

# 量子场论

## 第5章 量子场的相互作用

### 5.5节 散射截面和衰变宽度

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期: 2022年7月11日

## 5.5 节 散射截面和衰变宽度

在没有相互作用的理论中,  $S$  算符就是单位算符 1,  $S$  矩阵为  $S_{fi} = \langle f | i \rangle$

存在相互作用时,  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的  $n = 0$  项也是单位算符, 因此可以将  $S$  算符分解为  $S = 1 + iT$ , 其中  $iT$  包含所有  $n \geq 1$  的项   $S$  矩阵分解为  $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | iT | i \rangle$

右边第一项意味着, 即使理论中存在相互作用, 初态也有一定概率自由地演化, 也就是说, 初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

 由此可见,  $S$  矩阵中真正描述相互作用的项是  $\langle f | iT | i \rangle$

## 5.5 节 散射截面和衰变宽度

在没有相互作用的理论中,  $S$  算符就是单位算符  $1$ ,  $S$  矩阵为  $S_{fi} = \langle f | i \rangle$

■ 存在相互作用时,  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

这个级数的  $n = 0$  项也是单位算符，因此可以将  $S$  算符分解为  $S = 1 + iT$ ，其中  $iT$  包含所有  $n \geq 1$  的项   $S$  矩阵分解为  $S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | iT | i \rangle$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

由此可见,  $S$  矩阵中真正描述相互作用的项是  $\langle f | iT | i \rangle$

由于能动量守恒定律, 初态  $|i\rangle$  中所有粒子的四维动量之和  $p_i^\mu$  必定等于末态  $|f\rangle$  中所有粒子的四维动量之和  $p_f^\mu$ , 这意味着散射矩阵元的形式为

$$\langle f | iT | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i\mathcal{M}$$

四维  $\delta$  函数体现了能动量守恒定律； $M$  是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元**，或**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态动量的函数

## 5.5.1 小节 跃迁概率

 **发生相互作用**时,  $i \rightarrow f$  的**跃迁概率**可以表示成  $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

 根据  $\delta$  函数的性质  $f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$ , **分子**为

$$|\langle f | iT | i \rangle|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^{(4)} \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

 由于  $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

 四维  $\delta$  函数满足 Fourier 变换公式  $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$

## 5.5.1 小节 跃迁概率

 **发生相互作用**时,  $i \rightarrow f$  的**跃迁概率**可以表示成  $P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

 根据  $\delta$  函数的性质  $f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$ , 分子为

$$|\langle f | iT | i \rangle|^2 = [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2 |\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$$

 由于  $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = \int dx^0 e^{\pm ip^0 x^0} \int d^3x e^{\mp ip \cdot x} = 2\pi \delta(p^0) \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$

 四维  $\delta$  函数满足 Fourier 变换公式  $\int d^4x e^{\pm ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)$

 故  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \tilde{V}\tilde{T}$ ,  $\tilde{V}$  是**空间区域的体积**,  $\tilde{T}$  是**时间范围的长度**

 对于**全空间全时间**积分,  $\tilde{V}$  和  $\tilde{T}$  趋于无穷大

 于是推出  $|\langle f | iT | i \rangle|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2$

 对于时空坐标的函数  $f(x)$ , 将 Fourier 变换约定为  $\tilde{f}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x)$

 Fourier 逆变换为  $f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{f}(p)$

## 初态和末态

现在讨论 **2** 体初态到 **n** 体末态的跃迁过程，即初态  $|i\rangle$  包含 **2** 个粒子  $A$  和  $B$ ，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n** 个粒子的末态  $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为  $p_A$  和  $p_B$ ，则  $|i\rangle$  可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

 此处省略了产生算符的螺旋度指标(或者说,自旋指标)

$|0\rangle$  是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到零

## 初态和末态

现在讨论 **2** 体初态到 **n** 体末态的跃迁过程，即初态  $|i\rangle$  包含 **2** 个粒子 **A** 和 **B**，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 **n** 个粒子的末态  $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为  $p_A$  和  $p_B$ ，则  $|i\rangle$  可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}$$

 此处省略了产生算符的螺旋度指标(或者说,自旋指标)

|0>是真空态，理论中任意湮灭算符作用到它身上都将得到零

类似地，末态可以写成

$$|f\rangle = \left( \prod_{j=1}^n \sqrt{2E_j} \, a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \right) |0\rangle, \quad E_j = p_j^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}$$

其中  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 是  $n$  个末态粒子的动量

此时，初态和末态的**四维总动量**分别是  $p_i^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu$  和  $p_f^\mu = \sum_{j=1}^n p_j^\mu$

# 初末态内积

 当  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态  $|i\rangle$  改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

 这里  $|0\rangle_{\mathcal{A}}$  和  $|0\rangle_{\mathcal{B}}$  分别是描述  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  的两个量子场所对应的**真空态**

 参考：实标量场单粒子态内积  $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

 利用  $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ ，单粒子态  $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$  和  $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$  的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

 于是得到  $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

# 初末态内积

当  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  粒子由两个不同的量子场描述时, 可把初态  $|i\rangle$  改写为单粒子态的直积,

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}} a_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

这里  $|0\rangle_{\mathcal{A}}$  和  $|0\rangle_{\mathcal{B}}$  分别是描述  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  的两个量子场所对应的**真空态**

参考: 实标量场单粒子态内积  $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p} \rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

利用  $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$ , 单粒子态  $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$  和  $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$  的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

于是得到  $\langle i|i \rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

当  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  是由同一量子场描述的**全同粒子**时, 若  $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \neq \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ , 也能推出这个结果

如果末态**不包含全同粒子**, 同理可得  $\langle f|f \rangle = \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})$

# 单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{\tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态  $|i\rangle$  演化到遥远未来的末态  $|f\rangle$  所经历的时间为  $\tilde{T}$ ，对于一组特定的末态动量  $\{p_j\}$ ，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[ 4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

# 单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{f|i} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{\tilde{V} \tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V}^2 \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})} = \frac{\tilde{T} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}|^2}{4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态  $|i\rangle$  演化到遥远未来的末态  $|f\rangle$  所经历的时间为  $\tilde{T}$ ，对于一组特定的末态动量  $\{p_j\}$ ，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{f|i}}{\tilde{T}} = \left[ 4E_A E_B \tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

此处四维  $\delta$  函数可以分解为

$$\delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) = \delta^{(3)} \left( \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right) \delta \left( E_A + E_B - \sum_{j=1}^n E_j \right)$$

在散射过程中，末态中  $n$  个粒子的动量可以取任意满足运动学要求的值，而能动量守恒定律对应的运动学条件  $p_A^\mu + p_B^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu = 0$  已经体现在四维  $\delta$  函数中

# 一维动量相空间

 为了计算总的跃迁率, 需要将  $\{p_j\}$  的所有可能取值包含起来, 也就是说, 需要对末态的动量相空间积分

 考察一维动量相空间, 先假定粒子在  $x \in [-L/2, L/2]$  范围内运动, 再让  $L \rightarrow \infty$

 为了确保动量算符  $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$  在区间  $[-L/2, L/2]$  上是厄米算符, 必须要求描述粒子的波函数  $\varphi(x)$  满足周期性边界条件  $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

# 一维动量相空间

为了计算总的跃迁率, 需要将  $\{p_j\}$  的所有可能取值包含起来, 也就是说, 需要对末态的动量相空间积分

考察一维动量相空间, 先假定粒子在  $x \in [-L/2, L/2]$  范围内运动, 再让  $L \rightarrow \infty$

为了确保动量算符  $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$  在区间  $[-L/2, L/2]$  上是厄米算符, 必须要求描述粒子的波函数  $\varphi(x)$  满足周期性边界条件  $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

作为动量本征态的波函数是平面波解  $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

结合周期性边界条件, 有  $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ , 故  $\exp(ipL) = 1$

这意味着  $pL = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 因此动量本征值是  $p_k = 2k\pi/L$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

# 一维动量相空间

为了计算总的跃迁率, 需要将  $\{p_j\}$  的所有可能取值包含起来, 也就是说, 需要对末态的动量相空间积分

考察一维动量相空间, 先假定粒子在  $x \in [-L/2, L/2]$  范围内运动, 再让  $L \rightarrow \infty$

为了确保动量算符  $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$  在区间  $[-L/2, L/2]$  上是厄米算符, 必须要求描述粒子的波函数  $\varphi(x)$  满足周期性边界条件  $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I (第四版) §4.4.3]

作为动量本征态的波函数是平面波解  $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

结合周期性边界条件, 有  $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$ , 故  $\exp(ipL) = 1$

这意味着  $pL = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 因此动量本征值是  $p_k = 2k\pi/L$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

当  $L \rightarrow \infty$  时, 相邻动量本征值之差变成动量的微分,

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \rightarrow dp, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp$$

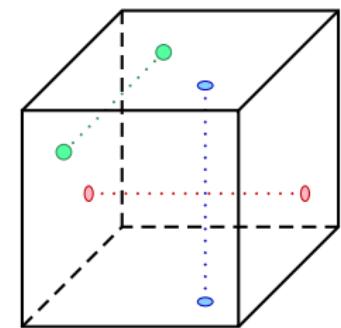
👉  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp$

# 单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为  $\tilde{V} = L^3$  的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

 满足此条件的**动量本征值**为  $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$ ,  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

 当  $L \rightarrow \infty$  时，有  $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$



# 单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为  $\tilde{V} = L^3$  的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的对应点等同

满足此条件的**动量本征值**为  $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3)$ ,  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

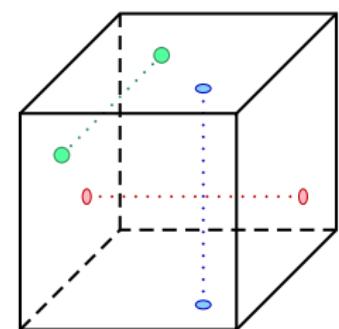
当  $L \rightarrow \infty$  时，有  $\sum_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p$

考虑  $n$  个末态粒子**所有动量取值**，对  $R_{\{p_j\}}$  作**末态相空间积分**，得到**单位时间**内  $2 \rightarrow n$  散射过程的**跃迁概率**

$$R = \left( \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}}$$

$$= \frac{1}{4E_A E_B \tilde{V}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

上式中**相空间体积元**  $\frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$  是 **Lorentz 不变的**



# 末态对称性因子

📚 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立

💡 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以相应的末态对称性因子  $S$** ，从而**避免量子态的重复计算**

🌺 如果末态中第  $k$  种粒子包含  $n_k$  个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$S = \prod_k n_k!$$

🌺 单位时间跃迁概率变成

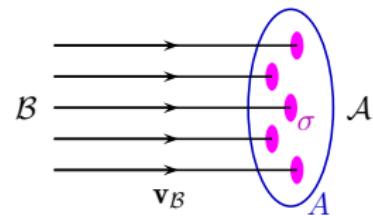
$$R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

## 5.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，靶 (target) 由  $A$  粒子组成，束流 (beam) 由  $B$  粒子组成

设束流中每个  $B$  粒子的运动速度相同，记为  $v_B$ ，按照狭义相对论， $v_B \equiv \mathbf{p}_B/E_B$



## 5.5.2 小节 散射截面

现在讨论束流打靶实验

如右图所示，靶 (target) 由  $\mathcal{A}$  粒子组成，束流 (beam) 由  $\mathcal{B}$  粒子组成

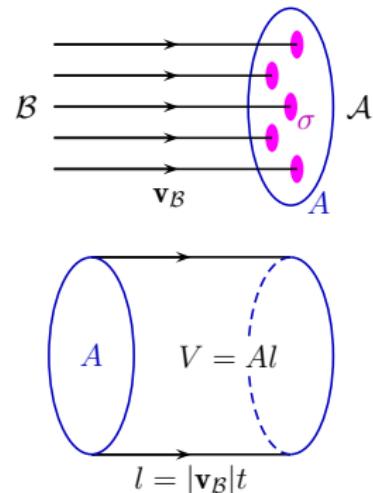
设束流中每个  $\mathcal{B}$  粒子的运动速度相同，记为  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ ，按照狭义相对论， $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}}$

记束流的横截面积为  $A$ ，则  $t$  时间内束流的一个横截面经过的体积为  $V = A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$

再设束流中  $\mathcal{B}$  粒子的数密度为  $n_{\mathcal{B}}$ ，从而，体积  $V$  中的粒子数为  $N_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}V = n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t$

在单位时间内穿过单位面积的  $\mathcal{B}$  粒子数称为流密度，记作  $j_{\mathcal{B}}$ ，通过下式计算，

$$j_{\mathcal{B}} = \frac{N_{\mathcal{B}}}{At} = \frac{n_{\mathcal{B}}A|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|t}{At} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$$



# 散射截面

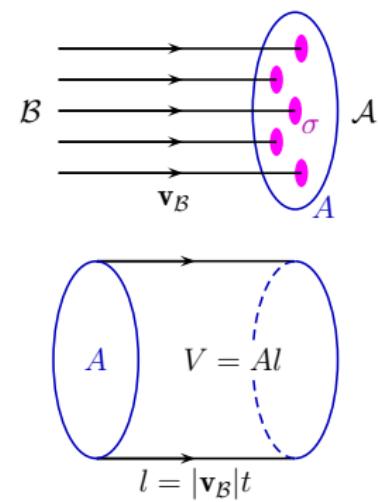
考慮流密度为  $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$  的束流打到由  $N_A$  个  $\mathcal{A}$  粒子组成的靶上，则  $t$  时间内散射发生的次数可以表示为  $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量  $\sigma$ ，由量纲分析知道它具有面积量纲，称为散射截面 (scattering cross section)，简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积，表征散射过程的强度，由  $\mathcal{A}$  粒子与  $\mathcal{B}$  粒子的相互作用性质决定

截面的常用单位是靶 (barn)，记作  $b$ ，

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$



# 散射截面

考慮流密度为  $j_B = n_B |\mathbf{v}_B|$  的束流打到由  $N_A$  个  $A$  粒子组成的靶上, 则  $t$  时间内散射发生的次数可以表示为  $N = N_A j_B \sigma t$

这里引入物理量  $\sigma$ , 由量纲分析知道它具有面积量纲, 称为散射截面 (scattering cross section), 简称为截面 (cross section)

散射截面相当于发生散射的有效面积, 表征散射过程的强度, 由  $A$  粒子与  $B$  粒子的相互作用性质决定

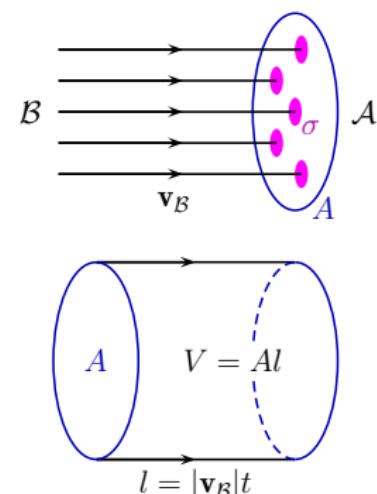
截面的常用单位是靶 (barn), 记作 b,

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 2.568 \times 10^3 \text{ GeV}^{-2}$$

单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_A j_B \sigma}{V} = \frac{N_A n_B |\mathbf{v}_B| \sigma}{V} = n_A n_B \sigma |\mathbf{v}_B|$$

$n_A = N_A/V$  相当于  $A$  粒子在体积  $V$  中的数密度



### 4 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个  $B$  粒子打到一个  $A$  粒子上, 那么, 可以看作在体积  $\tilde{V}$  中仅有这两个粒子, 因而  $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

单位时间单位体积内散射次数  $\mathcal{R}$  与单位时间内跃迁概率  $R$  的关系为  $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

代入  $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$

## 得到散射截面的表达式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

### $\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

如果只考虑一个  $B$  粒子打到一个  $A$  粒子上, 那么, 可以看作在体积  $\tilde{V}$  中仅有这两个粒子, 因而  $n_A = n_B = 1/\tilde{V}$

单位时间单位体积内散射次数  $\mathcal{R}$  与单位时间内跃迁概率  $R$  的关系为  $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

代入  $R = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$

## 得到散射截面的表达式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R \tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

上式对  $A$  粒子静止的参考系成立

需要将上式推广到任意惯性系，以适用于  $A$  和  $B$  处在任意运动状态的情况

为此应将散射截面  $\sigma$  定义为 Lorentz 不变量

上式最后一行中除第二个因子  $(4E_A E_B |\mathbf{v}_B|)^{-1}$  之外，其余部分是 Lorentz 不变的

## Lorentz 不变的散射截面

在  $A$  粒子静止的参考系中,  $v_B$  就是  $B$  粒子与  $A$  粒子之间的相对速度

一般地, 相对速度定义为  $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ , 其中  $\mathbf{v}_A \equiv \mathbf{p}_A/E_A$  是  $A$  的运动速度

不过,  $E_A E_B v_{\text{rel}}$  并不是 Lorentz 不变量

## Lorentz 不变的散射截面

在  $A$  粒子静止的参考系中,  $|v_B|$  就是  $B$  粒子与  $A$  粒子之间的相对速度

一般地, 相对速度定义为  $v_{rel} \equiv |v_A - v_B|$ , 其中  $v_A \equiv p_A/E_A$  是  $A$  的运动速度

不过,  $E_A E_\beta v_{\text{rel}}$  并不是 Lorentz 不变量

我们要做的是将相对速度替换为另一个物理量 **Møller 速度**

$$v_{M\otimes 1} \equiv \frac{1}{E_A E_B} \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$$

蘑菇 入射流因子  $E_A E_B v_{M\ddot{o}l}$  是 Lorentz 不变量，将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Mol}}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

# Lorentz 不变的散射截面

🚗 在  $\mathcal{A}$  粒子静止的参考系中,  $|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$  就是  $\mathcal{B}$  粒子与  $\mathcal{A}$  粒子之间的相对速度

🥑 一般地, 相对速度定义为  $v_{\text{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ , 其中  $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \mathbf{p}_{\mathcal{A}}/E_{\mathcal{A}}$  是  $\mathcal{A}$  的运动速度

🌰 不过,  $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$  并不是 Lorentz 不变量

🍆 我们要做的是将相对速度替换为另一个物理量 Møller 速度

$$v_{\text{Møl}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$$

🍄 入射流因子  $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}$  是 Lorentz 不变量, 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Møl}}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

⌚ 相应的单位时间单位体积内散射次数  $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v_{\text{Møl}}$  也是 Lorentz 不变的

🍋 当  $\mathcal{A}$  粒子静止时,  $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$ ,  $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$ , 故  $v_{\text{Møl}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}} \sqrt{m_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}$

$= \frac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ , 此时散射截面恢复到上一页表达式

n 体不变相空间和微分散射截面

在  $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{Mpl}}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$  中, 不

变振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$  是动力学因素, 而其它部分都属于运动学因素

 在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式：

$$\int d\Pi_{\mathbf{r}} = \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^n p_j \right)$$

这个积分称为  **$n$  体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} v_{\text{M}\phi\text{l}}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

# $n$ 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在  $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$  中, 不

变振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$  是**动力学**因素, 而其它部分都属于**运动学**因素

鳶 在**运动学**因素中, 对末态动量的积分具有如下形式,

$$\int d\Pi_n = \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j)$$

🐬 这个积分称为  **$n$  体不变相空间**, 用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些,

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$$

🐬 如果在**散射截面表达式**中不作积分, 则对应于**微分散射截面**

$$d\sigma = \frac{1}{4E_A E_B v_{M\phi l}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |\mathcal{M}|^2$$

🐬 注意, 计算微分截面时**不需要考虑末态对称性因子**  $\mathcal{S}$ , 因而  $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \int d\sigma$

🐬 如果**末态不包含全同粒子**, 则  $\mathcal{S} = 1$

# Møller 速度与相对速度

讲义中推出了 **Møller 速度** 与  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$  粒子运动速度的关系式

$$v_{Møl} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

如果  $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = 0$ ，则  $v_{Møl} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}$ ，即 Møller 速度与 **相对速度** 相同

👉 入射流因子化为  $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{\text{rel}}$

鱼 🐟 满足 **这个条件** 的一种情况是  $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$  或  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$  为零，即  $\mathcal{A}$  粒子或  $\mathcal{B}$  粒子 **静止**

鱼 🐟 另一种情况是  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  运动方向 **相同或相反**，后者在 **对撞机** (collider) 上经常遇到  
在束流 **迎头对撞** 时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

# Møller 速度与相对速度

讲义中推出了 **Møller 速度** 与  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$  粒子运动速度的关系式

$$v_{Møl} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

如果  $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = 0$ ，则  $v_{Møl} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{rel}$ ，即 Møller 速度与 **相对速度** 相同

👉 入射流因子化为  $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} v_{rel}$

鱼 🐟 满足 **这个条件** 的一种情况是  $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$  或  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$  为零，即  $\mathcal{A}$  粒子或  $\mathcal{B}$  粒子 **静止**

鱼 🐟 另一种情况是  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  运动方向 **相同或相反**，后者在 **对撞机** (collider) 上经常遇到  
在束流 **迎头对撞** 时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

虾 🦐 当  $v_{Møl} = v_{rel}$  时，散射截面化为  $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int d\Pi_n |\mathcal{M}|^2$

虾 🦐 在 **非相对论极限** 下， $v_{rel} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$  确实是  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  的相对速度

章鱼 🦑 但是，对于 **极端相对论极限** 下的束流对撞， $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 1$  且  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$

👉 故  $v_{rel} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 2$ ，它是真空光速的 2 倍，显然**不是**真正意义的相对速度

# 质心系



对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的



不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系**（简称**质心系**，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多



质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$



质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy)  $E_{\text{CM}}$ ，满足

$$E_{\text{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^n E_j$$



它是 **Lorentz 不变量**，因为

$$(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 - (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 = E_{\text{CM}}^2$$

## $2 \rightarrow n$ 散射运动学条件

- 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当末态粒子动量  $p_j$  都为零时，**质心能最低**，为  $\sum_j m_j$

## 2 → n 散射运动学条件

根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式

如果某个过程能够在**质心系**中发生，则在其它惯性系中也能发生

因此，利用质心系可以**简便地分析**发生某个过程需要满足的运动学条件

在质心系中，当末态粒子动量  $p_j$  都为零时，**质心能最低**，为  $\sum_j m_j$

所以，发生  $2 \rightarrow n$  散射过程的**运动学条件**是

$$E_{\text{CM}} > \sum_{j=1}^n m_j$$

即**质心能**应当大于**末态粒子质量之和**

若  $E_{\text{CM}} = \sum_j m_j$ ，则末态相空间体积为零，散射过程**不能发生**

可以认为，**质心能**  $E_{\text{CM}}$  是激发粒子系统内部相互作用的**有效能量**

## 5.5.3 小节 两体散射运动学



接下来讨论  $2 \rightarrow 2$  散射，即  $n = 2$  的情况，此时末态包含 2 个粒子



在质心系中，有  $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而  $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$



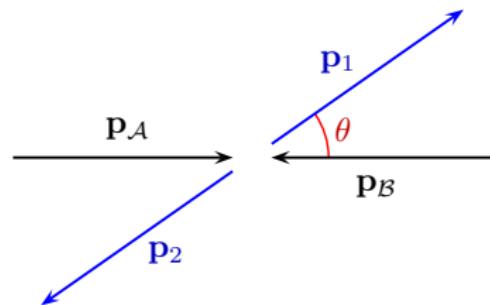
可见，初态中  $\mathbf{p}_A$  与  $\mathbf{p}_B$  大小相等，方向相反，故  $v_{M\phi l} = v_{rel}$



末态中  $\mathbf{p}_1$  与  $\mathbf{p}_2$  也是大小相等，方向相反



这些动量在质心系中的关系右图所示



## 5.5.3 小节 两体散射运动学



接下来讨论  $2 \rightarrow 2$  散射，即  $n = 2$  的情况，此时末态包含 2 个粒子



在质心系中，有  $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ，因而  $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$



可见，初态中  $\mathbf{p}_A$  与  $\mathbf{p}_B$  大小相等，方向相反，故  $v_{M\phi l} = v_{rel}$



末态中  $\mathbf{p}_1$  与  $\mathbf{p}_2$  也是大小相等，方向相反



这些动量在质心系中的关系右图所示



$\theta$  是  $\mathbf{p}_1$  与  $\mathbf{p}_A$  之间的夹角，称为散射角

(scattering angle)



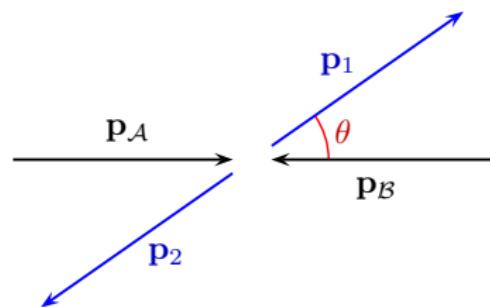
质心能满足  $E_{CM} = E_A + E_B = E_1 + E_2$



发生这个过程的运动学条件是  $E_{CM} > m_1 + m_2$



$2 \rightarrow 2$  散射截面写成  $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2$



## 2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分, 得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - E_1 - E_2) \end{aligned}$$

第二步结合三维  $\delta$  函数  $\delta^{(3)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$  作出  $p_2$  的积分

此积分看起来没有效果, 但实际上要求  $p_2$  满足动量守恒条件  $p_A + p_B = p_1 + p_2$

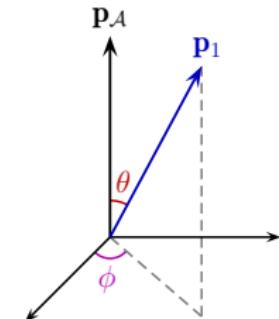
这个条件在质心系中体现为  $p_2 = -p_1$ , 故  $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

## 2 体不变相空间



计算 2 体不变相空间中的积分, 得到

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \\
 &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \\
 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{CM} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right)
 \end{aligned}$$



第二步结合三维  $\delta$  函数  $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$  作出  $\mathbf{p}_2$  的积分

此积分看起来没有效果, 但实际上要求  $\mathbf{p}_2$  满足动量守恒条件  $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

这个条件在质心系中体现为  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ , 故  $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

第三步建立球坐标系, 以  $\mathbf{p}_A$  方向为极轴方向, 以散射角  $\theta$  为极角 (polar angle)

将  $\mathbf{p}_1$  投影在垂直于  $\mathbf{p}_A$  的平面上以定义方位角 (azimuthal angle)  $\phi$

将  $\mathbf{p}_1$  动量体积元分解为  $d^3 p_1 = |\mathbf{p}_1|^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega$ , 立体角微分  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

极角  $\theta$  的取值范围为  $[0, \pi]$ , 方位角  $\phi$  的取值范围为  $[0, 2\pi]$

## 2 → 2 散射截面



现在  $\delta$  函数的宗量是关于  $|\mathbf{p}_1|$  的函数, 利用  $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\mathbf{f}'(x_i)|}$ , 得到

$$\begin{aligned}
 \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left( E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} \right) \right|^{-1} \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left( \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
 &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[ |\mathbf{p}_1| \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}}
 \end{aligned}$$

## 2 → 2 散射截面



现在  $\delta$  函数的宗量是关于  $|\mathbf{p}_1|$  的函数, 利用  $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\mathbf{f}'(x_i)|}$ , 得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} (E_{\text{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}) \right|^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left( \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[ |\mathbf{p}_1| \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \end{aligned}$$



$2 \rightarrow 2$  散射截面化为  $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$



质心系中的微分散射截面是  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

## 质心系能动量

利用末态粒子在质心系中的动量关系  $|p_1| = |p_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

故  $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

即  $2E_{\text{CM}} E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

# 质心系能动量

 利用末态粒子在质心系中的动量关系  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ，得

$$E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

 故  $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\text{CM}} - E_1)^2 = E_{\text{CM}}^2 - 2E_{\text{CM}}E_1 + E_1^2$

 即  $2E_{\text{CM}}E_1 = E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$ ，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 根据质壳条件，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} [E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\text{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4E_{\text{CM}}^2 m_1^2] \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} (E_{\text{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\text{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\text{CM}}^2 m_2^2 - 4m_1^2 m_2^2) \\ &= \frac{1}{4E_{\text{CM}}^2} \lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) \end{aligned}$$

# 质心系微分散射截面

  $\lambda$  函数定义为  $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ ，关于  $x, y, z$  对称

 末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

 质心系中的微分散射截面化为

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$

# 质心系微分散射截面

 **λ** 函数定义为  $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ ，关于  $x, y, z$  对称

 末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} \sqrt{\lambda(E_{\text{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

 质心系中的微分散射截面化为

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) |\mathcal{M}|^2$$

 将类似分析应用到初态上，同理得质心系中初态粒子**能量**是

$$E_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2), \quad E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} (E_{\text{CM}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2)$$

 **动量**大小是

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\text{CM}}^2} \right)$$

# 特殊情况

下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴** ( $\mathbf{p}_A$  对应的直线) **对称**, 则不变振幅  $\mathcal{M}$  与  $\phi$  无关, 有

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

 **散射截面**为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

# 特殊情况

卡车 **下面讨论一些特殊情况**

**(1) 如果散射过程关于对撞轴 ( $\mathbf{p}_A$  对应的直线) 对称, 则不变振幅  $\mathcal{M}$  与  $\phi$  无关, 有**

$$\int d\Omega |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{64\pi E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{E_{CM}^2}, \frac{m_2^2}{E_{CM}^2} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

**(2) 如果初态粒子质量相同,  $m_A = m_B = m_i$ , 末态粒子质量相同,  $m_1 = m_2 = m_f$ , 则  $E_1 = (E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{CM})$  和  $E_2 = (E_{CM}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{CM})$  意味着**

$$E_A = E_B = E_1 = E_2 = \frac{E_{CM}}{2}$$

即初末态粒子分别平分质心能

此时, 如果末态 2 个粒子是全同的, 那么末态对称性因子  $S = 2$ , 否则  $S = 1$

# 特殊情况

另一方面, 由  $\lambda(x, y, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = x(x - 4y)$  得

$$\lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\text{CM}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) = \frac{E_{\text{CM}} \beta_f}{2}$$

其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义,  $\beta_i$  是任一初态粒子在质心系中的运动速率, 而  $\beta_f$  是任一末态粒子的运动速率

# 特殊情况

 从而, 由  $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$  和  $E_B = E_A = E_{\text{CM}}/2$  得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{\text{CM}}^2 \beta_i}{2}$$

 于是, 微分散射截面化为

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2 \beta_i}$$

# 特殊情况

 从而, 由  $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$  和  $E_B = E_A = E_{CM}/2$  得

$$|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_A|}{E_A} = 2\beta_i$$

 入射流因子变成

$$E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = \frac{E_{CM}^2 \beta_i}{2}$$

 于是, 微分散射截面化为

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同,  $m_A = m_B = m_1 = m_2$ , 则  $\beta_i = \beta_f$ , 有

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

## 5.5.4 小节 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

不稳定粒子  $A$  自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

假设  $t$  时刻有  $N(t)$  个静止的  $A$  粒子，每个  $A$  粒子在单位时间内发生衰变的概率是  $\Gamma$ ，那么  $t + dt$  时刻衰变引起的  $A$  粒子数量变化为  $dN = -\Gamma N dt$

以此求得  $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即  $A$  粒子数量随时间按指数规律下降

## 5.5.4 小节 衰变宽度

🚂 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的

🎪 不稳定粒子  $\mathcal{A}$  自身可以通过相互作用衰变 (decay) 成其它粒子

⌚ 假设  $t$  时刻有  $N(t)$  个静止的  $\mathcal{A}$  粒子，每个  $\mathcal{A}$  粒子在单位时间内发生衰变的概率是  $\Gamma$ ，那么  $t + dt$  时刻衰变引起的  $\mathcal{A}$  粒子数量变化为  $dN = -\Gamma N dt$

💈 以此求得  $N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t)$ ，即  $\mathcal{A}$  粒子数量随时间按指数规律下降

🎭 于是，一个静止的  $\mathcal{A}$  粒子在衰变之前存活的时间  $t$  服从指数分布，概率密度为

$$P(t) = \Gamma \exp(-\Gamma t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

🎢 其中  $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$  称为粒子的寿命 (lifetime)

🎠  $t$  的期待值为  $\langle t \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t e^{-t/\tau} dt = \tau$ ，可见寿命是粒子存活的平均时间

🔮 在自然单位制中， $\Gamma$  具有质量的量纲，称为衰变宽度 (decay width)，简称宽度

# 分支比和分宽度

  $\mathcal{A}$  粒子可能有**多种**衰变过程

 在一次衰变中，某个衰变过程  $i \rightarrow f$  发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作  $B_f$

 衰变过程  $i \rightarrow f$  的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

  $\Gamma_f$  是  $\mathcal{A}$  粒子静止系中衰变过程  $i \rightarrow f$  在单位时间内发生的概率

# 分支比和分宽度

  $\mathcal{A}$  粒子可能有**多种**衰变过程

 在一次衰变中，某个衰变过程  $i \rightarrow f$  发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作  $B_f$

 衰变过程  $i \rightarrow f$  的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

  $\Gamma_f$  是  $\mathcal{A}$  粒子静止系中衰变过程  $i \rightarrow f$  在单位时间内发生的概率

 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

 **总宽度**  $\Gamma$  是所有分宽度之和

# 衰变过程的跃迁概率

接下来通过跃迁概率计算衰变过程  $i \rightarrow f$  的分宽度

现在, 初态  $|i\rangle$  只包含 1 个粒子  $\mathcal{A}$ , 末态  $|f\rangle$  则包含  $n \geq 2$  个粒子

因此,  $|i\rangle$  的自我内积为  $\langle i|i \rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$

类似于散射的情况, 衰变过程  $i \rightarrow f$  的跃迁概率是

$$P_{fi} = \frac{|\langle f | iT | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V} \prod_{j=1}^n (2E_j V)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V})}$$

对于一组特定的末态动量  $\{p_j\}$ , 单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[ 2E_{\mathcal{A}} \prod_{j=1}^n (2E_j \tilde{V}) \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

# 分宽度表达式



将末态动量的所有取值考虑进来，可得单位时间内衰变过程  $i \rightarrow f$  的发生概率为

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3} \int d^3 p_j \right) R_{\{p_j\}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$



其中  $\mathcal{S}$  是末态对称性因子

在  $\mathcal{A}$  粒子静止系中， $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$ ，而  $R_f$  的值就是分宽度  $\Gamma_f$ ，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

# 衰变末态分布和运动学条件

若  $\mathcal{A}$  粒子是**标量粒子**, **自旋为 0**, 则  $\mathcal{A}$  粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布

若  $\mathcal{A}$  粒子具有**非零自旋**, 则自旋方向是  $\mathcal{A}$  粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布, 以  $\mathcal{A}$  粒子自旋方向为轴

在实际情况中,  $\mathcal{A}$  粒子自旋取向往往是**不确定的**, 但它**取不同方向的概率相同**

那么, 可对  $\mathcal{A}$  粒子自旋方向**取平均**, 从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布

# 衰变末态分布和运动学条件

若  $\mathcal{A}$  粒子是标量粒子，自旋为 0，则  $\mathcal{A}$  粒子静止系没有特殊的方向

任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布

若  $\mathcal{A}$  粒子具有非零自旋，则自旋方向是  $\mathcal{A}$  粒子静止系的特殊方向

末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以  $\mathcal{A}$  粒子自旋方向为轴

在实际情况中， $\mathcal{A}$  粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同

那么，可对  $\mathcal{A}$  粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布

由于  $\mathcal{A}$  粒子静止系就是末态粒子的质心系，有  $E_{CM} = m_{\mathcal{A}}$

因此，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^n m_j$$



即  $\mathcal{A}$  粒子只能向质量之和小于  $m_{\mathcal{A}}$  的其它粒子衰变

## 5.5.5 小节 衰变运动学

下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**,  $n = 2$ , 在  $\mathcal{A}$  粒子静止系中, 由于  $E_{\text{CM}} = m_{\mathcal{A}}$ , 末态能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} (m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} (m_{\mathcal{A}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

末态动量为  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$

2 体不变相空间变成  $\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$

⑧  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ , 其中  $\theta$  和  $\phi$  分别是  $\mathbf{p}_1$  在球坐标系中的极角和方位角

## 5.5.5 小节 衰变运动学

 下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**,  $n = 2$ , 在  $\mathcal{A}$  粒子静止系中, 由于  $E_{\text{CM}} = m_{\mathcal{A}}$ , 末态能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} (m_{\mathcal{A}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} (m_{\mathcal{A}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

 末态动量为  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$

 2 体不变相空间变成  $\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$

  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , 其中  $\theta$  和  $\phi$  分别是  $\mathbf{p}_1$  在球坐标系中的极角和方位角

 **两体衰变分宽度**表达为

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) \int d\Omega |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

 如果  $m_1 \neq m_2$ , 则两个末态粒子**必定不是全同粒子**, 而  $\mathcal{S} = 1$

# 两体衰变运动学

如果  $\mathcal{A}$  粒子的自旋为 0, 或者对它的自旋方向取平均, 按照前述讨论, 末态粒子在动量方向上呈球对称分布

此时,  $|\mathcal{M}|^2$  与  $\theta$ 、 $\phi$  无关, 对立体角积分只给出一个  $4\pi$  因子, 分宽度变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$$

# 两体衰变运动学

如果  $\mathcal{A}$  粒子的自旋为 0, 或者对它的自旋方向取平均, 按照前述讨论, 末态粒子在动量方向上呈球对称分布

此时,  $|\mathcal{M}|^2$  与  $\theta$ 、 $\phi$  无关, 对立体角积分只给出一个  $4\pi$  因子, 分宽度变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right)$$

进一步, 如果末态 2 个粒子质量相同,  $m_1 = m_2 = m$ , 则

$$\lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) = \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

如果两个末态粒子是全同粒子, 则  $\mathcal{S} = 2$

# 三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**,  $n = 3$ , 衰变过程  $i \rightarrow f$  的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_3 |\mathcal{M}|^2$$

 3 体不变相空间为

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3)$$

 这里只在  $A$  粒子静止系中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**,  $|\mathcal{M}|^2$  与末态粒子的运动方向**无关**

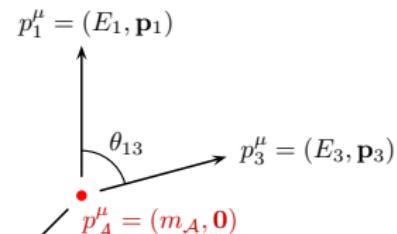
# 三体衰变运动学

(2) 对于三体衰变,  $n = 3$ , 衰变过程  $i \rightarrow f$  的分宽度表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_3 |\mathcal{M}|^2$$

3 体不变相空间为

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - p_2 - p_3)$$



这里只在  $A$  粒子静止系中讨论它没有自旋或者对它的自旋方向取平均的情况

此时末态粒子在动量方向上呈球对称分布,  $|\mathcal{M}|^2$  与末态粒子的运动方向无关

动量守恒定律给出  $0 = p_A = p_1 + p_2 + p_3$ , 即末态 3 个粒子的三维动量之和为零

因而这 3 个三维动量矢量处在同一个平面内, 如右上图所示

对于确定的  $p_1$  和  $p_3$ , 第 2 个粒子的动量  $p_2 = -p_1 - p_3$  由动量守恒定律决定

### 3 体相空间

 对  $\mathbf{p}_2$  积分, 消去代表动量守恒定律的  $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ , 得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{d^3p_1 d^3p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_3 d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \end{aligned}$$

  $\Omega_1$  和  $\Omega_3$  分别是  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_3$  对应的立体角

### 3 体相空间

 对  $\mathbf{p}_2$  积分, 消去代表动量守恒定律的  $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ , 得到

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{d^3p_1 d^3p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_3 d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \end{aligned}$$

  $\Omega_1$  和  $\Omega_3$  分别是  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_3$  对应的立体角

 对粒子 1 的质壳条件  $|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 = E_1^2$  两边求微分, 得  $2|\mathbf{p}_1|d|\mathbf{p}_1| = 2E_1 dE_1$ , 对粒子 3 也可以得到类似的式子, 故  $|\mathbf{p}_1|d|\mathbf{p}_1| = E_1 dE_1$ ,  $|\mathbf{p}_3|d|\mathbf{p}_3| = E_3 dE_3$

 从而

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_1 d\Omega_3 dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int d\Omega_3 dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \end{aligned}$$

 第二步作  $\Omega_1$  积分, 由于粒子 1 动量呈球对称分布, 此积分只给出一个  $4\pi$  因子

# 关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数

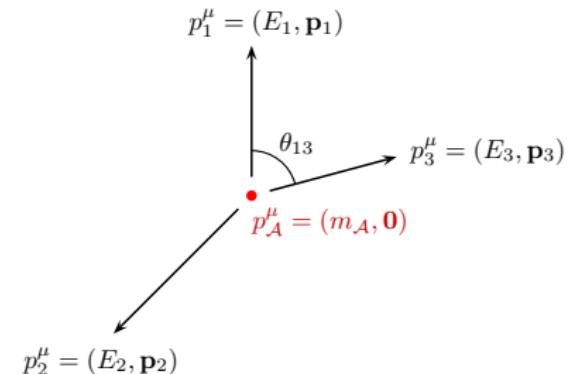
将  $\mathbf{p}_1$  与  $\mathbf{p}_3$  方向之间的夹角记为  $\theta_{13}$ ，则  
粒子 3 的立体角微分表示为

$$d\Omega_3 = \sin \theta_{13} d\theta_{13} d\phi_3 = d \cos \theta_{13} d\phi_3$$

是粒子 3 的方位角

这样的话，对  $\Omega_3$  积分不是平庸的，因为

$E_2$  依赖于  $\cos \theta_{13}$ ，



$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos \theta_{13}}$$

因此  $\delta(m_A - E_1 - E_2 - E_3)$  的宗量也依赖于  $\cos \theta_{13}$ ，有

$$\frac{\partial E_2}{\partial \cos \theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos \theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

$$\left| \frac{\partial(m_A - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos \theta_{13}} \right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

# 相空间积分

再利用  $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，作出关于  $\Omega_3$  的积分，得

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^1 d\cos\theta_{13} \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int dE_1 dE_3 \end{aligned}$$

# 相空间积分

再利用  $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ ，作出关于  $\Omega_3$  的积分，得

$$\begin{aligned} \int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{-1}^1 d\cos\theta_{13} \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dE_1 dE_3 \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \left| \frac{\partial(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial \cos\theta_{13}} \right|^{-1} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int dE_1 dE_3 \end{aligned}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_{\mathcal{A}}} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅  $\mathcal{M}$  表达为  $E_1$  和  $E_3$  的函数，而且要仔细考虑  $E_1$  和  $E_3$  的积分上下限

# 变量替换

在实践中把  $E_1$  和  $E_3$  当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量

引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2m_A E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1$$

可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为  $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于  $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$ ， $\sqrt{s_{12}}$  相当于这个等效粒子的质量，称为**粒子 1 和 2 的不变质量** (invariant mass)，它也是**粒子 1 和 2 的质心能**

# 变量替换

在实践中把  $E_1$  和  $E_3$  当作积分变量并不方便, 可以将它们替换成更加便利的变量

引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_A - p_3)^2 = m_A^2 + m_3^2 - 2m_A E_3$$

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_A - p_1)^2 = m_A^2 + m_1^2 - 2m_A E_1$$

可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**, 四维动量为  $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于  $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$ ,  $\sqrt{s_{12}}$  相当于这个等效粒子的质量, 称为**粒子 1 和 2 的不变质量** (invariant mass), 它也是**粒子 1 和 2 的质心能**

类似地,  $\sqrt{s_{23}}$  是**粒子 2 和 3 的不变质量**

$s_{12}$  和  $s_{23}$  的**微分**分别正比于  $E_3$  和  $E_1$  的**微分**,

$$ds_{12} = -2m_A dE_3, \quad ds_{23} = -2m_A dE_1$$

# 关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数



利用  $ds_{12} = -2m_A dE_3$  和  $ds_{23} = -2m_A dE_1$  将分宽度积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_A} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{256\pi^3 m_A^3} \int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23} |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2\end{aligned}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅  $\mathcal{M}$  表达为  $s_{12}$  和  $s_{23}$  的函数

把对  $s_{23}$  的积分放在内层，积分上下限依赖于  $s_{12}$

# 关于 $\cos \theta_{13}$ 的导数

利用  $ds_{12} = -2m_A dE_3$  和  $ds_{23} = -2m_A dE_1$  将分宽度积分式改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_A} \int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3 |\mathcal{M}(E_1, E_3)|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{256\pi^3 m_A^3} \int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23} |\mathcal{M}(s_{12}, s_{23})|^2\end{aligned}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅  $\mathcal{M}$  表达为  $s_{12}$  和  $s_{23}$  的函数

把对  $s_{23}$  的积分放在内层，积分上下限依赖于  $s_{12}$

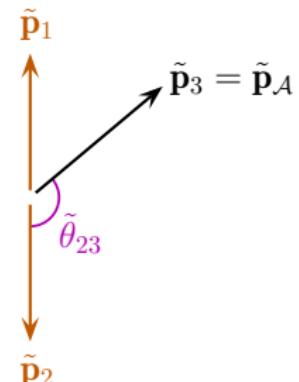
接下来讨论  $s_{12}$  和  $s_{23}$  的积分上下限

考虑粒子 1 和 2 的质心系，有  $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = 0$

这里用波浪线标记此参考系中的物理量

在这个参考系中，质心能  $\tilde{E}_{\text{CM}} = \sqrt{s_{12}}$

粒子 2 的能量为  $\tilde{E}_2 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}} (s_{12} - m_1^2 + m_2^2)$



# $\tilde{E}_3$ 与 $s_{12}$ 的关系

动量守恒定律给出  $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$ ，由  $s_{12}$  的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned}
 s_{12} &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} - \tilde{\mathbf{p}}_3)^2 = \tilde{p}_{\mathcal{A}}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 \\
 &= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\
 &= m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\
 &= m_{\mathcal{A}}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_{\mathcal{A}}^2}\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2
 \end{aligned}$$

# $\tilde{E}_3$ 与 $s_{12}$ 的关系

动量守恒定律给出  $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_A - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_A$ ，由  $s_{12}$  的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_A - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_A^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\tilde{p}_A \cdot \tilde{p}_3 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_A \tilde{E}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}_A \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\ &= m_A^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\ &= m_A^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2 \end{aligned}$$

整理得  $2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2} \tilde{E}_3 = m_A^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2$ ，两边平方，推出

$$\begin{aligned} 4(\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_A^2)\tilde{E}_3^2 &= (m_A^2 - s_{12} + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2)^2 \\ &= (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)^2 + 4\tilde{E}_3^4 + 4(m_A^2 - s_{12} - m_3^2)\tilde{E}_3^2 \end{aligned}$$

再整理，得  $4s_{12}\tilde{E}_3^2 = (m_A^2 - s_{12} - m_3^2)^2$ ，故粒子 3 的能量为

$$\tilde{E}_3 = \frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_A^2 - s_{12} - m_3^2)$$

对于确定的  $s_{12}$ ， $\tilde{E}_2$  和  $\tilde{E}_3$  是确定的，而且是 Lorentz 不变的

# $s_{23}$ 的积分上下限



另一方面, 由  $s_{23}$  的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里  $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$ ,  $\tilde{\theta}_{23}$  是  $\tilde{\mathbf{p}}_2$  与  $\tilde{\mathbf{p}}_3$  之间的夹角

当  $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$  时,  $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$ , 而  $s_{23}$  取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left( \sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

# $s_{23}$ 的积分上下限



另一方面, 由  $s_{23}$  的 Lorentz 不变性有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里  $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$ ,  $\tilde{\theta}_{23}$  是  $\tilde{\mathbf{p}}_2$  与  $\tilde{\mathbf{p}}_3$  之间的夹角

当  $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$  时,  $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$ , 而  $s_{23}$  取得最小值

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left( \sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

当  $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$  时,  $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$ , 而  $s_{23}$  取得最大值

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left( \sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2} \right)^2$$

对于确定的  $s_{12}$ , 以上两式分别给出  $s_{23}$  的积分下限和上限

注意,  $s_{23}^{\min}$  和  $s_{23}^{\max}$  是 Lorentz 不变的

# $s_{12}$ 的积分上下限

 在粒子 1 和 2 的质心系中,  $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$ , 有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

 当  $\tilde{E}_1 = m_1$  且  $\tilde{E}_2 = m_2$  时,  $s_{12}$  取得最小值  $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

 在  $\mathcal{A}$  粒子静止系中, 前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

 当  $E_3 = m_3$  时,  $s_{12}$  取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

 注意,  $s_{12}^{\min}$  和  $s_{12}^{\max}$  也是 Lorentz 不变的

# $s_{12}$ 的积分上下限

在粒子 1 和 2 的质心系中,  $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 0$ , 有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

当  $\tilde{E}_1 = m_1$  且  $\tilde{E}_2 = m_2$  时,  $s_{12}$  取得最小值  $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

在  $\mathcal{A}$  粒子静止系中, 前面已得到

$$s_{12} = (p_{\mathcal{A}} - p_3)^2 = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}E_3$$

当  $E_3 = m_3$  时,  $s_{12}$  取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2$$

注意,  $s_{12}^{\min}$  和  $s_{12}^{\max}$  也是 Lorentz 不变的

