数 学 物 理 方 法

第三章　解析函数的幂级数展开

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2026 年 1 月 4 日

第三章　解析函数的幂级数展开

- 本章先介绍**复数级数**、尤其是**幂级数**的性质
- 然后利用 **Cauchy 积分公式**导出**解析函数**的 **Taylor 展开式**

§1 复常数项级数

§1.1 基本概念与基本判敛法

复常数项级数具有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots$$

的形式，其中**每一项**都是**复数**

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ 称为其**部分和**

如果 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 是**有限复数**，则称**级数收敛**于 s

s 称为它的**和**，记作 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = s$

§1 复常数项级数

§1.1 基本概念与基本判敛法

复常数项级数具有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots$$

的形式，其中每一项都是复数

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ 称为其部分和

如果 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 是有限复数，则称级数收敛于 s

s 称为它的和，记作 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = s$

若级数不收敛于有限复数，则称它发散

注 发散包括两种情况：1 $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$；2 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有极限

数列的 Cauchy 收敛原理

对于数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否收敛、即其极限是否存在的问题，类似于实数列，有下述 Cauchy 收敛原理

数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall p \in \mathbb{N}^+, \quad \text{均有 } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

其中 $\mathbb{N}^+$ 表示正整数的集合

这一精确描述的大意是，从某一项 s_n 开始，数列的各项 $s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$ 均聚集在它附近，这样就容易理解极限的存在了

$$s_1, \quad s_2, \quad \cdots, \quad \boxed{s_n, \quad s_{n+1}, \quad \cdots, \quad s_{n+p}, \quad \cdots}$$

数列 Cauchy 收敛原理的第二种表述

Cauchy 收敛原理也称为 Cauchy 判敛准则，它的另一种更常见的表述如下

数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是

$$\forall\,\varepsilon > 0,\quad \exists\,n_0 \in \mathbb{N}^+,\quad \text{当 } n > n_0 \text{ 时},\quad \forall\,p \in \mathbb{N}^+,\quad \text{均有 } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

这一精确描述的大意是，当数列下标足够大以后，任何两项的距离都可以任意小

更形象地说，越往后，数列的各项就越是挤在一起，这样也容易理解极限的存在

$$s_1,\quad s_2,\quad \cdots,\quad s_{n_0},\quad \cdots,\quad \boxed{s_n,\quad s_{n+1},\quad \cdots,\quad s_{n+p},\quad \cdots}$$

两种表述的区别

- 📖 **Cauchy 收敛原理**两种表述的区别如下
- 📮 在**第一种表述**中，n **足够大**但**固定**
- 📫 在**第二种表述**中，n **足够大**但也是**任意**的
- 📱 容易证明两种表述是**等价**的
- 📆 **第一种表述**显得更简洁，对于多数具体应用情景也更便于操作

两种表述的区别

📖 **Cauchy 收敛原理**两种表述的区别如下

📮 在**第一种表述**中，n **足够大**但**固定**

📫 在**第二种表述**中，n **足够大**但也是**任意**的

📱 容易证明两种表述是**等价**的

📆 **第一种表述**显得更简洁，对于多数具体应用情景也更便于操作

📄 举例来说，考虑**数列** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的通项对于 s_{3n}、s_{3n+1} 和 s_{3n+2} 具有不同的形式，用 Cauchy 收敛原理研究其敛散性

🪔 如果按照**第一种表述**，只需要考察 3 **种情况**

🏮 而按照**第二种表述**，则需要考察 9 **种情况**

🗒 今后较多地采用**第一种表述**，但视具体情况有时候也采用**第二种表述**

级数的 Cauchy 收敛原理

根据数列的 Cauchy 收敛原理，立得关于级数的 Cauchy 收敛原理

定理（Cauchy 收敛原理） 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall p \in \mathbb{N}^+, \quad \text{均有} \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$$

对于 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$，有

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$$

故 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ 意味着 $\left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$

级数的 Cauchy 收敛原理

根据数列的 Cauchy 收敛原理，立得关于级数的 Cauchy 收敛原理

定理（Cauchy 收敛原理） 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall p \in \mathbb{N}^+, \quad \text{均有} \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$$

再利用三角不等式，易得

$$|\alpha_{n+p}| = \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \right| + \left| \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| < 2\varepsilon$$

所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛的必要条件是 $\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0$

如果这一条件得不到满足，马上可以断定级数是发散的

级数的 Cauchy 收敛原理

根据数列的 Cauchy 收敛原理，立得关于级数的 Cauchy 收敛原理

定理（Cauchy 收敛原理） 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists n\in\mathbb{N}^+,\quad \forall p\in\mathbb{N}^+,\quad \text{均有}\ \left|\sum_{k=1}^{p}\alpha_{n+k}\right|<\varepsilon$$

再利用三角不等式，易得

$$|\alpha_{n+p}|=\left|\sum_{k=1}^{p}\alpha_{n+k}-\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_{n+k}\right|\le\left|\sum_{k=1}^{p}\alpha_{n+k}\right|+\left|\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_{n+k}\right|<2\varepsilon$$

所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 收敛的必要条件是 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$

如果这一条件得不到满足，马上可以断定级数是发散的

注 若采用 Cauchy 收敛原理的第二种表述，则 $\left|\sum_{k=1}^{p}\alpha_{n+k}\right|<\varepsilon$ 中的 n 在足够大的前提下是任意的，此时只需取 $p=1$，则 $|\alpha_{n+1}|<\varepsilon$ 即是收敛的必要条件（较方便）

绝对收敛和条件收敛

- Cauchy 收敛原理无疑是一个最基本的判别法，但是使用它需要计算求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$，或至少要估计其模的上限
- 这只有在少数简单情况下可以做到，比如几何级数（即等比级数）$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$
- 在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 中添加或去掉有限项，并**不改变**级数的收敛或发散性质

绝对收敛和条件收敛

- Cauchy 收敛原理无疑是一个最基本的判别法，但是使用它需要计算求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$，或至少要估计其模的上限
- 这只有在少数简单情况下可以做到，比如几何级数（即等比级数）$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$
- 在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 中添加或去掉有限项，并**不改变**级数的收敛或发散性质
- 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 绝对收敛
- 收敛但不绝对收敛的级数称为条件收敛

绝对收敛和条件收敛

- Cauchy 收敛原理无疑是一个最基本的判别法，但是使用它需要计算求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$，或至少要估计其模的上限
- 这只有在少数简单情况下可以做到，比如几何级数（即等比级数）$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$
- 在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 中添加或去掉有限项，并**不改变**级数的收敛或发散性质
- 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 绝对收敛
- 收敛但不绝对收敛的级数称为条件收敛
- 定理　绝对收敛的级数必定收敛
- 这是因为三角不等式表明 $\left|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |\alpha_{n+k}| = \left|\sum_{k=1}^{p} |\alpha_{n+k}|\right|$
- 从而由 $\left|\sum_{k=1}^{p} |\alpha_{n+k}|\right| < \varepsilon$ 可以推出 $\left|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\right| < \varepsilon$，反之则不然

判敛操作

- 在实际操作上，给定一个**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$，先看看 $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ 是否满足
- 若**不满足**，马上可以断定级数**发散**
- 若**满足**，再看看相应的**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 是否收敛
- 若**收敛**，则**原级数绝对收敛**

判敛操作

- 在实际操作上，给定一个**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$，先看看 $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ 是否满足
- 若**不满足**，马上可以断定级数**发散**
- 若**满足**，再看看相应的**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 是否收敛
- 若**收敛**，则**原级数绝对收敛**
- 由于**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 是**正项级数** ($|\alpha_k| \geq 0$)，可用**高等数学**中的**正项级数判别法**来判敛，如**比较判别法**、**Cauchy 判别法**、**d'Alembert 判别法**、**Cauchy 积分判别法**等
- 如果 $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ **满足**，而**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 又**不收敛**，则需要进一步判断**原级数**是**发散**还是**条件收敛**
- 不过，如果是由 **Cauchy 判别法**或 **d'Alembert 判别法**得到**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ **发散**，则**原级数**必定也**发散**，因为这时 $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ 必**不满足**

回顾：实数域上正项级数的判别法

比较判别法：**两正项级数** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 满足 $u_k \le v_k\ (k \in \mathbb{N}^+)$，则由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ **收敛**可断定 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 也**收敛**，由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ **发散**可断定 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 也**发散**

Cauchy 判别法：若**正项级数** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$，则 $l < 1$ 时级数**收敛**，$l > 1$ 时级数**发散**，$l = 1$ 时级数可能收敛也可能发散

d'Alembert 判别法：若**正项级数** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\ (u_k > 0)$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = l$，则 $l < 1$ 时级数**收敛**，$l > 1$ 时级数**发散**，$l = 1$ 时级数可能收敛也可能发散

Cauchy 积分判别法：若存在**单调下降**的**非负函数** $f(x)\ (x \ge 1)$，使得

$$u_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

则**正项级数** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ **收敛**的**充要条件**为**无穷积分** $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**

回到刚才的讨论，其它情况下要进一步判断原级数是否条件收敛就**比较困难**

这时可以尝试计算求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$，或估计其模的上限

如果成功，就可以用 **Cauchy 收敛原理**来判断；如果求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$ 无法计算或估计上限，则可以尝试选读 **§1.2** 介绍的 **Abel 判别法**和 **Dirichlet 判别法**

就我们所知，并没有什么方法能够百分之百地解决任何级数的判敛问题

即使是正项级数，虽然有一些更敏锐的判别法可资利用，比如选读 **§1.5** 介绍的 **Gauss 判别法**，但也并不存在一劳永逸的解决方案

例

回到刚才的讨论，其它情况下要进一步判断原级数是否条件收敛就**比较困难**

这时可以尝试计算求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$，或估计其模的上限

如果成功，就可以用 Cauchy 收敛原理来判断；如果求和式 $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}$ 无法计算或估计上限，则可以尝试选读 §1.2 介绍的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

就我们所知，并没有什么方法能够百分之百地解决任何级数的判敛问题

即使是正项级数，虽然有一些更敏锐的判别法可资利用，比如选读 §1.5 介绍的 Gauss 判别法，但也并不存在一劳永逸的解决方案

例　几何级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$

当 $|\alpha| < 1$ 时，由于正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^k = \dfrac{|\alpha|}{1-|\alpha|}$ 收敛，故原级数绝对收敛

当 $|\alpha| \geq 1$ 时，$\lim_{k\to\infty} \alpha^k = \lim_{k\to\infty} |\alpha|^k \exp(\mathrm{i}k \operatorname{Arg} \alpha) \neq 0$，故原级数发散

§2 复函数项级数

§2.1 普通函数项级数

- 设**级数** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的**每一项**都是定义在**点集** E 上的**复变函数**，则该级数称为**复函数项级数**
- $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ 称为其**部分和**
- 如果对 E 中的一点 z_0 ，**常数项级数** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ **收敛**，则称**级数**在 z_0 处**收敛**

§2 复函数项级数

§2.1 普通函数项级数

- 设**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的**每一项**都是定义在**点集** E 上的**复变函数**，则该级数称为**复函数项级数**
- $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 称为其**部分和**
- 如果对 E 中的一点 z_0，**常数项级数** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ **收敛**，则称**级数**在 z_0 处**收敛**
- 如果 $\forall z \in E$，**级数**都**收敛**，则称它在**点集** E 上**收敛**
- 这时级数在 E 上每点有和，记作 $f(z)$，称为其**和函数**，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$$

- 从上述定义可以看出，这是一个**逐点收敛**的概念
- **取定一点**，则**级数**成为一个**常数项级数**，其判敛方法与上节所述无异

§2.2 一致收敛的函数项级数

- 对于**函数项级数**的研究，不能只是满足于**逐点收敛**的概念
- 因为即使**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上**处处收敛**，也看不出它在 E 上各点行为有何共性
- 既然是**函数项级数**，我们自然更关心这种共性
- 更重要的是，即使**级数**在 E 上**处处收敛**，也**无法**由级数中**各项**均具有的**某种性质**(比如**连续**、**可导**) 而推断其**和函数** $f(z)$ 具有**同种性质**

§2.2 一致收敛的函数项级数

🚃 对于**函数项级数**的研究，不能只是满足于**逐点收敛**的概念

🚞 因为即使**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上**处处收敛**，也看不出它在 E 上各点行为有何共性

🚎 既然是**函数项级数**，我们自然更关心这种共性

🚋 更重要的是，即使**级数**在 E 上**处处收敛**，也**无法**由级数中**各项**均具有的**某种性质**(比如**连续**、**可导**) 而推断其**和函数** $f(z)$ 具有**同种性质**

🚝 为了研究**和函数** $f(z)$ 的**性质**，一个关键的概念是**一致收敛**，即**级数**在**各点**的**收敛速度大致相同**

💜 **一致收敛定义** 设在**点集** E 上存在**函数** $f(z)$，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in\mathbb{N}^+$，当 $n>n_0$ 时，

$$|s_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

在 E 上**处处成立**，则称**级数** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上**一致收敛于** $f(z)$

收敛与一致收敛的区别

- 按这一定义，一致收敛当然就收敛，但反之则不然
- 让我们看看收敛与一致收敛的区别在于何处
- 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上收敛于 $f(z)$，则 $\forall \varepsilon > 0$，对于每一点 $z \in E$，$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$，当 $n > n_0$ 时，$|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 在该点 z 成立
- 由此可以看出，对于同样的 ε，不同的点 z 可能需要不同的 n_0，即 $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$

收敛与一致收敛的区别

- 按这一定义，一致收敛当然就收敛，但反之则不然
- 让我们看看收敛与一致收敛的区别在于何处
- 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上收敛于 $f(z)$，则 $\forall \varepsilon > 0$，对于每一点 $z \in E$，$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^+$，当 $n > n_0$ 时，$|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 在该点 z 成立
- 由此可以看出，对于同样的 ε，不同的点 z 可能需要不同的 n_0，即 $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$
- 这样就存在一种可能性，当 z 沿某一趋势变化时，比如 $z \to z_0$ $(z, z_0 \in E)$ 时，所需的 $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$ **越来越大**，以至于无法找到其有限的上界
- 亦即无法找到一个共同的 n_0，使得当 $n > n_0$ 时，$|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ **在 E 上一致成立**
- 另一方面，一致收敛的定义正是要求存在这样一个共同的 $n_0 = n_0(\varepsilon)$，它不依赖于 z，而只与 ε 有关

Weierstrass M-判别法

下面给出一个一致收敛的充分条件，它是一个常用的判别法

定理（Weierstrass M-判别法） 如果存在正数列 $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$|f_k(z)| \leq M_k, \quad \forall z \in E, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

且正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在点集 E 上绝对收敛且一致收敛

证明见选读内容

Karl Weierstrass
(1815–1897)

Weierstrass M-判别法

下面给出一个一致收敛的充分条件，它是一个常用的判别法

Karl Weierstrass
(1815–1897)

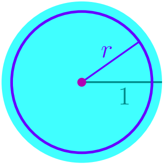
定理 (Weierstrass M-判别法) 如果存在正数列 $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$|f_k(z)| \leq M_k, \quad \forall z \in E, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

且正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在点集 E 上绝对收敛且一致收敛

证明见选读内容

例 3 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 在 $r<1$ 的闭圆 $|z| \leq r$ 上绝对收敛且一致收敛



事实上，存在正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ 满足上述定理的要求

该级数在单位圆 $|z|<1$ 上绝对收敛但不能一致收敛，见选读例 2

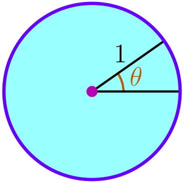
例 4

例 4 当 $s>1$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k^s}$ 在 $0\le\theta<2\pi$ 上绝对收敛且一致收敛

事实上，由于 $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k^s}\right|=\dfrac{1}{k^s}\ (0\le\theta<2\pi)$，存在正项级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ (其收敛性见高等数学教材) 满足上述定理的要求

等价地说，当 $s>1$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s}$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上绝对且一致收敛

实际上，由于 $\left|\dfrac{z^k}{k^s}\right|\le\dfrac{1}{k^s}\ (|z|\le1)$，此时它在闭圆 $|z|\le1$ 上绝对且一致收敛



和函数连续定理

一致收敛的重要性体现在下面两个定理上

和函数连续定理 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在点集 E 上连续，且级数在 E 上一致收敛于函数 $f(z)$，则 $f(z)$ 也在 E 上连续

证明见选读内容

和函数在点 $z_0 \in E$ 连续就是 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，也就是

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0} f_k(z)$$

所以，可以等价地说，取极限与求和可以交换次序，其前提是级数要一致收敛

逐项积分定理

逐项积分定理 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在曲线 C 上连续，且级数在 C 上一致收敛于函数 $f(z)$，则可以沿 C 逐项积分，即

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)\,\mathrm{d}z$$

- 证明见选读内容
- 上式意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\,\mathrm{d}z$$

- 亦即积分与求和可以交换次序，其前提是级数要一致收敛

逐项积分定理

逐项积分定理 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在曲线 C 上连续，且级数在 C 上一致收敛于函数 $f(z)$，则可以沿 C 逐项积分，即

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty}\int_C f_k(z)\,\mathrm{d}z$$

- 证明见选读内容
- 上式意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_C f_k(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\,\mathrm{d}z$$

- 亦即积分与求和可以交换次序，其前提是级数要一致收敛
- 很容易想到的一个问题是，什么情况下求导与求和可以交换次序?
- 当然，只有在级数各项均可导、或者说各项均解析的条件下，这一问题才有意义
- 所以这是一个关于解析函数项级数的问题，下一小节就会给出答案

§2.3 解析函数项级数

🚘 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 中各项均为解析函数，就称为解析函数项级数，有以下重要定理

🔴 **Weierstrass 定理** 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在区域 D 内解析，且级数在 D 内的任一有界闭集上一致收敛（称为在 D 上内闭一致收敛）于函数 $f(z)$，则

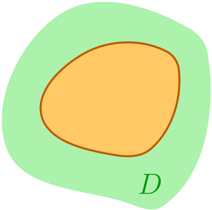
1. 和函数 $f(z)$ 在 D 内解析
2. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(p)}(z)$，其中 $p \in \mathbb{N}^+$

➡️ **注** 这是一个**非常重要**的定理，它是级数理论的基石

🚨 复变函数论中的级数理论也称为 Weierstrass 级数理论

🚔 定理的证明见选读内容

🚖 这个定理是微积分中所没有的



关于 Weierstrass 定理的讨论

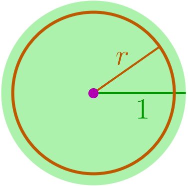
🚍 微积分中，要求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛，各项都有导数，且 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，才能逐项求导一次，并且不能保证可以进一步逐项求导

🚥 而这里只要求原级数一致收敛，且各项解析，那么就可以不断地逐项求导，且求导后的级数也一致收敛到和函数的同阶导数

🚦 这里要求级数在 D 上内闭一致收敛，这比要求级数在 D 内一致收敛要弱

关于 Weierstrass 定理的讨论

- 微积分中，要求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛，各项都有导数，且 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，才能逐项求导一次，并且不能保证可以进一步逐项求导
- 而这里只要求原级数一致收敛，且各项解析，那么就可以不断地逐项求导，且求导后的级数也一致收敛到和函数的同阶导数
- 这里要求级数在 D 上内闭一致收敛，这比要求级数在 D 内一致收敛要弱
- 比如，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 虽然在单位圆 $|z|<1$ 上不能一致收敛，但内闭一致收敛
- 这是因为例 3 表明它在闭圆 $|z| \leq r < 1$ 上一致收敛
- 从而，它的和函数 $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，且可以逐项求导



§3 幂级数

§3.1 幂级数的敛散性

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (a \in \mathbb{C},\ c_n \in \mathbb{C})$$

的级数称为**幂级数**

注 从本节开始，改用 n 来表示**求和指标**

并注意现在求和**多了 $n=0$ 一项**，不过这对于级数的性质**没有什么影响**

显然，**幂级数**的**每一项** $c_n(z-a)^n$ 都是**解析函数**

事实上，**幂级数**是最简单的**解析函数项级数**

根据 **Weierstrass 定理**，只要把级数的**收敛区域**研究清楚，那么**和函数**的**解析性质**也就清楚了

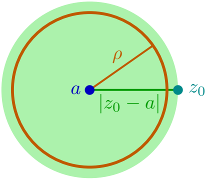
Abel 定理

关于幂级数的敛散性，**Abel** 给出了下述重要定理

Abel 定理 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 $z_0 \neq a$ 收敛，则

1. 它在圆 $K: |z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛
2. 它在闭圆 $K_\rho: |z-a| \leq \rho < |z_0-a|$ 内一致收敛 (即在圆 K 上内闭一致收敛)

Niels Henrik Abel
(1802–1829)



Abel 定理

关于**幂级数**的敛散性，**Abel** 给出了下述重要定理

Niels Henrik Abel
(1802–1829)

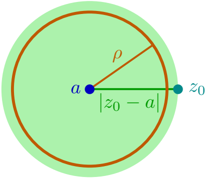
Abel 定理 如果**幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ **在某点** $z_0 \neq a$ **收敛**，则

1. 它在**圆** $K: |z-a| < |z_0-a|$ 内**绝对收敛**
2. 它在**闭圆** $K_\rho: |z-a| \leq \rho < |z_0-a|$ 内**一致收敛** (即在**圆** K 上**内闭一致收敛**)

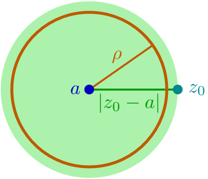
证明 1 由已知条件，**级数** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ **收敛**

故 $\exists M > 0$，使得 $|c_n(z_0-a)^n| < M, \quad n \in \mathbb{N}$

于是 $|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right|^n < M \left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right|^n$



当 $|z-a| < |z_0-a|$ 时，以**右边为通项**的**级数** (它正比于**几何级数**) **收敛**，由**比较判别法**，以**左边为通项**的**级数**亦**收敛**，即**原级数**在**圆** K 上**绝对收敛**



2 当 $|z-a| \le \rho < |z_0 - a|$ 时，有

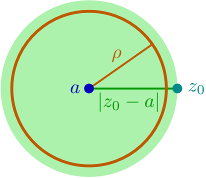
$$|c_n(z-a)^n| < M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \le M\left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n$$

右边是与 z 无关的正数，且以此为通项的级数显然收敛

由 Weierstrass M-判别法，原级数在闭圆 K_ρ 上一致收敛 证毕 ■

Abel 定理的推论 1

2 当 $|z-a| \le \rho < |z_0-a|$ 时，有



$$|c_n(z-a)^n| < M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \le M\left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n$$

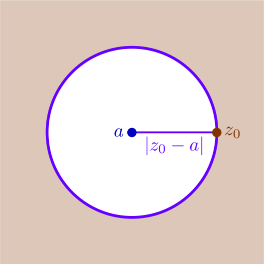
右边是与 z 无关的正数，且以此为通项的级数显然收敛

由 Weierstrass M-判别法，原级数在闭圆 K_ρ 上一致收敛 证毕

由 Abel 定理，立得以下推论

推论 1 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 $z_0 \ne a$ 发散，则它必在圆周 $|z-a| = |z_0-a|$ 外发散

这是因为如果它在圆周 $|z-a| = |z_0-a|$ 外某点收敛，则 Abel 定理表明它必定在 z_0 收敛，这与已知条件矛盾



Abel 定理的推论 2

- 由 **Abel 定理**和**推论 1** 可知，**幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在**某点** z **收敛**或**发散**只与该点与 a 的**距离** $|z-a|$ 有关，而与该点相对于 a 点的**方向无关**
- 即只与 $z-a$ 的**模**有关，而**与其辐角无关**
- 因此**收敛点集**与**发散点集**的**分界**必定是一个**圆周**，这就是下面的推论

Abel 定理的推论 2

由 Abel 定理和推论 1 可知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z 收敛或发散只与该点与 a 的距离 $|z-a|$ 有关，而与该点相对于 a 点的方向无关

即只与 $z-a$ 的模有关，而与其辐角无关

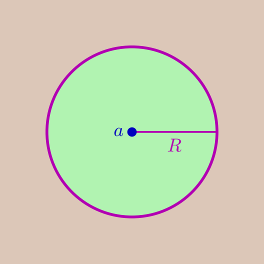
因此收敛点集与发散点集的分界必定是一个圆周，这就是下面的推论

推论 2 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$，$\exists R \geq 0$，使它在圆 $|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛，而在圆外处处发散

R 称为收敛半径，$|z-a| < R$ 称为收敛圆

而 $|z-a| = R$ 称为收敛圆周

应当指出，对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆周 $|z-a| = R$ 上的敛散性，Abel 定理及其推论没有给出结论



§3.2 收敛半径的求法

Abel 定理的推论 2 可等价表达为：令 $r = |z-a|$，则正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 当 $0 \le r < R$ 时收敛，当 $r > R$ 时发散

也就是说，R 是该正项级数的收敛区间与发散区间的分界点

§3.2 收敛半径的求法

Abel 定理的推论 2 可等价表达为：令 $r = |z-a|$，则正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 当 $0 \le r < R$ 时收敛，当 $r > R$ 时发散

也就是说，R 是该正项级数的收敛区间与发散区间的分界点

根据判断正项级数敛散性的 Cauchy 判别法，不难推出下面收敛半径的计算公式

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

定理 (收敛半径的 Cauchy 计算公式) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$，

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收敛半径为

$$\boxed{R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & 0 < l < \infty \\ 0, & l = \infty \\ \infty, & l = 0 \end{cases}}$$

实际上，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| r^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\, r = lr$

则正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 的收敛条件 $lr < 1$ 等价于 $r < \dfrac{1}{l} = R$

收敛半径的 d’Alembert 计算公式

🌻 由判断**正项级数敛散性**的 **d’Alembert 判别法**可推出另一个计算**收敛半径**的公式

❤️ **定理（收敛半径的 d’Alembert 计算公式）** 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l$，则**幂级数** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的**收敛半径**为

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & 0 < l < \infty \\ 0, & l = \infty \\ \infty, & l = 0 \end{cases}$$

Jean d’Alembert (1717–1783)

实际上，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|r^{n+1}}{|c_n|r^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| r = lr$

则**正项级数** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$ 的**收敛条件** $lr < 1$ 等价于 $r < \dfrac{1}{l} = R$

§3.3 和函数的解析性

知道了幂级数的收敛范围，由前面有关定理，就可以得到以下结论，证明见选读

定理 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在收敛圆 $K : |z-a| < R$ 上有如下性质

1. 和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 解析
2. 可以逐项求导，而收敛半径不变

   比如，$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n (z-a)^n]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z-a)^n$ 在 $|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛
3. 可以逐项积分，而收敛半径不变

   比如，$\int_a^z f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^z c_n (\zeta - a)^n \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ 在 $|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛

§4 解析函数的 Taylor 展开

§4.1 Taylor 定理

- 上节看到，一个幂级数在其收敛圆内具有解析的和函数
- 换句话说，它在收敛圆内代表一个解析函数
- 反过来，在圆内解析的函数是否可以展开成幂级数呢？
- 下面的定理给出了肯定的答案

§4 解析函数的 Taylor 展开

§4.1 Taylor 定理

- 上节看到，一个幂级数在其收敛圆内具有解析的和函数
- 换句话说，它在收敛圆内代表一个解析函数
- 反过来，在圆内解析的函数是否可以展开成幂级数呢?
- 下面的定理给出了肯定的答案

Brook Taylor

(1685–1731)

Taylor 定理 设函数 $f(z)$ 在圆 $K : |z-a| < R$ 内解析，则在 K 内可以展开为幂级数

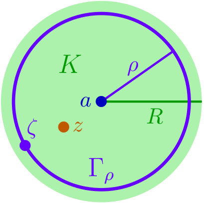
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

$$\Gamma_\rho : |\zeta - a| = \rho < R, \quad n \in \mathbb{N},$$

且展开式是唯一的



几何级数的和函数

- 为了证明 Taylor 定理，需要先推出几何级数在其收敛圆上的和函数
- 几何级数的部分和为 $\sum\limits_{n=0}^{m} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1} + z^m$
- 两边同时乘以 z，有 $z\sum\limits_{n=0}^{m} z^n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + z^{m+1}$
- 两式相减，得 $(1-z)\sum\limits_{n=0}^{m} z^n = 1 - z^{m+1}$，即 $\sum\limits_{n=0}^{m} z^n = \dfrac{1-z^{m+1}}{1-z} \quad (z \neq 1)$

几何级数的和函数

- 为了证明 Taylor 定理，需要先推出几何级数在其收敛圆上的和函数
- 几何级数的部分和为 $\sum_{n=0}^{m} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1} + z^m$
- 两边同时乘以 z，有 $z\sum_{n=0}^{m} z^n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + z^{m+1}$
- 两式相减，得 $(1-z)\sum_{n=0}^{m} z^n = 1 - z^{m+1}$，即 $\sum_{n=0}^{m} z^n = \dfrac{1-z^{m+1}}{1-z}\quad (z \neq 1)$
- 当 $|z| < 1$ 时，$\lim\limits_{m\to\infty} z^{m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} |z|^{m+1} \exp[\mathrm{i}(m+1)\operatorname{Arg} z] = 0$，故

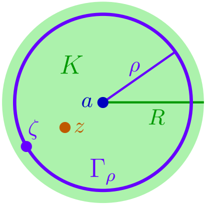
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} z^n = \lim_{m\to\infty}\frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

- 也就是说，几何级数在 $|z| < 1$ 上的和函数为

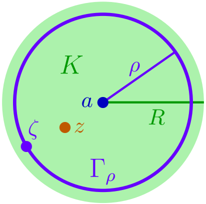
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1}$$

Taylor 定理的证明

- **证明** $\forall z \in K$，总可以找到**正数** ρ 使得 $|z-a| < \rho < R$
- 作**圆周** $\Gamma_\rho : |\zeta - a| = \rho$，则 z 在**其内部**
- 显然，$f(\zeta)$ 在**闭圆** $\bar{K}_\rho : |\zeta - a| \leq \rho$ 上**解析**
- 根据 **Cauchy 积分公式**，有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$



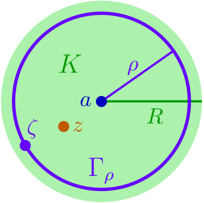
Taylor 定理的证明



- **证明** $\forall z \in K$，总可以找到**正数** ρ 使得 $|z-a| < \rho < R$
- 作**圆周** $\Gamma_\rho : |\zeta - a| = \rho$，则 z 在**其内部**
- 显然，$f(\zeta)$ 在**闭圆** $\bar{K}_\rho : |\zeta - a| \leq \rho$ 上**解析**
- 根据 **Cauchy 积分公式**，有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{\Gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$
- 在 Γ_ρ 上有 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < \dfrac{\rho}{\rho} = 1$，利用 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ $(|z|<1)$ 推出

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

Taylor 定理的证明



证明 $\forall z \in K$，总可以找到**正数** ρ 使得 $|z-a| < \rho < R$

作**圆周** $\Gamma_\rho : |\zeta - a| = \rho$，则 z 在**其内部**

显然，$f(\zeta)$ 在**闭圆** $\bar{K}_\rho : |\zeta - a| \leq \rho$ 上**解析**

根据 **Cauchy 积分公式**，有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$

在 Γ_ρ 上有 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < \dfrac{\rho}{\rho} = 1$，利用 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$ 推出

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\,\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

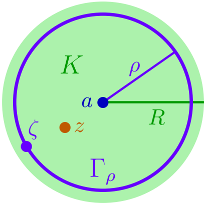
$\zeta \in \Gamma_\rho$ 时，$\left|\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right| = \left(\dfrac{|z-a|}{\rho}\right)^n$ **与 ζ 无关**，以此为**通项**的**正项级数收敛**

故由 **Weierstrass M-判别法**，**级数** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$ 在 Γ_ρ 上**一致收敛**

继续证明

又函数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$ 在 Γ_ρ 上**有界**

故 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$ 在 Γ_ρ 上**一致收敛**



因而可以**逐项积分**，得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right](z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n
\end{aligned}
$$

最后一步用到 **Cauchy 高阶导数公式**，上式即所求证

虽然开始时取 ρ 满足 $|z-a|<\rho<R$，但最后出现在系数中的**积分**显然**与 ρ 的大小无关**，只要 $\rho<R$ 即可算出正确结果

完成证明

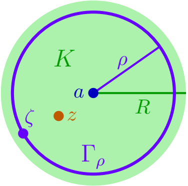
- 为了证明展开式的唯一性，假设用某种方法找到在 K 内成立的另一个展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n$$

- 令 $z=a$，即得 $d_0=f(a)=c_0$
- 又因为幂级数逐项求导后在 K 内仍收敛，故可逐项求导 n 次后令 $z=a$，得到

$$d_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=c_n,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 可见，展开式是唯一的 证毕 ■



完成证明

- 为了证明展开式的唯一性，假设用某种方法找到在 K 内成立的另一个展开式

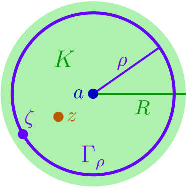
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-a)^n$$

- 令 $z=a$，即得 $d_0=f(a)=c_0$
- 又因为幂级数逐项求导后在 K 内仍收敛，故可逐项求导 n 次后令 $z=a$，得到

$$d_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=c_n,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 可见，展开式是唯一的　　证毕 ■

- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 称为 $f(z)$ 在 a 点处的 **Taylor 展开式**
- 其右边称为 **Taylor 级数**，a 称为**展开中心**
- $c_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 称为 **Taylor 系数**



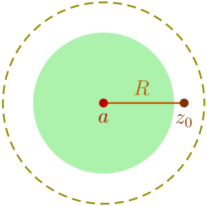
- 只要 $|z-a|<R$，Taylor 展开式就成立，故 Taylor 级数的收敛半径大于或等于 R

§4.2 展开式的收敛半径

- 如果求得了 Taylor 展开式的通项系数，就可以用 §3.2 的方法来计算收敛半径
- 然而，在 $f(z)$ 比较复杂的情况下，要求出展开式的通项系数是很困难的
- 因此，希望可通过被展开函数本身的性质来计算收敛半径
- 即使可以求出通项系数，另一种方法也可用于互相印证

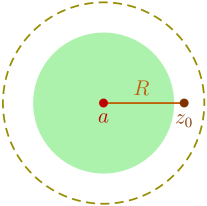
§4.2 展开式的收敛半径

- 如果求得了 Taylor 展开式的通项系数，就可以用 §3.2 的方法来计算收敛半径
- 然而，在 $f(z)$ 比较复杂的情况下，要求出展开式的通项系数是很困难的
- 因此，希望可通过被展开函数本身的性质来计算收敛半径
- 即使可以求出通项系数，另一种方法也可用于互相印证
- 关于这一问题，有以下简单的结论
- 以 a 点为中心将解析函数 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数，若 $f(z)$ 距离 a 点最近的奇点为 z_0，则收敛半径为 $R = |z_0 - a|$



§4.2 展开式的收敛半径

- 如果求得了 Taylor 展开式的通项系数，就可以用 §3.2 的方法来计算收敛半径
- 然而，在 $f(z)$ 比较复杂的情况下，要求出展开式的通项系数是很困难的
- 因此，希望可通过被展开函数本身的性质来计算收敛半径
- 即使可以求出通项系数，另一种方法也可用于互相印证
- 关于这一问题，有以下简单的结论
- 以 a 点为中心将解析函数 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数，若 $f(z)$ 距离 a 点最近的奇点为 z_0，则收敛半径为 $R = |z_0 - a|$



- 以 a 点为中心作圆 K，只要 $f(z)$ 在其中解析，则 Taylor 展开式就在 K 内成立
- 因此，展开圆的圆周至少可以推至 z_0 处，从而收敛半径 $R \geq |z_0 - a|$
- 另一方面，假设 Taylor 级数的收敛半径 $R > |z_0 - a|$，由于幂级数的和函数在收敛圆内解析，故 $f(z)$ 在 z_0 解析，这与 z_0 是奇点的条件**矛盾**，故 $R \leq |z_0 - a|$
- 综上所述，即得 $R = |z_0 - a|$

§4.3 初等单值函数的 Taylor 展开式

本小节给出若干常用的初等单值函数的 Taylor 展开式

例 1 求 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式

解 由 $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$ 得 $f^{(n)}(z)=\mathrm{e}^z\ (n\in\mathbb{N}^+)$，故 $f(0)=f^{(n)}(0)=1\ (n\in\mathbb{N}^+)$

于是所求 Taylor 展开式为

$$\boxed{\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots}$$

$f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 z 平面上解析，即在有限远处无奇点

故展开式的收敛半径应为 $R=\infty$

§4.3 初等单值函数的 Taylor 展开式

本小节给出若干常用的**初等单值函数**的 **Taylor 展开式**

例 1 求 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 $a=0$ 处的 **Taylor 展开式**

解 由 $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$ 得 $f^{(n)}(z)=\mathrm{e}^z\ (n\in\mathbb{N}^+)$，故 $f(0)=f^{(n)}(0)=1\ (n\in\mathbb{N}^+)$

于是所求 **Taylor 展开式**为

$$\boxed{\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots}$$

$f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 z **平面上解析**，即在**有限远处无奇点**

故展开式的**收敛半径**应为 $R=\infty$

也可以通过 **Taylor 系数** $c_n=\dfrac{1}{n!}$ 计算收敛半径，根据 **d'Alembert 计算公式**，有

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

同样得到**收敛半径** $R=\infty$

例 2

例 2 求 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $a=0$ 处的 **Taylor 展开式**

解 $c_0=f(0)=1$，而

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\frac{1!}{(1-z)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-2}}\frac{2!}{(1-z)^3}=\cdots=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0)=n!,\quad c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=1,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

所求 **Taylor 展开式**为 $\boxed{\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+\cdots+z^n+\cdots}$，即**几何级数**

例 2

例 2 求 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $a=0$ 处的 **Taylor 展开式**

解 $c_0=f(0)=1$，而

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\frac{1!}{(1-z)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-2}}\frac{2!}{(1-z)^3}=\cdots=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0)=n!,\quad c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=1,\quad n\in\mathbb{N}^+$$

所求 **Taylor 展开式**为 $\boxed{\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+\cdots+z^n+\cdots}$，即**几何级数**

由于 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 z 平面上有**奇点** $z_0=1$，而**展开中心** $a=0$，故**收敛半径**应为 $R=|z_0-a|=1$

此外，由 **Cauchy 计算公式**得 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，故 $R=\dfrac{1}{l}=1$

以上两个结果经常被用来计算更复杂的函数的 Taylor 展开式，**应熟悉掌握**

例 3

例 3 求 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式

解 由例 1 的结果，注意到 $\mathrm{i}^{2k}=(-)^k\ (k\in\mathbb{N})$，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!}-\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

故所求 Taylor 展开式为

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

由于 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在 z 平面上解析，即在有限远处无奇点，故两展开式的收敛半径都是 $R=\infty$，由 Taylor 系数计算收敛半径可得同样的结果

§4.4 初等多值函数的 Taylor 展开式

对于多值函数，首先要分出单值分支，然后才能作 Taylor 展开

例 4 求 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式，规定 $f(0)=0$

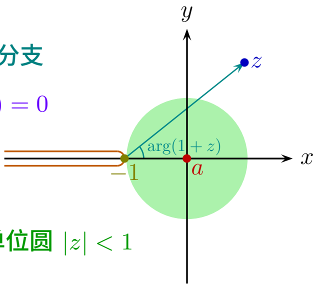
解 $f(z)=\ln(1+z)$ 的支点为 -1 和 ∞

将 z 平面沿负实轴从 -1 到 ∞ 割破，可以分出单值分支

由于 $\ln(1+z)=\ln|1+z|+\mathrm{i}\arg(1+z)$，规定 $f(0)=0$

即规定 $\arg(1+z)\big|_{z=0}=\arg[z-(-1)]\big|_{z=0}=0$，

这就确定了单值分支



为了使 Taylor 级数收敛圆尽量大，割线不应该穿过单位圆 $|z|<1$

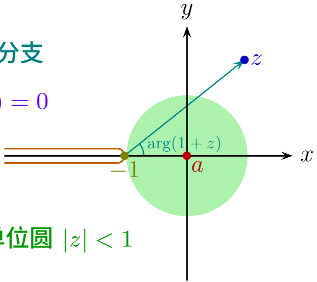
§4.4 初等多值函数的 Taylor 展开式

对于**多值函数**，首先要分出**单值分支**，然后才能作 **Taylor 展开**

例 4 求 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式，**规定** $f(0)=0$

解 $f(z)=\ln(1+z)$ 的**支点**为 -1 和 ∞

将 z 平面**沿负实轴**从 -1 到 ∞ **割破**，可以分出**单值分支**



由于 $\ln(1+z)=\ln|1+z|+\mathrm{i}\arg(1+z)$，**规定** $f(0)=0$

即**规定** $\arg(1+z)\big|_{z=0}=\arg[z-(-1)]\big|_{z=0}=0$，

这就**确定**了**单值分支**

为了使 Taylor 级数**收敛圆**尽量大，**割线**不应该穿过**单位圆** $|z|<1$

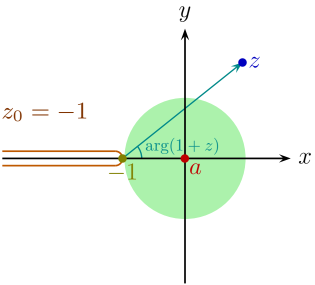
按**规定**，$f(0)=0$，故 $c_0=0$，又

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[\ln(1+z)]' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\frac{1}{1+z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-2}}\frac{-1!}{(1+z)^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{n-3}}\frac{(-)^2 2!}{(1+z)^3} = \cdots = \frac{(-)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}
\end{aligned}
$$

$\ln(1+z)$ 的 Taylor 展开式

- 从而 $f^{(n)}(0) = (-)^{n-1}(n-1)!$，$c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-)^{n-1}}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$
- 于是，所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

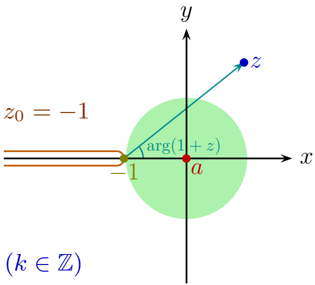


- $f(z) = \ln(1+z)$ 距离**展开中心** $a = 0$ **最近的奇点**为 $z_0 = -1$
- 故展开式的**收敛半径**应为 $R = 1$
- 由 **Taylor 系数**计算**收敛半径**可得同样的结果

$\ln(1+z)$ 的 Taylor 展开式

- 从而 $f^{(n)}(0) = (-)^{n-1}(n-1)!$，$c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-)^{n-1}}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$
- 于是，所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$



- $f(z) = \ln(1+z)$ 距离**展开中心** $a=0$ **最近的奇点**为 $z_0 = -1$
- 故展开式的**收敛半径**应为 $R=1$
- 由 **Taylor 系数**计算**收敛半径**可得同样的结果
- 如果**规定** $\arg(1+z)\big|_{z=0} = \arg[z-(-1)]\big|_{z=0} = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- 则 $c_0 = f(0) = 2k\pi\mathrm{i}$，而**其余系数不变**（$\mathrm{Ln}\, z$ 的**多值性**只体现在给**虚部**加上 $2k\pi$）
- 从而所求 Taylor 展开式为

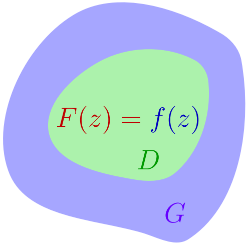
$$\ln(1+z) = 2k\pi\mathrm{i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

§5 解析开拓的基本概念

❤️ **定义** 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，考虑一个包含 D 的更大的区域 G，如果存在函数 $F(z)$ 在 G 内解析，且在 D 内 $F(z) = f(z)$，则称函数 $f(z)$ 可解析开拓到 G 内，并称函数 $F(z)$ 为函数 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓

⬇️ **注** 解析开拓也称为解析延拓

🐙 如果这样定义的解析开拓存在的话，可以证明它一定是唯一的

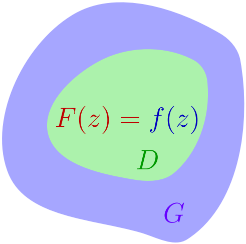


§5 解析开拓的基本概念

定义 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，考虑一个包含 D 的更大的区域 G，如果存在函数 $F(z)$ 在 G 内解析，且在 D 内 $F(z)=f(z)$，则称函数 $f(z)$ 可解析开拓到 G 内，并称函数 $F(z)$ 为函数 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓

注 解析开拓也称为解析延拓

如果这样定义的解析开拓存在的话，可以证明它一定是唯一的



例 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在区域 $D:|z|<1$ 内解析

而 $F(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在区域 $G=\mathbb{C}\backslash\{1\}$（表示复平面去掉点 $z=1$）内解析

在 D 内 $F(z)=f(z)$

故 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓