

# 量子场论

## 第1章 预备知识

### 1.3节至1.5节

余钊煥

中山大学物理学院

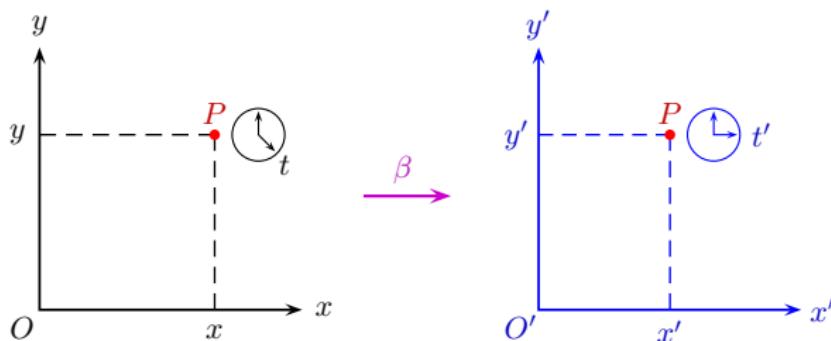
<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2023年1月5日





# Lorentz 增速变换



高铁 设惯性坐标系 \$O'\$ 沿着惯性坐标系 \$O\$ 的 \$x\$ 轴方向以速度 \$\beta\$ 匀速运动

高铁 事件 \$P\$ 在 \$O\$ 系中的坐标为 \$(t, x, y, z)\$, 在 \$O'\$ 系中的坐标为 \$(t', x', y', z')\$

火车 相应 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z$$

高铁 Lorentz 因子 \$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}\$

高铁 这种 Lorentz 变换称为沿 \$x\$ 轴方向的增速 (boost) 变换

# Lorentz 不变量

 在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \gamma^2(t - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta t)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta x t - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta x t) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 Lorentz 不变量 (invariant)

 Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同的值**

 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 Lorentz 对称性

# Lorentz 不变量

在上述 Lorentz 增速变换下，有

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \gamma^2(t - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta t)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2}(t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta xt - x^2 - \beta^2 t^2 + 2\beta xt) - y^2 - z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

**$t^2 - x^2 - y^2 - z^2$**  在 Lorentz 变换下**不变**，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)

**扳手** Lorentz 不变量在不同惯性系中具有**相同的值**

**扳手** 这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 **Lorentz 对称性**

**螺丝刀** 结合时间和空间坐标，构成四维 **Minkowski 时空**，**坐标**为

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

**回形针**  $x^\mu$  是一个**逆变** (contravariant) 的 **Lorentz 四维矢量** (vector)

**回形针** “逆变” 指它的**指标** (index)  $\mu$  写在**右上角**

**钉子** 受到  $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  的启发，定义 **Lorentz 不变的内积**

$$\mathbf{x}^2 \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$$



Hermann Minkowski  
(1864–1909)

# Minkowski 度规



引入对称的 Minkowski 度规 (metric)  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

将  $g_{\mu\nu}$  中两个指标  $\mu$  和  $\nu$  分别当作矩阵的行列编号, 空白的矩阵元是零

也就是说,  $g_{00} = +1$ ,  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ , 其它分量都是 0

# Minkowski 度规



引入对称的 Minkowski 度规 (metric)  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

将  $g_{\mu\nu}$  中两个指标  $\mu$  和  $\nu$  分别当作矩阵的行列编号, 空白的矩阵元是零

也就是说,  $g_{00} = +1$ ,  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ , 其它分量都是 0

利用度规把内积  $x^2$  化为求和式,

$$\begin{aligned} x^2 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \end{aligned}$$

第二步采用了 Einstein 求和约定: 不写出求和符号, 重复的指标即表示求和

除非特别指出, 后面默认使用这个约定

在上面的表达式中, 用同个字母表示的指标分别在上标和下标重复出现并求和, 这称为缩并 (contraction), 是 Lorentz 不变量的特点

# 协变矢量

为简化记号，定义**协变** (covariant) 的 **Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, \underline{-\mathbf{x}})$$

“协变” 指的是指标  $\mu$  写在**右下角**，内积简化为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

将  $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$  看成用**度规**缩并，使**逆变矢量**  $x^\nu$  的**指标降下来**，变成**协变矢量**  $x_\mu$

# 协变矢量

为简化记号, 定义**协变** (covariant) 的**Lorentz 四维矢量**

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, \mathbf{-x})$$

“协变” 指的是指标  $\mu$  写在**右下角**, 内积简化为

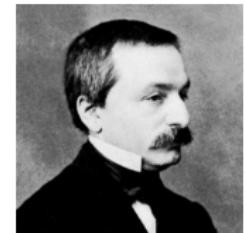
$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$$

 将  $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$  看成用**度规**缩并, 使**逆变矢量**  $x^\nu$  的**指标降下来**, 变成**协变矢量**  $x_\mu$

 从方阵的角度看, **度规**  $g_{\mu\nu}$  的**逆** (矩阵) 为  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$  对应于  $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$

 这里 **Kronecker  $\delta$  符号**定义为  $\delta^a_b = \delta_a^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$



Leopold Kronecker  
(1823–1891)

# 升降指标

 Minkowski 度规  $g_{\mu\nu}$  与它的逆  $g^{\mu\nu}$  具有相同的矩阵形式

 但更一般的度规可能与它的逆不同

 将  $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$  两边都乘以  $g^{\sigma\mu}$ ，对  $\mu$  缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

 这相当于用  $g^{\sigma\mu}$  通过缩并将 **协变矢量**  $x_\mu$  的**指标升起来**，变成**逆变矢量**  $x^\sigma$

 可见，逆变矢量与协变矢量**一一对应**，是对同一个 Lorentz 矢量的两种**等价**描述

# 升降指标

 Minkowski 度规  $g_{\mu\nu}$  与它的逆  $g^{\mu\nu}$  具有相同的矩阵形式

 但更一般的度规可能与它的逆不同

 将  $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$  两边都乘以  $g^{\sigma\mu}$ , 对  $\mu$  缩并, 得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma$$

 这相当于用  $g^{\sigma\mu}$  通过缩并将 **协变矢量**  $x_\mu$  的 **指标升起来**, 变成**逆变矢量**  $x^\sigma$

 可见, 逆变矢量与协变矢量一一对应, 是对同一个 Lorentz 矢量的两种等价描述

 利用 Kronecker 符号的定义、 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$  和度规的对称性, 推出

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}$$

 这两条式子表明, 度规也可以用来对**度规自身的指标进行升降**

# Lorentz 增速变换的矩阵形式

 将 Lorentz 增速变换  $t' = \gamma(t - \beta x)$ ,  $x' = \gamma(x - \beta t)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  表达成矩阵与列矢量的乘积形式,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

 用四维矢量记号改写为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

 将  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  视作矩阵时, 偏左的指标  $\mu$  表示行的编号, 偏右的指标  $\nu$  表示列的编号

  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  的特点是保持内积  $x^2 = x^{\mu} x_{\mu}$  不变, 使  $x^{\mu} x_{\mu}$  在不同惯性系中具有相同的值

# Lorentz 变换

进一步将  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  推广为所有保持  $x^{\mu}x_{\mu}$  不变的线性变换，称为（齐次）Lorentz 变换

由于  $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$  和  $x^2 = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$

要得到  $x'^2 = x^2$ ，Lorentz 变换  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  必须满足保度规条件  $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$

# Lorentz 变换

👑 进一步将  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  推广为所有保持  $x^{\mu}x_{\mu}$  不变的线性变换，称为（齐次）Lorentz 变换

警示教育：由于  $x'^2 = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$  和  $x^2 = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$

警示教育：要得到  $x'^2 = x^2$ ，Lorentz 变换  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  必须满足保度规条件  $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$

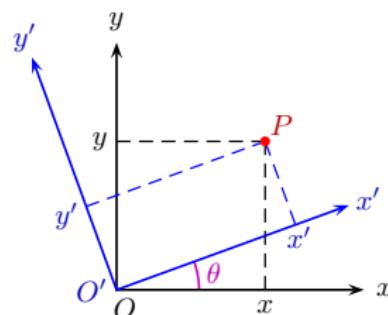
警示教育：由于  $x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2$ ，保持  $|\mathbf{x}|^2$  不变的空间旋转变换也属于 Lorentz 变换

警示教育：设惯性系  $O'$  相对于惯性系  $O$  绕  $z$  轴转动  $\theta$  角，则事件  $P$  在两系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z$$

警示教育：因而相应的 Lorentz 变换矩阵为

$$[R_z(\theta)]^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



警示教育：可以验证它满足保度规条件

# Lorentz 逆变换

$\delta^\mu{}_\nu$  的矩阵形式是 **单位矩阵 1**，是一个特殊的 Lorentz 变换

它使得  $x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$ ，即  $x^\mu$  在这个变换下不变，可见  $\delta^\mu{}_\nu$  是 **恒等变换**

对于任意 **Lorentz 变换**  $\Lambda^\alpha{}_\beta$ ，引入

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta$$

那么，由 **保度规条件** 得

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

上式表明，先作  $\Lambda$  变换，再作  $\Lambda^{-1}$  变换，相当于作 **恒等变换**

也就是说， $\Lambda^{-1}$  是  $\Lambda$  的 **逆变换**，因而也是一个 Lorentz 变换

在这些记号下，**协变矢量**  $x_\mu$  的 Lorentz 变换可以表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$$

# 保度规条件的等价形式

  $\Lambda^{-1}$  既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件**  $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} \textcolor{teal}{g}^{\mu\gamma} g_{\rho\delta} \Lambda^\delta{}_\gamma \textcolor{brown}{g}^{\nu\phi} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta \delta^\beta{}_\tau \delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi} \Lambda^\delta{}_\gamma \Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\phi \end{aligned}$$

 这给出了**保度规条件**  $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$  的**等价形式**

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}$$

# 保度规条件的等价形式

  $\Lambda^{-1}$  既然是一个 Lorentz 变换，必定满足**保度规条件**  $g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

 于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} \textcolor{teal}{g}^{\mu\gamma} g_{\rho\delta} \Lambda^\delta{}_\gamma \textcolor{brown}{g}^{\nu\phi} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta \delta^\beta{}_\tau \delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi} \Lambda^\delta{}_\gamma \Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\phi \end{aligned}$$

 这给出了**保度规条件**  $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$  的**等价形式**

$$\textcolor{violet}{g}^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}$$

 将  $\Lambda^\mu{}_\nu$  视作矩阵  $\Lambda$ ，则其**转置矩阵**  $\Lambda^T$  的分量满足  $(\Lambda^T)^\nu{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$

 保度规条件化为  $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = (\Lambda^T)_\alpha{}^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta$ ，于是**重复的相邻指标**发生**缩并**，对应于**矩阵乘法**

 用  $\mathbf{g}$  代表度规矩阵，将**保度规条件**写成**矩阵等式**

$$\Lambda^T \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}$$

# 时空体积元

对保度规条件  $\Lambda^T g \Lambda = g$  取行列式，得

$$\det(g) = \det(\Lambda^T) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g) [\det(\Lambda)]^2$$

因此  $[\det(\Lambda)]^2 = 1$ ，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1$$

Lorentz 坐标变换  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  的 Jacobi 行列式是



Carl Gustav Jacob Jacobi  
(1804–1851)

$$\mathcal{J} = \det \left[ \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right] = \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\Lambda)$$

于是 Lorentz 变换将体积元  $d^4x$  变换为

$$d^4x' = |\mathcal{J}| d^4x = |\det(\Lambda)| d^4x = d^4x$$

可见，Minkowski 时空的体积元  $d^4x$  是 Lorentz 不变的

# Lorentz 变换分类

可以用  $\det(\Lambda)$  的值给 Lorentz 变换分类

$\det(\Lambda) = +1$  的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换

$\det(\Lambda) = -1$  的变换称为**非固有** (improper) Lorentz 变换

此外, 由**保度规条件**  $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$  得

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2$$

即  $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$ , 故  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$  或  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

$\Lambda^0{}_0 \geq +1$  的变换称为**保时向** (orthochronous)

Lorentz 变换

$\Lambda^0{}_0 \leq -1$  的变换称为**反时向** (antichronous)

Lorentz 变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# 群

 在数学上，对称性由**群论**描述，对称变换的集合称为**群** (group)

 群元素具有**乘法**，两个群元素的**乘积**就是两次对称变换**相继作用**，满足以下条件

① 群对乘积具有**封闭性**，即群  $G$  中任意两个群元  $g_1$  和  $g_2$  的乘积仍属于此群

$$g_1 g_2 \in G, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

② 群乘法满足**结合律**

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

③ 群  $G$  中必有一个**恒元**  $e$ ，对应于恒等变换，它与任一群元  $g$  的乘积仍为  $g$

$$eg = ge = g, \quad \forall g \in G$$

④ 任一群元  $g$  都可以在群  $G$  中找到一个**逆元**  $g^{-1}$ ，它对应于逆变换，两者之积为恒元，

$$\forall g \in G, \quad \exists g^{-1} \in G, \quad \text{使得 } g^{-1}g = gg^{-1} = e$$

# 更多群论概念



在线性代数中，矩阵具有乘法



可逆方阵能够依照自身乘法关系构成群，即矩阵群



群乘法讲究运算次序， $g_1g_2$  不一定等于  $g_2g_1$ ，也就是说，交换律不一定成立



满足交换律的群称为 Abel 群



不满足交换律的群称为非 Abel 群



如果群  $G$  的子集  $H$  中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称  $H$  是  $G$  的子群 (subgroup)，记作  $H < G$



Niels Henrik Abel  
(1802–1829)

# $O(N)$ 群和 $SO(N)$ 群

满足  $O^T O = O O^T = \mathbf{1}$  的实方阵  $O$  称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)

所有  $N$  阶实正交矩阵  $\{O\}$  构成**正交群**  $O(N)$

对  $1 = O^T O$  取行列式，得  $1 = \det(O^T) \det(O) = [\det(O)]^2$

可见，实正交矩阵  $O$  的行列式为  $\det(O) = \pm 1$

由  $\det(O) = 1$  的  $N$  阶实正交矩阵  $O$  构成的群称为**特殊正交群**  $SO(N)$

显然， $SO(N) < O(N)$

非 Abel 群  $SO(3)$  描述三维空间中的所有旋转变换，称为**空间旋转群**

Abel 群  $SO(2)$  描述二维平面上的所有旋转变换，或者说，描述绕某条固定轴的旋转变换，如  $R_z(\theta)$ ，因而  $SO(2) < SO(3)$

# U( $N$ ) 群和 SU( $N$ ) 群

🐙 满足  $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$  的复方阵  $U$  称为**幺正矩阵** (unitary matrix)

🐬 所有  $N$  阶幺正矩阵  $\{U\}$  构成**幺正群** U( $N$ )

🦀 对  $\mathbf{1} = U^\dagger U$  取行列式，得  $1 = \det(U^\dagger) \det(U) = [\det(U)]^* \det(U) = |\det(U)|^2$

🦐 可见，幺正矩阵  $U$  的行列式满足  $|\det(U)| = 1$

🐟 由  $\det(U) = 1$  的  $N$  阶幺正矩阵  $U$  构成的群称为**特殊幺正群** SU( $N$ )

🐚 显然， $SU(N) < U(N)$

# Lorentz 群

🐷 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群

豨 保度规条件  $\Lambda^T g \Lambda = g$  是正交条件  $O^T \mathbf{1} O = \mathbf{1}$  推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为  $O(1, 3)$

🐶  $O(3)$  群对应于  $O(1, 3)$  群的**纯空间部分**，因而  $O(3) < O(1, 3)$

🦊 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作  $SO(1, 3)$

🐿 显然  $SO(1, 3) < O(1, 3)$

# Lorentz 群

🐷 所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群

豨 保度规条件  $\Lambda^T g \Lambda = g$  是正交条件  $O^T 1 O = 1$  推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为  $O(1, 3)$

🐶  $O(3)$  群对应于  $O(1, 3)$  群的**纯空间部分**，因而  $O(3) < O(1, 3)$

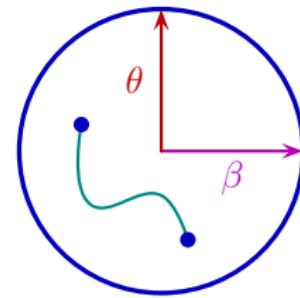
🦊 所有**固有** Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作  $SO(1, 3)$

🐿 显然  $SO(1, 3) < O(1, 3)$

🐯 Lorentz 变换可用一组连续变化的参数（如  $\beta$ 、 $\theta$  等）描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数变化区域称为**群空间**

🦌 群空间中的一个**点**就是一个**群元**

🐯 如果群空间中任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通的**，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**



# Lorentz 群的连通分支

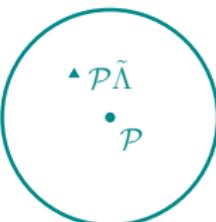


**Lorentz 群**是一个混合连续群，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支

非固有保时向分支

$$\det(\Lambda) = -1$$

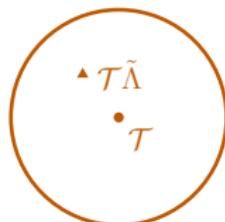
$$\Lambda^0_0 \geq +1$$



非固有反时向分支

$$\det(\Lambda) = -1$$

$$\Lambda^0_0 \leq -1$$

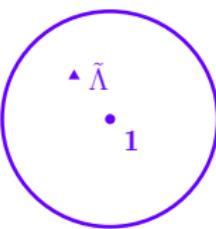


固有保时向分支

(固有保时向 Lorentz 群)

$$\det(\Lambda) = +1$$

$$\Lambda^0_0 \geq +1$$



固有反时向分支

$$\det(\Lambda) = +1$$

$$\Lambda^0_0 \leq -1$$



恒元在固有保时向分支里面，这个分支是  $SO(1, 3)$  的子群，称为**固有保时向 Lorentz 群**，记作  $SO^\uparrow(1, 3)$ ，它包含物理上联系惯性参考系的所有 Lorentz 变换



**Lorentz 不变量**通常指的是在**固有保时向** Lorentz 变换下不变的量

**子群从属关系：** $SO(2) < SO(3) < SO^\uparrow(1, 3) < SO(1, 3) < O(1, 3)$

# 宇称变换和时间反演变换

🐘 定义宇称 (parity) 变换为  $\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

🐂 它是一个非固有保时向 Lorentz 变换，亦称为空间反射 (space inversion) 变换

🐂 宇称变换的作用是让所有空间分量反向

🐂 定义时间反演 (time reversal) 变换为  $\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = (\mathcal{T}^{-1})^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$

🐂 它是一个非固有反时向 Lorentz 变换，作用是让时间分量反向

🐂 对于固有保时向 Lorentz 群中的任意元素  $\tilde{\Lambda}$ ，乘上宇称变换或（和）时间反演变换得到  $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$ 、 $\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$  和  $\mathcal{TP}\tilde{\Lambda}$ ，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支

# 宇称变换和时间反演变换

大象 定义宇称 (parity) 变换为  $\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

犀牛 它是一个非固有保时向 Lorentz 变换，亦称为空间反射 (space inversion) 变换

犀牛 宇称变换的作用是让所有空间分量反向

犀牛 定义时间反演 (time reversal) 变换为  $\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = (\mathcal{T}^{-1})^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$

犀牛 它是一个非固有反时向 Lorentz 变换，作用是让时间分量反向

牛 对于固有保时向 Lorentz 群中的任意元素  $\tilde{\Lambda}$ ，乘上宇称变换或(和)时间反演变换得到  $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$ 、 $\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$  和  $\mathcal{TP}\tilde{\Lambda}$ ，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支

山羊 类似地，O(3) 群也是混合连续群，具有两个连通分支

绵羊 包含恒元的连通分支是 SO(3) 群，对应于  $\det(O) = 1$ ；另一个连通分支对应于  $\det(O) = -1$ ，里面任意元素可由  $\text{diag}(-1, -1, -1)$  乘以 SO(3) 群元素得到

## 1.4 节 Lorentz 矢量

如果一些  $m$  阶方阵的乘法关系与群  $G$  中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示  $G$

这些矩阵构成群  $G$  的一个  $m$  维线性表示 (linear representation)  $D(G)$

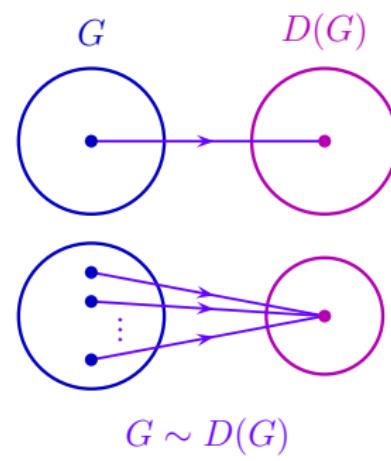
$D(G)$  中的一个矩阵至少应该对应于  $G$  中的一个群元，可以对应于  $G$  中的多个群元，数学上称  $G$  与  $D(G)$  同态 (homomorphism)，记作  $G \sim D(G)$

具体来说，对于群  $G$  中任意群元  $g_1$  和  $g_2$ ，表示  $D(G)$  中相应表示矩阵  $D(g_1)$  和  $D(g_2)$  满足同态关系

$$D(g_2g_1) = D(g_2)D(g_1)$$

利用群的线性表示，可以将对称变换视作矩阵，将变换作用的态视作列矢量

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & D(g) & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

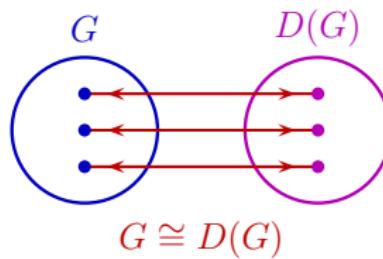


# 群的特殊表示

取群中所有元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的恒等表示，也称为平庸表示

如果群  $G$  中的每个群元一一对应于表示  $D(G)$  中每个矩阵，则  $G$  与  $D(G)$  同构 (isomorphism)，记作  $G \cong D(G)$

此时称  $D(G)$  是  $G$  的忠实表示 (faithful representation)



如果  $D(G)$  中所有矩阵都是幺正的，则称  $D(G)$  是幺正表示

矩阵群本身就是自己的一个表示，称为自身表示，也称为基础表示

# 等价表示和可约表示

 如果群  $G$  中任意群元  $g$  在维度相同的两个线性表示  $D_1(G)$  和  $D_2(G)$  中的表示矩阵  $D_1(g)$  和  $D_2(g)$  存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

# 等价表示和可约表示

 如果群  $G$  中任意群元  $g$  在维度相同的两个线性表示  $D_1(G)$  和  $D_2(G)$  中的表示矩阵  $D_1(g)$  和  $D_2(g)$  存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G,$$

则称这两个表示等价；等价表示是在表示空间中取不同基底得到的，没有本质差别

 如果每个表示矩阵  $D(g)$  都可以通过同一个相似变换化为相同形式的阶梯矩阵，

$$S^{-1} D(g) S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G,$$

其中  $D_1(g)$  和  $D_2(g)$  是方阵， $M(g)$  可以是零矩阵，则称  $D(G)$  是可约表示，否则称  $D(G)$  为不可约表示 (irreducible representation)

 可以证明，集合  $\{D_1(g)\}$  和  $\{D_2(g)\}$  分别构成群  $G$  的线性表示

 可约表示能够通过不可约表示构造出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的不等价不可约表示

# Lorentz 矢量

 上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ ，可见  $\{\Lambda^{\mu}_{\nu}\}$  自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 4 维线性表示，即基础表示

 它是一个不可约忠实表示，称为矢量表示

 因此，Lorentz 矢量  $x^{\nu}$  可以看作 Lorentz 变换  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  (矩阵) 所作用的态 (列矢量)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{👉} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

# Lorentz 矢量

上一节已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ ，可见  $\{\Lambda^{\mu}_{\nu}\}$  自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 4 维线性表示，即基础表示

它是一个不可约忠实表示，称为矢量表示

因此，Lorentz 矢量  $x^{\nu}$  可以看作 Lorentz 变换  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  (矩阵) 所作用的态 (列矢量)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{👉} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

一般地，Lorentz 矢量  $A^{\mu}$  在定义上要求它在固有保时向 Lorentz 变换下满足

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

类似于  $x'_{\mu} = x_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$ ，逆变矢量  $A^{\mu}$  对应的协变矢量  $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$  的固有保时向 Lorentz 变换为

$$A'_{\mu} = A_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$$

# Lorentz 矢量的内积

 任意两个 Lorentz 矢量  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$  和  $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$  的**内积**定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

 由  $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$  可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

 像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

# Lorentz 矢量的内积

任意两个 Lorentz 矢量  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$  和  $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$  的**内积**定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

由  $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$  可知，它是**固有保时向** Lorentz 变换的**不变量**，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B$$

像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)

由于度规的对角元有正有负，Lorentz 矢量  $A^\mu$  的自我内积  $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$  的符号不是确定的，可以分为三类

- ① 若  $A^2 > 0$ ，即  $|A^0| > |\mathbf{A}|$ ，则称  $A^\mu$  为**类时** (timelike) 矢量
- ② 若  $A^2 < 0$ ，即  $|A^0| < |\mathbf{A}|$ ，则称  $A^\mu$  为**类空** (spacelike) 矢量
- ③ 若  $A^2 = 0$ ，即  $|A^0| = |\mathbf{A}|$ ，则称  $A^\mu$  为**类光** (lightlike) 矢量

由于  $A^2$  是 Lorentz 不变量，**不能**通过 Lorentz 变换改变  $A^\mu$  的类型

# 极矢量和轴矢量

以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量

第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量

极矢量空间分量的宇称变换为  $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ；时空坐标  $x^{\mu}$  就是一个极矢量

另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

轴矢量空间分量的宇称变换为  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

# 极矢量和轴矢量

以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可以通过宇称变换性质将它们分为两种矢量

第一种矢量称为极矢量 (polar vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

经常将极矢量简称为矢量，即狭义的矢量

极矢量空间分量的宇称变换为  $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ；时空坐标  $x^{\mu}$  就是一个极矢量

另一种矢量称为赝矢量，或者轴矢量 (axial vector)，宇称变换为

$$A'^{\mu} = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu},$$

轴矢量空间分量的宇称变换为  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

在经典力学中，空间坐标  $\mathbf{x}$  和动量  $\mathbf{p}$  都是极矢量，而角动量  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  是轴矢量

在空间反射变换下， $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ ， $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ ， $\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{p}' = (-\mathbf{x}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$ ，与以上定义一致

# 四维动量

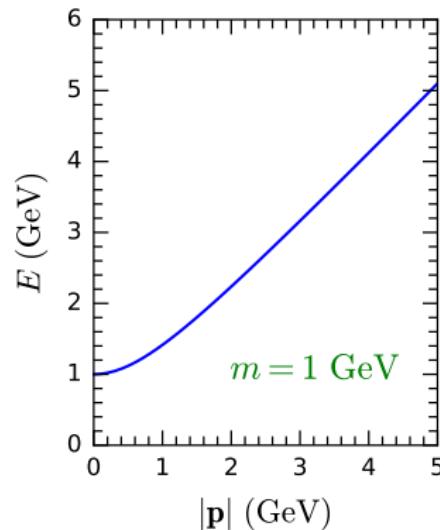
 狹义相对论中自由质点的能量  $E$ 、动量  $\mathbf{p}$  和  
(静止) 质量  $m$  具有色散关系 (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

 可以用  $E$  和  $\mathbf{p}$  组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

称为四维动量，它是一个极矢量



# 四维动量

狹义相对论中自由质点的能量  $E$ 、动量  $\mathbf{p}$  和 (静止) 质量  $m$  具有色散关系 (dispersion relation)

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

可以用  $E$  和  $\mathbf{p}$  组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

称为四维动量，它是一个极矢量

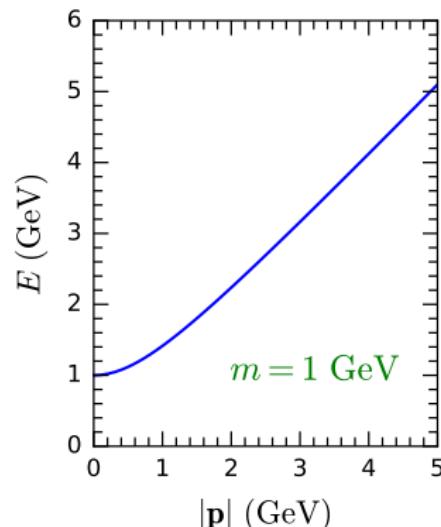
四维动量的自我内积为

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

这是合理的，因为质量  $m$  在狭义相对论中是一个 Lorentz 不变量

$p^\mu$  在  $m > 0$  时是类时矢量，在  $m = 0$  时是类光矢量

$p^2 = m^2$  称为质壳 (mass shell) 条件，对应于四维动量空间中由质量  $m$  决定的三维双曲面 (质壳)



# 时空导数



将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

 那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$



上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于**时空导数指标位置**的写法是合理的

# 时空导数



将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于时空导数指标位置的写法是合理的

对时空坐标作 Lorentz 变换  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  时，有  $x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$

两边与  $\Lambda^\mu{}_\nu$  缩并得  $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho \delta^\rho{}_\nu$ ，即  $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$

故  $\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$

# 时空导数



将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

那么

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\rho} \partial_\rho x^\nu = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = g^{\mu\rho} \delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$$

上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于时空导数指标位置的写法是合理的

对时空坐标作 Lorentz 变换  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  时，有  $x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$

两边与  $\Lambda^\mu{}_\nu$  缩并得  $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = x_\rho \delta^\rho{}_\nu$ ，即  $x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$

故  $\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$

这是时空导数  $\partial^\mu$  的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同

因而可以将  $\partial^\mu$  看作一个 Lorentz 矢量

相应地， $\partial_\mu$  的 Lorentz 变换是  $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$

# d'Alembert 算符



定义 d'Alembert 算符

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$



由保度规条件得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$



可见,  $\partial^2$  算符是 Lorentz 不变的



Jean le Rond d'Alembert  
(1717–1783)

# d'Alembert 算符

 定义 d'Alembert 算符

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$$

 由保度规条件得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2$$

 可见,  $\partial^2$  算符是 Lorentz 不变的



Jean le Rond d'Alembert  
(1717–1783)

 用它把 Klein-Gordon 方程  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0$  改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2) \Psi(x) = 0$$

 其中  $x$  表示四维时空坐标

  $\partial^2 + m^2$  是 Lorentz 不变的, 因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有相同的形状, 即具有 Lorentz 协变性 (covariance)

## 1.5 节 Lorentz 张量

 Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

 一个  $p+q$  阶的  $(p, q)$  型 Lorentz 张量  $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$  具有  $p$  个逆变指标和  $q$  个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

 这里的逆变指标和协变指标统称为 Lorentz 指标

 完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 Lorentz 协变性，在不同惯性系中具有相同的形式，从而满足狭义相对性原理

## 1.5 节 Lorentz 张量

Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广

一个  $p+q$  阶的  $(p, q)$  型 Lorentz 张量  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  具有  $p$  个逆变指标和  $q$  个协变指标，并满足如下固有保时向 Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q}$$

这里的逆变指标和协变指标统称为 Lorentz 指标

完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 Lorentz 协变性，在不同惯性系中具有相同的形式，从而满足狭义相对性原理

Lorentz 标量是 0 阶 Lorentz 张量，不具有 Lorentz 指标

Lorentz 矢量是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标

Minkowski 度规  $g_{\mu\nu}$  是一个 2 阶的  $(0, 2)$  型 Lorentz 张量，不过，它是常数，在任何惯性系中不变，Lorentz 变换规则就是保度规条件  $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu_\beta$

$\delta^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\rho \delta^\rho_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu$  表明 Kronecker 符号  $\delta^\mu_\nu$  是  $(1, 1)$  型常数 Lorentz 张量

注意，虽然  $\Lambda^\mu_\nu$  具有两个指标，它却不是 Lorentz 张量

# 指标的升降和缩并

 用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型

 不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的

 比如， $T^{\mu\nu}{}_\rho = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$ ，用  $g_{\rho\sigma}$  将  $(3, 0)$  型张量  $T^{\mu\nu\sigma}$  降为  $(2, 1)$  型张量  $T^{\mu\nu}{}_\rho$

 相应地， $T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_\sigma$ ，用  $g^{\rho\sigma}$  将  $(2, 1)$  型张量  $T^{\mu\nu}{}_\sigma$  升为  $(3, 0)$  型张量  $T^{\mu\nu\rho}$

# 指标的升降和缩并



用度规可以升降任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型



不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的



比如， $T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\sigma}$ ，用  $g_{\rho\sigma}$  将  $(3, 0)$  型张量  $T^{\mu\nu\sigma}$  降为  $(2, 1)$  型张量  $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$



相应地， $T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$ ，用  $g^{\rho\sigma}$  将  $(2, 1)$  型张量  $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$  升为  $(3, 0)$  型张量  $T^{\mu\nu\rho}$



对  $(p, q)$  型 Lorentz 张量的一个逆变指标和一个协变指标进行缩并，会得到一个  $(p-1, q-1)$  型 Lorentz 张量，例如，

$$T'^{\mu\nu}{}_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} (\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \delta^{\gamma}{}_{\alpha} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{\alpha}$$



可见， $T^{\mu\nu}{}_{\mu}$  是一个 Lorentz 矢量



可以通过缩并若干个 Lorentz 张量的所有指标来构造 Lorentz 不变量



这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的  $\Lambda$  因子和  $\Lambda^{-1}$  因子总是相互抵消；比如，以下表达式都是 Lorentz 标量：

$$T^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu}, \quad T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\rho} T^{\sigma\rho}{}_{\nu}$$

# 狭义张量和赝张量

 类似于 Lorentz 矢量，按**宇称变换**性质将 Lorentz 张量分成两种

 第一种张量是**狭义的张量**，宇称变换为

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \mathcal{P}^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q},$$

 另一种张量称为**赝张量** (pseudotensor)，宇称变换为

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \mathcal{P}^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q},$$

 因此，在宇称变换下，**狭义的标量**  $\phi$  满足  $\phi' = \phi$

 而**赝标量** (pseudoscalar)  $\varphi$  满足  $\varphi' = -\varphi$

# 四维 Levi-Civita 符号

🏓 引入四维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换 (如 } \varepsilon^{1032}) \\ -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换 (如 } \varepsilon^{1023}) \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

🎳 这里的置换 (permutation) 指的是将指标重新排列

🎳 调换两个指标的位置称为对换

🎳 奇置换通过奇数次对换得到，偶置换通过偶数次对换得到

🎳 这样定义出来的  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  是全反对称的，即关于任意两个指标反对称，如

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$$



Tullio Levi-Civita  
(1873–1941)

# 协变的四维 Levi-Civita 符号

  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  的协变形式为  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  也是全反对称的，如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}(-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

 根据定义， $\varepsilon_{0123} = g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123} = -\varepsilon^{0123}$ ，有

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

 而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

 从而

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4! \varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4!$$

# Levi-Civita 符号与行列式

利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式  $\det(\Lambda)$  按照**行列式定义**写成

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta \Lambda^2{}_\gamma \Lambda^3{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$



	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	(0, 1, 2, 3)	+
♥	(1, 2, 3, 0)	-
♣	(2, 3, 0, 1)	+
♦	(3, 0, 1, 2)	-

# Levi-Civita 符号与行列式

利用 Levi-Civita 符号把 Lorentz 变换矩阵的行列式  $\det(\Lambda)$  按照行列式定义写成

$$\begin{aligned}\det(\Lambda) &= \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

于是

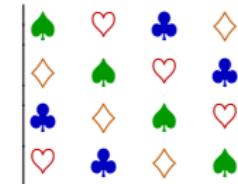
$$\begin{aligned}\varepsilon^{0123} &= 1 = [\det(\Lambda)]^2 \\ &= \det(\Lambda) \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

利用  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  的全反对称性质得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1023} &= -\varepsilon^{0123} = -\det(\Lambda) \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\det(\Lambda) \Lambda^1_{\beta} \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda) \Lambda^1_{\beta} \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\end{aligned}$$

依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda) \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$



	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$	$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
♠	(0, 1, 2, 3)	+
♥	(1, 2, 3, 0)	-
♣	(2, 3, 0, 1)	+
♦	(3, 0, 1, 2)	-

# 四维和三维 Levi-Civita 符号

对于**固有保时向 Lorentz 变换**,  $\det(\Lambda) = +1$ , 则  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

对于**宇称变换**,  $\det(\mathcal{P}) = -1$ , 则  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

可见,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  是一个**4 阶 Lorentz 质张量**

不过,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  是常数, 在任何惯性系中**不变**

# 四维和三维 Levi-Civita 符号

对于**固有保时向 Lorentz 变换**,  $\det(\Lambda) = +1$ , 则  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

对于**宇称变换**,  $\det(\mathcal{P}) = -1$ , 则  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathcal{P}^\rho{}_\gamma \mathcal{P}^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

可见,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  是一个**4 阶 Lorentz 质张量**

不过,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  是常数, 在任何惯性系中**不变**

**三维 Levi-Civita 符号**定义为

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ -1, & (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

满足

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{0ijk}, \quad \varepsilon^{123} = +1$$

通常用  $i, j, k$  等**拉丁字母**代表**三维空间指标**, 取值范围是  $1, 2, 3$

而用  $\mu, \nu, \rho$  等**希腊字母**代表**四维时空指标**, 取值范围是  $0, 1, 2, 3$

# 三维 Levi-Civita 符号求和关系

  $\varepsilon^{ijk}$  关于三个空间指标是全反对称的

 有  $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i23} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} = 1$  和  $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i32} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{132} = -1$

▶ 依此类推，归纳出求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$$

 根据  $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij3} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{213} = 2$  和  $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij1} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{121} + \varepsilon^{213}\varepsilon^{211} = 0$

 归纳出另一条求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$$

 利用  $\varepsilon^{ijk}$ ，可以将**三维矢量外积**  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  表达为

$$a^i = \varepsilon^{ijk} b^j c^k$$

# 四维电流密度和四维矢势

接下来讨论**真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式**

**电荷密度  $\rho$  和电流密度  $\mathbf{J}$  组成一个 Lorentz 矢量  $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ ，称为四维电流密度**

**将电流连续性方程  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  写成 Lorentz 协变形式**

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

**用电势  $\Phi$  和矢势  $\mathbf{A}$  将电场强度  $\mathbf{E}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$  表达为**

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$$



James Clark Maxwell  
(1831–1879)

**Φ 和  $\mathbf{A}$  组成 Lorentz 矢量  $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ ，称为四维矢势，**则上式的分量形式为

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

# 场强张量

 引入**电磁场的场强张量** (field strength tensor)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$$

 它是一个 2 阶**反对称** Lorentz 张量

 由于两个**时空导数**的次序**可以交换**, 从上述定义推出

$$\begin{aligned}\partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \partial^\mu \partial^\rho A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu A^\rho + \partial^\nu \partial^\mu A^\rho - \partial^\nu \partial^\rho A^\mu \\ &= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu}\end{aligned}$$

 即 **Bianchi 恒等式**

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$



Luigi Bianchi  
(1856–1928)

# 场强张量的分量

  $F^{\mu\nu}$  的  $0i$  分量为  $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i$

 可见,  $F^{0i}$  对应于**电场强度**

 由求和式  $\varepsilon^{jki} \varepsilon^{imn} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{imn} = \delta^{jm} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{km}$  得到

$$\varepsilon^{ijk} B^k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m A^n = (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i$$

 从而  $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk} B^k$

 故  $F^{\mu\nu}$  的  $ij$  分量对应于**磁感应强度**

 把  $F^{\mu\nu}$  写成**矩阵形式**是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Gauss 定律和 Ampère 环路定律

♠ Gauss 定律对应的方程  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$  等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

♥ Ampère 环路定律对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

相当于

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} \\ &= \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \end{aligned}$$

🂡 归纳起来，有

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

钲 这个方程完全是用 Lorentz 张量写的，具有 Lorentz 协变性

🎻 因而它在不同惯性系中具有相同形式，满足狭义相对性原理



Carl Friedrich Gauss  
(1777–1855)



André-Marie Ampère  
(1775–1836)

# Gauss 磁定律

 由  $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{ijl} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$  得  $\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$ ，即

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$$

 Gauss 磁定律对应的方程  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki}\partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij}\partial_k F^{ij}) \\ &= -\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}(\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij}) \end{aligned}$$

 第三步通过更换指标字母写出三个相等的项

 毕竟，对于参与缩并或求和的指标，更换指标字母不会影响结果

 上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0$$

 这是 Bianchi 恒等式取纯空间分量的形式

# Faraday 电磁感应定律

◆ Faraday 电磁感应定律对应的 Maxwell-Faraday 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

写成分量的形式，得

$$-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn} \partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn} \partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn} \partial_m F^{n0}$$

从  $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k$  推出

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{ij} &= -\varepsilon^{ijk} \partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial_m F^{n0} \\ &= (\delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}) \partial_m F^{n0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0}\end{aligned}$$

即

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0$$

这也是 Bianchi 恒等式取特定分量的形式



Michael Faraday  
(1791–1867)

# 对偶场强张量

利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (duel field strength tensor)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}$$

它也是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**,  $\tilde{F}^{0i}$  对应于**磁感应强度**:

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{j\mu} g_{k\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{jm} g_{kn} F^{mn} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{jkl} B^l = -\frac{1}{2} 2\delta^{il} B^l = -B^i\end{aligned}$$

第五步利用了  $g_{jm} F^{mn} = -\delta^{jm} F^{mn} = -F^{jn}$ , 倒数第二步用到**求和关系**

另一方面,  $\tilde{F}^{ij}$  对应于**电场强度**:

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij0k} F_{0k} + \varepsilon^{ijk0} F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk} F_{0k} = \varepsilon^{ijk} g_{0\mu} g_{k\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \varepsilon^{ijk} g_{00} g_{kl} F^{0l} = -\varepsilon^{ijk} F^{0k} = \varepsilon^{ijk} E^k\end{aligned}$$

# 对偶场强张量与 Bianchi 恒等式



对偶场强张量  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的矩阵形式是  $\tilde{F}^{\mu\nu} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

由  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  的定义有

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{6} (\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu} \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho} \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{6} \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

因此 Bianchi 恒等式  $\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$  等价于

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

从这些讨论可以看到，用 Lorentz 张量语言表达 Maxwell 方程组是十分简单的，而且方程的 Lorentz 协变性非常明确