

数学物理方法

第十一章 球函数

第1节 轴对称球函数

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期: 2025 年 7 月 11 日



§1 轴对称球函数

§1.1 轴对称问题的一般解

回顾第九章 §2.1 知识，在球坐标下对 Laplace 方程 $\nabla^2 u(r) = 0$ 分离变量，设

$$u(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

考虑到对 ϕ 的周期性边界条件 $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$ ，得

$$\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

令 $\cos \theta = x$, $H(\theta) = P(x)$

由于 $\theta = 0, \pi$ 处的自然边界条件, $P(x)$ 满足连带 Legendre 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 & (-1 < x < 1) \\ P(\pm 1) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \ (m = 0) \end{cases}$$

轴对称问题

对于轴对称问题，取对称轴为球坐标系的极轴 (z 轴)

那么，问题的解与 ϕ 无关，只需考虑 $m = 0$ ，而 $\Phi(\phi) = 1$

上述问题简化为 Legendre 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 & (-1 < x < 1) \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

相应的**本征值**和**本征函数**是

$$\lambda = l(l+1), \quad P(x) = P_l(x), \quad l \in \mathbb{N}$$

这里 $P_l(x)$ 是 l 次 Legendre 多项式

将本征值代回径向方程 $r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \lambda R(r) = 0$ ，得

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - l(l+1) R(r) = 0$$

求解径向方程

现在求解径向方程 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ ，它是一个 Euler 方程

令 $r = e^t$ ，则 $t = \ln r$ ， $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$ ， $r \frac{dR}{dr} = r \frac{dt}{dr} \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt}$

$$r^2 \frac{d^2 R}{d^2 r} = r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \right) = r^2 \frac{-1}{r^2} \frac{dR}{dt} + r \frac{d}{dr} \frac{dR}{dt} = -\frac{dR}{dt} + r \frac{dt}{dr} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{dR}{dt} + \frac{d^2 R}{d^2 t}$$

从而 $r^2 \frac{d^2 R}{d^2 r} + 2r \frac{dR}{dr} = \frac{d^2 R}{d^2 t} + \frac{dR}{dt}$ ，径向方程化为

$$\frac{d^2R}{d^2t} + \frac{dR}{dt} - l(l+1)R = 0$$

求解径向方程

现在求解径向方程 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ ，它是一个 Euler 方程

令 $r = e^t$ ，则 $t = \ln r$ ， $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$ ， $r \frac{dR}{dr} = r \frac{dt}{dr} \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt}$

$$r^2 \frac{d^2 R}{d^2 r} = r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \right) = r^2 \frac{-1}{r^2} \frac{dR}{dt} + r \frac{d}{dr} \frac{dR}{dt} = -\frac{dR}{dt} + r \frac{dt}{dr} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{dR}{dt} + \frac{d^2 R}{d^2 t}$$

从而 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} = \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt}$ ，径向方程化为

$$\frac{d^2R}{d^2t} + \frac{dR}{dt} - l(l+1)R = 0$$

将 $R = e^{\mu t}$ 代入, 得 $[\mu^2 + \mu - l(l + 1)]e^{\mu t} = 0$

$\mu(\mu + 1) - l(l + 1) = 0$ 的两个根为 $\mu_1 = l$ 和 $\mu_2 = -l - 1$ ，对应着两个解

$$R_1(r) = e^{\mu_1 t} = r^{\mu_1} = r^l, \quad R_2(r) = e^{\mu_2 t} = r^{\mu_2} = r^{-(l+1)}$$

对于每个 $l \in \mathbb{N}$ ，有 $\Phi(\phi) = 1$ 、 $H(\theta) = P_l(x) = P_l(\cos \theta)$ 和 $R(r) = \left\{ r^l, \frac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是, Laplace 方程轴对称问题的一般解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

其中 A_l 和 B_l 是任意常数, 由**边界条件**决定

● Laplace 方程没有初始条件, 边界条件不需要全部是齐次的, 否则只有平庸解

§1.2 Legendre 多项式的基本性质

 本节题目中的“轴对称球函数”指上述一般解中出现的 Legendre 多项式

为了将这个解应用于物理问题, 需要先研究 Legendre 多项式的性质

在上一章求得 Legendre 多项式的显式为

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

§1.2 Legendre 多项式的基本性质

 本节题目中的“轴对称球函数”指上述一般解中出现的 Legendre 多项式

为了将这个解应用于物理问题, 需要先研究 Legendre 多项式的性质

在上一章求得 Legendre 多项式的显式为

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

它具有下列**基本性质**

(1) 奇偶性: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$, 即奇(偶)次 Legendre 多项式为奇(偶)函数

证: $P_l(-x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-)^k (2l-2k)!}{2^k k! (l-k)! (l-2k)!} (-x)^{l-2k} = (-)^{l-2k} P_l(x) = (-)^l P_l(x)$

§1.2 Legendre 多项式的基本性质

 本节题目中的“轴对称球函数”指上述一般解中出现的 Legendre 多项式

为了将这个解应用于物理问题, 需要先研究 Legendre 多项式的性质

在上一章求得 Legendre 多项式的显式为

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}$$

它具有下列**基本性质** (在这种幂级数讨论中需要**定义** $0^0 = 1$ 以得到自洽结果)

(1) 奇偶性: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$, 即奇(偶)次 Legendre 多项式为奇(偶)函数

证: $P_l(-x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} (-x)^{l-2k} = (-)^{l-2k} P_l(x) = (-)^l P_l(x)$

$$(2) \text{ 原点值: } P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

证: $k = n$ 的项才有贡献, $P_{2n}(0) = \frac{(-)^n (4n - 2n)! 0^{2n-2n}}{2^{2n} n! (2n - n)! (2n - 2n)!} = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$

Legendre 多项式的端点值和具体形式

利用 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ 和 $2^n n! = (2n)!!$ 推出

$$P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

注意, $P_0(0) = 1$ 与 $(-1)!! = 0!! = 1$ 匹配

Legendre 多项式的端点值和具体形式

利用 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ 和 $2^n n! = (2n)!!$ 推出

$$P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

注意, $P_0(0) = 1$ 与 $(-1)!! = 0!! = 1$ 匹配

(3) 端点值: $P_l(1) = 1, P_l(-1) = (-)^l$

第一式将在下一小节证明, 第二式由第一式和奇偶性 $P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$ 推出

Legendre 多项式的端点值和具体形式

利用 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ 和 $2^n n! = (2n)!!$ 推出

$$P_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-)^n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = (-)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

注意, $P_0(0) = 1$ 与 $(-1)^{0!!} = 0^{0!!} = 1$ 匹配

(3) 端点值: $P_l(1) = 1, P_l(-1) = (-)^l$

第一式将在下一小节证明, 第二式由第一式和奇偶性 $P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$ 推出

(4) 头三个 Legendre 多项式的**具体形式**为

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_0(x) = \frac{(-)^0 0!}{2^0 0! 0!} x^0 = 1, \quad P_1(x) = \frac{(-)^1 2!}{2^1 0! 1! 1!} x^1 = x$$

$$P_2(x) = \frac{(-)^0 4!}{2^2 0! 2! 2!} x^2 + \frac{(-)^1 (4-2)!}{2^2 1! (2-1)! (2-2)!} x^{2-2} = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

Legendre 多项式的零点和图像

(5) 零点: $P_l(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 l 个一阶零点 (证明见 §1.3 选读内容)

 $P_l(x)$ 是 l 次多项式, 总共只有 l 个零点

可见, $P_l(x)$ 的 l 个零点均为实数, 全部分布在区间 $(-1, 1)$ 上, 没有重零点

Legendre 多项式的零点和图像

(5) 零点: $P_l(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 l 个一阶零点 (证明见 §1.3 选读内容)

 $P_l(x)$ 是 l 次多项式, 总共只有 l 个零点

可见, $P_l(x)$ 的 l 个零点均为实数, 全部分布在区间 $(-1, 1)$ 上, 没有重零点

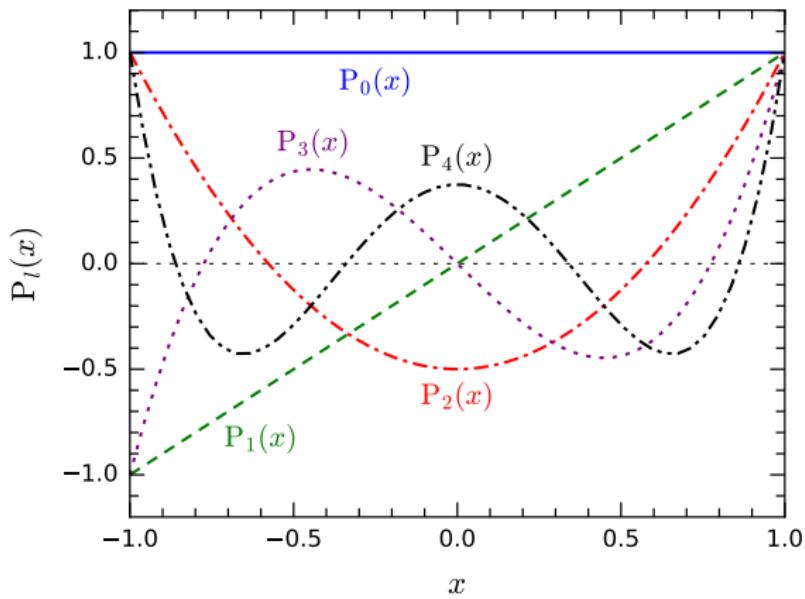
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$



§1.3 Legendre 多项式的微分表示



Legendre 多项式有以下微分表示

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$



这称为 **Rodrigues** 公式



Olinde Rodrigues
(1795–1851)

§1.3 Legendre 多项式的微分表示



Legendre 多项式有以下微分表示

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$



这称为 **Rodrigues** 公式



证明 根据二项式定理

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Olinde Rodrigues
(1795–1851)

有 $(x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^l C_l^k (x^2)^{l-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k x^{2l-2k}$



对 x 求导 l 次, 注意只有满足 $2l - 2k \geq l$ (即 $k \leq l/2$) 的项才有贡献, 得

$$\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k C_l^k \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k}$$

微分表示的证明

根据求导公式 $\frac{d^l}{dx^l} x^n = n \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} x^{n-1} = n(n-1) \frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}} x^{n-2} = \dots = n(n-1) \dots (n-l+1) x^{n-l} = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l}$, $l \leq n$

取 $n = 2l - 2k$ ，即 $n - l = l - 2k$ ，得 $\frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k} = \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k}$ ，故

$$\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \textcolor{blue}{C}_l^k \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k} = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{\textcolor{violet}{l}!(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$$

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^k k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k} = \text{P}_l(x) \quad \text{证毕} \blacksquare$$

证明 $P_l(1) = 1$

利用微分表示容易证明 $P_l(1) = 1$

证明 根据高阶导数的 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}$$



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

利用 $(x^2 - 1)^l = [(x - 1)(x + 1)]^l$, 有

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x-1)^l (x+1)^l] = \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^l C_l^k \left[\frac{d^k}{dx^k} (x-1)^l \right] \left[\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}} (x+1)^l \right]$$

 $k < l$ 的各项求导后含有因子 $(x - 1)^{l-k}$ ，因而在 $x = 1$ 处为零

于是, 只有 $k = l$ 的项有贡献, 而 $\frac{d^l}{dx^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l}$ 表明 $\frac{d^l}{dx^l} x^l = l!$, 故

$$P_l(1) = \frac{1}{2^l l!} \left[\frac{d^l}{dx^l} (x-1)^l \right] (x+1)^l \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^l l!} \textcolor{blue}{l!} \textcolor{red}{2^l} = 1$$

最高幂次项 x^l

§1.5–§1.6 Legendre 多项式的正交关系和模

骏马 作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, Legendre 多项式在 $[-1, 1]$ 上相互正交

鹿 注意到权函数 $\rho(x) = 1$, 正交关系为 $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = 0, \quad l \neq l'$

骆驼 Legendre 多项式的模定义为 $\|P_l\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx}$

斑马 下一节将用 $P_l^m(x)$ 表示连带 Legendre 函数, 应注意不把 $[P_l(x)]^2$ 写成 $P_l^2(x)$, 否则会与 $m = 2$ 时的 $P_l^m(x)$ 相混淆

§1.5–§1.6 Legendre 多项式的正交关系和模

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, Legendre 多项式在 $[-1, 1]$ 上相互正交

注意到权函数 $\rho(x) = 1$ ，正交关系为 $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = 0, \quad l \neq l'$

骆驼 Legendre 多项式的模定义为 $\|P_l\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx}$

下一节将用 $P_l^m(x)$ 表示连带 Legendre 函数，应注意不把 $[P_l(x)]^2$ 写成 $P_l^2(x)$ ，否则会与 $m = 2$ 时的 $P_l^m(x)$ 相混淆

骆驼 利用 Legendre 多项式的微分表示, Legendre 多项式的模方为

$$\|P_l\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$$

$$= \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l(x) \, d \left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \right]$$

$$\text{分部积分} \rightarrow = \frac{1}{2^l l!} P_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \bigg|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P'_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

计算 Legendre 多项式的模方



注意到

$$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2 - 1)^l = \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}[(x-1)^l(x+1)^l]$$

高阶导数的 Leibniz 公式 

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left[\frac{d^k}{dx^k} (x-1)^l \right] \left[\frac{d^{l-1-k}}{dx^{l-1-k}} (x+1)^l \right]$$

$$\frac{d^l}{dx^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l!}{(l-k)!} \frac{l!}{(k+1)!} (x-1)^{l-k} (x+1)^{k+1}$$

$$\|P_l\|^2 = \frac{1}{2^l l!} P_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l'(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

计算 Legendre 多项式的模方

大象 注意到

$$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2 - 1)^l = \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}[(x-1)^l(x+1)^l]$$

高阶导数的 Leibniz 公式 

$$= \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left[\frac{d^k}{dx^k} (x-1)^l \right] \left[\frac{d^{l-1-k}}{dx^{l-1-k}} (x+1)^l \right]$$

$$\frac{d^l}{dx^l} x^n = \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l} = \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l!}{(l-k)!} \frac{l!}{(k+1)!} (x-1)^{l-k} (x+1)^{k+1}$$

由于 $l - k > 0$ 且 $k + 1 > 0$ ，上式在 $x = \pm 1$ 处均为零，故

$$\|P_l\|^2 = \frac{1}{2^l l!} P_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \bigg|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P'_l(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

$$= (-)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{dP_l(x)}{dx} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx$$

共作 l 次分部积分

$$= \cdots = (-)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^l P_l(x)}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$$

化简 $\|P_l\|^2$

 $P_l(x)$ 是 l 次多项式, 求导 l 次后得到常数

$$\frac{d^l P_l(x)}{d^l x} = \frac{d^l}{d^l x} \left[\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d^l x} (x^2 - 1)^l \right] = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{2l}}{d^{2l} x} x^{2l} = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

其中幂次小于 $2l$ 的各项求导为零, 于是

$$\|P_l\|^2 = (-)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^l P_l(x)}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx = \frac{2(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^l dx$$

 第二步利用被积函数的偶函数性质将积分范围调整为 $[0, 1]$ ，再乘以 2

作变量替换 $x = \cos \theta$ ，则 $x \in [0, 1]$ 对应于 $\theta \in [0, \pi/2]$ ，有

$$1 - x^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta, \quad dx = d \cos \theta = -\sin \theta d\theta$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^l \, dx = \int_{\pi/2}^0 \sin^{2l} \theta \, (-\sin \theta) \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, d\theta \equiv I_{2l+1}$$

积分 I_{2l+1}



现在求积分 I_{2l+1}

$$\begin{aligned}
 I_{2l+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, d\theta = - \int_0^{\pi/2} \sin^{2l} \theta \, d(\cos \theta) \\
 &= -\sin^{2l} \theta \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} + 2l \int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1} \theta \cos^2 \theta \, d\theta = 2l \int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1} \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta \\
 2l &\left[\int_0^{\pi/2} \sin^{2l-1} \theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, d\theta \right] = 2l(I_{2l-1} - I_{2l+1})
 \end{aligned}$$



推出递推关系 $I_{2l-1} = \frac{I_{2l+1}}{2l} + I_{2l+1} = \frac{2l+1}{2l} I_{2l+1}$ ，即 $I_{2l+1} = \frac{2l}{2l+1} I_{2l-1}$



由 $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = 1$ 得到

$$\begin{aligned} I_{2l+1} &= \frac{2l}{2l+1} I_{2l-1} = \frac{2l(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)} I_{2l-3} = \cdots = \frac{2l(2l-2)\cdots 2}{(2l+1)(2l-1)\cdots 3} I_1 \\ &= \frac{[2l(2l-2)\cdots 2]^2}{(2l+1)2l(2l-1)(2l-2)\cdots 3 \cdot 2} = \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!} \end{aligned}$$

Legendre 多项式的模

将 I_{2l+1} 的积分结果代入, 得

$$\|P_l\|^2 = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_0^1 (1-x^2)^l \, dx = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} I_{2l+1} = \frac{2(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!} = \frac{2}{2l+1}$$

从而, Legendre 多项式的模为

$$\|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$$

将 $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) \, dx = 0$ ($l \neq l'$) 和 $\|P_l\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2l+1}$ 统一写成

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) \, dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

§1.7 广义 Fourier 级数

作为 Sturm-Liouville 本征值问题的特例, Legendre 多项式在 $[-1, 1]$ 上是完备的

因此，区间 $[-1, 1]$ 上任意一个解析良好的函数 $f(x)$ 必定可以用 $\{P_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$ 展开为广义 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

利用 $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$ ，求得展开系数为

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx, \quad l \in \mathbb{N}$$

§1.8 Legendre 多项式的母函数



考慮三维空间的 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$$



将 $u(r)$ 看成静电场的电势，对比静电场 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$



ϵ_0 是真空介电常数, 可见 $\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$

§1.8 Legendre 多项式的母函数



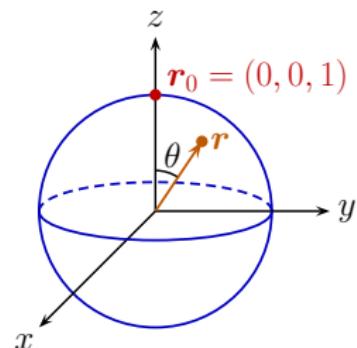
考慮三维空间的 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(r) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$$



将 $u(r)$ 看成静电场的电势，对比静电场 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$



ϵ_0 是真空介电常数, 可见 $\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z - 1)$



$\rho(\mathbf{r})$ 是一个点电荷的电荷密度, 它位于单位球面北极, 直角坐标为 $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 1)$



点电荷的电量为 $Q = 4\pi\epsilon_0$ ，根据电磁学，它产生的静电势为

$$u(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$



使用 r 的球坐标 (r, θ, ϕ) ，由 $z = r \cos \theta$ 得

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = \textcolor{brown}{r}^2 - 2r \cos \theta + 1$$

解

于是, Poisson 方程 $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$ 的解为

$$u(\mathbf{r}) = u(r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

这里借助**电磁学**求解，也可以从数学上直接证明它是解（见第十三章 **Green 函数法**）

这不是唯一的解，对它加上任一调和函数（即 Laplace 方程的解）就得到另一个解

不过，在全空间有限的调和函数只有常数，一般解是对这个解加上一个任意常数

如果将电势零点取为无穷远点，则该常数为零，那么这个解就是唯一解

解

于是, Poisson 方程 $\nabla^2 u(r) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-1)$ 的解为

$$u(\mathbf{r}) = u(r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

这里借助**电磁学**求解，也可以从数学上直接证明它是解（见第十三章 Green 函数法）

这不是唯一的解, 对它加上任一调和函数(即 Laplace 方程的解)就得到另一个解

不过，在全空间有限的调和函数只有常数，一般解是对这个解加上一个任意常数

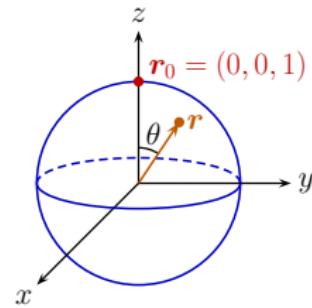
✓ 如果将电势零点取为无穷远点，则该常数为零，那么这个解就是唯一解

在单位球体内 ($r < 1$)，Poisson 方程化为 Laplace 方程 $\nabla^2 u(r) = 0$

由于这是个轴对称问题，该区域的解必定可以表达为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

橄榄球 $r = 0$ 处没有电荷, 电势应该有限, 因此所有 $B_l = 0$



母函数

于是，单位球体内电势的另一个表达式为

$$u(r) = u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < 1$$

适当选取 A_l 的值, 可以使上式与 $u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$ 一致, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x), \quad r < 1$$

这里已将 $\cos \theta$ 改写为 x

母函数

于是, 单位球体内电势的另一个表达式为

$$u(r) = u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < 1$$

适当选取 A_l 的值, 可以使上式与 $u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$ 一致, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x), \quad r < 1$$

这里已将 $\cos \theta$ 改写为 x ，令 $x = 1$ ，由 $P_l(1) = 1$ 得 $\sum_{l=0}^{\infty} r^l = \frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l$

由此立即得到所有 $A_l = 1$ ，故

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad r < 1$$

上式左边的函数称为 Legendre 多项式的母函数，或者生成函数

可见, 将母函数在 $r = 0$ 的邻域 $r < 1$ 内展开成 r 的 Taylor 级数, 则展开系数正是 l 次 Legendre 多项式 $P_l(x)$

$r > 1$ 的情况

curling 如果 $r > 1$ ，则 $\frac{1}{r} < 1$

将 $\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$ ($r < 1$) 中的 r 替换为 $\frac{1}{r}$ ，得

$$\frac{1}{\sqrt{(1/r)^2 - 2x/r + 1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^l P_l(x), \quad \frac{1}{r} < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \frac{1}{r\sqrt{(1/r)^2 - 2x/r + 1}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^l P_l(x)$$

从而得到**母函数**的另一个展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), \quad r > 1$$

这里将母函数在 $r > 1$ 处展开成 **Laurent 级数**，对应于在级数 $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(x)$ 中取所有 $B_l = 1$

§1.9 Legendre 多项式的递推关系

将母函数公式 $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$ 两边对 r 求导, 左边化为

$$\frac{d}{dr}(1-2rx+r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(2r-2x) = (x-r)(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

再乘以 $1 - 2rx + r^2$ ，左边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dr} (1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = (x - r) (1 - 2rx + r^2)^{-1/2}$$

$$= (x - r) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) \textcolor{blue}{r^l} - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x) r^l$$

§1.9 Legendre 多项式的递推关系

将母函数公式 $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$ 两边对 r 求导，左边化为

$$\frac{d}{dr}(1-2rx+r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(2r-2x) = (x-r)(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

再乘以 $1 - 2rx + r^2$ ，左边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dr} (1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = (x - r)(1 - 2rx + r^2)^{-1/2}$$

$$= (x - r) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) \textcolor{blue}{r^l} - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x) \textcolor{blue}{r^l}$$

右边变成 $(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dr} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1 - 2rx + r^2) \sum_{l=0}^{\infty} lr^{l-1} P_l(x)$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)r^{l-1} - \sum_{l=0}^{\infty} 2xlP_l(x)r^l + \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)r^{l+1}$$

$$= \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xlP_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)r^l$$

递推关系一



综上, 得到

$$\sum_{l=0}^{\infty} xP_l(x)r^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)r^l = \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xlP_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)r^l$$



比较两边 r^l 的系数, 推出

$$xP_l(x) - P_{l-1}(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x)$$



整理得 **递推关系一**

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$

递推关系一



综上, 得到

$$\sum_{l=0}^{\infty} xP_l(x)r^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)r^l = \sum_{l=-1}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xlP_l(x)r^l + \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)r^l$$



比较两边 r^l 的系数, 推出

$$xP_l(x) - P_{l-1}(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x)$$

整理得递推关系一

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$



将母函数公式 $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$ 两边对 x 求导, 左边化为

$$\frac{d}{dx}(1-2rx+r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1-2rx+r^2)^{-3/2}(-2r) = r(1-2rx+r^2)^{-3/2}$$

递推关系二

再乘以 $1 - 2rx + r^2$ ，左边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dx} (1 - 2rx + r^2)^{-1/2} = r(1 - 2rx + r^2)^{-1/2}$$

$$= r \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1}$$

右边变成

$$(1 - 2rx + r^2) \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1 - 2rx + r^2) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P'_l(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2x P'_l(x) r^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x) r^{l+2}$$

$$= \sum_{l=-1}^{\infty} P'_{l+1}(x) r^{l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} 2x P'_l(x) r^{l+1} + \sum_{l=1}^{\infty} P'_{l-1}(x) r^{l+1}$$

比较两边 r^{l+1} 的系数，得到递推关系二

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2x P'_l(x) + P'_{l-1}(x)$$

递推关系三

对递推关系 $(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$ 求导, 有

$$(2l+1)P_l(x) + (2l+1)xP'_l(x) = (l+1)P'_{l+1}(x) + lP'_{l-1}(x)$$

两边乘以 2，移项得

$$2(2l+1)P_l(x) = -2(2l+1)xP'_l(x) + 2(l+1)P'_{l+1}(x) + 2lP'_{l-1}(x)$$

对递推关系二 $P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x)$ 两边乘以 $(2l+1)$ 得

$$(2l+1)P_l(x) = (2l+1)P'_{l+1}(x) - 2(2l+1)xP'_l(x) + (2l+1)P'_{l-1}(x)$$

两式相减，得到递推关系三

$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

§1.10 应用

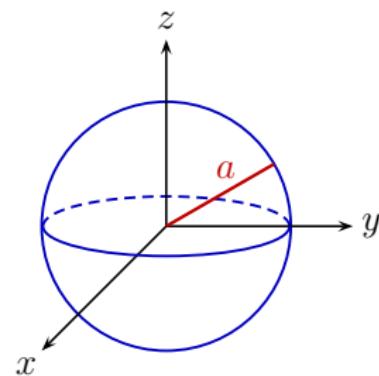
例 1 已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $f(\theta)$ ，

球内外无电荷, 求空间各处的电势 U

由于球内外无电荷，电势在球内外均满足 Laplace 方程

题意已隐含电势零点取在无穷远处，则定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (r < a, r > a) \\ u|_{r=a} = f(\theta), \quad u|_{r=\infty} = 0 \end{cases}$$



§1.10 应用

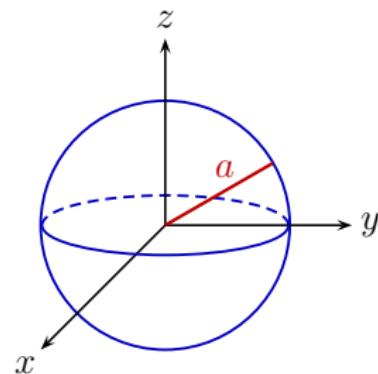
例 1 已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $f(\theta)$ ：

球内外无电荷, 求空间各处的电势 u

由于球内外无电荷，电势在球内外均满足 Laplace 方程

题意已隐含电势零点取在无穷远处，则定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (r < a, \ r > a) \\ u|_{r=a} = f(\theta), \quad u|_{r=\infty} = 0 \end{cases}$$



由于定解条件与 ϕ 无关, 本问题为轴对称问题, 故一般解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

首先求解球内的电势，为了计算方便，将一般解改写为

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l \left(\frac{r}{a} \right)^l + B_l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos \theta)$$

球内的解

由于球内没有电荷, 球心 ($r = 0$) 处电势应该有限, 所以 $B_l = 0$ ($l \in \mathbb{N}$)

球内的孵化为

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

代入球面上的边界条件 $u|_{r=a} = f(\theta)$ ，得到 $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$

或者改写为 $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) = g(x)$ ，其中 $x = \cos \theta$ ， $g(x) = f(\theta)$

球内的解

由于球内没有电荷, 球心 ($r = 0$) 处电势应该有限, 所以 $B_l = 0$ ($l \in \mathbb{N}$)

球内的解化为

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

代入球面上的边界条件 $u|_{r=a} = f(\theta)$ ，得到 $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$

或者改写为 $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) = g(x)$ ，其中 $x = \cos \theta$ ， $g(x) = f(\theta)$

根据广义 Fourier 级数展开系数的公式，推出

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 g(x) P_l(x) dx = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

第二步注意 $dx = -\sin \theta d\theta$, $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$

给定 $f(\theta)$ 的具体形式, 即可按上式计算展开系数 A_l

 将所得系数代回解的表达式，就得到球内的电势

球外的解



其次求球外的电势，一般解的形式仍为

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[C_l \left(\frac{r}{a} \right)^l + D_l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos \theta)$$



由于球外没有电荷, 电势应该处处有限, $C_l = 0 (l \in \mathbb{N}^+)$



注意到 $P_0(\cos \theta) = 1$ ，而无穷远点已取为电势零点，则 $C_0 = 0$



于是球外的解化为

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$



代入**边界条件** $u|_{r=a} = f(\theta)$ ，得到 $\sum_{l=0}^{\infty} D_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$



与 $\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) = f(\theta)$ 比较, 应有 $D_l = A_l$



将算得的系数代回解的表达式，就得到球外的电势

特例

特例 $f(\theta) = \cos^2 \theta$ ，即 $g(x) = x^2$

像这样简单的函数，就不需要使用上面计算系数的公式了。

注意到 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ，立得 $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x)$

由于 $P_0(x) = 1$ ，有 $x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$ ，与 $x^2 = g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$ 比较

推出系数 $A_0 = D_0 = \frac{1}{3}$, $A_2 = D_2 = \frac{2}{3}$, $A_l = D_l = 0$ ($l \neq 0, 2$)

特例

特例 $f(\theta) = \cos^2 \theta$ ，即 $g(x) = x^2$

像这样简单的函数，就不需要使用上面计算系数的公式了

注意到 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ，立得 $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x)$

由于 $P_0(x) = 1$ ，有 $x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$ ，与 $x^2 = g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$ 比较

推出系数 $A_0 = D_0 = \frac{1}{3}$, $A_2 = D_2 = \frac{2}{3}$, $A_l = D_l = 0$ ($l \neq 0, 2$)

将这些系数代回球内和球外的解

$$u_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta), \quad u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

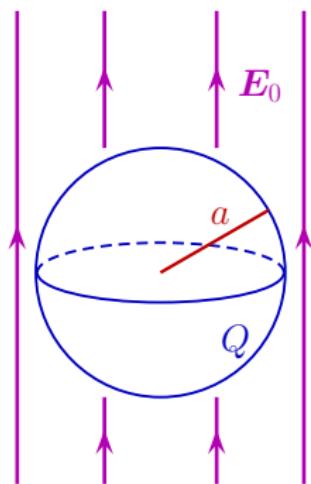
得到

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \theta), \quad u_2(r, \theta) = \frac{1}{3} \frac{a}{r} + \frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta)$$

 写下球外的结果时容易出错，应特别注意 $\frac{a}{r}$ 的幂次

例 2

例 2 在均匀电场 E_0 中放入半径为 a 、带电为 Q 的导体球，求放入导体球后的电场分布



例 2

例 2 在均匀电场 E_0 中放入半径为 a 、带电为 Q 的导体球，求放入导体球后的电场分布

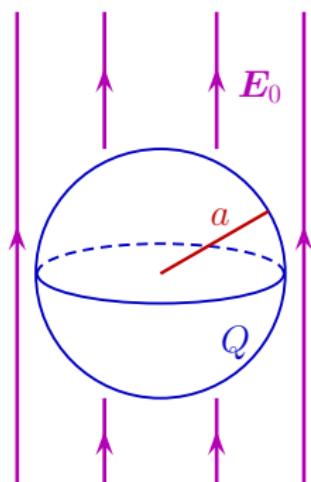
1 第一步 物理分析

 静电场中的导体达到静电平衡时，体内电场为零

C 整个导体为等势体，故球内和球面的电势为常数，记为 u_0 ，通过下面的求解可以确定它

本题关键在于求解球外的电势分布 u

求出电势，就能直接计算电场的分布 $E = -\nabla u$



例 2

例 2 在均匀电场 E_0 中放入半径为 a 、带电为 Q 的导体球，求放入导体球后的电场分布

1 第一步 物理分析

 静电场中的导体达到静电平衡时，体内电场为零

C 整个导体为等势体，故球内和球面的电势为常数，记为 u_0 ，通过下面的求解可以确定它

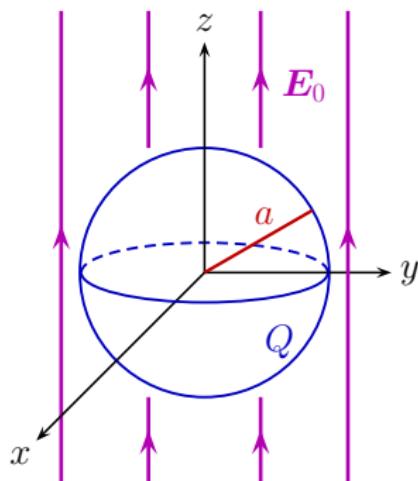
本题关键在于求解球外的电势分布 u

求出电势，就能直接计算电场的分布 $\mathbf{E} = -\nabla u$

2 第二步 建立坐标系

取球坐标系, 以球心为原点、电场 E_0 的方向为极轴方向

这样的话，电势分布显然具有轴对称性，故球外电势 $u(r) = u(r, \theta)$

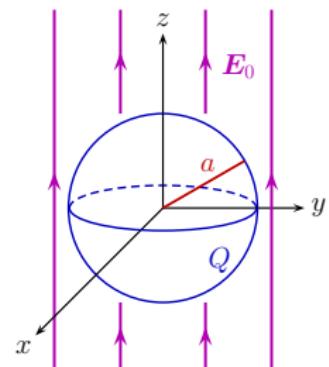


建立定解问题

3 第三步 建立定解问题

由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$

本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势 $u|_{r=a} = u_0$



建立定解问题

3 第三步 建立定解问题

由于球外没有电荷, 电势满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$

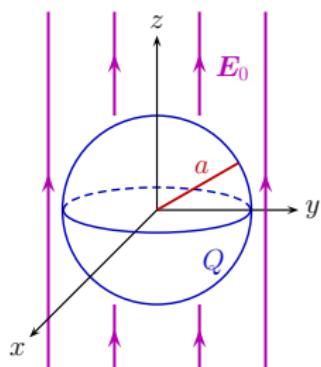
本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势 $u|_{\text{球面}} = u_0$

球内等势，电场为零，球内电荷密度 $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot E = 0$

故电荷全部分布在球面上, 球面带电 Q

电场满足 $E = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial r} e_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi$

球面面元 $dS = dS e_r$ ，Gauss 定律给出 $\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{r=a^+} E \cdot dS = \int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS$



建立定解问题

3 第三步 建立定解问题

由于球外没有电荷，电势满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$

本题有两个边界，即球面和无穷远处，球面电势 $u|_{\text{球面}} = u_0$

球内等势，电场为零，球内电荷密度 $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot E = 0$

故电荷全部分布在球面上, 球面带电 Q

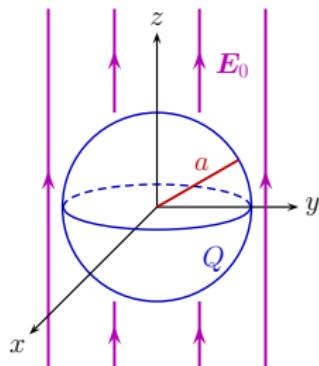
电场满足 $E = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial r} e_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi$

球面面元 $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_r$ ，Gauss 定律给出 $\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{r=a^+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS$

在无穷远 ($r \rightarrow \infty$) 处, 半径 $a \rightarrow 0$, 原均匀电场应基本不受影响, 有

$$\mathbf{E}_0 \mathbf{e}_z = \mathbf{E}_0 = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

故 $u|_{r \rightarrow \infty} = - \int E_0 dz' = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ ，这里已将积分常数取为零

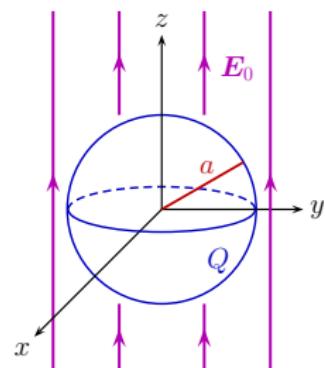


定解问题



综上, 定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (r > a) \\ u|_{r=a} = u_0, \\ \int_{r=a+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta \end{cases}$$



注 由 $u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$ 得 $u(r \rightarrow \infty, \theta = \pi/2) = 0$

即电势零点已取在 xy 平面的无穷远处, 故球面电势 u_0 是确定的

边界条件 $\int_{r=a+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 来源于 Gause 定律, 它表示球面带电 Q

这个边界条件是电动力学所特有的



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

求解定解问题

4 第四步 求解定解问题

 由于**轴对称性**，一般解为 $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$

 代入**无穷远处的边界条件** $u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$ ，利用 $P_1(x) = x$ ，得

$$u|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

 故 $A_1 = -E_0$ ， $A_l = 0$ ($l \neq 1$)，解化为 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$

求解定解问题

4 第四步 求解定解问题

由于轴对称性，一般解为 $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$

代入无穷远处的边界条件 $u|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$ ，利用 $P_1(x) = x$ ，得

$$u|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

故 $A_1 = -E_0$ ， $A_l = 0$ ($l \neq 1$)，解化为 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$

代入球面的边界条件 $u|_{r=a} = u_0$ ，利用 $P_0(x) = 1$ ，得

$$u|_{r=a} = -E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) = u_0 = u_0 P_0(\cos \theta)$$

$$\frac{-E_0 a P_1(\cos \theta)}{a} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) = u_0$$

$$\frac{B_0}{a} P_0(\cos \theta) + \frac{B_1}{a^2} P_1(\cos \theta) = u_0$$

比较系数，推出 $B_0 = u_0 a$ ， $B_1 = E_0 a^3$ ， $B_l = 0$ ($l \neq 0, 1$)

解

 将求得的系数代入一般解, 得 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r}$

 求导得 $-\frac{\partial u}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r^2}$

 需要将上式代入球面的另一边界条件 $\int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 以确定 u_0

解

将求得的系数代入一般解, 得 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r}$

求导得 $-\frac{\partial u}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{u_0 a}{r^2}$

需要将上式代入球面的另一边界条件 $\int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 以确定 u_0

$r = a^+$ 只比半径 a 大一个无穷小量, 故 $r = a^+$ 球面面元为 $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$

利用 $\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d \sin \theta = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^\pi = 0$, 推出

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0} &= \int_{r=a^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) a^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{u_0 a}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi u_0 a \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -2\pi u_0 a \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi u_0 a \end{aligned}$$

从而 $u_0 a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$, 解的最终形式为 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

结果分析

5 第五步 结果分析

在球外电势的解 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中

 第一项是原均匀电场的电势 $u|_{r \rightarrow \infty}$

 第二项是球面上感应面电荷产生的电势，它是电偶极子势

 第三项是因导体球带电 Q 而产生的电势

 当 $Q = 0$ 时，第三项消失，变成电场中放入不带电导体球以后的电势分布

 当 $a = 0$ 时，第二项消失，变成均匀场电势与点电荷电势的线性叠加

结果分析

5 第五步 结果分析

在球外电势的解 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中

第一项是原均匀电场的电势 $u|_{r \rightarrow \infty}$

第二项是球面上感应面电荷产生的电势，它是电偶极子势

第三项是因导体球带电 Q 而产生的电势

当 $Q = 0$ 时，第三项消失，变成电场中放入不带电导体球以后的电势分布

当 $a = 0$ 时，第二项消失，变成均匀场电势与点电荷电势的线性叠加

根据 $\mathbf{E} = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_\phi \mathbf{e}_\phi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -E_0 \cos \theta - \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = E_0 r \sin \theta - \frac{E_0 a^3}{r^2} \sin \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

球外电场分布 \mathbf{E} 的分量为 $E_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{r^3} \sin \theta, \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

$Q = 0$ 时球面附近的电场和面电荷密度

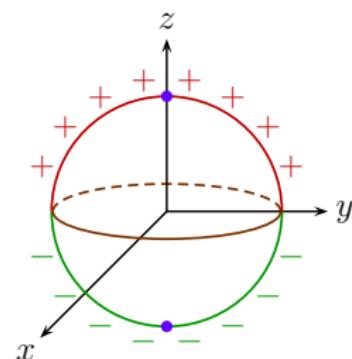
当 $Q = 0$ 时，球面附近的电场分布为

$$E_r|_{r=a} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{a^3} \cos \theta = 3E_0 \cos \theta, \quad E_\theta|_{r=a} = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{a^3} \sin \theta = 0$$

可见，电场方向与球面垂直，符合导体表面电场方向与导体表面垂直的电磁学规律

在 $\theta = \pi/2$ 处，场强为零

在 $\theta = 0, \pi$ 处，场强是原场强的 3 倍，当外场较强时，这两处容易被击穿



$Q = 0$ 时球面附近的电场和面电荷密度

当 $Q = 0$ 时，球面附近的电场分布为

$$E_r|_{r=a} = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{a^3} \cos \theta = 3E_0 \cos \theta, \quad E_\theta|_{r=a} = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{a^3} \sin \theta = 0$$

可见，电场方向与球面垂直，符合导体表面电场方向与导体表面垂直的电磁学规律

在 $\theta = \pi/2$ 处，场强为零

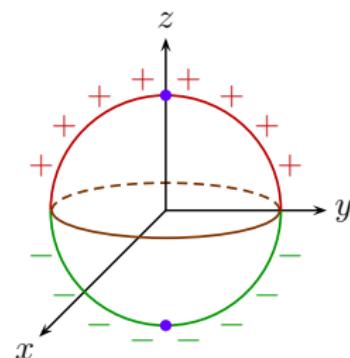
⚡ 在 $\theta = 0, \pi$ 处，场强是原场强的 3 倍，当外场较弱时，这两处容易被击穿

当 $Q = 0$ 时，球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=a} = \epsilon_0 E_r \bigg|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

显然, 球面上 $\theta \in [0, \pi/2]$ 部分带正电, $\theta \in (\pi/2, \pi]$ 部分带负电

总带电量为 $Q = \int \sigma(\theta) dS = a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$



✓ 本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

∞ 从而使得结果 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 在 $r \rightarrow \infty$ 处出现奇性

总电偶极矩

✓ 本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

∞ 从而使得结果 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 在 $r \rightarrow \infty$ 处出现奇性

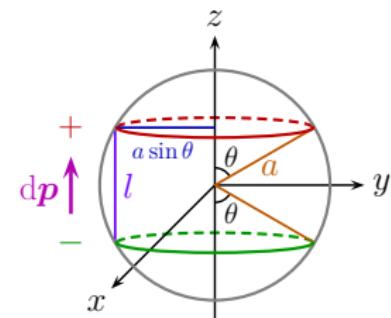
💡 在极角 $\theta \in (0, \pi/2)$ 处， $d\theta$ 角度内纬带里的元电荷为

$$dq = \int_0^{2\pi} d\phi a \sin \theta \sigma(\theta) a d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta \cdot 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta d\theta$$

💡 它与极角 $\pi - \theta$ 处的相应元电荷形成元电偶极子

💡 两个元电荷距离为 $l = 2a \cos \theta$ ，元电偶极子的偶极矩为

$$dp = l dq = 12\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$



总电偶极矩

本题中均匀外电场由无穷远处的源产生，它使得边界条件产生奇性

∞ 从而使得结果 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 在 $r \rightarrow \infty$ 处出现奇性

在极角 $\theta \in (0, \pi/2)$ 处, $d\theta$ 角度内纬带里的元电荷为

$$dq = \int_0^{2\pi} d\phi \, a \sin \theta \, \sigma(\theta) \, a \, d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta \cdot 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \, d\theta$$

它与极角 $\pi - \theta$ 处的相应元电荷形成元电偶极子

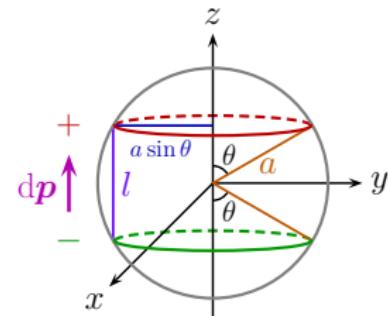
两个元电荷距离为 $l = 2a \cos \theta$ ，元电偶极子的偶极矩为

$$dp = l dq = 12\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

利用 $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d(\cos \theta) = -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$

得到沿 z 轴正向的总电偶极矩

$$p = \int dp = 12\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$$



理想电偶极子

若 $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $p = ql$ 是**理想电偶极子**

根据**电磁学**，三维空间中一个**理想电偶极子** p

产生的**电势**为 $u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

理想电偶极子

若 $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $p = ql$ 是**理想电偶极子**

根据**电磁学**，三维空间中一个**理想电偶极子** p

产生的**电势**为 $u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

代入沿 z 轴正向的**总电偶极矩** $p = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$ ，

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{4\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

与 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
中的第二项一致

说明**感应电荷的分布**对于**球外**区域来说等价于
一个理想电偶极子

理想电偶极子

若 $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $p = ql$ 是**理想电偶极子**

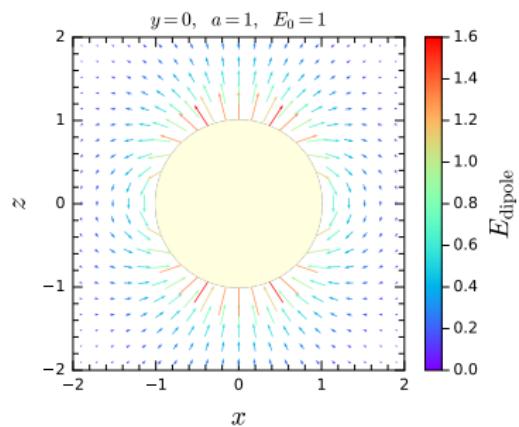
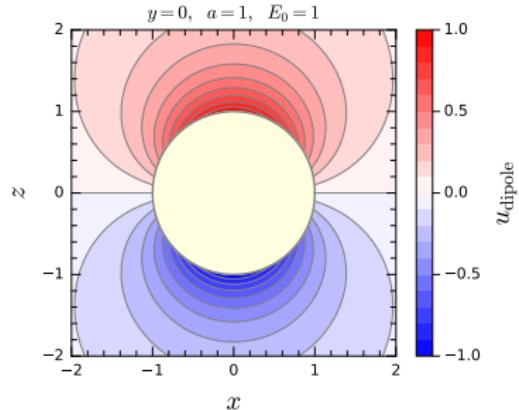
根据**电磁学**，三维空间中一个**理想电偶极子** p 产生的**电势**为 $u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

代入沿 z 轴正向的**总电偶极矩** $p = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0$ ，

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{4\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

与 $u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中的第二项一致

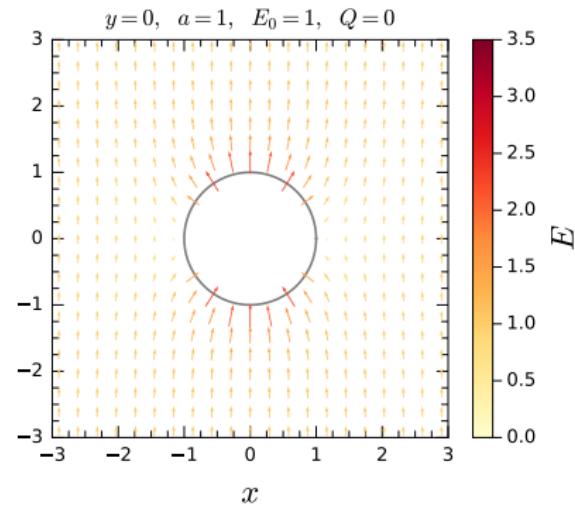
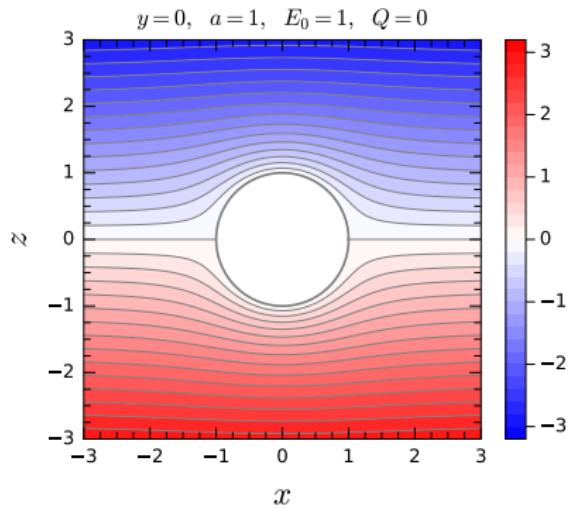
说明**感应电荷的分布**对于**球外**区域来说等价于一个**理想电偶极子**



电势分布和电场分布的图像 ($Q = 0$)

$$u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta$$

$$E_r = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta, \quad E_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{r^3} \sin \theta, \quad E_\phi = 0$$



电势分布和电场分布的图像 ($Q \neq 0$)

$$u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_r = E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{r^3} \sin \theta, \quad E_\phi = 0$$

