

量子场论

第 3 章 Poincaré 对称性与粒子态

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2023 年 3 月 16 日



第 3 章 Poincaré 对称性与粒子态

本章介绍量子理论的 Poincaré 对称性，它是相对论性量子力学必须满足的对称性

我们将首先研究量子 Poincaré 变换

相关讨论会涉及到量子 Lorentz 变换、Lorentz 代数和 Poincaré 代数

1 Lorentz 代数与 Lorentz 群的表示理论密切相关，而后者对于深入理解各种量子场是必要的知识

 在量子理论中，粒子由 Hilbert 空间中的态矢描述

 相对论性的粒子运动与量子 Poincaré 变换对态矢的作用有关，由此可以为单粒子态分类

3.1 节 量子 Poincaré 变换



1.7.2 小节提到，时空坐标的 Poincaré 变换 (Λ, a) 为 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$



它是 Lorentz 变换 Λ 和时空平移变换 a 的组合



如果量子系统具有 Poincaré 对称性，即同时具有 Lorentz 对称性和时空平移对称性，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在物理 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)|\Psi\rangle$ ，其中 Λ 为固有保时向 Lorentz 变换



$U(\Lambda, a)$ 描述量子 Poincaré 变换，它是一个线性么正算符，满足

$$U^\dagger(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^\dagger(\Lambda, a) = 1, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^\dagger(\Lambda, a)$$

3.1 节 量子 Poincaré 变换



1.7.2 小节提到，时空坐标的 Poincaré 变换 (Λ, a) 为 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$



它是 Lorentz 变换 Λ 和时空平移变换 a 的组合



如果量子系统具有 Poincaré 对称性，即同时具有 Lorentz 对称性和时空平移对称性，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在物理 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a) |\Psi\rangle$ ，其中 Λ 为固有保时向 Lorentz 变换



$U(\Lambda, a)$ 描述量子 Poincaré 变换，它是一个线性么正算符，满足

$$U^\dagger(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^\dagger(\Lambda, a) = 1, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^\dagger(\Lambda, a)$$



$U(\Lambda, a)$ 的幺正性保证态矢的内积在量子 Poincaré 变换下不变

$$\langle \Psi' | \Psi' \rangle = \langle \Psi | U^\dagger(\Lambda, a) U(\Lambda, a) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle$$



$U(1, 0) = 1$ 是恒等变换算符, $U(1, a)$ 描述量子时空平移变换



$a^\mu = 0$ 对应于 Lorentz 变换，因此 $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$ 描述量子 Lorentz 变换



它满足 $U^{-1}(\Lambda) = U^\dagger(\Lambda)$

同态关系

 对时空坐标先作 Poincaré 变换 (Λ_1, a_1) ，得到 $x'^{\mu} = (\Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a_1^{\mu}$

再作 Poincaré 变换 (Λ_2, a_2) , 推出

$$x^{\mu\nu} = (\Lambda_2)^\mu_\nu x^{\nu\rho} + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu [(\Lambda_1)^\nu_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu_\nu a_1^\nu + a_2^\mu$$

这相当于作 Poincaré 变换 $(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ ，因而存在同态关系

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

同态关系

 对时空坐标先作 Poincaré 变换 (Λ_1, a_1) ，得到 $x'^{\mu} = (\Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a_1^{\mu}$

再作 Poincaré 变换 (Λ_2, a_2) ，推出

$$x^{\mu\nu} = (\Lambda_2)^\mu_\nu x^{\nu\rho} + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu [(\Lambda_1)^\nu_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu_\nu a_1^\nu + a_2^\mu$$

这相当于作 Poincaré 变换 $(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ ，因而存在同态关系

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

因此，集合 $\{U(\Lambda, a)\}$ 和 $\{U(\Lambda)\}$ 分别构成 Poincaré 群和 Lorentz 群的无限维么正线性表示，根据

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = 1 = U(\mathbf{1}, 0) = \textcolor{red}{U}(\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = \textcolor{brown}{U}(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$$

推出逆变换算符

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a), \quad U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda^{-1})$$

生成元算符



无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是 $\Lambda = 1 + \omega$



无穷小时空平移变换表达为 $a^\mu = \varepsilon^\mu$ ，其中 ω 和 ε^μ 是无穷小量



从而，无穷小 Poincaré 变换 $(1 + \omega, \varepsilon)$ 诱导的无穷小幺正算符为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) &= 1 + \omega_{\mu\nu} \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \omega_{\mu\nu}} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0} + \varepsilon_\mu \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0} \\ &= 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i \varepsilon_\mu P^\mu \end{aligned}$$



这是在 $(\omega_{\mu\nu}, \varepsilon_\mu) = (0, 0)$ 附近对 $U(\Lambda, a)$ 作 Taylor 级数



上式只展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的一阶项，而

$$J^{\mu\nu} \equiv 2i \frac{\partial U(\Lambda)}{\partial \omega_{\mu\nu}} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0} \quad \text{和} \quad P^\mu \equiv -i \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0}$$



分别是量子 Lorentz 变换和量子时空平移变换的生成元算符

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的厄米性



根据 1.7.3 小节讨论, 实参数 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的, 因而 $J^{\mu\nu} = 2i \frac{\partial U(\Lambda)}{\partial \omega_{\mu\nu}} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu=0}}$ 也是反对称的, $J^{\mu\nu} \equiv -J^{\nu\mu}$



$J^{\mu\nu}$ 有 6 个独立分量，而 P^μ 有 4 个独立分量



由 $U(1 + \omega, \varepsilon)$ 的幺正性推出

$$\begin{aligned} 1 &= U^\dagger(1 + \omega, \varepsilon)U(1 + \omega, \varepsilon) \\ &= \left[1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\dagger - i\varepsilon_\mu(P^\mu)^\dagger\right] \left[1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\mu P^\mu\right] \\ &= 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[(J^{\mu\nu})^\dagger - J^{\mu\nu}] - i\varepsilon_\mu[(P^\mu)^\dagger - P^\mu], \end{aligned}$$



最后一步忽略了 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的二阶项



可见， $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的所有分量都是厄米算符， $(J^{\mu\nu})^\dagger = J^{\mu\nu}$ ， $(P^\mu)^\dagger = P^\mu$

无穷小变换的相似变换

根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$ ，有

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1} + \omega)\Lambda, (\mathbf{1} + \omega)a + \varepsilon] \\ &= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1} + \omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1} + \omega)a + \varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\ &= U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) \end{aligned}$$

无穷小变换的相似变换

根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$ ，有

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(1 + \omega)\Lambda, (1 + \omega)a + \varepsilon] \\ &= U\{\Lambda^{-1}(1 + \omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(1 + \omega)a + \varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\ &= U(1 + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) \end{aligned}$$

 对上式左边和最后一步分别**展开**，得

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U^{-1}(\Lambda, a) \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\mu P^\mu \right) U(\Lambda, a) \\ &= 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda, a) J^{\mu\nu} U(\Lambda, a) + i\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda, a) P^\mu U(\Lambda, a) \\ U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) &= 1 - \frac{i}{2} (\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu \end{aligned}$$

无穷小变换的相似变换

根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$ ，有

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(1 + \omega)\Lambda, (1 + \omega)a + \varepsilon] \\ &= U\{\Lambda^{-1}(1 + \omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(1 + \omega)a + \varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\ &\equiv U(1 + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) \end{aligned}$$

 对上式左边和最后一步分别**展开**, 得

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U^{-1}(\Lambda, a) \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\mu P^\mu \right) U(\Lambda, a) \\ &= 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda, a) J^{\mu\nu} U(\Lambda, a) + i\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda, a) P^\mu U(\Lambda, a) \\ U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) &= 1 - \frac{i}{2} (\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu \end{aligned}$$

利用 $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma$, 有

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)^{\alpha}_{\nu}J^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}_{\gamma}\Lambda^{\gamma}_{\nu}J^{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\alpha}g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^{\rho}_{\sigma}\omega^{\beta}_{\gamma}\Lambda^{\gamma}_{\nu}J^{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}_{\mu}\omega_{\rho\gamma}\Lambda^{\gamma}_{\nu}J^{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}J^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Poincaré 变换

$$\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\rho (\omega^\rho_\sigma a^\sigma P^\mu + \varepsilon^\rho P^\mu) \\
&= g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha_\beta (\omega^\rho_\sigma a^\sigma P^\mu + \varepsilon^\rho P^\mu) \\
&= \delta^\beta_\mu \Lambda^\alpha_\beta (\omega_\alpha_\sigma a^\sigma P^\mu + \varepsilon_\alpha P^\mu) = \omega_{\alpha\sigma} \Lambda^\alpha_\mu a^\sigma P^\mu + \varepsilon_\alpha \Lambda^\alpha_\mu P^\mu \\
&= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho) + \varepsilon_\mu \Lambda^\mu_\nu P^\nu
\end{aligned}$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Poincaré 变换

$$\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\rho (\omega^\rho_\sigma a^\sigma P^\mu + \varepsilon^\rho P^\mu) \\
&= g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha_\beta (\omega^\rho_\sigma a^\sigma P^\mu + \varepsilon^\rho P^\mu) \\
&= \delta^\beta_\mu \Lambda^\alpha_\beta (\omega_\alpha_\sigma a^\sigma P^\mu + \varepsilon_\alpha P^\mu) = \omega_{\alpha\sigma} \Lambda^\alpha_\mu a^\sigma P^\mu + \varepsilon_\alpha \Lambda^\alpha_\mu P^\mu \\
&= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho) + \varepsilon_\mu \Lambda^\mu_\nu P^\nu
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & U(\mathbf{1} + \Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) \\ &= 1 - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu \\ &= 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho) + i\varepsilon_\mu \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \end{aligned}$$

$$U^{-1}(\Lambda, a) U(1 + \omega, \varepsilon) U(\Lambda, a) \\ = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda, a) J^{\mu\nu} U(\Lambda, a) + i \varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda, a) P^\mu U(\Lambda, a)$$

$$\text{比较, 推出 } U^{-1}(\Lambda, a) J^{\mu\nu} U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} - \Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho + \Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho$$

$$U^{-1}(\Lambda, a) \textcolor{brown}{P^\mu} U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu \textcolor{brown}{P^\nu}$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Lorentz 变换



取 $a^\mu \equiv 0$ ，得

$$U^{-1}(\Lambda) \textcolor{teal}{J}^{\mu\nu} U(\Lambda) \equiv \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \textcolor{teal}{J}^{\rho\sigma}$$

$$U^{-1}(\Lambda) \textcolor{brown}{P^\mu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \textcolor{brown}{P^\nu}$$



因此，生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ 中的期待值与它们在 $|\Psi\rangle$ 中的期待值之间的关系为

$$\langle \Psi' | J^{\mu\nu} | \Psi' \rangle = \langle \Psi | U^{-1}(\Lambda) J^{\mu\nu} U(\Lambda) | \Psi \rangle = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \langle \Psi | J^{\rho\sigma} | \Psi \rangle$$

$$\langle \Psi' | P^\mu | \Psi' \rangle = \langle \Psi | U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) | \Psi \rangle = \Lambda^\mu{}_\nu \langle \Psi | P^\nu | \Psi \rangle$$



可将 $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)$ 和 $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)$ 分别看作由**量子 Lorentz 变换** $U(\Lambda)$ 诱导出来的 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 算符的**Lorentz 变换**，

$$J'^{\mu\nu} \equiv U^{-1}(\Lambda) J^{\mu\nu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P'^{\mu} \equiv U^{-1}(\Lambda) P^{\mu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^{\nu}$$



这表明 $J^{\mu\nu}$ 是一个 2 阶 Lorentz 张量，而 P^μ 是一个 Lorentz 矢量

3.2 节 Lorentz 代数和 Poincaré 代数

研究 $U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} - \Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho + \Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho$ 的无穷小形式

考虑无穷小 Poincaré 变换，忽略二阶小量， $U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a)$ 化为

$$\begin{aligned} & U^{-1}(1 + \omega, \varepsilon)J^{\mu\nu}U(1 + \omega, \varepsilon) \\ &= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta} - i\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)J^{\mu\nu}\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} + i\varepsilon_\alpha P^\alpha\right) \\ &= J^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\alpha J^{\mu\nu}P^\alpha - i\varepsilon_\gamma P^\gamma J^{\mu\nu} \\ &= J^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] + i\varepsilon_\rho[J^{\mu\nu}, P^\rho] \end{aligned}$$

利用 $J^{\mu\nu}$ 和 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性， $\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$ 变成

$$\begin{aligned} & (1 + \omega)^\mu{}_\rho(1 + \omega)^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} \\ &= (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma)J^{\rho\sigma} = \delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} + \delta^\mu{}_\rho\omega^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} + \omega^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} \\ &= J^{\mu\nu} + \omega^\nu{}_\sigma J^{\mu\sigma} + \omega^\mu{}_\rho J^{\rho\nu} = J^{\mu\nu} + \omega_{\rho\sigma}g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + \omega_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} \\ &= J^{\mu\nu} + \omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \end{aligned}$$

生成元算符的对易关系

利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性，得

$$\begin{aligned}
(1+\omega)^\mu{}_\rho (1+\omega)^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} &= J^{\mu\nu} + \omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\
&= J^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) + \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}) \\
&= J^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})
\end{aligned}$$

 $-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho + \Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho$ 化为

$$\begin{aligned} -(1+\omega)^\mu{}_\rho \varepsilon^\nu P^\rho + (1+\omega)^\nu{}_\rho \varepsilon^\mu P^\rho &= -(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho) \varepsilon^\nu P^\rho + (\delta^\nu{}_\rho + \omega^\nu{}_\rho) \varepsilon^\mu P^\rho \\ &= -\varepsilon^\nu P^\mu + \varepsilon^\mu P^\nu = -\varepsilon_\rho(g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu) \end{aligned}$$

比较上面各式，由 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ε_ρ 的任意性推出生成元算符的对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = i(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu)$$

Lorentz 代数

 可将 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的对易关系改写为

$$\begin{aligned}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \\ &= i[g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma)\end{aligned}$$

 $(\mu \leftrightarrow \nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma}$

 同理， $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $i(g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$

 这个等式右边既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ, ν) 和 (ρ, σ) 反对称，这样的反对称性与等式左边一致

Lorentz 代数

可将 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的对易关系改写为

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \\ = i[g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma)$$

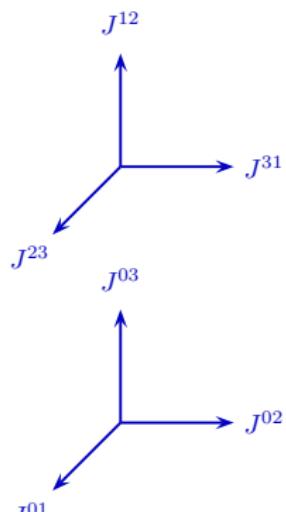
表示将前面的项 $g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma}$

同理， $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $i(g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$

这个等式右边既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ, ν) 和 (ρ, σ) 反对称，这样的反对称性与等式左边一致

以生成元 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量作为基底张成线性空间，空间中的任意矢量是 $J^{\mu\nu}$ 的线性组合，用以上对易关系定义矢量乘法，则任意矢量乘积仍是此空间中的矢量，即乘法运算是封闭的，称此线性空间为 Lorentz 代数

线性空间 + 矢量乘法
= 代数



Lie 群

● Lie 群是一类特殊的连续群

 **n** 维 Lie 群的群空间由 n 个独立的连续实参数 θ^a ($a = 1, 2 \dots, n$) 描述，具有 n 维微分流形的结构

● $O(N)$ 和 $SO(N)$ 是 $N(N - 1)/2$ 维 Lie 群

U(N) 是 N^2 维 Lie 群, SU(N) 是 $N^2 - 1$ 维 Lie 群



Sophus Lie
(1842–1899)

Lie 群

● Lie 群是一类特殊的连续群

 **n** 维 Lie 群的群空间由 n 个独立的连续实参数 θ^a ($a = 1, 2 \cdots, n$) 描述，具有 n 维微分流形的结构

● $O(N)$ 和 $SO(N)$ 是 $N(N - 1)/2$ 维 Lie 群

U(N) 是 N^2 维 Lie 群, SU(N) 是 $N^2 - 1$ 维 Lie 群

对于 n 维 Lie 群的一个 m 维线性表示，在单位矩阵附近，无穷小变换对应的表示矩阵可展开为

$$\mathbf{1} + i\theta^a t^a + \mathcal{O}(\theta^a \theta^b)$$



Sophus Lie
(1842–1899)



t^a 是 n 个独立的 m 阶生成元矩阵，具有对易关系

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad a, b, c = 1, 2 \cdots, n$$



Lie 代数



不同维的线性表示具有**不同阶**的生成元矩阵



不过，同一个 Lie 群所有线性表示的**结构常数都是一样的**，描述 Lie 群的**局域**性质



如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则**结构常数都是零**

Lie 代数



不同维的线性表示具有**不同阶**的生成元矩阵



不过，同一个 Lie 群所有线性表示的**结构常数都是一样的**，描述 Lie 群的**局域**性质



如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则**结构常数都是零**



生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种**乘法运算**

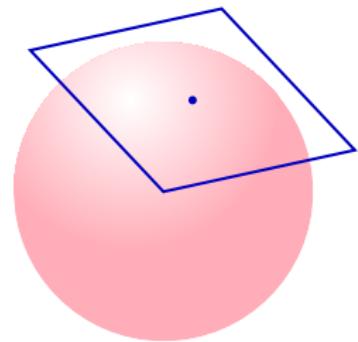


以生成元为基底张成的**线性空间**对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**



Lie 代数刻画 **Lie 群**在恒元附近的**局域结构**

Lie 代数 (切空间)



Lie 群 (微分流形)

Lie 代数

 不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵

 不过，同一个 Lie 群所有线性表示的结构常数都是一样的，描述 Lie 群的局域性质

 如果一个 Lie 群是 Abel 群，则结构常数都是零

 生成元的对易子也称为 Lie 括号，是一种乘法运算

 以生成元为基底张成的线性空间对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 Lie 代数

 Lie 代数刻画 Lie 群在恒元附近的局域结构

 Lorentz 群是一个 6 维 Lie 群

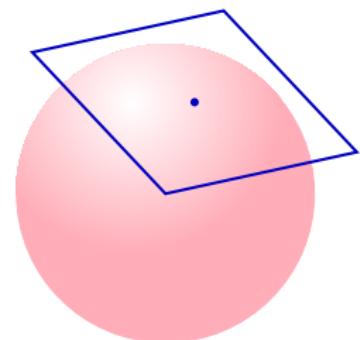
 它对应的 Lie 代数就是 Lorentz 代数

 Lorentz 群任何线性表示生成元都要满足 Lorentz 代数关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

 反过来，通过构造满足上式的生成元矩阵，可以得到 Lorentz 群的线性表示

Lie 代数 (切空间)



Lie 群 (微分流形)

三维矢量生成元算符

把生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量组合成 2 个**三维矢量算符**

$$\mathcal{J}^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i \equiv J^{0i}$$

即 $\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$, $\mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03})$

纯空间部分的生成元 J^i 与 J^j 的对易关系为

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] &= \frac{1}{4} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} [J^{kl}, J^{mn}] = \frac{i}{4} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} \{[g^{lm} J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] - (m \leftrightarrow n)\} \\ &= \frac{i}{2} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} [g^{lm} J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] = i \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} g^{lm} J^{kn} = -i \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jln} J^{kn} \\ &= i \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jnl} J^{kn} = i(\delta^{ij} \delta^{kn} - \delta^{in} \delta^{kj}) J^{kn} = -i J^{ji} = i \mathcal{J}^{ij} \end{aligned}$$

由 $J^{23} = J^1 = \varepsilon^{231} J^1$ 、 $J^{31} = J^2 = \varepsilon^{312} J^2$ 和 $J^{12} = J^3 = \varepsilon^{123} J^3$ 归纳出

$$\mathcal{J}^{ij} = \varepsilon^{ijk} J^k$$

从而得到

$$[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k$$

量子旋转变换



引入 2 个**三维矢量**

$$\theta^i \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}$$



即

$$\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03})$$



θ^1 、 θ^2 、 θ^3 分别是绕 x 轴、 y 轴、 z 轴转动的**角度**



ξ^1 、 ξ^2 、 ξ^3 分别是沿 x 轴、 y 轴、 z 轴增速的**快度**



从而，**无穷小量子 Lorentz 变换**化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}) &= 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \\ &= 1 - i\omega_{23} J^{23} - i\omega_{31} J^{31} - i\omega_{12} J^{12} - i\omega_{01} J^{01} - i\omega_{02} J^{02} - i\omega_{03} J^{03} \\ &= 1 + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \end{aligned}$$

量子旋转变换

引入 2 个**三维矢量**

$$\theta^i \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}$$

即

$$\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03})$$

θ^1 、 θ^2 、 θ^3 分别是绕 x 轴、 y 轴、 z 轴转动的**角度**

ξ^1 、 ξ^2 、 ξ^3 分别是沿 x 轴、 y 轴、 z 轴增速的**快度**

从而，**无穷小量子 Lorentz 变换**化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}) &= 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \\ &= 1 - i\omega_{23} J^{23} - i\omega_{31} J^{31} - i\omega_{12} J^{12} - i\omega_{01} J^{01} - i\omega_{02} J^{02} - i\omega_{03} J^{03} \\ &= 1 + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \end{aligned}$$

对于**绕 z 轴的旋转变换** $R_z(\theta^3)$ ， $\theta^1 = \theta^2 = \xi^i = 0$

则 $U[R_z(\theta^3)] = 1 + i\theta^3 J^3 + \mathcal{O}[(\theta^3)^2]$ ，故 $\frac{dU[R_z(\theta^3)]}{d\theta^3} \Big|_{\theta^3=0} = iJ^3$

由初始条件 $U[R_z(0)] = 1$ 求得相应的**量子旋转变换** $U[R_z(\theta^3)] = \exp(i\theta^3 J^3)$

总角动量算符

🌟 1.7.3 小节提到，空间旋转对称性对应着角动量守恒定律

💧 $U[R_z(\theta^3)] = \exp(i\theta^3 J^3)$ 表明 J^3 就是总角动量算符在 z 轴上的分量

🔥 同理， J^1 和 J^2 分别是总角动量算符在 x 轴和 y 轴上的分量

💨 也就是说，生成元算符 \mathbf{J} 就是总角动量算符

🌐 空间旋转群 $\text{SO}(3)$ 是 Lorentz 群在纯空间部分的子群

🌙 总角动量算符 \mathbf{J} 是量子空间旋转变换的生成元算符

😊 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$ 就是 3 维 Lie 群 $\text{SO}(3)$ 的 Lie 代数关系

🌙 相应的结构常数是 Levi-Civita 符号 ε^{ijk}

SU(2) 群的基础表示

🌙 SO(3) 群与 3 维 Lie 群 SU(2) 有着紧密的联系

- 在 SU(2) 群基础表示中，生成元矩阵表达为 $\tau^i \equiv \frac{\sigma^i}{2}$
- 其中 σ^i 是 3 个 2×2 的 Pauli 矩阵，

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

🌙 它们都是既厄米又么正的， $(\sigma^i)^{-1} = (\sigma^i)^\dagger = \sigma^i$

🌙 Pauli 矩阵的两两乘积为

$$(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = \mathbf{1}$$

$$\sigma^1 \sigma^2 = i \sigma^3, \quad \sigma^2 \sigma^3 = i \sigma^1, \quad \sigma^3 \sigma^1 = i \sigma^2$$

$$\sigma^2 \sigma^1 = -i \sigma^3, \quad \sigma^3 \sigma^2 = -i \sigma^1, \quad \sigma^1 \sigma^3 = -i \sigma^2$$

🌙 归纳起来，有 $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k$ ，右边第一项省略了 2×2 单位矩阵 1



Wolfgang Ernst Pauli
(1900–1958)

SU(2) 和 SO(3) 的局域性质

由 $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$ 推出

$$[\sigma^i, \sigma^j] = i\varepsilon^{ijk} \sigma^k - i\varepsilon^{jik} \sigma^k = 2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} \equiv \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k + i\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\delta^{ij}$$

于是, $SU(2)$ 生成元 τ^i 的对易关系为

$$[\tau^i, \tau^j] = \frac{1}{4} [\sigma^i, \sigma^j] = \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \sigma^k = i \varepsilon^{ijk} \tau^k$$

与 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$ 比较发现, **SU(2)** 群的 Lie 代数关系与 **SO(3)** 群完全一致

这意味着 $SU(2)$ 群在恒元附近的局域性质与 $SO(3)$ 群一样

单连通和双连通

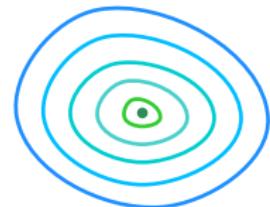
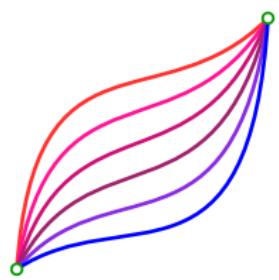
但是, $SU(2)$ 群的整体拓扑性质与 $SO(3)$ 群不一样

 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的群空间都是连通的, 根据 1.3 节的说法, 它们都是简单 Lie 群

 更仔细地讲, $SU(2)$ 的群空间是单连通的

 连接群空间中两点的任意两条曲线可以连续地形变成彼此

 等价地, 群空间内任意一条闭合曲线可以连续地收缩为一点



单连通和双连通

但是, $SU(2)$ 群的整体拓扑性质与 $SO(3)$ 群不一样

$SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的群空间都是连通的, 根据 1.3 节的说法, 它们都是简单 Lie 群

更仔细地讲, $SU(2)$ 的群空间是单连通的

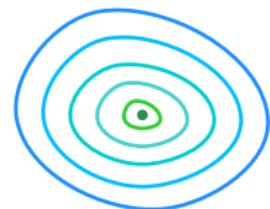
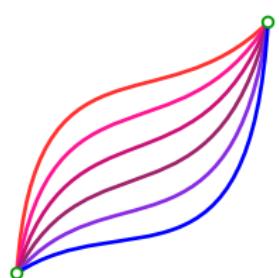
连接群空间中两点的任意两条曲线可以连续地形变成彼此

等价地, 群空间内任意一条闭合曲线可以连续地收缩为一点

$SO(3)$ 的群空间是双连通的, 即连通度为 2

连接群空间中两点的曲线分成 2 类, 同一类曲线能够连续地变化成彼此, 不同类曲线则不能

相应地, 闭合曲线也分为 2 类, 有一类能连续收缩成一点, 另一类不能

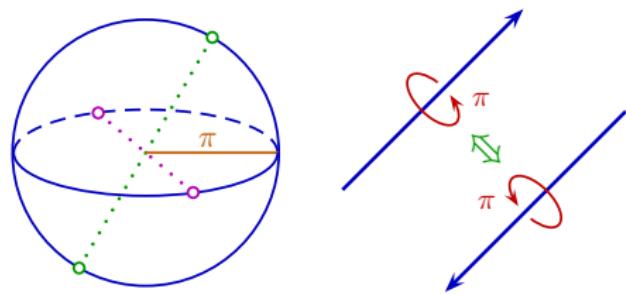


SO(3) 群空间

具体来说, SO(3) 的群空间是半径为 π 的球体

每一点的两个角度坐标代表转动轴的方向, 径向坐标代表绕轴转动的角度

由于绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这两个旋转变换是一样的, 球面上直径两端的点对应于同一个群元, 这样的点称为对径点

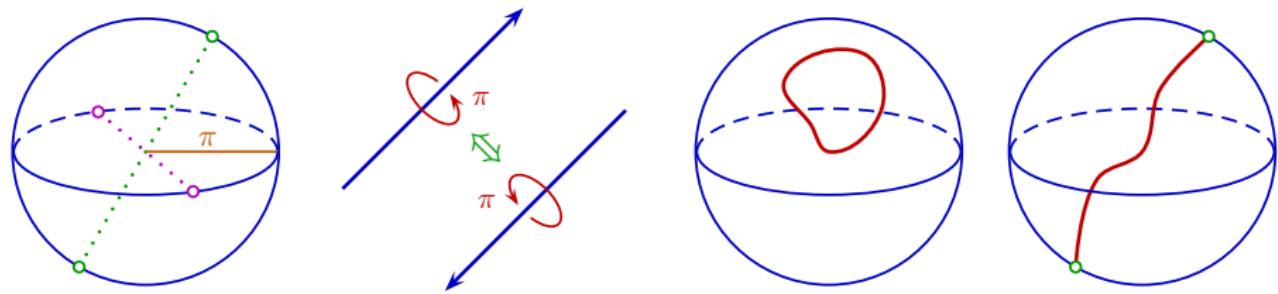


SO(3) 群空间

具体来说, SO(3) 的群空间是半径为 π 的球体

每一点的两个角度坐标代表转动轴的方向, 径向坐标代表绕轴转动的角度

由于绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这两个旋转变换是一样的, 球面上直径两端的点对应于同一个群元, 这样的点称为对径点



如果一条闭合曲线上的点都不在球面上, 那么曲线可以连续收缩成一点

如果一条闭合曲线通过球面上的某个点跳跃到它的对径点以形成闭合路径, 那么对曲线进行连续形变时, 参与跳跃的两个对径点只能成对地在球面上移动, 不能通过连续形变消除这种跳跃, 于是曲线不能连续收缩成一点

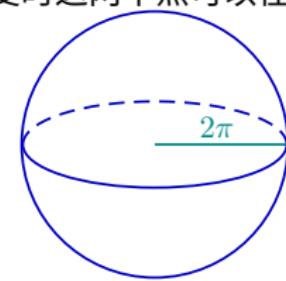
动画演示

覆盖群

● SU(2) 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 -1 ，见习题 3.3 和 3.5

● 即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃

● 故任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1



覆盖群

💡 **SU(2)** 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 -1 ，见习题 3.3 和 3.5

🍩 即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃

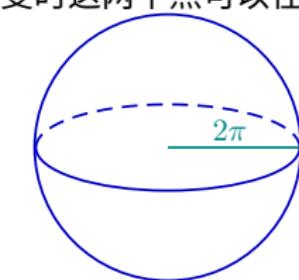
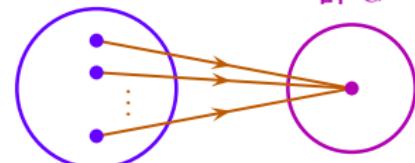
👉 故任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1

☕ 在数学上可以证明，如果简单 Lie 群 G 的群空间是 n 度连通的 ($n > 1$)，那么必然存在一个单连通的简单 Lie 群 G' 与之同态， $G' \sim G$

🥃 同态对应关系为 $n : 1$ ，即 G' 中的 n 个元素对应于 G 中的 1 个元素

🍷 此时称 G' 为 G 的覆盖群 (covering group)

🍵 而 G' 的忠实表示是 G 的 n 值表示， G' 与 G 具有相同的 Lie 代数

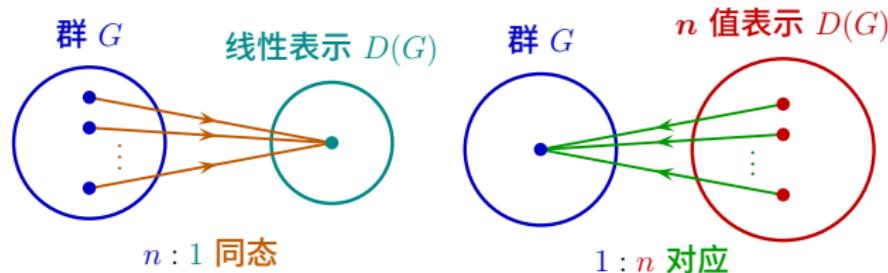
覆盖群 G' 群 G  $n : 1$ 同态

SU(2) 与 SO(3) 的同态关系

🍺 在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的同态对应关系

🍺 但是，在群的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系

🥂 因此， n 值表示不是线性表示

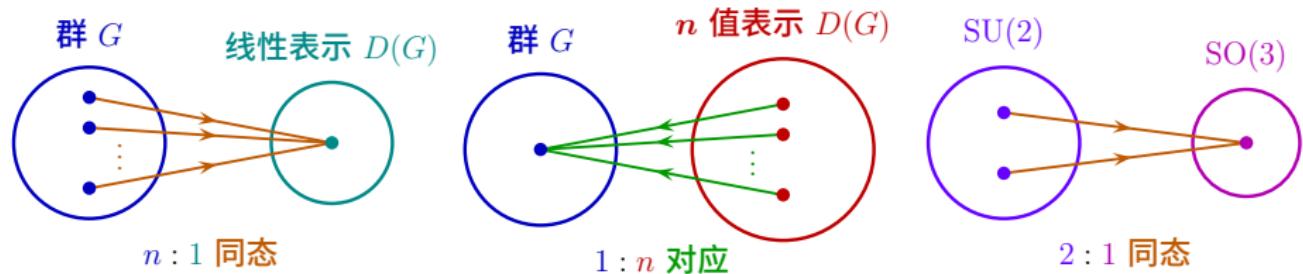


SU(2) 与 SO(3) 的同态关系

🍺 在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的同态对应关系

🍺 但是，在群的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系

🥂 因此， n 值表示不是线性表示



🥂 $SU(2)$ 群与 $SO(3)$ 群具有一种 $2:1$ 的同态关系， $SU(2) \sim SO(3)$ ，见习题 3.4

🥂 $SO(3)$ 任意一个群元同态地对应于 $SU(2)$ 的两个群元

🥂 因此 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的覆盖群， $SU(2)$ 的忠实表示是 $SO(3)$ 的双值表示

增速算符

回到生成元算符的讨论, \mathbf{K} 是增速算符, 总角动量算符 \mathbf{J} 与它的对易关系为

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{J}^i, \mathcal{K}^j] &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} [J^{kl}, J^{0j}] = \frac{i}{2} \varepsilon^{ikl} \{[g^{l0} J^{kj} - (k \leftrightarrow l)] - (0 \leftrightarrow j)\} \\
 &= i \varepsilon^{ikl} [g^{l0} J^{kj} - (0 \leftrightarrow j)] = i \varepsilon^{ikl} (g^{l0} J^{kj} - g^{lj} J^{k0}) = -i \varepsilon^{ikl} g^{lj} J^{k0} \\
 &= i \varepsilon^{ikj} J^{k0} = i \varepsilon^{ijk} J^{0k} = i \varepsilon^{ijk} \mathcal{K}^k
 \end{aligned}$$

增速算符

 回到生成元算符的讨论, \mathbf{K} 是增速算符, 总角动量算符 \mathbf{J} 与它的对易关系为

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}^i, \mathbf{K}^j] &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} [J^{kl}, J^{0j}] = \frac{i}{2} \varepsilon^{ikl} \{[g^{l0} J^{kj} - (k \leftrightarrow l)] - (0 \leftrightarrow j)\} \\ &= i \varepsilon^{ikl} [g^{l0} J^{kj} - (0 \leftrightarrow j)] = i \varepsilon^{ikl} (g^{l0} J^{kj} - g^{lj} J^{k0}) = -i \varepsilon^{ikl} g^{lj} J^{k0} \\ &= i \varepsilon^{ikj} J^{k0} = i \varepsilon^{ijk} \mathbf{J}^{0k} = i \varepsilon^{ijk} \mathbf{K}^k \end{aligned}$$

 而 \mathbf{K} 自身的对易关系为

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}^i, \mathbf{K}^j] &= [J^{0i}, J^{0j}] = i(g^{i0} J^{0j} - g^{00} J^{ij} - g^{ij} J^{00} + g^{0j} J^{i0}) \\ &= -i J^{ij} = -i \varepsilon^{ijk} J^k \end{aligned}$$

 归纳起来, 有

$$[J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k, \quad [J^i, K^j] = i \varepsilon^{ijk} K^k, \quad [K^i, K^j] = -i \varepsilon^{ijk} J^k$$

 这是 Lorentz 代数关系的另一种表达方式, 符合标准形式 $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$

 可见, 三个生成元 J^i 自己就可以构成封闭的代数, 而三个生成元 K^i 不能

对易子 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}]$ 和 $[P^\mu, P^\nu]$

 下面研究 $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的无穷小形式

考慮无穷小 Poincaré 变换，忽略二阶小量， $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)$ 化为

$$\begin{aligned}
& U^{-1}(1 + \omega, \varepsilon) P^\mu U(1 + \omega, \varepsilon) \\
&= \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\gamma\delta} J^{\gamma\delta} - i\varepsilon_\gamma P^\gamma \right) P^\mu \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} + i\varepsilon_\alpha P^\alpha \right) \\
&= P^\mu - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} P^\mu J^{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \omega_{\gamma\delta} J^{\gamma\delta} P^\mu + i\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha - i\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu \\
&= P^\mu - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} [P^\mu, J^{\rho\sigma}] + i\varepsilon_\nu [P^\mu, P^\nu]
\end{aligned}$$

对易子 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}]$ 和 $[P^\mu, P^\nu]$

下面研究 $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的无穷小形式

考虑无穷小 Poincaré 变换，忽略二阶小量， $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)$ 化为

$$\begin{aligned}& U^{-1}(1 + \omega, \varepsilon)P^\mu U(1 + \omega, \varepsilon) \\&= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta} - i\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)P^\mu \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} + i\varepsilon_\alpha P^\alpha\right) \\&= P^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu + i\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha - i\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu \\&= P^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu, J^{\rho\sigma}] + i\varepsilon_\nu[P^\mu, P^\nu]\end{aligned}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 变成 $(1 + \omega)^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu + \omega^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu + \omega_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}P^\sigma$
 $= P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho)$

两相比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的任意性推出生成元算符的对易关系

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \quad [P^\mu, P^\nu] = 0$$

注意，第一个对易关系等价于前面推出的 $[J^{\mu\nu}, P^\rho] = i(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu)$

Poincaré 代数



以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 **10** 个独立分量作为**基底**张成线性空间，用对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$



定义**矢量乘法**，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数



Lorentz 代数是 **Poincaré 代数**的**子代数**

Poincaré 代数



以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 10 个独立分量作为基底张成线性空间，用对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$



定义矢量乘法，就构成了 Poincaré 代数，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数



Lorentz 代数是 Poincaré 代数的子代数



令 $H \equiv P^0$ ，则 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ ，进一步推出

$$[P^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}P^k, \quad [P^i, K^j] = i\delta^{ij}H, \quad [H, K^i] = iP^i$$

$$[H, J^i] = [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0$$



结合 Lorentz 代数关系

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k$$



就得到 Poincaré 代数关系的另一种表达方式

量子时间平移变换

 当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (\textcolor{blue}{t}_*, \mathbf{0})$ 时, $P^\mu \equiv -i \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0}$ 意味着

$$\frac{dU(1, a)}{dt_*} \Big|_{t_*=0} = iH$$

 若 H 不依赖于 t_* , 则由初始条件 $U(1, 0) = 1$ 求得量子时间平移变换

$$U(1, a) = \exp(iHt_*)$$

 它将态矢从 t 时刻平移到 $t' = t + \textcolor{blue}{t}_*$ 时刻

 1.7.2 小节提到, 时间平移对称性对应着能量守恒定律

 因而生成元算符 H 就是哈密顿量算符

$e^{A+B} = e^A e^B$ 对 $[A, B] = 0$ 成立

 若两个算符 A 和 B 相互对易，即 $[A, B] = 0$ ，则二项式定理成立：

$$(A + B)^n = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$$

阶乘的定义可以推广到负整数：对于整数 $m < 0$ ，定义 $m! \rightarrow \infty$ ，则 $\frac{1}{m!} \rightarrow 0$

从而, 对于 $j > n$, 有 $[(n-j)!]^{-1} \rightarrow 0$

这样一来，可以将以上级数化成无穷级数， $(A + B)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$

$e^{A+B} = e^A e^B$ 对 $[A, B] = 0$ 成立

若两个算符 A 和 B 相互对易，即 $[A, B] = 0$ ，则二项式定理成立：

$$(A + B)^n = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$$

阶乘的定义可以推广到负整数：对于整数 $m < 0$ ，定义 $m! \rightarrow \infty$ ，则 $\frac{1}{m!} \rightarrow 0$

从而，对于 $j > n$ ，有 $[(n-j)!]^{-1} \rightarrow 0$

这样一来，可以将以上级数化成无穷级数， $(A + B)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$

$$\begin{aligned} \text{由此推出 } e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{n-j}}{(n-j)!} \right] = e^A e^B \end{aligned}$$

即 $e^{A+B} = e^A e^B$ 对 $[A, B] = 0$ 成立

值得注意的是，上式不仅对相互对易的算符成立，也对相互对易的同阶方阵成立

量子空间平移变换

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时,

$$P^\mu \equiv -i \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0} \quad \text{意味着} \quad \frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial \mathbf{x}_*^i} \Big|_{\mathbf{x}_* = 0} = -i P^i$$

由于 $[P^i, P^j] = 0$, 可利用 $e^{A+B} = e^A e^B$ 求得量子空间平移变换

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-i P^1 x_*^1) \exp(-i P^2 x_*^2) \exp(-i P^3 x_*^3) = \exp(-i \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*)$$

它将态矢从 \mathbf{x} 位置平移到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置, 空间平移对称性对应着动量守恒定律

因此生成元算符 \mathbf{P} 就是动量算符, 从而 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是四维动量算符

量子空间平移变换

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时，

$$P^\mu \equiv -i \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu} \Big|_{\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu = 0} \quad \text{意味着} \quad \frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial \mathbf{x}_*^i} \Big|_{\mathbf{x}_* = 0} = -i P^i$$

由于 $[P^i, P^j] = 0$ ，可利用 $e^{A+B} = e^A e^B$ 求得量子空间平移变换

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-i P^1 x_*^1) \exp(-i P^2 x_*^2) \exp(-i P^3 x_*^3) = \exp(-i \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*)$$

它将态矢从 \mathbf{x} 位置平移到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置，空间平移对称性对应着动量守恒定律

因此生成元算符 \mathbf{P} 就是动量算符，从而 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是四维动量算符

在量子力学中，与哈密顿量对易的力学量是守恒量

于是 $[H, \mathbf{P}] = [H, \mathbf{J}] = 0$ 意味着动量和总角动量都是守恒量

由于 $[H, \mathbf{P}] = 0$ ，一般的量子时空平移变换可表达为

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(i H t_*) \exp(-i \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*) = \exp(i P^\mu a_\mu), \text{ 满足 } \frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial a_\mu} \Big|_{a_\mu = 0} = i P^\mu$$

一般场算符的量子时空平移变换

考慮时空平移变换 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 对一般场算符 $\Phi_a(x)$ 的作用

对于经典场，有 $\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x + a) = \Phi_a(x)$ ，它对应的算符表达式为

$$\Phi_a'(x') = U^{-1}(1, a)\Phi_a(x')U(1, a) = \Phi_a(x)$$

 注意这里的相似变换类似于 $P'^\mu \equiv U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$

一般场算符的量子时空平移变换

考虑时空平移变换 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 对一般场算符 $\Phi_a(x)$ 的作用

对于经典场，有 $\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$ ，它对应的算符表达式为

$$\Phi'_a(x') = U^{-1}(1, a)\Phi_a(x')U(1, a) = \Phi_a(x)$$

注意这里的相似变换类似于 $P'^\mu \equiv U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$

等价地，有

$$\Phi_a(x+a) = U(1, a)\Phi_a(x)U^{-1}(1, a)$$

无穷小变换 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ 对应量子时空平移变换是 $U(1, \varepsilon) = 1 + i\varepsilon_\mu P^\mu$

右边化为

$$\begin{aligned} U(1, a)\Phi_a(x)U^{-1}(1, a) &= (1 + i\varepsilon_\mu P^\mu)\Phi_a(x)(1 - i\varepsilon_\mu P^\mu) \\ &= \Phi_a(x) - i\varepsilon_\mu \Phi_a(x)P^\mu + i\varepsilon_\mu P^\mu \Phi_a(x) = \Phi_a(x) - i\varepsilon_\mu [\Phi_a(x), P^\mu] \end{aligned}$$

在 x^μ 处将左边展开到 ε^μ 的一阶项，得 $\Phi_a(x+a) = \Phi_a(x) + \varepsilon_\mu \partial^\mu \Phi_a(x)$

两相比较，给出

$$[\Phi_a(x), P^\mu] = i\partial^\mu \Phi_a(x)$$

量子 Poincaré 变换与 Noether 定理

对易关系 $[\Phi_a(x), P^\mu] = i\partial^\mu \Phi_a(x)$ 表明，一般场算符 $\Phi_a(x)$ 与四维动量算符 P^μ 的对易子相当于将四维动量微分算符 $i\partial^\mu$ 作用在 $\Phi_a(x)$ 上

对于实标量场 $\phi(x)$ ，对易关系化为

$$[\phi(x), P^\mu] = i\partial^\mu \phi(x)$$

这与 2.3.3 小节中推出的结果相同

而那里哈密顿量和总动量的定义遵循 1.7.2 小节中由 Noether 定理给出的表达式

可见，通过 Noether 定理得出的哈密顿量和总动量与本节用量子 Poincaré 变换定义的哈密顿量算符 H 和动量算符 P 是一致的

3.3 节 粒子态



粒子在 Minkowski 时空中运动，Minkowski 时空的对称性由 Poincaré 群描述



不同种类的粒子由质量、自旋和一些量子数加以区分



每个粒子具有一定的四维动量和自旋在某个空间方向上投影出来的量子数



对它作空间旋转或 Lorentz 增速变换时，四维动量会发生变化，而自旋投影的值有可能改变，变化方式由相应 Lorentz 变换决定



但质量、自旋和其它量子数不会改变

3.3 节 粒子态



粒子在 Minkowski 时空中运动，Minkowski 时空的对称性由 **Poincaré 群**描述



不同种类的粒子由**质量**、**自旋**和一些量子数加以区分



每个粒子具有一定的**四维动量**和**自旋**在某个空间方向上**投影**出来的量子数



对它作**空间旋转**或 **Lorentz 增速变换**时，**四维动量**会发生变化，而**自旋投影**的值有可能改变，变化方式由相应 **Lorentz 变换**决定



但**质量**、**自旋**和其它量子数不会改变



当 $\Lambda = 1$ 时， $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 化为 $U^{-1}(1, a)P^\mu U(1, a) = P^\mu$



因此**四维动量算符** P^μ 在**量子时空平移变换**下不变，**内积** $P^2 = P^\mu P_\mu$ 也不变



此外， P^2 还是 **Lorentz 标量**，于是它的**本征值** p^2 是 **Poincaré 变换**的不变量



对单个粒子而言，**质壳关系**表明 $p^2 = m^2$ ，则这个不变量是**粒子质量** m 的平方

粒子与粒子态

🌹 实际上，**粒子态**由 Poincaré 群的**不可约幺正表示**描述

🐝 1939 年 Eugene Wigner 完成了**这些表示**的分类工作

🌷 一个粒子可以用一组在量子 Poincaré 变换下相互转化的态矢 $\{|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle\}$ 来定义，其中**四维动量** p^μ 是**四维动量算符** P^μ 在**态矢** $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 上的本征值，



Eugene Wigner
(1902–1995)

🐌 而指标 σ 表征所有其它自由度，通常取**分立值**

🌻 2.3.4 小节定义的**标量场单粒子态** $|p\rangle$ 就是这样的态矢

粒子态的 Poincaré 变换

在量子时空平移变换的作用下，单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 变换为

$$U(1, a) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = e^{iP^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = e^{ip^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$$

只出现相位上的改变

另一方面，用量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用得到单粒子态 $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ ，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda) P^\nu |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \end{aligned}$$

粒子态的 Poincaré 变换

 在量子时空平移变换的作用下，单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 变换为

$$U(1, a) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = e^{iP^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = e^{ip^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$$

只出现相位上的改变

 另一方面，用量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用得到单粒子态 $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ ，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda) P^\nu |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \end{aligned}$$

 因此， $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 的四维动量本征值为 $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$

 这意味着它必定是态矢 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$ 的线性组合，即

$$U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$$

 通过下面的方法可以得到系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 的形式

标准四维动量

在固有保时向 Lorentz 变换下, p^μ 的内积 p^2 不变, p^0 的符号也不会改变

它们是所有惯性参考系的不变量

p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$, 彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着, 可以选取一个标准四维动量 $k^\mu \in \{p^\mu\}$, 使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p) k^\nu$$

$V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换

从而, 标准四维动量 k^μ 代表了这组可用于描述粒子的四维动量 $\{p^\mu\}$

标准四维动量

在固有保时向 Lorentz 变换下， p^μ 的内积 p^2 不变， p^0 的符号也不会改变

它们是所有惯性参考系的不变量

p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$ ，彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着，可以选取一个标准四维动量 $k^\mu \in \{p^\mu\}$ ，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p) k^\nu$$

$V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换

从而，标准四维动量 k^μ 代表了这组可用于描述粒子的四维动量 $\{p^\mu\}$

可以将 $\{p^\mu\}$ 中任意元素 p^μ 对应的单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 定义为

$$|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

$N(p)$ 是依赖于 p^μ 的归一化因子

左右两边出现同个指标 σ ，实际上以此规定指标 σ 与四维动量 p^μ 之间的关系

小群

对单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 作量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ ，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U^{-1}[V(\Lambda p)]U(\Lambda)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U[V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)]|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \end{aligned}$$

其中，固有保时向 Lorentz 变换

$$W^\mu{}_\nu = [V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)]^\mu{}_\nu$$

先将 k^μ 变换到 p^μ ，再变换到 $(\Lambda p)^\mu$ ，最后变換回 k^μ ：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)]^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p) \Lambda]^\mu{}_\nu p^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)]^\mu{}_\nu (\Lambda p)^\nu = k^\mu$$

即 $W^\mu{}_\nu$ 保持 k^μ 不变

所有保持 k^μ 不变的固有保时向 Lorentz 变换 $\{W^\mu{}_\nu\}$ 构成 Lorentz 群的一个子群，称为标准动量 k^μ 对应的小群 (little group)

小群的线性表示

类似于 $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$, $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ 意味着

$$U(W)|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

 $D_{\sigma'\sigma}(W)$ 是线性组合系数

对于小群中任意两个变换 $(W_1)^\mu$ 和 $(W_2)^\mu$ ，由上式推出

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2 W_1) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = U(W_2 W_1) |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = U(W_2) U(W_1) |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

$$= U(W_2) \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1) |\Psi_{\sigma''}(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma' \sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2) D_{\sigma''\sigma}(W_1) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

从而得到**同态关系**

$$D_{\sigma' \sigma}(W_2 W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma' \sigma''}(W_2) D_{\sigma'' \sigma}(W_1)$$

 可见，矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成这个小群的一个线性表示

系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$

进一步推出

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= N(p) U[V(\Lambda p)] \textcolor{red}{U}(W) |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p) U[V(\Lambda p)] \sum_{\sigma'} \textcolor{violet}{D}_{\sigma'\sigma}(W) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle \\ &= N(p) \sum_{\sigma'} \textcolor{violet}{D}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)] U[V(\Lambda p)] |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle \end{aligned}$$

根据定义，有 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle = N(\Lambda p) U[V(\Lambda p)] |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$ ，即

$$U[V(\Lambda p)] |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = \frac{1}{N(\Lambda p)} |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$$

代入得 $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} \textcolor{violet}{D}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)] |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$

与 $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} \textcolor{brown}{C}_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$ 比较，推出系数公式

$$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \textcolor{violet}{D}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)]$$

单粒子态的分类

✿ 上述讨论表明，可以通过**标准四维动量** k^μ 和相应的**小群**为单粒子态分类，物理上遇到**三种情况**

Ⓐ 第一种情况是**真空态**，此时 $p^\mu = (0, 0, 0, 0)$

Ⓑ 标准四维动量也只能是 $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$ ，它在**任意 Lorentz 变换**下不变

Ⓒ 相应的**小群**是**固有保时向 Lorentz 群** $SO^\uparrow(1, 3)$

Ⅱ 第二、三种情况分别是**有质量和无质量的粒子态**，在下面两个小节中详细讨论

3.3.1 小节 有质量的粒子

forall 对于**有质量的粒子**, $p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$, 其中**质量** $m > 0$

tree 此时 p^μ 是**类时矢量**, 取**标准四维动量**为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$

coin 沿任意方向的 Lorentz 增速变换会**改变** k^μ , **任意空间旋转变换则保持** k^μ **不变**

monkey 因此相应的**小群**是 $SO(3)$

3.3.1 小节 有质量的粒子

forall 对于**有质量的粒子**, $p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$, 其中**质量** $m > 0$

tree 此时 p^μ 是**类时矢量**, 取**标准四维动量**为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$

coin 沿任意方向的 Lorentz 增速变换会**改变** k^μ , **任意空间旋转变换则保持** k^μ **不变**

monkey 因此相应的**小群**是 $SO(3)$

gold_bar 在**量子力学**中, 归一化后的态矢仍然具有一定的任意性, 态矢 $|\Psi\rangle$ 与**相差一个相位因子**的态矢 $e^{i\phi} |\Psi\rangle$ (ϕ 为实数) 描述**相同的量子态**

monkey 一般地, **量子 Lorentz 变换的同态关系** $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$ 应修正为

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = e^{i\varphi(\Lambda_2, \Lambda_1)} U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

squirrel 若**实相位** $\varphi(\Lambda_2, \Lambda_1)$ **不恒为零**, 则集合 $\{U(\Lambda)\}$ 不是 Lorentz 群的线性表示, 而是**投影表示** (projective representation)

小群 $\text{SO}(3)$ 的双值表示

🌵 对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \text{SO}(3)$ ，则有

$$U(W_2)U(W_1) = e^{i\varphi(W_2, W_1)} U(W_2W_1)$$

🐪 作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，利用 $U(W)|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$ ，得

$$\sum_{\sigma' \sigma''} D_{\sigma' \sigma''}(W_2) D_{\sigma'' \sigma}(W_1) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = e^{i\varphi(W_2, W_1)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(W_2W_1) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

🐪 故

$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma' \sigma''}(W_2) D_{\sigma'' \sigma}(W_1) = e^{i\varphi(W_2, W_1)} D_{\sigma' \sigma}(W_2W_1)$$

小群 $\text{SO}(3)$ 的双值表示

🌵 对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \text{SO}(3)$ ，则有

$$U(W_2)U(W_1) = e^{i\varphi(W_2, W_1)} U(W_2W_1)$$

🐪 作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，利用 $U(W)|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$ ，得

$$\sum_{\sigma' \sigma''} D_{\sigma' \sigma''}(W_2) D_{\sigma'' \sigma}(W_1) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = e^{i\varphi(W_2, W_1)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(W_2W_1) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$$

🐫 故 $\sum_{\sigma''} D_{\sigma' \sigma''}(W_2) D_{\sigma'' \sigma}(W_1) = e^{i\varphi(W_2, W_1)} D_{\sigma' \sigma}(W_2W_1)$

🐪 若 $\varphi(W_2, W_1)$ 不恒为零，则矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成小群 $\text{SO}(3)$ 的投影表示

🦙 这里遇到的投影表示就是 3.1.2 小节提到的 n 值表示

🌋 它的存在意味着群空间的连通度 $n > 1$ ，将这个群扩充为一个单连通的覆盖群，则相关的投影表示对应于覆盖群的线性表示

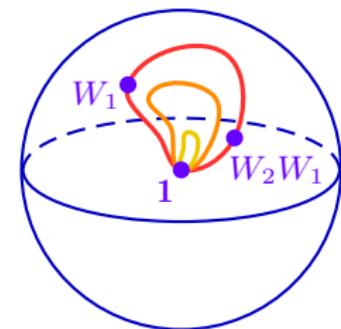
🦓 因此，应该用覆盖群的不等价不可约线性表示为粒子态分类

闭合曲线与恒等变换

🥕 在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元

🐰 由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点

🍅 从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线



闭合曲线与恒等变换

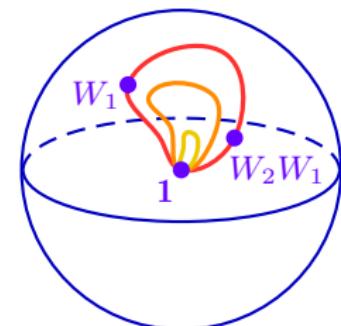
🥕 在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元

🐰 由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点

🍅 从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线

🎾 考虑 $SO(3)$ 群空间内一条闭合曲线，它从恒元 1 出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 $W_2 W_1$ 两个点再回到恒元，相应的量子变换是 $U^{-1}(W_2 W_1)U(W_2)U(W_1)$

🐶 如果这条曲线能连续地收缩成恒元这一点，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2 W_1)U(W_2)U(W_1)$ 是恒等算符 1



闭合曲线与恒等变换

🥕 在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元

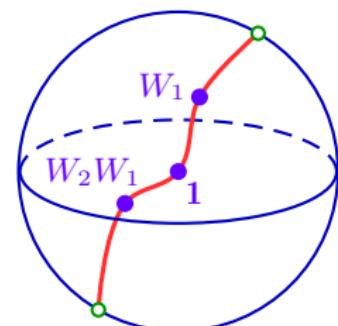
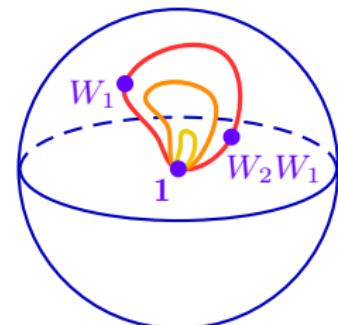
🐰 由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点

🍅 从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线

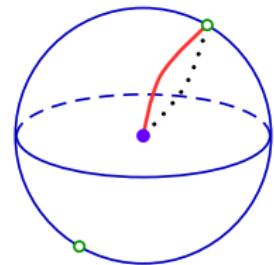
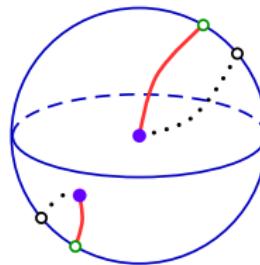
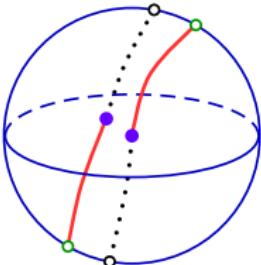
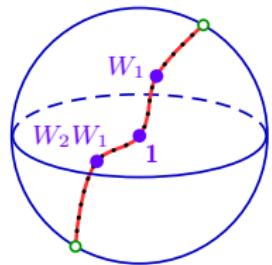
🍏 考虑 $SO(3)$ 群空间内一条闭合曲线，它从恒元 1 出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，相应的量子变换是 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$

🐕 如果这条曲线能连续地收缩成恒元这一点，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 是恒等算符 1

🐯 如果这条曲线包含奇数次对径点跳跃，就不能连续收缩成恒元一点，而 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 不一定是恒等算符

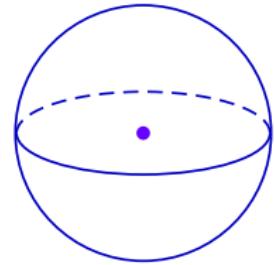
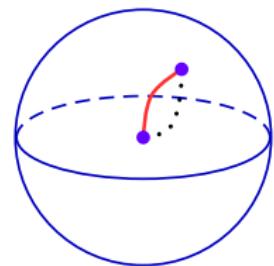


闭合曲线与双值表示

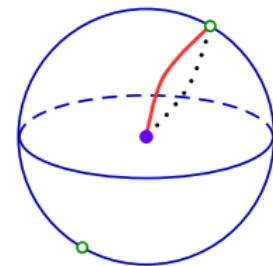
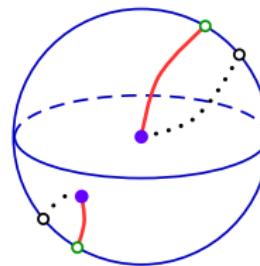
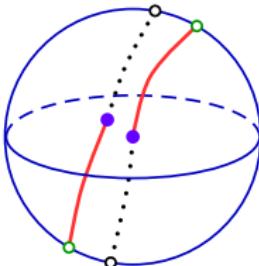
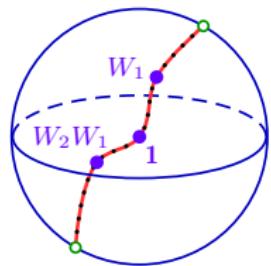


对于第二种情形，重复走闭合曲线的路径两次，则包含偶数次对径点跳跃，可通过连续形变消除这些跳跃，从而收缩成恒元一点

动画演示



闭合曲线与双值表示



对于第二种情形，重复走闭合曲线的路径两次，则包含偶数次对径点跳跃，可通过连续形变消除这些跳跃，从而收缩成恒元一点，也就是说， $[U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)]^2 = 1$

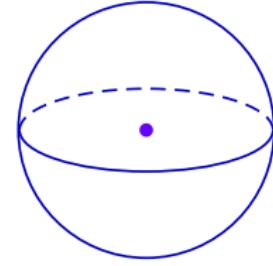
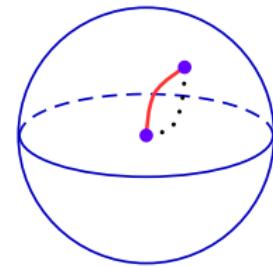
由此得到 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \pm 1$ ，即

$$U(W_2)U(W_1) = \pm U(W_2W_1)$$

可见，SO(3) 群的相位因子 $e^{i\varphi(W_2,W_1)}$ 可取 ± 1

相位因子既能取 $+1$ 又能取 -1 的情况对应于双值表示

动画演示



SU(2) 群的表示理论

 SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任意经过恒元的闭合曲线都能收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示

 接下来讨论 SU(2) 群的线性表示，从而为质量非零的单粒子态分类

 总角动量算符 \mathbf{J} 是 SU(2) 群的生成元算符

 SU(2) 代数关系为 $[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$

SU(2) 群的表示理论

SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任意经过恒元的闭合曲线都能收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示

接下来讨论 SU(2) 群的线性表示，从而为质量非零的单粒子态分类

总角动量算符 \mathbf{J} 是 SU(2) 群的生成元算符

SU(2) 代数关系为 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$

构造 2 阶 Casimir 算符 $J^2 \equiv J^i J^i = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$

由 ε^{ijk} 的全反对称推出

$$\begin{aligned}[J^2, J^i] &= [J^j J^j, J^i] = J^j [J^j, J^i] + [J^j, J^i] J^j \\ &= i\varepsilon^{jik} J^j J^k + i\varepsilon^{jik} J^k J^j = i(\varepsilon^{kji} + \varepsilon^{kij}) J^j J^k = 0\end{aligned}$$

即 J^2 与所有生成元对易，这是 Casimir 算符的一般特征

设厄米算符 J^2 与 J^3 的共同本征态为 $|\lambda, \sigma\rangle$ ，满足归一化关系 $\langle \lambda, \sigma | \lambda, \sigma \rangle = 1$

本征方程为 $J^2 |\lambda, \sigma\rangle = \lambda |\lambda, \sigma\rangle$ 和 $J^3 |\lambda, \sigma\rangle = \sigma |\lambda, \sigma\rangle$ ，其中本征值 λ 和 σ 是实数



Hendrik Casimir
(1909–2000)

升降算符

引入两个算符

$$\textcolor{violet}{J}^{\pm} \equiv J^1 \pm iJ^2$$

它们满足 $(\textcolor{violet}{J}^{\pm})^{\dagger} = \textcolor{blue}{J}^{\mp}$ 、 $[\mathbf{J}^2, \textcolor{violet}{J}^{\pm}] = 0$ 和

$$[\textcolor{brown}{J}^3, \textcolor{violet}{J}^{\pm}] = [J^3, J^1] \pm i[J^3, J^2] = iJ^2 \pm i(-iJ^1) = iJ^2 \pm J^1 = \pm \textcolor{violet}{J}^{\pm}$$

从而推出

$$\mathbf{J}^2 J^{\pm} |\lambda, \sigma\rangle = J^{\pm} \mathbf{J}^2 |\lambda, \sigma\rangle = \textcolor{red}{\lambda} \textcolor{blue}{J}^{\pm} |\lambda, \sigma\rangle$$

$$\textcolor{brown}{J}^3 J^{\pm} |\lambda, \sigma\rangle = (J^{\pm} J^3 \pm J^{\pm}) |\lambda, \sigma\rangle = (\sigma \pm 1) J^{\pm} |\lambda, \sigma\rangle$$

即 $J^{\pm} |\lambda, \sigma\rangle$ 的 \mathbf{J}^2 和 J^3 本征值分别是 λ 和 $\sigma \pm 1$ ，因而可表达为

$$J^{\pm} |\lambda, \sigma\rangle = c_{\lambda, \sigma}^{\pm} |\lambda, \sigma \pm 1\rangle$$

其中 $c_{\lambda, \sigma}^{\pm}$ 是归一化常数

这个结果表明， $\textcolor{teal}{J}^+$ 使 J^3 本征值增加 1，是一个升算符

$\textcolor{brown}{J}^-$ 使 J^3 本征值减少 1，是一个降算符

本征值 σ 的上下限

注意到 Hilbert 空间中态矢的自我内积非负，利用本征方程 $\mathbf{J}^2 |\lambda, \sigma\rangle = \lambda |\lambda, \sigma\rangle$ 、
 $\mathbf{J}^3 |\lambda, \sigma\rangle = \sigma |\lambda, \sigma\rangle$ 和 $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}^1)^2 + (\mathbf{J}^2)^2 + (\mathbf{J}^3)^2$ ，推出

$$\begin{aligned}\lambda - \sigma^2 &= \langle \lambda, \sigma | (\lambda - \sigma^2) |\lambda, \sigma \rangle = \langle \lambda, \sigma | [\mathbf{J}^2 - (\mathbf{J}^3)^2] |\lambda, \sigma \rangle \\&= \langle \lambda, \sigma | [(\mathbf{J}^1)^2 + (\mathbf{J}^2)^2] |\lambda, \sigma \rangle \\&= \langle \lambda, \sigma | (\mathbf{J}^1)^\dagger \mathbf{J}^1 |\lambda, \sigma \rangle + \langle \lambda, \sigma | (\mathbf{J}^2)^\dagger \mathbf{J}^2 |\lambda, \sigma \rangle \geq 0\end{aligned}$$

即 $\lambda \geq \sigma^2$ ，故 $\lambda \geq 0$ 且 $-\lambda \leq \sigma \leq \lambda$

本征值 σ 的上下限

 注意到 Hilbert 空间中态矢的自我内积非负，利用本征方程 $\mathbf{J}^2 |\lambda, \sigma\rangle = \lambda |\lambda, \sigma\rangle$ 、
 $J^3 |\lambda, \sigma\rangle = \sigma |\lambda, \sigma\rangle$ 和 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$ ，推出

$$\begin{aligned}\lambda - \sigma^2 &= \langle \lambda, \sigma | (\lambda - \sigma^2) |\lambda, \sigma \rangle = \langle \lambda, \sigma | [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2] |\lambda, \sigma \rangle \\ &= \langle \lambda, \sigma | [(J^1)^2 + (J^2)^2] |\lambda, \sigma \rangle \\ &= \langle \lambda, \sigma | (J^1)^\dagger J^1 |\lambda, \sigma \rangle + \langle \lambda, \sigma | (J^2)^\dagger J^2 |\lambda, \sigma \rangle \geq 0\end{aligned}$$

 即 $\lambda \geq \sigma^2$ ，故 $\lambda \geq 0$ 且 $-\lambda \leq \sigma \leq \lambda$

 这意味着 J^3 的本征值 σ 具有最大值 σ_{\max} 和最小值 σ_{\min} ，使得

$$J^+ |\lambda, \sigma_{\max}\rangle = 0, \quad J^- |\lambda, \sigma_{\min}\rangle = 0$$

 由于升降算符 J^\pm 对 $|\lambda, \sigma\rangle$ 的每次作用使 σ 的值增加或减小 1， σ 的所有取值为

$$\sigma_{\max}, \sigma_{\max} - 1, \dots, \sigma_{\min} + 1, \sigma_{\min}$$

 因而 $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ 是一个非负整数

角动量量子数

由 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$ 和对易关系 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$ 推出

$$J^\mp J^\pm = (J^1 \mp iJ^2)(J^1 \pm iJ^2) = (J^1)^2 + (J^2)^2 \pm i[J^1, J^2] = \mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3$$

$$0 = J^- \mathbf{J}^+ |\lambda, \sigma_{\max}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 - J^3] |\lambda, \sigma_{\max}\rangle = (\lambda - \sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max}) |\lambda, \sigma_{\max}\rangle$$

$$0 = J^+ \mathbf{J}^- |\lambda, \sigma_{\min}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 + J^3] |\lambda, \sigma_{\min}\rangle = (\lambda - \sigma_{\min}^2 + \sigma_{\min}) |\lambda, \sigma_{\min}\rangle$$

故 $\lambda = \sigma_{\max}(\sigma_{\max} + 1) = \sigma_{\min}(\sigma_{\min} - 1)$

角动量量子数

由 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$ 和对易关系 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$ 推出

$$\mathbf{J}^\mp \mathbf{J}^\pm = (J^1 \mp iJ^2)(J^1 \pm iJ^2) = (J^1)^2 + (J^2)^2 \pm i[J^1, J^2] = \mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3$$

$$0 = J^- \mathbf{J}^+ |\lambda, \sigma_{\max}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 - J^3] |\lambda, \sigma_{\max}\rangle = (\lambda - \sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max}) |\lambda, \sigma_{\max}\rangle$$

$$0 = J^+ \mathbf{J}^- |\lambda, \sigma_{\min}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 + J^3] |\lambda, \sigma_{\min}\rangle = (\lambda - \sigma_{\min}^2 + \sigma_{\min}) |\lambda, \sigma_{\min}\rangle$$

故 $\lambda = \sigma_{\max}(\sigma_{\max} + 1) = \sigma_{\min}(\sigma_{\min} - 1)$

将上式看作关于 σ_{\min} 的方程，第一个根 $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} + 1$ 不满足 $\sigma_{\min} \leq \sigma_{\max}$

只能取第二个根 $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$

令 $j \equiv \sigma_{\max}$ ，则 $\sigma_{\min} = -j$ ，而 $2j = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \geq 0$ 是一个整数

于是， j 的所有可能取值为 $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

\mathbf{J}^2 的本征值是 $\lambda = j(j + 1)$ ， j 称为角动量量子数

用角动量量子数和磁量子数描述的本征态

 σ 称为**磁量子数**，它是角动量在 z 轴方向上的**投影本征值**

 对于固定的 j ， σ 一共有 $2j + 1$ 个取值， $\sigma = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$

 将 \mathbf{J}^2 与 J^3 的共同本征态改记为 $|j, \sigma\rangle$ ，**正交归一关系**为

$$\langle j, \sigma' | j, \sigma \rangle = \delta_{\sigma' \sigma}, \quad \sigma, \sigma' = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$$

 **完备性关系**为 $\sum_{\sigma=-j}^j |j, \sigma\rangle \langle j, \sigma| = 1$

 本征方程是 $\mathbf{J}^2 |j, \sigma\rangle = j(j + 1) |j, \sigma\rangle$ 和 $J^3 |j, \sigma\rangle = \sigma |j, \sigma\rangle$

用角动量量子数和磁量子数描述的本征态

 σ 称为**磁量子数**，它是角动量在 z 轴方向上的**投影本征值**

 对于固定的 j ， σ 一共有 $2j+1$ 个取值， $\sigma = j, j-1, \dots, -j+1, -j$

 将 \mathbf{J}^2 与 J^3 的共同本征态改记为 $|j, \sigma\rangle$ ，**正交归一关系**为

$$\langle j, \sigma' | j, \sigma \rangle = \delta_{\sigma' \sigma}, \quad \sigma, \sigma' = j, j-1, \dots, -j+1, -j$$

 **完备性关系**为 $\sum_{\sigma=-j}^j |j, \sigma\rangle \langle j, \sigma| = 1$

 **本征方程**是 $\mathbf{J}^2 |j, \sigma\rangle = j(j+1) |j, \sigma\rangle$ 和 $J^3 |j, \sigma\rangle = \sigma |j, \sigma\rangle$

 J^\pm 对 $|j, \sigma\rangle$ 的作用为 $J^\pm |j, \sigma\rangle = c_{j, \sigma}^\pm |j, \sigma \pm 1\rangle$

 利用 $(J^\pm)^\dagger = J^\mp$ 和 $J^\mp J^\pm = \mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3$ 推出

$$\begin{aligned} |c_{j, \sigma}^\pm|^2 &= \langle j, \sigma \pm 1 | (c_{j, \sigma}^\pm)^* c_{j, \sigma}^\pm | j, \sigma \pm 1 \rangle = \langle j, \sigma | J^\mp J^\pm | j, \sigma \rangle \\ &= \langle j, \sigma | (\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3) | j, \sigma \rangle = j(j+1) - \sigma^2 \mp \sigma = (j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1) \end{aligned}$$

$J^+ |j, \sigma\rangle$ 的具体形式

于是 $|c_{j,\sigma}^\pm| = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}$, 而 $J^\pm |j, \sigma\rangle = c_{j,\sigma}^\pm |j, \sigma \pm 1\rangle$ 化为

$$J^\pm |j, \sigma\rangle = \zeta_{j,\sigma}^\pm \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} |j, \sigma \pm 1\rangle$$

其中 $\zeta_{j,\sigma}^\pm$ 是模为 1 的相位因子

上式给出 $J^+ |j, j\rangle = J^- |j, -j\rangle = 0$, 符合 $\sigma_{\max} = j$ 和 $\sigma_{\min} = -j$ 的条件

特别地, 这里将相位因子 $\zeta_{j,\sigma}^+$ 取为

$$\zeta_{j,\sigma}^+ = \begin{cases} -1, & \sigma \geq 0 \\ +1, & \sigma < 0 \end{cases}$$

则

$$J^+ |j, \sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j - \sigma)(j + \sigma + 1)} |j, \sigma + 1\rangle, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j - \sigma)(j + \sigma + 1)} |j, \sigma + 1\rangle, & \sigma < 0 \end{cases}$$

SU(2) 线性表示的生成元矩阵

下面构造 $SU(2)$ 群的 $2j + 1$ 维线性表示，相应的生成元矩阵 $\tau_{(j)}^i$ 定义为

$$(\tau_{(j)}^i)_{\sigma' \sigma} \equiv \langle j, \sigma' | \mathbf{J}^i | j, \sigma \rangle$$

由于 J^i 是厄米算符，有

$$(\tau_{(j)}^i)_{\sigma \sigma'}^* = \langle j, \sigma | \mathbf{J}^i | j, \sigma' \rangle^* = \langle j, \sigma' | (\mathbf{J}^i)^\dagger | j, \sigma \rangle = \langle j, \sigma' | J^i | j, \sigma \rangle = (\tau_{(j)}^i)_{\sigma' \sigma}$$

即 $\tau_{(j)}^i$ 是厄米矩阵， $(\tau_{(j)}^i)^\dagger = \tau_{(j)}^i$

由完备性关系 $\sum_{\sigma=-j}^j |j, \sigma\rangle \langle j, \sigma| = 1$ 和 $SU(2)$ 代数关系 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$ 推出

$$\begin{aligned} & [\tau_{(j)}^i, \tau_{(j)}^k]_{\sigma' \sigma} \\ &= \sum_{\sigma''} \left[\langle j, \sigma' | J^i | j, \sigma'' \rangle \langle j, \sigma'' | J^k | j, \sigma \rangle - \langle j, \sigma' | J^k | j, \sigma'' \rangle \langle j, \sigma'' | J^i | j, \sigma \rangle \right] \\ &= \langle j, \sigma' | [J^i, J^k] | j, \sigma \rangle = i\varepsilon^{ikl} \langle j, \sigma' | \mathbf{J}^l | j, \sigma \rangle = i\varepsilon^{ikl} (\tau_{(j)}^k)_{\sigma' \sigma} \end{aligned}$$

可见，这样定义的生成元矩阵也满足 $SU(2)$ 代数关系 $[\tau_{(j)}^i, \tau_{(j)}^k] = i\varepsilon^{ikl} \tau_{(j)}^l$

生成元矩阵的表达式

引入 $2j+1$ 阶方阵 $\tau_{(j)}^{\pm}$, 定义为 $(\tau_{(j)}^{\pm})_{\sigma'\sigma} \equiv \langle j, \sigma' | J^{\pm} | j, \sigma \rangle$

由 $J^+ |j, \sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} |j, \sigma+1\rangle, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} |j, \sigma+1\rangle, & \sigma < 0 \end{cases}$ 和 $\langle j, \sigma' | j, \sigma \rangle = \delta_{\sigma'\sigma}$ 得

$$(\tau_{(j)}^+)^{}_{\sigma'\sigma} = \langle j, \sigma' | J^+ | j, \sigma \rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} \delta_{\sigma', \sigma+1}, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} \delta_{\sigma', \sigma+1}, & \sigma < 0 \end{cases}$$

由 $(J^-)^\dagger = J^+$ 得 $(\tau_{(j)}^-)^{}_{\sigma'\sigma} = \langle j, \sigma' | J^- | j, \sigma \rangle = \langle j, \sigma | J^+ | j, \sigma' \rangle^* = (\tau_{(j)}^+)^*_{\sigma\sigma'}$, 即

$$\tau_{(j)}^- = (\tau_{(j)}^+)^{\dagger}$$

生成元矩阵的表达式

 引入 $2j+1$ 阶方阵 $\tau_{(j)}^{\pm}$ ，定义为 $(\tau_{(j)}^{\pm})_{\sigma'\sigma} \equiv \langle j, \sigma' | J^{\pm} | j, \sigma \rangle$

 由 $J^+ |j, \sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} |j, \sigma+1\rangle, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} |j, \sigma+1\rangle, & \sigma < 0 \end{cases}$ 和 $\langle j, \sigma' | j, \sigma \rangle = \delta_{\sigma'\sigma}$ 得

$$(\tau_{(j)}^+)^{}_{\sigma'\sigma} = \langle j, \sigma' | J^+ | j, \sigma \rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} \delta_{\sigma', \sigma+1}, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)} \delta_{\sigma', \sigma+1}, & \sigma < 0 \end{cases}$$

 由 $(J^-)^\dagger = J^+$ 得 $(\tau_{(j)}^-)^{}_{\sigma'\sigma} = \langle j, \sigma' | J^- | j, \sigma \rangle = \langle j, \sigma' | J^+ | j, \sigma \rangle^* = (\tau_{(j)}^+)^*_{\sigma'\sigma}$ ，即

$$\tau_{(j)}^- = (\tau_{(j)}^+)^{\dagger}$$

 根据 $J^{\pm} = J^1 \pm iJ^2$ ，有 $J^1 = \frac{1}{2}(J^+ + J^-)$ 和 $J^2 = -\frac{i}{2}(J^+ - J^-)$

 以此推出 $\tau_{(j)}^1 = \frac{1}{2}(\tau_{(j)}^+ + \tau_{(j)}^-)$ 和 $\tau_{(j)}^2 = -\frac{i}{2}(\tau_{(j)}^+ - \tau_{(j)}^-)$

 另一方面，本征方程 $J^3 |j, \sigma\rangle = \sigma |j, \sigma\rangle$ 表明

$$(\tau_{(j)}^3)^{}_{\sigma'\sigma} = \langle j, \sigma' | J^3 | j, \sigma \rangle = \langle j, \sigma' | \sigma | j, \sigma \rangle = \sigma \delta_{\sigma'\sigma}$$

二阶 Casimir 算符在 $2j + 1$ 维线性表示中的形式

 SU(2) 群二阶 Casimir 算符在 $2j + 1$ 维线性表示中定义为

$$\tau_{(j)}^2 \equiv \tau_{(j)}^i \tau_{(j)}^i$$

 由完备性关系 $\sum_{\sigma=-j}^j |j, \sigma\rangle \langle j, \sigma| = 1$ 和本征方程 $\mathbf{J}^2 |j, \sigma\rangle = j(j+1) |j, \sigma\rangle$ 推出

$$\begin{aligned} (\tau_{(j)}^2)_{\sigma' \sigma} &= (\tau_{(j)}^i \tau_{(j)}^i)_{\sigma' \sigma} = \sum_{\sigma''} \langle j, \sigma' | J^i | j, \sigma'' \rangle \langle j, \sigma'' | J^i | j, \sigma \rangle = \langle j, \sigma' | \mathbf{J}^2 | j, \sigma \rangle \\ &= \langle j, \sigma' | j(j+1) | j, \sigma \rangle = j(j+1) \delta_{\sigma' \sigma} \end{aligned}$$

2 维表示的生成元矩阵

利用上述表达式可以得到生成元矩阵 $\tau_{(j)}^i$ 的具体形式

当 $j = \frac{1}{2}$ 时, σ 和 σ' 都只能取 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$, 而非零的 $\tau_{(1/2)}^+$ 矩阵元只有

$$(\tau_{(1/2)}^+)_{{1/2}, -1/2} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| J^+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right)} = 1$$

故

$$\tau_{(1/2)}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{(1/2)}^- = (\tau_{(1/2)}^+)^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

进而得到 SU(2) 群 2 维线性表示的生成元矩阵

$$\tau_{(1/2)}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^1}{2}, \quad \tau_{(1/2)}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \tau_{(1/2)}^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^3}{2}$$

这显然是基础表示的生成元矩阵, 前面用 Pauli 矩阵表达过

3 维表示的生成元矩阵

 当 $j = 1$ 时, σ 和 σ' 的取值为 1、0 和 -1, 非零的 $\tau_{(1)}^+$ 矩阵元是

$$(\tau_{(1)}^+)_{{\color{blue}1}, {\color{brown}0}} = \langle 1, 1 | J^+ | 1, 0 \rangle = -\sqrt{(1-0)(1+0+1)} = -\sqrt{2}$$

$$(\tau_{(1)}^+)_{{\color{brown}0}, {\color{blue}-1}} = \langle 1, 0 | J^+ | 1, -1 \rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)} = \sqrt{2}$$

 故

$$\tau_{(1)}^+ = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{(1)}^- = (\tau_{(1)}^+)^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

 进而得到 SU(2) 群 3 维线性表示的生成元矩阵

$$\tau_{(1)}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & & \\ -1 & 1 & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad \tau_{(1)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & i & \\ -i & & -i \\ & i & \end{pmatrix}, \quad \tau_{(1)}^3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

SU(2) 群的不等价不可约线性表示

 任意小群变换 $W \in \text{SO}(3)$ 可以用三个空间旋转角 θ^i 描述

它在 $SU(2)$ 群的 $2j+1$ 维线性表示中诱导出表示矩阵

$$D^{(j)}[W(\theta^i)] = \exp(i\theta^i \tau_{(j)}^i)$$

其无穷小展开式符合 $1 + i\theta^a t^a + \mathcal{O}(\theta^a \theta^b)$ 的形式

这样的表示矩阵的集合构成了 $SU(2)$ 群的 $2j+1$ 维线性表示 $D^{(j)}$

实际上， $SU(2)$ 群所有的不等价不可约线性表示就是

$$D^{(j)}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

它们都是幺正表示，因为生成元矩阵 $\tau_{(j)}^i$ 是厄米的

自旋为 s 的有质量单粒子态

 对于自由的单粒子态，不存在轨道角动量

 因而 \mathbf{J} 相当于自旋角动量算符 \mathbf{S} ，而自旋量子数是 $s = j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

 $2s + 1$ 维线性表示的矩阵元表达为 $D_{\sigma' \sigma}^{(s)}(W)$

 其中 $\sigma', \sigma = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ 是自旋在 z 轴方向上的投影本征值

 根据前面的结果，自旋为 s 的有质量单粒子态 $|\Psi_{s,\sigma}(p^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda) |\Psi_{s,\sigma}(p^\mu)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}^{(s)} [V^{-1}(\Lambda p) \Lambda V(p)] |\Psi_{s,\sigma'}(\Lambda^\mu_\nu p^\nu)\rangle$$

 因此，自旋为 s 的有质量粒子具有 $2s + 1$ 种自旋极化态

 量子 Lorentz 变换将 σ 对应的极化态变成 σ' 对应的极化态的线性组合

整数自旋和半奇数自旋



当 s 为整数 $(0, 1, 2, \dots)$ 时, $D^{(s)}$ 是 $SU(2)$ 群的非忠实线性表示, 同时也是 $SO(3)$ 群的线性表示, 描述整数自旋的粒子



$D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示, 描述零自旋粒子



$D^{(1)}$ 是 $SO(3)$ 群的基础表示, 描述自旋为 1 的粒子

整数自旋和半奇数自旋



当 s 为整数 $(0, 1, 2, \dots)$ 时, $D^{(s)}$ 是 $SU(2)$ 群的非忠实线性表示, 同时也是 $SO(3)$ 群的线性表示, 描述整数自旋的粒子



$D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示, 描述零自旋粒子



$D^{(1)}$ 是 $SO(3)$ 群的基础表示, 描述自旋为 1 的粒子



当 s 为半奇数 $(1/2, 3/2, 5/2, \dots)$ 时, $D^{(s)}$ 是 $SU(2)$ 群的忠实线性表示, 同时也是 $SO(3)$ 群的双值表示, 描述半奇数自旋的粒子



$D^{(1/2)}$ 是 $SU(2)$ 群的基础表示, 描述自旋为 $1/2$ 的粒子



可见, 半奇数自旋是量子理论特有的

Lorentz 群和 Poincaré 群的覆盖群

🍉 由于包含双连通的子群 $SO(3)$ ，固有保时向 Lorentz 群 $SO^\uparrow(1, 3)$ 也是双连通的

🦕 它的覆盖群是复数域 \mathbb{C} 上的 2 阶特殊线性群 $SL(2, \mathbb{C})$ ，见习题 3.6

👉 在 Poincaré 群空间中，与恒元连通的部分对应于 $SO^\uparrow(1, 3)$ 与时空平移群的半直积群，它是双连通的

🦖 相应的覆盖群是 $SL(2, \mathbb{C})$ 与时空平移群的半直积群

⌚ 3.1.1 和 3.1.2 小节的讨论没有在量子 Poincaré 变换的同态关系

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

中引入相位因子

💡 这相当于在覆盖群的线性表示中进行讨论，因而导出的结果是合理的

3.3.2 小节 无质量的粒子

 对于无质量的粒子， $p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$

 此时 p^μ 是类光矢量，取标准四维动量为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ ，其中 $\kappa > 0$

 相应三维动量 k 沿 z 轴方向，相应小群中的任意变换 W^μ_{ν} 满足 $W^\mu_{\nu} k^\nu = k^\mu$

 为了知道保持 k^μ 不变的小群是什么，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu / \kappa = (1, 0, 0, 1)$

 由 $W^\mu_{\nu} \tilde{k}^\nu = W^\mu_{\nu} k^\nu / \kappa = k^\mu / \kappa = \tilde{k}^\mu$ 得知， \tilde{k}^μ 也在小群变换下不变

3.3.2 小节 无质量的粒子

对于无质量的粒子, $p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$

此时 p^μ 是类光矢量, 取标准四维动量为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$, 其中 $\kappa > 0$

相应三维动量 k 沿 z 轴方向, 相应小群中的任意变换 W^μ_{ν} 满足 $W^\mu_{\nu} k^\nu = k^\mu$

为了知道保持 k^μ 不变的小群是什么, 引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu / \kappa = (1, 0, 0, 1)$

由 $W^\mu_{\nu} \tilde{k}^\nu = W^\mu_{\nu} k^\nu / \kappa = k^\mu / \kappa = \tilde{k}^\mu$ 得知, \tilde{k}^μ 也在小群变换下不变

相应协变矢量满足 $\tilde{k}_\mu = \tilde{k}_\nu (W^{-1})^\nu_\mu$, 再引入类时 Lorentz 矢量 $t^\mu = (1, 0, 0, 0)$

记 $t^\mu \equiv W^\mu_{\nu} \tilde{k}^\nu$, 推出 $t^\mu \tilde{k}_\mu = W^\mu_{\nu} \tilde{k}^\nu \tilde{k}_\rho (W^{-1})^\rho_\mu = \delta^\rho_\nu \tilde{k}^\nu \tilde{k}_\rho = \tilde{k}^\nu \tilde{k}_\nu = 1$

满足这样一个 $1 = t^\mu \tilde{k}_\mu = t^0 - t^3$ 条件的 t^μ 一般形式为 $t^\mu = (1 + \zeta, \alpha, \beta, \zeta)$

由于 $(1 + \zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = t^\mu t_\mu = \delta^\nu_\mu t^\mu t_\nu = W^\rho_\mu t^\mu t_\nu (W^{-1})^\nu_\rho = \tilde{t}^\rho \tilde{t}_\rho = 1$

ζ 与 α 、 β 的关系为 $\zeta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$, $\alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$

实数 α 和 β 的取值不受约束

小群变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)$

考慮固有保时向 Lorentz 变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1 - \zeta \end{pmatrix}$

它满足 $g = S^T g S$ 和 $\det(S) = 1$ ，且第一列是 $t^\mu = (1 + \zeta, \alpha, \beta, \zeta)$

 $S(\alpha, \beta)$ 对 $\tilde{t}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 的作用为 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)\tilde{t}^\nu = t^\mu = W^\mu{}_\nu\tilde{t}^\nu$

小群变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)$

考慮固有保时向 Lorentz 变换 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1 - \zeta \end{pmatrix}$

它满足 $g = S^T g S$ 和 $\det(S) = 1$ ，且第一列是 $t^\mu = (1 + \zeta, \alpha, \beta, \zeta)$

$S(\alpha, \beta)$ 对 $\tilde{t}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 的作用为 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)\tilde{t}^\nu = t^\mu = W^\mu{}_\nu\tilde{t}^\nu$

这意味着 $\tilde{t}^\rho = [S^{-1}(\alpha, \beta)]^\rho{}_\mu S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)\tilde{t}^\nu = [S^{-1}(\alpha, \beta)]^\rho{}_\mu W^\mu{}_\nu\tilde{t}^\nu$

变换 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 保持类时矢量 $\tilde{t}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 不变，必定是空间旋转变换

由 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)k^\nu = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1 - \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} = k^\nu$ 可知

$S(\alpha, \beta)$ 是一个小群变换

小群变换的一般形式

从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 是保持 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ 不变的空间旋转变换

它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$ ，满足

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

于是，小群变换的最一般形式是 $W(\alpha, \beta, \theta) = S(\alpha, \beta)R_z(\theta)$

小群变换的一般形式

从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 是保持 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ 不变的空间旋转变换

它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$ ，满足

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

于是，小群变换的最一般形式是 $W(\alpha, \beta, \theta) = S(\alpha, \beta)R_z(\theta)$

通过计算可知， $S(\alpha, \beta)$ 和 $R_z(\theta)$ 分别满足

$$S(\alpha_1, \beta_1)S(\alpha_2, \beta_2) = S(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

$$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2) = R_z(\theta_1 + \theta_2)$$

从而 $S(\alpha_1, \beta_1)S(\alpha_2, \beta_2) = S(\alpha_2, \beta_2)S(\alpha_1, \beta_1)$ ， $R_z(\theta_1)R_z(\theta_2) = R_z(\theta_2)R_z(\theta_1)$

因此 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 和 $\{R_z(\theta)\}$ 分别构成小群的两个 Abel 子群

小群 ISO(2)

🥜 进一步推出 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha, \beta)R_z(\theta) = S(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta, \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)$

🐶 这意味着 $S(\alpha, \beta)$ 在任意小群元素的相似变换下变换到子群 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 中的元素

🐱 在这种情况下，数学上称 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 是小群的不变子群 (invariant subgroup)

小群 ISO(2)

🥜 进一步推出 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha, \beta)R_z(\theta) = S(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta, \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)$

🐶 这意味着 $S(\alpha, \beta)$ 在任意小群元素的相似变换下变换到子群 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 中的元素

🐱 在这种情况下，数学上称 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 是小群的不变子群 (invariant subgroup)

芒果 小群变换的以上乘法关系与二维 Euclid 空间的等距群

ISO(2) 中的乘法关系相同

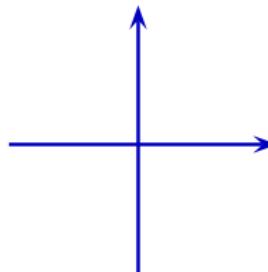
🥦 ISO(2) 群变换由二维平面上的平移

变换和旋转变换组成

🍊 由于 $\alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$ ， (α, β) 可以作为二维平移变换的参数

🐺 而 θ 是旋转变换的参数

🐯 因此这里的**小群**就是 ISO(2) 群



Euclid

(约前 325 至约前 270)

ISO(2) 无穷小变换

现在讨论小群 ISO(2) 的生成元算符, ISO(2) 变换

$$W(\alpha, \beta, \theta) = S(\alpha, \beta)R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1 - \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

的无穷小形式是 $W^{\mu\nu}(\alpha, \beta, \theta) = \delta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$, 其中无穷小参数为

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha \\ \beta & -\theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & -\theta & \alpha \\ -\beta & \theta & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\alpha = \omega_{13} = \omega_{01}$, $\beta = \omega_{23} = \omega_{02}$, $\theta = \omega_{21}$

容易验证 $\omega^{\mu\nu}k^\nu = 0$, 因而这样的无穷小变换保持 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ 不变

ISO(2) 生成元算符



相应的无穷小量子变换为

$$\begin{aligned} U(1 + \omega) &= -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu \\ &= 1 - i(\omega_{31} J^{31} + \omega_{01} J^{01}) - i(\omega_{23} J^{23} + \omega_{02} J^{02}) - i\omega_{12} J^{12} \\ &= 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J^3 \end{aligned}$$



其中 $J^3 = J^{12}$ ，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$A \equiv J^{31} - J^{01} = J^2 - K^1, \quad B \equiv -J^{23} - J^{02} = -J^1 - K^2$$

ISO(2) 生成元算符

相应的无穷小量子变换为

$$\begin{aligned} U(1 + \omega) &= -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu \\ &= 1 - i(\omega_{31} J^{31} + \omega_{01} J^{01}) - i(\omega_{23} J^{23} + \omega_{02} J^{02}) - i\omega_{12} J^{12} \\ &= 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J^3 \end{aligned}$$

其中 $J^3 = J^{12}$ ，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$A \equiv J^{31} - J^{01} = J^2 - K^1, \quad B \equiv -J^{23} - J^{02} = -J^1 - K^2$$

由 Lorentz 代数关系推出小群 ISO(2) 的生成元算符 J^3 、 A 和 B 的对易关系

$$[J^3, A] = [J^3, J^2] - [J^3, K^1] = -iJ^1 - iK^2 = iB,$$

$$[J^3, B] = -[J^3, J^1] - [J^3, K^2] = -iJ^2 + iK^1 = -iA,$$

$$[A, B] = -[J^2, J^1] - [J^2, K^2] + [K^1, J^1] + [K^1, K^2] = iJ^3 - iJ^3 = 0$$

这与 Poincaré 代数关系中 $[J^3, P^2] = iP^1$ 、 $[J^3, P^1] = -iP^2$ 和 $[P^2, P^1] = 0$ 相同

毕竟 J^3 、 P^1 和 P^2 生成了 xy 平面的 ISO(2) 群变换

A 和 B 的共同本征态

A 与 B 是相互对易的厄米算符，能够具有共同的本征单粒子态 $|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$

本征值分别为 a 和 b，满足

$$A |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = a |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle, \quad B |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = b |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$$

根据 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha, \beta)R_z(\theta) = S(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta, \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)$

小群 ISO(2) 的量子变换满足同态关系

$$U^{-1}[R_z(\theta)]U[S(\alpha, \beta)]U[R_z(\theta)] = U[S(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta, \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)]$$

将上式展开到无穷小参数 α 和 β 的第一阶，得

$$U^{-1}[R_z(\theta)](1 + i\alpha A + i\beta B)U[R_z(\theta)] = 1 + i(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta)A + i(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)B$$

由 α 和 β 的任意性推出

$$U^{-1}[R_z(\theta)]AU[R_z(\theta)] = A \cos \theta + B \sin \theta$$

$$U^{-1}[R_z(\theta)]BU[R_z(\theta)] = -A \sin \theta + B \cos \theta$$

态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle$ 的 A 、 B 本征值

🍐 两边左乘 $U[R_z(\theta)]$ ，得 $AU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](A \cos \theta + B \sin \theta)$

$$BU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](-A \sin \theta + B \cos \theta)$$

鳩 那么，态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle \equiv U[R_z(\theta)]|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$ 是 A 和 B 的共同本征态，

$$\begin{aligned} A |\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle &= AU[R_z(\theta)] |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = U[R_z(\theta)](A \cos \theta + B \sin \theta) |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\ &= U[R_z(\theta)](a \cos \theta + b \sin \theta) |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\ &= (a \cos \theta + b \sin \theta) |\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B |\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle &= BU[R_z(\theta)] |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = U[R_z(\theta)](-A \sin \theta + B \cos \theta) |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\ &= U[R_z(\theta)](-a \sin \theta + b \cos \theta) |\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\ &= (-a \sin \theta + b \cos \theta) |\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle \end{aligned}$$

🍆 由于转动角 θ 取连续值，本征值 $a \cos \theta + b \sin \theta$ 和 $-a \sin \theta + b \cos \theta$ 也是连续的

螺旋度

 因此，只要 a 和 b 不全为零，就有一系列连续的单粒子态 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle$

 但是，实验上没有观测到无质量粒子具有以转动角 θ 作为连续自由度的物理态

 因此，自然界中的物理态是 $a = b = 0$ 的本征态，只由剩下的小群生成元算符 J^3 的本征值 σ 标记，记作 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ ，满足

$$A |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = 0, \quad B |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = 0, \quad J^3 |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sigma |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

 J^3 是总角动量算符 J 沿 z 轴方向的分量

 由于自由的单粒子态不具有轨道角动量， J 在这里只描述自旋角动量

 标准四维动量 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ 对应的三维动量 k 也沿着 z 轴方向

 因此 σ 就是自旋角动量在动量方向上的投影本征值，称为螺旋度 (helicity)

小群表示矩阵 $D_{\sigma'\sigma}(W)$

鳩 无穷小量子变换 $U(1 + \omega) = 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J^3$ 表明

$$\frac{\partial U[S(\alpha, \beta)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\beta=0} = iA, \quad \frac{\partial U[S(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=\beta=0} = iB, \quad \frac{dU[R_z(\theta)]}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = iJ^3$$

海螺 由此求得 $U[S(\alpha, \beta)] = \exp(i\alpha A + i\beta B)$ 和 $U[R_z(\theta)] = \exp(i\theta J^3)$

海豚 一般小群变换 $W(\alpha, \beta, \theta) = S(\alpha, \beta)R_z(\theta)$ 对应的量子变换为

$$U[W(\alpha, \beta, \theta)] = U[S(\alpha, \beta)]U[R_z(\theta)] = \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(i\theta J^3)$$

章鱼 作用到单粒子物理态 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上, 得

$$U[W(\alpha, \beta, \theta)] |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \exp(i\sigma\theta) |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$$

龙虾 与 $U(W) |\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W) |\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle$ 式比较, 有

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\sigma\theta) \delta_{\sigma'\sigma}$$

无质量粒子螺旋度的 Lorentz 不变性

另一方面, $V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)]R_z[\theta(\Lambda, p)]$ 决定了 θ 对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系

一般单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)] |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} \exp(i\sigma\theta) \delta_{\sigma'\sigma} |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[i\sigma\theta(\Lambda, p)] |\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \end{aligned}$$

无质量粒子螺旋度的 Lorentz 不变性

另一方面, $V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)]R_z[\theta(\Lambda, p)]$ 决定了 θ 对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系

一般单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)] |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} \exp(i\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma} |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[i\sigma\theta(\Lambda, p)] |\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle \end{aligned}$$

这表明 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 与变换后的态 $U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 具有相同的 σ

也就是说, 量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 不会混合具有不同螺旋度的无质量粒子态

对无质量粒子来说, 螺旋度 σ 是固有保时向 Lorentz 变换的不变量, 在所有惯性系中取值相同

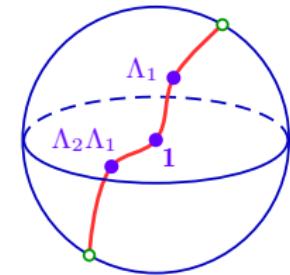
因此, 无质量粒子可根据螺旋度 σ 的值分类

无质量粒子的螺旋度

 前面提到，**固有保时向 Lorentz 群 $SO^{\uparrow}(1, 3)$** 的群空间是**双连通的**

 与 $SO(3)$ 的情况**类似**，群空间内从**恒元**出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到**恒元的闭合曲线**分为**两类**，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能

 由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$



无质量粒子的螺旋度

前面提到，**固有保时向 Lorentz 群 $SO^{\uparrow}(1, 3)$** 的群空间是**双连通的**

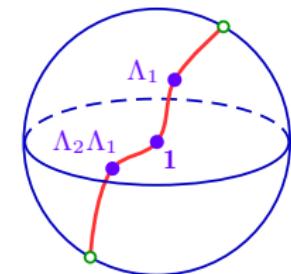
与 $SO(3)$ 的情况**类似**，群空间内从**恒元**出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到**恒元的闭合曲线**分为**两类**，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能

由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$

如果一条闭合曲线包含的旋转变换**累计绕 z 轴转动角度** $\theta = 2\pi$ ，那么它会在 $SO(3)$ 群空间中经历一次对径点跳跃，这是因为**累计转动 π 角**时必定到达一个**对径点**

对于无质量粒子态， $U(\Lambda)|\Psi_{\sigma}(p^{\mu})\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[i\sigma\theta(\Lambda, p)] |\Psi_{\sigma}(\Lambda^{\mu}_{\nu}p^{\nu})\rangle$

这条闭合曲线产生**因子** $\exp(i\sigma\theta) = \exp(2\pi\sigma i)$ ，它应该就是上面的**相位因子** ± 1



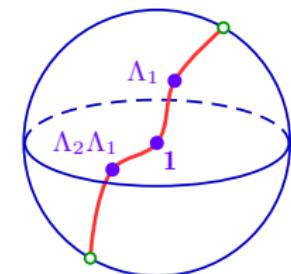
无质量粒子的螺旋度

前面提到，**固有保时向 Lorentz 群 $SO^{\uparrow}(1, 3)$** 的群空间是**双连通的**

与 $SO(3)$ 的情况**类似**，群空间内从**恒元**出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到**恒元的闭合曲线**分为**两类**，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能

由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$

如果一条闭合曲线包含的旋转变换**累计绕 z 轴转动角度** $\theta = 2\pi$ ，那么它会在 $SO(3)$ 群空间中经历一次**对径点跳跃**，这是因为**累计转动 π 角**时必定到达一个**对径点**



对于无质量粒子态， $U(\Lambda)|\Psi_{\sigma}(p^{\mu})\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[i\sigma\theta(\Lambda, p)] |\Psi_{\sigma}(\Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu})\rangle$

这条闭合曲线产生**因子** $\exp(i\sigma\theta) = \exp(2\pi\sigma i)$ ，它应该就是上面的**相位因子** ± 1

如果一条闭合曲线包含的旋转变换**累计绕 z 轴转动 4π 角**，则它会包含**两次对径点跳跃**，从而可以**连续地收缩成恒元一点**，相应的**相位因子**是 1 ，故

$$\exp(4\pi\sigma i) = 1$$

无质量粒子的自旋量子数

exp($4\pi\sigma i$) = 1 这个条件限制了无质量粒子螺旋度 σ 的取值，要求

$$\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \dots$$

娃 σ 为整数 对应于 $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$ 的线性表示， σ 为半奇数 对应于 $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$ 的双值表示

球 由于螺旋度是自旋角动量在动量方向上的投影，无质量粒子自旋量子数可取为

$$s = |\sigma| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

魔杖 这与有质量粒子的取值情况一样

巫师 于是，自旋为 s 的无质量粒子具有 2 种自旋极化态，对应于 2 种螺旋度 $\sigma = \pm s$

无质量粒子的自旋量子数

 $\exp(4\pi\sigma i) = 1$ 这个条件限制了无质量粒子螺旋度 σ 的取值，要求

$$\sigma = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \pm \frac{5}{2}, \dots$$

 σ 为整数 对应于 $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$ 的线性表示， σ 为半奇数 对应于 $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$ 的双值表示

 由于螺旋度是自旋角动量在动量方向上的投影，无质量粒子自旋量子数可取为

$$s = |\sigma| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

 这与有质量粒子的取值情况一样

 于是，自旋为 s 的无质量粒子具有 2 种自旋极化态，对应于 2 种螺旋度 $\sigma = \pm s$

 如果没有额外条件，可以把 s 相同而 σ 不同的两种无质量粒子当作不同粒子对待

 不过，额外的条件是存在的

 宇称变换会改变 σ 的符号，从而联系螺旋度相反的两种无质量粒子

光子、引力子和中微子

如果无质量粒子不具有破坏宇称的相互作用，则螺旋度相反的两种粒子具有相同的相互作用行为，从而可以把它们当作同一种粒子的两种自由度

实际上，电磁相互作用、强相互作用和引力相互作用都保持宇称守恒

作为电磁场的量子，光子是自旋为 1 的无质量粒子，具有 -1 和 $+1$ 两种螺旋度，分别对应于真空电磁波的左旋圆极化和右旋圆极化

假想的引力子 (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度

光子、引力子和中微子

 如果无质量粒子不具有破坏宇称的相互作用，则螺旋度相反的两种粒子具有相同的相互作用行为，从而可以把它们当作同一种粒子的两种自由度

 实际上，电磁相互作用、强相互作用和引力相互作用都保持宇称守恒

 作为电磁场的量子，光子是自旋为 1 的无质量粒子，具有 -1 和 $+1$ 两种螺旋度，分别对应于真空电磁波的左旋圆极化和右旋圆极化

 假想的引力子 (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度

 在标准模型中，自旋为 $1/2$ 的中微子没有质量，参与破坏宇称的弱相互作用

 因而可以把螺旋度相反的两种中微子当作两种粒子，螺旋度为 $-1/2$ 的左旋中微子是狭义的中微子，螺旋度为 $+1/2$ 的右旋中微子称为反中微子