

# 量子场论

第 2 章 量子标量场

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2024 年 1 月 22 日



第2章 量子标量场

## 2.1 节 简谐振子的正则量子化

本章讲述标量场 (scalar field) 的正则量子化 (canonical quantization) 方法

标量场的量子化可以看作简谐振子量子化的推广

 一维简谐振子 (simple harmonic oscillator) 的哈密顿量表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

其中  $m$  是质量,  $\omega$  是角频率, 第一项是动能, 第二项是势能

## 第 2 章 量子标量场

### 2.1 节 简谐振子的正则量子化

 本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法

 标量场的量子化可以看作**简谐振子量子化**的推广

 **一维简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的**哈密顿量**表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

 其中  $m$  是质量,  $\omega$  是角频率, 第一项是动能, 第二项是势能

 在**量子力学**中, 把**坐标  $x$**  和**动量  $p$**  两个**正则变量**看作**厄米算符**, 要求它们满足**正则对易关系**

$$[x, p] \equiv xp - px = i$$

 构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - ip)$$

  $a$  称为**湮灭算符** (annihilation operator),  $a^\dagger$  称为**产生算符** (creation operator)

 两者互为**厄米共轭** (Hermitian conjugate)



Charles Hermite  
(1822–1901)

## 产生湮灭算符的对易关系

 涅灭算符和产生算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega} [m\omega x + ip, m\omega x - ip] = \frac{1}{2m\omega} ([m\omega x, -ip] + [ip, m\omega x]) \\ &= \frac{1}{2} (-i[x, p] + i[p, x]) = -i[x, p] = -i \cdot i \end{aligned}$$

即

$[a, a^\dagger] = 1$  } , 同理推出  $[a, a] = 0$  和  $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$

## 产生湮灭算符的对易关系

 湮灭算符和产生算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega} [m\omega x + ip, m\omega x - ip] = \frac{1}{2m\omega} ([m\omega x, -ip] + [ip, m\omega x]) \\ &= \frac{1}{2} (-i[x, p] + i[p, x]) = -i[x, p] = -i \cdot i \end{aligned}$$

即  $[a, a^\dagger] = 1$ ，同理推出  $[a, a] = 0$  和  $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$

反过来用  $a$  和  $a^\dagger$  表示  $x$  和  $p$ ，有  $x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger)$ ,  $p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a - a^\dagger)$

对易关系  $[a, a^\dagger] = 1$  意味着  $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ ，于是将哈密顿量表达成

$$\begin{aligned}
 \textcolor{blue}{H} &= -\frac{1}{2m} \frac{m\omega^2}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{m\omega^2}{2} \frac{1}{2m\omega} (a + a^\dagger)^2 \\
 &= -\frac{\omega}{4} (aa - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) + \frac{\omega}{4} (aa + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) = \frac{\omega}{2} (\textcolor{brown}{aa^\dagger} + \textcolor{brown}{a^\dagger a}) \\
 &= \frac{\omega}{2} (2a^\dagger a + 1) = \omega \left( \textcolor{red}{a^\dagger a} + \frac{1}{2} \right) = \omega \left( \textcolor{red}{N} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

其中  $N \equiv a^\dagger a$  是个厄米算符，称为粒子数算符

## 粒子数算符的本征态

  $N$  是个半正定算符，对于任意态矢  $|\Psi\rangle$ ， $N$  的期待值 (expectation value) 非负：

$$\langle \Psi | N | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \langle a\Psi | a\Psi \rangle \geq 0, \quad \text{其中 } |a\Psi\rangle \equiv a|\Psi\rangle$$

因此，哈密顿量  $H = \omega(N + 1/2)$  是正定算符， $\langle \Psi | H | \Psi \rangle > 0$

 设  $|n\rangle$  是  $N$  的本征态，满足本征方程  $N|n\rangle = n|n\rangle$  和归一化条件  $\langle n|n\rangle = 1$

由  $n = \langle n | n | n \rangle = \langle n | N | n \rangle > 0$  可知，本征值  $n$  是一个非负实数。

粒子数算符的本征态

  $N$  是个半正定算符，对于任意态矢  $|\Psi\rangle$ ， $N$  的期待值 (expectation value) 非负：

$$\langle \Psi | N | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \langle a\Psi | a\Psi \rangle \geq 0, \quad \text{其中 } |a\Psi\rangle \equiv a|\Psi\rangle$$

因此，哈密顿量  $H = \omega(N + 1/2)$  是正定算符， $\langle \Psi | H | \Psi \rangle > 0$

 设  $|n\rangle$  是  $N$  的**本征态**, 满足**本征方程**  $N|n\rangle = n|n\rangle$  和**归一化条件**  $\langle n|n\rangle = 1$

 由  $n \equiv \langle n | n | n \rangle \equiv \langle n | N | n \rangle > 0$  可知，本征值  $n$  是一个非负实数

## 利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]$$

推出  $[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] = a^\dagger$  和  $[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a$

故  $Na^\dagger = a^\dagger N + a^\dagger$ ,  $Na = aN - a$ , 从而

$$Na^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle = (n+1)a^\dagger |n\rangle$$

$$Na|n\rangle = (aN - a)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

# 升算符和降算符

 可见,  $a^\dagger |n\rangle$  和  $a |n\rangle$  都是  $N$  的**本征态**, 本征值分别为  $n+1$  和  $n-1$ , 因此

$$a^\dagger |n\rangle = c_1 |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = c_2 |n-1\rangle$$

 其中  $c_1$  和  $c_2$  是两个**归一化常数**

 **产生算符**  $a^\dagger$  将本征值为  $n$  的态变成本征值为  $n+1$  的态, 因而也称为**升算符**

 **湮灭算符**  $a$  将本征值为  $n$  的态变成本征值为  $n-1$  的态, 因而也称为**降算符**

# 升算符和降算符

 可见,  $a^\dagger |n\rangle$  和  $a|n\rangle$  都是  $N$  的**本征态**, 本征值分别为  $n+1$  和  $n-1$ , 因此

$$a^\dagger |n\rangle = c_1 |n+1\rangle, \quad a|n\rangle = c_2 |n-1\rangle$$

 其中  $c_1$  和  $c_2$  是两个**归一化常数**

 **产生算符**  $a^\dagger$  将本征值为  $n$  的态变成本征值为  $n+1$  的态, 因而也称为**升算符**

 **湮灭算符**  $a$  将本征值为  $n$  的态变成本征值为  $n-1$  的态, 因而也称为**降算符**

 为确定归一化常数的值, 进行以下计算,

**对易关系**

$$n+1 = \langle n | (N+1) | n \rangle = \langle n | (a^\dagger a + 1) | n \rangle = \langle n | a a^\dagger | n \rangle = |c_1|^2 \langle n+1 | n+1 \rangle = |c_1|^2$$

$$n = \langle n | N | n \rangle = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = |c_2|^2 \langle n-1 | n-1 \rangle = |c_2|^2$$

 将  $c_1$  和  $c_2$  都取为**正实数**, 得  $c_1 = \sqrt{n+1}$  和  $c_2 = \sqrt{n}$ , 故

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

粒子数算符的本征值

- 从  $N$  的某个本征态  $|n\rangle$  出发, 用降算符  $a$  逐步操作
  - 得到本征值逐次减小的一系列本征态  $a|n\rangle, a^2|n\rangle, a^3|n\rangle, \dots$
  - 对应的本征值分别为  $n - 1, n - 2, n - 3, \dots$
  - 由于  $n \geq 0$ , 必定存在一个**最小本征值**  $n_0$ , 它的本征态  $|n_0\rangle$  满足  $a|n_0\rangle = 0$
  - 注意,  $a|n_0\rangle = 0$  是使**本征值停止减小的条件****
  - 于是  $N|n_0\rangle = a^\dagger a|n_0\rangle = 0 = 0|n_0\rangle$ , 可见  $n_0 = 0$ , 即  $|n_0\rangle = |0\rangle$

# 粒子数算符的本征值

从  $N$  的某个本征态  $|n\rangle$  出发, 用降算符  $a$  逐步操作

得到本征值逐次减小的一系列本征态  $a|n\rangle$ ,  $a^2|n\rangle$ ,  $a^3|n\rangle$ , ...

对应的本征值分别为  $n - 1$ ,  $n - 2$ ,  $n - 3$ , ...

由于  $n \geq 0$ , 必定存在一个最小本征值  $n_0$ , 它的本征态  $|n_0\rangle$  满足  $a|n_0\rangle = 0$

注意,  $a|n_0\rangle = 0$  是使本征值停止减小的条件

于是  $N|n_0\rangle = a^\dagger a|n_0\rangle = 0 = 0|n_0\rangle$ , 可见  $n_0 = 0$ , 即  $|n_0\rangle = |0\rangle$

反过来, 从  $|0\rangle$  出发, 用升算符  $a^\dagger$  逐步操作

得到本征值逐次增加的一系列本征态  $a^\dagger|0\rangle$ ,  $(a^\dagger)^2|0\rangle$ ,  $(a^\dagger)^3|0\rangle$ , ...

对应的本征值分别为 1, 2, 3, ...

综上, 本征值  $n$  的取值是非负整数, 是量子化的

可以用  $a^\dagger$  和  $|0\rangle$  将本征态  $|n\rangle$  表示为  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$

# 能量本征值

显而易见， $|n\rangle$  也是  $H$  的**本征态**，

$$H|n\rangle = \omega \left( N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

 基态  $|0\rangle$  的能量本征值不是零，而是  $E_0 = \omega/2$ ，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**，这是**量子力学的特有结果**

# 能量本征值

显然,  $|n\rangle$  也是  $H$  的**本征态**,

$$H|n\rangle = \omega \left( N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

相应的**能量本征值**为

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

基态  $|0\rangle$  的能量本征值不是零, 而是  $E_0 = \omega/2$ , 称为**零点能** (zero-point energy), 也称为**真空能**, 这是**量子力学的特有结果**

可以将  $|0\rangle$  看作**真空态**, 将  $n > 0$  的  $|n\rangle$  看作包含  $n$  个**声子** (phonon) 的激发态, 每个声子具有一份**能量**  $\omega$

这样一来,  $n$  表示声子的数目, 故**粒子数算符**  $N$  描述**声子数**

$a^\dagger$  的作用是**产生**一个声子, 从而**增加**一份能量

$a$  的作用是**湮灭**一个声子, 从而**减少**一份能量

这是将  $a^\dagger$  和  $a$  称为**产生算符**和**湮灭算符**的原因

## 2.2 节 量子场论中的正则对易关系

对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统中的广义坐标  $x$  和 广义动量  $p$  提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系

接下来将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化

🎭 这需要涉及到绘景变换，在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

## 2.2 节 量子场论中的正则对易关系

对简谐振子进行正则量子化的关键在于将系统中的广义坐标  $x$  和 广义动量  $p$  提升为 Hilbert 空间上的算符，要求它们满足正则对易关系

接下来将这种方法推广到场论里，从而对场进行正则量子化

🎭 这需要涉及到绘景变换，在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系

 在 Schrödinger 绘景中，态矢  $|\Psi(t)\rangle^S$  代表随时间演化的物理态，而 Hilbert 空间中的算符  $O^S$  不依赖于时间

若系统哈密顿量  $H$  不含时间，则  $|\Psi(t)\rangle^S$  与  $|\Psi(0)\rangle^S$  通过幺正变换联系起来： $|\Psi(t)\rangle^S = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle^S$

这里用到的**指数函数**对任意算符  $A$  定义为

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

于是  $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S = i \frac{\partial e^{-iHt}}{\partial t} |\Psi(0)\rangle^S = H e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle^S =$

这就是 Schrödinger 方程，而  $|\Psi(t)\rangle^S = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle^S$  其实是方程的解



# Erwin Schrödinger (1887–1961)

# Heisenberg 绘景

## Heisenberg 绘景的态矢为

$$|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$$

它不随时间演化， $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle^H = 0$

而算符  $O^H(t)$  依赖于时间，通过一个含时的相似变换与  $O^S$

联系起来,

由于  $[H, H] = 0$ ，有  $e^{iHt} H e^{-iHt} = H e^{iHt} e^{-iHt} = H$



# Werner Heisenberg (1901–1976)

# Heisenberg 绘景

## Heisenberg 绘景的态矢为

$$|\Psi\rangle^H = e^{iHt} |\Psi(t)\rangle^S = |\Psi(0)\rangle^S$$



# Werner Heisenberg (1901–1976)

它不随时间演化， $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle^H = 0$

而算符  $O^H(t)$  依赖于时间，通过一个含时的相似变换与  $O^S$

联系起来,

由于  $[H, H] = 0$ ，有  $e^{iHt} H e^{-iHt} = H e^{iHt} e^{-iHt} = H$

 故哈密顿量  $H$  在这两种绘景中是相同的,  $H^H = H^S = H$

$$H^{\mathrm{H}} \equiv H^{\mathrm{S}} \equiv H$$

$${}^H \langle \Psi | O^H(t) | \Psi \rangle^H = {}^H \langle \Psi | e^{iHt} O^S e^{-iHt} | \Psi \rangle^H = {}^S \langle \Psi(t) | O^S | \Psi(t) \rangle^S$$

表明，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理

含时算符  $O^H(t)$  满足 Heisenberg 运动方程

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} O^H(t) &= i \frac{\partial e^{iHt}}{\partial t} O^S e^{-iHt} + e^{iHt} O^S i \frac{\partial e^{-iHt}}{\partial t} = -H e^{iHt} O^S e^{-iHt} + e^{iHt} O^S e^{-iHt} H \\ &= -H O^H(t) + O^H(t) H = [O^H(t), H] \end{aligned}$$

# 等时对易关系

上一节对简谐振子的量子化是在 Schrödinger 绘景中进行的，因为没有考虑坐标算符  $x$  和动量算符  $p$  的时间依赖性

将正则对易关系改记为  $[x^S, p^S] = i$ ，它在 Heisenberg 绘景中的形式是

$$\begin{aligned} [x^H(t), p^H(t)] &= [e^{iHt} x^S e^{-iHt}, e^{iHt} p^S e^{-iHt}] = e^{iHt} x^S p^S e^{-iHt} - e^{iHt} p^S x^S e^{-iHt} \\ &= e^{iHt} [x^S, p^S] e^{-iHt} = e^{iHt} i e^{-iHt} = i \end{aligned}$$

可见，正则对易关系的形式不依赖于绘景

上式是在同一时刻  $t$  成立的，称为等时 (equal time) 对易关系

# 等时对易关系

上一节对简谐振子的量子化是在 Schrödinger 绘景中进行的，因为没有考虑坐标算符  $x$  和动量算符  $p$  的时间依赖性

将正则对易关系改记为  $[x^S, p^S] = i$ ，它在 Heisenberg 绘景中的形式是

$$\begin{aligned} [x^H(t), p^H(t)] &= [e^{iHt} x^S e^{-iHt}, e^{iHt} p^S e^{-iHt}] = e^{iHt} x^S p^S e^{-iHt} - e^{iHt} p^S x^S e^{-iHt} \\ &= e^{iHt} [x^S, p^S] e^{-iHt} = e^{iHt} i e^{-iHt} = i \end{aligned}$$

可见，正则对易关系的形式不依赖于绘景

上式是在同一时刻  $t$  成立的，称为等时 (equal time) 对易关系

接下来的讨论在 Heisenberg 绘景中进行，省略绘景的标志性上标  $H$

将讨论推广到具有  $n$  个自由度的系统，记  $q_i(t)$  为系统在 Heisenberg 绘景中的广义坐标算符， $p_i(t)$  为相应的广义动量算符，它们是系统的正则变量

由于不同自由度不应该相互影响，这些算符需要满足的等时对易关系为

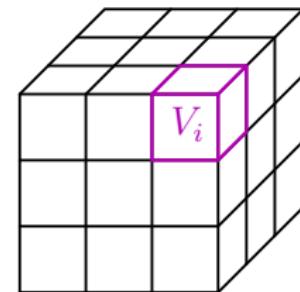
$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

# 空间离散化

$\Omega$  1.1 节提到，在**量子场论**中，为了平等地处理时间和空间，**空间坐标  $x$**  应该与时间坐标  $t$  一样作为量子场算符  $\Phi(x, t)$  的**参数**

$\diamond$  场论讨论的是具有**无穷多个连续自由度**的系统，每一个空间点  $x$  上的  $\Phi(x, t)$  都是一个**广义坐标**

$\diamond$  为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间**离散化**，划分成无穷多个**小体积元  $V_i$** ，再取  $V_i \rightarrow 0$  的**极限**来得到**连续空间**的结果



# 空间离散化

**Ω** 1.1 节提到，在**量子场论**中，为了平等地处理时间和空间，**空间坐标  $x$**  应该与时间坐标  $t$  一样作为量子场算符  $\Phi(x, t)$  的**参数**

**✿** 场论讨论的是具有**无穷多个连续自由度**的系统，每一个空间点  $x$  上的  $\Phi(x, t)$  都是一个**广义坐标**

**◆** 为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间**离散化**，划分成无穷多个**小体积元  $V_i$** ，再取  $V_i \rightarrow 0$  的**极限**来得到**连续空间**的结果

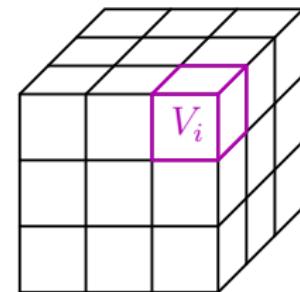
**体温计** 在**体积元  $V_i$**  中，定义相应的**广义坐标**

$$\Phi_i(t) \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \Phi(x, t)$$

**体温计** 这是场  $\Phi(x, t)$  在  $V_i$  中的**平均值**

**体温计** 记  $\partial_\mu \Phi$  和**拉格朗日量密度  $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$**  在  $V_i$  中的**平均值**为

$$\partial_\mu \Phi_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \partial_\mu \Phi, \quad \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$



### 离散化后的等时对易关系

 当  $V_i$  足够小时， $\mathcal{L}_i$  成为  $\Phi_i$  和  $\partial_\mu \Phi_i$  的函数  $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$ ，拉格朗日量表达为

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义，在体积元  $V_i$  中与广义坐标  $\Phi_i(t)$  相对应的广义动量是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}$$

# 离散化的等时对易关系

当  $V_i$  足够小时,  $\mathcal{L}_i$  成为  $\Phi_i$  和  $\partial_\mu \Phi_i$  的函数  $\mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$ , 拉格朗日量表达为

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L} = \sum_i \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{V_i} d^3x \mathcal{L} = \sum_i V_i \mathcal{L}_i(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$$

依照定义, 在体积元  $V_i$  中与广义坐标  $\Phi_i(t)$  相对应的广义动量是

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \sum_j V_j \delta_{ji} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)}$$

相应的等时对易关系为

$$[\Phi_i(t), \Pi_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [\Phi_i(t), \Phi_j(t)] = 0, \quad [\Pi_i(t), \Pi_j(t)] = 0$$

引入  $\pi_i(t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \frac{\Pi_i(t)}{V_i}$ , 则第一、三条等时对易关系可用  $\pi_i(t)$  表达为

$$[\Phi_i(t), \pi_j(t)] = i \frac{\delta_{ij}}{V_j}, \quad [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0$$

# δ 函数

从离散到连续，Kronecker 符号  $\delta_{ij}$  将变成  $\delta$  函数

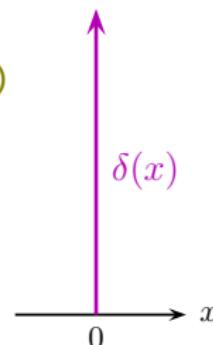
Dirac  $\delta$  函数定义为  $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$  而且满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1$

对任意连续函数  $f(x)$  有

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - y)$$

$\delta(x)$  是偶函数， $\delta(x) = \delta(-x)$ ，满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ipx} = 2\pi \delta(p)$  和

$$f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y), \quad \text{x } \delta(x) = 0$$



# δ 函数

从离散到连续，Kronecker 符号  $\delta_{ij}$  将变成  $\delta$  函数

Dirac  $\delta$  函数定义为  $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$  而且满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1$

对任意连续函数  $f(x)$  有 
$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - y) \quad (\text{挑选性})$$

  $\delta(x)$  是偶函数， $\delta(x) = \delta(-x)$ ，满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ipx} = 2\pi \delta(p)$  和

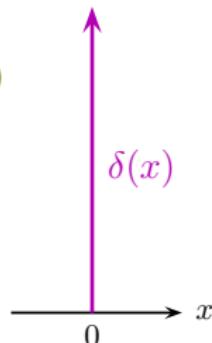
$$f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y), \quad \text{x } \delta(x) = 0$$

 这里约定，函数  $f(x)$  的 Fourier 变换为  $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} f(x)$

 Fourier 逆变换  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \tilde{f}(p)$ ， $2\pi \delta(p)$  是  $f(x) = 1$  的 Fourier 变换

 若方程  $f(x) = 0$  具有若干个分立的单根  $x_i$ ，则

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$



# 三维 $\delta$ 函数

用 3 个一维  $\delta$  函数之积定义**三维  $\delta$  函数**  $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$

那么函数  $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$  只在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  处非零, 且  $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$ ,  $\int d^3x \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数**  $f(\mathbf{x})$ , 有  $f(\mathbf{y}) = \int d^3x f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , 以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

  $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$  是  $\mathbf{x}$  的偶函数,  $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$ , 满足

$$\int d^3x e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$$



Joseph Fourier  
(1768–1830)



Paul Dirac  
(1902–1984)

# 三维 $\delta$ 函数

用 3 个一维  $\delta$  函数之积定义**三维  $\delta$  函数**  $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$

那么函数  $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$  只在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  处非零，且  $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = +\infty$ ， $\int d^3x \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = 1$

对于**任意连续函数**  $f(\mathbf{x})$ ，有  $f(\mathbf{y}) = \int d^3x f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ，以及

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

  $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$  是  $\mathbf{x}$  的偶函数， $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(-\mathbf{x})$ ，满足

$$\int d^3x e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$$

 在三维空间中，函数  $f(\mathbf{x})$  的 **Fourier 变换**是

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

 Fourier 逆变换是

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{p})$$

  $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$  是  $f(\mathbf{x}) = 1$  的 Fourier 变换



Joseph Fourier  
(1768–1830)



Paul Dirac  
(1902–1984)

# 量子场论中的正则对易关系

$f(\mathbf{x})$  在  $V_i$  上的平均值  $f_i = \sum_j f_j \delta_{ij} = \sum_j V_j f_j \frac{\delta_{ij}}{V_j}$

$f(\mathbf{x}) = \int d^3y f(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  是上式的  $V_i \rightarrow 0$  极限形式

也就是说，在连续极限下， $\frac{\delta_{ij}}{V_j} \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$\Phi_i(t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\partial_\mu \Phi_i \rightarrow \partial_\mu \Phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$

$\pi_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial (\partial_0 \Phi_i)} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} = \pi(\mathbf{x}, t)$  (共轭动量密度)

因此，等时对易关系化为

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

# 量子场论中的正则对易关系

$f(\mathbf{x})$  在  $V_i$  上的平均值  $f_i = \sum_j f_j \delta_{ij} = \sum_j V_j f_j \frac{\delta_{ij}}{V_j}$

$f(\mathbf{x}) = \int d^3y f(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  是上式的  $V_i \rightarrow 0$  极限形式

也就是说，在连续极限下， $\frac{\delta_{ij}}{V_j} \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$\Phi_i(t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\partial_\mu \Phi_i \rightarrow \partial_\mu \Phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$

$\pi_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial (\partial_0 \Phi_i)} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} = \pi(\mathbf{x}, t)$  (共轭动量密度)

因此，等时对易关系化为

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

推广到包含若干个场  $\Phi_a$  的系统，假设不同的场相互独立，则

$$[\Phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi_a(\mathbf{x}, t), \Phi_b(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = 0$$

这就是量子场论中的正则对易关系，它是场的正则量子化的出发点

此时，系统的正则变量  $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$  和  $\pi_a(\mathbf{x}, t)$  都是 Hilbert 空间中的算符



David Hilbert  
(1862–1943)

### 2.3 节 实标量场的正则量子化

 如果场  $\phi(x)$  是 Lorentz 标量，就称它为标量场

在固有保时向 Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为  $x' = \Lambda x$

 则标量场  $\phi(x)$  的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

本节讨论实标量场  $\phi(x)$ ，它满足自共轭 (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x)$$

量子化之后， $\phi(x)$  是一个厄米算符

## 2.3 节 实标量场的正则量子化

 如果场  $\phi(x)$  是 Lorentz 标量，就称它为**标量场**

 在**固有保时向** Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为  $x' = \Lambda x$

 则标量场  $\phi(x)$  的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

 本节讨论**实**标量场  $\phi(x)$ ，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x)$$

 量子化之后， $\phi(x)$  是一个**厄米算符**

 假设  $\phi(x)$  是**不参与相互作用的自由**实标量场，相应的 **Lorentz 不变拉氏量**是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)\partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

 其中  $m > 0$  是实标量场的**质量**，第一项是动能项，第二项是质量项

## Klein-Gordon 方程

注意到  $\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2]$

有  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi$

 归纳起来得  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$

因此，Euler-Lagrange 方程  $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$  给出

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi$$

也就是说， $\phi(x)$  满足 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$$



Oskar Benjamin Klein  
(1894–1977)

 这是实标量场的经典运动方程

Walter Gordon  
(1893–1939)

## 等时对易关系

实标量场  $\phi(x)$  对应的共轭动量密度是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi(x)$$

 即  $\pi(x)$  是  $\phi(x)$  的时间导数，由自共轭条件  $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$  得  $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

如果在拉氏量  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$  的动能项中不引入  $1/2$  因子，就会得到

$\pi(x) = 2\partial_0\phi(x)$ , 则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

质量项也要引入  $1/2$  因子，否则 Klein-Gordon 方程中质量不是  $m$ ，而是  $\sqrt{2}m$

# 等时对易关系

 实标量场  $\phi(x)$  对应的**共轭动量密度**是

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi(x)$$

 即  $\pi(x)$  是  $\phi(x)$  的时间导数，由自共轭条件  $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$  得  $\pi^\dagger(x) = \pi(x)$

 如果在拉氏量  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$  的**动能项**中不引入  $1/2$  因子，就会得到

$\pi(x) = 2\partial_0\phi(x)$ ，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)

 质量项也要引入  $1/2$  因子，否则 **Klein-Gordon** 方程中质量不是  $m$ ，而是  $\sqrt{2}m$

 现在，把**正则变量**  $\phi(x)$  和  $\pi(x)$  看作 **Hilbert 空间**中的**算符**

 要求它们满足**等时对易关系**

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

 这种做法称为**正则量子化**

### 2.3.1 小节 平面波展开

🌴 在量子力学中，无界空间里单粒子波函数  $\Psi$  的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$$

有  $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \exp(-iEt + i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = E\Psi$ ,  $-i\nabla\Psi = \mathbf{p} \exp(-iEt + i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{p}\Psi$

 可见,  $\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}$  是能量微分算符,  $\hat{p} = -i\nabla$  是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是

$$\hat{p}^\mu = i \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = i \partial^\mu$$

### 2.3.1 小节 平面波展开

🌴 在量子力学中，无界空间里单粒子波函数  $\Psi$  的平面波解 (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$$

有  $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \exp(-iEt + i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = E\Psi$ ,  $-i\nabla\Psi = \mathbf{p} \exp(-iEt + i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{p}\Psi$

 可见,  $\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}$  是能量微分算符,  $\hat{p} = -i\nabla$  是动量微分算符

组合起来，四维动量微分算符是  $\hat{p}^\mu = i \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = i \partial^\mu$

将平面波改写成  $\Psi(x) = \exp(-ip \cdot x)$ , 其中  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ,  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ , 则

$$i\partial^\mu \Psi = i\partial^\mu e^{-ip \cdot x} = p^\mu e^{-ip \cdot x} = p^\mu \Psi$$

因此,  $p^\mu$  是四维动量微分算符  $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu$  的**本征值**

 平面波解  $\Psi(x) = \exp(-ip \cdot x)$  描述**四维动量为  $p^\mu$**  的粒子

正能角和负能解

现在讨论量子场论的情况，在无界空间中，设实标量场  $\phi(x)$  满足的 Klein-Gordon 方程具有平面波解  $\varphi(x) = \exp(-ik \cdot x)$

 那么,  $\partial^2 \varphi = \partial^\mu \partial_\mu \varphi = \partial^\mu (-ik_\mu \varphi) = (-i)^2 k_\mu k^\mu \varphi = -k^2 \varphi$

 从而, Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(\textcolor{blue}{k}^2 - m^2)\varphi = -[(\textcolor{blue}{k}^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

这就要求  $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$ , 即  $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$ , 其中  $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

# 正能角和负能解

现在讨论**量子场论**的情况，在**无界空间**中，设实标量场  $\phi(x)$  满足的 **Klein-Gordon 方程**具有**平面波解**  $\varphi(x) = \exp(-ik \cdot x)$

那么， $\partial^2 \varphi = \partial^\mu \partial_\mu \varphi = \partial^\mu (-ik_\mu \varphi) = (-i)^2 k_\mu k^\mu \varphi = -k^2 \varphi$

从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0 = (\partial^2 + m^2)\varphi = -(k^2 - m^2)\varphi = -[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2]\varphi$$

这就要求  $(k^0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$ ，即  $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$ ，其中  $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} > 0$

因此，对于**固定的  $\mathbf{k}$** ，有两个线性独立的平面波解

$k^0 = E_{\mathbf{k}}$  对应于**正能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = \exp[-i(k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = \exp[-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$$

$k^0 = -E_{\mathbf{k}}$  对应于**负能解**

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) = \exp[-i(k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = \exp[i(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$$

## 一般解

从而，满足 Klein-Gordon 方程的场算符  $\phi(x, t)$  的一般解可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) + \tilde{a}_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

其中  $a_k$  和  $\tilde{a}_k$  是两个只依赖于  $k$  的算符， $1/\sqrt{2E_k}$  是归一化因子

牛 这是一个形式为 Fourier 积分的平面波展开式，把  $\phi(x, t)$  展开成三维空间中无穷多个动量模式的叠加

## 一般解

从而，满足 Klein-Gordon 方程的场算符  $\phi(x, t)$  的一般解可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) + \tilde{a}_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

其中  $a_k$  和  $\tilde{a}_k$  是两个只依赖于  $k$  的算符， $1/\sqrt{2E_k}$  是归一化因子

这是一个形式为 Fourier 积分的平面波展开式，把  $\phi(x, t)$  展开成三维空间中无穷多个动量模式的叠加

 取上式的厄米共轭，得

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]\end{aligned}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的  $\mathbf{k}$  替换成  $-\mathbf{k}$  不会改变积分的结果，而  $E_{-\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}$

# 自共轭条件



观察

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$$

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$$

可知，**自共轭条件**  $\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t)$  意味着  $\tilde{a}_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}^\dagger$

注意，由  $\tilde{a}_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}^\dagger$  可以推出  $\tilde{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = a_{-\mathbf{k}}$  和  $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger = a_{\mathbf{k}}$ 。因而

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]. \end{aligned}$$

第二步对方括号中第二项作**变量替换**  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$

## 平面波展开式

 对于

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]$$

 把动量记号  $k$  替换成  $p$ , 将  $\phi(x, t)$  的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

其中  $p \cdot x = p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ , 且  $p^0 > 0$ , 满足质壳条件  $p^0 = E_p \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$

$a_p$  是湮灭算符，对应于正能解  $e^{-ip \cdot x}$

  $a_p^\dagger$  是产生算符，对应于负能解  $e^{ip \cdot x}$

## 共轭动量密度算符的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \partial_0 \phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

### 2.3.2 小节 产生湮灭算符的对易关系

 在三维空间中对  $\phi(x, t)$  作 Fourier 变换，有

$$\int d^3x e^{iq \cdot x} \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x \left[ a_p e^{-i(p-q) \cdot x} + a_p^\dagger e^{i(p+q) \cdot x} \right]$$

这里比 Fourier 变换公式  $\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$  多乘了一个  $e^{iq^0 t}$  因子，其中  $q^0 = E_{\mathbf{q}}$ ，使指数因子变成  $e^{iq^0 t} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ 。利用

$$\int d^3x e^{\pm i(p-q)\cdot x} = \int d^3x e^{\pm i(p^0 - q^0)t} e^{\mp i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0 - q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

$$\int d^3x e^{\pm i(p+q)\cdot x} = (2\pi)^3 e^{\pm i(p^0+q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$$

$$\begin{aligned} \text{得 } \int d^3x e^{iq \cdot x} \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left[ a_p e^{-i(p^0 - q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + a_p^\dagger e^{i(p^0 + q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left( \textcolor{red}{a_q} + a_{-q}^\dagger e^{2iq^0 t} \right) \end{aligned}$$

在第一步中,  $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ ,  $q^0 = \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + m^2}$ , 两个三维  $\delta$  函数分别要求  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  和  $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ , 都导致  $p^0 = q^0$ , 对  $d^3 p$  积分即得第二步结果

### 产生湮灭算符的表达式

类似地， $\pi(x, t)$  的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{iq \cdot x} \pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x \left[ a_p e^{-i(p-q) \cdot x} - a_p^\dagger e^{i(p+q) \cdot x} \right] \\ &= \int d^3p \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left[ a_p e^{-i(p^0 - q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - a_p^\dagger e^{i(p^0 + q^0)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \right] \\ &= \frac{-iq_0}{\sqrt{2E_q}} \left( a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger e^{2iq^0 t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \int d^3x e^{iq \cdot x} [\pi(x) - iq_0 \phi(x)] &= \int d^3x e^{iq \cdot x} \pi(x) - iq_0 \int d^3x e^{iq \cdot x} \phi(x) \\ &= \frac{-2iq_0}{\sqrt{2E_q}} a_q = -i\sqrt{2E_q} a_q \end{aligned}$$

即

$$a_p = \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ip \cdot x} [\pi(x) - ip_0 \phi(x)]$$

 取厄米共轭，并使用自共轭条件  $\phi^\dagger = \phi$  和  $\pi^\dagger = \pi$ ，得

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} [\pi(x) + i p_0 \phi(x)]$$

### 产生算符与湮灭算符的对易关系

令  $x^0 = y^0 = t$ ，利用等时对易关系推出

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y [e^{ip \cdot x} \{\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0 \phi(\mathbf{x}, t)\}, e^{-iq \cdot y} \{\pi(\mathbf{y}, t) + iq_0 \phi(\mathbf{y}, t)\}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0 \phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) + iq_0 \phi(\mathbf{y}, t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 - q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 - q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} [-i(p_0 + q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
\end{aligned}$$

# 产生算符与湮灭算符的对易关系

令  $x^0 = y^0 = t$ , 利用等时对易关系推出

$$\begin{aligned}
 [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \{\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t)\}, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \{\pi(\mathbf{y}, t) + iq_0\phi(\mathbf{y}, t)\}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) + iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \{iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0-q^0)t} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} [-i(p_0 + q_0)i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \\
 &= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

根据  $\delta$  函数的性质  $f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , 有

$$\frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

故

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

# 两个产生算符的对易关系

类似地，

$$\begin{aligned}
 & [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) - iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \{-iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} (p_0 - q_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

### 两个产生算符的对易关系

 类似地，

$$\begin{aligned}
& [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} [\pi(\mathbf{x}, t) - ip_0\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) - iq_0\phi(\mathbf{y}, t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \{ -iq_0[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] - ip_0[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] \} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int d^3x d^3y e^{i(p^0 + q^0)t} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} (p_0 - q_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})
\end{aligned}$$

  $\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$  只在  $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$  处非零，取值  $+\infty$ ，而  $E_q - E_p$  在  $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$  处取值为零

由于  $\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$  在  $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$  处奇性比较弱，有

$$(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 0$$

故

$$[a_p, a_q] = 0$$

# 产生湮灭算符的对易关系

此外，

$$[a_p^\dagger, a_q^\dagger] = a_p^\dagger a_q^\dagger - a_q^\dagger a_p^\dagger = (a_q a_p - a_p a_q)^\dagger = [a_q, a_p]^\dagger = 0$$

因此，可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的乘积次序，即

$$a_p a_q = a_q a_p, \quad a_p^\dagger a_q^\dagger = a_q^\dagger a_p^\dagger$$

综上，产生湮灭算符满足对易关系

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0$$

这是简谐振子对易关系  $[a, a^\dagger] = 1$  和  $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$  在量子场论中的推广

### 2.3.3 小节 哈密顿量和总动量



自由实标量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$



注意到  $\pi \equiv \partial_0 \phi$ , 将哈密顿量算符表达为

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$



根据 Noether 定理，实标量场的总动量算符是  $P^i = \int d^3x \pi \partial^i \phi$

## 2.3.3 小节 哈密顿量和总动量

 自由实标量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

 注意到  $\pi = \partial_0 \phi$ ，将哈密顿量算符表达为

$$\mathbf{H} = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

 根据 Noether 定理，实标量场的总动量算符是  $P^i = \int d^3x \pi \partial^i \phi$

 利用等时对易关系，推出对易关系

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \mathbf{H}] &= \frac{1}{2} \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi^2(\mathbf{y}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y \{\pi(\mathbf{y}, t)[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] + [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]\pi(\mathbf{y}, t)\} \\ &= i \int d^3y \pi(\mathbf{y}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\pi(\mathbf{x}, t) = i\partial^0 \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

# 四维动量算符

 再推出对易关系

$$\begin{aligned}
 [\phi(\mathbf{x}), P^i] &= \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t)] = \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) \\
 &= i \int d^3y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) = i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\mathbf{x}, t) = i \partial^i \phi(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

## 四维动量算符



再推出对易关系

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \mathcal{P}^i] &= \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t)] = \int d^3y [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) \\ &= i \int d^3y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(\mathbf{y}, t) = i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\mathbf{x}, t) = i \partial^i \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$



引入四维动量算符

$$P^\mu = (H, \mathbf{P})$$



将这两个对易关系合起来写成

$$[\phi(x), P^\mu] = i\partial^\mu \phi(x)$$



可见，场算符  $\phi(x)$  与四维动量算符  $P^\mu$  的对易子相当于将四维动量微分算符  $i\partial^\mu$  作用在  $\phi(x)$  上

哈密顿量算符



将  $\phi(x)$  和  $\pi(x)$  的平面波展开式代入，哈密顿量算符化为

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ [(-ip_0)(-iq_0) + (\mathbf{ip}) \cdot (\mathbf{iq})] \right. \\
&\quad \times \left( a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left( a_q e^{-iq \cdot x} - a_q^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \\
&\quad \left. + \textcolor{blue}{m^2} \left( a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left( a_q e^{-iq \cdot x} + a_q^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ (p_0 q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[ a_p a_q^\dagger e^{-i(p-q) \cdot x} + a_p^\dagger a_q e^{i(p-q) \cdot x} \right] \right. \\
&\quad \left. + (-p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[ a_p a_q e^{-i(p+q) \cdot x} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{i(p+q) \cdot x} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_p E_q}} \\
&\quad \times \left\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})(p_0 q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[ a_p a_q^\dagger e^{-i(p_0 - q_0)t} + a_p^\dagger a_q e^{i(p_0 - q_0)t} \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})(-p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) \left[ a_p a_q e^{-i(p_0 + q_0)t} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{i(p_0 + q_0)t} \right] \right\}
\end{aligned}$$

# 哈密顿量算符的表达式

大象 对  $\mathbf{q}$  积分，得

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[ (E_p^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2) (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) \right. \\ & \left. + (-E_p^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2) (a_p a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_p t} + a_p^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_p t}) \right] \end{aligned}$$

犀牛 根据质壳条件  $E_p^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ ，第二步方括号中第二项没有贡献，从而

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p [2a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p})]$$

大象 第二步用到产生湮灭算符的对易关系  $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ ，于是

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$$

# 哈密顿量的正定性

**自由实标量场的哈密顿量**  $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$  可看

作一维简谐振子哈密顿量  $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$  向**无穷多自由度**的推广

**半正定算符**  $N_p \equiv a_p^\dagger a_p$  是三维动量空间中动量为  $p$  处的**粒子数密度算符**

每个粒子的能量是  $E_p$ ,  $H$  的**第一项是所有动量模式所有粒子**贡献的能量之和

# 哈密顿量的正定性

**自由实标量场的哈密顿量**  $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$  可看

作一维简谐振子哈密顿量  $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$  向**无穷多自由度**的推广

**半正定算符**  $N_p \equiv a_p^\dagger a_p$  是三维动量空间中动量为  $p$  处的**粒子数密度算符**

每个粒子的能量是  $E_p$ ,  $H$  的**第一项是所有动量模式所有粒子**贡献的能量之和

由  $\int d^3 x e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$  得  $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3 x = \tilde{V}$

$\tilde{V}$  是进行积分的**空间体积**, 对于全空间而言是**无穷大的**

$H$  的**第二项是一个正无穷大 c 数** (*c-number*, 即经典的数, 不是算符), 是**真空的零点能**, 是**所有动量模式在全空间**贡献的零点能之和

# 哈密顿量的正定性

**自由实标量场的哈密顿量**  $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2}$  可看

作一维简谐振子哈密顿量  $H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$  向**无穷多自由度**的推广

**半正定算符**  $N_p \equiv a_p^\dagger a_p$  是三维动量空间中动量为  $p$  处的**粒子数密度算符**

每个粒子的能量是  $E_p$ ,  $H$  的**第一项是所有动量模式所有粒子**贡献的能量之和

由  $\int d^3 x e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$  得  $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3 x = \tilde{V}$

$\tilde{V}$  是进行积分的**空间体积**, 对于全空间而言是**无穷大**的

$H$  的**第二项是一个正无穷大 c 数** (*c-number*, 即经典的数, 不是算符), 是**真空的零点能**, 是**所有动量模式在全空间**贡献的零点能之和

一维简谐振子的零点能为  $E_0 = \omega/2$ , 这是**自由度为 1**时的结果

推广到**无穷多自由度**自然会得到**正无穷大的零点能**

如果不讨论引力现象, 零点能通常并不重要, 因为实验上只能测量两个能量之差

经过正则量子化之后, 实标量场的哈密顿量  $H$  是**正定算符**, **不存在负能量困难**

# 哈密顿量本征态

 哈密顿量  $H$  与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$\begin{aligned} [H, a_p^\dagger] &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger a_q, a_p^\dagger] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} E_q a_q^\dagger [a_q, a_p^\dagger] \\ &= \int d^3 q E_q a_q^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_p a_p^\dagger \end{aligned}$$

$$[H, a_p] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger, a_p] a_q = - \int d^3 q E_q a_q \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_p a_p$$

# 哈密顿量本征态



哈密顿量  $H$  与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$\begin{aligned}[H, a_p^\dagger] &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger a_q, a_p^\dagger] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} E_q a_q^\dagger [a_q, a_p^\dagger] \\ &= \int d^3 q E_q a_q^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = E_p a_p^\dagger\end{aligned}$$

$$[H, a_p] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} E_q [a_q^\dagger, a_p] a_q = - \int d^3 q E_q a_q \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -E_p a_p$$

故  $H a_p^\dagger = a_p^\dagger H + E_p a_p^\dagger$ ,  $H a_p = a_p H - E_p a_p$

设  $|E\rangle$  是  $H$  的本征态, 本征值为  $E$ , 则  $H|E\rangle = E|E\rangle$

从而,

$$H a_p^\dagger |E\rangle = (a_p^\dagger H + E_p a_p^\dagger) |E\rangle = (E + E_p) a_p^\dagger |E\rangle,$$

$$H a_p |E\rangle = (a_p H - E_p a_p) |E\rangle = (E - E_p) a_p |E\rangle$$

可见, 当  $a_p^\dagger |E\rangle \neq 0$  时, 产生算符  $a_p^\dagger$  的作用是使能量本征值增加  $E_p$

当  $a_p |E\rangle \neq 0$  时, 湮灭算符  $a_p$  的作用是使能量本征值减少  $E_p$

## 总动量

将  $\phi(x)$  和  $\pi(x)$  的平面波展开式代入，**总动量算符**化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= - \int d^3x \pi \nabla \phi \\
&= - \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} (-ip_0) \left( a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) (\mathbf{i}\mathbf{q}) \left( a_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \int \frac{d^3x d^3p d^3q p_0 \mathbf{q}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_q}} \\
&\quad \times \left[ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} e^{i(p-q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} e^{-i(p+q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i(p+q)\cdot x} \right] \\
&= \int \frac{d^3p d^3q p_0 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_p E_q}} \left\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left[ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(p_0 - q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} e^{i(p_0 - q_0)t} \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \left[ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} e^{-i(p_0 + q_0)t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i(p_0 + q_0)t} \right] \right\} \\
&= \int \frac{d^3p E_{\mathbf{p}} \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_p t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_p t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_p t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_p t} \right)
\end{aligned}$$

### 化简总动量

 作变量替换  $p \rightarrow -p$ ，利用产生湮灭算符的对易关系，得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left( a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-\mathbf{p}) \left( a_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left( a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t} \right)
 \end{aligned}$$

因此这个积分为零，从而

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \textcolor{red}{a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}} e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2iE_{\mathbf{p}}t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left( \textcolor{red}{a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \textcolor{red}{a_{\mathbf{p}}} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left[ \textcolor{red}{2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3 p \mathbf{p}\end{aligned}$$

### 总动量表达式

由  $\int d^3p \mathbf{p} = \int d^3p (-\mathbf{p}) = - \int d^3p \mathbf{p}$  得  $\int d^3p \mathbf{p} = 0$

 于是，自由实标量场的总动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

 即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和

# 总动量表达式

由  $\int d^3 p \mathbf{p} = \int d^3 p (-\mathbf{p}) = - \int d^3 p \mathbf{p}$  得  $\int d^3 p \mathbf{p} = 0$

于是，自由实标量场的总动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和

与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \mathbf{q} a_{\mathbf{q}}^\dagger [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int d^3 q \mathbf{q} a_{\mathbf{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \mathbf{q} [a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] a_{\mathbf{q}} = - \int d^3 q \mathbf{q} a_{\mathbf{q}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = -\mathbf{p} a_{\mathbf{p}}$$

即

$$\mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad \mathbf{P} a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}$$

#### 2.3.4 小节 粒子态

对于任意动量  $p$  对应的湮灭算符  $a_p$ ，假设真空态  $|0\rangle$  满足

$$a_{\mathbf{D}} |0\rangle = 0$$

归一化为

$$\langle 0|0 \rangle = 1$$

 将哈密顿量  $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + E_{vac}$  作用到真空态上，得

$$H |0\rangle = E_{\text{vac}} |0\rangle, \quad E_{\text{vac}} \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3 p \frac{E_p}{2}$$

 可见  $|0\rangle$  的能量本征值是零点能  $E_{\text{vac}}$ ，真空态是能量最低的状态。

vacuum state does not have momentum, i.e.,  $|0\rangle$  has zero momentum vector.

$$\mathbf{P} |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_p^\dagger \textcolor{red}{a_p} |0\rangle = \mathbf{0} = \textcolor{blue}{0} |0\rangle$$

单粒子态



接着，定义单粒子态

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$



其中  $\sqrt{2E_p}$  是归一化因子



根据  $Hg_p^\dagger |E\rangle \equiv (E + E_p)g_p^\dagger |E\rangle$ ，有  $H|\mathbf{p}\rangle \equiv (E_{\text{vac}} + E_p)|\mathbf{p}\rangle$



由  $Pq_{\pm}^{\dagger} \equiv q_{\pm}^{\dagger}P \pm Pq_{\mp}^{\dagger}$  和  $P|0\rangle \equiv 0|0\rangle$  得

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_p} \mathbf{P} a_p^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_p} (a_p^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_p^\dagger) |0\rangle = \sqrt{2E_p} \mathbf{p} a_p^\dagger |0\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle$$

单粒子态



接着，定义单粒子态

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$



其中  $\sqrt{2E_p}$  是归一化因子



根据  $H a_p^\dagger |E\rangle = (E + E_p) a_p^\dagger |E\rangle$ , 有  $H |\mathbf{p}\rangle = (E_{\text{vac}} + E_p) |\mathbf{p}\rangle$



由  $\mathbf{P}a_p^\dagger = a_p^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_p^\dagger$  和  $\mathbf{P}|0\rangle = \mathbf{0}|0\rangle$  得

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_p} \mathbf{P} a_p^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_p} (a_p^\dagger \mathbf{P} + \mathbf{p} a_p^\dagger) |0\rangle = \sqrt{2E_p} \mathbf{p} a_p^\dagger |0\rangle = \textcolor{blue}{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle$$



相比于真空态  $|0\rangle$ ，单粒子态  $|p\rangle$  多了一份能量  $E_p$ ，也多了一份动量  $p$



因此， $|p\rangle$  描述的是一个动量为  $p$  的粒子，这个粒子的能量为  $E_p = \sqrt{|p|^2 + m^2}$



这满足**狭义相对论**中的**色散关系**



而拉氏量  $\mathcal{L}$  中实标量场的质量  $m$  就是粒子的**质量**



可以看到，产生算符  $a_p^\dagger$  的作用是产生一个动量为  $p$  的粒子

# 单粒子态的内积

🦆 将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$\begin{aligned} a_p |\mathbf{q}\rangle &= \sqrt{2E_q} a_p a_q^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_q} [a_q^\dagger a_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})] |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

🐱 如果  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ，则上式为零

🐰 如果  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ ，则单粒子态  $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$  在  $a_p$  的作用下变成真空态  $|0\rangle$

🐭 可见，湮灭算符  $a_p$  的作用是减少一个动量为  $\mathbf{p}$  的粒子

# 单粒子态的内积

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} |\mathbf{q}\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} [a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})] |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

如果  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ，则上式为零

如果  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ ，则单粒子态  $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$  在  $a_{\mathbf{p}}$  的作用下变成真空态  $|0\rangle$

可见，湮灭算符  $a_{\mathbf{p}}$  的作用是减少一个动量为  $\mathbf{p}$  的粒子

单粒子态的内积为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} \langle 0 | [a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})] | 0 \rangle \\ &= 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned}$$

上式是 Lorentz 不变的，这是单粒子态归一化因子取成  $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$  的原因，证明见下

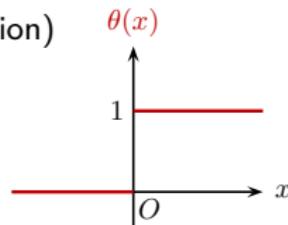
内积  $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0})$  是发散的，原因在于产生算符  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  是在无界空间中讨论量子场平面波解时定义的，内积有限的粒子态可通过构造波包得到，见习题 2.3

# 物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

 接下来证明  $2E_p\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  是 Lorentz 不变的

 引入 Heaviside 阶跃函数 (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



 对于满足质壳条件的四维动量  $p^\mu$ ,  $p^0$  的符号在任意惯性系中不会改变

 即  $\theta(p^0)$  在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变



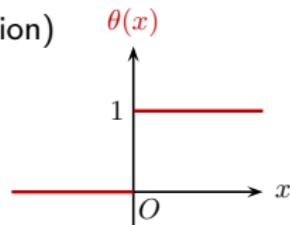
Oliver Heaviside  
(1850–1925)

# 物理动量区域上的 Lorentz 不变积分

 接下来证明  $2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  是 Lorentz 不变的

 引入 Heaviside 阶跃函数 (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



 对于满足质壳条件的四维动量  $p^\mu$ ,  $p^0$  的符号在任意惯性系中不会改变

 即  $\theta(p^0)$  在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变

 一个物理粒子的四维动量  $p^\mu$  满足质壳条件  $p^2 - m^2 = 0$  且能量为正 ( $p^0 > 0$ )

 任意 Lorentz 标量函数  $F(p)$  在物理动量区域上的 Lorentz 不变积分表达为

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) F(p)$$



Oliver Heaviside  
(1850–1925)

# 单粒子态的内积

利用  $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$  推出

$$\begin{aligned} \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) F(p) &= \int d^3 p dp^0 \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2] \theta(p^0) F(p^0, \mathbf{p}) \\ &= \int d^3 p dp^0 \frac{\delta(p^0 - E_p)}{2E_p} F(p^0, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p}{2E_p} F(E_p, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

第二步中  $\theta(p^0)$  挑出方程  $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$  的正根  $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_p$

而  $\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0} \Big|_{p^0=E_p} = 2p^0 \Big|_{p^0=E_p} = 2E_p$

可见,  $\frac{d^3 p}{2E_p}$  是相应的 Lorentz 不变动量空间体积元

# 单粒子态的内积

利用  $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$  推出

$$\begin{aligned} \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) F(p) &= \int d^3 p dp^0 \delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2] \theta(p^0) F(p^0, \mathbf{p}) \\ &= \int d^3 p dp^0 \frac{\delta(p^0 - E_p)}{2E_p} F(p^0, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p}{2E_p} F(E_p, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

第二步中  $\theta(p^0)$  挑出方程  $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$  的正根  $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_p$

而  $\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0} \Big|_{p^0=E_p} = 2p^0 \Big|_{p^0=E_p} = 2E_p$

可见， $\frac{d^3 p}{2E_p}$  是相应的 Lorentz 不变动量空间体积元

对任意 Lorentz 标量函数  $g(\mathbf{q})$ ，按照  $\delta$  函数定义，有

$$g(\mathbf{q}) = \int d^3 p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) g(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p}{2E_p} 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) g(\mathbf{p})$$

最左和最右都是 Lorentz 不变的，则  $2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  是 Lorentz 不变的，证毕

单粒子位置本征态

 将标量场算符  $\phi(x)$  作用到真空态  $|0\rangle$  上，得到态矢

$$\phi(x) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x} |0\rangle$$

它与单粒子态  $|p\rangle$  的内积为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | \phi(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_p}{2E_q}} \langle 0 | a_p a_q^\dagger e^{iq \cdot x} | 0 \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] e^{iq \cdot x} | 0 \rangle \\ &= \int d^3 q \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{ip \cdot x} \langle 0 | 0 \rangle = e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

# 单粒子位置本征态

将标量场算符  $\phi(x)$  作用到真空态  $|0\rangle$  上, 得到**态矢**

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x} |0\rangle$$

它与单粒子态  $|p\rangle$  的内积为

$$\begin{aligned} \langle p | \phi(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_p}{2E_q}} \langle 0 | a_p a_q^\dagger e^{iq \cdot x} | 0 \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] e^{iq \cdot x} | 0 \rangle \\ &= \int d^3 q \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \delta^{(3)}(p - q) e^{iq \cdot x} \langle 0 | 0 \rangle = e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

**量子力学**单粒子位置本征态  $|x\rangle$  与动量本征态  $|p\rangle$  **内积**为  $\langle p | x \rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x}$ , 其中  $(2\pi)^{-3/2}$  是归一化因子

两个内积的**形式相似**, 因此  $\phi(x)|0\rangle$  类似于  $t = x^0$  时刻的**单粒子位置本征态**,  $\phi(x)$  作用在  $|0\rangle$  上相当于**在时空点  $x^\mu = (t, x)$  处产生一个粒子**

平面波展开式的**归一化因子**  $1/\sqrt{2E_p}$  使内积  $\langle p | \phi(x) | 0 \rangle$  成为 **Lorentz 不变量**

n 粒子态

 定义动量分别为  $p_1, \dots, p_n$  的  $n$  个粒子对应的多粒子态为

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle, \quad C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}$$

 根据  $H_a^\dagger = a_p^\dagger H + E_p a_p^\dagger$ ,  $H$  对它的作用给出

$$\begin{aligned}
H |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= C_1 H a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle = C_1 (\textcolor{blue}{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger H + E_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger) \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger H a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_1} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger H \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle + (\textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_1} + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= \dots = C_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger H |0\rangle + (\textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_1} + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_2} + \dots + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= (\textcolor{violet}{E}_{\text{vac}} + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_1} + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_2} + \dots + \textcolor{red}{E}_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

 同理，P 对它的作用给出

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$$

 多粒子态  $|p_1, \dots, p_n\rangle$  的能量和动量直接由**各个粒子**的能量和动量**叠加贡献**

# 标量玻色子

 由对易关系  $[a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0$  得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

 可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态相同，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的

标量玻色子

由对易关系  $[a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0$  得

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_j}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

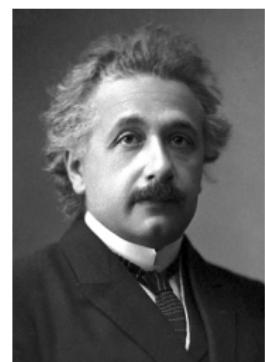
可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态相同，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的

因此实标量场描述的粒子是一种玻色子，被称为标量玻色子 (scalar boson)，它服从 Bose-Einstein 统计

 得到这个结论的关键在于**两个产生算符  
相互对易**



## Satyendra Nath Bose (1894–1974)



## Albert Einstein (1879–1955)

## 双粒子态的内积



双粒子态的内积为

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} \textcolor{brown}{a}_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[ (\textcolor{brown}{2}\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \textcolor{brown}{a}_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \right] \\
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[ (\textcolor{brown}{2}\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + (\textcolor{brown}{2}\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger | 0 \rangle \right] \\
&= \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[ (\textcolor{brown}{2}\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) \right. \\
&\quad \left. + (\textcolor{brown}{2}\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \right] \\
&= 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6 \left[ \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \right]
\end{aligned}$$



此内积仅在两种条件下非零



一种是  $p_1 = q_1$  且  $p_2 = q_2$ ，另一种是  $p_1 = q_2$  且  $p_2 = q_1$

# 粒子数密度算符

🐼 定义动量均为  $\mathbf{q}$  的  $n_{\mathbf{q}}$  个粒子对应的多粒子态

$$|n_{\mathbf{q}}\rangle \equiv C_2(a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle, \quad C_2 = (2E_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}/2}$$

🐘 粒子数密度算符  $N_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$  对它的作用为

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger \left[ a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right] (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^2 a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-2} |0\rangle + 2(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= \dots = C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle + n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \end{aligned}$$

粒子数算符

在动量空间对粒子数密度算符进行积分，得到的是粒子数算符

$$N \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} N_p = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a_p^\dagger a_p$$

由  $N_p |n_q\rangle = n_q (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_p^\dagger (a_q^\dagger)^{n_q-1} |0\rangle$  得

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{N} |n_{\mathbf{q}}\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \textcolor{blue}{N}_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = \textcolor{red}{n}_{\mathbf{q}} |n_{\mathbf{q}}\rangle \end{aligned}$$

因此,  $|n_q\rangle$  是  $N$  的本征态, 本征值为粒子数  $n_q$

# 一般多粒子态

更一般地，定义多粒子态

$$|n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \equiv C_3 (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle, \quad C_3 = \prod_{i=1}^m (2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}$$

它描述动量为  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$  的粒子分别有  $n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}$  个的状态，则

$$\begin{aligned} & N |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \right. \\ &\quad \left. + n_{\mathbf{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}-1} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} |0\rangle \right] + n_{\mathbf{p}_1} |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \\ &= \dots = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[ a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle \right] + (n_{\mathbf{p}_1} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m}) |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \\ &= (n_{\mathbf{p}_1} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m}) |n_{\mathbf{p}_1}, \dots, n_{\mathbf{p}_m}\rangle \end{aligned}$$

可见， $N$  确实是描述总粒子数的算符

## 2.4 节 复标量场的正则量子化

 本节讨论复标量场  $\phi(x)$ ，它不满足自共轭条件，即  $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$

 **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

 不过，由于量子化之后  $\phi(x)$  是算符，需要把复共轭记号  $*$  改成厄米共轭记号  $\dagger$

故自由复标量场的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

其中  $m > 0$  是复标量场的**质量**

## 2.4 节 复标量场的正则量子化

 本节讨论复标量场  $\phi(x)$ ，它不满足自共轭条件，即  $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$

 **自由**复标量场的拉氏量类似于 1.7.4 小节**经典场论**中的  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

不过，由于量子化之后  $\phi(x)$  是算符，需要把复共轭记号  $*$  改成厄米共轭记号  $\dagger$

故自由复标量场的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

其中  $m > 0$  是复标量场的**质量**

  $\phi(x)$  与  $\phi^\dagger(x)$  线性独立，是两个独立的正则变量，注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} = \partial^\mu\phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} = -m^2\phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi^\dagger$$

由 Euler-Lagrange 方程  $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$  推出经典运动方程

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi^\dagger(x) = 0$$

也就是说， $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  均满足 Klein-Gordon 方程

# 复标量场的分解

 可以将复标量场  $\phi$  分解为两个实标量场  $\phi_1$  和  $\phi_2$  的线性组合,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

 从而拉氏量化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu (\phi_1 - i\phi_2)] \partial_\mu (\phi_1 + i\phi_2) - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_1) \partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_2) \partial_\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 \end{aligned}$$

 对比实标量场拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

 可知复标量场的拉氏量相当于两个**质量相同**的实标量场的拉氏量

### 2.4.1 小节 平面波展开



接下来遵循 2.3.1 小节中的方法讨论复标量场的平面波展开式



区别在于不能够应用自共轭条件



从而，场算符  $\phi(\mathbf{x}, t)$  的一般解为

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \tilde{a}_{-\mathbf{k}} e^{i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right].\end{aligned}$$



第二步对方括号中第二项作变量替换  $k \rightarrow -k$



由于复标量场不满足自共轭条件，算符  $\tilde{a}_{-k}$  与  $a_k$  没有关系，改记为  $b_k^\dagger = \tilde{a}_{-k}$



展开式变成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \mathbf{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]$$

## 复标量场的平面波展开式

 对  $\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}]$  替换动量记号

## 把复标量场的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \textcolor{red}{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \textcolor{blue}{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

其中  $p^0$  满足**质壳条件**  $p^0 = E_p \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0$

## 复标量场的平面波展开式

 对  $\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}]$  替换动量记号



把复标量场的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \mathbf{a}_p e^{-ip \cdot x} + \mathbf{b}_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$



其中  $p^0$  满足**质壳条件**  $p^0 = E_p \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0$



取厄米共轭，就得到  $\phi^\dagger(x, t)$  的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$



$a_p$  和  $b_p$  是两个相互独立的湮灭算符



$a_p^\dagger$  和  $b_p^\dagger$  是两个相互独立的产生算符

### 等时对易关系

$\phi(x, t)$  对应的共轭动量密度是

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( b_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

$\phi^\dagger(x, t)$  对应的共轭动量密度是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

  $\pi(\mathbf{x}, t)$  与  $\pi^\dagger(\mathbf{x}, t)$  互为厄米共轭

## 等时对易关系

$\phi(x, t)$  对应的共轭动量密度是

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( b_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

$\phi^\dagger(x, t)$  对应的共轭动量密度是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-ip_0}{\sqrt{2E_p}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

  $\pi(\mathbf{x}, t)$  与  $\pi^\dagger(\mathbf{x}, t)$  互为厄米共轭

 等时对易关系为

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

$$[\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0$$

## 产生湮灭算符的对易关系



利用等时对易关系推出以下产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

$$[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

$$[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = [b_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$



具体推导过程见 2.4.2 小节选读内容



这说明  $(a_p, a_p^\dagger)$  与  $(b_p, b_p^\dagger)$  是两套不同的产生湮灭算符，描述两种不同的玻色子

### 2.4.3 小节 U(1) 整体对称性



类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场  $\phi(x)$  作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta} \phi^\dagger(x)$$



其中实常数  $q$  是  $U(1)$  荷，实数  $\theta$  是不依赖于  $x^\mu$  的变换参数



则拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$  不变，系统具有 U(1) 整体对称性

### 2.4.3 小节 U(1) 整体对称性



类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场  $\phi(x)$  作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = e^{-iq\theta} \phi^\dagger(x)$$



其中实常数  $q$  是 U(1) 荷，实数  $\theta$  是不依赖于  $x^\mu$  的变换参数



则拉氏量  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$  不变，系统具有 U(1) 整体对称性



相应的 U(1) 守恒流为  $J^\mu = i\bar{\phi}\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ ，满足  $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，它是一个厄米算符，

$$(J^\mu)^\dagger = \{i q [\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi]\}^\dagger = -i q [(\partial^\mu \phi^\dagger) \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi] = i q \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi = J^\mu$$



**U(1) 守恒荷算符是**

$$Q = iq \int d^3x \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi = iq \int d^3x [\phi^\dagger \partial^0 \phi - (\partial^0 \phi^\dagger) \phi] = iq \int d^3x (\phi^\dagger \pi^\dagger - \pi \phi)$$

U(1) 守恒荷算符

利用平面波展开式，将  $U(1)$  守恒荷算符化为

$$\begin{aligned}
& \textcolor{violet}{Q} = iq \int d^3x (\phi^\dagger \pi^\dagger - \pi \phi) \\
&= iq \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_k}} \left[ \left( b_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) (-iE_k) \left( a_k e^{-ik \cdot x} - b_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \right. \\
&\quad \left. - (-iE_p) \left( b_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left( a_k e^{-ik \cdot x} + b_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \right] \\
&= q \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_k}} \left\{ (E_k + E_p) [a_p^\dagger a_k e^{i(p-k) \cdot x} - b_p b_k^\dagger e^{-i(p-k) \cdot x}] \right. \\
&\quad \left. + (E_k - E_p) [b_p a_k e^{-i(p+k) \cdot x} - a_p^\dagger b_k^\dagger e^{i(p+k) \cdot x}] \right\} \\
&= q \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_p E_k}} \left\{ (E_k + E_p) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[ a_p^\dagger a_k e^{i(E_p - E_k)t} - b_p b_k^\dagger e^{-i(E_p - E_k)t} \right] \right. \\
&\quad \left. + (E_k - E_p) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \left[ b_p a_k e^{-i(E_p + E_k)t} - a_p^\dagger b_k^\dagger e^{i(E_p + E_k)t} \right] \right\} \\
&= q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( a_p^\dagger a_p - b_p b_p^\dagger \right)
\end{aligned}$$

# 正粒子和反粒子

由对易关系  $[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  推出

$$\begin{aligned} Q &= q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( q a_p^\dagger a_p - q b_p^\dagger b_p \right) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q \end{aligned}$$

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符  $a_p^\dagger a_p$  的系数是  $q$ ，而粒子数密度算符  $b_p^\dagger b_p$  的系数是  $-q$

### 正粒子和反粒子

由对易关系  $[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  推出

$$\boxed{Q} = q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( q a_p^\dagger a_p - q b_p^\dagger b_p \right) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q$$

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符  $a_p^\dagger a_p$  的系数是  $q$ ，而粒子数密度算符  $b_p^\dagger b_p$  的系数是  $-q$

可见,  $(a_p, a_p^\dagger)$  描述的粒子具有的 U(1) 荷为  $q$ , 称为正粒子

另一方面,  $(b_p, b_p^\dagger)$  描述的粒子具有相反的 U(1) 荷  $-q$ , 称为反粒子

因此，复标量场描述一对正反标量玻色子

除去零点荷，总荷  $Q$  是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和

# 正粒子和反粒子

由对易关系  $[b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  推出

$$\begin{aligned} Q &= q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (a_p^\dagger a_p - b_p b_p^\dagger) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (q a_p^\dagger a_p - q b_p^\dagger b_p) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q \end{aligned}$$

上式第二项是零点荷；在第一项的圆括号中，粒子数密度算符  $a_p^\dagger a_p$  的系数是  $q$ ，而粒子数密度算符  $b_p^\dagger b_p$  的系数是  $-q$

可见， $(a_p, a_p^\dagger)$  描述的粒子具有的 U(1) 荷为  $q$ ，称为正粒子

另一方面， $(b_p, b_p^\dagger)$  描述的粒子具有相反的 U(1) 荷  $-q$ ，称为反粒子

因此，复标量场描述一对正反标量玻色子

除去零点荷，总荷  $Q$  是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和

这里单个粒子的荷  $q$  或  $-q$  对总荷  $Q$  的贡献是相加性的，并且来自于一种内部对称性，因而是一种内部相加性量子数 (internal additive quantum number)

实际上，任何反粒子的所有内部相加性量子数都与正粒子相反

不存在负概率困难

如果将复标量场  $\phi(x)$  替换成量子力学的单粒子波函数  $\Psi(x)$ ，则

$$\frac{Q}{q} = i \int d^3x [\phi^\dagger \partial^0 \phi - (\partial^0 \phi^\dagger) \phi]$$

与单粒子概率密度  $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \right)$  的全空间积分分类似

但是，这里  $\frac{Q}{q}$  的本征值被解释为正粒子数与反粒子数之差，显然是可正可负的

也就是说，在量子场论中  $\frac{Q}{q}$  与单粒子在空间中的概率没有关系

因而不像量子力学那样存在负概率困难

# 纯中性粒子

 如果对**实标量场**作类似的  **$U(1)$  整体变换**, 则**自共轭条件**使得

$$e^{iq\theta} \phi(x) = \phi'(x) = [\phi'(x)]^\dagger = [e^{iq\theta} \phi(x)]^\dagger = e^{-iq\theta} \phi^\dagger(x) = e^{-iq\theta} \phi(x)$$

 上式要求  $q = 0$

 因此, 对**实标量场****不能**进行非平庸的  $U(1)$  整体变换

 **自共轭条件**使**实标量场**描述的**粒子****不能**具有任何非零的内部相加性量子数

 也就是说, **正粒子与反粒子是相同的**

 **实标量场**描述的是一种**纯中性粒子** (truly neutral particle)

# 哈密顿量和总动量

 经过进一步计算，得到复标量场的哈密顿量算符

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \left( a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p \right) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p$$

 除了零点能，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子的能量之和

 正粒子与反粒子具有相同的质量  $m$ ，因而动量为  $\mathbf{p}$  时能量均为  $E_p$

 另一方面，复标量场的总动量算符为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p)$$

 总动量是所有动量模式所有正反粒子的动量之和

 具体推导过程见 2.4.4 小节选读内容