

量子场论

第 6 章 量子场的相互作用

6.1 节和 6.2 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2023 年 1 月 2 日



第 6 章 量子场的相互作用



第2、4、5章分别讨论了标量场、矢量场、旋量场的正则量子化



这些讨论只涉及**自由量子场**，没有考虑到量子场的相互作用



$$\text{自由实标量场的拉氏量 } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$



$$\text{自由有质量实矢量场的拉氏量 } \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$



自由 Dirac 旋量场的拉氏量 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$



这些自由场拉氏量包含**动能项**和**质量项**



它们都是二次型，即每一项均包含 2 个场算符

第 6 章 量子场的相互作用

 第 2、4、5 章分别讨论了标量场、矢量场、旋量场的**正则量子化**

 这些讨论只涉及**自由量子场**，没有考虑到量子场的相互作用

 自由实标量场的拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

 自由有质量实矢量场的拉氏量 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$

 自由 Dirac 旋量场的拉氏量 $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$

 这些自由场拉氏量包含**动能项**和**质量项**

 它们都是**二次型**，即每一项均包含**2 个场算符**

 如果考虑包含**多于 2 个场算符**的项，则这些项将描述场的**相互作用** (interaction)

 在**局域场论**中，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 中的相互作用项只能包含**同一个时空点处的几个场算符**，例如 $[\phi(x)]^3$ ；**不能**包含处于**不同时空点上的场算符**，例如 $[\phi(x)]^2\phi(y)$

 这样可以避免**超距作用**，保持理论的**因果性** (causality)

场的量纲

 在自然单位制中，时空坐标 x^μ 的量纲是能量量纲的倒数，即 $[x^\mu] = [E]^{-1}$

 时空导数的量纲是 $[\partial_\mu] = [E]$ ，时空体积元的量纲是 $[d^4x] = [E]^{-4}$

由于作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}$ 没有量纲，**拉氏量**的量纲是 $[\mathcal{L}] = [E]^4$

场的量纲

 在自然单位制中，时空坐标 x^μ 的量纲是能量量纲的倒数，即 $[x^\mu] = [E]^{-1}$

 时空导数的量纲是 $[\partial_\mu] = [E]$ ，时空体积元的量纲是 $[d^4x] = [E]^{-4}$

由于作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}$ 没有量纲，**拉氏量**的量纲是 $[\mathcal{L}] = [E]^4$

从动能项 $\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi$ 可以看出，**标量场**的量纲是

$$[\phi] = [E]$$

由 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ 可知矢量场的量纲是

$$[A^\mu] = [E]$$

根据动能项 $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$, 旋量场的量纲是

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = [E]^{3/2}$$

实标量场的 ϕ^4 理论

相互作用项可以只包含同一个场，从而描述场的自相互作用 (self-interaction)

例如，用实标量场 $\phi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

 前两项是动能项和质量项，第三项描述**实标量场的自相互作用**

 λ 是一个实耦合常数 (coupling constant)，它的大小决定耦合的强度。

 $[\mathcal{L}] = [\phi^4] = [E]^4$ 意味着 $[\lambda] = 1$ ，即耦合常数 λ 是无量纲的

实标量场的 ϕ^4 理论

相互作用项可以只包含同一个场，从而描述场的自相互作用 (self-interaction)

例如，用实标量场 $\phi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

前两项是动能项和质量项，第三项描述实标量场的自相互作用

λ 是一个实耦合常数 (coupling constant)，它的大小决定耦合的强度

$[\mathcal{L}] = [\phi^4] = [E]^4$ 意味着 $[\lambda] = 1$ ，即耦合常数 λ 是无量纲的

\mathcal{L}_{ϕ^4} 描述实标量场的 ϕ^4 理论

根据 Euler-Lagrange 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ ， ϕ^4 理论的经典运动方程是

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

存在相互作用时，场的经典运动方程是非线性的

实标量场和 Dirac 旋量场的 Yukawa 理论



· 相互作用项也可以涉及不同的场



例如，用实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \equiv \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_Y$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$$



\mathcal{L}_S 包含 ϕ 的动能项和质量项, \mathcal{L}_D 包含 ψ 的动能项和质量项



相互作用项 $\mathcal{L}_{Y\psi}$ 描述 ϕ 与 ψ 之间的 Yukawa 相互作用，其中 κ 是实耦合常数。



$[\mathcal{L}] = [\phi\bar{\psi}\psi] = [E]^4$ 表明 Yukawa 耦合常数 κ 没有量纲

实标量场和 Dirac 旋量场的 Yukawa 理论



相互作用项也可以涉及不同的场

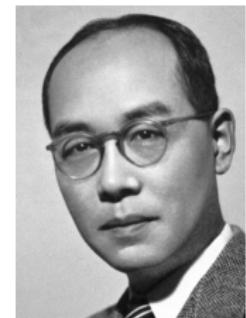


例如，用实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \equiv \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_Y$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$$



湯川秀樹
(1907-1981)



\mathcal{L}_S 包含 ϕ 的动能项和质量项, \mathcal{L}_D 包含 ψ 的动能项和质量项



相互作用项 \mathcal{L}_Y 描述 ϕ 与 ψ 之间的 Yukawa 相互作用，其中 κ 是实耦合常数



$[\mathcal{L}] = [\phi\bar{\psi}\psi] = [E]^4$ 表明 Yukawa 耦合常数 κ 没有量纲



这类相互作用最先由汤川秀树 (Hideki Yukawa) 于 1935 年提出，当时引入 π 介子 (对应于 ϕ) 来传递核子 (对应于 ψ) 之间的强相互作用



$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ 描述 Yukawa 理论，由于 \mathcal{L}_Y 包含不同类型的场，经典运动方程是多个互耦合的运动方程

微扰论

- 🥔 非线性和耦合的运动方程在**经典场论**中尚不容易求解，在**量子场论**中更加困难
- 🥕 所幸的是，当**耦合常数**（如 λ 、 κ ）**比较小时**，在**微扰论** (perturbation theory) 中利用**微扰级数展开**可以得到比较可靠的**近似结果**
- 🍆 本章和下一章介绍**用微扰论处理量子场相互作用**的思路

微扰论

非线性和耦合的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中更加困难

所幸的是，当耦合常数（如 λ 、 κ ）比较小时，在微扰论（perturbation theory）中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。

本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路

 如果拉氏量中相互作用项 \mathcal{L}_1 不包含场的时空导数 $\partial_\mu \Phi_a$ ，则 $\partial \mathcal{L}_1 / \partial \dot{\Phi}_a = 0$

👉 \mathcal{L}_1 不影响场的共轭动量密度 $\pi_a = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ ，故 π_a 保持没有相互作用时的形式

将哈密顿量密度分解成 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$

 \mathcal{H}_0 是自由部分，与没有相互作用时的哈密顿量密度相同； \mathcal{H}_1 是相互作用部分

由定义式 $\mathcal{H} \equiv \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$ 得到 $\mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\mathcal{L}_1(\Phi_a)$

从而，相互作用哈密顿量是 $H_1 = \int d^3x \mathcal{H}_1(\Phi_a) = - \int d^3x \mathcal{L}_1(\Phi_a)$

微扰论

非线性和耦合的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中更加困难

所幸的是，当耦合常数（如 λ 、 κ ）比较小时，在微扰论（perturbation theory）中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。

本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路

 如果拉氏量中相互作用项 \mathcal{L}_1 不包含场的时空导数 $\partial_\mu \Phi_a$ ，则 $\partial \mathcal{L}_1 / \partial \dot{\Phi}_a = 0$

👉 \mathcal{L}_1 不影响场的共轭动量密度 $\pi_a = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ ，故 π_a 保持没有相互作用时的形式

将哈密顿量密度分解成 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$

🥐 \mathcal{H}_0 是自由部分，与没有相互作用时的哈密顿量密度相同； \mathcal{H}_1 是相互作用部分

由定义式 $\mathcal{H} \equiv \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$ 得到 $\mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\mathcal{L}_1(\Phi_a)$

从而，相互作用哈密顿量是 $H_1 = \int d^3x \mathcal{H}_1(\Phi_a) = - \int d^3x \mathcal{L}_1(\Phi_a)$

如果 \mathcal{L}_1 包含场的时空导数 $\partial_\mu \Phi_a$ ，则共轭动量密度 $\pi_a = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}_a$ 与没有相互作用的情况不同， \mathcal{H}_1 的形式会复杂一些

6.1 节 相互作用绘景



2.2 节介绍过哈密顿量不含时情况下 Schrödinger 与 Heisenberg 绘景之间的关系



在 Schrödinger 绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^S$ 依赖于时间，算符 O^S 不依赖于时间



在 Heisenberg 绘景中，态矢 $|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$ 不依赖于时间，算符 $(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$ 依赖于时间



由于 Heisenberg 绘景能够明确地处理场算符的时间依赖性，前面章节中自由场正则量子化程序都是在这个绘景中进行的



实际上，在 Schrödinger 绘景中也可以等价地讨论正则量子化。



6.1 节 相互作用绘景



2.2 节介绍过**哈密顿量不含时**情况下 Schrödinger 与 Heisenberg 绘景之间的关系



在 **Schrödinger 绘景中**，态矢 $|\Psi(t)\rangle^S$ 依赖于时间，**算符 O^S 不依赖于时间**



在 **Heisenberg 绘景中**，态矢 $|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$ 不依赖于时间，**算符 $O^H(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$ 依赖于时间**



由于 **Heisenberg 绘景能够明确地处理场算符的时间依赖性**，前面章节中自由场的**正则量子化程序**都是在这个绘景中进行的



实际上，在 **Schrödinger 绘景中**也可以等价地讨论正则量子化



接下来以**实标量场**为例进行表述



根据 2.3.3 小节，自由实标量场 $\phi(x)$ 的**哈密顿量**表达成 $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$



H 是**不含时的**，即不依赖于时间 t ，前面的推导表明 $[a_p, H] = E_p a_p$



这里**省略了零点能**，因为零点能是 c 数，只决定总能量的零点，不影响下面的讨论



湮灭算符 a_p 和产生算符 a_p^\dagger 不依赖于时间，实际上是 **Schrödinger 绘景中的算符**

Heisenberg 绘景中的产生湮灭算符

 将 $[a_p, H] = E_p a_p$ 改写为 $[a_p, -iHt] = -iE_p t a_p$ ，得到**多重对易子**

$$[a_p, (-iHt)^{(1)}] = [a_p, -iHt] = -iE_p t a_p,$$

$$[a_p, (-iHt)^{(2)}] = [[a_p, (-iHt)^{(1)}], -iHt] = -iE_p t [a_p, -iHt] = (-iE_p t)^2 a_p, \quad \dots$$

$$[a_p, (-iHt)^{(n)}] = (-iE_p t)^n a_p$$

由 $O^H(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt}$ 和 $e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}]$ 推出 Heisenberg 绘景中的湮灭算符

$$a_p^H(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [a_p, (-iHt)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iE_p t)^n a_p = e^{-iE_p t} a_p$$

 对上式取厄米共轭，得到相应的**产生算符**

$$a_p^{H\dagger}(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$$



Schrödinger 绘景中的场算符

根据上述 $a_p^H(t) = e^{iHt}a_p e^{-iHt} = e^{-iE_p t}a_p$ 和 $a_p^{H\dagger}(t) = e^{iHt}a_p^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_p t}a_p^\dagger$

将 Heisenberg 绘景中自由实标量场的平面波展开式化为

$$\begin{aligned}\phi^H(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_p^H(t) e^{ip \cdot x} + a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

 第二个表达式里**场算符的时间依赖性**只包含在 Heisenberg 绘景的产生湮灭算符中

Schrödinger 绘景中的场算符

根据上述 $a_p^H(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt} = e^{-iE_p t} a_p$ 和 $a_p^{H\dagger}(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$

将 Heisenberg 绘景中自由实标量场的平面波展开式化为

$$\begin{aligned}\phi^H(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_p^H(t) e^{ip \cdot x} + a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right]\end{aligned}$$

 第二个表达式里**场算符的时间依赖性**只包含在 Heisenberg 绘景的产生湮灭算符中

反过来，在 Schrödinger 绘景中，实标量场的平面波展开式为

$$\begin{aligned}\phi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \phi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[e^{-iHt} a_p^H(t) e^{iHt} e^{ip \cdot x} + e^{-iHt} a_p^{H\dagger}(t) e^{iHt} e^{-ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$

可见，场算符在 Schrödinger 绘景中确实不依赖于时间

Schrödinger 绘景中的正则对易关系



将共轭动量密度的展开式变换到 Schrödinger 绘景中，那么它也不依赖于时间：

$$\begin{aligned}\pi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \pi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} e^{-iHt} \left[a_p^H(t) e^{ip \cdot x} - a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right] e^{iHt} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$



2.2 节提到，正则对易关系的形式与绘景无关，这一点很容易验证

Schrödinger 绘景中的正则对易关系



将**共轭动量密度**的展开式变换到 **Schrödinger 绘景**中，那么它也不依赖于时间：

$$\begin{aligned}\pi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \pi^H(\mathbf{x}, t) e^{iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} e^{-iHt} \left[a_p^H(t) e^{ip \cdot x} - a_p^{H\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right] e^{iHt} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$

 2.2 节提到，**正则对易关系**的形式与**绘景无关**，这一点很容易验证

 比如，实标量场在 **Heisenberg 绘景**中的**等时对易关系**

$$[\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^H(\mathbf{x}, t), \phi^H(\mathbf{y}, t)] = [\pi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] = 0$$

在 **Schrödinger 绘景**中化为**正则对易关系**

$$[\phi^S(\mathbf{x}), \pi^S(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^S(\mathbf{x}), \phi^S(\mathbf{y})] = [\pi^S(\mathbf{x}), \pi^S(\mathbf{y})] = 0$$

 在 Schrödinger 绘景中，从这些正则对易关系和平面波展开式出发，可以推出**产生湮灭算符的对易关系**，结果必定与在 Heisenberg 绘景中导出的对易关系**相同**

 从而推出 $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$ ，这说明在 Schrödinger 绘景中也可以**自洽地**讨论

相互作用绘景



 存在相互作用时，在 Schrödinger 绘景中将不含时的哈密顿量 $H = H^S + H^H$ 分解为两个部分，

$$H^S = H_0^S + H_1^S$$



主要部分 H_0^S 是自由（没有相互作用）的哈密顿量



微扰部分 H_1^S 描述相互作用，只给出较小的影响。



这里假设 H_0^S 和 H_1^S 都是不含时的

相互作用绘景

 存在相互作用时，在 Schrödinger 绘景中将不含时的哈密顿量 $H = H^S = H^H$ 分解为两个部分，

$$H^S = H_0^S + H_1^S$$

 主要部分 H_0^S 是自由（没有相互作用）的哈密顿量

 微扰部分 H_1^S 描述相互作用，只给出较小的影响

 这里假设 H_0^S 和 H_1^S 都是不含时的

 此时可建立相互作用绘景 (interaction picture)，它也

称为 Dirac 绘景，建立方式是把主要部分 H_0^S 的影响塞进态矢里面，将态矢定义为

$$|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S$$

 算符定义为

$$O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$$



Paul Dirac
(1902–1984)

相互作用绘景中的哈密顿量

 根据相互作用绘景中的算符定义 $O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$

 相互作用绘景中哈密顿量的自由部分与 Schrödinger 绘景中的相同，

$$H_0^I = e^{iH_0^S t} H_0^S e^{-iH_0^S t} = H_0^S$$

 但总哈密顿量不同，

$$H^I(t) = e^{iH_0^S t} H e^{-iH_0^S t}$$

 微扰部分则满足

$$H_1^I(t) = e^{iH_0^S t} H_1^S e^{-iH_0^S t} = e^{iH_0^S t} (H - H_0^S) e^{-iH_0^S t} = H^I(t) - H_0^S = H^I(t) - H_0^I$$

! 注意， $H^I(t)$ 和 $H_1^I(t)$ 都是含时的

三种绘景



Schrödinger 绘景与 Heisenberg 绘景的变换关系为

$$|\Psi(t)\rangle^S = e^{-iHt} |\Psi\rangle^H, \quad O^S = e^{-iHt} O^H(t) e^{iHt}$$



以 **Schrödinger 绘景** 为中介，得到 **相互作用绘景** 与 **Heisenberg 绘景** 之间的关系

$$|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} O^H(t) e^{iHt} e^{-iH_0^S t}$$



引入 **幺正变换算符** $V(t) \equiv e^{iH_0^S t} e^{-iHt}$ ，满足 $V(0) = 1$ ，将以上关系简化为

$$|\Psi(t)\rangle^I = V(t) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = V(t) O^H(t) V^\dagger(t)$$

三种绘景



Schrödinger 绘景与 Heisenberg 绘景的变换关系为

$$|\Psi(t)\rangle^S = e^{-iHt} |\Psi\rangle^H, \quad O^S = e^{-iHt} O^H(t) e^{iHt}$$

以 **Schrödinger 绘景** 为中介，得到 **相互作用绘景** 与 **Heisenberg 绘景** 之间的关系

$$|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} O^H(t) e^{iHt} e^{-iH_0^S t}$$

引入 **幺正变换算符** $V(t) \equiv e^{iH_0^S t} e^{-iHt}$ ，满足 $V(0) = 1$ ，将以上关系简化为

$$|\Psi(t)\rangle^I = V(t) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = V(t) O^H(t) V^\dagger(t)$$

于是，相互作用绘景中等时对易关系的形式不变，如

$$\begin{aligned} [\phi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] &= [V(t) \phi^H(\mathbf{x}, t) V^\dagger(t), V(t) \pi^H(\mathbf{y}, t) V^\dagger(t)] \\ &= V(t) [\phi^H(\mathbf{x}, t), \pi^H(\mathbf{y}, t)] V^\dagger(t) = V(t) i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) V^\dagger(t) = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

t = 0 时刻 三种绘景是一致的， $|\Psi(0)\rangle^I = |\Psi(0)\rangle^S = |\Psi\rangle^H$ ， $O^I(0) = O^S = O^H(0)$

在任意 t 时刻 有 ${}^I\langle\Psi(t)|O^I(t)|\Psi(t)\rangle^I = {}^S\langle\Psi(t)|O^S|\Psi(t)\rangle^S = {}^H\langle\Psi|O^H(t)|\Psi\rangle^H$ ，

因而三种绘景描述**相同的**物理

相互作用绘景中态矢的演化方程

 在 Schrödinger 绘景中，Schrödinger 方程是

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = H |\Psi(t)\rangle^S$$

 由定义 $|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S$ 推出

$$\begin{aligned} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^I &= \left(i\partial_0 e^{iH_0^S t} \right) |\Psi(t)\rangle^S + e^{iH_0^S t} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^S = \left(-H_0^S e^{iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} H \right) |\Psi(t)\rangle^S \\ &= \left(-H_0^S + e^{iH_0^S t} H e^{-iH_0^S t} \right) e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S = [-H_0^I + H^I(t)] e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I$$



相互作用绘景中态矢的演化方程

 在 Schrödinger 绘景中，Schrödinger 方程是

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = H |\Psi(t)\rangle^S$$

 由定义 $|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S$ 推出

$$\begin{aligned} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^I &= \left(i\partial_0 e^{iH_0^S t} \right) |\Psi(t)\rangle^S + e^{iH_0^S t} i\partial_0 |\Psi(t)\rangle^S = \left(-H_0^S e^{iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} H \right) |\Psi(t)\rangle^S \\ &= \left(-H_0^S + e^{iH_0^S t} H e^{-iH_0^S t} \right) e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S = [-H_0^I + H^I(t)] e^{iH_0^S t} |\Psi(t)\rangle^S \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I$$

 这是态矢 $|\Psi(t)\rangle^I$ 的演化方程，它只由相互作用哈密顿量 $H_1^I(t)$ 决定

 可见，在相互作用绘景中，态矢的演化规律与 Schrödinger 绘景中的运动方程相同，但必须将其中的总哈密顿量 H 换成相互作用哈密顿量 $H_1^I(t)$

 这部分演化属于动力学 (dynamics) 演化

相互作用绘景中算符的演化方程

 另一方面，由定义 $O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$ 有

$$\begin{aligned} i\partial_0 O^I(t) &= (i\partial_0 e^{iH_0^S t}) O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S (i\partial_0 e^{-iH_0^S t}) \\ &= -H_0^S e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} H_0^S = [e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}, H_0^S] \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} O^I(t) = [O^I(t), H_0^S]$$

相互作用绘景中算符的演化方程

 另一方面，由定义 $O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}$ 有

$$\begin{aligned} i\partial_0 O^I(t) &= (i\partial_0 e^{iH_0^S t}) O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S (i\partial_0 e^{-iH_0^S t}) \\ &= -H_0^S e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} H_0^S = [e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}, H_0^S] \end{aligned}$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} O^I(t) = [O^I(t), H_0^S]$$

 这个方程表明算符 $O^I(t)$ 的演化只由自由哈密顿量 $H_0^S = H_0^I$ 决定

 可见，在相互作用绘景中，算符的演化规律与 Heisenberg 绘景中的 Heisenberg 运动方程 $i \frac{\partial}{\partial t} O^H(t) = [O^H(t), H]$ 相同，但必须将其中的总哈密顿量 H 换成自由哈密顿量 H_0^S

 这部分演化属于运动学 (kinematics) 演化

相互作用绘景的好处

 在 **Heisenberg 绘景** 中，对未加微扰的系统求出各个算符间的关系之后，**加入微扰**有可能**改变**这些关系

 不过，**加入微扰之后**各个算符在**相互作用绘景**中的许多关系仍然与**加入微扰之前**它们在 **Heisenberg 绘景**中的关系**相同**，可以直接套用原来的公式

 这就是相互作用绘景的好处

相互作用绘景的好处

 在 **Heisenberg 绘景** 中，对未加微扰的系统求出各个算符间的关系之后，**加入微扰**有可能**改变**这些关系

 不过，**加入微扰之后**各个算符在**相互作用绘景**中的许多关系仍然与**加入微扰之前**它们在 **Heisenberg 绘景**中的关系**相同**，可以直接套用原来的公式

 这就是相互作用绘景的好处

 特别地，在**相互作用绘景**中，**具有相互作用**的场算符的平面波展开式将与**没有相互作用**的场算符在 **Heisenberg 绘景**中的展开式**相同**

 因此，在**存在相互作用**的情况下，我们仍然可以沿用第 2、4、5 章中导出的**自由量子场平面波展开式**，其中的**产生湮灭算符**满足原来的**对易或反对易关系**

 这一点对接下来的讨论**至关重要**

6.1.1 小节 例 1：实标量场



下面以实标量场的 ϕ^4 理论为例讨论相互作用绘景



$$\text{拉氏量为 } \mathcal{L}_{\phi^4}^H = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi^H) \partial_\mu \phi^H - \frac{1}{2} m^2 (\phi^H)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\phi^H)^4$$



实标量场 $\phi(x)$ 的共轭动量密度为 $\pi^H = \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^4}^H}{\partial(\partial_0\phi^H)} = \partial_0\phi^H$ ，与自由场形式相同



这里将 Heisenberg 绘景的标记 H 明确写出来



依照定义，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}^H = \pi^H \partial_0 \phi^H - \mathcal{L}_{\phi^4}^H = \frac{1}{2} [(\pi^H)^2 + (\nabla \phi^H)^2 + m^2 (\phi^H)^2] + \frac{\lambda}{4!} (\phi^H)^4$$



将哈密顿量分解为 $H^H = \int d^3x \mathcal{H}^H = H_0^H + H_1^H$



$H_0^H = \frac{1}{2} \int d^3x [(\pi^H)^2 + (\nabla\phi^H)^2 + m^2(\phi^H)^2]$ 与自由哈密顿量的形式相同



$$H_1^{\text{H}} = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x (\phi^{\text{H}})^4 \text{ 描述相互作用}$$

相互作用绘景中的产生湮灭算符



假设 $t = 0$ 时，实标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式与自由场展开式一样，

$$\phi^I(\mathbf{x}, 0) = \phi^H(\mathbf{x}, 0) = \phi^S(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)$$

$$\pi^I(\mathbf{x}, 0) = \pi^H(\mathbf{x}, 0) = \pi^S(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right)$$

其中产生湮灭算符 a_p^\dagger 和 a_p 满足自由情况下的对易关系

在 $t = 0$ 时刻，绘景变换关系 $O^H(t) = W^\dagger(t)O^S W(t)$ 意味着 $H_0^H(0) = H_0^S$

将以上 $\phi^H(\mathbf{x}, 0)$ 和 $\pi^H(\mathbf{x}, 0)$ 的平面波展开式代入前面 H_0^H 的表达式，仿照 2.3.3 小节的推导过程，略去零点能，得到 $H_0^S = H_0^H(0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$

即哈密顿量的自由部分 H_0^S 与自由情况下的形式相同

由此推出 $[a_p, (-iH_0^S t)^{(n)}] = (-iE_p t)^n a_p$ ，得到相互作用绘景中的产生湮灭算符

$$a_p^I(t) = e^{iH_0^S t} a_p e^{-iH_0^S t} = e^{-iE_p t} a_p, \quad a_p^{I\dagger}(t) = e^{iH_0^S t} a_p^\dagger e^{-iH_0^S t} = e^{iE_p t} a_p^\dagger$$

相互作用绘景中的平面波展开式

 于是，相互作用绘景中任意 t 时刻的场算符展开式为

$$\begin{aligned}\phi^I(\mathbf{x}, t) &= e^{iH_0^S t} \phi^S(\mathbf{x}) e^{-iH_0^S t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_p^I(t) e^{ip \cdot x} + a_p^{I\dagger}(t) e^{-ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-iE_p t} e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{iE_p t} e^{-ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)\end{aligned}$$

共轭动量密度的展开式为

$$\pi^I(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0^S t} \pi^S(\mathbf{x}) e^{-iH_0^S t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

正如所期望的，这两个式子与自由实标量场在 Heisenberg 绘景中的展开式一致

相互作用绘景中的等时对易关系



因此，根据产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$



可以证明 $\phi^I(x)$ 和 $\pi^I(x)$ 满足与自由场形式相同的等时对易关系 (参考习题 2.2)

$$[\phi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^I(\mathbf{x}, t), \phi^I(\mathbf{y}, t)] = [\pi^I(\mathbf{x}, t), \pi^I(\mathbf{y}, t)] = 0$$



如同**自由场**的情况，推出 $[a_p, H_0^S] = E_p a_p$ 和 $[a_p^\dagger, H_0^S] = -E_p a_p^\dagger$



就可以验证场算符展开式符合运动学演化方程

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi^I(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(E_p a_p e^{-ip \cdot x} - E_p a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left([a_p, H_0^S] e^{-ip \cdot x} + [a_p^\dagger, H_0^S] e^{ip \cdot x} \right) = [\phi^I(\mathbf{x}, t), H_0^S] \end{aligned}$$

6.1.2 小节 例 2：有质量矢量场

▲ 不难将上述讨论推广到复标量场、无质量矢量场和 Dirac 旋量场

uitar 但是，推广到有质量矢量场 $A^\mu(x)$ 却会得到不同寻常的结果

Violin 原因在于 $A^0(x)$ 不是一个独立的场变量，不具备相应的共轭动量密度和正则对易关系，因而在绘景变换中具有特殊的性质



6.1.2 小节 例 2：有质量矢量场

不难将上述讨论推广到复标量场、无质量矢量场和 Dirac 旋量场

但是，推广到有质量矢量场 $A^\mu(x)$ 却会得到不同寻常的结果

原因在于 $A^0(x)$ 不是一个独立的场变量，不具备相应的共轭动量密度和正则对易关系，因而在绘景变换中具有特殊的性质

假设参与相互作用的有质量矢量场具有拉氏量 $\mathcal{L}^H = \mathcal{L}_0^H + \mathcal{L}_1^H$

自由项为 $\mathcal{L}_0^H = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^H F^{H,\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^H A^{H,\mu}$

相互作用项为 $\mathcal{L}_1^H = -g J_\mu^H A^{H,\mu}$ ，其中 g 是一个无量纲耦合常数

$J_\mu^H(x)$ 是由其它场组成的流，如 $J_\mu^H(x) = \bar{\psi}^H(x) \gamma_\mu \psi^H(x)$

根据 Euler-Lagrange 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial (\partial_\mu A_\nu^H)} - \frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial A_\nu^H} = 0$ 和

$$\frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial (\partial_\mu A_\nu^H)} = -F^{H,\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}^H}{\partial A_\nu^H} = m^2 A^{H,\nu} - g J^{H,\nu}$$

$A^\mu(x)$ 的经典运动方程为 $\partial_\mu F^{H,\mu\nu} + m^2 A^{H,\nu} = g J^{H,\nu}$



$A^{\text{H},0}$ 的依赖关系

由于 $J_{\mu}^{\text{H}}(x)$ 不包含 $A^{\text{H},\mu}$ 的时间导数，共轭动量密度与**自由场**形式相同：

$$\pi_i^{\text{H}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^{\text{H},i})} = -F_{0i}^{\text{H}}, \quad \boldsymbol{\pi}^{\text{H},i} = \mathbf{F}^{\text{H},i0} = -\partial^0 A^{\text{H},i} + \partial^i A^{\text{H},0}$$

写成**空间矢量**的形式，得

$$\boldsymbol{\pi}^{\text{H}} = -\dot{\mathbf{A}}^{\text{H}} - \nabla A^{\text{H},0}, \quad \dot{\mathbf{A}}^{\text{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\text{H}} - \nabla A^{\text{H},0}$$

当 $\nu = 0$ 时，**运动方程**变成

$$\partial_i F^{\text{H},i0} + m^2 A^{\text{H},0} = g J^{\text{H},0}$$

故

$$A^{\text{H},0} = -\frac{1}{m^2} (\partial_i \mathbf{F}^{\text{H},i0} - g J^{\text{H},0}) = -\frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}} - g J^{\text{H},0})$$

与**自由情况** $A^{\text{H},0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\text{H}}$ 不同，此处 $A^{\text{H},0}$ 还依赖于 $J^{\text{H},0}$

哈密顿量密度

▲ 根据 4.3.1 小节推出的

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^H F^{H,\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}^H)^2, \quad -\frac{1}{2} m^2 A_\mu^H A^{H,\mu} = -\frac{1}{2} m^2 [(A_0^H)^2 - (\mathbf{A}^H)^2]$$



哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\text{H}} &= \pi_i^{\text{H}} \partial_0 A^{\text{H},i} - \mathcal{L}^{\text{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\text{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{H}} - \mathcal{L}^{\text{H}} \\ &= -\boldsymbol{\pi}^{\text{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{H}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^{\text{H}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}^{\text{H}})^2 - \frac{1}{2}m^2[(A^{\text{H},0})^2 - (\mathbf{A}^{\text{H}})^2] \\ &\quad + qJ^{\text{H},0}A^{\text{H},0} - q\mathbf{J}^{\text{H}} \cdot \mathbf{A}^{\text{H}}\end{aligned}$$

哈密顿量密度

▲ 根据 4.3.1 小节推出的

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^H F^{H,\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}^H)^2, \quad -\frac{1}{2} m^2 A_\mu^H A^{H,\mu} = -\frac{1}{2} m^2 [(A_0^H)^2 - (\mathbf{A}^H)^2]$$

哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\text{H}} &= \pi_i^{\text{H}} \partial_0 A^{\text{H},i} - \mathcal{L}^{\text{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\text{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{H}} - \mathcal{L}^{\text{H}} \\ &= -\boldsymbol{\pi}^{\text{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{H}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^{\text{H}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}^{\text{H}})^2 - \frac{1}{2}m^2[(A^{\text{H},0})^2 - (\mathbf{A}^{\text{H}})^2] \\ &\quad + qJ^{\text{H},0}A^{\text{H},0} - q\mathbf{J}^{\text{H}} \cdot \mathbf{A}^{\text{H}}\end{aligned}$$

我们需要知道它比自由哈密顿量密度多了什么

利用 $\dot{\mathbf{A}}^H = -\boldsymbol{\pi}^H - \nabla A^{H,0}$ 和 $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0})$ 将 \mathcal{H}^H 的第一项化为

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\pi}^H \cdot \dot{\boldsymbol{A}}^H &= \boldsymbol{\pi}^H \cdot (\boldsymbol{\pi}^H + \nabla A^{H,0}) = (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \nabla \cdot (A^{H,0} \boldsymbol{\pi}^H) - A^{H,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H \\ &= (\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \nabla \cdot (A^{H,0} \boldsymbol{\pi}^H) + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 - \frac{g}{m^2} J^{H,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H \end{aligned}$$

+ 最后一行第二项是全散度，不会影响哈密顿量

分解哈密顿量

由于 $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0})$, \mathcal{H}^H 的第四项中包括

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}m^2(A^{H,0})^2 &= -\frac{m^2}{2}\frac{1}{m^4}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0})^2 \\ &= -\frac{1}{2m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 - \frac{g^2}{2m^2}(J^{H,0})^2 + \frac{g}{m^2}J^{H,0}\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H\end{aligned}$$

\mathcal{H}^H 的第五项为

$$gJ^{H,0}A^{H,0} = -\frac{g}{m^2}J^{H,0}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0}) = -\frac{g}{m^2}J^{H,0}\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + \frac{g^2}{m^2}(J^{H,0})^2$$

分解哈密顿量

由于 $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0})$, \mathcal{H}^H 的第四项中包括

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}m^2(A^{H,0})^2 &= -\frac{m^2}{2}\frac{1}{m^4}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0})^2 \\ &= -\frac{1}{2m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 - \frac{g^2}{2m^2}(J^{H,0})^2 + \frac{g}{m^2}J^{H,0}\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H\end{aligned}$$

\mathcal{H}^H 的第五项为

$$gJ^{H,0}A^{H,0} = -\frac{g}{m^2}J^{H,0}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H - gJ^{H,0}) = -\frac{g}{m^2}J^{H,0}\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + \frac{g^2}{m^2}(J^{H,0})^2$$

这里包含 J^μ 的项都是自由场不具备的，应该归为相互作用项

于是将哈密顿量分解为 $\mathcal{H}^H = \int d^3x \mathcal{H}^H = \mathcal{H}_0^H + \mathcal{H}_1^H$

其中 $\mathcal{H}_0^H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\boldsymbol{\pi}^H)^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)^2 + (\nabla \times \mathbf{A}^H)^2 + m^2(\mathbf{A}^H)^2 \right]$ 与自由哈密顿量形式相同

$\mathcal{H}_1^H = \int d^3x \left[-g\mathbf{J}^H \cdot \mathbf{A}^H - \frac{g}{m^2}J^{H,0}\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H + \frac{g^2}{2m^2}(J^{H,0})^2 \right]$ 描述相互作用

$\mathbf{A}^H(x)$ 与 H_0^H 的对易子

根据等时对易关系，有

$$\begin{aligned}[A^{H,i}(x), (\boldsymbol{\pi}^H(y))^2] &= [A^{H,i}(x), \pi_j^H(y)]\pi_j^H(y) + \pi_j^H(y)[A^{H,i}(x), \pi_j^H(y)] \\ &= 2i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\pi_j^H(y) = -2i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^H(y)\end{aligned}$$

写成空间矢量的形式是 $[A^H(x), (\boldsymbol{\pi}^H(y))^2] = -2i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^H(y)$

另一方面，用 ∇_y 表示对空间矢量 y 的梯度算符，得到

$$\begin{aligned}[A^{H,i}(x), \nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y)] &= -\frac{\partial}{\partial y^j}[A^{H,i}(x), \pi_j^H(y)] = -i\frac{\partial}{\partial y^i}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [A^H(x), \nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y)] &= -i\nabla_y\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{👉 } [\mathbf{A}^H(x), H_0^H] &= \frac{1}{2} \int d^3y \left\{ [\mathbf{A}^H(x), (\boldsymbol{\pi}^H(y))^2] + \frac{1}{m^2} [\mathbf{A}^H(x), (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y))^2] \right\} \\ &= \int d^3y \left\{ -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^H(y) - \frac{i}{m^2} [\nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y)]\nabla_y\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\ &= -i\boldsymbol{\pi}^H(x) + \frac{i}{m^2} \int d^3y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\nabla_y[\nabla_y \cdot \boldsymbol{\pi}^H(y)] \quad \text{分部积分} \\ &= -i\boldsymbol{\pi}^H(x) + \frac{i}{m^2} \nabla_x[\nabla_x \cdot \boldsymbol{\pi}^H(x)]\end{aligned}$$

相互作用绘景



接下来转换到相互作用绘景，

$$\mathbf{A}^I = V(t) \mathbf{A}^H V^\dagger(t), \quad \boldsymbol{\pi}^I = V(t) \boldsymbol{\pi}^H V^\dagger(t)$$

$$H_0^S = \mathbf{H}_0^I = V(t) H_0^H V^\dagger(t) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\boldsymbol{\pi}^I)^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I)^2 + (\nabla \times \mathbf{A}^I)^2 + m^2 (\mathbf{A}^I)^2 \right]$$

将算符演化方程 $i\partial_0 O^I(t) = [O^I(t), H_0^S]$ 应用到 \mathbf{A}^I 上

利用上一页推出的 $[\mathbf{A}^H, H_0^H] = -i\boldsymbol{\pi}^H + \frac{i}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H)$ ，得到

$$\begin{aligned} i\dot{\mathbf{A}}^I &= [\mathbf{A}^I, H_0^S] = V(t) [\mathbf{A}^H, H_0^H] V^\dagger(t) \\ &= V(t) \left[-i\boldsymbol{\pi}^H + \frac{i}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^H) \right] V^\dagger(t) = -i\boldsymbol{\pi}^I + \frac{i}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I) \end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I + \frac{1}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I)$$

与 3.4 节中的式子比较，发现这个等式与自由场情况具有相同形式



$t = 0$ 时刻的平面波展开式



现在，假设 $t = 0$ 时 $A^\mu(x)$ 和 $\pi_i(x)$ 的平面波展开式与自由场展开式相同，

$$A^{\text{I},\mu}(\mathbf{x},0) = \textcolor{brown}{A^{\text{H},\mu}(\mathbf{x},0)} = A^{\text{S},\mu}(\mathbf{x})$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]$$

$$\begin{aligned}\pi_i^I(\mathbf{x}, 0) &= \pi_i^H(\mathbf{x}, 0) = \pi_i^S(\mathbf{x}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ip_0}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right]\end{aligned}$$



其中产生湮灭算符 $a_{p,\lambda}^\dagger$ 和 $a_{p,\lambda}$ 满足**自由**情况下的**对易关系**



 在 $t = 0$ 时刻，将以上 $A^{H,\mu}(\mathbf{x}, 0)$ 和 $\pi_i^H(\mathbf{x}, 0)$ 的平面波展开式代入前面 H_0^H 的表达式，仿照 4.3.3 小节的推导过程，略去零点能，得到

$$H_0^S = H_0^H(0) = \sum_{\lambda=\pm,0} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda}$$



即哈密顿量的自由部分 H_0^S 与自由情况下的形式相同

相互作用绘景中的平面波展开式



进而推出 $[a_{p,\lambda}, (-iH_0^S t)^{(n)}] = (-iE_p t)^n a_{p,\lambda}$ 和相互作用绘景中的产生湮灭算符

$$a_{\mathbf{p},\lambda}^{\text{I}}(t) = e^{iH_0^{\text{S}}t} a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-iH_0^{\text{S}}t} = e^{-iE_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p},\lambda}, \quad a_{\mathbf{p},\lambda}^{\text{I}\dagger}(t) = e^{iH_0^{\text{S}}t} a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger} e^{-iH_0^{\text{S}}t} = e^{iE_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p},\lambda}^{\dagger}.$$



于是，相互作用绘景中任意 t 时刻的场算符展开式为

$$\begin{aligned} A^{\text{I},\mu}(\mathbf{x},t) &= e^{iH_0^{\text{S}}t} A^{\text{S},\mu}(\mathbf{x}) e^{-iH_0^{\text{S}}t} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ \pi_i^{\text{I}}(\mathbf{x},t) &= e^{iH_0^{\text{S}}t} \pi_i^{\text{S}}(\mathbf{x}) e^{-iH_0^{\text{S}}t} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ip_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm,0} \left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \end{aligned}$$



也就是说，对于任意 t 时刻， $A^{I,\mu}(x)$ 和 $\pi_i^I(x)$ 的展开式与 Heisenberg 绘景中的自由场展开式一致，这是我们期望的结果

$A^{I,0}$ 与 $A^{H,0}$

因此， $\pi_i^I(x)$ 和 $A^{I,\mu}(x)$ 的关系也与**自由场**情况一样，

$$\pi_i^I = -\partial_0 A_i^I + \partial_i A_0^I, \quad \boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I - \nabla A^{I,0}$$

与前面推出的 $\boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I + \frac{1}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I)$ 比较，得到**相互作用绘景**中 $A^{I,0}$ 为

$$A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I$$

$A^{I,0}$ 与 $A^{H,0}$

因此, $\pi_i^I(x)$ 和 $A^{I,\mu}(x)$ 的关系也与自由场情况一样,

$$\pi_i^I = -\partial_0 A_i^I + \partial_i A_0^I, \quad \boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I - \nabla A^{I,0}$$

与前面推出的 $\boldsymbol{\pi}^I = -\dot{\mathbf{A}}^I + \frac{1}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I)$ 比较, 得到相互作用绘景中 $A^{I,0}$ 为

$$A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I$$

 这个式子不同于 Heisenberg 绘景中的关系式 $A^{H,0} = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \pi^H - g J^{H,0})$ ，反而与自由场的关系式一致

由于 $A^{H,0}$ 不是独立的场分量，在 Heisenberg 绘景中可以利用 Euler-Lagrange 方程导出关系式来确定它

但我们无法保证这个关系式在相互作用绘景中成立，因而不能直接通过相似变换
定义 $A^{H,0}$ 在相互作用绘景中对应的量

非协变项

⚠ 根据以上表达式 $A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \pi^I$, 相互作用哈密顿量在相互作用绘景中化为

$$\begin{aligned} H_1^I &= V(t) H_1^H V^\dagger(t) = \int d^3x \left[-g \mathbf{J}^I \cdot \mathbf{A}^I - \frac{g}{m^2} J^{I,0} \nabla \cdot \pi^I + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[-g \mathbf{J}^I \cdot \mathbf{A}^I + g J^{I,0} A^{I,0} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[g J_\mu^I A^{I,\mu} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] = \int d^3x \left[-\mathcal{L}_1^I + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \end{aligned}$$

💻 最后一行方括号中第一项 $-\mathcal{L}_1^I = g J_\mu^I A^{I,\mu}$ 是期望的结果，具有 Lorentz 不变性

非协变项

根据以上表达式 $A^{I,0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I$, 相互作用哈密顿量在相互作用绘景中化为

$$\begin{aligned} H_1^I &= V(t) H_1^H V^\dagger(t) = \int d^3x \left[-g \mathbf{J}^I \cdot \mathbf{A}^I - \frac{g}{m^2} J^{I,0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^I + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[-g \mathbf{J}^I \cdot \mathbf{A}^I + g J^{I,0} A^{I,\mu} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[g J_\mu^I A^{I,\mu} + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] = \int d^3x \left[-\mathcal{L}_1^I + \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2 \right] \end{aligned}$$

最后一行方括号中第一项 $-\mathcal{L}_1^I = g J_\mu^I A^{I,\mu}$ 是期望的结果，具有 Lorentz 不变性

但第二项异乎寻常，不具有 Lorentz 不变性，我们将这个**非协变项**记为

$$\mathcal{H}_{J^0}^I = \frac{g^2}{2m^2} (J^{I,0})^2$$

$\mathcal{H}_{J^0}^I$ 看起来会破坏理论的 Lorentz 协变性，不过，后续**微扰论**分析将看到它的贡献恰好抵消了**有质量矢量场传播子**中的**非协变项**（见 6.4.3 小节和 7.4 节）

最终，理论仍然是 **Lorentz 协变** 的



如前所述，在相互作用绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^I$ 承载着动力学演化，它的演化方程

$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I$ 是微扰论处理量子场相互作用的一个出发点



 引入时间演化算符 (time-evolution operator) $\mathcal{U}(t, t_0)$ ，用于联系 t_0 和 t 两个时刻的态矢，

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$



由于 $|\Psi(t)\rangle^I = V(t)|\Psi\rangle^H = V(t)V^\dagger(t_0)|\Psi(t_0)\rangle^I$ ，可以将时间演化算符表示为

$$U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$$

6.2 节 时间演化算符和 S 矩阵

如前所述，在相互作用绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^I$ 承载着动力学演化，它的演化方程

$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I$ 是微扰论处理量子场相互作用的一个出发点

 引入时间演化算符 (time-evolution operator) $U(t, t_0)$ ，用于联系 t_0 和 t 两个时刻的态矢，

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

由于 $|\Psi(t)\rangle^I = V(t)|\Psi\rangle^H = V(t)V^\dagger(t_0)|\Psi(t_0)\rangle^I$ ，可以将时间演化算符表示为

$$U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$$

 容易看出，时间演化算符满足

$$U(t_0, t_0) = 1$$

根据 $V(t)$ 的幺正性，两个时间演化算符相继作用对应的乘法规则为

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = V(t_2)V^\dagger(t_1)V(t_1)V^\dagger(t_0) = V(t_2)V^\dagger(t_0) = U(t_2, t_0)$$

时间演化算符的性质

 对 $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$ 取 $t_2 = t_0$ 和 $t_1 = t$ ，即得

$$U(t_0, t) U(t, t_0) = U(t_0, t_0) = 1$$

故时间演化算符 $U(t, t_0)$ 的逆算符为

$$U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$$

由 $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$ 和 $V(t)$ 的幺正性推出

$$U^\dagger(t, t_0) = V(t_0)V^\dagger(t) = U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0)$$

 这表明时间演化算符是幺正算符

时间演化算符的性质

 对 $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$ 取 $t_2 = t_0$ 和 $t_1 = t$ ，即得

$$U(t_0, t)U(t, t_0) = U(t_0, t_0) = 1$$

故时间演化算符 $U(t, t_0)$ 的逆算符为

$$U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$$

由 $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$ 和 $V(t)$ 的幺正性推出

$$U^\dagger(t, t_0) = V(t_0)V^\dagger(t) = U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0)$$

这表明时间演化算符是么正算符

由于 $V(0) = 1$, 取 $t_0 = 0$, 有

$$U(t, 0) = V(t), \quad U^{-1}(t, 0) = V^\dagger(t)$$

 因而 $U(t, 0)$ 就是联系 Heisenberg 绘景和相互作用绘景的幺正变换算符，即

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t,0) |\Psi\rangle^H, \quad O^I(t) = U(t,0) O^H(t) U^{-1}(t,0)$$

时间演化算符的微分方程



从 $|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$ 和态矢演化方程 $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I$ 推出

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I = i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t) U(t, t_0)$$



这是时间演化算符满足的微分方程，结合初始条件 $U(t_0, t_0) = 1$ ，将解表达为

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) U(t_1, t_0)$$

时间演化算符的微分方程

 从 $|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$ 和态矢演化方程 $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I$ 推出

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I = i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) |\Psi(t)\rangle^I = H_1^I(t) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle^I$$

即

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t) U(t, t_0)$$

这是**时间演化算符**满足的**微分方程**，结合初始条件 $U(t_0, t_0) = 1$ ，将解表达为

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) U(t_1, t_0)$$

 上式左右两边均包含时间演化算符，**重复迭代**，得到**级数**

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \\ + \dots + \left[(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \right] + \dots$$

这个级数用起来不够方便，需要进一步化简

时序乘积

 从现在起省略表示相互作用绘景的上标 I，本章余下内容均在此绘景中讨论

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t_1}} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) \\ + \dots + \left[(-i)^n \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \dots \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t_{n-1}}} dt_n H_1(t_1) \dots H_1(t_n) \right] + \dots$$

里面，作为积分上限的时刻是降序排列的，即 $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq \dots \geq t_0$

 由于积分上限与积分变量相互依赖，这样的多重积分很难处理

时序乘积

 从现在起省略表示相互作用绘景的上标 I，本章余下内容均在此绘景中讨论

 在级数

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}_1} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) \\ & + \cdots + \left[(-i)^n \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{\textcolor{blue}{t}_{n-1}} dt_n H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) \right] + \cdots \end{aligned}$$

里面，作为积分上限的时刻是降序排列的，即 $\textcolor{teal}{t} \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n \geq \cdots \geq t_0$

 由于积分上限与积分变量相互依赖，这样的多重积分很难处理

 为了将每个积分上限都扩展到 t ，引入时序乘积 (time-ordered product) 的概念

 时序乘积使若干个含时算符的乘积强行按照它们相应的时刻从左到右降序排列

 以 n 个 $H_1(t)$ 算符为例，用 T 表示这种时间排序，有

$$\textcolor{red}{T}[H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n)] = H_1(t_{i_1}) H_1(t_{i_2}) \cdots H_1(t_{i_n}), \quad \textcolor{teal}{t}_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n}$$

 这里 $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}$ 是由 t_1, t_2, \dots, t_n 按照数值降序排列得到的

场算符的时序乘积

 利用阶跃函数 $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 将标量场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的时序乘积表示为

$$\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0 - y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0 - x^0) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$$

场算符的时序乘积

利用阶跃函数 $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ 将标量场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的时序乘积表示为

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0 - y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0 - x^0) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$$

如果一个算符包含一个费米子的产生或湮灭算符，可称它为费米子算符

旋量场算符 $\psi(x)$ 和它的 Dirac 共轭 $\bar{\psi}(x)$ 都是费米子算符

如果时间排序交换了两个相邻的费米子算符，则应该额外加上一个负号，否则会破坏 Lorentz 对称性，相关论证在后面

比如，两个旋量场算符 $\psi_a(x)$ 和 $\bar{\psi}_b(y)$ 的时序乘积是

$$\begin{aligned} T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] &= \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\theta(x^0 - y^0) - \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\theta(y^0 - x^0) \\ &= \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y), & x^0 \geq y^0 \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \end{aligned}$$

类空间隔与因果性

 在狭义相对论中， $(x - y)^2$ 描述两个时空点 x^μ 和 y^μ 之间的**时空间隔**

若 $(x - y)^2 < 0$ ，则称 x^μ 和 y^μ 具有类空间隔

类似地, $(x - y)^2 > 0$ 和 $(x - y)^2 = 0$ 分别对应于类时间隔和类光间隔

类空间隔与因果性

 在狭义相对论中, $(x - y)^2$ 描述两个时空点 x^μ 和 y^μ 之间的时空间隔

 若 $(x - y)^2 < 0$, 则称 x^μ 和 y^μ 具有类空间隔

 类似地, $(x - y)^2 > 0$ 和 $(x - y)^2 = 0$ 分别对应于类时间隔和类光间隔

 如果 x^μ 和 y^μ 具有类时或类光间隔, 那么, 在任意惯性参考系中, x^0 和 y^0 的大小关系是确定的, 即不能通过 Lorentz 变换改变时序

 假如两个事件具有因果联系, 则它们发生的两个时空点必定具有类时或类光间隔, 从而两个事件发生的先后次序是确定的

类空间隔与因果性

 在狭义相对论中， $(x - y)^2$ 描述两个时空点 x^μ 和 y^μ 之间的时空间隔

若 $(x - y)^2 < 0$, 则称 x^μ 和 y^μ 具有类空间隔

类似地, $(x - y)^2 > 0$ 和 $(x - y)^2 = 0$ 分别对应于类时间隔和类光间隔

 如果 x^μ 和 y^μ 具有类时或类光间隔，那么，在任意惯性参考系中， x^0 和 y^0 的大小关系是确定的，即不能通过 Lorentz 变换改变时序

 假如两个事件具有因果联系，则它们发生的两个时空点必定具有类时或类光间隔，从而两个事件发生的先后次序是确定的

 反过来，如果 x^μ 和 y^μ 具有类空间隔，则 x^0 和 y^0 的大小关系是不确定的，选取适当的惯性参考系，就可以得到 $x^0 > y^0$ 、 $x^0 = y^0$ 和 $x^0 < y^0$ 三种情况

因此，如果两个事件发生的时空点具有类空间隔，它们发生的先后次序是不确定的，必定没有因果联系，否则将破坏因果性

Pauli-Jordan 传播函数



Lorentz 对称性对时序乘积的**定义**提出一定的要求

两个**实标量场**算符的对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 称为 **Pauli-Jordan 传播函数**，表达为

$$\begin{aligned} D_{\text{PJ}}(x - y) &\equiv [\phi(x), \phi(y)] \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ [a_p, a_q^\dagger] e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + [a_p^\dagger, a_q] e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) [e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} - e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \sin[p \cdot (x-y)] \end{aligned}$$

第三、四步用到产生湮灭算符的对易关系

最后一步用到关系式 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{i}{2}(e^{-iz} - e^{iz})$



Wolfgang Ernst Pauli
(1900–1958)



Pascual Jordan
(1902–1980)

○○○○○

○○○○○○○○○○

○○○○

○○○○○○○○○○

○○○○○○○●○○○○○○

$T[\phi(x)\phi(y)]$ 的 Lorentz 不变性

当 $x^0 - y^0 = 0$ 时, $\sin[p \cdot (x - y)] = \sin[p \cdot (x - y)]$, 则被积函数是 p 的奇函数, 故对 p 积分的结果为零, 即

$$D_{PJ}(x - y) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \sin[p \cdot (x - y)] = 0$$

另一方面, 由于体积元 $d^3 p / E_p$ 是 Lorentz 不变的, $D_{PJ}(x - y)$ 是 Lorentz 不变量

如果 x^μ 和 y^μ 具有类空间隔, 就一定能通过 Lorentz 变换使 $x^0 - y^0 = 0$

于是, $D_{PJ}(x - y) = 0$ 对所有类空间隔成立, 即

$$[\phi(x), \phi(y)] = D_{PJ}(x - y) = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$

T[$\phi(x)\phi(y)$] 的 Lorentz 不变性

 当 $x^0 - y^0 = 0$ 时, $\sin[p \cdot (x - y)] = \sin[p \cdot (x - y)]$, 则被积函数是 p 的奇函数, 故对 p 积分的结果为零, 即

$$D_{\text{PJ}}(x - y) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \sin[p \cdot (x - y)] = 0$$

另一方面，由于体积元 d^3p/E_p 是 Lorentz 不变的， $D_{PJ}(x-y)$ 是 Lorentz 不变量

 如果 x^μ 和 y^μ 具有类空间隔，就一定能通过 Lorentz 变换使 $x^0 - y^0 = 0$

于是, $D_{\text{PJ}}(x - y) = 0$ 对所有类空间隔成立, 即

$$[\phi(x), \phi(y)] = D_{\text{PJ}}(x - y) = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$

关键点 也就是说，当 $(x - y)^2 < 0$ 时，虽然两个实标量场算符 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 可能在不同惯性参考系中具有不同的时序，但一定满足 $\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x)$

因此，前面定义的时序乘积 $T[\phi(x)\phi(y)] = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$ 在所有惯性系中相同，不会违背 Lorentz 对称性

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}$$



Dirac 旋量场的平面波展开式得

$$\begin{aligned}
& \{\psi_a(\mathbf{x}), \bar{\psi}_b(\mathbf{y})\} \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \sum_{\lambda \lambda'} \left\{ u_a(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v_a(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}, \right. \\
&\quad \left. \bar{u}_b(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger e^{iq \cdot y} + \bar{v}_b(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{q}, \lambda'} e^{-iq \cdot y} \right\} \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \sum_{\lambda \lambda'} \left[u_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{u}_b(\mathbf{q}, \lambda') \{a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger\} e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} \right. \\
&\quad \left. + v_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{v}_b(\mathbf{q}, \lambda') \{b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q}, \lambda'}\} e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \sum_{\lambda \lambda'} (2\pi)^3 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \text{ 产生湮灭算符的反对易关系} \\
&\quad \times [u_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{u}_b(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + v_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{v}_b(\mathbf{q}, \lambda') e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda} \left[u_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{u}_b(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_a(\mathbf{p}, \lambda) \bar{v}_b(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot (x-y)} \right] \text{ 自旋求和关系} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}]
\end{aligned}$$

T[$\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)$] 的 Lorentz 不变性

记 $\partial_x^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ ，有

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} D_{\text{PJ}}(x-y)\end{aligned}$$

由于 $D_{\text{PJ}}(x - y) = 0$ 对 $(x - y)^2 < 0$ 成立，有

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$

— 90 —

0000000000

9000

0000000000

00000000000000

$\mathbf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]$ 的 Lorentz 不变性



记 $\partial_x^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ ，有

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{ab} D_{PJ}(x-y)\end{aligned}$$



由于 $D_{\text{P},1}(x-y) \equiv 0$ 对 $(x-y)^2 < 0$ 成立，有

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (x - y)^2 < 0$$



对于所有类空间隔，旋量场算符 $\psi_a(x)$ 和 $\bar{\psi}_b(y)$ 满足 $\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) = -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)$



从而时序乘积 $T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] = \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y), & x^0 \geq y^0 \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x), & x^0 < y^0 \end{cases}$ 在所有惯性系中相同



此外，可以看出 $\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = 0$ 和 $\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0$ 对任意 $(x - y)^2$ 成立

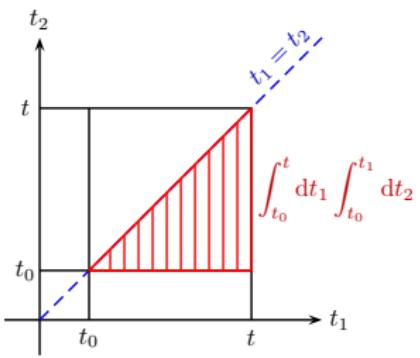


 因此，当时间排序交换了两个相邻的费米子算符时，必须额外加上一个负号才不会让时序乘积违背 Lorentz 对称性

$U(t, t_0)$ 级数第 3 项

现在考虑 $U(t, t_0)$ 级数的第 3 项 $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$

它包含一个二重积分，积分区域如左下图所示，先对 t_2 积分，再对 t_1 积分



$U(t, t_0)$ 级数第 3 项

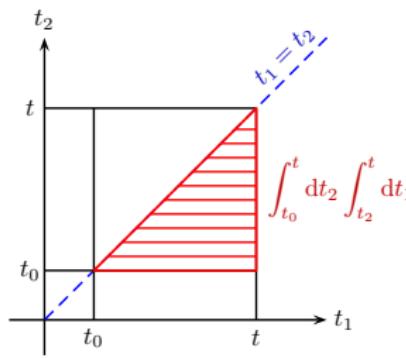
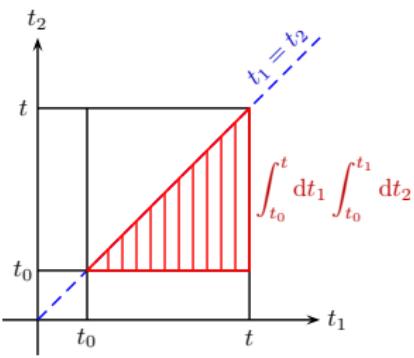
现在考虑 $U(t, t_0)$ 级数的第 3 项 $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$

它包含一个二重积分，积分区域如左下图所示，先对 t_2 积分，再对 t_1 积分

这个二重积分可以重新表达为

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H_1(t_1)H_1(t_2)$$

第一步等价地改成先对 t_1 积分，再对 t_2 积分，积分区域不变，如中下图所示



$U(t, t_0)$ 级数第 3 项

现在考虑 $U(t, t_0)$ 级数的第 3 项 $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$

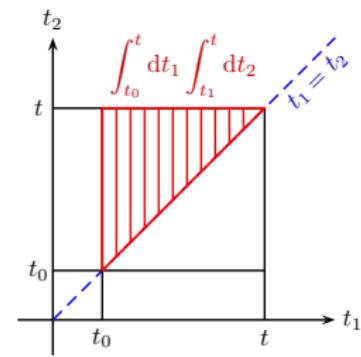
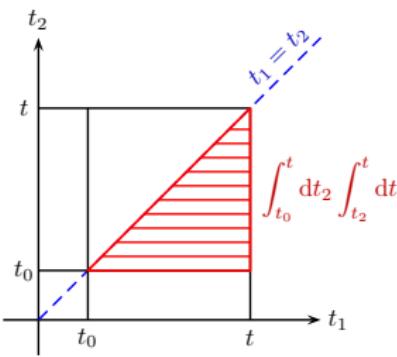
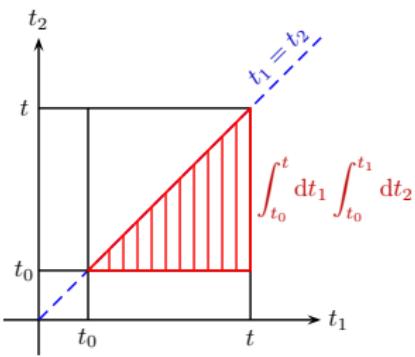
它包含一个二重积分，积分区域如左下图所示，先对 t_2 积分，再对 t_1 积分

这个二重积分可以重新表达为

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_1(t_2)H_1(t_1)$$

第一步等价地改成先对 t_1 积分，再对 t_2 积分，积分区域不变，如中下图所示

第二步交换了积分变量 t_1 和 t_2 ，对应的积分区域如右下图所示



扩展时间积分区间

 利用上面的 $\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_1(t_2)H_1(t_1)$ 推出

$$2! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2)$$

$$= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1)H_1(t_2) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_1(t_2)H_1(t_1)$$

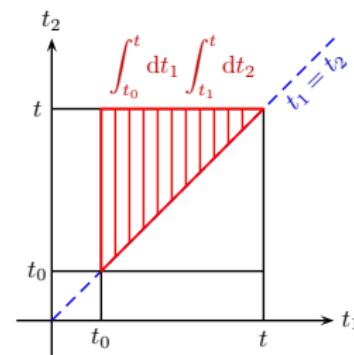
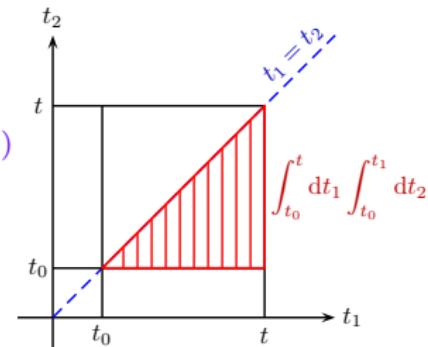
$$= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$$

 这里利用时序乘积将 t_1 和 t_2 的积分范围都扩展到整个 $[t_0, t]$ 区间，右上图与右下图的积分区域拼成一个正方形

 第一步第一项中 t_1 是 t_2 的积分上限，显然 $t_1 \geq t_2$ ，因而 $H_1(t_1)H_1(t_2) = \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$

 第一步第二项中 t_1 是 t_2 的积分下限，故 $t_2 \geq t_1$ ，此时 $H_1(t_2)H_1(t_1) = \mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$

 两项相加，就得到第二步的结果



Dyson 级数



将上述讨论推广到 $U(t, t_0)$ 级数的第 $n+1$ 项，得

$$n! \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) = \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)]$$

这里出现 $n!$ 是因为此时对 n 个时间积分变量有 $n!$ 种排列方式

Dyson 级数

 将上述讨论推广到 $U(t, t_0)$ 级数的第 $n+1$ 项，得

$$n! \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) = \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)]$$

 这里出现 $n!$ 是因为此时对 n 个时间积分变量有 $n!$ 种排列方式

 于是， $U(t, t_0)$ 级数可以用时序乘积表达为

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \\ &\quad + \cdots + \left[(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \cdots H_1^I(t_n) \right] + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \\ &\equiv T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \right] \end{aligned}$$



Freeman Dyson
(1923–2020)

 这个级数称为 **Dyson 级数**，它具有指数函数的级数展开形式，可用指数记号表示

S 矩阵

⌚ **S 矩阵**，也称为**散射矩阵** (scattering matrix)，是量子散射理论的核心概念，它描述系统**从初态跃迁到末态的概率振幅**

🎩 在**相互作用绘景**中， S 矩阵可以用**时间演化算符**来构造

👤 假设系统的**初态** $|i\rangle$ 和**末态** $|f\rangle$ 均处于**自由状态**，而**相互作用**只发生在**有限的时间间隔里**，那么相对地，初始时刻处于**遥远过去**，终末时刻处于**遥远未来**

🦋 这样的初末态称为**渐近态** (asymptotic state)

S 矩阵

【校舍】 S 矩阵，也称为**散射矩阵** (scattering matrix)，是量子散射理论的核心概念，它描述系统**从初态跃迁到末态的概率振幅**

【巫师帽】在**相互作用绘景**中， S 矩阵可以用**时间演化算符**来构造

【气泡】假设系统的**初态** $|i\rangle$ 和**末态** $|f\rangle$ 均处于**自由状态**，而**相互作用**只发生在**有限的时间间隔里**，那么相对地，初始时刻处于**遥远过去**，终末时刻处于**遥远未来**

【圣诞帽】这样的初末态称为**渐近态** (asymptotic state)

【手】将 t 时刻处描述系统的**态矢**记为 $|\Psi(t)\rangle$ ，它从**遥远过去** ($t_0 \rightarrow -\infty$) 的初态 $|i\rangle$ 演化而来，用时间演化算符 $U(t, t_0)$ 表达为

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) |i\rangle$$

【靴子】 S 矩阵元 S_{fi} 定义为 $|\Psi(t)\rangle$ 演化到**遥远未来** ($t \rightarrow +\infty$) 处与**末态** $|f\rangle$ 的内积，

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle f | \Psi(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle$$

【大衣】以 f 为行指标、 i 为列指标，将所有 S_{fi} 排列成矩阵，就得到 S 矩阵

S 算符

 引入 **S 算符**，它在初态与末态之间的期待值就是 S 矩阵元 S_{fi} ，即 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$

与 $S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle$ 比较, 得 $S = U(+\infty, -\infty)$

由时间演化算符的幺正性可知， S 算符也是幺正的， $S^\dagger S = 1$

S 算符



引入 S 算符，它在初态与末态之间的期待值就是 S 矩阵元 S_{fi} ，即 $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$

与 $S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle$ 比较，得 $S = U(+\infty, -\infty)$

由时间演化算符的幺正性可知， S 算符也是幺正的， $S^\dagger S = 1$

从而将 S 算符表达为相互作用哈密顿量 $H_1(t)$ 的积分级数，

$$\begin{aligned} S &= U(+\infty, -\infty) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_1(t') \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \end{aligned}$$

在局域场论中， $H_1(t) = \int d^3x \mathcal{H}_1(x)$ ， $\mathcal{H}_1(x)$ 是相互作用哈密顿量密度，故

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$$