + m^2) \to -\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(q_j^2 - m^2)$

🛫 于是，可以将 **LSZ 约化公式**改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_{fi} = \int &\left[\prod_{j=1}^m \mathrm{d}^4y_j\,\frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j\cdot y_j}(q_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\left[\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x_i}(p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\\ &\times\langle 0|\mathsf{T}[\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle\end{aligned}$$

动量空间中的 n 点关联函数

- 对 n 点关联函数 $G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ 作 Fourier 变换，得到动量空间 n 点关联函数

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \equiv \int \left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i\cdot x_i}\right) \langle 0|\mathsf{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle$$

- 由此将 LSZ 约化公式简化为

$$\mathrm{i}T_{fi} = \left[\prod_{j=1}^{m} \frac{-\mathrm{i}(q_j^2-m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{-\mathrm{i}(p_i^2-m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \tilde{G}^{(n+m)}(q_1,\cdots,q_m,-p_1,\cdots,-p_n)$$

- 可见，T 矩阵元与动量空间中的多点关联函数有着非常直接的联系
- 入射粒子动量 p_i 和出射粒子动量 q_j 在后者里面具有相反的符号
- 由于入射和出射粒子满足质壳关系，所有 $(p_i^2-m^2)$ 和 $(q_j^2-m^2)$ 因子都等于零
- 非平庸的 T_{fi} 意味着 $\tilde{G}^{(n+m)}(p_1,\cdots,p_n,-q_1,\cdots,-q_m)$ 必须在所有 $p_i^2=m^2$ 和 $q_j^2=m^2$ 处都存在单极点
- 从而，T 矩阵元正比于动量空间多点关联函数的多重留数

动量空间多点关联函数的结构

- 现在研究**动量空间多点关联函数**的**极点结构**
- 利用**完备性关系** $\sum_{\Psi} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathbb{I}$ 在 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)$ 中插入完备集 $\{|\Psi\rangle\}$，得

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{\Psi} \int \left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} p_i \cdot x_i} \right) \times \langle 0| \phi(x_1) |\Psi\rangle \langle\Psi| \mathsf{T}[\phi(x_2) \cdots \phi(x_n)] |0\rangle \, \theta(x_1^0 - \tau) + \cdots$$

- 其中 $\tau = \max(x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是 $x_2^0, \cdots, x_n^0$ 中的**最大值**
- 这里只保留 x_1^0 **为最大时刻的项**，**其它项省略不写**

动量空间多点关联函数的结构

- 现在研究**动量空间多点关联函数**的**极点结构**
- 利用**完备性关系** $\sum_\Psi |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathbb{I}$ 在 $\tilde{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$ 中插入完备集 $\{|\Psi\rangle\}$，得

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) = \sum_\Psi \int \left(\prod_{i=1}^n \mathrm{d}^4x_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i\cdot x_i}\right) \times \langle 0|\,\phi(x_1)\,|\Psi\rangle\langle\Psi|\,\mathsf{T}[\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle\,\theta(x_1^0-\tau)+\cdots$$

- 其中 $\tau = \max(x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 是 $x_2^0,\cdots,x_n^0$ 中的**最大值**
- 这里只保留 x_1^0 **为最大时刻的项**，**其它项省略不写**
- 考虑**单粒子态** $|\Psi\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 的贡献，利用 $\langle 0|\,\phi(x_1)\,|\mathbf{p}\rangle = \langle\mathbf{p}|\,\phi(x_1)\,|0\rangle^* = \sqrt{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}$
- 并注意**对单粒子态的求和方法**，则上式的**保留项**包含以下**积分**，

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^4x_1}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x_1}\,\langle 0|\,\phi(x_1)\,|\mathbf{p}\rangle\,\theta(x_1^0-\tau) = \sqrt{Z}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^4x_1}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p)\cdot x_1}\,\theta(x_1^0-\tau)$$

$$= \sqrt{Z}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3x_1}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}_1}\int_\tau^\infty \mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_\mathbf{p})x_1^0} \quad \Leftarrow \quad p^0 = E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$$

$$= \sqrt{Z}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_\mathbf{p}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\int_\tau^\infty \mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_\mathbf{p})x_1^0}$$

引进指数衰减因子

🎥 I_1 里面对 x_1^0 的积分具有 $\int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的形式，但这样的积分并不收敛

🛠️ 为得到收敛结果，在被积函数中引进指数衰减因子 $\mathrm{e}^{-\epsilon t}$，其中无穷小量 $\epsilon > 0$，使

$$\int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \to \int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\epsilon t} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)t}}{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)}\right|_\tau^\infty = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)\tau}}{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)} = \frac{\mathrm{i}}{\omega+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\to \sqrt{Z}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\int_\tau^\infty \mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})x_1^0-\epsilon x_1^0} \\ &= \sqrt{Z}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\,\frac{\mathrm{i}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}}+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})\tau} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}}\,\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}_1}+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}_1})\tau} \end{aligned}$$

引进指数衰减因子

🎥 I_1 里面对 x_1^0 的积分具有 $\int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的形式，但这样的积分并不收敛

🛠️ 为得到收敛结果，在被积函数中引进指数衰减因子 $\mathrm{e}^{-\epsilon t}$，其中无穷小量 $\epsilon > 0$，使

$$\int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \to \int_\tau^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\epsilon t} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)t}}{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)}\right|_\tau^\infty = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)\tau}}{\mathrm{i}(\omega+\mathrm{i}\epsilon)} = \frac{\mathrm{i}}{\omega+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\to \sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\int_\tau^\infty \mathrm{d}x_1^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})x_1^0-\epsilon x_1^0} \\ &= \sqrt{Z}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\,\frac{\mathrm{i}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}}+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}})\tau} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}_1}+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1^0-E_{\mathbf{p}_1})\tau} \end{aligned}$$

🔩 可见，I_1 包含因子

$$\begin{aligned} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^0-E_{\mathbf{p}_1}+\mathrm{i}\epsilon} &= \frac{p_1^0+E_{\mathbf{p}_1}}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{(p_1^0-E_{\mathbf{p}_1})(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})+\mathrm{i}\epsilon(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})} \\ &= \frac{p_1^0+E_{\mathbf{p}_1}}{2E_{\mathbf{p}_1}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})} \xrightarrow{p_1^0\to E_{\mathbf{p}_1}} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} \end{aligned}$$

📎 注意第二步分母中 $\epsilon(p_1^0+E_{\mathbf{p}_1})>0$ 作为无穷小量等价于 ϵ

LSZ 约化公式的另一种表述

故 $p_1^0 \to E_{\mathbf{p}_1}$ 处**单粒子态**对 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)$ **保留项**贡献一个 $\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **因子**

应用到 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)$ 中**其它时空坐标的积分**，得到**一系列** $\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ **因子**

结合 $\mathrm{i}T_{fi} = \left[\prod_{j=1}^{m} \dfrac{-\mathrm{i}(q_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}}\right]\left[\prod_{i=1}^{n} \dfrac{-\mathrm{i}(p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}}\right] \tilde{G}^{(n+m)}(q_1, \cdots, q_m, -p_1, \cdots, -p_n)$

则**动量空间**中 $(n+m)$ **点关联函数**在 $p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}$, $q_j^0 \to E_{\mathbf{q}_j}$ 处的**极点结构**为

$$\tilde{G}^{(n+m)}(q_1, \cdots, q_m, -p_1, \cdots, -p_n) \xrightarrow[q_j^0 \to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_j^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right) \mathrm{i}T_{fi}$$

这是 **LSZ 约化公式**的另一种表述方式

可见，**每个粒子**对应的**极点结构**跟**动量空间 Feynman 传播子** $\dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ 形式类似，但还出现了**场强重整化的贡献** $\sqrt{Z}$

Dirac 旋量场的 LSZ 约化公式

对于 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$，考虑**入态有一对正反费米子**，**出态**也有**一对正反费米子**，则 **LSZ 约化公式**的形式为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^-, \lambda_2'; \mathrm{out} \,|\, \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2; \mathrm{in} \rangle \\
&= \int \mathrm{d}^4 y_1 \, \mathrm{d}^4 y_2 \, \mathrm{d}^4 x_1 \, \mathrm{d}^4 x_2 \\
&\quad \times \frac{-\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} q_1 \cdot y_1}}{\sqrt{Z_2}} [\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1')(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{y_1} - m)]_{b_1} \frac{-\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} q_2 \cdot y_2}}{\sqrt{Z_2}} [(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{y_2} + m) v(\mathbf{q}_1, \lambda_2')]_{b_2} \\
&\quad \times \frac{\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_1 \cdot x_1}}{\sqrt{Z_2}} [(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{x_1} + m) u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)]_{a_1} \frac{\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_2 \cdot x_2}}{\sqrt{Z_2}} [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2)(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{x_2} - m)]_{a_2} \\
&\quad \times \langle 0 | \, \mathsf{T}[\psi_{b_1}(y_1) \bar{\psi}_{b_2}(y_2) \bar{\psi}_{a_1}(x_1) \psi_{a_2}(x_2)] \, | 0 \rangle
\end{aligned}
$$