数 学 物 理 方 法

第二章　复变函数的积分

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2025 年 9 月 24 日

第二章　复变函数的积分

- 本章讨论复变函数的积分
- 将会涉及到 **Cauchy 积分定理**，它是整个解析函数理论的基础

§1 复积分的定义和基本性质

§1.1 曲线的方向

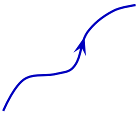
- 本章提到的曲线一般都指光滑或逐段光滑的平面曲线
- 若一段曲线的方程为 $y = f(x)$，则光滑指的是 $f'(x)$ 连续
- 若其方程为参数方程 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$，则光滑指的是 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续
- 由有限条光滑曲线衔接而成的曲线称为逐段光滑曲线，比如折线

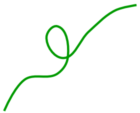
光滑　　　　逐段光滑

§1 复积分的定义和基本性质

§1.1 曲线的方向

- 本章提到的曲线一般都指光滑或逐段光滑的平面曲线
- 若一段曲线的方程为 $y=f(x)$，则光滑指的是 $f'(x)$ 连续
- 若其方程为参数方程 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$，则光滑指的是 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续
- 由有限条光滑曲线衔接而成的曲线称为逐段光滑曲线，比如折线
- 曲线的方向定义如下
- 1 简单曲线：即没有重点的曲线
- (a) 是简单曲线，而 (b) 不是
- 简单曲线的方向由起点指向终点，所以规定了起点和终点就确定了它的方向

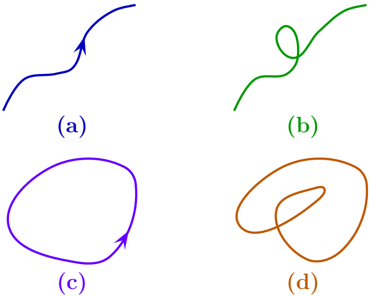

(a)


(b)

§1 复积分的定义和基本性质

§1.1 曲线的方向

- 本章提到的曲线一般都指光滑或逐段光滑的平面曲线
- 若一段曲线的方程为 $y = f(x)$，则光滑指的是 $f'(x)$ 连续
- 若其方程为参数方程 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$，则光滑指的是 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续
- 由有限条光滑曲线衔接而成的曲线称为逐段光滑曲线，比如折线
- 曲线的方向定义如下
- 1 简单曲线：即没有重点的曲线
- (a) 是简单曲线，而 (b) 不是
- 简单曲线的方向由起点指向终点，所以规定了起点和终点就确定了它的方向
- 2 围线 (contour)：即简单闭曲线
- (c) 是简单闭曲线，而 (d) 不是
- 如果沿着围线走，它所包围的区域在左边，则该方向称为正方向，即逆时针方向



§1.2 复积分的定义与存在性

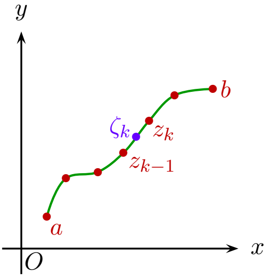
一元实变函数的积分定义在 x 轴上的有限区间内 (无限区间的广义积分通过极限过程得到)，而复变函数的积分 (简称复积分) 总是定义在曲线上

复积分定义 设函数 $f(z)$ 沿曲线 C 有定义，在 C 上从起点 a 到终点 b 取分点

$$a = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_{n-1}, z_n = b$$

将 C 分为 n 个弧段，在 z_{k-1} 至 z_k 的弧段上任取一点 ζ_k，作和数

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \text{其中 } \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$



若 $n \to \infty$ 且 $\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k| \to 0$ 时，$S_n \to I$，则称

$f(z)$ 沿 C 可积，并称 I 为 $f(z)$ 沿 C 的积分，记作

$$I = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

C 称为积分路径，沿相反方向的积分记作 $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z$

- **注** 当 $b = a$，即 C 为**围线**时，**沿围线 C 积分**总是指**逆时针方向**的积分
- 以上积分的定义与**实变函数积分**的**定义**是很类似的
- 在**复变函数论**中，**积分理论**具有非常基本的地位
- 事实上，关于**复积分**的 **Cauchy 积分定理**是**解析函数理论**的基础
- 解析函数微分性质的证明大都是由这个定理出发的

复积分的存在定理

注　当 $b = a$，即 C 为围线时，沿围线 C 积分总是指逆时针方向的积分

以上积分的定义与实变函数积分的定义是很类似的

在复变函数论中，积分理论具有非常基本的地位

事实上，关于复积分的 Cauchy 积分定理是解析函数理论的基础

解析函数微分性质的证明大都是由这个定理出发的

定义了复积分，首先遇到的问题是，给定函数和曲线，如何判断积分是否存在

复积分存在定理　设函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 沿曲线 C 连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

注　形式上，由 $f(z)\,\mathrm{d}z = (u + \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$ 即可得到右边的结果，这可以帮助理解这一公式，但不是证明，证明见选读内容

上式同时也给出了把复积分计算转化为实变函数曲线积分计算的方法

§1.3 复积分的基本性质

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿曲线 C、C_1、C_2 连续，则复积分有下列基本性质

1. $$\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \beta \int_C g(z)\,\mathrm{d}z, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

注意 $\sum_k [\alpha f(\zeta_k) + \beta g(\zeta_k)]\Delta z_k = \alpha \sum_k f(\zeta_k)\Delta z_k + \beta \sum_k g(\zeta_k)\Delta z_k$

§1.3 复积分的基本性质

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿曲线 C、C_1、C_2 连续，则复积分有下列基本性质

1. $$\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_C f(z)\,\mathrm{d}z+\beta\int_C g(z)\,\mathrm{d}z,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$$

   注意 $$\sum_k[\alpha f(\zeta_k)+\beta g(\zeta_k)]\Delta z_k=\alpha\sum_k f(\zeta_k)\Delta z_k+\beta\sum_k g(\zeta_k)\Delta z_k$$

2. $$\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

§1.3 复积分的基本性质

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿曲线 C、C_1、C_2 连续，则复积分有下列基本性质

1. $$\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_C f(z)\,\mathrm{d}z+\beta\int_C g(z)\,\mathrm{d}z,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$$

   注意 $\sum_k[\alpha f(\zeta_k)+\beta g(\zeta_k)]\Delta z_k=\alpha\sum_k f(\zeta_k)\Delta z_k+\beta\sum_k g(\zeta_k)\Delta z_k$

2. $$\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

3. $$\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

   反方向意味着 $\Delta z_k\to-\Delta z_k$

§1.3 复积分的基本性质

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿曲线 C、C_1、C_2 连续，则复积分有下列基本性质

1. $$\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \beta \int_C g(z)\,\mathrm{d}z, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

   注意 $\sum_k [\alpha f(\zeta_k) + \beta g(\zeta_k)]\Delta z_k = \alpha \sum_k f(\zeta_k)\Delta z_k + \beta \sum_k g(\zeta_k)\Delta z_k$

2. $$\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

3. $$\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

   反方向意味着 $\Delta z_k \to -\Delta z_k$

4. $$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$$

   $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}z|$ 是弧长的微分，利用三角不等式 $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ 有

$$\left|\sum_k f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_k |f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k|$$

§2 复积分的计算

- 本节讨论复积分的计算，这有三方面的目的
- 第一，加深对复积分的了解
- 第二，通过计算获得一些有用的具体结果
- 第三，建立 Cauchy 积分定理的特例，从而对这一抽象的定理获得感性认识

§2.2 曲线积分方法

- 从选读的 §2.1 可以看到，直接用定义来计算复积分，即使对于像 $f(z)=z$ 这样简单的函数，都需要一定的技巧
- 对于较复杂的函数，这种方法显然是**不现实**的
- 注意到上节的定理不仅解决了积分的存在性问题，而且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

同时也给出了计算复积分的一种方法，即把复积分转化为实变函数的曲线积分来计算

§2.2 曲线积分方法

从选读的 §2.1 可以看到，直接用定义来计算复积分，即使对于像 $f(z)=z$ 这样简单的函数，都需要一定的技巧

对于较复杂的函数，这种方法显然是**不现实**的

注意到上节的定理不仅解决了积分的存在性问题，而且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C(u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_C(v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y)$$

同时也给出了计算复积分的一种方法，即把复积分转化为实变函数的曲线积分来计算

在简单情况下，可以找到曲线积分的原函数，这时就很容易得到结果

为了叙述方便，把这种方法称为曲线积分方法

例 3 C 是 a 到 b 的任一简单曲线，用曲线积分方法计算 $\int_C \mathrm{d}z$

解 $f(z)=1$，即 $u(x,y)=1$，$v(x,y)=0$，有

$$\int_C \mathrm{d}z=\int_C \mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_C \mathrm{d}y=(x+\mathrm{i}y)\Big|_a^b=z\Big|_a^b=b-a$$

例 4

💙 **例 4** C 是 a 到 b 的任一简单曲线，用**曲线积分方法**计算 $\int_C z\,\mathrm{d}z$

解 $f(z)=z$，即 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=y$，有

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_C (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \int_C \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right] + \mathrm{i}\int_C \mathrm{d}(xy)\\ &= \int_C \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)\right] = \frac{1}{2}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)\Big|_a^b\\ &= \frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y)^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}z^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\end{aligned}$$

例 4

💙 **例 4** C 是 a 到 b 的任一简单曲线，用**曲线积分方法**计算 $\int_C z\,\mathrm{d}z$

🟦 **解** $f(z)=z$，即 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=y$，有

$$\int_C z\,\mathrm{d}z = \int_C (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \int_C \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right] + \mathrm{i}\int_C \mathrm{d}(xy)$$

$$= \int_C \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)\right] = \frac{1}{2}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y)^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}z^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

👨‍🔧 由以上两例看到，积分的结果只与**起点**和**终点**有关，而**与路径无关**

🔧 这是与**被积函数**的**解析性**紧密相关的

🔩 事实上，这一方法可以用于任何具体的**解析函数**，如**指数**、**三角函数**等，并得到类似的结果

🔨 在 **§3.1** 会看到，对于**解析函数**，存在着与**实变积分**类似的 **Newton-Leibniz 公式**

§2.3 参数方程法

如果被积函数**不是解析的**，比如 $f(z)=z^*$，则其积分一般都**依赖于路径**，而不仅仅是起点和终点

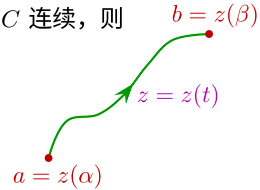
这时用上面的**曲线积分方法并不方便**

实际上，**实变函数**中的**曲线积分**在一般情况下还是要化成**定积分**来计算的

§2.3 参数方程法

- 如果被积函数**不是解析的**，比如 $f(z)=z^*$，则其积分一般都**依赖于路径**，而不仅仅是起点和终点
- 这时用上面的**曲线积分方法并不方便**
- 实际上，**实变函数**中的**曲线积分**在一般情况下还是要化成**定积分**来计算的
- 所以，下面就讨论计算复积分的**参数方程法**
- 设**曲线** C 的**参数方程**为 $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$，$f(z)$ 沿 C 连续，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t$$



- 这一公式将复积分化为**实变量** t 的**定积分**
- 形式上，只要将 $z=z(t)$ 和 $\mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t$ 代入左边，即可得到右边的结果
- 当然这不是证明，证明**见选读内容**
- 右边**定积分**可能需要分开**实部**和**虚部**来计算，除非能直接找到**原函数**

例 5

利用参数方程法，马上可得例 3 和例 4 的结果，它们是下述更一般结果的特例

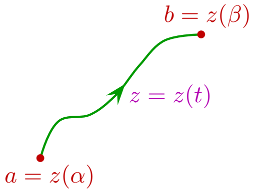
例 5 考虑被积函数 $f(z) = z^n \ (n \in \mathbb{N})$

由于 $(z^{n+1})' = (n+1)z^n$，$f[z(t)]z'(t) = z^n(t)z'(t)$ 的原函数是 $\dfrac{z^{n+1}(t)}{n+1}$，有

$$\int_a^b z^n \, \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta z^n(t)\, z'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{z^{n+1}(t)}{n+1}\bigg|_\alpha^\beta = \frac{z^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}),$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

结果与曲线 C 的细节无关，而只依赖于起点和终点



例 5

利用参数方程法，马上可得例 3 和例 4 的结果，它们是下述更一般结果的特例

例 5 考虑被积函数 $f(z) = z^n \ (n \in \mathbb{N})$

由于 $(z^{n+1})' = (n+1)z^n$，$f[z(t)]z'(t) = z^n(t)z'(t)$ 的原函数是 $\dfrac{z^{n+1}(t)}{n+1}$，有

$$\int_a^b z^n \,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta z^n(t)\, z'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{z^{n+1}(t)}{n+1}\bigg|_\alpha^\beta = \frac{z^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}),$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

结果与曲线 C 的细节无关，而只依赖于起点和终点

如果 C 是围线，即 $b = a$，对上式取 $b \to a$ 的极限，得

$$\int_C z^n \,\mathrm{d}z = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \forall \text{ 围线 } C$$

例 5

利用参数方程法，马上可得例 3 和例 4 的结果，它们是下述更一般结果的特例

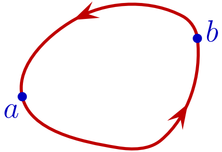
例 5 考虑被积函数 $f(z)=z^n\ (n\in\mathbb{N})$

由于 $(z^{n+1})'=(n+1)z^n$，$f[z(t)]z'(t)=z^n(t)z'(t)$ 的原函数是 $\dfrac{z^{n+1}(t)}{n+1}$，有

$$\int_a^b z^n\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta z^n(t)\,z'(t)\,\mathrm{d}t=\left.\frac{z^{n+1}(t)}{n+1}\right|_\alpha^\beta=\left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_a^b=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}),$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

结果与曲线 C 的细节无关，而只依赖于起点和终点



如果 C 是围线，即 $b=a$，对上式取 $b\to a$ 的极限，得

$$\int_C z^n\,\mathrm{d}z=0,\quad n=0,1,2,\cdots,\quad \forall\ \text{围线}\ C$$

也可以将围线 C 分为两段，而两段的积分互相抵消，使总积分为零

注 由以上结果易知，对于**任意多项式** $P_n(z)$ 和**围线** C，均有 $\int_C P_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$

从而推测，对于**一般的解析函数** $f(z)$，亦有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

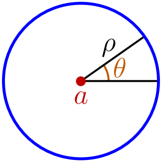
这基本上就是 **Cauchy 积分定理**了

例 6

注　由以上结果易知，对于**任意多项式** $P_n(z)$ 和**围线** C，均有 $\int_C P_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$

从而推测，对于**一般的解析函数** $f(z)$，亦有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

这基本上就是 **Cauchy 积分定理**了



例 6　计算积分 $\displaystyle\int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}$，其中 $n \in \mathbb{Z}$，$a \in \mathbb{C}$

当 $n \le 0$，被积函数是**多项式**，积分结果为 0，这与下面的结果一致

解　**圆周** $|z-a| = \rho$ 的参数方程为 $z(\theta) = a + \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$

这里将**参数**写作 θ，因为它是**角度**

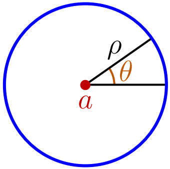
由 $z'(\theta) = \mathrm{i}\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 得

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}} = \frac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

讨论

- 如果 $n \neq 1$，有 $\dfrac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}}{-\mathrm{i}(n-1)}\Bigg|_0^{2\pi} = 0$
- 如果 $n = 1$，有 $\dfrac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}$
- 综合起来，得

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1 \end{cases}$$

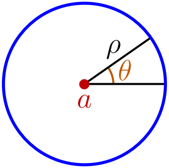


- 这是一个**重要**的结果

讨论

如果 $n\neq 1$，有 $\dfrac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\left.\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}}{-\mathrm{i}(n-1)}\right|_0^{2\pi} = 0$

如果 $n=1$，有 $\dfrac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}$



综合起来，得

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1 \\ 0, & n\in\mathbb{Z},\ n\neq 1 \end{cases}$$

这是一个**重要**的结果

注 这一结果**与 a 和 ρ 的数值无关**

后面 **§3.4** 将证明，这一结果对**任何包围 a 点的围线**成立

$n=1$ 时结果**不为 0**，这是因为被积函数在**积分围线内**存在**奇点** $z=a$

由此可进一步推测，**Cauchy 积分定理**中的 $f(z)$ 应该**在围线 C 及其内部解析**，而不仅仅是在围线 C 上解析

虽然 $n=2,3,\cdots$ 时 $z=a$ 是**奇点**，结果为 0，但这只是具体的结果，**没有必然性**

§3 Cauchy 积分定理

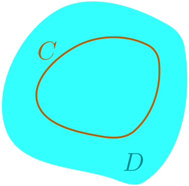
§3.1 Cauchy 积分定理

由上节看到，简单的解析函数 $P_n(z)$ 满足 $\int_C P_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$，其中 C 为任意围线

实际上，这是下面定理的一个特例

Cauchy 积分定理 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，C 为 D 内任一围线，则

$$\boxed{\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0}$$



这是复变函数论中**最基本**的定理

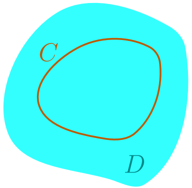
§3 Cauchy 积分定理

§3.1 Cauchy 积分定理

由上节看到，简单的解析函数 $P_n(z)$ 满足 $\int_C P_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$，其中 C 为任意围线

实际上，这是下面定理的一个特例

Cauchy 积分定理 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，C 为 D 内任一围线，则 $\boxed{\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0}$



这是复变函数论中**最基本**的定理

如果假定 $f'(z)$ 连续，则上述定理的证明是很容易的，这时 u 和 v 的一阶偏导数连续，可以应用 **Green 公式** $\int_{\partial G}(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 得到

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)\\ &= \int_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 G 是围线 C 所包围的区域；由 **CR 条件**，最后一行两个积分都为 0，证毕

Cauchy 积分定理的历史和等价表述

- 但是，$f(z)$ **解析**的定义只是 $f'(z)$ **存在**，并**不一定连续**
- 所以上面证明的只是一种特殊情况；**严格证明**在**选读 §3.2** 中
- 值得注意的是，**Cauchy** 在 **1825 年**给出上述定理，那时候 $f(z)$ **解析**的定义是 $f'(z)$ **连续**，所以上面的证明是严格的

Cauchy 积分定理的历史和等价表述

- 但是，$f(z)$ **解析**的定义只是 $f'(z)$ **存在**，并**不一定连续**
- 所以上面证明的只是一种特殊情况；**严格证明**在**选读 §3.2** 中
- 值得注意的是，**Cauchy** 在 **1825 年**给出上述定理，那时候 $f(z)$ **解析**的定义是 $f'(z)$ **连续**，所以上面的证明是严格的
- **1900 年**，**Goursat** 发表新的证明，免去了 $f'(z)$ 连续的条件
- 也就是说，只要 $f'(z)$ **存在**，**Cauchy 积分定理**就成立
- 此后 $f(z)$ **解析**的定义才改为现在的样子
- 这无疑是一个实质性的进步，但期间经历了七十多年的时间

Édouard Goursat
(1858–1936)

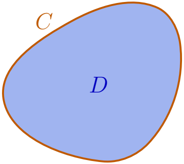
Cauchy 积分定理的历史和等价表述

- 但是，$f(z)$ 解析的定义只是 $f'(z)$ 存在，并不一定连续
- 所以上面证明的只是一种特殊情况；严格证明在选读 §3.2 中
- 值得注意的是，Cauchy 在 1825 年给出上述定理，那时候 $f(z)$ 解析的定义是 $f'(z)$ 连续，所以上面的证明是严格的
- 1900 年，Goursat 发表新的证明，免去了 $f'(z)$ 连续的条件
- 也就是说，只要 $f'(z)$ 存在，Cauchy 积分定理就成立
- 此后 $f(z)$ 解析的定义才改为现在的样子
- 这无疑是一个实质性的进步，但期间经历了七十多年的时间
- Cauchy 积分定理有以下等价表述

Édouard Goursat (1858–1936)

♊ **定理** C 为复平面上的围线，D 是 C 所包围的单通区域，函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$



§3.3 Cauchy 积分定理的推论

由 **Cauchy 积分定理**，马上可以得到以下**推论**

推论 设函数 $f(z)$ 在**单通区域** D 内**解析**，$z_1, z_2 \in D$，则**积分** $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ 与 D 内**由** z_1 **到** z_2 的**路径无关**

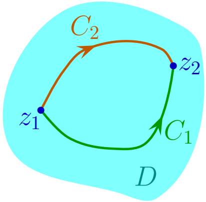
证明 任取 D 内**由** z_1 **到** z_2 的两条路径 C_1 和 C_2，有

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1+C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

前两步用到积分的基本性质

最后一步用了 **Cauchy 积分定理**，

因为 $C_1 + C_2^-$ 构成 D 内的**围线**



变上限积分定理

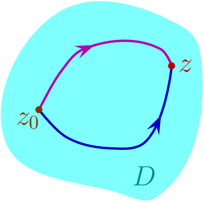
现在将积分的起点固定在 z_0，让终点 z 变化，这就是变上限积分

由上面的推论，这一变上限积分是 z 的单值函数

类似于实变函数的情况，有下述结论

变上限积分定理 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，$z_0 \in D$ 是定点，则由

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 定义的函数在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$



变上限积分定理

现在将积分的起点固定在 z_0，让终点 z 变化，这就是变上限积分

由上面的推论，这一变上限积分是 z 的单值函数

类似于实变函数的情况，有下述结论

变上限积分定理 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，$z_0 \in D$ 是定点，则由

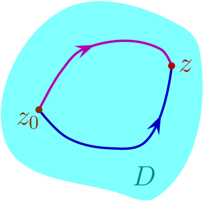
$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 定义的函数在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$

证明见选读内容

注 在一元实变函数的相应定理中，只要求被积函数 $f(x)$ 连续，而不必可导

但是，这里**必须要求** $f(z)$ 解析，否则积分与路径有关，$F(z)$ 就**不是**上限 z 的单值函数了

另外，所考虑的区域必须是单通的，这一点也很重要



原函数

原函数定义 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，若有函数 $\Phi(z)$ 满足 $\Phi'(z)=f(z)$，则 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个不定积分或原函数

注 本来在这一定义中并没有必要要求 $f(z)$ 解析

但是，$\Phi'(z)=f(z)$ 的存在表明 $\Phi(z)$ 是解析的

后面在 §4.3 会看到，这导致 $f(z)=\Phi'(z)$ 也是解析的

换句话说，如果 $f(z)$ 不解析，它就不可能存在原函数

所以上述定义只针对解析函数也就很自然了

原函数

原函数定义 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，若有函数 $\Phi(z)$ 满足 $\Phi'(z) = f(z)$，则 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个不定积分或原函数

注 本来在这一定义中并没有必要要求 $f(z)$ 解析

但是，$\Phi'(z) = f(z)$ 的存在表明 $\Phi(z)$ 是解析的

后面在 §4.3 会看到，这导致 $f(z) = \Phi'(z)$ 也是解析的

换句话说，如果 $f(z)$ 不解析，它就不可能存在原函数

所以上述定义只针对解析函数也就很自然了

原函数显然**不是唯一**的，因为如果 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数，则 $\Phi(z) + c$ 也是它的原函数，其中 c 是复常数

但任意两个原函数也只能相差一个常数，因为如果 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 都是 $f(z)$ 的原函数，则 $[\Phi(z) - \Psi(z)]' = f(z) - f(z) = 0$，由此易证 $\Phi(z) - \Psi(z) = c$

Newton-Leibniz 公式

定义了**原函数**，就可以给出一个计算积分的公式，但仍然要注意它的**条件**

定理 设函数 $f(z)$ 在**单通区域** D 内**解析**，$\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的**任一原函数**，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z, z_0 \in D$$

上式称为 **Newton-Leibniz 公式**

证明 记 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，则

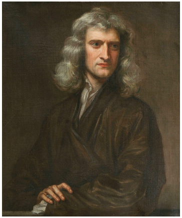
$$F'(z) = f(z)$$

可见 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的**原函数**

又已知 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的**原函数**，则根据上面的讨论有 $\Phi(z) = F(z) + c$

以 z_0 代入，可得 $\Phi(z_0) = F(z_0) + c = c$

所以 $F(z) = \Phi(z) - c = \Phi(z) - \Phi(z_0)$



Isaac Newton
(1642–1726)

Gottfried Leibniz
(1646–1716)

Newton-Leibniz 公式

定义了**原函数**，就可以给出一个计算积分的公式，但仍然要注意它的**条件**

定理 设函数 $f(z)$ 在**单通区域** D 内**解析**，$\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的**任一原函数**，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z, z_0 \in D$$

上式称为 **Newton-Leibniz 公式**

利用 **Newton-Leibniz 公式**，可马上得到 **§2.3** 中**例 5** 的结果：

$\Phi(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ 是 $f(z) = z^n$ 的**原函数**，故

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

§3.4 复通区域的 Cauchy 积分定理

前面讨论 Cauchy 积分定理及其相关结论时，多次强调单通区域，因为在复通区域内，它一般是不能成立的

不过在复通区域 D 内，只要围线 C 及其内部完全在 D 内，它还是成立的

比如 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在去掉原点的复平面上是解析的，这是复通区域，在其中 Cauchy 积分定理不能成立，因为沿单位圆 $|z|=1$ 的积分就不为 0

但对于不包围原点的围线，比如右半平面上的围线，积分为 0

§3.4 复通区域的 Cauchy 积分定理

前面讨论 Cauchy 积分定理及其相关结论时，多次强调单通区域，因为在复通区域内，它一般是不能成立的

不过在复通区域 D 内，只要围线 C 及其内部完全在 D 内，它还是成立的

比如 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 在去掉原点的复平面上是解析的，这是复通区域，在其中 Cauchy 积分定理不能成立，因为沿单位圆 $|z| = 1$ 的积分就不为 0

但对于不包围原点的围线，比如右半平面上的围线，积分为 0

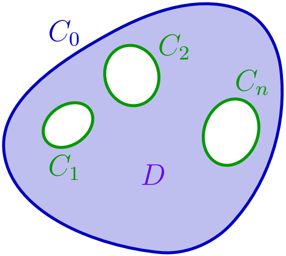
另一方面，§2.3 中例 6 的计算结果表明，在以原点为圆心的一切圆周上，$f(z) = \dfrac{1}{z}$ 的积分结果相同，均为 $2\pi\mathrm{i}$

这是复通区域的 Cauchy 积分定理的一个特例

本小节就是要讨论 Cauchy 积分定理在复通区域内的推广形式

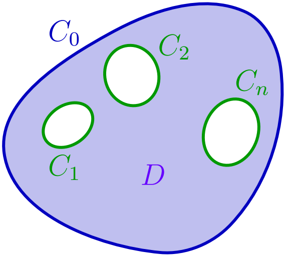
复通区域的 Cauchy 积分定理

- 考虑 $n+1$ 条围线 $C_0, C_1, \cdots, C_n$，其中 $C_1, \cdots, C_n$ 全在 C_0 内部，且互不相交也互不包含
- 在 C_0 内部而在 $C_1, \cdots, C_n$ 外部的点集构成一个复通区域 D，它的边界包括以上各围线，称为复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$
- 其中 C_0 取正向，而 $C_1, \cdots, C_n$ 取反向，以便沿边界绕行时，C 所包围的区域 D 总是在左边



复通区域的 Cauchy 积分定理

考虑 $n+1$ 条围线 $C_0, C_1, \cdots, C_n$，其中 $C_1, \cdots, C_n$ 全在 C_0 内部，且互不相交也互不包含



在 C_0 内部而在 $C_1, \cdots, C_n$ 外部的点集构成一个复通区域 D，它的边界包括以上各围线，称为复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$

其中 C_0 取正向，而 $C_1, \cdots, C_n$ 取反向，以便沿边界绕行时，C 所包围的区域 D 总是在左边

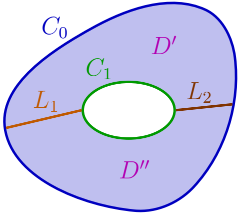
复通区域的 Cauchy 积分定理 设 D 是由复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 围成的复通区域，函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

或
$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

注 定理的条件可以减弱为 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续

复通区域 Cauchy 积分定理的证明



证明 考虑只有两条围线 C_0 和 C_1 的情况

- 作线段 L_1 和 L_2 连接 C_0 和 C_1
- 这样复通区域 D 就被分为单通区域 D' 和 D''
- 但注意 $D \neq D' \cup D''$
- $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析意味着它也在 $\bar{D}'$ 和 $\bar{D}''$ 上解析
- 根据 Cauchy 积分定理，有 $\displaystyle\int_{\partial D'} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D''} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$
- 所以 $\displaystyle\int_{\partial D'+\partial D''} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，其中 $\partial D' + \partial D'' = C_0 + C_1^- + L_1 + L_2 + L_1^- + L_2^-$
- 再由 $\displaystyle\int_{L_1+L_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ 和 $\displaystyle\int_{L_2+L_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ 得

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D'+\partial D''} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

- 对于更多条围线的情况，可以类似证明

例

以后说到 **Cauchy 积分定理**，就包括**复通区域**的情况

比较**复通区域** Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分定理的**等价表述**

可以看出，只要**积分路径**包括**全部**的**边界**，那么**复通**与**单通**情况下的 Cauchy 积分定理在**形式上**并**没有什么区别**

例

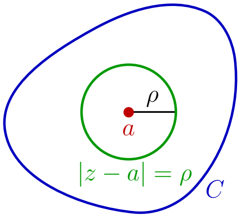
以后说到 Cauchy 积分定理，就包括复通区域的情况

比较复通区域 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分定理的等价表述

可以看出，只要积分路径包括全部的边界，那么复通与单通情况下的 Cauchy 积分定理在形式上并没有什么区别

例 对于任意包围 a 点的围线 C，由上面的定理可知

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & n=1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1 \end{cases}$$



例

以后说到 **Cauchy 积分定理**，就包括**复通区域**的情况

比较**复通区域** Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分定理的**等价表述**

可以看出，只要**积分路径**包括**全部**的**边界**，那么**复通**与**单通**情况下的 Cauchy 积分定理在**形式上**并**没有什么区别**

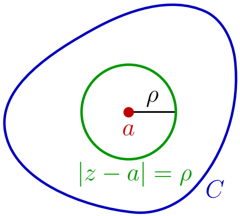
例 对于**任意包围** a **点**的**围线** C，由**上面的定理**可知

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1 \\ 0, & n\in\mathbb{Z},\ n\neq 1 \end{cases}$$

如果围线 C **不包围** a **点**，则积分显然为 0

于是，当 $n\neq 1$ 时，**无论**围线 C 是否包围 a 点，积分都是 0

但必须注意，对于 $n>1$，围线**不能经过** a **点**，否则**积分不存在**



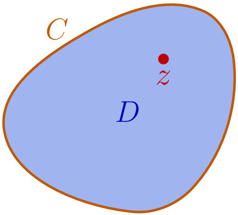
§4 Cauchy 积分公式及其推论

§4.1 Cauchy 积分公式

由 Cauchy 积分定理，可以推出下面的 Cauchy 积分公式，把它写成定理

定理 设区域 D 的边界是围线或复围线 C，函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析，则

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D}$$



§4 Cauchy 积分公式及其推论

§4.1 Cauchy 积分公式

由 Cauchy 积分定理，可以推出下面的 Cauchy 积分公式，把它写成定理

定理 设区域 D 的边界是围线或复围线 C，函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析，则

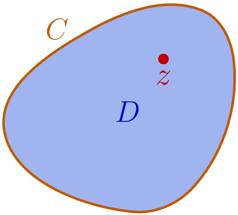
$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D}$$

注 这个 Cauchy 积分公式表明，对于解析函数，只要边界上的函数值给定，则区域内的函数值也就完全确定了

这说明函数值在各点的分布是互相牵制、紧密关联的

其实 Cauchy 积分定理也表明了这种关联

而上一章的 CR 条件则表明解析函数的实部和虚部也互相牵制、紧密关联，给定了其中一个，另一个也就确定了 (最多可差一常数项)



Cauchy 积分公式与 Cauchy 积分定理的等价性

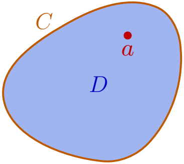
🔔 可见，解析性对于复变函数是一个**很强**的**限制**

🔊 在实变函数中，没有任何类似的结论，无论要求函数多么光滑，其变化都还是可以相当任意的，区间端点的函数值完全不能决定区间内部的函数值

Cauchy 积分公式与 Cauchy 积分定理的等价性

可见，解析性对于复变函数是一个**很强**的**限制**

在实变函数中，没有任何类似的结论，无论要求函数多么光滑，其变化都还是可以相当任意的，区间端点的函数值完全不能决定区间内部的函数值

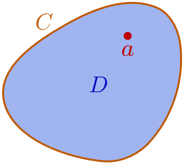


将 **Cauchy 积分公式**改写为 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(a),\ a\in D$，则可以用来计算某些积分

定理的条件可以减弱为 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续

Cauchy 积分公式与 Cauchy 积分定理的等价性

- 可见，解析性对于复变函数是一个**很强**的**限制**
- 在实变函数中，没有任何类似的结论，无论要求函数多么光滑，其变化都还是可以相当任意的，区间端点的函数值完全不能决定区间内部的函数值



- 将 **Cauchy 积分公式**改写为 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(a),\ a\in D$，则可以用来计算某些积分
- **定理**的条件可以减弱为 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续
- 由 **Cauchy 积分定理**可以推出 **Cauchy 积分公式**，见下面的**证明**
- 反过来，由 **Cauchy 积分公式**也可以推出 **Cauchy 积分定理**，所以两者是等价的
- 事实上，设 $F(z)$ 是 $\bar{D}$ 上的任意解析函数，则 $(z-a)F(z)$ 也是 $\bar{D}$ 上的解析函数，根据 **Cauchy 积分公式**，就有

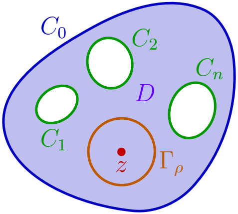
$$\int_C F(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{(z-a)F(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}[(z-a)F(z)]|_{z=a} = 0$$

- 这就是 **Cauchy 积分定理**

Cauchy 积分公式的证明

证明 设区域 D 的边界是复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$

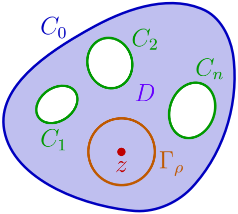
$\forall z \in D$，以 z 为中心，ρ 为半径作圆周 $\Gamma_\rho : |\zeta - z| = \rho$，使 Γ_ρ 在 C_0 内部，而在 $C_1, \cdots, C_n$ 的外部



Cauchy 积分公式的证明

证明 设区域 D 的边界是复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$

$\forall z \in D$，以 z 为中心，ρ 为半径作圆周 $\Gamma_\rho : |\zeta - z| = \rho$，使 Γ_ρ 在 C_0 内部，而在 $C_1, \cdots, C_n$ 的外部



令 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 $C + \Gamma_\rho^-$ 所围成的区域 (即区域 D 挖去闭圆 $|\zeta - z| \le \rho$ 后所剩余的点集) 及其边界上解析

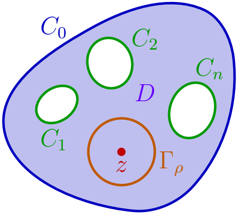
由 Cauchy 积分定理和复积分基本性质，有

$$0 = \int_{C+\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

所以 $\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$

Cauchy 积分公式的证明

证明 设区域 D 的边界是复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$



$\forall z \in D$，以 z 为中心，ρ 为半径作圆周 $\Gamma_\rho : |\zeta - z| = \rho$，使 Γ_ρ 在 C_0 内部，而在 $C_1, \cdots, C_n$ 的外部

令 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 $C + \Gamma_\rho^-$ 所围成的区域 (即区域 D 挖去闭圆 $|\zeta - z| \leq \rho$ 后所剩余的点集) 及其边界上解析

由 Cauchy 积分定理和复积分基本性质，有

$$0 = \int_{C+\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

所以 $\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$；另一方面，由 $\displaystyle\int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = 2\pi\mathrm{i}$ 得

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z) \int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 2\pi\mathrm{i} f(z)$$

继续证明

- 结合两式，推出 $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i} f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$
- 根据**复积分基本性质**，有

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i} f(z)\right| = \left|\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma_\rho} |f(\zeta) - f(z)|\,|\mathrm{d}\zeta|$$

继续证明

- 结合两式，推出 $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$
- 根据**复积分基本性质**，有

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}f(z)\right| = \left|\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma_\rho} |f(\zeta) - f(z)|\,|\mathrm{d}\zeta|$$

- 由于 $f(\zeta)$ 在 D 内**解析**，它必在 $\zeta = z$ 处**连续**
- 因此，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，有 $|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$
- 取 $\rho < \delta$，则 $|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ 在 Γ_ρ 上成立，于是

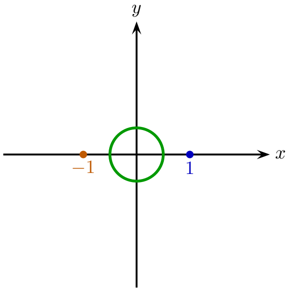
$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}\int_{\Gamma_\rho} |\mathrm{d}\zeta| = \varepsilon$$

- 这就是说，只要 ρ **足够小**，上式就成立；但**上式左边与 ρ 无关**，而 ε **可任意小**
- 所以**上式左边**必须为 0，即 $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$ **证毕**

例

例 计算积分 $I=\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$，其中围线 C 是

1. $|z|=\dfrac{1}{2}$
2. $|z-1|=\dfrac{1}{2}$
3. $|z+1|=\dfrac{1}{2}$
4. $|z|=2$

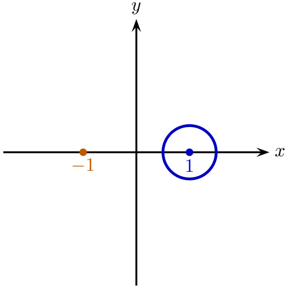


解 1 被积函数在围线 C 及其内部解析，故 $I=0$

例

💛 例 计算积分 $I=\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$，其中围线 C 是

1. $|z|=\dfrac{1}{2}$
2. $|z-1|=\dfrac{1}{2}$
3. $|z+1|=\dfrac{1}{2}$
4. $|z|=2$



🟨 解 1 被积函数在围线 C 及其内部解析，故 $I=0$

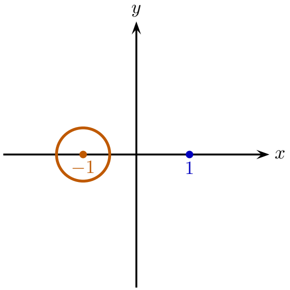
2 由 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(a)$ 得

$$I=\int_{|z-1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z-1|=1/2}\frac{1/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}=\pi\mathrm{i}$$

例

例 计算积分 $I=\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$，其中围线 C 是

1. $|z|=\frac{1}{2}$
2. $|z-1|=\frac{1}{2}$
3. $|z+1|=\frac{1}{2}$
4. $|z|=2$



解 1 被积函数在围线 C 及其内部解析，故 $I=0$

2 由 $\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(a)$ 得

$$I=\int_{|z-1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z-1|=1/2}\frac{1/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}=\pi\mathrm{i}$$

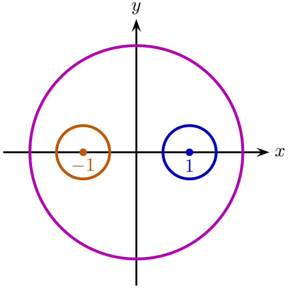
3 $I=\int_{|z+1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z+1|=1/2}\frac{1/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=-1}=-\pi\mathrm{i}$

例

💛 **例** 计算积分 $I=\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$，其中围线 C 是

1 $|z|=\frac{1}{2}$ 2 $|z-1|=\frac{1}{2}$

3 $|z+1|=\frac{1}{2}$ 4 $|z|=2$



解 1 被积函数在围线 C 及其内部解析，故 $I=0$

2 由 $\int_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(a)$ 得

$$I=\int_{|z-1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z-1|=1/2}\frac{1/(z+1)}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}=\pi\mathrm{i}$$

3 $I=\int_{|z+1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z+1|=1/2}\frac{1/(z-1)}{z+1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=-1}=-\pi\mathrm{i}$

4 由复通区域的 Cauchy 积分定理和 2 、3 的结果，得

$$I=\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z-1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}+\int_{|z+1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=0$$

§4.3 解析函数的高阶导数

- 前面曾经提到，解析函数存在各阶导数，即一次可微导致任意次可微
- 这是复变函数所特有的结论
- 边界上函数值不仅确定了所围区域内的函数值，也确定了其中各阶导数的函数值

§4.3 解析函数的高阶导数

- 前面曾经提到，解析函数存在各阶导数，即一次可微导致任意次可微
- 这是复变函数所特有的结论
- 边界上函数值不仅确定了所围区域内的函数值，也确定了其中各阶导数的函数值
- 下面关于高阶导数的定理给出这一结论的精确表述

定理 设区域 D 以围线或复围线 C 为边界，函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析，则 $f(z)$ 在区域 D 内有各阶导数，且

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D,\quad n=1,2,\cdots}$$

- 这就是 Cauchy 高阶导数公式
- **注** 将 Cauchy 积分公式 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$ 两边求导，对右边交换求导与积分的次序，立得一阶导数公式 $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$

讨论

- 继续求导，重复同样的操作，即得 Cauchy 高阶导数公式
- 但这样的做法显然是**不严格**的，因为求导与积分交换次序的合法性并未得到证明
- 然而，这一做法能帮助我们熟悉高阶导数公式，并使得我们能够在记得 Cauchy 积分公式的情况下立即将高阶导数公式“推导”出来

讨论

继续求导，重复同样的操作，即得 Cauchy 高阶导数公式

但这样的做法显然是**不严格**的，因为求导与积分交换次序的合法性并未得到证明

然而，这一做法能帮助我们熟悉高阶导数公式，并使得我们能够在记得 Cauchy 积分公式的情况下立即将高阶导数公式“推导”出来

更严格一些，以 $n=1$ 为例，对 z 和 $z+\Delta z$ 分别用 Cauchy 积分公式，可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\left\{\frac{[(\zeta-z)-(\zeta-z-\Delta z)]f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\right\}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\mathrm{d}\zeta$$

两边取 $\Delta z\to 0$ 的极限，对右边交换求极限与积分的次序，立得 Cauchy 一阶导数公式，但求极限与积分交换次序的合法性也未得到证明，严格的证明见选读内容

讨论

- 继续**求导**，**重复同样的操作**，即得 **Cauchy 高阶导数公式**
- 但这样的做法显然是**不严格**的，因为**求导与积分交换次序**的**合法性并未得到证明**
- 然而，这一做法能帮助我们熟悉高阶导数公式，并使得我们能够在记得 **Cauchy 积分公式**的情况下立即将**高阶导数公式**“推导”出来
- 更严格一些，以 $n=1$ 为例，对 z 和 $z+\Delta z$ 分别用 **Cauchy 积分公式**，可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\left\{\frac{[(\zeta-z)-(\zeta-z-\Delta z)]f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\right\}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\mathrm{d}\zeta$$

- 两边**取 $\Delta z\to 0$ 的极限**，对右边**交换求极限与积分的次序**，立得 **Cauchy 一阶导数公式**，但求极限与积分交换次序的**合法性也未得到证明**，严格的证明见**选读内容**
- 类似于 **Cauchy 积分公式**，**Cauchy 高阶导数公式**也可以用来**计算某些积分**
- **定理**的条件可减弱为 $f(z)$ 在**区域** D 内**解析**，在**闭域** $\bar{D}$ 上**连续**