

# 数学物理方法

## 第十一章 球函数

### 第 1 节 轴对称球函数

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2022 年 12 月 12 日



§1 轴对称球函数

## §1.1 轴对称问题的一般解

回顾第九章 §2.1 知识，在球坐标下对 Laplace 方程  $\nabla^2 u(r) = 0$  分离变量，设

$$u(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

考虑到关于  $\phi$  的周期性边界条件  $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$ ，得

$$\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

 令  $\cos \theta = x$ ,  $H(\theta) = P(x)$

由于  $\theta = 0, \pi$  处的自然边界条件,  $P(x)$  满足连带 Legendre 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

轴对称问题

对于轴对称问题，取对称轴为球坐标系的极轴 ( $z$  轴)

 那么，问题的解与  $\phi$  无关，只需考虑  $m = 0$ ，而  $\Phi(\phi) = 1$

上述问题简化为 Legendre 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

相应的**本征值**和**本征函数**是

$$\lambda = l(l+1), \quad P(x) = \text{P}_l(x), \quad l \in \mathbb{N}$$

这里  $P_l(x)$  是  $l$  次 Legendre 多项式

 将本征值代回径向方程  $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ ，得

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0$$

### 求解径向方程

 现在求解径向方程  $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ ，它是一个 Euler 方程

 令  $r = e^t$ ，则  $t = \ln r$ ， $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$ ， $r \frac{dR}{dr} = r \frac{dt}{dr} \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt}$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \right) = r^2 \frac{-1}{r^2} \frac{dR}{dt} + r \frac{d}{dr} \frac{dR}{dt} = -\frac{dR}{dt} + r \frac{dt}{dr} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{dR}{dt} + \frac{d^2 R}{dt^2}$$

从而  $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} = \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt}$ ，径向方程化为

$$\frac{d^2R}{d^2t} + \frac{dR}{dt} - l(l+1)R = 0$$

# 求解径向方程

 现在求解径向方程  $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ ，它是一个 Euler 方程

 令  $r = e^t$ ，则  $t = \ln r$ ， $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$ ， $r \frac{dR}{dr} = r \frac{dt}{dr} \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt}$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \right) = r^2 \frac{-1}{r^2} \frac{dR}{dt} + r \frac{d}{dr} \frac{dR}{dt} = -\frac{dR}{dt} + r \frac{dt}{dr} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{dR}{dt} + \frac{d^2 R}{dt^2}$$

 从而  $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} = \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt}$ ，径向方程化为

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} - l(l+1)R = 0$$

 将  $R = e^{\mu t}$  代入，得  $[\mu^2 + \mu - l(l+1)]e^{\mu t} = 0$

  $\mu(\mu+1) - l(l+1) = 0$  的两个根为  $\mu_1 = l$  和  $\mu_2 = -l-1$ ，对应着两个解

$$R_1(r) = e^{\mu_1 t} = r^{\mu_1} = r^l, \quad R_2(r) = e^{\mu_2 t} = r^{\mu_2} = r^{-(l+1)}$$

# Laplace 方程轴对称问题的一般解

 对于每个  $l \in \mathbb{N}$ ，有  $\Phi(\phi) = 1$ 、 $H(\theta) = P_l(x) = P_l(\cos \theta)$  和  $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

 于是，Laplace 方程轴对称问题的一般解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

 其中  $A_l$  和  $B_l$  是任意常数，由**边界条件**决定

 Laplace 方程**没有**初始条件，边界条件不需要全部是齐次的，否则只有平庸解

## Laplace 方程轴对称问题的一般解

对于每个  $l \in \mathbb{N}$ ，有  $\Phi(\phi) = 1$ 、 $H(\theta) = P_l(x) = P_l(\cos \theta)$  和  $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，Laplace 方程轴对称问题的一般解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

👉 在原点的去  
心邻域上满足

其中  $A_l$  和  $B_l$  是任意常数，由边界条件决定

Laplace 方程

 Laplace 方程没有初始条件，边界条件不需要全部是齐次的，否则只有平庸解

  $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$  在原点的邻域上满足 Laplace 方程

  $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$  在无穷远点的邻域上满足 Laplace 方程

 在全空间满足 Laplace 方程的解只能是  $u(r, \theta) = A_0$

## §1.2 Legendre 多项式的基本性质

 本节题目中的“轴对称球函数”指上述一般解中出现的 Legendre 多项式

 为了将这个解应用于物理问题，需要先研究 Legendre 多项式的性质

 在上一章求得 Legendre 多项式的显式为

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

## §1.2 Legendre 多项式的基本性质

本节题目中的“轴对称球函数”指上述一般解中出现的 Legendre 多项式

为了将这个解应用于物理问题，需要先研究 Legendre 多项式的性质

在上一章求得 Legendre 多项式的显式为

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

它具有下列基本性质（在这种幂级数讨论中需要定义  $0^0 = 1$  以得到自洽结果）

(1) 奇偶性： $P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$ ，即奇(偶)次 Legendre 多项式为奇(偶)函数

证：

$$P_l(-x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-)^k (2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} (-x)^{l-2k} = (-)^{l-2k} P_l(x) = (-)^l P_l(x)$$

## §1.2 Legendre 多项式的基本性质

 本节题目中的“轴对称球函数”指上述一般解中出现的 Legendre 多项式

为了将这个解应用于物理问题，需要先研究 Legendre 多项式的性质

 在上一章求得 Legendre 多项式的显式为

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

 它具有下列**基本性质**（在这种幂级数讨论中需要**定义**  $0^0 = 1$  以得到自洽结果）

(1) 奇偶性:  $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ , 即奇(偶)次 Legendre 多项式为奇(偶)函数

 证:  $P_l(-x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-)^k (2l-2k)!}{2^k k! (l-k)! (l-2k)!} (-x)^{l-2k} = (-)^{l-2k} P_l(x) = (-)^l P_l(x)$

**(2) 原点值:**  $P_{2n+1}(0) = 0$ ,  $P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

证:  $k = n$  的项才有贡献,  $P_{2n}(0) = \frac{(-)^n (4n-2n)! 0^{2n-2n}}{2^{2n} n! (2n-n)! (2n-2n)!} = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$

# Legendre 多项式的端点值和具体形式

♪♪ 利用  $(2n)! = (2n)!!(2n - 1)!!$  和  $2^n n! = (2n)!!$  推出

$$P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n - 1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!}$$

♪ 注意,  $P_0(0) = 1$  与  $(-1)!! = 0!! = 1$  匹配

### Legendre 多项式的端点值和具体形式

利用  $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$  和  $2^n n! = (2n)!!$  推出

$$P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

 注意,  $P_0(0) = 1$  与  $(-1)^{!!} = 0^{!!} = 1$  匹配

(3) 端点值:  $P_l(1) = 1$ ,  $P_l(-1) = (-)^l$

第一式将在下一小节证明，第二式由第一式和奇偶性  $P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$  推出

## Legendre 多项式的端点值和具体形式

利用  $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$  和  $2^n n! = (2n)!!$  推出

$$P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

 注意,  $P_0(0) = 1$  与  $(-1)^{!!} = 0^{!!} = 1$  匹配

(3) 端点值:  $P_l(1) = 1$ ,  $P_l(-1) = (-)^l$

第一式将在下一小节证明，第二式由第一式和奇偶性  $P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$  推出

(4) 头三个 Legendre 多项式的具体形式为

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_0(x) = \frac{(-)^0 0!}{2^0 0! 0!} x^0 = 1, \quad P_1(x) = \frac{(-)^0 2!}{2^1 0! 1!} x^1 = x$$

$$P_2(x) = \frac{(-)^0 4!}{2^2 0! 2! 2!} x^2 + \frac{(-)^1 (4-2)!}{2^2 1! (2-1)! (2-2)!} x^{2-2} = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

# Legendre 多项式的零点和图像

(5) 零点:  $P_l(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上有  $l$  个零点 (证明见 §1.3 选读内容)

  $P_l(x)$  是  $l$  次多项式, 总共只有  $l$  个零点

 可见,  $P_l(x)$  的  $l$  个零点均为实数, 全部分布在区间  $(-1, 1)$  上, 没有重零点

# Legendre 多项式的零点和图像

(5) 零点:  $P_l(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上有  $l$  个零点 (证明见 §1.3 选读内容)

💡  $P_l(x)$  是  $l$  次多项式, 总共只有  $l$  个零点

💡 可见,  $P_l(x)$  的  $l$  个零点均为实数, 全部分布在区间  $(-1, 1)$  上, 没有重零点

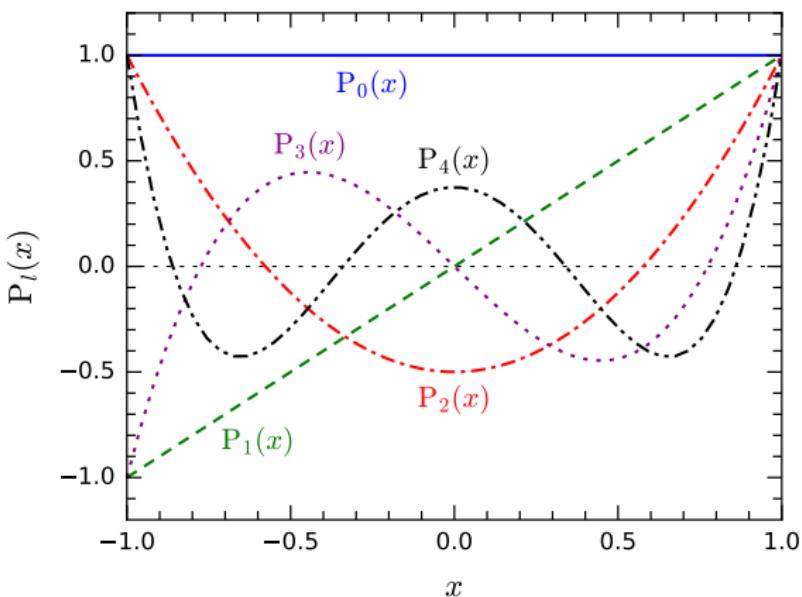
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$



## §1.3 Legendre 多项式的微分表示



Legendre 多项式有以下**微分表示**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$



这称为 **Rodrigues 公式**



Olinde Rodrigues  
(1795–1851)

## §1.3 Legendre 多项式的微分表示

Legendre 多项式有以下**微分表示**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

这称为 **Rodrigues 公式**

证明 根据**二项式定理**

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

有  $(x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^l C_l^k (x^2)^{l-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k x^{2l-2k}$



Olinde Rodrigues  
(1795–1851)

对  $x$  求导  $l$  次, 注意只有满足  $2l - 2k \geq l$  (即  $k \leq l/2$ ) 的项才有贡献, 得

$$\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^k C_l^k \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k}$$

# 微分表示的证明

 根据求导公式  $\frac{d^l}{dx^l} x^n = n \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} x^{n-1} = n(n-1) \frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}} x^{n-2} = \dots = n(n-1)\dots(n-l+1)x^{n-l} = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l}$ ,  $l \leq n$

 取  $n = 2l - 2k$ , 即  $n - l = l - 2k$ , 得  $\frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k} = \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k}$ , 故

$$\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k C_l^k \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k} = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{l!(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$$

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} = P_l(x) \quad \text{证毕} \blacksquare$$

# 证明 $P_l(1) = 1$



利用微分表示容易证明  $P_l(1) = 1$

■ 证明 根据高阶导数的 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}$$



■ 利用  $(x^2 - 1)^l = [(x - 1)(x + 1)]^l$ , 有

Gottfried Wilhelm Leibniz  
(1646–1716)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x - 1)^l (x + 1)^l] = \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^l C_l^k \left[ \frac{d^k}{dx^k} (x - 1)^l \right] \left[ \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}} (x + 1)^l \right]$$

■  $k < l$  的各项求导后含有因子  $(x - 1)^{l-k}$ , 因而在  $x = 1$  处为零

■ 于是, 只有  $k = l$  的项有贡献, 而  $\frac{d^l}{dx^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l}$  表明  $\frac{d^l}{dx^l} x^l = l!$ , 故

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left[ \frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l \right] (x + 1)^l \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^l l!} l! 2^l = 1$$

最高幂次项  $x^l$

## §1.5–§1.6 Legendre 多项式的正交关系和模

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，Legendre 多项式在  $[-1, 1]$  上相互正交

注意到权函数  $\rho(x) = 1$ ，正交关系为  $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = 0, \quad l \neq l'$

Legendre 多项式的模定义为  $\|P_l\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx}$

下一节将用  $P_l^m(x)$  表示连带 Legendre 函数，应注意不把  $[P_l(x)]^2$  写成  $P_l^2(x)$ ，否则会与  $m = 2$  时的  $P_l^m(x)$  相混淆

## §1.5–§1.6 Legendre 多项式的正交关系和模

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例，Legendre 多项式在  $[-1, 1]$  上相互正交

 注意到权函数  $\rho(x) = 1$ ，正交关系为  $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = 0, \quad l \neq l'$

 Legendre 多项式的模定义为  $\|P_l\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx}$

 下一节将用  $P_l^m(x)$  表示连带 Legendre 函数，应注意不把  $[P_l(x)]^2$  写成  $P_l^2(x)$ ，否则会与  $m = 2$  时的  $P_l^m(x)$  相混淆

 利用 Legendre 多项式的微分表示，Legendre 多项式的模方为

$$\|P_l\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$$

$$= \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l(x) \, d \left[ \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \right]$$

$$\text{分部积分 } \rightarrow = \frac{1}{2^l l!} P_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P'_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

## 计算 Legendre 多项式的模方



注意到

$$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2 - 1)^l = \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}[(x-1)^l(x+1)^l]$$

高阶导数的 Leibniz 公式  $\rightarrow$   $= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left[ \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^l \right] \left[ \frac{d^{l-1-k}}{dx^{l-1-k}} (x+1)^l \right]$

$$\frac{d^l}{dx^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l} = \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l!}{(l-k)!} \frac{l!}{(k+1)!} (x-1)^{l-k} (x+1)^{k+1}$$

$$\|P_l\|^2 = \frac{1}{2^l l!} P_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P'_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

## 计算 Legendre 多项式的模方

## 注意到

$$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2 - 1)^l = \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}[(x-1)^l(x+1)^l]$$

$$\text{高阶导数的 Leibniz 公式} \rightarrow = \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left[ \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^l \right] \left[ \frac{d^{l-1-k}}{dx^{l-1-k}} (x+1)^l \right]$$

$$\frac{d^l}{dx^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l} = \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l!}{(l-k)!} \frac{l!}{(k+1)!} (x-1)^{l-k} (x+1)^{k+1}$$

由于  $l-k > 0$  且  $k+1 \geq 0$ , 上式在  $x = \pm 1$  处均为零, 故

$$\|P_l\|^2 = \frac{1}{2^l l!} P_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P'_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

$$= (-)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{dP_l(x)}{dx} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

共作  $l$  次分部积分

$$= \dots = (-)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^l P_l(x)}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$$

# 化简 $\|P_l\|^2$

$P_l(x)$  是  $l$  次多项式，求导  $l$  次后得到常数

$$\frac{d^l P_l(x)}{d^l x} = \frac{d^l}{d^l x} \left[ \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d^l x} (x^2 - 1)^l \right] = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{2l}}{d^{2l} x} x^{2l} = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

其中幂次小于  $2l$  的各项求导为零，于是

$$\|P_l\|^2 = (-)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^l P_l(x)}{d^l x} (x^2 - 1)^l dx = \frac{2(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^l dx$$

第二步利用初积函数的偶函数性质将积分范围调整为  $[0, 1]$ ，再乘以 2

作变量替换  $x = \cos \theta$ ，则  $x \in [0, 1]$  对应于  $\theta \in [0, \pi/2]$ ，有

$$1 - x^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta, \quad dx = d \cos \theta = -\sin \theta d\theta$$

$$\int_0^1 (1 - x^2)^l dx = \int_{\pi/2}^0 \sin^{2l} \theta (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta d\theta \equiv I_{2l+1}$$

# 积分 $I_{2l+1}$

🦙 现在求积分  $I_{2l+1}$

$$I_{2l+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, d\theta = - \int_0^{\pi/2} \sin^{2l} \theta \, d(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned} &= -\sin^{2l} \theta \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} + 2l \int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1} \theta \cos^2 \theta \, d\theta = 2l \int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1} \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= 2l \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1} \theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, d\theta \right] = 2l(I_{2l-1} - I_{2l+1}) \end{aligned}$$

🐆 推出递推关系  $I_{2l-1} = \frac{I_{2l+1}}{2l} + I_{2l+1} = \frac{2l+1}{2l} I_{2l+1}$ , 即  $I_{2l+1} = \frac{2l}{2l+1} I_{2l-1}$

биз 由  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = 1$  得到

$$\begin{aligned} I_{2l+1} &= \frac{2l}{2l+1} I_{2l-1} = \frac{2l(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)} I_{2l-3} = \cdots = \frac{2l(2l-2)\cdots 2}{(2l+1)(2l-1)\cdots 3} I_1 \\ &= \frac{[2l(2l-2)\cdots 2]^2}{(2l+1)2l(2l-1)(2l-2)\cdots 3 \cdot 2} = \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!} \end{aligned}$$

# Legendre 多项式的模

将  $I_{2l+1}$  的积分结果代入，得

$$\|P_l\|^2 = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_0^1 (1-x^2)^l dx = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} I_{2l+1} = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!} = \frac{2}{2l+1}$$

从而，Legendre 多项式的模为

$$\|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$$

将  $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = 0$  ( $l \neq l'$ ) 和  $\|P_l\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$  统一写成

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

## §1.7 广义 Fourier 级数

 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, Legendre 多项式在  $[-1, 1]$  上是完备的

因此，区间  $[-1, 1]$  上任意一个解析良好的函数  $f(x)$  必定可以用  $\{P_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$  展开为广义 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

 利用  $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$ ，求得展开系数为

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx, \quad l \in \mathbb{N}$$

## §1.8 Legendre 多项式的母函数



考虑三维空间的 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$$



将  $u(\mathbf{r})$  看成静电场的电势，对比静电场 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$



$\epsilon_0$  是真空介电常数，可见  $\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$

## §1.8 Legendre 多项式的母函数

考虑三维空间的 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$$

将  $u(\mathbf{r})$  看成静电场的电势，对比静电场 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

$\epsilon_0$  是真空介电常数，可见  $\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$

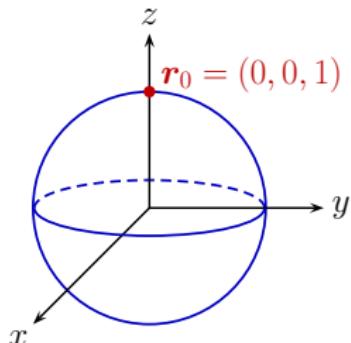
$\rho(\mathbf{r})$  是一个点电荷的电荷密度，它位于单位球面北极，直角坐标为  $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 1)$

点电荷的电量为  $Q = 4\pi\epsilon_0$ ，根据电磁学，它产生的静电势为

$$u(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

使用  $\mathbf{r}$  的球坐标  $(r, \theta, \phi)$ ，由  $z = r \cos \theta$  得

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = r^2 - 2r \cos \theta + 1$$



## 解

 于是, **Poisson 方程**  $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$  的解为

$$u(\mathbf{r}) = u(r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

 这里借助**电磁学**求解, 也可以从数学上直接证明它是解 (见第十三章 Green 函数法)

 **这不是唯一的解**, 对它加上任一**调和函数** (即 **Laplace 方程**的解) 就得到另一个解

 不过, 在全空间有限的**调和函数**只有**常数**, 一般解是对这个解加上一个任意常数

 如果将**电势零点**取为**无穷远点**, 则该常数为**零**, 那么这个解就是唯一解

## 解

于是, Poisson 方程  $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$  的解为

$$u(\mathbf{r}) = u(r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

这里借助电磁学求解, 也可以从数学上直接证明它是解 (见第十三章 Green 函数法)

这不是唯一的解, 对它加上任一调和函数 (即 Laplace 方程的解) 就得到另一个解

不过, 在全空间有限的调和函数只有常数, 一般解是对这个解加上一个任意常数

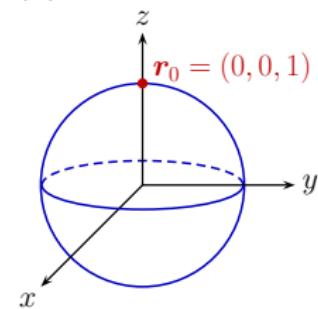
如果将电势零点取为无穷远点, 则该常数为零, 那么这个解就是唯一解

在单位球体内 ( $r < 1$ ), Poisson 方程化为 Laplace 方程  $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0$

由于这是个轴对称问题, 该区域的解必定可以表达为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$r = 0$  处没有电荷, 电势应该有限, 因此所有  $B_l = 0$



# 母函数

于是，**单位球体内**电势的另一个表达式为

$$u(\mathbf{r}) = u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < 1$$

 适当选取  $A_l$  的值，可以使上式与  $u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$  一致，即

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x), \quad r < 1$$

 这里已将  $\cos \theta$  改写为  $x$

# 母函数

 于是, **单位球体内**电势的另一个表达式为

$$u(\mathbf{r}) = u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < 1$$

 适当选取  $A_l$  的值, 可以使上式与  $u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$  一致, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x), \quad r < 1$$

 这里已将  $\cos \theta$  改写为  $x$ , 令  $x = 1$ , 由  $P_l(1) = 1$  得  $\sum_{l=0}^{\infty} r^l = \frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l$

 由此立即得到所有  $A_l = 1$ , 故

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad r < 1$$

 上式左边的函数称为 Legendre 多项式的**母函数**, 或者**生成函数**

 可见, 将**母函数**在  $r = 0$  的邻域  $r < 1$  内展开成  $r$  的 Taylor 级数, 则**展开系数**正是  $l$  次 Legendre 多项式  $P_l(x)$

$r > 1$  的情况

 如果  $r > 1$ ，则  $\frac{1}{r} < 1$

 将  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$  ( $r < 1$ ) 中的  $r$  替换为  $\frac{1}{r}$ ，得

$$\frac{1}{\sqrt{(1/r)^2 - 2x/r + 1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{1}{r} \right)^l P_l(x), \quad \frac{1}{r} < 1$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \frac{1}{r\sqrt{(1/r)^2 - 2x/r + 1}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^l P_l(x)$$

从而得到母函数的另一个展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), \quad r > 1$$

## §1.9 Legendre 多项式的递推关系

 将母函数公式  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$  两边对  $r$  求导，左边化为

$$\frac{d}{dr}(1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1 - 2rx + r^2)^{-3/2}(2r - 2x) = (x - r)(1 - 2rx + r^2)^{-3/2}$$

 再乘以  $1 - 2rx + r^2$ ，左边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dr}(1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = (x - r)(1 - 2rx + r^2)^{-1/2}$$

$$= (x - r) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) r^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x) r^l$$

## §1.9 Legendre 多项式的递推关系

 将母函数公式  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$  两边对  $r$  求导，左边化为

$$\frac{d}{dr}(1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1 - 2rx + r^2)^{-3/2}(2r - 2x) = (x - r)(1 - 2rx + r^2)^{-3/2}$$

 再乘以  $1 - 2rx + r^2$ ，左边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dr}(1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = (x - r)(1 - 2rx + r^2)^{-1/2}$$

$$= (x - r) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) \textcolor{blue}{r^l} - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x) \textcolor{blue}{r^l}$$

 右边变成  $(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dr} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1 - 2rx + r^2) \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x)$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(x) r^{l-1} - \sum_{l=0}^{\infty} 2x l P_l(x) r^l + \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(x) r^{l+1}$$

$$= \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1) P_{l+1}(x) \textcolor{blue}{r^l} - \sum_{l=0}^{\infty} 2x l P_l(x) \textcolor{blue}{r^l} + \sum_{l=1}^{\infty} (l-1) P_{l-1}(x) \textcolor{blue}{r^l}$$

# 递推关系一

 综上，得到

$$\sum_{l=0}^{\infty} xP_l(x)r^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)r^l = \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xlP_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)r^l$$

 比较两边  $r^l$  的系数，推出

$$xP_l(x) - P_{l-1}(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x)$$

 整理得 **递推关系一**

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$

# 递推关系一

综上，得到

$$\sum_{l=0}^{\infty} xP_l(x)r^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)r^l = \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xlP_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)r^l$$

比较两边  $r^l$  的系数，推出

$$xP_l(x) - P_{l-1}(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x)$$

整理得 **递推关系一**

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$

将母函数公式  $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$  两边对  $x$  求导，左边化为

$$\frac{d}{dx}(1-2rx+r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(-2r) = r(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

## 递推关系二

再乘以  $1 - 2rx + r^2$ , 左边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dx} (1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = r(1 - 2rx + r^2)^{-1/2}$$

$$= r \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1}$$

右边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1 - 2rx + r^2) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P'_l(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2x P'_l(x) r^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x) r^{l+2}$$

$$= \sum_{l=-1}^{\infty} P'_{l+1}(x) r^{l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} 2x P'_l(x) r^{l+1} + \sum_{l=1}^{\infty} P'_{l-1}(x) r^{l+1}$$

比较两边  $r^{l+1}$  的系数, 得到递推关系二

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2x P'_l(x) + P'_{l-1}(x)$$

# 递推关系三

对递推关系一  $(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$  求导, 有

$$(2l + 1)P_l(x) + (2l + 1)xP'_l(x) = (l + 1)P'_{l+1}(x) + lP'_{l-1}(x)$$

两边乘以 2, 移项得

$$2(2l + 1)P_l(x) = -2(2l + 1)xP'_l(x) + 2(l + 1)P'_{l+1}(x) + 2lP'_{l-1}(x)$$

对递推关系二  $P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x)$  两边乘以  $(2l + 1)$

$$(2l + 1)P_l(x) = (2l + 1)P'_{l+1}(x) - 2(2l + 1)xP'_l(x) + (2l + 1)P'_{l-1}(x)$$

两式相减, 推出

$$(2l + 1)P_l(x) = [2(l + 1) - (2l + 1)]P'_{l+1}(x) + [2l - (2l + 1)]P'_{l-1}(x)$$

于是得到递推关系三

$$(2l + 1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

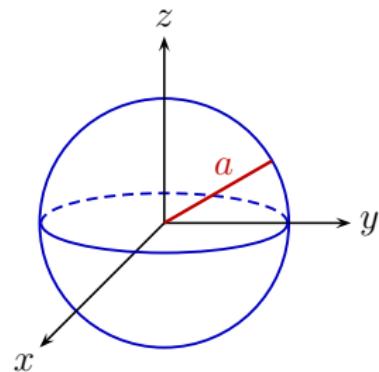
## §1.10 应用

例 1 已知半径为  $a$  的球面上的电势分布为  $f(\theta)$ ，  
球内外无电荷，求空间各处的电势  $u$

由于球内外无电荷，电势在球内外均满足 Laplace 方程

题意已隐含电势零点取在无穷远处，则定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (r < a, r > a) \\ u|_{r=a} = f(\theta), \quad u|_{r=\infty} = 0 \end{cases}$$



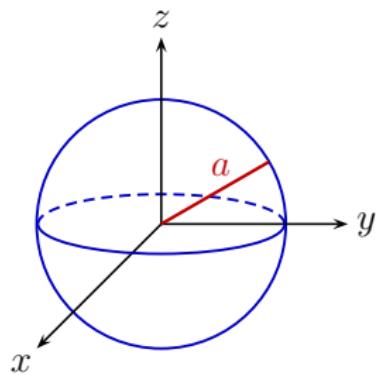
§1.10 应用

例 1 已知半径为  $a$  的球面上的电势分布为  $f(\theta)$ ，球内外无电荷，求空间各处的电势  $u$

由于球内外无电荷，电势在球内外均满足 Laplace 方程

题意已隐含电势零点取在无穷远处，则定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (r < a, r > a) \\ u|_{r=a} = f(\theta), \quad u|_{r=\infty} = 0 \end{cases}$$



 由于定解条件与  $\phi$  无关, 本问题为轴对称问题, 故一般解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

 首先求解球内的电势，为了计算方便，将一般解改写为

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l \left( \frac{r}{a} \right)^l + B_l \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos \theta)$$

# 球内的解



由于球内没有电荷，**球心** ( $r = 0$ ) 处电势应该**有限**，所以  $B_l = 0$  ( $l \in \mathbb{N}$ )



**球内的解化为**

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta)$$



代入**球面上的边界条件**  $u|_{r=a} = f(\theta)$ ，得到  $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$



或者改写为  $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) = g(x)$ ，其中  $x = \cos \theta$ ， $g(x) = f(\theta)$

# 球内的解



由于球内没有电荷，**球心** ( $r = 0$ ) 处电势应该**有限**，所以  $B_l = 0$  ( $l \in \mathbb{N}$ )



**球内的解化为**

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta)$$



代入**球面上的边界条件**  $u|_{r=a} = f(\theta)$ ，得到  $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$



或者改写为  $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) = g(x)$ ，其中  $x = \cos \theta$ ， $g(x) = f(\theta)$



根据**广义 Fourier 级数展开系数**的公式，推出

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 g(x) P_l(x) dx = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$



第二步注意  $dx = -\sin \theta d\theta$ ， $\cos 0 = 1$ ， $\cos \pi = -1$



给定  $f(\theta)$  的具体形式，即可按上式计算展开系数  $A_l$



将所得系数代回**解的表达式**，就得到球内的电势

球外的解



其次求球外的电势，一般解的形式仍为

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_l \left( \frac{r}{a} \right)^l + D_l \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos \theta)$$



由于球外没有电荷，电势应该处处有限， $C_l = 0$  ( $l \in \mathbb{N}^+$ )



无穷远点已取为电势零点，则  $C_0 \equiv 0$



于是球外的解化为

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$



代入**边界条件**  $u|_{r=a} = f(\theta)$ ，得到  $\sum_{l=0}^{\infty} D_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$



与  $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$  比较，应有  $D_l = A_l$



将算得的系数代回解的表达式，就得到球外的电势

# 特例

♥ 特例  $f(\theta) = \cos^2 \theta$ , 即  $g(x) = x^2$

↑ 像这样简单的函数, 就不需要使用上面计算系数的公式了

→ 注意到  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ , 立得  $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x)$

↑ 由于  $P_0(x) = 1$ , 有  $x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$ , 与  $x^2 = g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$  比较

↑ 推出系数  $A_0 = D_0 = \frac{1}{3}$ ,  $A_2 = D_2 = \frac{2}{3}$ ,  $A_l = D_l = 0$  ( $l \neq 0, 2$ )

特例

特例  $f(\theta) = \cos^2 \theta$ , 即  $g(x) = x^2$

 像这样简单的函数，就不需要使用上面计算系数的公式了

注意到  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ , 立得  $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x)$

由于  $P_0(x) = 1$ ，有  $x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$ ，与  $x^2 = g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$  比较

 推出系数  $A_0 = D_0 = \frac{1}{3}$ ,  $A_2 = D_2 = \frac{2}{3}$ ,  $A_l = D_l = 0$  ( $l \neq 0, 2$ )

将这些系数代回球内和球外的解

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta), \quad u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

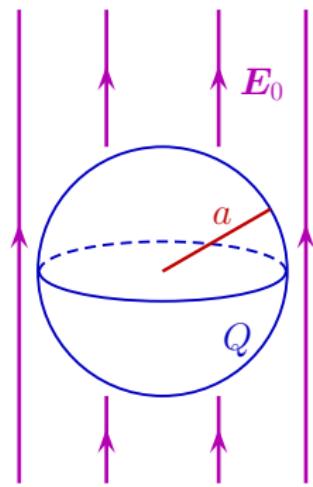
得到

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \theta), \quad u_2(r, \theta) = \frac{1}{3} \frac{a}{r} + \frac{2}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta)$$

 写下 $\text{球外}$ 的结果时容易出错，应特别注意  $\frac{a}{r}$  的幂次

## 例 2

例 2 在均匀电场  $E_0$  中放入半径为  $a$ 、带电为  $Q$  的导体球，求放入导体球后的电场分布



## 例 2

例 2 在均匀电场  $E_0$  中放入半径为  $a$ 、带电为  $Q$  的导体球，求放入导体球后的电场分布

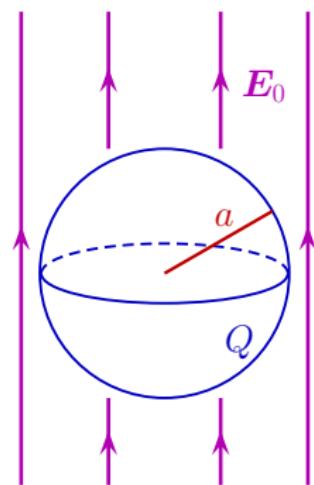
### 1 第一步 物理分析

静电场中的导体达到静电平衡时，体内电场为零

整个导体为等势体，故球内和球面的电势为常数，记为  $u_0$ ，通过下面的求解可以确定它

本题关键在于求解球外的电势分布  $u$

求出电势，就能直接计算电场的分布  $\mathbf{E} = -\nabla u$



## 例 2

例 2 在均匀电场  $E_0$  中放入半径为  $a$ 、带电为  $Q$  的导体球，求放入导体球后的电场分布

### 1 第一步 物理分析

静电场中的导体达到静电平衡时，体内电场为零

整个导体为等势体，故球内和球面的电势为常数，记为  $u_0$ ，通过下面的求解可以确定它

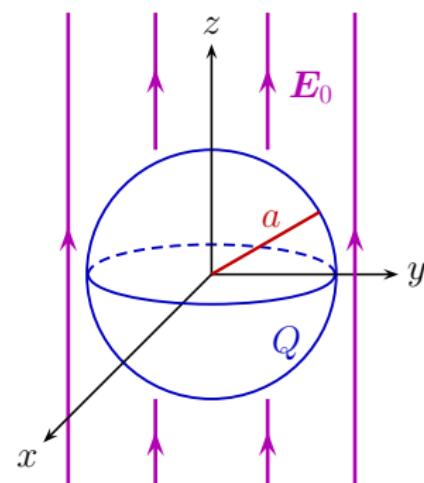
本题关键在于求解球外的电势分布  $u$

求出电势，就能直接计算电场的分布  $\mathbf{E} = -\nabla u$

### 2 第二步 建立坐标系

取球坐标系，以球心为原点、电场  $E_0$  的方向为极轴方向

这样的话，电势分布显然具有轴对称性，故球外电势  $u(r) = u(r, \theta)$

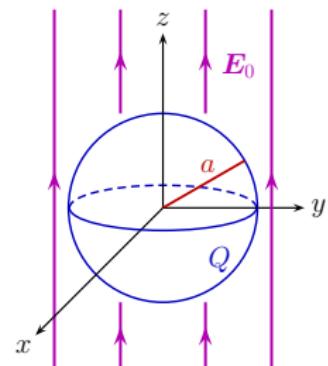


# 建立定解问题

## 3 第三步 建立定解问题

由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程  $\nabla^2 u = 0$

本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势  $u|_{r=a} = u_0$



## 建立定解问题

### 3 第三步 建立定解问题

由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程  $\nabla^2 u = 0$

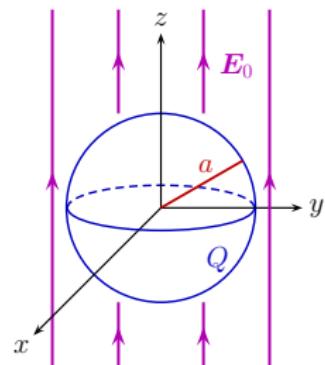
本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势  $u|_{r=a} = u_0$

球内等势，电场为零，球内电荷密度  $\rho = \nabla \cdot E = 0$

故电荷全部分布在球面上，球面带电  $Q$

**¶** 电场满足  $E = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial r} e_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi$

 球面面元  $dS = dS e_r$ ，Gauss 定律给出  $\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{r=a^+} E \cdot dS = \int_{r=a^+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS$



## 建立定解问题

### 3 第三步 建立定解问题

由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程  $\nabla^2 u = 0$

本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势  $u|_{r=a} = u_0$

球内等势，电场为零，球内电荷密度  $\rho = \nabla \cdot E = 0$

故电荷全部分布在球面上，球面带电  $Q$

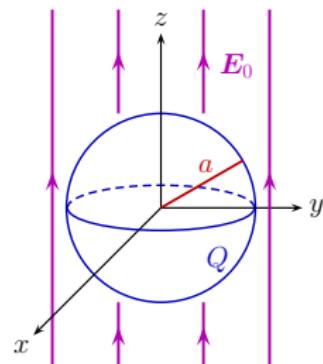
**F** 电场满足  $E = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial r} e_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi$

 球面面元  $dS = dS e_r$ ，Gauss 定律给出  $\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{r=a^+} E \cdot dS = \int_{r=a^+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS$

在无穷远 ( $r \rightarrow \infty$ ) 处, 半径  $a \rightarrow 0$ , 原均匀电场应基本不受影响, 有

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_z = E_0 = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

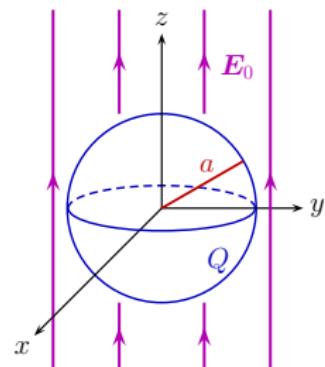
故  $u|_{r \rightarrow \infty} = - \int E_0 dz' = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$



# 定解问题

综上, 定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (r > a) \\ u|_{r=a} = u_0, \\ \int_{r=a+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta \end{cases}$$



注 由  $u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$  得  $u(r \rightarrow \infty, \theta = \pi/2) = 0$

即电势零点已取在  $xy$  平面的无穷远处, 故球面电势  $u_0$  是确定的

边界条件  $\int_{r=a+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$  来源于 Gause 定律,

它表示球面带电  $Q$

这个边界条件是电动力学所特有的



Carl Friedrich Gauss  
(1777–1855)

## 求解定解问题

## 4 第四步 求解定解问题

 由于轴对称性，一般解为  $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$

 代入无穷远处的边界条件  $u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$ ，利用  $P_1(x) = x$ ，得

$$u|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

 故  $A_1 = -E_0$ ,  $A_l = 0$  ( $l \neq 1$ ), 解化为  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$

## 求解定解问题

## 4 第四步 求解定解问题

由于轴对称性，一般解为  $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$

代入无穷远处的边界条件  $u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$ ，利用  $P_1(x) = x$ ，得

$$u|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

 故  $A_1 = -E_0$ ,  $A_l = 0$  ( $l \neq 1$ ), 解化为  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$

代入球面的边界条件  $u|_{r=a} = u_0$ ，利用  $P_0(x) = 1$ ，得

$$u|_{r=a} = -E_0 \textcolor{red}{a} P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{\textcolor{red}{a}^{l+1}} P_l(\cos \theta) = u_0 = u_0 P_0(\cos \theta)$$

比较系数，推出  $B_0 = u_0 a$ ,  $B_1 = E_0 a^3$ ,  $B_l = 0$  ( $l \neq 0, 1$ )

## 解

 将求得的系数代入一般解, 得  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r}$

 求导得  $-\frac{\partial u}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r^2}$

 需要将上式代入球面的另一边界条件  $\int_{r=a^+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$  以确定  $u_0$

## 解

将求得的系数代入一般解, 得  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r}$

求导得  $-\frac{\partial u}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r^2}$

需要将上式代入球面的另一边界条件  $\int_{r=a^+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$  以确定  $u_0$

$r = a^+$  只比半径  $a$  大一个无穷小量, 故  $r = a^+$  球面面元为  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$

利用  $\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d \sin \theta = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^\pi = 0$ , 推出

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0} &= \int_{r=a^+} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \int \left( -\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) a^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{u_0 a}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi u_0 a \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -2\pi u_0 a \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi u_0 a \end{aligned}$$

从而  $u_0 a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ , 解的最终形式为  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

# 结果分析

## 5 第五步 结果分析

 在球外电势的解  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  中

 第一项是原均匀电场的电势  $u|_{r \rightarrow \infty}$

 第二项是球面上感应面电荷产生的电势，它是电偶极子势

 第三项是因导体球带电  $Q$  而产生的电势

 当  $Q = 0$  时，第三项消失，变成电场中放入不带电导体球以后的电势分布

 当  $a = 0$  时，第二项消失，变成均匀场电势与点电荷电势的线性叠加

结果分析

## 5 第五步 结果分析

在球外电势的解  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  中

第一项是原均匀电场的电势  $u|_{r \rightarrow \infty}$

第二项是球面上感应面电荷产生的电势，它是电偶极子势

 第三项是因导体球带电  $Q$  而产生的电势

 当  $Q = 0$  时，第三项消失，变成电场中放入不带电导体球以后的电势分布

 当  $a = 0$  时，第二项消失，变成均匀场电势与点电荷电势的线性叠加

根据  $E = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial r} e_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi = E_r e_r + E_\theta e_\theta + E_\phi e_\phi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -E_0 \cos \theta - \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta - \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = E_0 r \sin \theta - \frac{E_0 a^3}{r^2} \sin \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

 球外电场分布  $E$  的分量为  $E_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{r^3} \sin \theta, \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

# $Q = 0$ 时球面附近的电场和面电荷密度

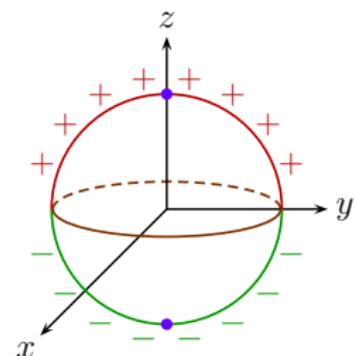
当  $Q = 0$  时，球面附近的电场分布为

$$E_r|_{r=a} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{a^3} \cos \theta = 3E_0 \cos \theta, \quad E_\theta|_{r=a} = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{a^3} \sin \theta = 0$$

可见，电场方向与球面垂直，符合导体表面电场方向与导体表面垂直的电磁学规律

在  $\theta = \pi/2$  处，场强为零

在  $\theta = 0, \pi$  处，场强是原场强的 3 倍，当外场较强时，这两处容易被击穿



# $Q = 0$ 时球面附近的电场和面电荷密度

当  $Q = 0$  时，球面附近的电场分布为

$$E_r|_{r=a} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{a^3} \cos \theta = 3E_0 \cos \theta, \quad E_\theta|_{r=a} = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{a^3} \sin \theta = 0$$

可见，电场方向与球面垂直，符合导体表面电场方向与导体表面垂直的电磁学规律

在  $\theta = \pi/2$  处，场强为零

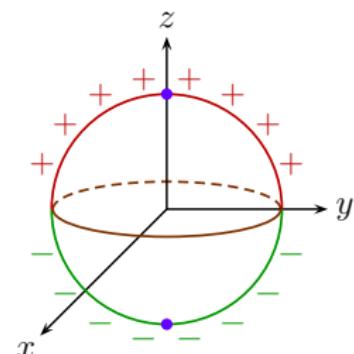
在  $\theta = 0, \pi$  处，场强是原场强的 3 倍，当外场较强时，这两处容易被击穿

当  $Q = 0$  时，球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

显然，球面上  $\theta \in [0, \pi/2)$  部分带正电， $\theta \in (\pi/2, \pi]$  部分带负电

总带电量为  $Q = \int \sigma(\theta) dS = a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$



# 总电偶极矩

✓ 本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

∞ 从而使得结果  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  在  $r \rightarrow \infty$  处出现奇性

### 总电偶极矩

本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

$\infty$  从而使得结果  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  在  $r \rightarrow \infty$  处出现奇性

在极角  $\theta \in (0, \pi/2)$  处,  $d\theta$  角度内纬带里的元电荷为

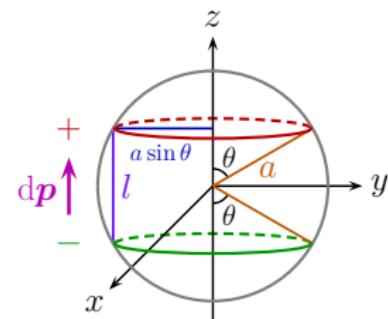
$$dq = \int_0^{2\pi} d\phi \, a \sin \theta \, \sigma(\theta) \, a \, d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta \cdot 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \, d\theta$$

它与极角  $\pi - \theta$  处的相应元电荷形成元电偶极子



两个元电荷距离为  $l = 2a \cos \theta$ ，元电偶极子的偶极矩为

$$dp = l dq = 12\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$



总电偶极矩

本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

从而使得结果  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  在  $r \rightarrow \infty$  处出现奇性

在极角  $\theta \in (0, \pi/2)$  处,  $d\theta$  角度内纬带里的元电荷为

$$dq = \int_0^{2\pi} d\phi \, a \sin \theta \, \sigma(\theta) \, a \, d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta \cdot 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \, d\theta$$

它与极角  $\pi - \theta$  处的相应元电荷形成元电偶极子

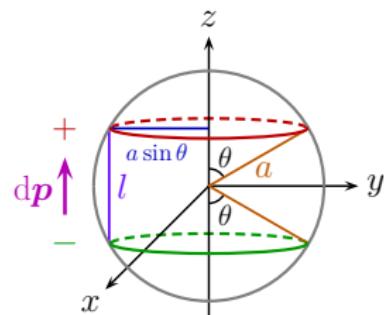


$$dp = l dq = 12\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

 利用  $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d(\cos \theta) = - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$

得到沿  $z$  轴正向的总电偶极矩

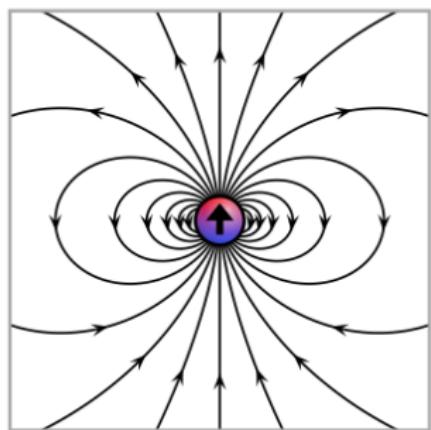
$$p = \int dp = 12\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$$



# 理想电偶极子

若  $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$  时  $ql$  保持固定，则称电偶极子  $p = ql$  是理想电偶极子

根据电磁学，三维空间中一个理想电偶极子  $p$  产生的电势为  $u_p = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$



理想电偶极子

 若  $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$  时  $ql$  保持固定，则称电偶极子  $p = ql$  是**理想电偶极子**

 根据**电磁学**，三维空间中一个**理想电偶极子**  $p$  产生的**电势**为  $u_p = \frac{p \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

代入沿  $z$  轴正向的总电偶极矩  $p = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$ ，得到电势

$$u_p = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta$$

 这与  $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  中的第二项一致

 说明感应电荷的分布对于球外区域来说等价于一个理想电偶极子

