

# 量 子 场 论

## 第 1 章 预备知识

### 1.6 节和 1.7 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2023 年 9 月 12 日

1.6 节 作用量原理

### 1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

 在经典力学中，质点力学系统可以用拉格朗日量（Lagrangian）描述

对于具有  $n$  个自由度的系统，可以定义  $n$  个相互独立的广义坐标 (generalized coordinate)  $q_i$ ，它们的时间导数是广义速度 (generalized velocity)  $\dot{q}_i = dq_i/dt$

拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数  $L(q_i, \dot{q}_i)$

 拉格朗日量的时间积分称为**作用量**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$$



# Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

1.6 节 作用量原理

### 1.6.1 小节 经典力学中的作用量原理

在经典力学中，质点力学系统可以用拉格朗日量（Lagrangian）描述。

对于具有  $n$  个自由度的系统，可以定义  $n$  个相互独立的广义坐标 (generalized coordinate)  $q_i$ ，它们的时间导数是广义速度 (generalized velocity)  $\dot{q}_i = dq_i/dt$

拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数  $L(q_i, \dot{q}_i)$

 拉格朗日量的时间积分称为**作用量**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L[\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)]$$

🥐 (最小) 作用量原理指出，作用量的变分极值 ( $\delta S = 0$ )

对应于系统的经典运动轨迹

 假设时间的变分  $\delta t = 0$ ，即不作时间坐标的变换，则

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i$$



Joseph-Louis Lagrange  
(1736–1813)

也就是说，时间导数的变分等于变分的时间导数

## Euler-Lagrange 方程



从而得到

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right)\end{aligned}$$

$$\text{分部} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right]$$

$$\text{积分} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2}$$

## Euler-Lagrange 方程



从而得到

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right)\end{aligned}$$

$$\text{分部} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right]$$

$$\text{积分} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2}$$



## Leonhard Euler (1707–1783)

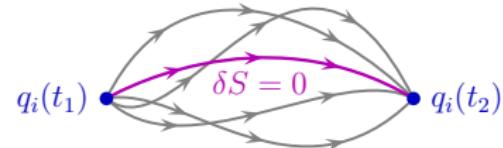


再假设在初始和结束时刻广义坐标的变分为零，即  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$



则最后一行第二项为零, 由于变分  $\delta q_i(t)$  ( $t_1 < t < t_2$ ) 是任意的,  $\delta S = 0$  等价于

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$



这是 Euler-Lagrange 方程，它给出质点系统的经典运动方程

广义动量和哈密顿量



引入广义动量 (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$



 求解上式表示的  $n$  个方程，将广义速度表达成  $q_i$  和  $p_i$  的函数  $\dot{q}_i(q_i, p_i)$ ，通过 Legendre 变换定义哈密顿量 (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L$$



# Adrien-Marie Legendre (1752–1833)



## William Rowan Hamilton (1805–1865)

广义动量和哈密顿量



引入广义动量 (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$



 求解上式表示的  $n$  个方程，将广义速度表达成  $q_i$  和  $p_i$  的函数  $\dot{q}_i(q_i, p_i)$ ，通过 Legendre 变换定义哈密顿量 (Hamiltonian)



## Adrien-Marie Legendre (1752–1833)



William Rowan Hamilton  
(1805–1865)



$H$  是  $q_i$  和  $p_i$  的函数



用  $H$  取替  $L$  来表达作用量  $S$ ，则作用量的变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta(p_i \dot{q}_i - H) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)\end{aligned}$$

## Hamilton 正则运动方程

由  $p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i$  得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \dot{q}_i \delta p_i + \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

根据前面的假设  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ，上式最后一行第二项为零

Hamilton 正则运动方程

由  $p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i$  得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \dot{q}_i \delta p_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

根据前面的假设  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ，上式最后一行第二项为零

于是  $\delta S = 0$  给出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

这是 Hamilton 正则运动方程

相当于用  $2n$  个一阶方程代替  $n$  个二阶 Euler-Lagrange 方程  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

广义坐标  $q_i$  和广义动量  $p_i$  统称为正则变量

## 1.6.2 小节 经典场论中的作用量原理

场是时空坐标  $x^\mu$  的函数

 在经典场论中，场  $\Phi(x, t)$  是系统的广义坐标，每一个空间点  $x$  都是一个自由度

 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学

 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量  $L = \int d^3x \mathcal{L}(x)$

 其中  $\mathcal{L}(x)$  称为**拉格朗日量密度**，下文将它简称为**拉氏量**

这里的“局域”指  $\mathcal{L}(x)$  只依赖于一个时空点  $x^\mu$ ，没有再依赖于其它时空点

## 1.6.2 小节 经典场论中的作用量原理

场是时空坐标  $x^\mu$  的函数

 在经典场论中，场  $\Phi(x, t)$  是系统的广义坐标，每一个空间点  $x$  都是一个自由度

 因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学

 在局域 (local) 场论中，拉格朗日量  $L = \int d^3x \mathcal{L}(x)$

其中  $\mathcal{L}(x)$  称为**拉格朗日量密度**，下文将它简称为**拉氏量**

这里的“局域”指  $\mathcal{L}(x)$  只依赖于一个时空点  $x^\mu$ ，没有再依赖于其它时空点。

设  $\mathcal{L}$  是系统中  $n$  个场  $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$  ( $a = 1, \dots, n$ ) 及其时空导数  $\partial_\mu \Phi_a$  的函数

作用量表达为  $S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$

由于  $d^4x$  是 Lorentz 不变的，如果  $\mathcal{L}$  也是 Lorentz 不变的，则  $S$  就是 Lorentz 不变的，从而由作用量原理得到的运动方程满足**狭义相对性原理**

因此，构建相对论性场论的关键在于要求拉氏量  $\mathcal{L}$  是一个 Lorentz 标量

经典场论的作用量变分

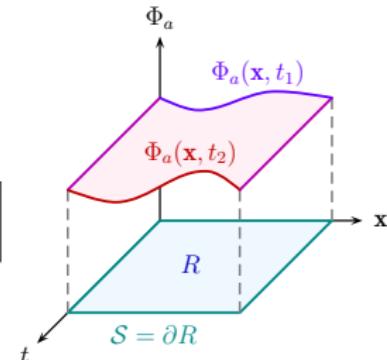
类似于前面质点力学的处理方式，假设时空坐标的变分  $\delta x^\mu = ($

 即不作时空坐标的变换，则对场的时空导数的变分等于场变分的时空导数，

$$\delta(\partial_\mu \Phi_a) = \partial_\mu (\delta \Phi_a)$$

于是推出

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta(\partial_\mu \Phi_a) \right] \\
 &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\mu(\delta \Phi_a) \right] \\
 &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right] - \left[ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a \right\} \\
 &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a + \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right]
 \end{aligned}$$



 上式最后一行第二项的被积函数是关于时空坐标的**全散度** (total divergence)

### 场的 Euler-Lagrange 方程

利用广义 Stokes 定理将上述全散度转化为边界面积分：

$$\int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right] = \int_S d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a$$



## George Stokes (1819–1903)

其中  $S$  是积分区域  $R$  的边界面,  $d\sigma_\mu$  是  $S$  上的面元

进一步假设在边界面  $S$  上  $\delta\Phi_a = 0$ ，则上式为零

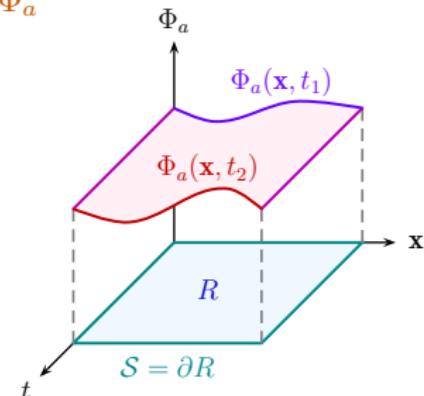
 我们通常讨论整个时空区域上的场，这里相当于假设  $\Phi$  在无穷远时空边界上的变分为零，于是

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a + \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right]$$

推出

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$$

辣椒 这就是场的 Euler-Lagrange 方程，它给出场的经典运动方程



### 共轭动量密度

 引入场的**共轭动量密度** (conjugate momentum density)  $\pi_a(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a}$

  $\pi_a$  也称为正则共轭场，接着用 Legendre 变换将哈密顿量定义为

$$H \equiv \int d^3x \pi_a \dot{\Phi}_a - L \equiv \int d^3x \mathcal{H}$$

其中  $\mathcal{H}(\Phi_a, \pi_a, \nabla \Phi_a) = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}$  是哈密顿量密度，作用量变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \delta(\pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{H}) \\ &= \int d^4x \left[ \dot{\Phi}_a \delta \pi_a + \pi_a \delta \dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \delta \pi_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \cdot \delta (\nabla \Phi_a) \right]\end{aligned}$$

方括号中的第二项和最后一项分别化为

$$\begin{aligned}\pi_a \delta \dot{\Phi}_a &= \pi_a \frac{d}{dt} \delta \Phi_a = \frac{d}{dt} (\pi_a \delta \Phi_a) - \dot{\pi}_a \delta \Phi_a, \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla \Phi_a)} \cdot \nabla(\delta \Phi_a) &= -\nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla \Phi_a)} \delta \Phi_a \right] + \left[ \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a\end{aligned}$$

## 场的正则运动方程



从而得到

$$\begin{aligned}\delta S = & \int d^4x \left\{ \left( \dot{\Phi}_a - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \right) \delta \pi_a - \left[ \dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \right] \delta \Phi_a \right\} \\ & + \int d^4x \frac{d}{dt} (\pi_a \delta \Phi_a) - \int d^4x \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)} \delta \Phi_a \right]\end{aligned}$$



与前面一样，假设在**时空区域边界面上**  $\delta\Phi_a = 0$



则上式最后一行的两个全导数积分项均为零



于是， $\delta S = 0$  给出场的正则运动方程

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \Phi_a)}$$



场  $\Phi_a$  和它的共轭动量密度  $\pi_a$  是系统的正则变量

## 1.7 节 Noether 定理、对称性与守恒定律

如前所述，若一种对称变换可用连续变化的参数描述，则它是一种连续变换，连续变换对应的对称性称为连续对称性

Lorentz 对称性就是一种连续对称性

Noether 定理指出，

 如果系统具有**一种连续对称性**，  
就必然存在**一条对应的守恒定律**

 Noether 定理首先是在**经典物理**中给出的，但实际上它适用于所有物理行为由**作用量原理**决定的系统。

因此，可以将它推广到量子物理中



## Emmy Noether (1882–1935)

### 1.7.1 小节 场论中的 Noether 定理



下面在场论中证明 Noether 定理



在时空区域  $R$  中的作用量为  $S = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$



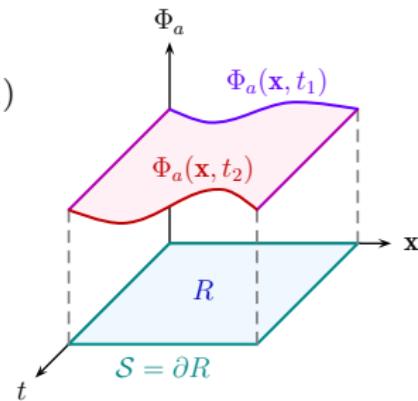
考虑一个连续变换，使得  $\Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x')$



其中已包含了坐标变换  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$



它引起的拉氏量变换为  $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x')$



### 1.7.1 小节 场论中的 Noether 定理



下面在场论中证明 Noether 定理



在时空区域  $R$  中的作用量为  $S = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$



考虑一个连续变换，使得  $\Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x')$



其中已包含了坐标变换  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$



它引起的拉氏量变换为  $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x')$



我们可以对连续对称性取极限，即考虑无穷小变换



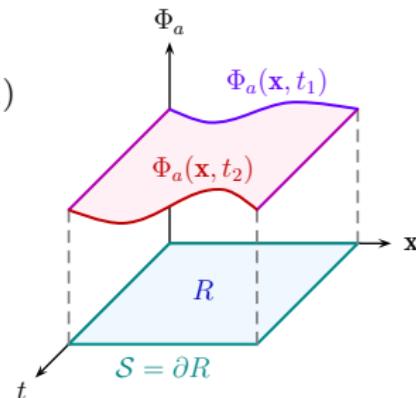
记上述连续变换的无穷小变换形式为

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a, \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}$$



如果在此变换下， $\delta S = \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) = 0$ ，则系统具有相应的连

续对称性



## 体积元的变化

🍼 体积元的变化为  $d^4x' = |\mathcal{J}|d^4x$ ,  $\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \simeq \det\left[\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]$

上式中约等于号表示只展开到一阶小量，下同

任意方阵  $A$  满足  $\det[\exp(A)] = \exp[\text{tr}(A)]$ ，其中  $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

对于无穷小的  $A$ ，把上式两边展开至一阶小量，得  $\det(1 + A) \simeq 1 + \text{tr}(A)$

利用上式将 Jacobi 行列式  $\mathcal{J}$  化为  $\mathcal{J} \simeq 1 + \text{tr} \left[ \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu} \right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$

从而，**体积元的无穷小变换**形式为  $d^4x' \simeq [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]d^4x$

### 体积元的变化

🍼 体积元的变化为  $d^4x' = |\mathcal{J}|d^4x$ ,  $\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \simeq \det\left[\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]$

上式中约等于号表示只展开到一阶小量，下同

任意方阵  $A$  满足  $\det[\exp(A)] = \exp[\text{tr}(A)]$ ，其中  $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

对于无穷小的  $A$ ，把上式两边展开至一阶小量，得  $\det(1 + A) \simeq 1 + \text{tr}(A)$

利用上式将 Jacobi 行列式  $\mathcal{J}$  化为  $\mathcal{J} \simeq 1 + \text{tr} \left[ \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu} \right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$

从而，**体积元的无穷小变换**形式为  $d^4x' \simeq [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]d^4x$

 作用量在此无穷小变换下的变分是

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) \\ &\simeq \int_R d^4x [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)] [\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) \simeq \int_R d^4x [\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(x)\partial_\mu(\delta x^\mu)] \\ &= \int_R d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} \delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \delta(\partial_\mu\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) \right]\end{aligned}$$

## 两种变分算符

记  $x^\mu$  固定时的变分算符为  $\bar{\delta}$ ，满足

$$\bar{\delta}\Phi_a(x) = \Phi'_a(\textcolor{brown}{x}) - \Phi_a(\textcolor{brown}{x})$$

  $\bar{\delta}$  算符可以与时空导数交换,  $\bar{\delta}(\partial_\mu \Phi_a) = \partial_\mu (\bar{\delta}\Phi_a)$ ,  $\delta$  算符则不一定可以

  $\delta\Phi_a$  与  $\bar{\delta}\Phi_a$  的关系为

$$\begin{aligned}\delta\Phi_a &= \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \Phi'_a(x) - \Phi_a(x) \\ &= \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \bar{\delta}\Phi_a \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu\end{aligned}$$

即

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu$$

🍺 将上面的  $\Phi_a$  替换为  $\partial_\mu \Phi_a$ ，即得

$$\delta(\partial_\mu \Phi_a) = \bar{\delta}(\partial_\mu \Phi_a) + \partial_\nu (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\nu = \partial_\mu (\bar{\delta} \Phi_a) + \partial_\nu (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\nu$$

## 作用量变分



从而得到

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta \Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta (\partial_\mu \Phi_a) + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right] \\
&= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} [\bar{\delta} \Phi_a + (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\mu] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} [\partial_\mu (\bar{\delta} \Phi_a) + \partial_\nu (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\nu] + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right\} \\
&= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \bar{\delta} \Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} (\partial_\mu \Phi_a) \delta x^\mu + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a \right] - \left[ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_a)} \partial_\mu (\partial_\nu \Phi_a) \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right\} \\
&= \int_R d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \frac{\partial \Phi_a}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_a)} \frac{\partial (\partial_\nu \Phi_a)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L} \frac{\partial (\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right] \right\} \\
&= \int_R d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \right\}
\end{aligned}$$



第二步用到导数的乘积法则，最后一步用到涉及多元复合函数的求导关系

## Noether 守恒流

 Euler-Lagrange 方程表明  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} = 0$

由于积分区域  $R$  可以是任意的,

$$0 = \delta S = \int_R d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \right\}$$

等价于

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

定义 Noether 守恒流  $j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu$

则有守恒流方程  $\partial_\mu j^\mu = 0$

Noether 守恒流

Euler-Lagrange 方程表明  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} = 0$

由于积分区域  $R$  可以是任意的,

$$0 = \delta S = \int_R d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \bar{\delta} \Phi_a + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \right\}$$

等价于

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

定义 Noether 守恒流  $j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta} \Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu$

则有守恒流方程  $\partial_\mu j^\mu = 0$ ，两边对空间区域  $R$  积分，运用 Gauss 定理，得到

$$0 = \int_R d^3x \partial_\mu j^\mu = \int_R d^3x \partial_0 j^0 + \int_R d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{d}{dt} \int_R d^3x j^0 + \int_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

  $d\sigma$  是边界面  $S$  上的定向面元，以外法线方向为正向

守恒荷

 引入守恒荷  $Q \equiv \int_R d^3x j^0$ , 则  $\frac{d}{dt} \int_R d^3x j^0 + \int_S \mathbf{j} \cdot d\sigma = 0$  化为

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\sigma$$

即区域  $R$  中的守恒荷减少率(增加率)等于从边界面流出(流入)的通量

这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而  $j^0$  是守恒荷的空间密度

守恒荷

引入守恒荷  $Q \equiv \int_B d^3x j^0$ , 则  $\frac{d}{dt} \int_B d^3x j^0 + \int_S \mathbf{j} \cdot d\sigma = 0$  化为

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\sigma$$

即区域  $R$  中的守恒荷减少率(增加率)等于从边界面流出(流入)的通量

这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而  $j^0$  是守恒荷的空间密度

对于整个三维空间而言，**边界面**  $S$  位于无穷远处

通常假设场  $\Phi_a$  在无穷远处消失，从而在无穷远处  $j \rightarrow 0$

故全空间的守恒荷  $Q = \int d^3x j^0$  满足  $\frac{dQ}{dt} = 0$

可见， $Q$  不随时间变化，是一个**守恒量**

守恒荷

 引入守恒荷  $Q \equiv \int_B d^3x j^0$ , 则  $\frac{d}{dt} \int_B d^3x j^0 + \int_S \mathbf{j} \cdot d\sigma = 0$  化为

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\sigma$$

即区域  $R$  中的守恒荷减少率(增加率)等于从边界面流出(流入)的通量

这表明守恒荷不能凭空产生或消失，而  $j^0$  是守恒荷的空间密度

对于整个三维空间而言，**边界面**  $S$  位于无穷远处

通常假设场  $\Phi_a$  在无穷远处消失，从而在无穷远处  $j \rightarrow 0$

故全空间的守恒荷  $Q = \int d^3x j^0$  满足  $\frac{dQ}{dt} = 0$

可见， $Q$  不随时间变化，是一个**守恒量**

综上，在场论中，如果一个系统具有某种连续对称性，则存在相应的守恒流  $j^\mu$

它满足**守恒流方程**  $\partial_\mu j^\mu = 0$ ，而全空间的**守恒荷**  $Q$  不随时间变化

### 1.7.2 小节 时空平移对称性



时空坐标的平移 (translation) 变换定义为

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$



其中  $a^\mu$  是平移变换参数，不依赖于  $x^\mu$ ，故  $dx'^\mu = dx^\mu$



从而，时空平移变换保持  $ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  不变，即

$$g_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

Henri Poincaré  
(1854–1912)



因此，时空平移变换保持 Minkowski 时空的线元 (line element)  $ds$  不变



所有时空平移变换构成**时空平移群**



保持线元平方  $ds^2$  不变的变换称为 Poincaré 变换，也称为非齐次 Lorentz 变换



Poincaré 群

 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**

## 线元不变意味着距离不变

因而 Poincaré 群是 Minkowski 时空的等距群 (isometry group)，记作  $\text{ISO}(1, 3)$

 Lorentz 群是 Poincaré 群的子群,  $O(1, 3) < ISO(1, 3)$

Poincaré 群

 所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**

 线元不变意味着距离不变

因而 Poincaré 群是 Minkowski 时空的等距群 (isometry group)，记作 ISO(1, 3)

Lorentz 群是 Poincaré 群的子群,  $O(1, 3) < ISO(1, 3)$

任意 Poincaré 变换可表示成 Lorentz 变换和时空平移变换的组合

也就是说，时空坐标的 Poincaré 变换表达为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

 利用**保度规条件**, 容易验证这样的变换**保持**  $ds^2$  不变:

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} = g_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} = ds^2$$

数学上称 Poincaré 群是 Lorentz 群与时空平移群的半直积群

## 时空平移对称性

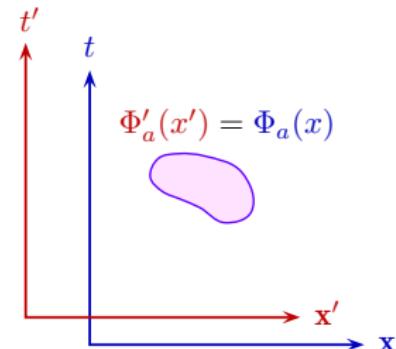


Minkowski 时空是均匀 (homogeneous) 的，处于其中的系统具有时空平移对称性



在时空平移变换  $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$  的作用下，场  $\Phi_a(x)$  的形状不会改变，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$$



时空平移对称性



Minkowski 时空是均匀 (homogeneous) 的，处于其中的系统具有时空平移对称性



在时空平移变换  $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$  的作用下，场  $\Phi_a(x)$  的形状不会改变，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$$



对于无穷小变换，将变换参数  $a^\mu$  改记为  $\varepsilon^\mu$ ，则

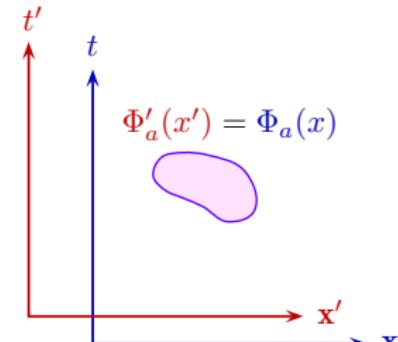
$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \quad \delta \Phi_a = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = 0$$



$$\text{故 } \bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = -\varepsilon^\rho \partial_\rho\Phi_a$$



代入到 Noether 守恒流表达式，得



$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \varepsilon^\rho \partial_\rho \Phi_a + \mathcal{L}\varepsilon^\mu \\ &= -\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu{}_\rho \mathcal{L} \right] \varepsilon^\rho \end{aligned}$$

能动张量

从而,  $\partial_\mu j^\mu = 0$  给出

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\rho \Phi_a - \delta^\mu{}_\rho \mathcal{L} \right] = 0$$

 各项乘以  $g^{\rho\nu}$ ，缩并，得

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0$$

 上式方括号部分是场的**能动张量** (energy-momentum tensor)

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial^\nu \Phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

它满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

因此，对  $T^{0\nu}$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ) 作全空间积分，就得到 4 个守恒荷

 只要保证  $\mathcal{L}$  是 Lorentz 标量，那么  $T^{\mu\nu}$  就是 2 阶 Lorentz 张量

## 能量守恒定律和动量守恒定律

能动张量  $T^{\mu\nu}$  的 00 分量为  $T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$

 可见,  $T^{00}$  就是哈密顿量密度  $\mathcal{H}$ , 对应于时间平移变换  $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$

  $T^{00}$  的全空间积分  $H = \int d^3x \, T^{00} = \int d^3x \, \mathcal{H}$  是场的哈密顿量，或者说总能量

 它是时间平移变换的**守恒荷**，因此**时间平移对称性**对应于**能量守恒定律**

## 能量守恒定律和动量守恒定律

能动张量  $T^{\mu\nu}$  的 00 分量为  $T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$

 可见,  $T^{00}$  就是哈密顿量密度  $\mathcal{H}$ , 对应于时间平移变换  $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$

  $T^{00}$  的全空间积分  $H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H}$  是场的哈密顿量，或者说总能量

 它是时间平移变换的**守恒荷**，因此**时间平移对称性**对应于**能量守恒定律**

 能动张量  $T^{\mu\nu}$  的  $0i$  分量  $T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} \partial^i \Phi_a = \pi_a \partial^i \Phi_a$  是场的动量密度

它对应于**空间平移变换**  $x'^i = x^i + \varepsilon^i$

2)  $T^{0i}$  的全空间积分  $P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \pi_a \partial^i \Phi_a$  是场的**总动量**

三维矢量形式为  $\mathbf{P} = - \int d^3x \pi_a \nabla \Phi_a$

 总动量是空间平移变换的**守恒荷**，因此**空间平移对称性**对应于**动量守恒定律**

### 1.7.3 小节 Lorentz 对称性

在相对论性场论中，要求拉氏量  $\mathcal{L}$  是 Lorentz 标量，因而作用量  $S$  是 Lorentz 不变量，系统具有 Lorentz 对称性



考慮无穷小固有保时向 Lorentz 变换

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$



其中  $\omega^\mu{}_\nu$  是变换的无穷小参数，由保度规条件有

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta)$$

$$\simeq g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\omega^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\omega^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}$$



可见， $\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu$  关于两个指标反对称，

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$



因此,  $\omega_{\mu\nu}$  只有 6 个独立分量



分别对应于沿 3 个空间轴方向的**增速变换**和绕 3 个空间轴的**旋转变换**

# 无穷小旋转变换

 下面举两个例子说明  $\omega_{\mu\nu}$  的具体形式

 对于绕  $z$  轴旋转  $\theta$  角的变换矩阵

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

 利用三角函数展开式  $\cos \theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$  和  $\sin \theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$ ，得

$$\omega^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

# 无穷小增速变换

对于沿  $x$  轴增速变换，引入快度 (rapidity)  $\xi \equiv \tanh^{-1} \beta$ ，则  $\beta = \tanh \xi$

利用双曲函数公式  $\tanh \xi = \sinh \xi / \cosh \xi$  和  $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$  推出

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - \tanh^2 \xi)^{-1/2} = \left( \frac{\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi}{\cosh^2 \xi} \right)^{-1/2} = \cosh \xi$$

$$\beta \gamma = \tanh \xi \cosh \xi = \sinh \xi$$

 增速变换矩阵改写成  $\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & & \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

 根据双曲函数展开式  $\cosh \xi = 1 + \mathcal{O}(\xi^2)$  和  $\sinh \xi = \xi + \mathcal{O}(\xi^3)$ ，有

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

# Lorentz 群表示的生成元

在无穷小 Lorentz 变换的作用下，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

对变换后的场  $\Phi'_a(x')$  在  $\omega_{\mu\nu} = 0$  附近作 Taylor 级数，展开到  $\omega_{\mu\nu}$  的第一阶，得

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu} \left. \frac{\partial \Phi'_a(x')}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right|_{\omega_{\mu\nu}=0}$$



Brook Taylor  
(1685–1731)

# Lorentz 群表示的生成元

在无穷小 Lorentz 变换的作用下，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

对变换后的场  $\Phi'_a(x')$  在  $\omega_{\mu\nu} = 0$  附近作 Taylor 级数，展开到  $\omega_{\mu\nu}$  的第一阶，得

$$\begin{aligned}\Phi'_a(x') &= \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu} \left. \frac{\partial \Phi'_a(x')}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right|_{\omega_{\mu\nu}=0} \\ &= \Phi_a(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{ab} \Phi_b(x) \\ &= \left[ \delta_{ab} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{ab} \right] \Phi_b(x)\end{aligned}$$

其中  $(I^{\mu\nu})_{ab} \equiv \frac{2i}{\Phi_b(x)} \left. \frac{\partial \Phi'_a(x')}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right|_{\omega_{\mu\nu}=0}$  是  $\Phi_a$  所属 Lorentz 群表示的生成元 (generator)

由于  $\omega_{\mu\nu}$  是反对称的， $(I^{\mu\nu})_{ab}$  关于  $\mu$  和  $\nu$  反对称， $(I^{\mu\nu})_{ab} = -(I^{\nu\mu})_{ab}$



Brook Taylor  
(1685–1731)

| 群表示  | 场 $\Phi_a$   | $(I^{\mu\nu})_{ab}$          |
|------|--------------|------------------------------|
| 恒等表示 | 标量场 $\phi$   | 0                            |
| 矢量表示 | 矢量场 $A^\mu$  | $(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma$ |
| 旋量表示 | 旋量场 $\psi_a$ | $(S^{\mu\nu})_{ab}$          |

# Lorentz 对称性的 Noether 流

 现在  $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$ , 有

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\Phi_a &= \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - (\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Noether 流 } j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(\partial_\nu\Phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right]\omega^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho x^\rho\end{aligned}$$

 其中  $T^\mu{}_\nu \equiv T^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$  是能动张量  $T^{\mu\nu}$  的另一种写法

 注意参与缩并的 Lorentz 指标一升一降不会改变表达式的结果,

$$T^\mu{}_\nu\omega^\nu{}_\rho = T^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\sigma\omega^\sigma{}_\rho = T^\mu{}_\nu g^{\nu\alpha}g_{\alpha\sigma}\omega^\sigma{}_\rho = T^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}$$

# Lorentz 对称性的守恒荷

 再利用  $\omega_{\mu\nu}$  的反对称性推出

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu \omega^\nu{}_\rho x^\rho &= T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\nu} \omega_{\rho\nu} x^\rho) = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\rho} \omega_{\nu\rho} x^\nu) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \end{aligned}$$

 于是, Noether 流化为

$$j^\mu = -\frac{i}{2} \omega_{\nu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b - \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) = \frac{1}{2} \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho}$$

 其中  $\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho} x^\nu - T^{\mu\nu} x^\rho - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b$

  $\partial_\mu j^\mu = 0$  给出  $\partial_\mu \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0$ , Lorentz 对称性的守恒荷为

$$J^{\nu\rho} \equiv \int d^3x \mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int d^3x [T^{0\rho} x^\nu - T^{0\nu} x^\rho - i\pi_a (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b]$$

 易见  $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$ , 因而一共有 6 个独立的守恒荷, 满足  $dJ^{\nu\rho}/dt = 0$

# 守恒荷的分解



为明确物理含义，将**守恒荷**分解成两项，

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}$$

✖ 第一项为  $L^{\nu\rho} \equiv \int d^3x (T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho)$

✚ 关于指标的**反对称性**意味着它的**纯空间分量**  $L^{jk}$  中只有 3 个是**独立的**

⌚ 利用**三维 Levi-Civita 符号**将  $L^{jk}$  对偶成**三维矢量**

$$L^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} L^{jk} = (L^{23}, L^{31}, L^{12})$$

⌚ 由此推出

**动量密度**

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int d^3x (T^{0k}x^j - T^{0j}x^k) = \int d^3x \varepsilon^{ijk} x^j \mathbf{T}^{0k} = \int d^3x \varepsilon^{ijk} x^j \boldsymbol{\pi}_a \partial^k \Phi_a$$

🏃 写成矢量形式是  $\mathbf{L} = - \int d^3x \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\pi}_a \nabla \Phi_a)$ ，这是场的**轨道角动量**

# 角动量守恒定律

 第二项为  $S^{\nu\rho} \equiv -i \int d^3x \pi_a (I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b$

 同样,  $S^{\nu\rho}$  纯空间分量的**对偶三维矢量**为

$$S^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} S^{jk} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \int d^3x \pi_a (I^{jk})_{ab} \Phi_b$$

 这是场的**自旋角动量**

  $J^{\nu\rho}$  纯空间分量的**对偶三维矢量**为

$$J^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} = L^i + S^i$$

 这是场的**总角动量**

 固有保时向 Lorentz 群的**纯空间部分**就是**空间旋转群**  $SO(3)$

 而**空间旋转对称性**对应于**角动量守恒定律**

# 质心运动守恒定律

  $L^{\nu\rho}$  的  $i0$  分量为

$$L^{i0} = \int d^3x (\textcolor{brown}{T}^{00} x^i - T^{0i} x^0) = \int d^3x (x^i \mathcal{H} - x^0 \pi_a \partial^i \Phi_a) = \int d^3x x^i \mathcal{H} - t P^i$$

 若  $\frac{dS^{i0}}{dt} = 0$ ，则  $\frac{dJ^{i0}}{dt} = 0$  意味着  $\frac{dL^{i0}}{dt} = 0$ ，再结合动量守恒  $\frac{dP^i}{dt} = 0$ ，得到

$$\frac{dL^{i0}}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x x^i \mathcal{H} - P^i = 0$$

 即

$$P^i = H v_C^i, \quad v_C^i \equiv \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \int d^3x x^i \mathcal{H}$$

 在低速极限下，总能量约等于总质量， $H \simeq M$ ，故总动量  $P \simeq M v_C$

  $v_C$  是质心（即质量中心，center of mass）的运动速度

 应用 Newton 第二定律，外力  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}$ ，这就是质心运动定理

 因此， $L^{i0}$  的守恒在经典力学中对应于质心运动守恒定律：当没有外力存在时，质心的加速度为零，质心保持静止或作匀速直线运动

## 1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

 考虑包含复场  $\phi(x)$  及其复共轭场  $\phi^*(x)$  的拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

 对  $\phi$  作 U(1) 整体变换  $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

 其中有理数  $q$  是常数，连续变换参数  $\theta$  是实数

 整体 (global) 指  $\theta$  不依赖于时空坐标  $x^\mu$

## 1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

考虑包含复场  $\phi(x)$  及其复共轭场  $\phi^*(x)$  的拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

对  $\phi$  作 U(1) 整体变换  $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

$$SO(2) : \theta \rightarrow [0, 2\pi]$$

其中有理数  $q$  是常数，连续变换参数  $\theta$  是实数

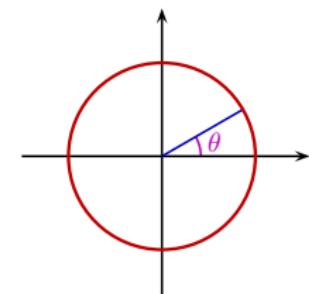
整体 (global) 指  $\theta$  不依赖于时空坐标  $x^\mu$

$e^{iq\theta}$  是一个模为 1 的相位因子 (phase factor)

可看作一个 1 维么正矩阵  $U = e^{iq\theta}$ ，满足  $U^\dagger U = 1$

故  $\{U\}$  构成 U(1) 群，它是与 SO(2) 同构的 Abel 群

如右图所示，SO(2) 群空间是一个圆周



$$U = e^{iq\theta} : \theta \rightarrow [0, 2\pi/q]$$

$$U(0) = U(2\pi/q) = 1$$

## 1.7.4 小节 U(1) 整体对称性

考虑包含复场  $\phi(x)$  及其复共轭场  $\phi^*(x)$  的拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

对  $\phi$  作 U(1) 整体变换  $\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x)$

$$SO(2) : \theta \rightarrow [0, 2\pi]$$

其中有理数  $q$  是常数，连续变换参数  $\theta$  是实数

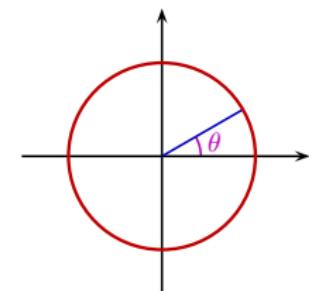
整体 (global) 指  $\theta$  不依赖于时空坐标  $x^\mu$

$e^{iq\theta}$  是一个模为 1 的相位因子 (phase factor)

可看作一个 1 维么正矩阵  $U = e^{iq\theta}$ ，满足  $U^\dagger U = 1$

故  $\{U\}$  构成 U(1) 群，它是与 SO(2) 同构的 Abel 群

如右图所示，SO(2) 群空间是一个圆周



$$U = e^{iq\theta} : \theta \rightarrow [0, 2\pi/q]$$

$$U(0) = U(2\pi/q) = 1$$

相应地， $\phi^*$  的 U(1) 整体变换为  $[\phi^*(x)]' = [\phi'(x)]^* = e^{-iq\theta} \phi^*(x)$

拉氏量  $\mathcal{L}$  在这种变换下不变，即具有 U(1) 整体对称性， $q$  称为相应的 U(1) 荷

与前面叙述的时空平移对称性和 Lorentz 对称性不同，这里的对称性出现在由场构成的抽象空间中，与时间和空间相对独立 ( $\delta x^\mu = 0$ )，因而是一种内部对称性

# 无穷小 U(1) 整体变换



U(1) 整体变换的**无穷小**形式为

$$\phi'(x) = \phi(x) + iq\theta\phi(x), \quad [\phi^*(x)]' = \phi^*(x) - iq\theta\phi^*(x)$$



结合  $\delta x^\mu = 0$ ，有

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi = iq\theta\phi, \quad \bar{\delta}\phi^* = \delta\phi^* = -iq\theta\phi^*$$



$\phi(x)$  与  $\phi^*(x)$  是**线性独立**的，代表两个**相互独立的自由度**，Noether 流表达为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \bar{\delta}\phi^* = \partial^\mu\phi^*(iq\theta\phi) + \partial^\mu\phi(-iq\theta\phi^*) \\ &= iq\theta[(\partial^\mu\phi^*)\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*] = -iq\theta\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \end{aligned}$$



其中， $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$  符号定义为  $\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \equiv \phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi$

# U(1) 守恒流和守恒荷



扔掉无穷小参数  $-\theta$ ，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv iq\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$$



则 Noether 定理给出  $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，相应的**守恒荷**是

$$Q = \int d^3x J^0 = iq \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi$$



满足  $dQ/dt = 0$

# U(1) 守恒流和守恒荷

 扔掉无穷小参数  $-\theta$ ，定义 U(1) 守恒流

$$J^\mu \equiv iq\phi^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi$$

 则 Noether 定理给出  $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，相应的**守恒荷**是

$$Q = \int d^3x J^0 = iq \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi$$

 满足  $dQ/dt = 0$

 在实际应用中， $q$  是由  $\Phi$  场描述的粒子所携带的**某种荷**，如**电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数**等

 因此，一种 U(1) 整体对称性对应于一条**荷数守恒定律**

 比如，**电磁 U(1)** 整体对称性对应于**电荷守恒定律**