

# 数学物理方法

## 第七章 分离变量法

### 第 4 节和第 5 节

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>

更新日期：2024 年 9 月 22 日



§4 矩形区域上的稳定场方程

前面几节研究了一维波动或热传导方程定解问题的求解，它们都涉及两个自变量

平面上的稳定场方程定解问题也涉及两个自变量，因此与上述问题相似

 但 **稳定场方程**的定解问题只有**边界条件**, 没有初始条件, 其解法有一些不同之处

本节求解矩形区域上的两个稳定场问题，以加深对分离变量法的了解

## 矩形区域是平面上最简单的区域

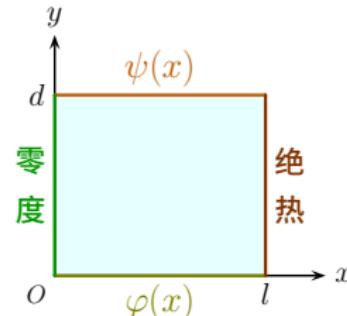
 下面先讨论矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

## 矩形区域上 Laplace 方程的定解问题



考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布  $u(x, y)$  的问题。



矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知



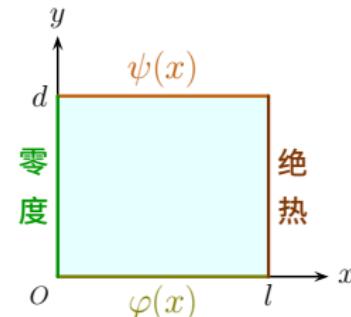
那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到。

## 矩形区域上 Laplace 方程的定解问题



考慮以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (0 \leq y \leq d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \end{array} \right.$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布  $u(x, y)$  的问题。



矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知



那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到



现在尝试寻找  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  形式的特解，将它代入 Laplace 方程，得

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)$$



$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ , 左边与  $y$  无关, 右边与  $x$  无关, 必为常数, 记作  $-\lambda$

## 本征值问题

由此得到两个方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

  $x = 0$  和  $x = l$  处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

## 本征值问题

由此得到两个方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

  $x = 0$  和  $x = l$  处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$

从而  $X'(l) = \mu D \cosh \mu l = 0$ , 但  $\cosh \mu l \geq 1$  且  $\mu > 0$ , 故  $D = 0$

于是得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ ，因而  $\lambda < 0$  不是本征值

本征值问题

由此得到两个方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  和  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

  $x = 0$  和  $x = l$  处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

从而得到本征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1 如果  $\lambda < 0$ , 令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$

从而  $X'(l) = \mu D \cosh \mu l = 0$ , 但  $\cosh \mu l \geq 1$  且  $\mu > 0$ , 故  $D = 0$

于是得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ ，因而  $\lambda < 0$  不是本征值

2 如果  $\lambda = 0$ ，则解为  $X(x) = Cx + D$ ，其中  $C, D$  是任意常数

有  $D = X(0) = 0$ ,  $C = X'(l) = 0$ , 得到平庸解  $X(x) \equiv 0$ ,  $\lambda = 0$  不是本征值

本征值和本征函数

3 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$ ，从而  $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

为了得到**非平庸解**, 必须使  $\cos \mu l = 0$ , 如此则  $D$  可任意

本征值和本征函数

3 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$ ，从而  $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

为了得到非平庸解，必须使  $\cos \mu l = 0$ ，如此则  $D$  可任意

因此  $\cos \mu l = 0$  是决定本征值的方程，它的解为  $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

从而  $\mu_n l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  是余弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left\lceil \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right\rceil^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取  $D = 1$



本征值和本征函数

3 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，有  $C = X(0) = 0$ ，从而  $X'(l) = \mu D \cos \mu l = 0$

为了得到非平庸解，必须使  $\cos \mu l = 0$ ，如此则  $D$  可任意

因此  $\cos \mu l = 0$  是决定本征值的方程，它的解为  $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

从而  $\mu_n l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  是余弦函数的零点，于是得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取  $D = 1$

 注 如果将上面的  $\mu_n$  写成  $\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$ ，则应该取  $n \in \mathbb{N}$

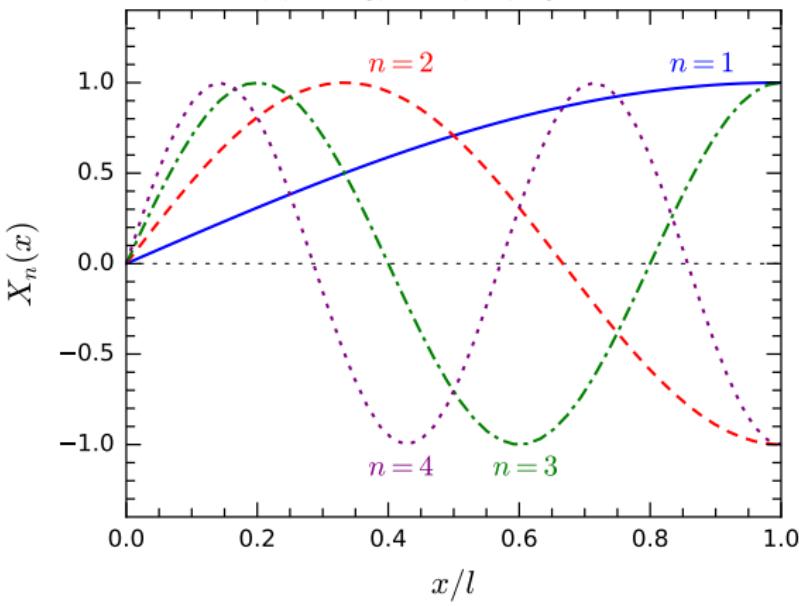
求出本征函数后，最好验证它是否确实满足**边界条件**，避免计算错误或抄写错误。

比如，这里如果将本征函数误写成  $\cos \mu_n x$ ，则通过上述验证可以立即发现错误。

## 本征函数图像

$$\lambda_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$X_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2l], \quad n \in \mathbb{N}^+$$



求解  $Y(y)$

这里本征函数族  $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$  在区间  $[0, l]$  上的正交完备性由 **Strum-Liouville** 本征值问题的一般结论 (第十章 §5) 得到保证

 正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

求解  $Y(y)$

这里本征函数族  $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$  在区间  $[0, l]$  上的正交完备性由 Strum-Liouville 本征值问题的一般结论 (第十章 §5) 得到保证

正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

 将本征值  $\lambda_n = \mu_n^2$  代入  $Y(y)$  满足的方程, 得  $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$

它的两个线性独立解可以取为  $\{\exp(\mu_n y), \exp(-\mu_n y)\}$

 因  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ ,  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ , 也可取为  $\{\cosh \mu_n y, \sinh \mu_n y\}$

求解  $Y(y)$

这里本征函数族  $\{\sin \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$  在区间  $[0, l]$  上的正交完备性由 Strum-Liouville 本征值问题的一般结论 (第十章 §5) 得到保证

 正交性也可以直接验证，利用积化和差公式容易证明

$$\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \int_0^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

将本征值  $\lambda_n = \mu_n^2$  代入  $Y(y)$  满足的方程, 得  $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$

它的两个线性独立解可以取为  $\{\exp(\mu_n y), \exp(-\mu_n y)\}$

 因  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ ,  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ , 也可取为  $\{\cosh \mu_n y, \sinh \mu_n y\}$

由双曲函数减法公式得  $\sinh[\mu_n(d - y)] = \sinh \mu_n d \cosh \mu_n y - \cosh \mu_n d \sinh \mu_n y$

为了下面计算方便, 将**两个线性独立解**等价地取为  $\{\sinh[\mu_n(d-y)], \sinh \mu_n y\}$

从而将方程  $Y_n''(y) - \mu_n^2 Y_n(y) = 0$  的通解写作

$$Y_n(y) = A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad A_n \text{ 和 } B_n \text{ 是任意常数}$$

## 定解问题的解



于是，满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y\} \sin \mu_n x$$



将上式代入  $y$  方向的两个边界条件，得

$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \psi(x)$$



## 定解问题的解

于是，满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sinh[\mu_n(d-y)] + B_n \sinh \mu_n y\} \sin \mu_n x$$

 将上式代入  $y$  方向的两个边界条件，得

$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n d \sin \mu_n x = \psi(x)$$

由于本征函数族的正交完备性，适当的系数  $A_n$  和  $B_n$  可使以上两式成立

利用  $\int_0^l \sin \mu_m x \sin \mu_n x \, dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}$ ，推出

$$A_n = \frac{2}{l \sinh \mu_n d} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_n x \, dx, \quad B_n = \frac{2}{l \sinh \mu_n d} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_n x \, dx$$

给定  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的形式，可以求得系数  $A_n$  和  $B_n$

将它们代回一般解，就得到定解问题的解

# 讨论

- 🟡 在上述**稳定场方程**定解问题中，**一部分边界条件（齐次）**用于构成**本征值问题**
- 🟡 另一部分**边界条件**（齐次或非齐次）用于确定**一般解**中的**系数**
- 🟩 这是与**波动**或**热传导**问题的不同之处，后两者用**初始条件**确定**系数**
- 🟧 所以，就 **Laplace 方程**而言，**不必要求所有的边界条件都是齐次的**
- 🔴 否则就只有**平庸解**了

# 矩形区域上 Poisson 方程的定解问题

 下面再考虑全部边界条件都非齐次的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = \mu(y), \quad u|_{x=l} = \nu(y) & (0 \leq y \leq d) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

 方法一 对于这一定解问题，可令

$$u(x, y) = v(x, y) + u_0(x, y)$$

 并取  $u_0(x, y) = \mu(y) + \frac{x}{l}[\nu(y) - \mu(y)]$

 从而  $v(x, y)$  在  $x = 0$  和  $x = l$  处满足齐次的边界条件

 虽然方程仍是非齐次的，但可以用本征函数展开法求解

# 分为两个定解问题

方法二 由于稳定场方程的所有定解条件都是边界条件，更简单的方法是令  $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ ，将上述定解问题化为两个问题来求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0 & (0 \leq y \leq d) \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=d} = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u_2|_{x=0} = \mu(y), \quad u_2|_{x=l} = \nu(y) & (0 \leq y \leq d) \\ \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=d} = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



$u_1(x, y)$  的定解问题可以用本征函数展开法求解



$u_2(x, y)$  的定解问题可以直接用分离变量法求出一般解，再用边界条件确定系数

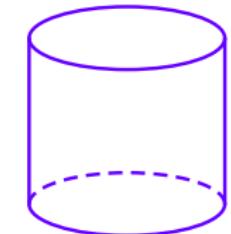
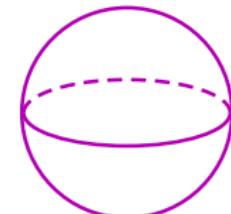
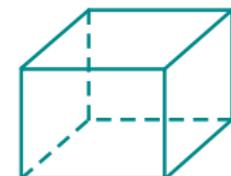
## §5 平面极坐标系中的稳定场方程

 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题

 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状

 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域

 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面



## §5 平面极坐标系中的稳定场方程

 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题

 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状

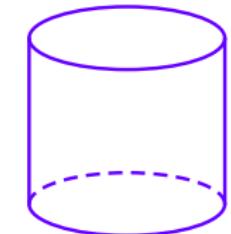
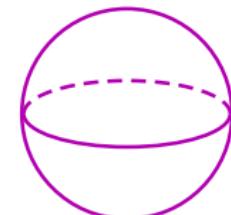
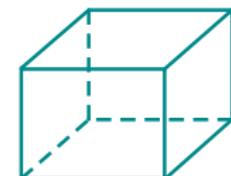
 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域

 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面

 根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系

 比如，对球形区域上的定解问题，就应该采用球坐标系

 如果采用直角坐标系，则无法对边界条件分离变量



## §5 平面极坐标系中的稳定场方程

分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题

分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状

在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域

它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面

根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系

比如，对球形区域上的定解问题，就应该采用球坐标系

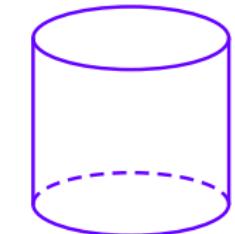
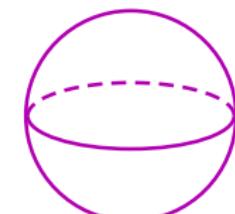
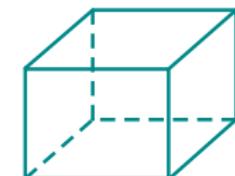
如果采用直角坐标系，则无法对边界条件分离变量

分离变量成功之后，需要求解常微分方程及其本征值问题

前面几节遇到的常微分方程的解都是初等函数，较容易处理

然而，在更多问题中，出现的微分方程不是我们所熟悉的，其解并不是初等函数

即使是弦振动问题，如果弦的线密度不是常数，那么本征值问题就困难得多



# 平面极坐标系

-  对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂
-  如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究
-  所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解
-  后面将对一些特殊函数作系统的介绍

# 平面极坐标系

对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂

如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究

所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解

后面将对一些特殊函数作系统的介绍

对于**平面区域**上的问题，如果边界涉及**圆弧**，比如**圆内**、**圆外**或**扇形区域**上的定解问题，那么显然应该采用**平面极坐标系**

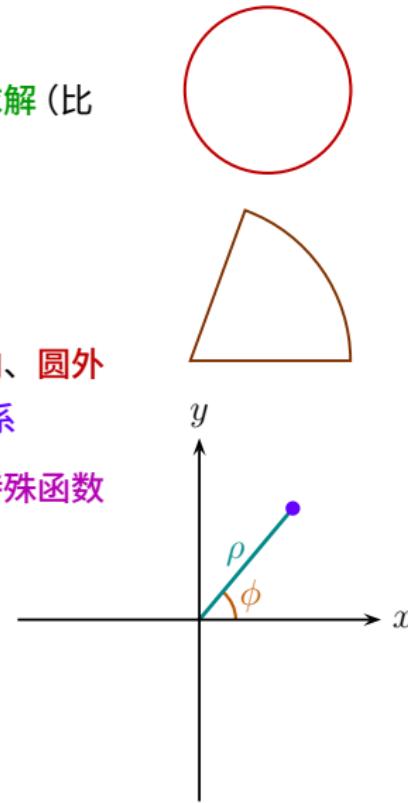
在**平面极坐标系**中求解**波动**或**热传导**方程，也会涉及**特殊函数**

但**稳定场方程**的求解则只需用到**初等函数**

这可能是**曲线坐标系中最简单**的问题了

这一问题涉及**两个自变量**  $\rho$  和  $\phi$ ，与前面几节类似

但边界条件完全不同，方程的形式也有新的特点



## §5.1 一般解



在平面极坐标系中, Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  通过坐标变换  $x = \rho \cos \phi$  和  $y = \rho \sin \phi$  得到

这种方法思路简单, 但计算较为繁琐, 在第九章中将会介绍其它方法

## §5.1 一般解



在平面极坐标系中, Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  通过坐标变换  $x = \rho \cos \phi$  和  $y = \rho \sin \phi$  得到

这种方法思路简单, 但计算较为繁琐, 在第九章中将会介绍其它方法

这里暂时不给定定解条件, 先求 Laplace 方程的一般解

接下来的求解假定  $\phi$  的取值不受限制, 因此下面得到的一般解不适用于扇形区域

现在尝试寻找形式为  $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  的特解, 将它代入 Laplace 方程, 有

$$0 = \nabla^2 u = R''(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)\Phi''(\phi)$$

整理得  $\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} \equiv \lambda$ , 其中  $\lambda$  是常数

# 自然的周期性边界条件

从而得到两个方程  $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$  和  $\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0$

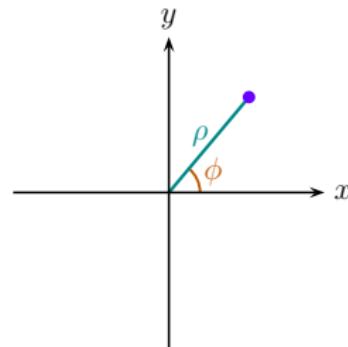
在直角坐标系中，坐标与几何点是一一对应的，但曲线坐标系却往往不是这样

在平面极坐标系中，坐标  $(\rho, \phi)$  与  $(\rho, \phi + 2\pi)$  代表同一个几何点

一个物理量在一个确定的几何点应该具有确定的取值

这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$



# 自然的周期性边界条件

从而得到两个方程  $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$  和  $\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0$

在直角坐标系中，坐标与几何点是一一对应的，但曲线坐标系却往往不是这样

在平面极坐标系中，坐标  $(\rho, \phi)$  与  $(\rho, \phi + 2\pi)$  代表同一个几何点

一个物理量在一个确定的几何点应该具有确定的取值

这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$

将  $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  代入，得  $R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\phi)$

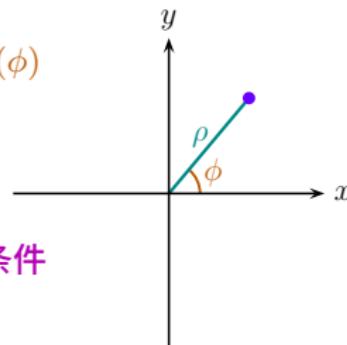
但  $R(\rho)$  不恒为零，故

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

这是由物理量的单值性和曲线坐标的特性导出的一个边界条件

它是一种自然边界条件，自然边界条件还有其它形式

同时，它也是一种周期性边界条件



# 求解本征值问题

现在求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题  $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

1 如果  $\lambda < 0$ ，令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi} + De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi} = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$$

$C(e^{2\pi\mu} - 1)e^{\mu\phi} + D(e^{-2\pi\mu} - 1)e^{-\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= \mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm\mu\phi})'' &= \mu^2 e^{\pm\mu\phi} \end{aligned}$$

上式必须对所有  $\phi$  值成立，故  $C(e^{2\pi\mu} - 1) = 0$ ，且  $D(e^{-2\pi\mu} - 1) = 0$

但  $\mu > 0$ ，有  $e^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$ ，从而  $C = D = 0$

于是得到平庸解  $\Phi(\phi) \equiv 0$ ，因而  $\lambda < 0$  不是本征值

# 求解本征值问题

现在求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题  $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

1 如果  $\lambda < 0$ ，令  $\lambda = -\mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}$

其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$\begin{aligned} Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi} + De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi} &= Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi} \\ \text{👉 } C(e^{2\pi\mu} - 1)e^{\mu\phi} + D(e^{-2\pi\mu} - 1)e^{-\mu\phi} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= \mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm\mu\phi})'' &= \mu^2 e^{\pm\mu\phi} \end{aligned}$$

上式必须对所有  $\phi$  值成立，故  $C(e^{2\pi\mu} - 1) = 0$ ，且  $D(e^{-2\pi\mu} - 1) = 0$

但  $\mu > 0$ ，有  $e^{\pm 2\pi\mu} - 1 \neq 0$ ，从而  $C = D = 0$

于是得到平庸解  $\Phi(\phi) \equiv 0$ ，因而  $\lambda < 0$  不是本征值

2 如果  $\lambda = 0$ ，则解为  $\Phi(x) = C + D\phi$ ，其中  $C$ 、 $D$  是任意常数

代入周期性边界条件，得  $C + D(\phi + 2\pi) = C + D\phi$ ，即  $2\pi D = 0$

故  $D = 0$ ，而  $C$  可任意，求得本征值  $\lambda_0 = 0$ ，本征函数  $\Phi_0(\phi) = 1$

注意这个解不能遗漏，否则本征函数族将是不完备的

# 继续求解本征值问题

 继续求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题  $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

3 如果  $\lambda > 0$ ，令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ )，则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$

 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数，代入周期性边界条件，得

$$Ce^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + De^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

  $C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm i\mu\phi})'' &= -\mu^2 e^{\pm i\mu\phi} \end{aligned}$$

 上式必须对所有  $\phi$  值成立，故  $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$ ，且  $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$

 后面一式两边乘以  $-e^{2i\pi\mu}$ ，得  $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

# 继续求解本征值问题

 继续求解  $\Phi(\phi)$  满足的本征值问题  $\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \\ \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \end{cases}$

3 如果  $\lambda > 0$ , 令  $\lambda = \mu^2$  ( $\mu > 0$ ), 则解为  $\Phi(\phi) = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$

 其中  $C$ 、 $D$  是任意常数, 代入周期性边界条件, 得

$$Ce^{2i\pi\mu}e^{i\mu\phi} + De^{-2i\pi\mu}e^{-i\mu\phi} = Ce^{i\mu\phi} + De^{-i\mu\phi}$$

  $C(e^{2i\pi\mu} - 1)e^{i\mu\phi} + D(e^{-2i\pi\mu} - 1)e^{-i\mu\phi} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm i\mu\phi})'' &= -\mu^2 e^{\pm i\mu\phi} \end{aligned}$$

 上式必须对所有  $\phi$  值成立, 故  $C(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$ , 且  $D(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0$

 后面一式两边乘以  $-e^{2i\pi\mu}$ , 得  $D(e^{2i\pi\mu} - 1) = 0$

 如果  $e^{2i\pi\mu} - 1 \neq 0$ , 则  $C = D = 0$ , 只得到平庸解

 为得到非平庸解, 须要求  $e^{2i\pi\mu} = 1$ , 而  $C$ 、 $D$  均可任意

 因此  $e^{2i\pi\mu} = 1$  是决定本征值的方程, 它的解为  $\mu = m$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

 得到本征值  $\lambda_m = m^2$  和本征函数  $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ , 其中  $m \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \cos m\phi &= \frac{e^{im\phi} + e^{-im\phi}}{2} \\ \sin m\phi &= \frac{e^{im\phi} - e^{-im\phi}}{2i} \end{aligned}$$

# 简并

 现在, 本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) 对应于两个独立的本征函数  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$

 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

 独立本征函数的个数称为简并度, 这里简并度为 2

# 简并

 现在, 本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) 对应于两个独立的本征函数  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$

 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

 独立本征函数的个数称为简并度, 这里简并度为 2

 注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时, 也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数, 结果是一样的

 但容易发现, 在目前的周期性边界条件下, 用指数形式更加方便

# 简并

现在, 本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) 对应于两个独立的本征函数  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$

这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并

独立本征函数的个数称为简并度, 这里简并度为 2

注 在讨论上面 1 和 3 两种情况时, 也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数, 结果是一样的

但容易发现, 在目前的周期性边界条件下, 用指数形式更加方便

如果对  $\lambda_m = m^2$  和  $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$  取  $m = 0$ , 会得到  $\lambda_0 = 0$  和  $\Phi_0(\phi) = \{1, 0\}$ , 忽略平庸解  $\Phi(\phi) \equiv 0$ , 则与第 2 种情况结果相同

因此, 可以把所有的本征值和本征函数统一写成

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

但是应该注意, 在上面的求解中,  $m = 0$  和  $m \neq 0$  两种情况需要分开讨论

而且  $m = 0$  时简并度为 1,  $m \neq 0$  时简并度为 2

这组本征函数族正是标准 Fourier 展开的基, 在区间  $[0, 2\pi]$  上是正交完备的

# 求解 $R(\rho)$

🌵 将本征值  $\lambda_m = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) 代入  $R(\rho)$  的常微分方程, 得

$$\rho^2 R''_m(\rho) + \rho R'_m(\rho) - m^2 R_m(\rho) = 0$$

🌿 这是高等数学课上学过的 Euler 方程, 特点是每一项中自变量的幂次与未知函数导数的阶相同

🥦 它虽然不是常系数的微分方程, 但很容易求解

藠头 令  $\rho = e^t$ , 则  $t = \ln \rho$ ,  $\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\rho}$ , 有  $\rho \frac{dR_m}{d\rho} = \rho \frac{dt}{d\rho} \frac{dR_m}{dt} = \frac{dR_m}{dt}$ , 故

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m}{d\rho} = \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR_m}{d\rho} \right) = \rho \frac{dt}{d\rho} \frac{d}{dt} \frac{dR_m}{dt} = \frac{d^2 R_m}{dt^2}$$

🥔 从而将  $R_m$  的方程化为常系数微分方程  $\frac{d^2 R_m}{dt^2} - m^2 R_m = 0$ , 它的解是

$$R_m = \{e^{mt}, e^{-mt}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0 = \{1, t\} \quad (m = 0)$$



Leonhard Euler  
(1707–1783)

# 一般解

根据  $\rho = e^t$  将解中的自变量变换回  $\rho$ ，得

$$R_m(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0(\rho) = \{1, \ln \rho\} \quad (m = 0)$$

再结合

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

推出 Laplace 方程  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$  的一般解为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

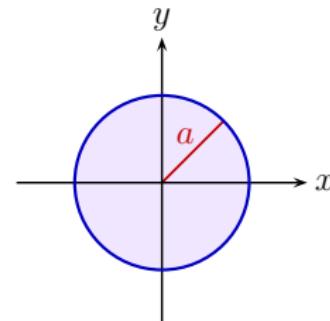
其中系数  $A_m$  和  $B_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) 是常数，可以通过边界条件确定

## §5.2 用边界条件确定系数



考虑圆内的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



其中  $a$  是圆的半径

物理量应该取有限值，而一般解中的  $\ln \rho$  和  $\rho^{-m}$  在  $\rho = 0$  处有奇性，应该舍弃

故  $B_0 = 0$ ,  $C_m = D_m = 0$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

从而一般解简化为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{a} \right)^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

这里为了下面计算方便，用  $\left( \frac{\rho}{a} \right)^m$  代替原来的  $\rho^m$

# 圆内问题的解

 将解式代入边界条件  $u|_{\rho=a} = F(\phi)$ ，得

$$u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) = F(\phi)$$

 由于本征函数族的完备性，只要适当选取系数，上式总可以得到满足

 本征函数族具有正交性，体现为

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos n\phi d\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin n\phi d\phi = \pi \delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

 由此得到

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi, \quad A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi d\phi$$

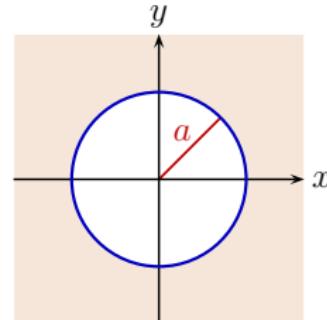
 给定  $F(\phi)$  的具体形式，计算上述积分，再将系数代回去，就得到圆内问题的解

# 圆外问题



类似地，考虑圆外的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$



由于一般解中的  $\ln \rho$  和  $\rho^m$  在  $\rho \rightarrow \infty$  处有奇性

应该舍弃相应的项，故  $B_0 = 0$ ,  $A_m = B_m = 0$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

从而一般解简化为  $u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{a} \right)^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$

由边界条件得  $u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) = G(\phi)$ ，定出系数为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) d\phi, \quad C_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad D_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi) \sin m\phi d\phi$$

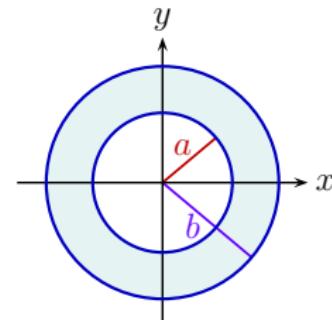
# 其它情况

 如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

 比如**环域**  $a < \rho < b$  上的定解问题，则**一般解**

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) = & A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) \end{aligned}$$

中的**各项均必须保留**



# 其它情况

如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

比如**环域**  $a < \rho < b$  上的定解问题，则**一般解**

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) = & A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) \end{aligned}$$

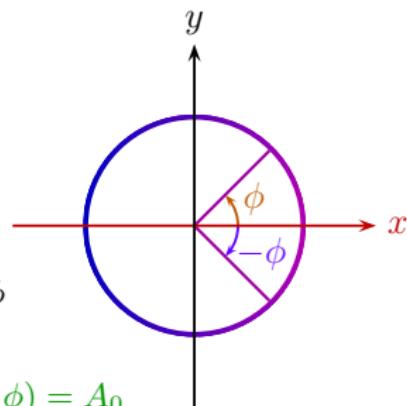
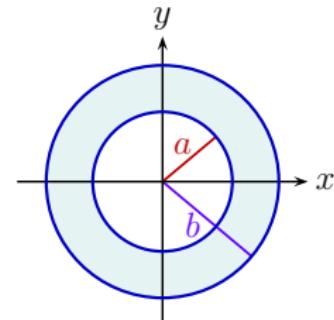
中的**各项均必须保留**

不过，如果问题的**边界条件对  $x$  轴具有反射对称性**

则可以推知  $u(\rho, -\phi) = u(\rho, \phi)$ ，一般解**简化为**

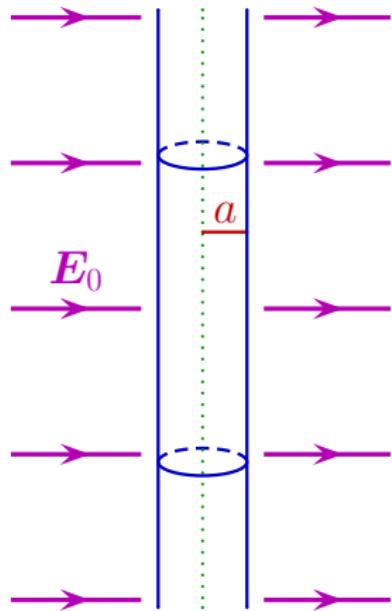
$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

在全平面上满足 **Laplace 方程** 的解则只能是**常数**， $u(\rho, \phi) = A_0$



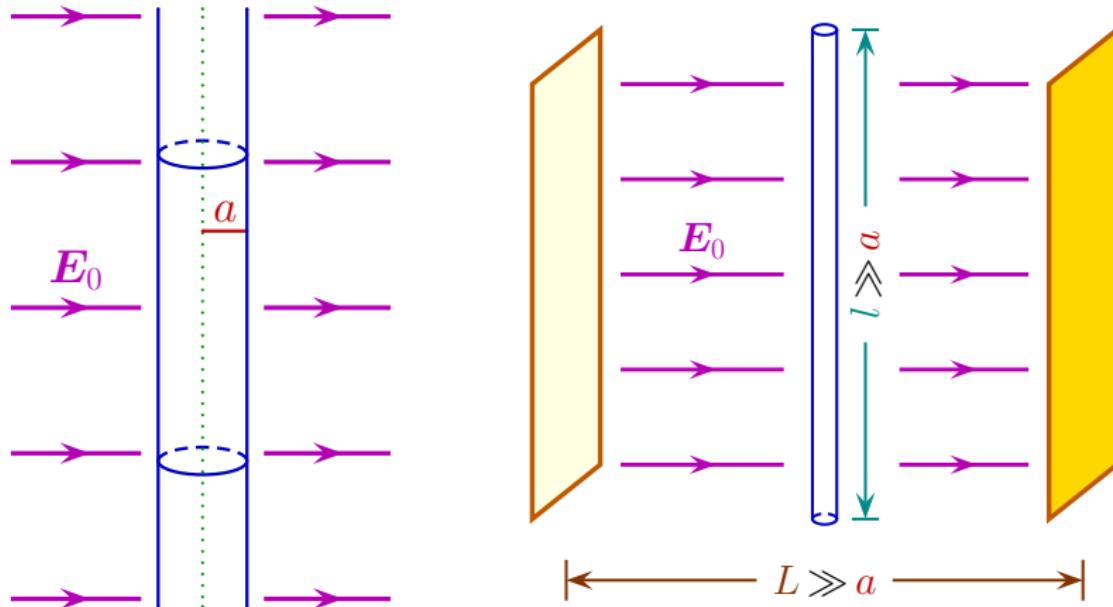
## §5.3 均匀电场中的导体圆柱

考慮一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$



## §5.3 均匀电场中的导体圆柱

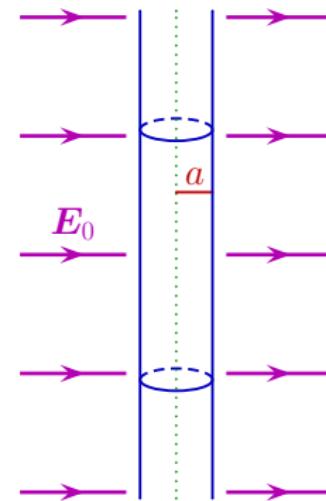
考虑一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$



# 分析

考慮一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$

这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力



# 分析

考慮一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$

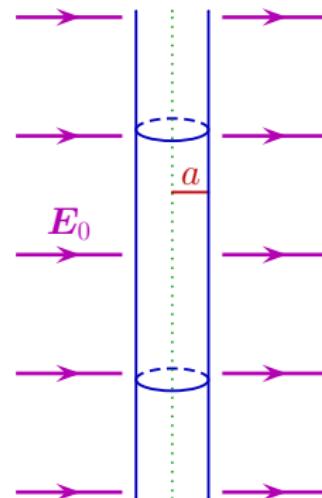
这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

## 1 第一步 物理分析

当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即  $u = 0$  ( $\rho \leq a$ )

注 由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是不合适的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势



# 分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为  $a$ ，不带电，置于均匀外电场  $E_0$  中， $E_0$  的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布  $u$

这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

## 1 第一步 物理分析

当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即  $u = 0$  ( $\rho \leq a$ )

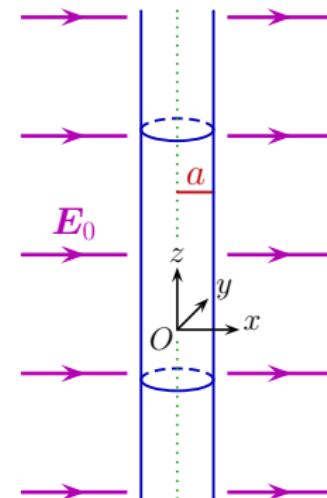
注 由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是不合适的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

## 2 第二步 建立坐标系

取柱轴为  $z$  轴，任取柱轴上一点为原点  $O$ ，又取电场  $E_0$  的方向为  $x$  轴方向

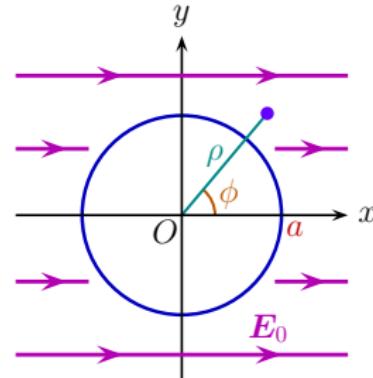
由于所有条件不随  $z$  变化，任何垂直于  $z$  轴的平面上的电势分布都是相同的

不妨选  $Oxy$  平面为代表来研究，故本题是二维稳定场问题



# 定解问题

 鉴于**边界的形状**, 只能采用**极坐标系**  $(\rho, \phi)$



# 定解问题

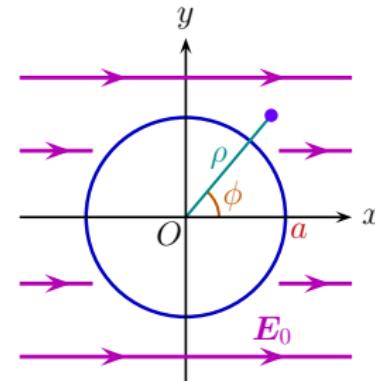
鉴于**边界的形状**, 只能采用**极坐标系** ( $\rho, \phi$ )

## 3 第三步 建立定解问题

柱外没有电荷, 电势  $u(\rho, \phi)$  满足 **Laplace 方程**

本题有两个边界, 即**柱面(圆周)**和**无穷远处**

柱面的电势已取为零



# 定解问题

鉴于边界的形状，只能采用极坐标系  $(\rho, \phi)$

## 3 第三步 建立定解问题

柱外没有电荷，电势  $u(\rho, \phi)$  满足 Laplace 方程

本题有两个边界，即柱面（圆周）和无穷远处

柱面的电势已取为零

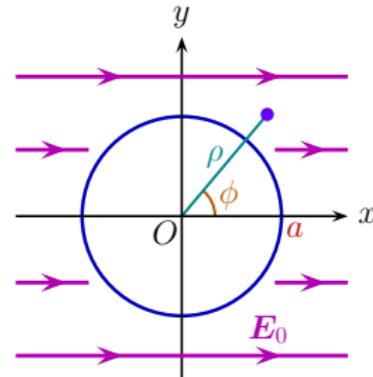
至于无穷远处， $\rho \gg a$ ， $a \rightarrow 0$ ，而原均匀电场应

基本不受影响，有  $E_0 e_x = E_0 = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial x} e_x$ ，故电势为

$$u = - \int E_0 dx = u_0 - E_0 x = u_0 - E_0 \rho \cos \phi$$

因为电势零点已经取在柱面上，所以常数  $u_0$  不能任取，需要通过求解来确定

于是列出定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$


# 求解定解问题

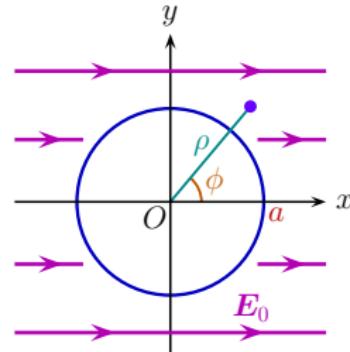
$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$

## 4 第四步 求解定解问题

 Laplace 方程和边界条件都在  $\phi \rightarrow -\phi$  变换下不变

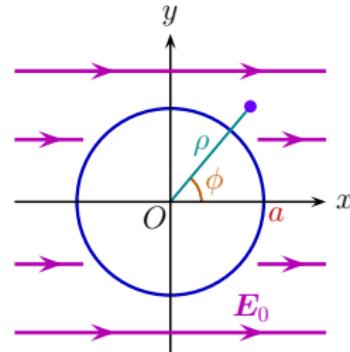
 因此本题具有对  $x$  轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$



# 求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 & (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 \rho \cos \phi \end{cases}$$



## 4 第四步 求解定解问题

Laplace 方程和边界条件都在  $\phi \rightarrow -\phi$  变换下不变

因此本题具有对  $x$  轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

代入无穷远处的边界条件，得

$$u|_{\rho \rightarrow \infty} = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \rho^m \cos m\phi = u_0 - E_0 \rho \cos \phi$$

比较两边，推出  $A_0 = u_0$ ,  $B_0 = 0$ ,  $A_1 = -E_0$ ,  $A_m = 0$  ( $m > 1$ )

# 定解问题的解

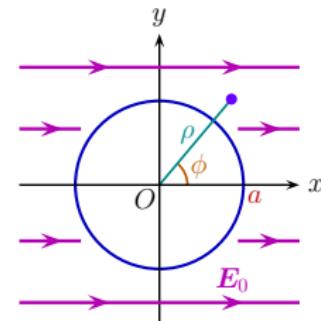
从而得到  $u(\rho, \phi) = u_0 - E_0 \rho \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-m} \cos m\phi$

再代入柱面的边界条件，有

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m} \cos m\phi = 0 \quad \supset \frac{C_1}{a} \cos \phi$$

比较两边，推出  $u_0 = 0, C_1 = E_0 a^2, C_m = 0 (m > 1)$

最终得到定解问题的解为  $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$



# 定解问题的解

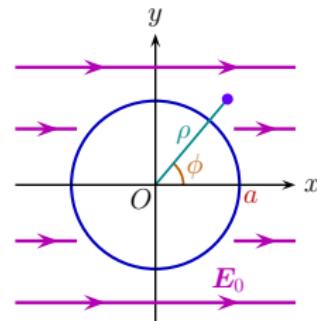
从而得到  $u(\rho, \phi) = u_0 - E_0 \rho \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-m} \cos m\phi$

再代入柱面的边界条件，有

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a \cos \phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m} \cos m\phi = 0 \quad \supset \frac{C_1}{a} \cos \phi$$

比较两边，推出  $u_0 = 0, C_1 = E_0 a^2, C_m = 0 (m > 1)$

最终得到定解问题的解为  $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$



## 5 第五步 结果分析

解式中第一项是原均匀电场的电势，第二项是由柱面上的感应面电荷产生的

本题的求解区域是圆外  $\rho > a$ ，即无穷远点的邻域，但电势的求解结果中第一项在  $\rho \rightarrow \infty$  处有奇性，因为均匀电场是由无穷远处的源产生的

求解区域存在电荷，因而前面得出的圆外的解不包含  $\rho^m$  和  $\ln \rho$  项的结论不成立

不过，无穷远处的源只通过边界条件影响结果，不作为非齐次项出现在方程中

# 感应面电荷

根据解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos \phi + \frac{E_0a^2}{\rho} \cos \phi$ ,  $\rho$  方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0 \cos \phi + \frac{E_0a^2}{\rho^2} \cos \phi$$

它在柱面附近的值为  $E_\rho|_{\rho=a} = 2E_0 \cos \phi$

可见，在  $\phi = 0, \pi$  两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

# 感应面电荷

根据解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos \phi + \frac{E_0a^2}{\rho} \cos \phi$ ,  $\rho$  方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0 \cos \phi + \frac{E_0a^2}{\rho^2} \cos \phi$$

它在柱面附近的值为  $E_\rho|_{\rho=a} = 2E_0 \cos \phi$

可见，在  $\phi = 0, \pi$  两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

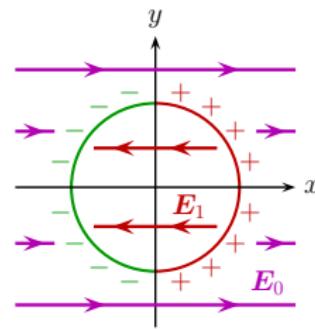
根据电磁学，记  $\epsilon_0$  为真空介电常数，柱面上感应电荷的面密度为

$$\sigma(\phi) = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \epsilon_0 E_\rho \Big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$$

显然，柱面上  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  部分带正电， $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

部分带负电

感应电荷引起的电场  $E_1$  在柱内抵消外电场  $E_0$ ，从而达到静电平衡



# 电偶极矩

正如所期望的，柱面上每单位长度的总带电量为零：

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma(\phi) a d\phi = 2a\epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

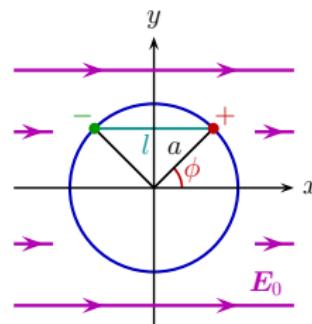
在方位角  $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$  处  $d\phi$  角度内的元电荷  $dq = \sigma(\phi) a d\phi$  与方位角  $\pi - \phi$  处的相应元电荷形成元电偶极子

两个元电荷的距离为  $l = 2a \cos \phi$ ，元电偶极子的偶极矩为

$$dp = l dq = 2a \cos \phi \cdot 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi a d\phi = 4a^2 \epsilon_0 E_0 \cos^2 \phi d\phi$$

从而，感应面电荷引起的沿  $x$  轴正向的总电偶极矩为

$$\begin{aligned} p &= \int dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a^2 \epsilon_0 E_0 \cos^2 \phi d\phi = 2a^2 \epsilon_0 E_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2\phi + 1) d\phi \\ &= 2a^2 \epsilon_0 E_0 \left( \frac{1}{2} \sin 2\phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = 2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \end{aligned}$$



# 理想电偶极子

若  $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$  时  $ql$  保持固定，则称电偶极子  $p = ql$  是**理想电偶极子**

根据电磁学，一个**二维理想电偶极子**  $\textcolor{teal}{p}$  产生的

$$\text{电势为 } u_{\text{dipole}} = \frac{\textcolor{teal}{p} \cdot \rho}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$$

将以上沿  $x$  轴正向的**总电偶极矩**代入，得

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\textcolor{teal}{p} \cdot \rho}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{\textcolor{teal}{p} \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ &= \frac{2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi \end{aligned}$$

这与解式  $u(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi$

中的**第二项**相同

因此，**感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子**

# 理想电偶极子

若  $l \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow \infty$  时  $ql$  保持固定，则称电偶极子  $p = ql$  是**理想电偶极子**

根据电磁学，一个**二维理想电偶极子  $p$**  产生的电势为  $u_{\text{dipole}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$

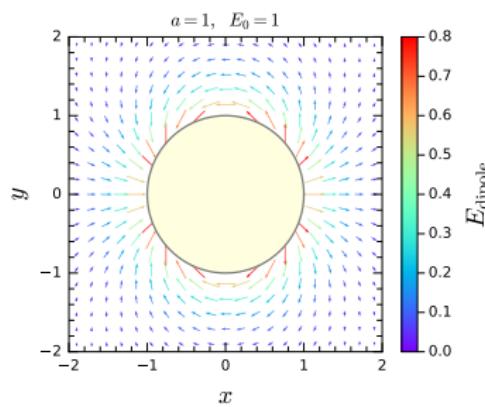
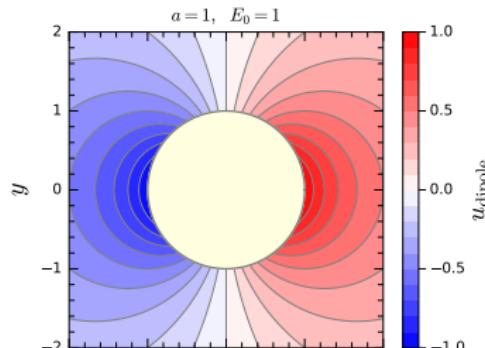
将以上沿  $x$  轴正向的**总电偶极矩**代入，得

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ &= \frac{2\pi a^2 \epsilon_0 E_0 \cos \phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi \end{aligned}$$

这与解式  $u(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi$

中的**第二项**相同

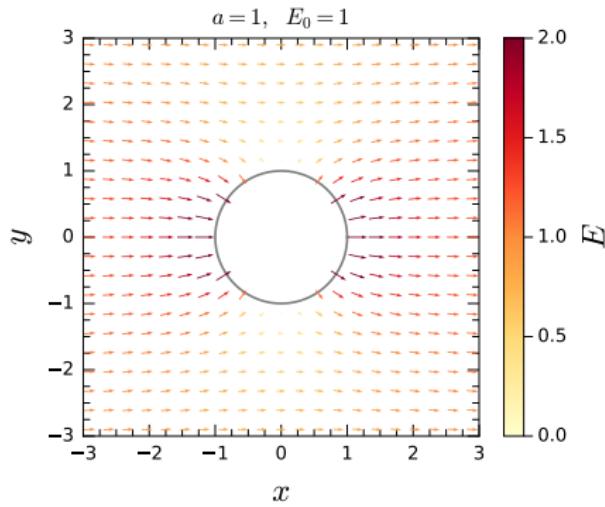
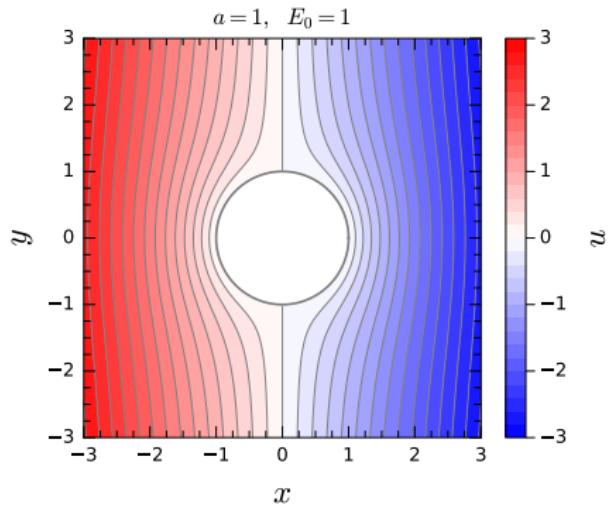
因此，**感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子**



# 电势分布和电场分布的图像

$$u = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \phi = -E_0 x + \frac{E_0 a^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = E_0 - \frac{E_0 a^2}{x^2 + y^2} + \frac{2E_0 a^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2E_0 a^2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

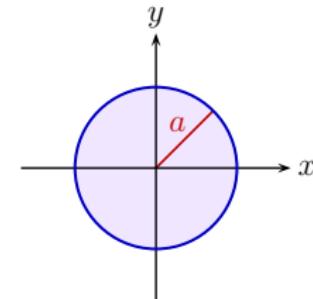


## §5.4 Poisson 方程的处理

 本小节介绍 Poisson 方程 (非齐次稳定场方程) 的处理方法

 考虑圆内的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = f(\rho, \phi) & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$

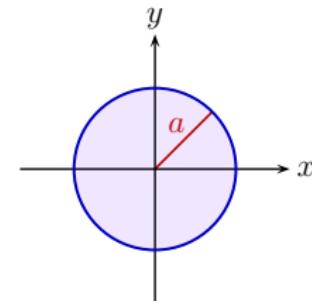


## §5.4 Poisson 方程的处理

 本小节介绍 Poisson 方程 (非齐次稳定场方程) 的处理方法

 考虑圆内的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = f(\rho, \phi) & (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



 方法一 如果  $f(\rho, \phi)$  的形式比较简单，则可以通过观察和试探寻找一个简单函数  $u_0(\rho, \phi)$ ，使得  $\nabla^2 u_0 = f(\rho, \phi)$ ，然后令  $u(\rho, \phi) = v(\rho, \phi) + u_0(\rho, \phi)$

 从而  $v(\rho, \phi)$  满足定解问题  $\begin{cases} \nabla^2 v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0 & (\rho < a) \\ v|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$

 其中  $G(\phi) = u|_{\rho=a} - u_0|_{\rho=a} = F(\phi) - u_0(a, \phi)$

  $u_0(\rho, \phi)$  不是唯一的，因为  $u_0(\rho, \phi)$  加上任一调和函数 (即 Laplace 方程的解，如  $\rho^m \cos m\phi$  或  $\rho^m \sin m\phi$ ) 之后仍然满足要求，应该通过选择使  $G(\phi)$  尽可能简单

## 方法二

 方法二 如果  $f(\rho, \phi)$  的形式比较复杂，则难以找到  $u_0(\rho, \phi)$

 这时应该使用**本征函数展开法**，将**未知函数**  $u(\rho, \phi)$  展开为

$$u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$$

 其中  $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 、 $B_m(\rho)$  是**未知函数**

 这个展开式满足**周期性边界条件**  $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$

## 方法二

♥ 方法二 如果  $f(\rho, \phi)$  的形式比较复杂, 则难以找到  $u_0(\rho, \phi)$

工厂 这时应该使用**本征函数展开法**, 将**未知函数**  $u(\rho, \phi)$  展开为

$$u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$$

其中  $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$ 、 $B_m(\rho)$  是**未知函数**

学校 这个展开式满足**周期性边界条件**  $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$

医院 将**非齐次项**和**边界条件**也作类似展开:

$$f(\rho, \phi) = a_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(\rho) \cos m\phi + b_m(\rho) \sin m\phi]$$

$$F(\phi) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\phi + \beta_m \sin m\phi)$$

**已知函数:**

$$a_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) d\phi, \quad a_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \cos m\phi d\phi, \quad b_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \sin m\phi d\phi$$

$$\text{已知常数: } \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi d\phi, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi d\phi$$

# 常微分方程



将这些展开式代入定解问题，用撇号代表对  $\rho$  求导，利用

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{1}{\rho} (\rho A'_0)' + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( A''_m + \frac{1}{\rho} A'_m - \frac{m^2}{\rho^2} A_m \right) \cos m\phi + \left( B''_m + \frac{1}{\rho} B'_m - \frac{m^2}{\rho^2} B_m \right) \sin m\phi \right] \end{aligned}$$



推出未知函数  $A_0(\rho)$ 、 $A_m(\rho)$  和  $B_m(\rho)$  满足的常微分方程和边界条件：

$$(\rho A'_0)' = \rho a_0, \quad \rho^2 A''_m + \rho A'_m - m^2 A_m = \rho^2 a_m, \quad \rho^2 B''_m + \rho B'_m - m^2 B_m = \rho^2 b_m$$

$$A_0(a) = \alpha_0,$$

$$A_m(a) = \alpha_m,$$

$$B_m(a) = \beta_m$$



这些常微分方程不难求解， $A_0(\rho)$  的方程可以直接积分



$A_m(\rho)$  和  $B_m(\rho)$  的方程相应的齐次方程为 Euler 方程，容易求出通解，对于非齐次项的特解可以用常数变易法求出



但是，对于每个未知函数，边界条件只有一个，不足以确定通解中的两个任意常数

# 自然边界条件

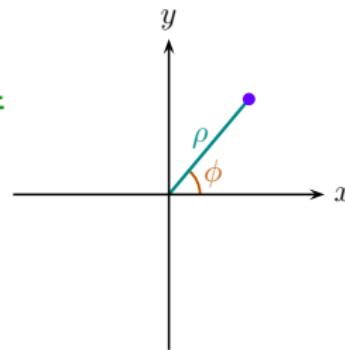
 实际上，还存在另一组边界条件

 在平面极坐标系中， $\rho = 0$  处  $\phi$  没有定义，故  $\rho = 0$  是坐标系的奇点

 展开式  $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$  本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

 否则  $u(\rho, \phi)$  在  $\rho = 0$  处没有定义，这是一组自然边界条件



# 自然边界条件

实际上，还存在另一组边界条件

在平面极坐标系中， $\rho = 0$  处  $\phi$  没有定义，故  $\rho = 0$  是坐标系的奇点

展开式  $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$  本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

否则  $u(\rho, \phi)$  在  $\rho = 0$  处没有定义，这是一组自然边界条件

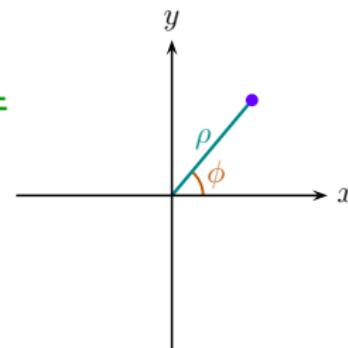
对展开式第一项  $A_0(\rho)$  没有类似要求，但它必须有限

即满足自然边界条件

$$|A_0(0)| < \infty$$

注意，上式并不意味着  $A_0(\rho)$  在  $\rho \neq 0$  处可以不必有限

只不过偏微分方程的解在坐标系奇点  $\rho = 0$  处很容易出现奇性，需要对其有限性特别加以强调



# 求解 $A_0(\rho)$

 下面求解  $A_0(\rho)$  的常微分方程边值问题  $\begin{cases} (\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

 方程  $(\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho)$  对  $\rho$  积分, 得  $\rho A'_0 = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + C$

 其中  $C$  为常数, 从而  $A'_0 = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + \frac{C}{\rho}$ , 再次对  $\rho$  积分, 得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + C \ln \rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

# 求解 $A_0(\rho)$

 下面求解  $A_0(\rho)$  的常微分方程边值问题  $\begin{cases} (\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

 方程  $(\rho A'_0)' = \rho a_0(\rho)$  对  $\rho$  积分, 得  $\rho A'_0 = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + C$

 其中  $C$  为常数, 从而  $A'_0 = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 + \frac{C}{\rho}$ , 再次对  $\rho$  积分, 得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + C \ln \rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

 由于  $\ln \rho$  在  $\rho = 0$  处发散, 自然边界条件  $|A_0(0)| < \infty$  意味着  $C = 0$

 代入  $\rho = a$  处的边界条件, 得  $\alpha_0 = A_0(a) = \int_0^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 + D$

 故  $D = \alpha_0 - \int_0^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2$ , 代回去, 得到问题的解为

$$A_0(\rho) = \alpha_0 - \int_\rho^a \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2$$