

# 数学物理方法

## 第九章 正交曲线坐标系中的分离变量

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 11 月 23 日

# 第九章 正交曲线坐标系中的分离变量

 本章开始把分离变量法推广到比较实际的**三维问题**

 前已指出，分离变量时，应该根据**边界的形状**采用**适当的坐标系**

 本章的目的就是研究如何在**球坐标系**和**柱坐标系**中对各类方程分离变量

 前面提到的**波动方程**、**输运方程**和**稳定场方程**都包含 Laplace 算符

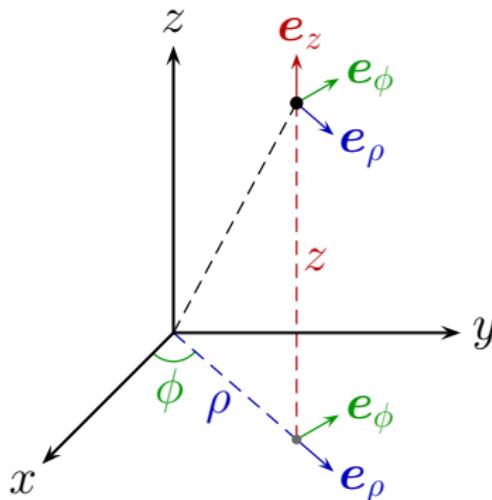
 因此需要研究 Laplace 算符在**曲线坐标系**，尤其是**球坐标系**和**柱坐标系**中的形式

# §1 正交曲线坐标系中的微分算符

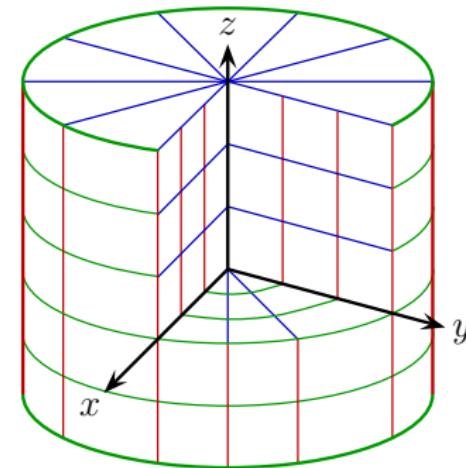
## §1.1 正交曲线坐标系

🌐 直角坐标系  $(x, y, z)$ 、柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$ 、球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  都是正交曲线坐标系

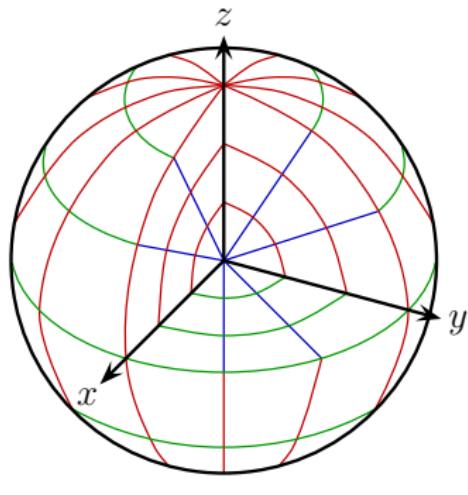
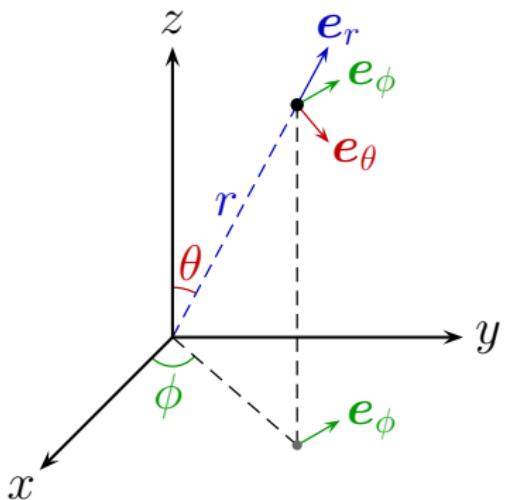
⚠ 它们的三族坐标线处处相互正交



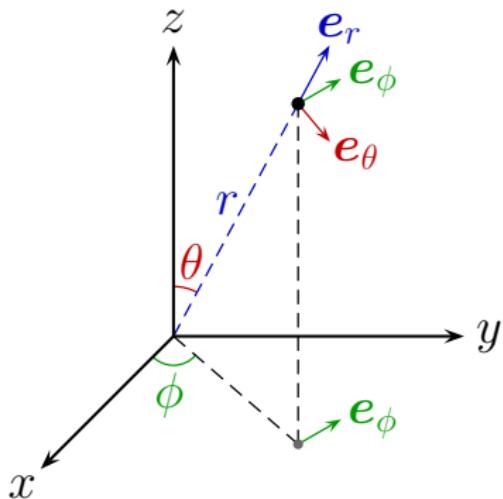
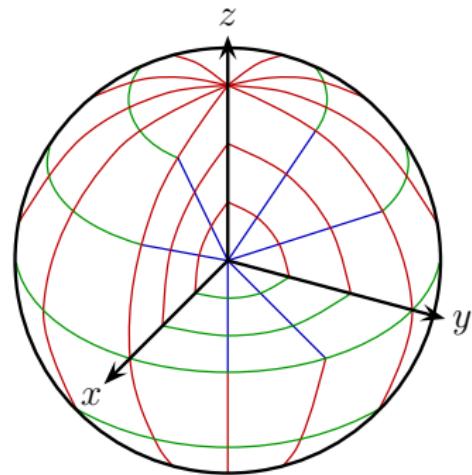
柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$



柱坐标系的坐标线



# 一般曲线坐标系

球坐标系  $(r, \theta, \phi)$ 

球坐标系的坐标线

现在，考虑一般曲线坐标系，记其坐标为  $(q_1, q_2, q_3)$ ，它们与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的变换关系为  $x = x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$ ,  $z = z(q_1, q_2, q_3)$

反之， $(q_1, q_2, q_3)$  也可以表达为  $(x, y, z)$  的函数

# 坐标系的奇点

一般来说，要求 **Jacobi 行列式**

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

在  $J = 0$  处，给定  $(x, y, z)$  可能无法唯一确定  $(q_1, q_2, q_3)$

$J = 0$  对应的点就是**坐标系的奇点**



Carl Gustav Jacob Jacobi  
(1804–1851)

$$\mathrm{d}^3x = |J| \mathrm{d}^3q$$

# 坐标系的奇点

一般说来，要求 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial q_1 & \partial x / \partial q_2 & \partial x / \partial q_3 \\ \partial y / \partial q_1 & \partial y / \partial q_2 & \partial y / \partial q_3 \\ \partial z / \partial q_1 & \partial z / \partial q_2 & \partial z / \partial q_3 \end{vmatrix} \neq 0$$



Carl Gustav Jacob Jacobi  
(1804–1851)

在  $J = 0$  处，给定  $(x, y, z)$  可能无法唯一确定  $(q_1, q_2, q_3)$

$J = 0$  对应的点就是坐标系的奇点

对于球坐标系， $J = r^2 \sin \theta$  在  $r = 0$  或  $\theta = 0, \pi$  处为零

此时给定  $(x, y, z)$ ，无法唯一确定  $(r, \theta, \phi)$

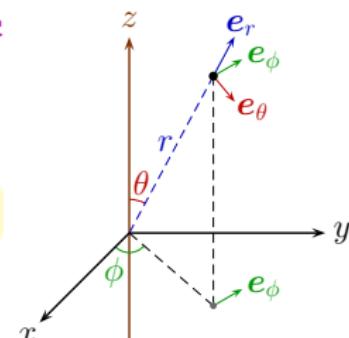
在  $\theta = 0, \pi$  处， $\phi$  没有定义

在  $r = 0$  处， $\theta$  和  $\phi$  没有定义

所以整个  $z$  轴都是球坐标系的奇点

不过，这些点构成的集合测度（可以粗略地理解为体积）为零，这一般是允许的

$$d^3x = |J| d^3q$$



# 相邻两点之间的距离



将  $x = \textcolor{teal}{x}(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = \textcolor{teal}{y}(q_1, q_2, q_3)$ ,  $z = \textcolor{teal}{z}(q_1, q_2, q_3)$  写成简洁的矢量形式

$$\mathbf{r} = \textcolor{teal}{x} \mathbf{e}_x + \textcolor{teal}{y} \mathbf{e}_y + \textcolor{teal}{z} \mathbf{e}_z = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$$



这样可以减少书写上的麻烦，使有关结果显得更清晰



如果一时看不清楚式子的含义，可以写出**详细的分量形式**加以对照

? 现在的问题是，什么样的**曲线坐标系**才算是**正交**的？

# 相邻两点之间的距离

将  $x = x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$ ,  $z = z(q_1, q_2, q_3)$  写成简洁的矢量形式

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$$

这样可以减少书写上的麻烦，使有关结果显得更清晰

如果一时看不清楚式子的含义，可以写出**详细的分量形式**加以对照

现在的问题是，什么样的**曲线坐标系**才算是**正交**的？

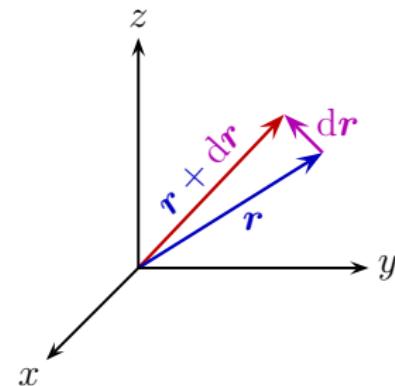
在**直角坐标系**中，相邻两点  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  之间的距离记作  $ds = |d\mathbf{r}|$ ，则

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

在**曲线坐标系**中，代入  $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i$ ，得

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j$$

如果写出**详细的分量形式**，则上式包含了**18**项



# 正交曲线坐标系的定义

 现在给出正交曲线坐标系的**定义**：如果

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j,$$

则**曲线坐标系**  $(q_1, q_2, q_3)$  称为**正交**的，有

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 (dq_i)^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i dq_i)^2 \end{aligned}$$

 其中  $h_i \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|$  称为**度规系数**

 这样的  $(ds)^2$  与**直角坐标系**中的形式  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$  相似，只是  $dq_i$  前面多了**度规系数**  $h_i$

 所以，正交的关键就是  $(ds)^2$  表达式中**不包含像**  $dq_1 dq_2$  这样的**交叉项**

# 正交曲线坐标系的定义

现在给出正交曲线坐标系的**定义**：如果

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j,$$

则**曲线坐标系**  $(q_1, q_2, q_3)$  称为**正交**的，有

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 (dq_i)^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i dq_i)^2 \end{aligned}$$

其中  $h_i \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|$  称为**度规系数**

这样的  $(ds)^2$  与**直角坐标系**中的形式  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$  相似，只是  $dq_i$  前面多了**度规系数**  $h_i$

所以，正交的关键就是  $(ds)^2$  表达式中**不包含像**  $dq_1 dq_2$  这样的**交叉项**

定义**度规**  $g_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ ，则

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dq_i dq_j$$

对于**正交曲线坐标系**，有

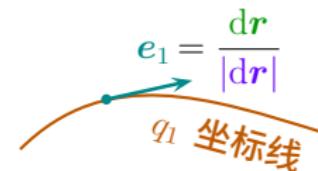
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

# 正交曲线坐标系中的单位矢量

📌 接下来推导正交曲线坐标系  $(q_1, q_2, q_3)$  的基底，即单位矢量  $(e_1, e_2, e_3)$

📎  $e_1$  的方向就是  $q_1$  坐标线的切线方向，沿着  $q_1$  坐标线，有  $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$

🖇 相应地， $ds = |\mathbf{dr}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| dq_1 = h_1 dq_1$ ，故  $e_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$



# 正交曲线坐标系中的单位矢量

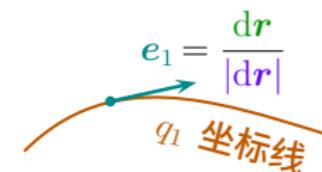
📌 接下来推导正交曲线坐标系  $(q_1, q_2, q_3)$  的基底，即单位矢量  $(e_1, e_2, e_3)$

📎  $e_1$  的方向就是  $q_1$  坐标线的切线方向，沿着  $q_1$  坐标线，有  $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$

📎 相应地， $ds = |\mathbf{dr}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| dq_1 = h_1 dq_1$ ，故  $e_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$

📎 对  $e_2$  和  $e_3$  有类似的结果，总结起来，就是

$$e_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$



📘 当  $i \neq j$  时，有  $e_i \cdot e_j = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0$ ，可见三族坐标线确实是处处正交的

📘 此外， $e_i \cdot e_i = \frac{1}{h_i^2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 = \frac{h_i^2}{h_i^2} = 1$ ，归纳得到正交归一关系

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

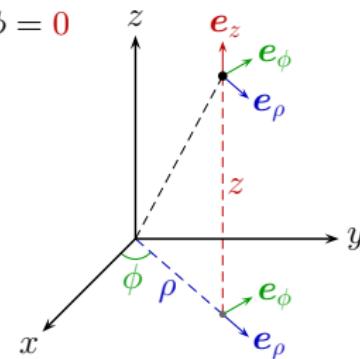
# 柱坐标系

例 1 在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中,  $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , 有

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \mathbf{e}_x + \rho \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z$$

从而验证正交性:  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \cos \phi + \rho \sin \phi \cos \phi = 0$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0$$



# 柱坐标系

例 1 在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中,  $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , 有

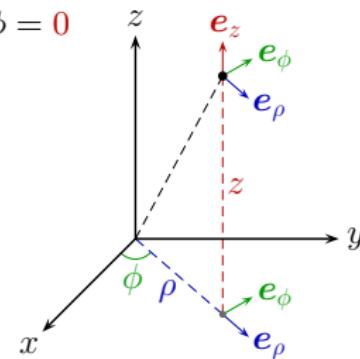
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \mathbf{e}_x + \rho \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z$$

从而验证正交性:  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \cos \phi + \rho \sin \phi \cos \phi = 0$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0$$

此外,  $h_\rho^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$

$$h_\phi^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|^2 = (-\rho \sin \phi)^2 + (\rho \cos \phi)^2 = \rho^2$$



故度规系数  $h_\rho = 1$ ,  $h_\phi = \rho$ ,  $h_z = |\partial \mathbf{r} / \partial z| = 1$ , 单位矢量为

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$h_\phi = \rho$  表明, 沿  $\phi$  坐标线的微分弧长不是  $d\phi$ , 而是  $h_\phi d\phi = \rho d\phi$

# 球坐标系

例 2 在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  中,  $\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r(\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y)$$

**正**  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r[\sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \sin \theta \cos \theta] = 0$

**交**  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin^2 \theta [-\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi] = 0$

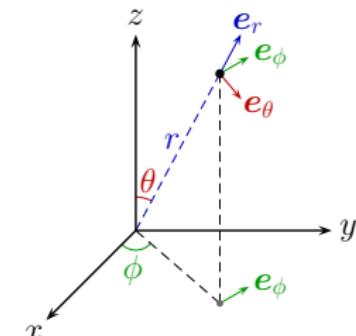
**性**  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin \theta \cos \theta (-\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi) = 0$

$$h_r^2 = |\partial \mathbf{r} / \partial r|^2 = \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta = 1$$

$$h_\theta^2 = |\partial \mathbf{r} / \partial \theta|^2 = r^2 [\cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + (-\sin \theta)^2] = r^2$$

$$h_\phi^2 = |\partial \mathbf{r} / \partial \phi|^2 = r^2 \sin^2 \theta [(-\sin \phi)^2 + \cos^2 \phi] = r^2 \sin^2 \theta$$

度规系数  $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$



单位矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x \\ &\quad + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y \\ &\quad + \cos \theta \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x \\ &\quad + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y \\ &\quad - \sin \theta \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

## §1.2 正交曲线坐标系中的微分算符

 微分算符主要有梯度、散度、旋度和 Laplace 算符 (梯度和散度的结合)

 首先考虑标量函数  $u(r)$  的梯度  $\nabla u(r)$ , 它作为矢量可以展开为  $\nabla u = \sum_{i=1}^3 f_i e_i$

 注意,  $f_i$  是  $r$  的函数; 而  $e_i$  的方向随着  $r$  变化, 这一点与直角坐标系不同

 由正交归一关系推出  $e_i \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^3 f_j e_i \cdot e_j = \sum_{j=1}^3 f_j \delta_{ij} = f_i$

## §1.2 正交曲线坐标系中的微分算符

微分算符主要有梯度、散度、旋度和 Laplace 算符 (梯度和散度的结合)

首先考虑标量函数  $u(r)$  的梯度  $\nabla u(r)$ , 它作为矢量可以展开为  $\nabla u = \sum_{i=1}^3 f_i e_i$

注意,  $f_i$  是  $r$  的函数; 而  $e_i$  的方向随着  $r$  变化, 这一点与直角坐标系不同

由正交归一关系推出  $e_i \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^3 f_j e_i \cdot e_j = \sum_{j=1}^3 f_j \delta_{ij} = f_i$

另一方面,  $u(r)$  沿  $q_i$  坐标线的方向导数为  $\frac{\partial u}{\partial s_i} = e_i \cdot \nabla u$ , 从而得到

$$f_i = e_i \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial s_i} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s_i} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h_i \Delta q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$$

于是, 梯度表达为  $\nabla u = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} e_i = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3$

# 梯度的形式



正交曲线坐标系中的梯度  $\nabla u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3$

相比于直角坐标系中的梯度  $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} e_x + \frac{\partial u}{\partial y} e_y + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$ ，出现了度规系数



在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$$



在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  中， $h_r = 1$ ， $h_\theta = r$ ， $h_\phi = r \sin \theta$ ，故

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi$$

# 散度

其次考虑矢量场  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  在  $\mathbf{r}$  点处的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$\Delta V$  是包含  $\mathbf{r}$  点的区域

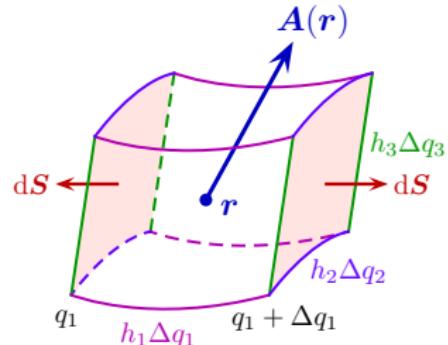
$\partial(\Delta V)$  是  $\Delta V$  的边界面,  $d\mathbf{S}$  是其定向面积元

取  $\Delta V$  为由坐标面  $q_1$ 、 $q_1 + \Delta q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_2 + \Delta q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_3 + \Delta q_3$  所围成的六面体

计算矢量场  $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$  在边界面  $\partial(\Delta V)$  上的通量, 得

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= [(A_1 h_2 h_3)_{q_1 + \Delta q_1} - (A_1 h_2 h_3)_{q_1}] \Delta q_2 \Delta q_3 + \dots \\ &= \left. \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \right|_{\mathbf{r}_1} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 + \dots \end{aligned}$$

在第二步中,  $\mathbf{r}_1$  是  $\Delta V$  内一点, 这里用到微分中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且在  $(a, b)$  上可导, 则存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



# 散度的形式



以上表达式只显明写出  $q_1$  处和  $q_1 + \Delta q_1$  处两个面的贡献



补上其它四个面的贡献，通量表达为

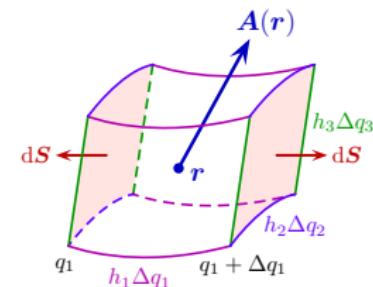
$$\oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[ \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \Big|_{\mathbf{r}_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} \Big|_{\mathbf{r}_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \Big|_{\mathbf{r}_3} \right] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

当  $\Delta V = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \rightarrow 0$  时，六面体  $\Delta V$  中

的点  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}$

于是， $\mathbf{r}$  点处的散度为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \Big|_{\mathbf{r}_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} \Big|_{\mathbf{r}_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \Big|_{\mathbf{r}_3} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \end{aligned}$$



# Laplace 算符的形式

 Laplace 算符对  $u(\mathbf{r})$  的作用为  $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令  $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则  $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

 代入到  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

# Laplace 算符的形式

Laplace 算符对  $u(\mathbf{r})$  的作用为  $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令  $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则  $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

# Laplace 算符的形式

Laplace 算符对  $u(\mathbf{r})$  的作用为  $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令  $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则  $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

# Laplace 算符的形式

Laplace 算符对  $u(\mathbf{r})$  的作用为  $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令  $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则  $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  中， $h_r = 1$ ， $h_\theta = r$ ， $h_\phi = r \sin \theta$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{r}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right]$$

# Laplace 算符的形式

Laplace 算符对  $u(\mathbf{r})$  的作用为  $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ，令  $\mathbf{A} = \nabla u$ ，则  $A_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}$

代入到  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (\textcolor{blue}{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\textcolor{blue}{A}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\textcolor{blue}{A}_3 h_1 h_2) \right]$ ，得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

在直角坐标系中，度规系数均为 1，故  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中， $h_\rho = h_z = 1$ ， $h_\phi = \rho$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  中， $h_r = 1$ ， $h_\theta = r$ ， $h_\phi = r \sin \theta$ ，故

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

## §2 球坐标系中的分离变量

### §2.1 Helmholtz 方程



在三维空间中，前面介绍过的数理方程包括波动方程、输运方程和稳定场方程



首先看齐次的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$



分离变量，令  $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ ，代入得  $v(\mathbf{r})T''(t) - a^2 T(t) \nabla^2 v(\mathbf{r}) = 0$



即  $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\nabla^2 v}{v(\mathbf{r})} \equiv -k^2$ ，其中  $k^2$  是常数，将它记作  $k^2$  是物理上的习惯



从而得到 Helmholtz 方程  $\nabla^2 v + k^2 v = 0$

和  $T(t)$  满足的方程

$$T'' + k^2 a^2 T = 0$$

## §2 球坐标系中的分离变量

### §2.1 Helmholtz 方程



在三维空间中，前面介绍过的数理方程包括波动方程、输运方程和稳定场方程



首先看齐次的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$



分离变量，令  $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ ，代入得  $v(\mathbf{r})T''(t) - a^2 T(t) \nabla^2 v(\mathbf{r}) = 0$



即  $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\nabla^2 v}{v(\mathbf{r})} \equiv -k^2$ ，其中  $k^2$  是常数，将它记作  $k^2$  是物理上的习惯



从而得到 Helmholtz 方程  $\nabla^2 v + k^2 v = 0$

和  $T(t)$  满足的方程

$$T'' + k^2 a^2 T = 0$$



给 Helmholtz 方程加上适当的边界条件可以构成本征值问题，从而求解出本征值  $k^2$  和本征函数，合理的边界条件通常导致  $k^2 \geq 0$



从物理上说，如果  $k^2 < 0$ ，则  $k$  为虚数， $T'' - |k|^2 a^2 T = 0$ ，解为  $T(t) = e^{\pm|k|at}$



这显然不是波动，不符合问题的物理背景，由此可推测  $k^2 \geq 0$

# 齐次的输运方程和稳定场方程

■ 其次看齐次的输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

■ 分离变量，令  $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ ，代入得到 Helmholtz 方程  $\nabla^2 v + k^2 v = 0$  和

$$T' + k^2 a^2 T = 0$$

对于 Helmholtz 方程，适当的边界条件同样导致  $k^2 \geq 0$

从物理上说，如果  $k^2 < 0$ ，则  $T' - |k|^2 a^2 T = 0$

解为  $T(t) = e^{|k|^2 a^2 t}$ ，它随时间不断增大

■ 这显然不是合理的输运行为，由此可推测  $k^2 \geq 0$

# 齐次的输运方程和稳定场方程

💻 其次看齐次的输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

⌨️ 分离变量, 令  $u(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r})T(t)$ , 代入得到 Helmholtz 方程  $\nabla^2 v + k^2 v = 0$  和

$$T' + k^2 a^2 T = 0$$

🖱️ 对于 Helmholtz 方程, 适当的边界条件同样导致  $k^2 \geq 0$

🖱️ 从物理上说, 如果  $k^2 < 0$ , 则  $T' - |k|^2 a^2 T = 0$

解为  $T(t) = e^{|k|^2 a^2 t}$ , 它随时间不断增大

🖨️ 这显然不是合理的输运行为, 由此可推测  $k^2 \geq 0$

📺 再次看齐次的稳定场方程, 即 Laplace 方程  $\nabla^2 u = 0$

📻 这可以当作  $k = 0$  时 Helmholtz 方程的特殊情况

📡 综上所述, 三类方程的齐次形式都可以归结为 Helmholtz 方程

📡 下面以 Helmholtz 方程为代表研究球坐标系和柱坐标系中的分离变量



Hermann von Helmholtz  
(1821–1894)

## §2.2 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量

在球坐标系中，将未知函数写作  $u$ ，Helmholtz 方程  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  的形式是

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

令  $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$ ，代入上式，有

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + k^2 R Y = 0$$

$\frac{1}{R} \left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R \right] = -\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right]$

上式左边与  $\theta$ 、 $\phi$  无关，右边与  $r$  无关

两边相等，则与  $r$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  均无关，即为常数

## §2.2 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量

在球坐标系中，将未知函数写作  $u$ ，Helmholtz 方程  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  的形式是

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

令  $u(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$ ，代入上式，有

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + k^2 R Y = 0$$

$\frac{1}{R} \left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R \right] = -\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] \equiv \lambda$

上式左边与  $\theta$ 、 $\phi$  无关，右边与  $r$  无关

两边相等，则与  $r$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  均无关，即为常数，记作  $\lambda$

于是得到角向方程  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$

和径向方程  $r^2 R'' + 2r R' + (k^2 r^2 - \lambda) R = 0$

# 求解顺序

求解的顺序如下，先由角向边界条件与角向方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

 构成本征值问题，求解  $Y(\theta, \phi)$  并确定本征值  $\lambda$

 然后，将  $\lambda$  代入径向方程

$$r^2 R'' + 2rR' + (k^2 r^2 - \lambda)R = 0$$

 此时需要分别讨论 Helmholtz 方程 ( $k \neq 0$ ) 和 Laplace 方程 ( $k = 0$ ) 的情况

- 如果  $k \neq 0$ ，则由径向边界条件和径向方程构成本征值问题，求解  $R(r)$  并确定本征值  $k$
- 如果  $k = 0$ ，则不需要由本征值问题确定  $k$  的值，且径向方程简化为 Euler 方程，很容易求解  $R(r)$

# 角向方程

 角向方程  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$  是偏微分方程

 进一步分离变量，令  $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$ ，代入得

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{H}{\sin^2 \theta} \Phi'' + \lambda H \Phi = 0$$

 两边同乘以  $\sin^2 \theta$ ，同除以  $H\Phi$ ，移项，推出

$$\frac{1}{H} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta H \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

 上式左边与  $\phi$  无关，右边与  $\theta$  无关

 两边相等，则与  $\theta$ 、 $\phi$  均无关，即为常数

# 角向方程

 角向方程  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \textcolor{brown}{Y}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \textcolor{brown}{Y}}{\partial \phi^2} + \lambda \textcolor{brown}{Y} = 0$  是偏微分方程

 进一步分离变量，令  $\textcolor{brown}{Y}(\theta, \phi) = \textcolor{violet}{H}(\theta)\Phi(\phi)$ ，代入得

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\textcolor{violet}{H}}{d\theta} \right) + \frac{\textcolor{violet}{H}}{\sin^2 \theta} \Phi'' + \lambda \textcolor{violet}{H}\Phi = 0$$

 两边同乘以  $\sin^2 \theta$ ，同除以  $\textcolor{violet}{H}\Phi$ ，移项，推出

$$\frac{1}{\textcolor{violet}{H}} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\textcolor{violet}{H}}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta \textcolor{violet}{H} \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu$$

 上式左边与  $\phi$  无关，右边与  $\theta$  无关

 两边相等，则与  $\theta$ 、 $\phi$  均无关，即为常数，记作  $\mu$ ，于是得到两个方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\textcolor{violet}{H}}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \textcolor{violet}{H} = 0$$

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0$$

# 关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

现在考虑角向方程的边界条件和相应的本征值问题

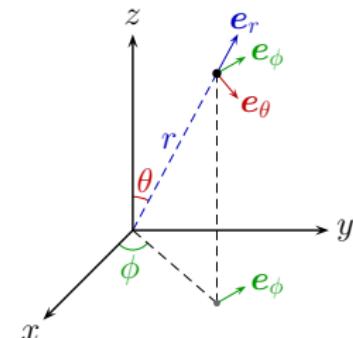
由于  $(r, \theta, \phi + 2\pi)$  与  $(r, \theta, \phi)$  表示同一几何点，而物理量在一个几何点的取值应该是确定的，不应该依赖于该点的数学描述，所以应有  $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$

对于分离变量形式的解，得

$$R(r)H(\theta)\Phi(\phi + 2\pi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

但  $R(r)H(\theta)$  不恒为零，得到自然的周期性边界条件

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$



# 关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

现在考虑角向方程的边界条件和相应的本征值问题

由于  $(r, \theta, \phi + 2\pi)$  与  $(r, \theta, \phi)$  表示同一几何点，而物理量在一个几何点的取值应该是确定的，不应该依赖于该点的数学描述，所以应有  $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$

对于分离变量形式的解，得

$$R(r)H(\theta)\Phi(\phi + 2\pi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$$

但  $R(r)H(\theta)$  不恒为零，得到自然的周期性边界条件

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

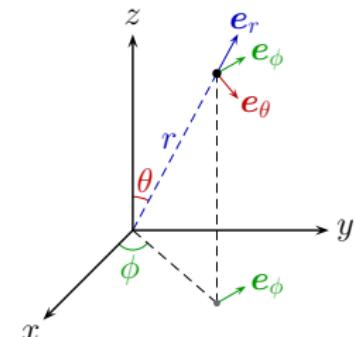
它与方程  $\Phi'' + \mu\Phi = 0$  构成本征值问题

在第七章 §5.1 中已经求解了这一本征值问题，得到的本征值和本征函数为

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

在球坐标系，习惯上将本征函数写成以上指数形式

在柱坐标系或平面极坐标系，习惯上将本征函数写成等价的三角形式

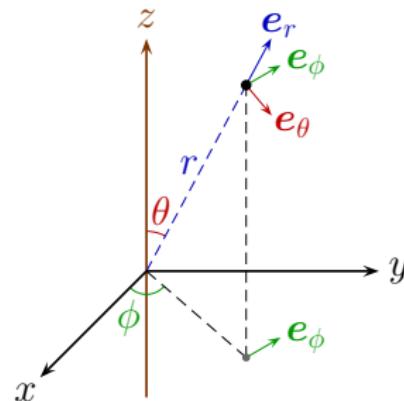


# $\theta$ 方向的自然边界条件

接下来考虑  $\theta$  方向的边界条件

现在  $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi) = H(\theta) e^{\pm im\phi}$

注意到整个  $z$  轴 ( $\theta = 0, \pi$ ) 都是球坐标系的奇点



# $\theta$ 方向的自然边界条件

接下来考虑  $\theta$  方向的边界条件

现在  $Y(\theta, \phi) = H(\theta)\Phi(\phi) = H(\theta) e^{\pm im\phi}$

注意到整个  $z$  轴 ( $\theta = 0, \pi$ ) 都是球坐标系的奇点

如果  $m \neq 0$ ，应该要求  $H(0) = H(\pi) = 0$

否则当  $\theta = 0, \pi$  时， $\phi$  没有定义导致  $Y(\theta, \phi)$  也没有定义

如果  $m = 0$ ，则  $Y(\theta, \phi) = H(\theta)$ ，没有类似的问题

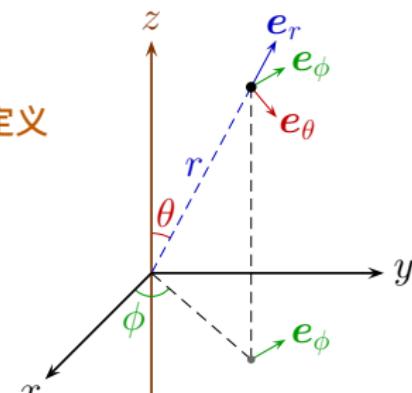
但  $H(0)$  和  $H(\pi)$  应该有限，即  $|H(0)|, |H(\pi)| < \infty$

原则上，物理量处处都应该有限

不过，微分方程的解在坐标系奇点很容易出现奇性

所以对物理量在这些地方的**有限性**需要特别强调

上述**两个**边界条件也属于**自然**边界条件



# 连带 Legendre 方程

 将本征值  $\mu = m^2$  代回关于  $H(\theta)$  的微分方程，得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = 0$$

 令  $x = \cos \theta$ ,  $H(\theta) = P(x)$ , 由  $\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$  推出

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = -\frac{d}{dx} \left( -\sin^2 \theta \frac{dP}{dx} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P$$

# 连带 Legendre 方程

 将本征值  $\mu = m^2$  代回关于  $H(\theta)$  的微分方程, 得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = 0$$

 令  $x = \cos \theta$ ,  $H(\theta) = P(x)$ , 由  $\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$  推出

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = -\frac{d}{dx} \left( -\sin^2 \theta \frac{dP}{dx} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P$$

 利用  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$ , 得到本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \\ P(\pm 1) = 0 \ (m \neq 0) \text{ 或 } |P(\pm 1)| < \infty \ (m = 0) \end{cases}$$

 这里关于  $P(x)$  的微分方程称为连带 Legendre 方程

 自然边界条件来自  $H(0) = H(\pi) = 0 \ (m \neq 0)$  或  $|H(0)|, |H(\pi)| < \infty \ (m = 0)$

# Legendre 方程

对于轴对称问题，取对称轴为球坐标系的极轴

则解  $u(r, \theta, \phi)$  与  $\phi$  无关，具有绕  $z$  轴的旋转对称性

此时只需考虑  $m = 0$ ，上述本征值问题就简化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

即使问题没有轴对称性，这也是上述本征值问题在  $m = 0$  时的特殊情况

总之，这是最重要的一种情况

# Legendre 方程

对于轴对称问题，取对称轴为球坐标系的极轴

则解  $u(r, \theta, \phi)$  与  $\phi$  无关，具有绕  $z$  轴的旋转对称性

此时只需考虑  $m = 0$ ，上述本征值问题就简化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0 \\ |P(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$



Adrien-Marie Legendre  
(1752–1833)

即使问题没有轴对称性，这也是上述本征值问题在  $m = 0$  时的特殊情况

总之，这是最重要的一种情况

这里  $P(x)$  的微分方程称为 Legendre 方程，在第十章 §2 中将用级数法求解它

至于连带 Legendre 方程，则可以通过适当的变换将它与 Legendre 方程联系起来，求解过程将在第十一章 §2.1 中介绍

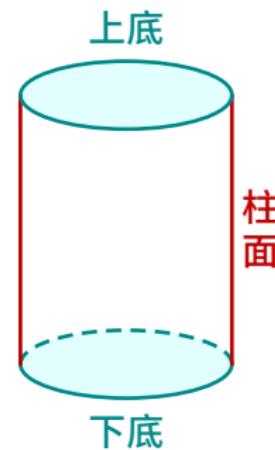
## §3 柱坐标系中的分离变量

在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中对 **Helmholtz 方程** 分离变量，求解区域涉及许多不同情况

旗  $\rho$  的取值范围可以是**有界或半无界**， $z$  的取值范围可以是**有界、无界或半无界**

叉 对于确定的区域，**边界条件**的情况还可以不同

火炬 比如，对于**有限的圆柱区域**，**齐次边界条件**可以出现在  
**柱面**，也可以出现在**上下底**



### §3 柱坐标系中的分离变量

在柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中对 **Helmholtz 方程** 分离变量，求解区域涉及许多不同情况

$\rho$  的取值范围可以是**有界或半无界**， $z$  的取值范围可以是**有界、无界或半无界**

对于确定的区域，**边界条件**的情况还可以不同

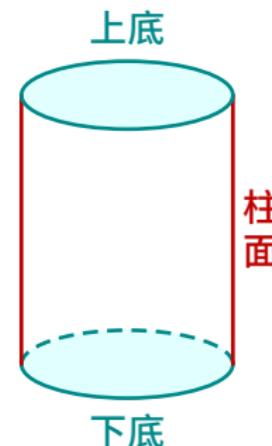
比如，对于**有限的圆柱区域**，**齐次边界条件**可以出现在**柱面**，也可以出现在**上下底**

在**球坐标系**  $(r, \theta, \phi)$  中，角向坐标的取值范围通常都**固定为**  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

而**边界条件**就是前面讨论的**自然边界条件**

所以**柱坐标系**的情况比**球坐标系**要**复杂**

在**柱坐标系**中求解数理方程的定解问题，最好是对每个具体问题都**从分离变量开始做**，这样不容易出错

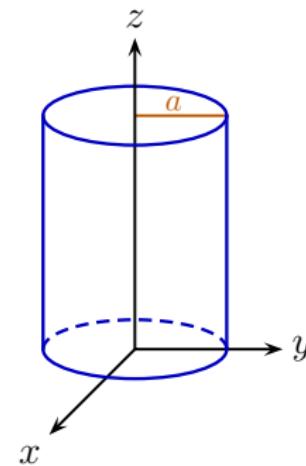


# 圆柱内 Laplace 方程定解问题

本节以圆柱内的 Laplace 方程定解问题为例进行分离变量

假定在  $\rho = a$  处有齐次边界条件,  $z$  的取值范围可以是有界的, 即  $0 \leq z \leq h$ , 也可以是半无界的, 即  $0 \leq z < +\infty$ , 暂时不作明确限制, 具体写出来是

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a) \\ \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u \right) \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha, \beta \text{ 不全为 } 0) \end{cases}$$



# 圆柱内 Laplace 方程定解问题

本节以圆柱内的 Laplace 方程定解问题为例进行分离变量

假定在  $\rho = a$  处有齐次边界条件,  $z$  的取值范围可以是有界的, 即  $0 \leq z \leq h$ , 也可以是半无界的, 即  $0 \leq z < +\infty$ , 暂时不作明确限制, 具体写出来是

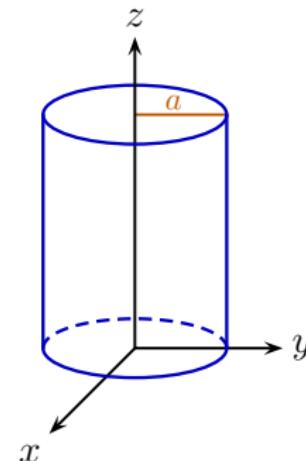
$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < a) \\ \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u \right) \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha, \beta \text{ 不全为 } 0) \end{cases}$$

由于  $z$  的取值范围并未具体指明, 所以定解条件不完整

不过, 这对分离变量没有影响

令  $u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ , 代入 Laplace 方程, 得

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \Phi'' + R\Phi Z'' = 0$$



# 分离变量

 两边同乘以  $\rho^2$ ，再除以  $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ ，移项，得

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \rho^2 \frac{Z''}{Z} = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

 上式左边与  $\phi$  无关，右边与  $\rho$ 、 $z$  无关

 两边相等，则与  $\rho$ 、 $\phi$ 、 $z$  均无关，即为常数

# 分离变量

⛰ 两边同乘以  $\rho^2$ , 再除以  $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ , 移项, 得

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \rho^2 \frac{Z''}{Z} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu$$

起重机图标 上式左边与  $\phi$  无关, 右边与  $\rho$ 、 $z$  无关

斧头图标 两边相等, 则与  $\rho$ 、 $\phi$ 、 $z$  均无关, 即为常数, 记作  $\mu$

滑雪图标 于是得到方程  $\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z}$

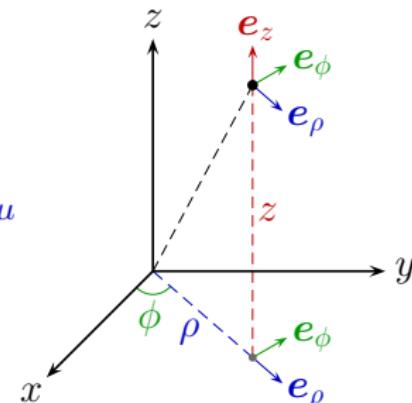
▶ 和角向方程  $\Phi'' + \mu\Phi = 0$

⛰ 先考虑角向方程的边界条件和本征值问题

自行车图标 由于  $(\rho, \phi + 2\pi, z)$  与  $(\rho, \phi, z)$  表示同一几何点, 与上节讨论类似, 有

$$u(\rho, \phi + 2\pi, z) = u(\rho, \phi, z), \quad R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi)Z(z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

攀登图标 但  $R(\rho)Z(z)$  不恒为零, 故得自然的周期性边界条件  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$



# 常微分方程

这里将本征值问题  $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$  的本征值和本征函数写作

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

将  $\mu = m^2$  代入另一个方程，得

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dZ}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z}$$

上式左边与  $z$  无关，右边与  $\rho$  无关

两边相等，则与  $\rho$ 、 $z$  均无关，即为常数

# 常微分方程

这里将本征值问题  $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$  的本征值和本征函数写作

$$\mu = m^2, \quad \Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

将  $\mu = m^2$  代入另一个方程，得

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda$$

上式左边与  $z$  无关，右边与  $\rho$  无关

两边相等，则与  $\rho$ 、 $z$  均无关，即为常数，记作  $-\lambda$ ，于是得到两个方程

$$Z'' - \lambda Z = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

# $\rho$ 方向的边界条件

分离变量后,  $\rho = a$  处的边界条件变成

$$\left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta u \right) \Big|_{\rho=a} = [\alpha R'(a) + \beta R(a)] \Phi(\phi) Z(z) = 0$$

即

$$\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$$

现在, 解的形式为  $u(\rho, \phi, z) = R(\rho) \{ \cos m\phi, \sin m\phi \} Z(z)$

对于柱坐标系,  $\rho = 0$  处  $\phi$  没有定义, 应该有自然边界条件

$$R(0) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |R(0)| < \infty \ (m = 0)$$

这两个边界条件与方程  $\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$  构成本征值问题

它属于第十章 §5 讨论的 Sturm-Liouville 本征值问题, 那里将证明本征值  $\lambda \geq 0$

# Bessel 方程

♥ 如果  $\lambda > 0$ , 令  $x = \sqrt{\lambda} \rho$ ,  $R(\rho) = y(x)$

利用  $\rho = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$  和  $\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx}$ , 将  $R(\rho)$  的微分方程化为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dx} \right) + \left( \lambda - \lambda \frac{m^2}{x^2} \right) y \\ &= \lambda \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y \right] \end{aligned}$$

# Bessel 方程

♥ 如果  $\lambda > 0$ , 令  $x = \sqrt{\lambda} \rho$ ,  $R(\rho) = y(x)$

💡 利用  $\rho = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$  和  $\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx}$ , 将  $R(\rho)$  的微分方程化为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dx} \right) + \left( \lambda - \lambda \frac{m^2}{x^2} \right) y \\ &= \lambda \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y \right] \end{aligned}$$

🏊 即得

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

💃 或写作

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

🏅 这是  $m$  阶 Bessel 方程的标准形式

⛵ 第十章 §4 将用级数法求解 Bessel 方程



Friedrich Bessel  
(1784–1846)

# $\lambda > 0$ 时 $Z(z)$ 的解

## 本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \\ \alpha R'(a) + \beta R(a) = 0 \\ R(0) = 0 \ (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |R(0)| < \infty \ (m = 0) \end{cases}$$

的具体求解将在**第十二章 §2** 讨论

确定**本征值  $\lambda$**  之后，将它代入方程  $Z'' - \lambda Z = 0$ ，求得解为

$$Z(z) = \left\{ e^{-\sqrt{\lambda}z}, e^{\sqrt{\lambda}z} \right\}$$

对于  $z$  有界 ( $0 \leq z \leq h$ ) 的情况，解取  $e^{-\sqrt{\lambda}z}$  和  $e^{\sqrt{\lambda}z}$  的**线性组合**

对于  $z$  半无界 ( $0 \leq z < +\infty$ ) 的情况，解只能取  $e^{-\sqrt{\lambda}z}$

# $\lambda = 0$ 的情况

如果  $\lambda = 0$ ,  $R(\rho)$  的微分方程化为

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R = R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{m^2}{\rho^2} R = \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R)$$

即得 Euler 方程  $\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$

已经在第七章 §5.1 求解过这个方程, 得到的解是

$$R(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (\text{当 } m \neq 0 \text{ 时}) \quad \text{或} \quad R(\rho) = \{1, \ln \rho\} \quad (\text{当 } m = 0 \text{ 时})$$

1 当  $m \neq 0$  时, 只有  $R(\rho) = \rho^m$  满足自然边界条件  $R(0) = 0$

处边界条件  $0 = \alpha R'(a) + \beta R(a) = m\alpha a^{m-1} + \beta a^m = a^{m-1}(m\alpha + \beta a)$  意味着  $m\alpha + \beta a = 0$

由于  $m > 0$ 、 $a > 0$ , 而  $\alpha$  和  $\beta$  均非负且不同时为零, 这个边界条件不能满足

此时  $\lambda = 0$  不是本征值

# $\lambda = 0$ 为本征值的情况

2 当  $m = 0$  时, 只有  $R(\rho) = 1$  满足自然边界条件  $R(0) = 0$

  $\rho = a$  处边界条件  $\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$  化为  $\beta = 0$

 如果  $\rho = a$  处的边界条件是第二类齐次边界条件  $R'(a) = 0$ , 就可以满足

# $\lambda = 0$ 为本征值的情况

2 当  $m = 0$  时, 只有  $R(\rho) = 1$  满足自然边界条件  $R(0) = 0$

$\rho = a$  处边界条件  $\alpha R'(a) + \beta R(a) = 0$  化为  $\beta = 0$

如果  $\rho = a$  处的边界条件是第二类齐次边界条件  $R'(a) = 0$ , 就可以满足

综上, 仅当  $\rho = a$  处为第二类齐次边界条件且  $m = 0$  时,  $\lambda = 0$  才是一个本征值

对应于  $\lambda = 0$ ,  $Z(z)$  的微分方程化为  $Z'' = 0$ , 解为

$$Z(z) = \{1, z\}$$

对于  $z$  有界 ( $0 \leq z \leq h$ ) 的情况, 解取 1 和  $z$  的线性组合

对于  $z$  半无界 ( $0 \leq z < +\infty$ ) 的情况, 解只能取 1

# 一般解

各变量的常微分方程都解出以后，可以写出  $u(\rho, \phi, z)$  的**一般解**

一般解中的**任意常数**由  $z$  方向的**边界条件**决定

对于  $z$  有界 ( $0 \leq z \leq h$ ) 的情况，**下底**  $z = 0$  和**上底**  $z = h$  处各有一个已知的**边界条件**，它们共同确定一般解中的**任意常数**

对于  $z$  半无界 ( $0 \leq z \leq h$ ) 的情况，**下底**  $z = 0$  处有一个已知的**边界条件**，它确定了一般解中的**任意常数**

# 一般解

- 💡 各变量的常微分方程都解出以后，可以写出  $u(\rho, \phi, z)$  的**一般解**
- 💡 一般解中的**任意常数**由  $z$  方向的**边界条件**决定
- 💡 对于  $z$  有界 ( $0 \leq z \leq h$ ) 的情况，**下底**  $z = 0$  和**上底**  $z = h$  处各有一个已知的**边界条件**，它们共同确定一般解中的**任意常数**
- 💡 对于  $z$  半无界 ( $0 \leq z \leq h$ ) 的情况，**下底**  $z = 0$  处有一个已知的**边界条件**，它确定了一般解中的**任意常数**
- 🏆 以上讨论表明，需要解决的**关键问题**是求解**分离变量**过程中出现的**常微分方程**及其**本征值问题**
- 🏅 有些常微分方程是**熟悉的**，其解为**初等函数**
- 🏅 另一些则**没有现成的解**，需要加以研究
- 🏅 **级数法**是一种常用的解法，将在**下一章**仔细讨论