量 子 场 论

第 3 章 Poincaré 对称性与粒子态

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2026 年 1 月 18 日

第 3 章 Poincaré 对称性与粒子态

- 本章介绍相对论性量子理论必须满足的 Poincaré 对称性
- 首先研究量子 Poincaré 变换
- 相关讨论会涉及到量子 Lorentz 变换、Lorentz 代数和 Poincaré 代数
- Lorentz 代数与 Lorentz 群的表示理论密切相关，而后者对于深入理解各种量子场是必要的知识
- 在量子理论中，粒子由 Hilbert 空间中的态矢描述
- 相对论性的粒子运动与量子 Poincaré 变换对态矢的作用有关，由此可以为单粒子态分类

3.1 节 量子 Poincaré 变换

1.7.2 小节提到，时空坐标的 **Poincaré 变换** (Λ, a) 为 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

它是 **Lorentz 变换** Λ 和**时空平移变换** a 的组合

如果**量子系统**具有 **Poincaré 对称性**，即同时具有 **Lorentz 对称性**和**时空平移对称性**，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在 **Hilbert 空间**中诱导出**态矢** $|\Psi\rangle$ 的**线性幺正变换**

$\boxed{|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle}$，其中 Λ 为**固有保时向** Lorentz 变换

$U(\Lambda, a)$ 描述**量子 Poincaré 变换**，它是一个**线性幺正算符**，满足

$$U^\dagger(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^\dagger(\Lambda, a) = \mathbb{I}, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^\dagger(\Lambda, a)$$

3.1 节　量子 Poincaré 变换

1.7.2 小节提到，时空坐标的 **Poincaré 变换** (Λ, a) 为 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}$

它是 **Lorentz 变换** Λ 和**时空平移变换** a 的组合

如果**量子系统**具有 **Poincaré 对称性**，即同时具有 **Lorentz 对称性**和**时空平移对称性**，那么 Poincaré 变换 (Λ, a) 在 **Hilbert 空间**中诱导出**态矢** $|\Psi\rangle$ 的**线性幺正变换** $\boxed{|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle}$，其中 Λ 为**固有保时向** Lorentz 变换

$U(\Lambda, a)$ 描述**量子 Poincaré 变换**，它是一个**线性幺正算符**，满足

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^{\dagger}(\Lambda, a) = \mathbb{I}, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^{\dagger}(\Lambda, a)$$

$U(\Lambda, a)$ 的幺正性保证**态矢的内积**在量子 Poincaré 变换下**不变**

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\,U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle$$

$U(\mathbf{1}, 0) = \mathbb{I}$ 是**恒等算符**，$U(\mathbf{1}, a)$ 描述**量子时空平移变换**

$a^{\mu} = 0$ 对应于 Lorentz 变换，因此 $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$ 描述**量子 Lorentz 变换**

它满足 $U^{-1}(\Lambda) = U^{\dagger}(\Lambda)$

同态关系

- 对时空坐标先作 **Poincaré 变换** (Λ_1, a_1)，得到 $x'^{\mu} = (\Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a_1^{\mu}$
- 再作 **Poincaré 变换** (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^{\mu} = (\Lambda_2)^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} + a_2^{\mu} = (\Lambda_2)^{\mu}{}_{\nu} [(\Lambda_1)^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} + a_1^{\nu}] + a_2^{\mu} = (\Lambda_2 \Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + (\Lambda_2)^{\mu}{}_{\nu} a_1^{\nu} + a_2^{\mu}$$

- 这相当于作 **Poincaré 变换** $(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$

同态关系

- 对时空坐标**先作 Poincaré 变换** (Λ_1, a_1)，得到 $x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu$
- **再作 Poincaré 变换** (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu[(\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu$$

- 这相当于作 **Poincaré 变换** $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，而 **Poincaré 对称性**的存在意味着**同态关系**

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

- 将 $U(\Lambda, a)$ 视作无限维矩阵，则集合 $\{U(\Lambda, a)\}$ 和 $\{U(\Lambda)\}$ 分别构成 **Poincaré 群**和 **Lorentz 群**的**无限维幺正线性表示**

同态关系

对时空坐标**先作 Poincaré 变换** (Λ_1, a_1)，得到 $x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu$

再作 Poincaré 变换 (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu[(\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu$$

这相当于作 **Poincaré 变换** $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，而 **Poincaré 对称性**的存在意味着**同态关系**

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

将 $U(\Lambda, a)$ 视作无限维矩阵，则集合 $\{U(\Lambda, a)\}$ 和 $\{U(\Lambda)\}$ 分别构成 **Poincaré 群**和 **Lorentz 群**的**无限维幺正线性表示**。根据

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = \mathbb{I} = U(\mathbf{1}, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$$

推出**逆变换算符**

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a), \quad U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda^{-1})$$

生成元算符

- 无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是 $\Lambda = \mathbf{1} + \omega$
- 无穷小时空平移变换表达为 $a^\mu = \varepsilon^\mu$，其中 ω 和 ε^μ 是无穷小量
- 从而，无穷小 Poincaré 变换 $(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)$ 诱导的无穷小幺正算符为

$$\boxed{U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)} = \mathbb{I} + \frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\frac{\partial U(\Lambda,a)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0} + \varepsilon_\mu\,\frac{\partial U(\Lambda,a)}{\partial\varepsilon_\mu}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0}$$

$$= \boxed{\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu}$$

Brook Taylor
(1685–1731)

- 这是在 $(\omega_{\mu\nu}, \varepsilon_\rho) = (0,0)$ 附近对 $U(\Lambda, a)$ 作 Taylor 级数
- 上式只展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的一阶项，而

$$J^{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}\,\frac{\partial U(\Lambda,a)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0} \quad 和 \quad P^\mu \equiv -\mathrm{i}\,\frac{\partial U(\Lambda,a)}{\partial\varepsilon_\mu}\bigg|_{\omega=\varepsilon=0}$$

分别是量子 Lorentz 变换和量子时空平移变换的生成元算符

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的厄米性

根据 1.7.3 小节讨论，实参数 $\omega_{\mu\nu}$ 是**反对称**的，故 $J^{\mu\nu} = \mathrm{i}\left.\dfrac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega=\varepsilon=0}$ 也是**反对称**的，$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$

于是，$J^{\mu\nu}$ 有 **6 个独立分量**，而 P^μ 有 **4 个独立分量**

由 $U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)$ 的**幺正性**推出

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} &= U^\dagger(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)\\
&= \left[\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\dagger - \mathrm{i}\varepsilon_\mu (P^\mu)^\dagger\right]\left[\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right]\\
&= \mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[(J^{\mu\nu})^\dagger - J^{\mu\nu}] - \mathrm{i}\varepsilon_\mu[(P^\mu)^\dagger - P^\mu]
\end{aligned}$$

最后一步**忽略**了 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的**二阶项**

可见，$(J^{\mu\nu})^\dagger = J^{\mu\nu}$，$(P^\mu)^\dagger = P^\mu$，即 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的所有分量都是**厄米算符**

故 $U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) = U^\dagger(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) = \mathbb{I} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu$

无穷小变换的相似变换

- 根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，有

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, (\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] \\
&= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\
&= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)
\end{aligned}
$$

无穷小变换的相似变换

- 根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，有

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, (\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] \\ &= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\ &= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) \end{aligned}$$

- 对上式左边和最后一步分别展开，得

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U^{-1}(\Lambda, a)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right)U(\Lambda, a)$$

$$= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) + \mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)$$

$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) = \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu$$

无穷小变换的相似变换

根据逆变换表达式和同态关系 $U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，有

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, (\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] \\
&= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon] - \Lambda^{-1}a\} \\
&= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)
\end{aligned}
$$

对上式左边和最后一步分别展开，得

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) &= U^{-1}(\Lambda, a)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right)U(\Lambda, a) \\
&= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) + \mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)
\end{aligned}
$$

$$
U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon) = \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a + \Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu
$$

利用 $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma$，有

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)^\alpha{}_\nu J^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta\,\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu} \\
&= g_{\mu\alpha}g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\,\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu\,\omega_{\rho\gamma}\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Poincaré 变换

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= g_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= \delta^\beta{}_\mu\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega_{\alpha\sigma}a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha P^\mu)=\omega_{\alpha\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\\
&= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Poincaré 变换

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= g_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\
&= \delta^\beta{}_\mu\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega_{\alpha\sigma}a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha P^\mu)=\omega_{\alpha\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\\
&= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)\\
&=\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu\\
&=\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\mathrm{i}\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a)\\
&=\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)+\mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)
\end{aligned}
$$

比较，推出

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a) &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}-\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho+\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho\\
U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a) &= \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned}
$$

$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 Lorentz 变换

取 $a^\mu = 0$，得

$$U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$$
$$U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$$

因此，生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ **在态矢 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ 上的期待值**与它们**在态矢 $|\Psi\rangle$ 上的期待值**之间的关系为

$$\langle\Psi'|J^{\mu\nu}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\langle\Psi|J^{\rho\sigma}|\Psi\rangle$$
$$\langle\Psi'|P^\mu|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu\langle\Psi|P^\nu|\Psi\rangle$$

可将 $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)$ 和 $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)$ 分别看作由**态矢的量子 Lorentz 变换**诱导出来的 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 算符的 **Lorentz 变换**，即

$$J'^{\mu\nu} \equiv U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P'^\mu \equiv U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$$

这表明 $J^{\mu\nu}$ 是一个 **2 阶 Lorentz 张量**，而 P^μ 是一个 **Lorentz 矢量**

3.2 节 Lorentz 代数和 Poincaré 代数

- 研究 $U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)=\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}-\Lambda^{\mu}{}_{\rho}a^{\nu}P^{\rho}+\Lambda^{\nu}{}_{\rho}a^{\mu}P^{\rho}$ 的无穷小形式
- 考虑**无穷小 Poincaré 变换**，忽略二阶小量，$U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)$ 化为

$$\begin{aligned}
&U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)J^{\mu\nu}U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)\\
&=\left(\mathbb{I}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}-\mathrm{i}\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}\right)J^{\mu\nu}\left(\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}+\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha}P^{\alpha}\right)\\
&=J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}J^{\mu\nu}+\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha}J^{\mu\nu}P^{\alpha}-\mathrm{i}\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}J^{\mu\nu}\\
&=J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]+\mathrm{i}\varepsilon_{\rho}[J^{\mu\nu},P^{\rho}]
\end{aligned}$$

- 利用 $J^{\mu\nu}$ 和 $\omega_{\mu\nu}$ 的**反对称性**，$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}$ 变成

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}\\
&=(\delta^{\mu}{}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma}+\omega^{\nu}{}_{\sigma})J^{\rho\sigma}=\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\delta^{\mu}{}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+\omega^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}\\
&=J^{\mu\nu}+\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\mu\sigma}+\omega^{\mu}{}_{\rho}J^{\rho\nu}=J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\omega_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}\\
&=J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})
\end{aligned}$$

生成元算符的对易关系

- 利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性，得

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma} &= J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ &= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})+\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}) \\ &= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})\end{aligned}$$

- $-\Lambda^{\mu}{}_{\rho}a^{\nu}P^{\rho}+\Lambda^{\nu}{}_{\rho}a^{\mu}P^{\rho}$ 化为

$$\begin{aligned}-(\mathbf{1}+\omega)^{\mu}{}_{\rho}\varepsilon^{\nu}P^{\rho}+(\mathbf{1}+\omega)^{\nu}{}_{\rho}\varepsilon^{\mu}P^{\rho} &= -(\delta^{\mu}{}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho})\varepsilon^{\nu}P^{\rho}+(\delta^{\nu}{}_{\rho}+\omega^{\nu}{}_{\rho})\varepsilon^{\mu}P^{\rho} \\ &= -\varepsilon^{\nu}P^{\mu}+\varepsilon^{\mu}P^{\nu} = -\varepsilon_{\rho}(g^{\nu\rho}P^{\mu}-g^{\mu\rho}P^{\nu})\end{aligned}$$

- 比较上面各式，由 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ε_{ρ} 的任意性推出生成元算符的对易关系

$$\begin{aligned}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ [J^{\mu\nu},P^{\rho}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}P^{\mu}-g^{\mu\rho}P^{\nu})\end{aligned}$$

Lorentz 代数

可将 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的**对易关系**改写为

$$\boxed{\begin{aligned}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ &= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma)\end{aligned}}$$

$(\mu \leftrightarrow \nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}$

同理，$(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $\mathrm{i}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

这个**等式右边**既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ,ν) 和 (ρ,σ) 反对称，这样的**反对称性**与**等式左边**一致

Lorentz 代数

可将 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的**对易关系**改写为

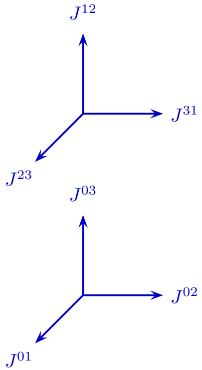
$$\begin{aligned}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ &= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)] - (\rho \leftrightarrow \sigma)\end{aligned}$$

线性空间 $+$ **矢量乘法** $=$ **代数**

$(\mu \leftrightarrow \nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}$

同理，$(\rho \leftrightarrow \sigma)$ 表示将前面的项 $\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $\mathrm{i}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

这个**等式右边**既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ,ν) 和 (ρ,σ) 反对称，这样的**反对称性**与**等式左边**一致



以生成元 $J^{\mu\nu}$ 的 **6 个独立分量**作为**基底**张成**线性空间**，空间中的任意矢量是 $J^{\mu\nu}$ 的**线性组合**，用**以上对易关系**定义**矢量乘法**，则任意矢量乘积仍是此空间中的矢量，即乘法运算是**封闭**的，称此线性空间为 **Lorentz 代数**

Lie 群

- **Lie 群**是一类特殊的连续群
- n **维 Lie 群**的群空间由 n **个独立的连续实参数** θ^a $(a = 1, 2 \cdots, n)$ 描述，具有 n **维微分流形**的结构
- $\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(N)$ 是 $N(N-1)/2$ **维** Lie 群
- $\mathrm{U}(N)$ 是 N^2 **维** Lie 群，$\mathrm{SU}(N)$ 是 N^2-1 **维** Lie 群

Sophus Lie
(1842–1899)

Lie 群

- **Lie 群**是一类特殊的连续群
- n **维 Lie 群**的群空间由 n **个独立的连续实参数** θ^a $(a = 1, 2 \cdots, n)$ 描述，具有 n **维微分流形**的结构
- $\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(N)$ 是 $N(N-1)/2$ **维** Lie 群
- $\mathrm{U}(N)$ 是 N^2 **维** Lie 群，$\mathrm{SU}(N)$ 是 N^2-1 **维** Lie 群

对于 n 维 Lie 群的一个 m **维线性表示**，在单位矩阵 $\mathbf{1}$ 附近，无穷小变换对应的表示矩阵可展开为

$$\mathbf{1} + \mathrm{i}\theta^a t^a + \mathcal{O}(\theta^a \theta^b)$$

t^a 是 n **个**独立的 m **阶生成元矩阵**，具有**对易关系**

$$\boxed{[t^a, t^b] = \mathrm{i} f^{abc} t^c, \quad a, b, c = 1, 2, \cdots, n}$$

f^{abc} 是一组实数，称为**结构常数** (structure constant)，满足 $f^{abc} = -f^{bac}$

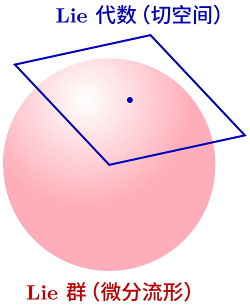
Sophus Lie
(1842–1899)

Lie 代数

- 不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵
- 同一个 Lie 群所有非平庸表示的结构常数都是一样的，它们描述 Lie 群的局域性质
- 如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则结构常数都是零

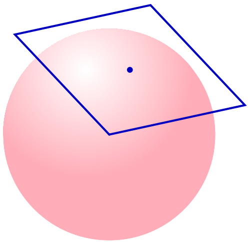
Lie 代数

- 不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵
- 同一个 Lie 群所有非平庸表示的结构常数都是一样的，它们描述 Lie 群的局域性质
- 如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则结构常数都是零
- 生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种乘法运算
- 以生成元为基底张成的线性空间对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**
- **Lie 代数**刻画 **Lie 群**在恒元附近的局域结构，对应着微分流形在恒元处的切空间



Lie 代数

- 不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵
- 同一个 Lie 群所有非平庸表示的结构常数都是一样的，它们描述 Lie 群的局域性质
- 如果一个 Lie 群是 **Abel 群**，则结构常数都是零
- 生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种乘法运算
- 以生成元为基底张成的线性空间对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**
- **Lie 代数**刻画 **Lie 群**在恒元附近的局域结构，对应着微分流形在恒元处的切空间



- **Lorentz 群**是一个 **6 维 Lie 群**
- 它对应的 **Lie 代数**就是 **Lorentz 代数**
- Lorentz 群任何线性表示的生成元都要满足相同形式的 **Lorentz 代数关系**

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

- 反过来，通过构造满足上式的生成元矩阵，就可以生成 Lorentz 群的线性表示

三维矢量生成元算符

把生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量组合成 2 个三维矢量算符

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}, \quad K^i \equiv J^{0i}$$

即 $\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$，$\mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03})$

纯空间部分的生成元 J^i 与 J^j 的对易关系为

$$\begin{aligned}
[J^i, J^j] &= \frac{1}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}[J^{kl}, J^{mn}] = \frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}\{[g^{lm}J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] - (m \leftrightarrow n)\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}[g^{lm}J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}g^{lm}J^{kn} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jln}J^{kn} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jnl}J^{kn} = \mathrm{i}(\delta^{ij}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{kj})J^{kn} = -\mathrm{i}J^{ji} = \mathrm{i}J^{ij}
\end{aligned}$$

由 $J^{23} = J^1 = \varepsilon^{231}J^1$、$J^{31} = J^2 = \varepsilon^{312}J^2$ 和 $J^{12} = J^3 = \varepsilon^{123}J^3$ 归纳出

$$J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k$$

从而得到

$$\boxed{[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k}$$

量子旋转变换

- 引入 2 个三维矢量　$\theta^i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}$
- 即　$\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03})$
- $\theta^1 = -\omega_{23}$、$\theta^2 = -\omega_{31}$、$\theta^3 = -\omega_{12}$ 分别是绕 x 轴、y 轴、z 轴转动的**角度**
- $\xi^1 = -\omega_{01}$、$\xi^2 = -\omega_{02}$、$\xi^3 = -\omega_{03}$ 分别是沿 x 轴、y 轴、z 轴增速的**快度**
- 从而，**无穷小量子 Lorentz 变换**化为

$$
\begin{aligned}
U(\mathbf{1}+\omega) &= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\
&= \mathbb{I} - \mathrm{i}\omega_{23}J^{23} - \mathrm{i}\omega_{31}J^{31} - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} - \mathrm{i}\omega_{01}J^{01} - \mathrm{i}\omega_{02}J^{02} - \mathrm{i}\omega_{03}J^{03} \\
&= \mathbb{I} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K}
\end{aligned}
$$

量子旋转变换

引入 2 个三维矢量 $\theta^i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}$

即 $\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03})$

$\theta^1 = -\omega_{23}$、$\theta^2 = -\omega_{31}$、$\theta^3 = -\omega_{12}$ 分别是绕 x 轴、y 轴、z 轴转动的角度

$\xi^1 = -\omega_{01}$、$\xi^2 = -\omega_{02}$、$\xi^3 = -\omega_{03}$ 分别是沿 x 轴、y 轴、z 轴增速的快度

从而，无穷小量子 Lorentz 变换化为

$$
\begin{aligned}
U(\mathbf{1}+\omega) &= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\
&= \mathbb{I} - \mathrm{i}\omega_{23}J^{23} - \mathrm{i}\omega_{31}J^{31} - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} - \mathrm{i}\omega_{01}J^{01} - \mathrm{i}\omega_{02}J^{02} - \mathrm{i}\omega_{03}J^{03} \\
&= \mathbb{I} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K}
\end{aligned}
$$

对于绕 z 轴的旋转变换 $R_z(\theta^3)$，$\theta^1 = \theta^2 = \xi^i = 0$，而 θ^3 取有限值

则 $U[R_z(\theta^3)] = \mathbb{I} + \mathrm{i}\theta^3 J^3 + \mathcal{O}[(\theta^3)^2]$，故 $\left.\frac{\mathrm{d}U[R_z(\theta^3)]}{\mathrm{d}\theta^3}\right|_{\theta^3=0} = \mathrm{i}J^3$

满足上式和 $U[R_z(0)] = \mathbb{I}$ 的量子旋转变换是 $U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3)$

$e^{A+B} = e^A e^B$ 对 $[A, B] = 0$ 成立

- 若两个**算符** A **和** B **相互对易**，即 $[A, B] = 0$，则**二项式定理**给出

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j A^j B^{n-j}, \quad C_n^j \equiv \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

- **阶乘**的定义可以推广到**负整数**：对于**整数** $m < 0$，定义 $m! \to \infty$，则 $\dfrac{1}{m!} \to 0$
- 从而，对于 $j > n$，有 $[(n-j)!]^{-1} \to 0$
- 这样一来，可以将以上级数化成**无穷级数**，$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}$

$e^{A+B}=e^Ae^B$ 对 $[A,B]=0$ 成立

- 若两个算符 A 和 B 相互对易，即 $[A,B]=0$，则二项式定理给出

$$(A+B)^n=\sum_{j=0}^{n}C_n^jA^jB^{n-j},\quad C_n^j\equiv\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

- 阶乘的定义可以推广到负整数：对于整数 $m<0$，定义 $m!\to\infty$，则 $\dfrac{1}{m!}\to 0$
- 从而，对于 $j>n$，有 $[(n-j)!]^{-1}\to 0$
- 这样一来，可以将以上级数化成无穷级数，$(A+B)^n=\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}$
- 由此推出

$$e^{A+B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{j!(n-j)!}A^jB^{n-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{n-j}}{(n-j)!}\right]=e^Ae^B$$

- 即

$$\boxed{e^{A+B}=e^Ae^B\ \text{对}\ [A,B]=0\ \text{成立}}$$

- 值得注意的是，上式不仅对相互对易的算符成立，也对相互对易的同阶方阵成立

相继作两次量子旋转变换

现在考虑对态矢**相继作两次绕 z 轴**的**量子旋转变换**，由 $[J^3, J^3] = 0$ 推出

$$U[R_z(\tilde{\theta}^3)]U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\tilde{\theta}^3 J^3)\exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3) = \exp[\mathrm{i}(\theta^3 + \tilde{\theta}^3)J^3] = U[R_z(\theta^3 + \tilde{\theta}^3)]$$

上式表明，绕着 z 轴**先转动 θ^3 角**，**再转动 $\tilde{\theta}^3$ 角**

就相当于绕着 z 轴**直接转动角度 $\theta^3 + \tilde{\theta}^3$**，这样的结果是**正确**的

因而将**量子旋转变换**表达成**指数形式** $U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3)$ 是**合理**的

总角动量算符

- 1.7.3 小节提到，**空间旋转对称性**对应着**角动量守恒定律**
- $U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3)$ 表明 J^3 就是总角动量算符在 z **轴**上的分量
- 同理，J^1 和 J^2 分别是总角动量算符在 x 轴和 y 轴上的分量
- 也就是说，**生成元算符 $\mathbf{J}$** 就是**总角动量算符**
- **空间旋转群 $\mathbf{SO(3)}$** 是固有保时向 Lorentz 群在**纯空间部分**的**子群**
- 总角动量算符 $\mathbf{J}$ 是**量子空间旋转变换**的生成元算符
- $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} J^k$ 就是 3 维 Lie 群 $\mathbf{SO(3)}$ 的 **Lie 代数**关系
- 相应的**结构常数**是 **Levi-Civita 符号** ε^{ijk}

SU(2) 群的基础表示

- **SO(3) 群** 与 3 维 Lie 群 **SU(2)** 有着紧密的联系
- 在 SU(2) 群**基础表示**中，**生成元矩阵**表达为 $\tau^i \equiv \dfrac{\sigma^i}{2}$
- 其中 σ^i 是 3 个 2×2 的 **Pauli 矩阵**，

$$\boxed{\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}$$

- 它们都是既**厄米**又**幺正**的，$(\sigma^i)^{-1} = (\sigma^i)^\dagger = \sigma^i$
- Pauli 矩阵的**两两乘积**为

$$\begin{aligned}
(\sigma^1)^2 &= (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = \mathbf{1} \\
\sigma^1\sigma^2 &= \mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^2\sigma^3 = \mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^3\sigma^1 = \mathrm{i}\sigma^2 \\
\sigma^2\sigma^1 &= -\mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^3\sigma^2 = -\mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^1\sigma^3 = -\mathrm{i}\sigma^2
\end{aligned}$$

- 归纳起来，有 $\boxed{\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k}$，**右边第一项省略了** 2×2 **单位矩阵** $\mathbf{1}$

Wolfgang Ernst Pauli
(1900–1958)

SU(2) 和 SO(3) 的局域性质

由 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ 推出

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k - \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} \equiv \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k + \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\delta^{ij}$$

于是，**SU(2) 生成元** τ^i 的**对易关系**为

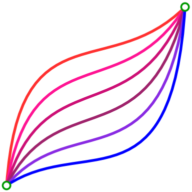
$$[\tau^i, \tau^j] = \frac{1}{4}[\sigma^i, \sigma^j] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma^k = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\tau^k$$

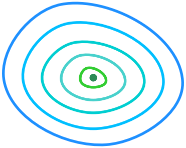
与 $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$ 比较发现，**SU(2) 群**的 **Lie 代数关系**与 **SO(3) 群完全一致**，即 SU(2) 群和 SO(3) 群具有**相同的李代数**

这意味着 SU(2) 群在**恒元附近的局域性质**与 SO(3) 群**一样**

单连通和双连通

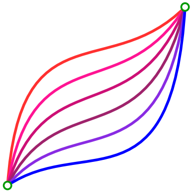
- 但是，SU(2) 群的**整体拓扑性质**与 SO(3) 群**不一样**
- SU(2) 和 SO(3) 的**群空间**都是**连通**的，根据 1.3 节的说法，它们都是**简单 Lie 群**
- 更仔细地讲，**SU(2)** 的群空间是**单连通**的
- **连接**群空间中**两点**的任意**两条曲线**可以**连续地形变成彼此**
- 等价地，群空间内任意一条**闭合曲线**可以**连续地收缩为一点**

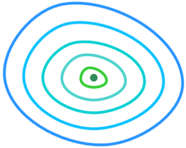




单连通和双连通

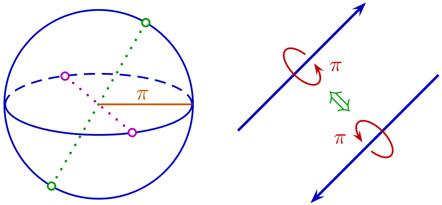
- 但是，SU(2) 群的**整体拓扑性质**与 SO(3) 群**不一样**
- SU(2) 和 SO(3) 的**群空间**都是**连通**的，根据 1.3 节的说法，它们都是**简单 Lie 群**
- 更仔细地讲，**SU(2)** 的群空间是**单连通**的
- **连接**群空间中**两点**的任意**两条曲线**可以**连续地形变成彼此**
- 等价地，群空间内任意一条**闭合曲线**可以**连续地收缩为一点**
- **SO(3)** 的群空间是**双连通**的，即**连通度**为 **2**
- 连接群空间中两点的曲线分成 **2 类**，**同一类**曲线能够连续地变化成彼此，**不同类**曲线则不能
- 相应地，闭合曲线也分为 2 类，有一类**能**连续收缩成一点，另一类**不能**





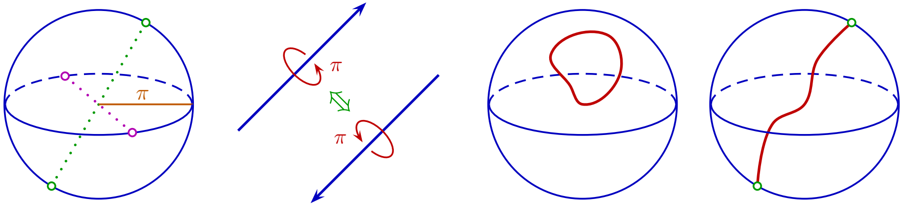
SO(3) 群空间

- 具体来说，SO(3) 的**群空间**是**半径为 π 的球体**
- 球体里每一点的**极角和方位角**代表转动轴的**方向**，**径向坐标**代表绕轴转动的**角度**
- 由于绕某个轴**转动 π 角**与绕**方向相反**的另一个轴**转动 π 角**这两个旋转变换是**一样**的，球面上直径两端的点对应于**同一个群元**，这样的点称为**对径点**



SO(3) 群空间

- 具体来说，SO(3) 的群空间是半径为 π 的球体
- 球体里每一点的极角和方位角代表转动轴的方向，径向坐标代表绕轴转动的角度
- 由于绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这两个旋转变换是一样的，球面上直径两端的点对应于同一个群元，这样的点称为对径点



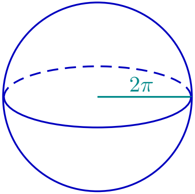
- 如果一条闭合曲线上的点都不在球面上，那么曲线可以连续收缩成一点
- 如果一条闭合曲线通过球面上的某个点跳跃到它的对径点以形成闭合路径，那么对曲线进行连续形变时，参与跳跃的两个对径点只能成对地在球面上移动，不能通过连续形变消除这种跳跃，于是曲线不能连续收缩成一点

动画演示

SU(2) 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 -1，见习题 3.3 和 3.5

即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃

故任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1

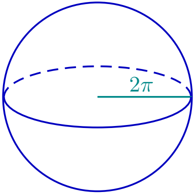


覆盖群

$\mathrm{SU}(2)$ 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 -1，见习题 3.3 和 3.5

即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃

故任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1

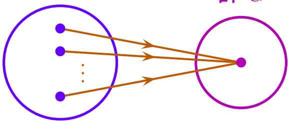


在数学上可以证明，如果简单 Lie 群 G 的群空间是 n 度连通的 $(n > 1)$，那么必然存在一个单连通的简单 Lie 群 G' 与之同态，即 $G' \sim G$

同态对应关系为 $n:1$，即 G' 中的 n 个元素对应于 G 中的 1 个元素

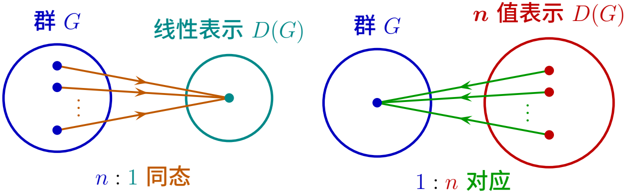
此时称 G' 为 G 的覆盖群 (covering group)

而 G' 的忠实表示是 G 的 n 值表示，且 G' 与 G 具有相同的 Lie 代数



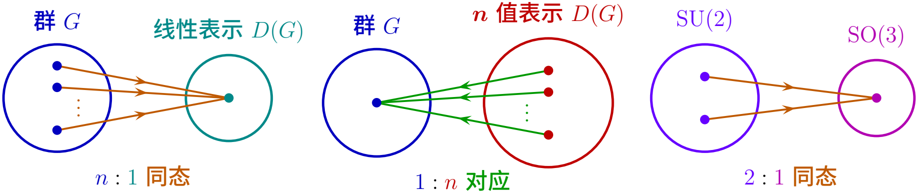
SU(2) 与 SO(3) 的同态关系

- 在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的同态对应关系
- 但是，在群的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系
- 因此，n 值表示不是线性表示



SU(2) 与 SO(3) 的同态关系

- 在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的同态对应关系
- 但是，在群的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系
- 因此，n 值表示不是线性表示



- **SU(2)** 群与 **SO(3)** 群具有一种 $2:1$ 的同态关系，$\mathrm{SU}(2)\sim\mathrm{SO}(3)$，见习题 **3.4**
- **SO(3)** 任意一个群元同态地对应于 **SU(2)** 的两个群元
- 因此 **SU(2)** 是 **SO(3)** 的覆盖群，**SU(2)** 的忠实表示是 **SO(3)** 的双值表示

增速算符

- 回到生成元算符的讨论，**K** 是**增速算符**，**总角动量算符 J** 与它的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[J^i, K^j] &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikl}[J^{kl}, J^{0j}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ikl}\{[g^{l0}J^{kj} - (k\leftrightarrow l)] - (0\leftrightarrow j)\} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}[g^{l0}J^{kj} - (0\leftrightarrow j)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj} - g^{lj}J^{k0}) = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}g^{lj}J^{k0} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikj}J^{k0} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^{0k} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k
\end{aligned}
$$

增速算符

回到生成元算符的讨论，**K** 是增速算符，总角动量算符 **J** 与它的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[J^i, K^j] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}[J^{kl}, J^{0j}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ikl}\{[g^{l0}J^{kj} - (k \leftrightarrow l)] - (0 \leftrightarrow j)\} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}[g^{l0}J^{kj} - (0 \leftrightarrow j)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj} - g^{lj}J^{k0}) = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}g^{lj}J^{k0} \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{ikj}J^{k0} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^{0k} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k
\end{aligned}
$$

而 **K** 自身的对易关系为

$$
\begin{aligned}
[K^i, K^j] &= [J^{0i}, J^{0j}] = \mathrm{i}(g^{i0}J^{0j} - g^{00}J^{ij} - g^{ij}J^{00} + g^{0j}J^{i0}) \\
&= -\mathrm{i}J^{ij} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k
\end{aligned}
$$

归纳起来，有

$$
\boxed{[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k}
$$

这是 Lorentz 代数关系的另一种表达方式，它符合标准形式 $[t^a, t^b] = \mathrm{i}f^{abc}t^c$

可见，三个生成元 J^i 自己就能构成封闭的代数，而三个生成元 K^i 则不能

对易子 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}]$ 和 $[P^\mu, P^\nu]$

🚧 下面研究 $U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的无穷小形式

🛤 考虑**无穷小 Poincaré 变换**，忽略二阶小量，$U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)$ 化为

$$\begin{aligned}
& U^{-1}(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon)P^\mu U(\mathbf{1}+\omega, \varepsilon) \\
&= \left(\mathbb{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta} - \mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right) P^\mu \left(\mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} + \mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right) \\
&= P^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu + \mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha - \mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu \\
&= P^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu, J^{\rho\sigma}] + \mathrm{i}\varepsilon_\nu[P^\mu, P^\nu]
\end{aligned}$$

对易子 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}]$ 和 $[P^\mu, P^\nu]$

- 下面研究 $U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)=\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 的无穷小形式
- 考虑**无穷小 Poincaré 变换**，忽略二阶小量，$U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a)$ 化为

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)P^\mu U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)\\
&=\left(\mathbb{I}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}-\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)P^\mu\left(\mathbb{I}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}+\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right)\\
&=P^\mu-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu+\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha-\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu\\
&=P^\mu-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu,J^{\rho\sigma}]+\mathrm{i}\varepsilon_\nu[P^\mu,P^\nu]
\end{aligned}
$$

- $\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 变成 $(\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu+\omega^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu+\omega_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}P^\sigma$

$$
= P^\mu+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho)
$$

- 两相比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的**任意性**推出生成元算符的对易关系

$$
[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=\mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho),\quad [P^\mu,P^\nu]=0
$$

- 注意，第一个对易关系**等价于**前面推出的 $[J^{\mu\nu},P^\rho]=\mathrm{i}(g^{\nu\rho}P^\mu-g^{\mu\rho}P^\nu)$

Poincaré 代数

以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的 **10 个独立分量**作为**基底**张成**线性空间**，用对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

$$[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^{\sigma} - g^{\mu\sigma}P^{\rho}), \quad [P^{\mu}, P^{\nu}] = 0$$

定义**矢量乘法**，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数

Lorentz 代数是 **Poincaré 代数**的**子代数**

Poincaré 代数

以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的 **10 个独立分量**作为**基底**张成**线性空间**，用对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

$$[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^{\sigma} - g^{\mu\sigma}P^{\rho}), \quad [P^{\mu}, P^{\nu}] = 0$$

定义**矢量乘法**，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数

Lorentz 代数是 **Poincaré 代数**的**子代数**

令 $H \equiv P^0$，则 $P^{\mu} = (H, \mathbf{P})$，进一步推出

$$[P^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}P^k, \quad [P^i, K^j] = \mathrm{i}\delta^{ij}H, \quad [H, K^i] = \mathrm{i}P^i$$

$$[H, J^i] = [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0$$

结合 **Lorentz 代数关系**

$$[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$$

就得到 **Poincaré 代数关系**的另一种表达方式

量子时间平移变换

🚏 当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (t_*, \mathbf{0})$ 时，$P^\mu \equiv -\mathrm{i} \left. \frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu} \right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0}$ 意味着

$$\left. \frac{\mathrm{d}U(\mathbf{1}, a)}{\mathrm{d}t_*} \right|_{t_*=0} = \mathrm{i}H$$

🚍 满足上式和 $U(\mathbf{1}, 0) = \mathbb{I}$ 的**量子时间平移变换**是

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(\mathrm{i}Ht_*)$$

🚌 它的作用是将态矢从 t 时刻**平移**到 $t' = t + t_*$ 时刻

🚎 1.7.2 小节提到，**时间平移对称性**对应着**能量守恒定律**

🚗 因而生成元算符 H 就是**哈密顿量算符**

量子空间平移变换

- 当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时，

$$P^\mu \equiv -\mathrm{i} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \text{意味着} \left.\frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial x_*^i}\right|_{\mathbf{x}_*=\mathbf{0}} = -\mathrm{i} P^i$$

- 注意到 $[P^i, P^j] = 0$，满足上式和 $U(\mathbf{1}, 0) = \mathbb{I}$ 的量子空间平移变换表达为

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}P^1 x_*^1) \exp(-\mathrm{i}P^2 x_*^2) \exp(-\mathrm{i}P^3 x_*^3) = \exp(-\mathrm{i}\, \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*)$$

- 它将态矢从 $\mathbf{x}$ 位置平移到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置，空间平移对称性对应着动量守恒定律
- 因此生成元算符 $\mathbf{P}$ 就是动量算符，从而 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是四维动量算符

量子空间平移变换

- 当 $\omega_{\mu\nu}=0$ 而 $a^\mu=(0,\mathbf{x}_*)$ 时，

$$P^\mu\equiv -\mathrm{i}\left.\frac{\partial U(\Lambda,a)}{\partial\varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \quad \text{意味着} \quad \left.\frac{\partial U(\mathbf{1},a)}{\partial x_*^i}\right|_{\mathbf{x}_*=\mathbf{0}}=-\mathrm{i}P^i$$

- 注意到 $[P^i,P^j]=0$，满足上式和 $U(\mathbf{1},0)=\mathbb{I}$ 的量子空间平移变换表达为

$$U(\mathbf{1},a)=\exp(-\mathrm{i}P^1x_*^1)\exp(-\mathrm{i}P^2x_*^2)\exp(-\mathrm{i}P^3x_*^3)=\exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_*)$$

- 它将态矢从 $\mathbf{x}$ 位置平移到 $\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{x}_*$ 位置，空间平移对称性对应着动量守恒定律
- 因此生成元算符 $\mathbf{P}$ 就是动量算符，从而 $P^\mu=(H,\mathbf{P})$ 是四维动量算符
- 在量子力学中，与哈密顿量对易的不含时力学量是守恒量
- 于是 $[H,\mathbf{P}]=[H,\mathbf{J}]=0$ 意味着动量和总角动量都是守恒量，这是 Poincaré 对称性导致的结果
- 由于 $[H,\mathbf{P}]=0$，一般的量子时空平移变换可表达为

$$U(\mathbf{1},a)=\exp(\mathrm{i}Ht_*)\exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_*)=\exp(\mathrm{i}P^\mu a_\mu)\text{，满足}\left.\frac{\partial U(\mathbf{1},a)}{\partial a_\mu}\right|_{a_\mu=0}=\mathrm{i}P^\mu$$

一般场算符的量子时空平移变换

- 考虑**时空平移变换** $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 对**一般场算符** $\Phi_a(x)$ 的作用
- 对于**经典场**，有 $\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$，它对应的**算符**表达式为

$$\Phi'_a(x') = U^{-1}(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x')U(\mathbf{1}, a) = \Phi_a(x)$$

- 注意这里的**相似变换**类似于 $P'^\mu \equiv U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$

一般场算符的量子时空平移变换

- 考虑**时空平移变换** $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 对**一般场算符** $\Phi_a(x)$ 的作用
- 对于**经典场**，有 $\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+a) = \Phi_a(x)$，它对应的**算符**表达式为

$$\Phi'_a(x') = U^{-1}(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x')U(\mathbf{1}, a) = \Phi_a(x)$$

- 注意这里的**相似变换**类似于 $P'^\mu \equiv U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$
- 等价地，有

$$\Phi_a(x+a) = U(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x)U^{-1}(\mathbf{1}, a)$$

- **无穷小**变换 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ 对应的量子时空平移变换是 $U(\mathbf{1}, \varepsilon) = \mathbb{I} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu$
- **右边**化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}, a)\Phi_a(x)U^{-1}(\mathbf{1}, a) &= (\mathbb{I} + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu)\Phi_a(x)(\mathbb{I} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu) \\ &= \Phi_a(x) - \mathrm{i}\varepsilon_\mu \Phi_a(x)P^\mu + \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu \Phi_a(x) = \Phi_a(x) - \mathrm{i}\varepsilon_\mu[\Phi_a(x), P^\mu] \end{aligned}$$

- 在 x^μ **处将左边展开到** ε^μ **的一阶项**，得 $\Phi_a(x+a) = \Phi_a(x) + \varepsilon_\mu \partial^\mu \Phi_a(x)$
- 两相比较，给出

$$\boxed{[\Phi_a(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu \Phi_a(x)}$$

量子 Poincaré 变换与 Noether 定理

对易关系 $[\Phi_a(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu \Phi_a(x)$ 表明，**一般场算符** $\Phi_a(x)$ 与**四维动量算符** P^μ 的对易子相当于用**四维动量微分算符** $\mathrm{i}\partial^\mu$ 对 $\Phi_a(x)$ 求导

取 $\mu = 0$，得到 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial}{\partial t}\,\Phi_a(x) = [\Phi_a(x), H]$，这就是 **Heisenberg 运动方程**，可见它是**时间平移对称性**的**推论**

量子 Poincaré 变换与 Noether 定理

- 对易关系 $[\Phi_a(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu\Phi_a(x)$ 表明，**一般场算符** $\Phi_a(x)$ 与**四维动量算符** P^μ 的对易子相当于用**四维动量微分算符** $\mathrm{i}\partial^\mu$ 对 $\Phi_a(x)$ 求导
- 取 $\mu = 0$，得到 $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_a(x) = [\Phi_a(x), H]$，这就是 **Heisenberg 运动方程**，可见它是**时间平移对称性**的**推论**
- 对于**实标量场** $\phi(x)$，对易关系化为

$$[\phi(x), P^\mu] = \mathrm{i}\partial^\mu\phi(x)$$

- 这与 **2.3.3 小节**中推出的结果**相同**
- 而**那里哈密顿量**和**总动量**的定义遵循 **1.7.2 小节**中由 **Noether 定理**给出的表达式
- 可见，通过 **Noether 定理**得出的**哈密顿量**和**总动量**与本章用**量子 Poincaré 变换**定义的**哈密顿量算符** H 和**动量算符** $\mathbf{P}$ 是**一致**的
- 可以验证，通过 **Noether 定理**得出的 **Lorentz 对称性**的**守恒荷** $J^{\mu\nu}$ 与本章定义的**生成元算符** $J^{\mu\nu}$ 也是**一致**的

3.3 节　粒子态

- 粒子在 Minkowski 时空中运动，Minkowski 时空的对称性由 Poincaré 群描述
- 不同种类的粒子由质量、自旋和一些与内部对称性相关的量子数（如电荷、轻子数、重子数等）加以区分
- 本节讨论如何通过 Poincaré 对称性为粒子分类，将会得到以下结论
- 每个粒子具有一定的四维动量和自旋分量的本征值，后者是表征自旋极化态的量子数
- 对粒子作空间旋转或 Lorentz 增速变换时，四维动量会发生变化，自旋极化量子数也有可能改变
- 但质量、自旋和内部量子数不会改变

3.3 节 粒子态

- 粒子在 Minkowski 时空中运动，Minkowski 时空的对称性由 Poincaré 群描述
- 不同种类的粒子由质量、自旋和一些与内部对称性相关的量子数（如电荷、轻子数、重子数等）加以区分
- 本节讨论如何通过 Poincaré 对称性为粒子分类，将会得到以下结论
- 每个粒子具有一定的四维动量和自旋分量的本征值，后者是表征自旋极化态的量子数
- 对粒子作空间旋转或 Lorentz 增速变换时，四维动量会发生变化，自旋极化量子数也有可能改变
- 但质量、自旋和内部量子数不会改变
- 当 $\Lambda = \mathbf{1}$ 时，$U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ 化为 $U^{-1}(\mathbf{1}, a)P^\mu U(\mathbf{1}, a) = P^\mu$
- 因此四维动量算符 P^μ 在量子时空平移变换下不变，内积 $P^2 = P^\mu P_\mu$ 也不变
- 此外，P^2 还是 Lorentz 标量，于是它的本征值 p^2 是 Poincaré 变换的不变量
- 对单个粒子而言，质壳关系表明 $p^2 = m^2$，则这个不变量是粒子质量 m 的平方

粒子与粒子态

- 实际上，粒子态由 Poincaré 群的不可约幺正表示描述
- 1939 年 Eugene Wigner 完成了这些表示的分类工作
- 一个粒子可以用一组在量子 Poincaré 变换下相互转化的态矢 $\{|\Psi_\sigma(p)\rangle\}$ 来定义，其中 p 是四维动量 p^μ 的简写，而 p^μ 是四维动量算符 P^μ 在态矢 $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 上的本征值，

$$P^\mu |\Psi_\sigma(p)\rangle = p^\mu |\Psi_\sigma(p)\rangle$$

- 指标 σ 表征其它相关自由度，通常取分立值
- 2.3.4 小节定义的标量场单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 就是这样的态矢

Eugene Wigner
(1902–1995)

粒子态的 Poincaré 变换

在量子时空平移变换的作用下，单粒子态 $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 变换为

$$U(\mathbf{1},a)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p)\rangle$$

它只出现相位上的改变

另一方面，用量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用得到单粒子态 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle$，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda)P^\nu\,|\Psi_\sigma(p)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle \end{aligned}$$

粒子态的 Poincaré 变换

- 在**量子时空平移变换**的作用下，**单粒子态** $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 变换为

$$U(\mathbf{1},a)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^\mu a_\mu}\,|\Psi_\sigma(p)\rangle$$

- 它只出现**相位**上的**改变**

- 另一方面，用**量子 Lorentz 变换** $U(\Lambda)$ 作用得到**单粒子态** $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle$，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda)P^\nu\,|\Psi_\sigma(p)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle \end{aligned}$$

- 因此，$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 的**四维动量本征值为** $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$
- 这意味着它必定是**态矢 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle$ 的线性组合**，即

$$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle$$

- 通过下面的方法可以得到**系数** $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ 的形式

标准四维动量

🌱 在固有保时向 Lorentz 变换下，p^μ 的内积 p^2 不变，p^0 的符号也不会改变

🐢 它们是所有惯性参考系的不变量

🌿 p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$，彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着，可以选取一个标准四维动量 $k^\mu \in \{p^\mu\}$，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p)k^\nu$$

🐐 $V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换

🐏 从而，标准四维动量 k^μ 代表了这组可用于描述粒子的四维动量 $\{p^\mu\}$

标准四维动量

- 在固有保时向 Lorentz 变换下，p^μ 的内积 p^2 不变，p^0 的符号也不会改变
- 它们是所有惯性参考系的不变量
- p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$，彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着，可以选取一个标准四维动量 $k^\mu \in \{p^\mu\}$，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p)k^\nu$$

- $V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换
- 从而，标准四维动量 k^μ 代表了这组可用于描述粒子的四维动量 $\{p^\mu\}$
- 可以将 $\{p^\mu\}$ 中任意元素 p^μ 对应的单粒子态 $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 定义为

$$|\Psi_\sigma(p)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k)\rangle$$

- $N(p)$ 是依赖于 p^μ 的归一化因子
- 在此前讨论中，还没有对指标 σ 提出要求，而以上定义式左右两边出现同一个指标 σ，实际上是以此规定指标 σ 与四维动量 p^μ 之间的关系

小群

对**单粒子态** $|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 作**量子 Lorentz 变换** $U(\Lambda)$，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U^{-1}[V(\Lambda p)]U(\Lambda)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]\,|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)|\Psi_\sigma(k)\rangle \end{aligned}$$

其中，**固有保时向 Lorentz 变换**

$$W^\mu{}_\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu$$

先将 k^μ **变换到** p^μ，再**变换到** $(\Lambda p)^\mu$，最后**变换回** k^μ：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda]^\mu{}_\nu p^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)]^\mu{}_\nu (\Lambda p)^\nu = k^\mu$$

即 $W^\mu{}_\nu$ **保持** k^μ **不变**

所有保持 k^μ **不变**的固有保时向 Lorentz 变换 $\{W^\mu{}_\nu\}$ 构成 Lorentz 群的一个子群，称为**标准动量** k^μ 对应的**小群** (little group)

小群的线性表示

🌲 类似于 $U(\Lambda)\left|\Psi_\sigma(p)\right\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\right\rangle$，$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ 意味着

$$U(W)\left|\Psi_\sigma(k)\right\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\left|\Psi_{\sigma'}(k)\right\rangle$$

🦛 $D_{\sigma'\sigma}(W)$ 是线性组合系数

🦏 对于小群中任意两个元素 $(W_1)^\mu{}_\nu$ 和 $(W_2)^\mu{}_\nu$，由上式推出

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\left|\Psi_{\sigma'}(k)\right\rangle = U(W_2W_1)\left|\Psi_\sigma(k)\right\rangle = U(W_2)U(W_1)\left|\Psi_\sigma(k)\right\rangle$$
$$= U(W_2)\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1)\left|\Psi_{\sigma''}(k)\right\rangle = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\left|\Psi_{\sigma'}(k)\right\rangle$$

🐘 从而得到同态关系

$$D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)$$

🦣 可见，矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成这个小群的一个线性表示

系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$

- 进一步推出

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle \\
&= N(p)U[V(\Lambda p)]\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \\
&= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]U[V(\Lambda p)]\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle
\end{aligned}
$$

- 根据定义，有 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle = N(\Lambda p)U[V(\Lambda p)]\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$，即

$$
U[V(\Lambda p)]\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle = \frac{1}{N(\Lambda p)}\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle
$$

- 代入得 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \dfrac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle$

- 与 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\,|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle$ 比较，推出**系数公式**

$$
C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\,D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]
$$

单粒子态的分类

- 标准四维动量 k^μ 和相应的小群体现了单粒子态的特征，可以通过它们为单粒子态分类，物理上遇到三种情况

- 第一种情况是真空态，此时 $p^\mu = (0, 0, 0, 0)$

- 标准四维动量也只能是 $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$，它在任意 Lorentz 变换下不变

- 相应的小群是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1, 3)$

- 第二、三种情况分别是有质量和无质量的粒子态，在下面两个小节中详细讨论

3.3.1 小节　有质量的粒子

- 对于有质量的粒子，$p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$，其中质量 $m > 0$
- 此时 p^μ 是类时矢量，取标准四维动量为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$
- 沿任意方向的 Lorentz 增速变换会**改变** k^μ，任意空间旋转变换则保持 k^μ 不变
- 因此相应的小群是 $\mathbf{SO(3)}$

3.3.1 小节　有质量的粒子

♈ 对于**有质量的粒子**，$p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$，其中**质量** $m > 0$

🌴 此时 p^μ 是**类时矢量**，取**标准四维动量**为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$

🥥 沿任意方向的 Lorentz 增速变换会**改变** k^μ，**任意空间旋转变换**则**保持** k^μ **不变**

🐒 因此相应的**小群**是 $\mathbf{SO(3)}$

🍯 在**量子力学**中，**归一化后**的态矢仍然具有一定的任意性，态矢 $|\Psi\rangle$ 与**相差一个相位因子**的态矢 $e^{i\phi}|\Psi\rangle$ (ϕ 为实数) 描述**相同的量子态**

🦧 一般地，**量子 Lorentz 变换**的**同态关系** $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$ 应修正为

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = e^{i\varphi(\Lambda_2,\Lambda_1)}U(\Lambda_2\Lambda_1)$$

🐿 若**实相位** $\varphi(\Lambda_2, \Lambda_1)$ **不恒为零**，则集合 $\{U(\Lambda)\}$ 不是 Lorentz 群的线性表示，而是**投影表示** (projective representation)

小群 SO(3) 的双值表示

🌵 对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \mathrm{SO}(3)$，则有

$$U(W_2)U(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}U(W_2W_1)$$

🐪 作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k)\rangle$ 上，利用 $U(W)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$，得

$$\sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$$

🐪 故

$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)$$

小群 SO(3) 的双值表示

- 对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \mathrm{SO}(3)$，则有

$$U(W_2)U(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}U(W_2W_1)$$

- 作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k)\rangle$ 上，利用 $U(W)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$，得

$$\sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$$

- 故

$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)$$

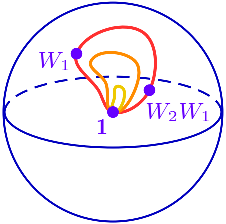
- 若 $\varphi(W_2,W_1)$ **不恒为零**，则矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成**小群 SO(3)** 的**投影表示**
- 这里遇到的投影表示就是 3.1.2 小节提到的 n **值表示**
- 它的存在意味着群空间的**连通度** $n>1$，将这个群替换成它的**单连通覆盖群**，则相关的投影表示对应于覆盖群的**忠实线性表示**
- 因此，应该用**覆盖群**的**不等价不可约线性表示**为粒子态分类

闭合曲线与恒等变换

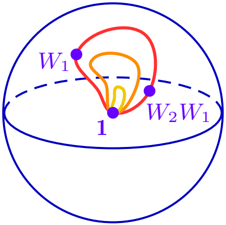
🥕 在 **Lie 群**的**群空间**中，每个**点**对应一个**群元**

🐇 由于群的**封闭性**，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点

🍅 从而，群空间中的**一条曲线**意味着**一系列的群乘积**，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线



闭合曲线与恒等变换



🥕 在 **Lie 群**的**群空间**中，每个**点**对应一个**群元**

🐇 由于群的**封闭性**，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点

🍅 从而，群空间中的**一条曲线**意味着**一系列的群乘积**，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线

🍈 考虑 **SO(3) 群空间**内一条**闭合曲线**，它从**恒元 1** 出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，相应的**量子变换**是

$$U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = e^{i\varphi(W_2,W_1)}\,\mathbb{I}$$

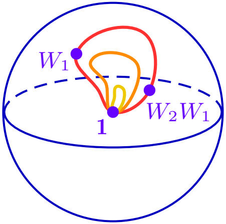
🐕 如果这条曲线能**连续地收缩成恒元一点**，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \mathbb{I}$，即 $e^{i\varphi(W_2,W_1)} = 1$

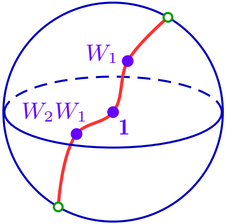
闭合曲线与恒等变换

- 在 **Lie 群**的**群空间**中，每个**点**对应一个**群元**
- 由于群的**封闭性**，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点
- 从而，群空间中的**一条曲线**意味着**一系列的群乘积**，乘出来的群元所对应的点连续地组合成这条曲线
- 考虑 **SO(3) 群空间**内一条**闭合曲线**，它从**恒元 1** 出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，相应的**量子变换**是

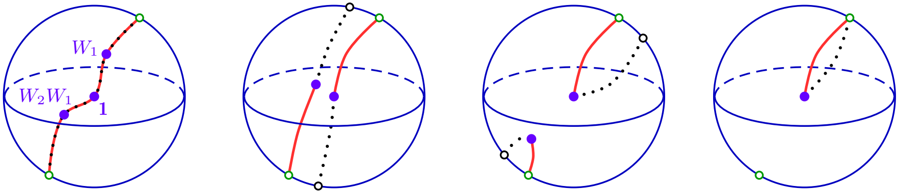
$$U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = e^{i\varphi(W_2,W_1)}\,\mathbb{I}$$

- 如果这条曲线能**连续地收缩成恒元一点**，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \mathbb{I}$，即 $e^{i\varphi(W_2,W_1)} = 1$
- 如果这条曲线包含**奇数次对径点跳跃**，就**不能**连续收缩成恒元一点，而 $e^{i\varphi(W_2,W_1)}$ **不一定等于** 1

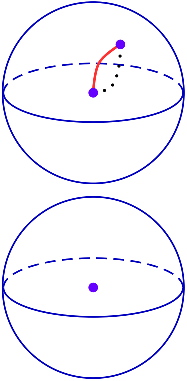




闭合曲线与双值表示

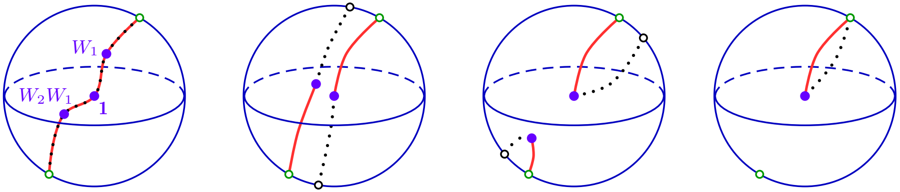


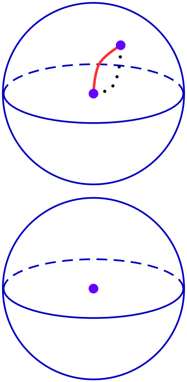
对于**第二种情形**，**重复**走**闭合曲线**的路径**两次**，则包含**偶数次对径点跳跃**，可通过**连续形变消除**这些**跳跃**，从而**收缩成恒元一点**



动画演示

闭合曲线与双值表示





对于**第二种情形**，**重复**走**闭合曲线**的路径**两次**，则包含**偶数次对径点跳跃**，可通过**连续形变消除**这些**跳跃**，从而**收缩成恒元一点**，也就是说，$[U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)]^2 = \mathbb{I}$

由此得到 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \pm\mathbb{I}$，即

$$U(W_2)U(W_1) = \pm U(W_2W_1)$$

可见，**SO(3) 群**的**相位因子** $e^{i\varphi(W_2,W_1)}$ **可取** ± 1

相位因子既能取 $+1$ 又能取 -1 的情况对应于**双值表示**

动画演示

SU(2) 群的表示理论

- **SO(3) 群**的**覆盖群 SU(2)** 是**单连通**的，群空间中任何经过恒元的闭合曲线都能连续收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，**不具有投影表示**
- 接下来讨论 **SU(2) 群**的**线性表示**，从而为质量非零的单粒子态分类
- 由于 SU(2) 的 Lie 代数与 SO(3) 相同，可将**总角动量算符 J** 看作 SU(2) 群的**生成元算符**，相应代数关系为 $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} J^k$

SU(2) 群的表示理论

SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任何经过恒元的闭合曲线都能连续收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示

接下来讨论 SU(2) 群的线性表示，从而为质量非零的单粒子态分类

由于 SU(2) 的 Lie 代数与 SO(3) 相同，可将总角动量算符 $\mathbf{J}$ 看作 SU(2) 群的生成元算符，相应代数关系为 $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} J^k$

构造 2 阶 Casimir 算符

$$\boxed{\mathbf{J}^2 \equiv J^i J^i = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2}$$

由 ε^{ijk} 的全反对称性推出

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}^2, J^i] &= [J^j J^j, J^i] = J^j [J^j, J^i] + [J^j, J^i] J^j \\ &= \mathrm{i}\varepsilon^{jik} J^j J^k + \mathrm{i}\varepsilon^{jik} J^k J^j = \mathrm{i}(\varepsilon^{kji} + \varepsilon^{kij}) J^j J^k = 0\end{aligned}$$

Hendrik Casimir (1909–2000)

即 $\mathbf{J}^2$ 与所有生成元对易，这是 Casimir 算符的一般特征

设厄米算符 $\mathbf{J}^2$ 与 J^3 的共同本征态为 $|\eta, \sigma\rangle$，满足归一化条件 $\langle \eta, \sigma | \eta, \sigma \rangle = 1$

本征方程为 $\mathbf{J}^2 |\eta, \sigma\rangle = \eta |\eta, \sigma\rangle$ 和 $J^3 |\eta, \sigma\rangle = \sigma |\eta, \sigma\rangle$，其中本征值 η 和 σ 是实数

升降算符

- 引入两个算符

$$J^{\pm} \equiv J^1 \pm \mathrm{i}J^2$$

- 它们满足 $(J^{\pm})^{\dagger} = J^{\mp}$、$[\mathbf{J}^2, J^{\pm}] = 0$ 和

$$[J^3, J^{\pm}] = [J^3, J^1] \pm \mathrm{i}[J^3, J^2] = \mathrm{i}J^2 \pm \mathrm{i}(-\mathrm{i}J^1) = \mathrm{i}J^2 \pm J^1 = \pm J^{\pm}$$

- 从而推出

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 J^{\pm} |\eta, \sigma\rangle &= J^{\pm}\mathbf{J}^2 |\eta, \sigma\rangle = \eta J^{\pm} |\eta, \sigma\rangle \\ J^3 J^{\pm} |\eta, \sigma\rangle &= (J^{\pm}J^3 \pm J^{\pm}) |\eta, \sigma\rangle = (\sigma \pm 1) J^{\pm} |\eta, \sigma\rangle \end{aligned}$$

- 即 $J^{\pm} |\eta, \sigma\rangle$ 的 $\mathbf{J}^2$ 和 J^3 本征值分别是 η 和 $\sigma \pm 1$，因而可将它表达为

$$J^{\pm} |\eta, \sigma\rangle = c^{\pm}_{\eta,\sigma} |\eta, \sigma \pm 1\rangle$$

- 其中 $c^{\pm}_{\eta,\sigma}$ 是**归一化常数**
- 这个结果表明，J^{+} 使 J^3 本征值增加 1，是一个**升算符**
- J^{-} 使 J^3 本征值减少 1，是一个**降算符**

本征值 σ 的上下限

注意到 **Hilbert 空间**中**态矢**的**自我内积非负**，利用本征方程 $\mathbf{J}^2\,|\eta,\sigma\rangle = \eta\,|\eta,\sigma\rangle$、$J^3\,|\eta,\sigma\rangle = \sigma\,|\eta,\sigma\rangle$ 和 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$，推出

$$\begin{aligned}\eta - \sigma^2 &= \langle\eta,\sigma|\,(\eta - \sigma^2)\,|\eta,\sigma\rangle = \langle\eta,\sigma|\,[\mathbf{J}^2 - (J^3)^2]\,|\eta,\sigma\rangle \\ &= \langle\eta,\sigma|\,[(J^1)^2 + (J^2)^2]\,|\eta,\sigma\rangle \\ &= \langle\eta,\sigma|\,(J^1)^\dagger J^1\,|\eta,\sigma\rangle + \langle\eta,\sigma|\,(J^2)^\dagger J^2\,|\eta,\sigma\rangle \geq 0\end{aligned}$$

即 $\eta \geq \sigma^2$，故 $\eta \geq 0$ 且 $-\sqrt{\eta} \leq \sigma \leq \sqrt{\eta}$

本征值 σ 的上下限

注意到 **Hilbert 空间**中**态矢**的**自我内积非负**，利用本征方程 $\mathbf{J}^2 |\eta,\sigma\rangle = \eta |\eta,\sigma\rangle$、$J^3 |\eta,\sigma\rangle = \sigma |\eta,\sigma\rangle$ 和 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$，推出

$$\begin{aligned}
\eta - \sigma^2 &= \langle\eta,\sigma| (\eta - \sigma^2) |\eta,\sigma\rangle = \langle\eta,\sigma| [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2] |\eta,\sigma\rangle \\
&= \langle\eta,\sigma| [(J^1)^2 + (J^2)^2] |\eta,\sigma\rangle \\
&= \langle\eta,\sigma| (J^1)^\dagger J^1 |\eta,\sigma\rangle + \langle\eta,\sigma| (J^2)^\dagger J^2 |\eta,\sigma\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

即 $\eta \geq \sigma^2$，故 $\eta \geq 0$ 且 $-\sqrt{\eta} \leq \sigma \leq \sqrt{\eta}$

这意味着 J^3 **的本征值** σ 具有**最大值** $\sigma_{\max}$ 和**最小值** $\sigma_{\min}$，使得

$$J^+ |\eta,\sigma_{\max}\rangle = 0, \quad J^- |\eta,\sigma_{\min}\rangle = 0$$

由于**升降算符** $J^\pm$ 对 $|\eta,\sigma\rangle$ 的每次作用使 σ 的值**增加或减小** 1，σ 的**所有取值**为

$$\sigma_{\max}, \sigma_{\max} - 1, \cdots, \sigma_{\min} + 1, \sigma_{\min}$$

因而 $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ 是一个**非负整数**

🏌 由 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$ 和对易关系 $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} J^k$ 推出

$$J^\mp J^\pm = (J^1 \mp \mathrm{i}J^2)(J^1 \pm \mathrm{i}J^2) = (J^1)^2 + (J^2)^2 \pm \mathrm{i}[J^1, J^2] = \mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3$$

$$0 = J^- J^+ |\eta, \sigma_{\max}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 - J^3] |\eta, \sigma_{\max}\rangle = (\eta - \sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max}) |\eta, \sigma_{\max}\rangle$$

$$0 = J^+ J^- |\eta, \sigma_{\min}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 + J^3] |\eta, \sigma_{\min}\rangle = (\eta - \sigma_{\min}^2 + \sigma_{\min}) |\eta, \sigma_{\min}\rangle$$

🚩 故 $\eta = \sigma_{\max}(\sigma_{\max} + 1) = \sigma_{\min}(\sigma_{\min} - 1)$

角动量量子数

- 由 $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$ 和对易关系 $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$ 推出

$$J^{\mp}J^{\pm} = (J^1 \mp \mathrm{i}J^2)(J^1 \pm \mathrm{i}J^2) = (J^1)^2 + (J^2)^2 \pm \mathrm{i}[J^1, J^2] = \mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3$$

$$0 = J^- J^+ |\eta, \sigma_{\max}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 - J^3] |\eta, \sigma_{\max}\rangle = (\eta - \sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max}) |\eta, \sigma_{\max}\rangle$$

$$0 = J^+ J^- |\eta, \sigma_{\min}\rangle = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 + J^3] |\eta, \sigma_{\min}\rangle = (\eta - \sigma_{\min}^2 + \sigma_{\min}) |\eta, \sigma_{\min}\rangle$$

- 故 $\eta = \sigma_{\max}(\sigma_{\max} + 1) = \sigma_{\min}(\sigma_{\min} - 1)$
- 将上式看作关于 $\sigma_{\min}$ 的方程，第一个根 $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} + 1$ 不满足 $\sigma_{\min} \le \sigma_{\max}$
- 只能取第二个根 $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$
- 令 $j \equiv \sigma_{\max}$，则 $\sigma_{\min} = -j$，而 $2j = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \ge 0$ 是一个**整数**
- 于是，j 的所有可能取值为 $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$
- $\mathbf{J}^2$ 的本征值是 $\eta = j(j+1)$，j 称为**角动量量子数**

用角动量量子数和磁量子数描述的本征态

- J^3 的本征值 σ 称为**磁量子数**
- 对于固定的 j，σ 一共有 $2j+1$ 个取值，即 $\sigma = j, j-1, \cdots, -j+1, -j$
- 将 $\mathbf{J}^2$ 与 J^3 的共同本征态改记为 $|j,\sigma\rangle$，**正交归一关系**为

$$\langle j,\sigma'|j,\sigma\rangle = \delta_{\sigma'\sigma}, \quad \sigma,\sigma' = j, j-1, \cdots, -j+1, -j$$

- **完备性关系**为 $\sum_{\sigma=-j}^{j} |j,\sigma\rangle\langle j,\sigma| = \mathbb{I}$
- **本征方程**是 $\mathbf{J}^2|j,\sigma\rangle = j(j+1)|j,\sigma\rangle$ 和 $J^3|j,\sigma\rangle = \sigma|j,\sigma\rangle$

用角动量量子数和磁量子数描述的本征态

- J^3 的本征值 σ 称为**磁量子数**
- 对于固定的 j，σ 一共有 $2j+1$ 个取值，即 $\sigma = j, j-1, \cdots, -j+1, -j$
- 将 $\mathbf{J}^2$ 与 J^3 的共同本征态改记为 $|j,\sigma\rangle$，**正交归一关系**为

$$\langle j,\sigma'|j,\sigma\rangle = \delta_{\sigma'\sigma}, \quad \sigma,\sigma' = j, j-1, \cdots, -j+1, -j$$

- **完备性关系**为 $\displaystyle\sum_{\sigma=-j}^{j} |j,\sigma\rangle\langle j,\sigma| = \mathbb{I}$
- **本征方程**是 $\mathbf{J}^2|j,\sigma\rangle = j(j+1)|j,\sigma\rangle$ 和 $J^3|j,\sigma\rangle = \sigma|j,\sigma\rangle$
- $J^\pm$ 对 $|j,\sigma\rangle$ 的作用为 $J^\pm|j,\sigma\rangle = c^\pm_{j,\sigma}|j,\sigma\pm 1\rangle$
- 利用 $(J^\pm)^\dagger = J^\mp$ 和 $J^\mp J^\pm = \mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3$ 推出

$$\begin{aligned}
|c^\pm_{j,\sigma}|^2 &= \langle j,\sigma\pm 1|(c^\pm_{j,\sigma})^* c^\pm_{j,\sigma}|j,\sigma\pm 1\rangle = \langle j,\sigma|J^\mp J^\pm|j,\sigma\rangle \\
&= \langle j,\sigma|(\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 \mp J^3)|j,\sigma\rangle = j(j+1) - \sigma^2 \mp \sigma = (j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)
\end{aligned}$$

$J^+ |j,\sigma\rangle$ 的具体形式

于是 $|c^{\pm}_{j,\sigma}| = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}$，而 $J^{\pm}|j,\sigma\rangle = c^{\pm}_{j,\sigma}|j,\sigma\pm1\rangle$ 化为

$$J^{\pm}|j,\sigma\rangle = \zeta^{\pm}_{j,\sigma}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\,|j,\sigma\pm1\rangle$$

其中 $\zeta^{\pm}_{j,\sigma}$ 是模为 1 的**相位因子**，其取值是**任意**的

上式给出 $J^+|j,j\rangle = J^-|j,-j\rangle = 0$，符合 $\sigma_{\max} = j$ 和 $\sigma_{\min} = -j$ 的要求

特别地，这里将**相位因子** $\zeta^{+}_{j,\sigma}$ 取为

$$\zeta^{+}_{j,\sigma} = \begin{cases} -1, & \sigma \geq 0 \\ +1, & \sigma < 0 \end{cases}$$

则

$$J^{+}|j,\sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,|j,\sigma+1\rangle, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,|j,\sigma+1\rangle, & \sigma < 0 \end{cases}$$

SU(2) 线性表示的生成元矩阵

- 下面构造 SU(2) **群**的 $2j+1$ **维线性表示**，相应的**生成元矩阵** $\tau^i_{(j)}$ 定义为

$$(\tau^i_{(j)})_{\sigma'\sigma} \equiv \langle j,\sigma'| J^i |j,\sigma\rangle$$

- 由于 J^i 是**厄米算符**，有

$$(\tau^i_{(j)})^*_{\sigma\sigma'} = \langle j,\sigma| J^i |j,\sigma'\rangle^* = \langle j,\sigma'| (J^i)^\dagger |j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma'| J^i |j,\sigma\rangle = (\tau^i_{(j)})_{\sigma'\sigma}$$

- 即 $\tau^i_{(j)}$ 是**厄米矩阵**，$(\tau^i_{(j)})^\dagger = \tau^i_{(j)}$

- 由**完备性关系** $\sum_{\sigma=-j}^{j} |j,\sigma\rangle\langle j,\sigma| = \mathbb{I}$ 和 **SU(2) 代数关系** $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k$ 推出

$$\begin{aligned}
&[\tau^i_{(j)}, \tau^k_{(j)}]_{\sigma'\sigma} \\
&= \sum_{\sigma''} \Big[\langle j,\sigma'| J^i |j,\sigma''\rangle\langle j,\sigma''| J^k |j,\sigma\rangle - \langle j,\sigma'| J^k |j,\sigma''\rangle\langle j,\sigma''| J^i |j,\sigma\rangle\Big] \\
&= \langle j,\sigma'| [J^i, J^k] |j,\sigma\rangle = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\langle j,\sigma'| J^l |j,\sigma\rangle = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(\tau^l_{(j)})_{\sigma'\sigma}
\end{aligned}$$

- 可见，这样定义的生成元矩阵确实满足 **SU(2) 代数关系** $[\tau^i_{(j)}, \tau^k_{(j)}] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}\tau^l_{(j)}$

生成元矩阵的表达式

引入 $2j+1$ **阶方阵** $\tau^{\pm}_{(j)}$，定义为 $(\tau^{\pm}_{(j)})_{\sigma'\sigma} \equiv \langle j,\sigma'|\, J^{\pm}\, |j,\sigma\rangle$

由 $J^{+}\,|j,\sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,|j,\sigma+1\rangle\,, & \sigma\geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,|j,\sigma+1\rangle\,, & \sigma<0 \end{cases}$ 和 $\langle j,\sigma'|j,\sigma\rangle = \delta_{\sigma'\sigma}$ 得

$$(\tau^{+}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma'|\, J^{+}\, |j,\sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\delta_{\sigma',\,\sigma+1}, & \sigma\geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\delta_{\sigma',\,\sigma+1}, & \sigma<0 \end{cases}$$

由 $(J^{-})^{\dagger} = J^{+}$ 得 $(\tau^{-}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma'|\, J^{-}\, |j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma|\, J^{+}\, |j,\sigma'\rangle^{*} = (\tau^{+}_{(j)})^{*}_{\sigma\sigma'}$，即

$$\tau^{-}_{(j)} = (\tau^{+}_{(j)})^{\dagger}$$

生成元矩阵的表达式

- 引入 $2j+1$ **阶方阵** $\tau^{\pm}_{(j)}$，定义为 $(\tau^{\pm}_{(j)})_{\sigma'\sigma} \equiv \langle j,\sigma' | J^{\pm} | j,\sigma\rangle$

- 由 $J^{+}|j,\sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,|j,\sigma+1\rangle, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,|j,\sigma+1\rangle, & \sigma < 0 \end{cases}$ 和 $\langle j,\sigma'|j,\sigma\rangle = \delta_{\sigma'\sigma}$ 得

$$(\tau^{+}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma' | J^{+} | j,\sigma\rangle = \begin{cases} -\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\delta_{\sigma',\,\sigma+1}, & \sigma \geq 0 \\ \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\delta_{\sigma',\,\sigma+1}, & \sigma < 0 \end{cases}$$

- 由 $(J^{-})^{\dagger} = J^{+}$ 得 $(\tau^{-}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma' | J^{-} | j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma | J^{+} | j,\sigma'\rangle^{*} = (\tau^{+}_{(j)})^{*}_{\sigma\sigma'}$，即

$$\tau^{-}_{(j)} = (\tau^{+}_{(j)})^{\dagger}$$

- 根据 $J^{\pm} = J^{1} \pm \mathrm{i}J^{2}$，有 $J^{1} = \frac{1}{2}(J^{+}+J^{-})$ 和 $J^{2} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(J^{+}-J^{-})$

- 以此推出 $\tau^{1}_{(j)} = \frac{1}{2}(\tau^{+}_{(j)}+\tau^{-}_{(j)})$ 和 $\tau^{2}_{(j)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\tau^{+}_{(j)}-\tau^{-}_{(j)})$

- 另一方面，本征方程 $J^{3}|j,\sigma\rangle = \sigma\,|j,\sigma\rangle$ 表明

$$(\tau^{3}_{(j)})_{\sigma'\sigma} = \langle j,\sigma' | J^{3} | j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma' | \sigma | j,\sigma\rangle = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}$$

二阶 Casimir 算符在 $2j+1$ 维线性表示中的形式

SU(2) 群的二阶 Casimir 算符在 $2j+1$ 维线性表示中定义为

$$\boldsymbol{\tau}_{(j)}^2 \equiv \sum_i \tau_{(j)}^i \tau_{(j)}^i$$

由完备性关系 $\sum_{\sigma=-j}^{j} |j,\sigma\rangle\langle j,\sigma| = \mathbb{I}$ 和本征方程 $\mathbf{J}^2|j,\sigma\rangle = j(j+1)|j,\sigma\rangle$ 推出

$$(\boldsymbol{\tau}_{(j)}^2)_{\sigma'\sigma} = \sum_i (\tau_{(j)}^i \tau_{(j)}^i)_{\sigma'\sigma} = \sum_i \sum_{\sigma''} \langle j,\sigma'| J^i |j,\sigma''\rangle \langle j,\sigma''| J^i |j,\sigma\rangle$$

$$= \langle j,\sigma'| \mathbf{J}^2 |j,\sigma\rangle = \langle j,\sigma'| j(j+1) |j,\sigma\rangle = j(j+1)\delta_{\sigma'\sigma}$$

2 维表示的生成元矩阵

- 利用上述表达式可以得到**生成元矩阵** $\tau^i_{(j)}$ 的具体形式
- 当 $j=\dfrac{1}{2}$ 时，σ 和 σ' 都只能取 $\dfrac{1}{2}$ 和 $-\dfrac{1}{2}$，而非零的 $\tau^+_{(1/2)}$ 矩阵元只有

$$(\tau^+_{(1/2)})_{1/2,-1/2}=\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|J^+\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}=1$$

- 故

$$\tau^+_{(1/2)}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \tau^-_{(1/2)}=(\tau^+_{(1/2)})^\dagger=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

- 进而得到 $\mathrm{SU}(2)$ 群 **2 维线性表示**的**生成元矩阵**

$$\tau^1_{(1/2)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}=\frac{\sigma^1}{2},\quad \tau^2_{(1/2)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&\end{pmatrix}=\frac{\sigma^2}{2},\quad \tau^3_{(1/2)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}=\frac{\sigma^3}{2}$$

- 这显然是**基础表示**的生成元矩阵，前面用 **Pauli 矩阵**表达过

3 维表示的生成元矩阵

当 $j=1$ 时，σ 和 σ' 的取值为 1、0 和 -1，非零的 $\tau^{+}_{(1)}$ 矩阵元是

$$
\begin{aligned}
(\tau^{+}_{(1)})_{1,0} &= \langle 1,1|\,J^{+}\,|1,0\rangle = -\sqrt{(1-0)(1+0+1)} = -\sqrt{2}\\
(\tau^{+}_{(1)})_{0,-1} &= \langle 1,0|\,J^{+}\,|1,-1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)} = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

故

$$
\tau^{+}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad
\tau^{-}_{(1)} = (\tau^{+}_{(1)})^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}
$$

进而得到 SU(2) 群 **3 维线性表示**的**生成元矩阵**

$$
\tau^{1}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix},\quad
\tau^{2}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & \mathrm{i} & \\ -\mathrm{i} & & -\mathrm{i} \\ & \mathrm{i} & \end{pmatrix},\quad
\tau^{3}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}
$$

SU(2) 群的不等价不可约线性表示

- 任意小群变换 $W \in \mathrm{SO}(3)$ 可以用三个空间旋转角 θ^i 描写
- 它在 $\mathrm{SU}(2)$ 群的 $2j+1$ 维线性表示中诱导出表示矩阵

$$D^{(j)}[W(\theta^i)] = \exp(\mathrm{i}\theta^i \tau^i_{(j)})$$

- 其无穷小展开式符合 $\mathbf{1} + \mathrm{i}\theta^a t^a + \mathcal{O}(\theta^a \theta^b)$ 的形式
- 这样的表示矩阵的集合构成了 $\mathrm{SU}(2)$ 群 的 $2j+1$ 维线性表示 $D^{(j)}$
- 实际上，**SU(2)** 群所有的不等价不可约线性表示就是

$$D^{(j)}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$$

- 它们都是幺正表示，因为生成元矩阵 $\tau^i_{(j)}$ 是厄米的

自旋为 s 的有质量单粒子态

- 对于自由的单粒子态，**不存在**轨道角动量
- 因此 $\mathbf{J}$ 相当于自旋角动量算符 $\mathbf{S}$，而自旋量子数是 $\boxed{s = j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots}$
- SU(2) 群 $2s+1$ 维线性表示的矩阵元表达为 $D^{(s)}_{\sigma'\sigma}(W)$
- 其中自旋磁量子数 $\boxed{\sigma', \sigma = -s, -s+1, \cdots, s-1, s}$ 表征自旋极化
- 可以用自旋量子数 s 为有质量粒子分类
- 根据前面的结果，自旋为 s 的有质量单粒子态 $|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda)\,|\Psi_{s,\sigma}(p)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D^{(s)}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{s,\sigma'}(\Lambda p)\rangle$$

- 因此，$\boxed{\text{自旋为 } s \text{ 的有质量粒子具有 } 2s+1 \text{ 种自旋极化态}}$
- 量子 Lorentz 变换将 σ 对应的极化态变换成 σ' 对应的极化态的线性组合

整数自旋和半奇数自旋

🍊 当 s 为整数 $(0,1,2,\cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的非忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的线性表示，描述整数自旋的粒子

🐸 $D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示，描述零自旋粒子

🐷 $D^{(1)}$ 是 SO(3) 群的基础表示，描述自旋为 1 的粒子

整数自旋和半奇数自旋

当 s **为整数** $(0, 1, 2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 **SU(2) 群**的**非忠实线性表示**，同时也是 **SO(3) 群**的**线性表示**，描述**整数自旋**的粒子

$D^{(0)}$ 是这两个群的**恒等表示**，描述**零自旋**粒子

$D^{(1)}$ 是 **SO(3) 群**的**基础表示**，描述**自旋为 1** 的粒子

当 s **为半奇数** $(1/2, 3/2, 5/2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 **SU(2) 群**的**忠实线性表示**，同时也是 **SO(3) 群**的**双值表示**，描述**半奇数自旋**的粒子

$D^{(1/2)}$ 是 **SU(2) 群**的**基础表示**，描述**自旋为 1/2** 的粒子

半奇数自旋对应着**双值表示**，因而是**量子理论特有**的

转动角度与自旋

- 对于绕 z 轴的旋转变换 $R_z(\theta^3)$，$D^{(1)}$ 中相应的表示矩阵为

$$D^{(1)}[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3\tau^3_{(1)}) = \exp\begin{pmatrix} \mathrm{i}\theta^3 & & \\ & 0 & \\ & & -\mathrm{i}\theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta^3) & & \\ & 1 & \\ & & \exp(-\mathrm{i}\theta^3) \end{pmatrix}$$

- 从而 $D^{(1)}[R_z(2\pi)] = D^{(1)}[R_z(0)] = \mathbf{1}$，即**转动** 2π **角**能够回复到原来的状态
- 这表明**自旋为** 1 的**粒子态**转动的情况与**三维空间**中的**矢量相同**

转动角度与自旋

- 对于**绕 z 轴**的**旋转变换** $R_z(\theta^3)$，$D^{(1)}$ 中相应的表示矩阵为

$$D^{(1)}[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3\tau^3_{(1)}) = \exp\begin{pmatrix} \mathrm{i}\theta^3 & & \\ & 0 & \\ & & -\mathrm{i}\theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta^3) & & \\ & 1 & \\ & & \exp(-\mathrm{i}\theta^3) \end{pmatrix}$$

- 从而 $D^{(1)}[R_z(2\pi)] = D^{(1)}[R_z(0)] = \mathbf{1}$，即**转动** 2π **角**能够回复到原来的状态
- 这表明**自旋为** 1 的**粒子态**转动的情况与**三维空间**中的**矢量相同**
- 另一方面，$D^{(1/2)}$ 中相应的表示矩阵为

$$D^{(1/2)}[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3\tau^3_{(1/2)}) = \exp\begin{pmatrix} \mathrm{i}\theta^3/2 & \\ & -\mathrm{i}\theta^3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta^3/2) & \\ & \exp(-\mathrm{i}\theta^3/2) \end{pmatrix}$$

- 从而 $D^{(1/2)}[R_z(4\pi)] = D^{(1/2)}[R_z(0)] = \mathbf{1}$，即**转动** 4π **角**才能**回复**到原来的状态
- 可见，**自旋为** $1/2$ 的**粒子态**转动的角度只有**三维空间**中**矢量转动角度**的**一半**，这是**自旋** $1/2$ 的特征

有质量粒子的螺旋度

- 类似于**总角动量算符 $\mathbf{J}$**，**自旋角动量算符 $\mathbf{S}$** 也满足**对易关系** $[S^i, S^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} S^k$
- 从而 **2 阶 Casimir 算符** $\mathbf{S}^2 \equiv S^i S^i$ 满足 $[\mathbf{S}^2, S^i] = 0$
- 对于**非零**的动量 $\mathbf{p}$，记它的**归一化方向矢量**为 $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$
- 引入**螺旋度** (helicity) **算符** $S_{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}$，它是**自旋角动量算符**在**动量方向**上的**投影**
- 由于 $[\mathbf{S}^2, S_{\mathbf{p}}] = \hat{p}^i [\mathbf{S}^2, S^i] = 0$，$\mathbf{S}^2$ 与 $S_{\mathbf{p}}$ 可具有共同本征态 $|s, \lambda\rangle$，满足本征方程

$$\mathbf{S}^2 |s, \lambda\rangle = s(s+1) |s, \lambda\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} |s, \lambda\rangle = \lambda |s, \lambda\rangle$$

- 其中 λ 是**螺旋度本征值**
- 可以论证 (参考**习题 3.6**)，**螺旋度** λ 类似于**磁量子数** σ，具有 $2s+1$ 个取值

$$\lambda = s, s-1, \cdots, -s+1, -s$$

- 因此，对于**自旋为** s 的**有质量粒子**，也可以用**螺旋度** λ 来描述它的 $2s+1$ **种自旋极化态**

Lorentz 群和 Poincaré 群的覆盖群

- 由于包含**双连通**的**子群** $\mathbf{SO(3)}$，**固有保时向 Lorentz 群** $\mathbf{SO^{\uparrow}(1,3)}$ 也是**双连通**的
- 它的**覆盖群**是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 **2 阶特殊线性群** $\mathbf{SL(2,\mathbb{C})}$，见**习题 3.7**
- 在 **Poincaré 群空间**中，**与恒元连通的部分**对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 与时空平移群的半直积群，它是**双连通**的
- 相应的**覆盖群**是 $\mathbf{SL(2,\mathbb{C})}$ 与**时空平移群**的**半直积群**
- 3.1.1 和 3.1.2 小节的讨论**没有**在**量子 Poincaré 变换**的**同态关系**

$$U(\Lambda_2,a_2)U(\Lambda_1,a_1)=U(\Lambda_2\Lambda_1,\Lambda_2a_1+a_2)$$

中**引入相位因子**

- 这相当于在**覆盖群**的**线性表示**中进行讨论，因而导出的结果是**合理**的

3.3.2 小节　无质量的粒子

- 对于**无质量的粒子**，$p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$
- 此时 p^μ 是**类光矢量**，取**标准四维动量**为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$，其中 $\kappa > 0$
- 相应三维动量 $\mathbf{k}$ **沿 z 轴方向**，相应**小群**中的任意**变换** $W^\mu{}_\nu$ 满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$
- 为了知道保持 k^μ 不变的小群是什么，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu/\kappa = (1, 0, 0, 1)$
- 由 $W^\mu{}_\nu \tilde{k}^\nu = W^\mu{}_\nu k^\nu/\kappa = k^\mu/\kappa = \tilde{k}^\mu$ 可知，$\tilde{k}^\mu$ 也在小群变换下不变

3.3.2 小节　无质量的粒子

- 对于**无质量的粒子**，$p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$
- 此时 p^μ 是**类光矢量**，取**标准四维动量**为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$，其中 $\kappa > 0$
- 相应三维动量 $\mathbf{k}$ **沿 z 轴方向**，相应**小群**中的任意**变换** $W^\mu{}_\nu$ 满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$
- 为了知道保持 k^μ 不变的小群是什么，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu/\kappa = (1, 0, 0, 1)$
- 由 $W^\mu{}_\nu \tilde{k}^\nu = W^\mu{}_\nu k^\nu/\kappa = k^\mu/\kappa = \tilde{k}^\mu$ 可知，$\tilde{k}^\mu$ 也在小群变换下不变
- 相应**协变矢量**满足 $\tilde{k}_\mu = \tilde{k}_\nu (W^{-1})^\nu{}_\mu$，再引入**类时 Lorentz 矢量** $\tilde{t}^\mu = (1, 0, 0, 0)$
- 记 $t^\mu \equiv W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu$，推出 $t^\mu \tilde{k}_\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho (W^{-1})^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho = \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\nu = 1$
- 满足这样一个 $1 = t^\mu \tilde{k}_\mu = t^0 - t^3$ 条件的 t^μ 一般形式为 $t^\mu = (1 + \zeta, \alpha, \beta, \zeta)$
- 由于 $(1+\zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = t^\mu t_\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{t}_\rho (W^{-1})^\rho{}_\mu = \tilde{t}^\nu \tilde{t}_\rho \delta^\rho{}_\nu = \tilde{t}^\nu \tilde{t}_\nu = 1$
- ζ 与 α、β 的关系为 $\zeta = \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad \alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$
- 实数 α 和 β 的取值**不受约束**

小群变换 $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)$

- 考虑**固有保时向 Lorentz 变换** $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{pmatrix}$
- 它满足 $S^{\mathrm{T}}gS = g$、$\det(S) = 1$ 和 $S^{0}{}_{0} \geq +1$，且第一列是 $t^{\mu} = (1+\zeta,\alpha,\beta,\zeta)$
- $S(\alpha,\beta)$ 对 $\tilde{t}^{\mu} = (1,0,0,0)$ 的作用为 $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)\tilde{t}^{\nu} = t^{\mu} = W^{\mu}{}_{\nu}\tilde{t}^{\nu}$

小群变换 $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)$

- 考虑**固有保时向 Lorentz 变换** $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{pmatrix}$
- 它满足 $S^{\mathrm{T}} g S = g$、$\det(S) = 1$ 和 $S^{0}{}_{0} \geq +1$，且第一列是 $t^{\mu} = (1+\zeta, \alpha, \beta, \zeta)$
- $S(\alpha,\beta)$ 对 $\tilde{t}^{\mu} = (1,0,0,0)$ 的作用为 $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)\tilde{t}^{\nu} = t^{\mu} = W^{\mu}{}_{\nu}\tilde{t}^{\nu}$
- 这意味着 $\tilde{t}^{\rho} = [S^{-1}(\alpha,\beta)]^{\rho}{}_{\mu} S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)\tilde{t}^{\nu} = [S^{-1}(\alpha,\beta)]^{\rho}{}_{\mu} W^{\mu}{}_{\nu}\tilde{t}^{\nu}$
- 变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 保持**类时矢量** $\tilde{t}^{\mu} = (1,0,0,0)$ **不变**，必定是**空间旋转变换**
- 由 $S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)k^{\nu} = \begin{pmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} = k^{\mu}$ 可知
- $S(\alpha,\beta)$ 是一个**小群变换**

小群变换的一般形式

- 从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 是保持 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 不变的空间旋转变换
- 它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$，满足

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W=R_z(\theta)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\cos\theta&\sin\theta&\\&-\sin\theta&\cos\theta&\\&&&1\end{pmatrix}$$

- 于是，小群变换的最一般形式是 $W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta)$

小群变换的一般形式

- 从而，小群变换 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 是保持 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 不变的空间旋转变换
- 它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$，满足

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W=R_z(\theta)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\cos\theta&\sin\theta&\\&-\sin\theta&\cos\theta&\\&&&1\end{pmatrix}$$

- 于是，小群变换的最一般形式是 $W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta)$
- 通过计算可知，$S(\alpha,\beta)$ 和 $R_z(\theta)$ 分别满足

$$\begin{aligned}S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2)&=S(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)\\R_z(\theta_1)R_z(\theta_2)&=R_z(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

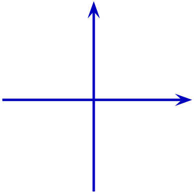
- 从而 $S(\alpha_1,\beta_1)S(\alpha_2,\beta_2)=S(\alpha_2,\beta_2)S(\alpha_1,\beta_1)$，$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2)=R_z(\theta_2)R_z(\theta_1)$
- 因此集合 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 和 $\{R_z(\theta)\}$ 分别构成小群的两个 **Abel 子群**

小群 ISO(2)

- 进一步推出 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$
- 这意味着 $S(\alpha,\beta)$ 在**任意小群元素相似变换**下的结果仍然是**子群** $\{S(\alpha,\beta)\}$ 中的元素
- 对于这种情况，数学上称 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 是**小群**的**不变子群** (invariant subgroup)

小群 ISO(2)

- 进一步推出 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$
- 这意味着 $S(\alpha,\beta)$ 在**任意小群元素相似变换**下的结果仍然是**子群** $\{S(\alpha,\beta)\}$ 中的元素
- 对于这种情况，数学上称 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 是**小群**的**不变子群** (invariant subgroup)
- 小群变换的**以上乘法关系**与**二维 Euclid 空间**的**等距群 ISO(2)** 中的乘法关系**相同**
- ISO(2) 群变换由**二维平面**上的**平移变换**和**旋转变换**组成
- (α,β) 可作为**二维平移变换**的参数
- 而 θ 是**旋转变换**的参数
- 因此这里的**小群**就是 **ISO(2) 群**



Euclid
(约前 325 至约前 270)

ISO(2) 无穷小变换

现在讨论**小群 ISO(2)** 的**生成元算符**，**ISO(2) 变换**

$$W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta)=\begin{pmatrix}1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta\\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha\\ \beta & 0 & 1 & -\beta\\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

的**无穷小形式**是 $W^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta,\theta)=\delta^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}$，其中**无穷小参数**为

$$\omega^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta & 0\\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha\\ \beta & -\theta & 0 & -\beta\\ 0 & \alpha & \beta & 0\end{pmatrix},\quad \omega_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu}=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta & 0\\ -\alpha & 0 & -\theta & \alpha\\ -\beta & \theta & 0 & \beta\\ 0 & -\alpha & -\beta & 0\end{pmatrix}$$

故 $\alpha=\omega_{13}=\omega_{01}$，$\beta=\omega_{23}=\omega_{02}$，$\theta=\omega_{21}$

容易验证 $\omega^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}=0$，因而这样的无穷小变换**保持** $k^{\mu}=(\kappa,0,0,\kappa)$ **不变**

ISO(2) 生成元算符

- 相应的无穷小量子变换为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}+\omega) &= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\ &= \mathbb{I} - \mathrm{i}(\omega_{31}J^{31} + \omega_{01}J^{01}) - \mathrm{i}(\omega_{23}J^{23} + \omega_{02}J^{02}) - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} \\ &= \mathbb{I} + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J^3 \end{aligned}$$

- 其中 $J^3 = J^{12}$，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$A \equiv J^{31} - J^{01} = J^2 - K^1, \quad B \equiv -J^{23} - J^{02} = -J^1 - K^2$$

ISO(2) 生成元算符

相应的无穷小量子变换为

$$\begin{aligned} U(1+\omega) &= \mathbb{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\ &= \mathbb{I} - \mathrm{i}(\omega_{31}J^{31}+\omega_{01}J^{01}) - \mathrm{i}(\omega_{23}J^{23}+\omega_{02}J^{02}) - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} \\ &= \mathbb{I} + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J^3 \end{aligned}$$

其中 $J^3 = J^{12}$，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$A \equiv J^{31} - J^{01} = J^2 - K^1, \quad B \equiv -J^{23} - J^{02} = -J^1 - K^2$$

由 Lorentz 代数关系推出小群 ISO(2) 的生成元算符 J^3、A 和 B 的对易关系

$$\begin{aligned} [J^3, A] &= [J^3, J^2] - [J^3, K^1] = -\mathrm{i}J^1 - \mathrm{i}K^2 = \mathrm{i}B, \\ [J^3, B] &= -[J^3, J^1] - [J^3, K^2] = -\mathrm{i}J^2 + \mathrm{i}K^1 = -\mathrm{i}A, \\ [A, B] &= -[J^2, J^1] - [J^2, K^2] + [K^1, J^1] + [K^1, K^2] = \mathrm{i}J^3 - \mathrm{i}J^3 = 0 \end{aligned}$$

这与 Poincaré 代数关系中 $[J^3, P^2] = \mathrm{i}P^1$、$[J^3, P^1] = -\mathrm{i}P^2$ 和 $[P^2, P^1] = 0$ **相同**

毕竟 J^3、P^1 和 P^2 生成了 xy 平面的 ISO(2) 群变换

A 和 B 的共同本征态

- A 与 B 是**相互对易**的**厄米算符**，能够具有**共同的本征单粒子态** $|\Psi_{a,b}(k)\rangle$
- 本征值分别为 a 和 b，满足本征方程

$$A\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = a\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle\,, \quad B\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = b\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle$$

- 根据 $R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)$
- 小群 ISO(2) 的**量子变换**满足**同态关系**

$$U^{-1}[R_z(\theta)]U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = U[S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)]$$

- 将上式展开到无穷小参数 α 和 β 的第一阶，得

$$U^{-1}[R_z(\theta)](\mathbb{I} + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)U[R_z(\theta)] = \mathbb{I} + \mathrm{i}(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)A + \mathrm{i}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)B$$

- 由 α 和 β 的**任意性**推出

$$\begin{aligned} U^{-1}[R_z(\theta)]AU[R_z(\theta)] &= A\cos\theta + B\sin\theta \\ U^{-1}[R_z(\theta)]BU[R_z(\theta)] &= -A\sin\theta + B\cos\theta \end{aligned}$$

态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle$ 的 A、B 本征值

- 两边左乘 $U[R_z(\theta)]$，得 $AU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](A\cos\theta + B\sin\theta)$

$$BU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta + B\cos\theta)$$

- 那么，态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle \equiv U[R_z(\theta)]|\Psi_{a,b}(k)\rangle$ 是 A 和 B 的共同本征态：

$$\begin{aligned}
A\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle &= AU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = U[R_z(\theta)](A\cos\theta + B\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle \\
&= U[R_z(\theta)](a\cos\theta + b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle \\
&= (a\cos\theta + b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle \\
B\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle &= BU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta + B\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle \\
&= U[R_z(\theta)](-a\sin\theta + b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k)\rangle \\
&= (-a\sin\theta + b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle
\end{aligned}$$

- 由于**转动角 θ 取连续值**，本征值 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 和 $-a\sin\theta + b\cos\theta$ 也是**连续**的

无质量粒子的螺旋度

- 因此，只要 a 和 b **不全为零**，就有一系列**连续**的单粒子态 $|\Psi_{a,b,\theta}(k)\rangle$
- 但是，实验上**没有观测到**无质量粒子具有以**转动角** θ 作为**连续自由度**的物理态
- 因此，自然界中的**物理态**是 $a=b=0$ 的本征态，只由剩下的**小群生成元算符** J^3 的**本征值** λ 标记，记作 $|\Psi_\lambda(k)\rangle$，满足

$$A\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = 0, \quad B\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = 0, \quad J^3\,|\Psi_\lambda(k)\rangle = \lambda\,|\Psi_\lambda(k)\rangle$$

- J^3 是**总角动量算符 $\mathbf{J}$ 沿 z 轴方向**的分量
- 由于自由的单粒子态**不具有轨道角动量**，$\mathbf{J}$ 在此处只描述**自旋角动量**
- 标准四维动量 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ 对应的**三维动量 $\mathbf{k}$ 也沿着 z 轴方向**
- 因此这里的 J^3 相当于**自旋角动量算符**在**动量方向**上的投影，即**螺旋度算符**
- 从而，λ 就是**螺旋度本征值**，表征**自旋极化**

小群表示矩阵 $D_{\lambda'\lambda}(W)$

🦭 **无穷小量子变换** $U(\mathbf{1}+\omega)=\mathbb{I}+\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B+\mathrm{i}\theta J^3$ 表明

$$\left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\beta=0}=\mathrm{i}A,\quad \left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\beta=0}=\mathrm{i}B,\quad \left.\frac{\mathrm{d}U[R_z(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}=\mathrm{i}J^3$$

🐋 相应的**有限量子变换**是 $U[S(\alpha,\beta)]=\exp(\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B)$ 和 $U[R_z(\theta)]=\exp(\mathrm{i}\theta J^3)$

🐬 **一般小群变换** $W(\alpha,\beta,\theta)=S(\alpha,\beta)R_z(\theta)$ 对应的量子变换为

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)]=U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)]=\exp(\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B)\exp(\mathrm{i}\theta J^3)$$

🐙 作用到**单粒子物理态** $|\Psi_\lambda(k)\rangle$ 上，得

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)]\,|\Psi_\lambda(k)\rangle=\exp(\mathrm{i}\lambda\theta)\,|\Psi_\lambda(k)\rangle$$

🦞 与 $U(W)\,|\Psi_\sigma(k)\rangle=\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle$ 式比较，有 $\sigma=\lambda$，$\sigma'=\lambda'$

$$D_{\lambda'\lambda}(W)=\exp(\mathrm{i}\lambda\theta)\delta_{\lambda'\lambda}$$

无质量粒子螺旋度的 Lorentz 不变性

- 另一方面，$V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p)]R_z[\theta(\Lambda,p)]$ 决定了 θ 对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系 $\theta(\Lambda,p)$
- 一般单粒子态 $|\Psi_\lambda(p)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]\,|\Psi_\lambda(k)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)\,|\Psi_\lambda(p)\rangle &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{\lambda'}(\Lambda p)\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\lambda'} \exp[i\lambda\theta(\Lambda,p)]\delta_{\lambda'\lambda}\,|\Psi_{\lambda'}(\Lambda p)\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp[i\lambda\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\lambda(\Lambda p)\rangle
\end{aligned}$$

无质量粒子螺旋度的 Lorentz 不变性

- 另一方面，$V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p)]R_z[\theta(\Lambda,p)]$ 决定了 θ **对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系 $\theta(\Lambda,p)$**
- **一般单粒子态** $|\Psi_\lambda(p)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]\,|\Psi_\lambda(k)\rangle$ 的**量子 Lorentz 变换**为

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\,|\Psi_\lambda(p)\rangle &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{\lambda'}(\Lambda p)\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\lambda'} \exp[\mathrm{i}\lambda\theta(\Lambda,p)]\delta_{\lambda'\lambda}\,|\Psi_{\lambda'}(\Lambda p)\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp[\mathrm{i}\lambda\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\lambda(\Lambda p)\rangle
\end{aligned}
$$

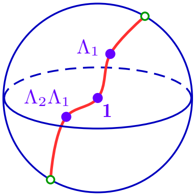
- 这表明 $|\Psi_\lambda(p)\rangle$ 与变换后的态 $U(\Lambda)\,|\Psi_\lambda(p)\rangle$ 具有**相同的 λ**
- 也就是说，量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ **不会混合**具有**不同螺旋度**的无质量粒子态
- $\boxed{\text{对无质量粒子来说，螺旋度 } \lambda \text{ 是固有保时向 Lorentz 变换的不变量}}$，它在所有惯性系中取值**相同**
- 因此，无质量粒子可根据螺旋度 λ 的值**分类**

相位因子

前面提到，固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的群空间是双连通的

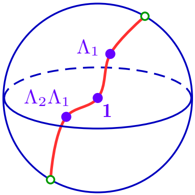
与 $\mathrm{SO}(3)$ 的情况类似，群空间内从恒元出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到恒元的闭合曲线分为两类，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能

由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$



相位因子

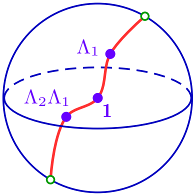
- 前面提到，**固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$** 的群空间是**双连通**的
- 与 $\mathrm{SO}(3)$ 的情况**类似**，群空间内从**恒元**出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到**恒元**的**闭合曲线**分为**两类**，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能
- 由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$
- 如果一条闭合曲线包含的旋转变换**累计绕 z 轴转动角度 $\theta = 2\pi$**，那么它会在 $\mathrm{SO}(3)$ 群空间中经历**奇数次对径点跳跃**，这是因为**累计转动 π 角**时必定到达一个**对径点**



- 对于无质量粒子态，$U(\Lambda)\left|\Psi_\lambda(p)\right\rangle = \dfrac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp[\mathrm{i}\lambda\theta(\Lambda,p)] \left|\Psi_\lambda(\Lambda p)\right\rangle$
- 这条闭合曲线产生**因子** $\exp(\mathrm{i}\lambda\theta) = \exp(2\pi\lambda\mathrm{i})$，它应该就是上面的**相位因子** ± 1

相位因子

- 前面提到，**固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$** 的群空间是**双连通**的
- 与 **$\mathrm{SO}(3)$** 的情况**类似**，群空间内从**恒元**出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到**恒元**的**闭合曲线**分为**两类**，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能



- 由此推出关系式 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1)$
- 如果一条闭合曲线包含的旋转变换**累计绕 z 轴转动角度 $\theta = 2\pi$**，那么它会在 $\mathrm{SO}(3)$ 群空间中经历**奇数次对径点跳跃**，这是因为**累计转动 π 角**时必定到达一个**对径点**
- 对于无质量粒子态，$U(\Lambda)\,|\Psi_\lambda(p)\rangle = \dfrac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp[\mathrm{i}\lambda\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\lambda(\Lambda p)\rangle$
- 这条闭合曲线产生**因子** $\exp(\mathrm{i}\lambda\theta) = \exp(2\pi\lambda\mathrm{i})$，它应该就是上面的**相位因子** ± 1
- 如果一条闭合曲线包含的旋转变换累计绕 z 轴转动 4π **角**，则它会包含**偶数次对径点跳跃**，从而可以**连续地收缩成恒元一点**，相应的**相位因子**是 1，故

$$\exp(4\pi\lambda\mathrm{i}) = 1$$

无质量粒子的自旋量子数

$\exp(4\pi\lambda\mathrm{i}) = 1$ 这个条件限制了**无质量粒子螺旋度** λ 的取值，要求

$$\boxed{\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \cdots}$$

λ 为**整数**意味着 $\exp(2\pi\lambda\mathrm{i}) = +1$，对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的**线性表示**

λ 为**半奇数**意味着 $\exp(2\pi\lambda\mathrm{i}) = -1$，对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的**双值表示**

由于**螺旋度**是**自旋角动量**在动量方向上的投影，**无质量粒子自旋量子数**可取为

$$\boxed{s = |\lambda| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots}$$

这与**有质量粒子**的取值情况**一样**

无质量粒子的自旋量子数

$\exp(4\pi\lambda\mathrm{i}) = 1$ 这个条件限制了无质量粒子螺旋度 λ 的取值，要求

$$\boxed{\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}, \pm2, \pm\frac{5}{2}, \cdots}$$

λ 为整数意味着 $\exp(2\pi\lambda\mathrm{i}) = +1$，对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的线性表示

λ 为半奇数意味着 $\exp(2\pi\lambda\mathrm{i}) = -1$，对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的双值表示

由于螺旋度是自旋角动量在动量方向上的投影，无质量粒子自旋量子数可取为

$$\boxed{s = |\lambda| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots}$$

这与有质量粒子的取值情况一样

根据 λ 的取值为无质量粒子分类，应将 $\lambda = \pm s$ 的两种无质量粒子当作不同粒子

然而，宇称变换使粒子动量方向反转，但不改变角动量方向，因此会改变 λ 的符号，从而联系螺旋度相反的两种无质量粒子

光子、引力子和中微子

如果无质量粒子不参与破坏宇称的相互作用，则螺旋度相反的两种粒子具有相同的相互作用行为，可以把它们当作同一种粒子的两种自由度，从而

> 自旋为 s 的无质量粒子具有 2 种自旋极化态，对应于 2 种螺旋度 $\lambda = \pm s$

实际上，电磁相互作用、强相互作用和引力相互作用都保持宇称守恒

作为电磁场的量子，光子是自旋为 1 的无质量粒子，具有 -1 和 $+1$ 两种螺旋度，分别对应于真空电磁波的左旋圆极化和右旋圆极化

假想的引力子 (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度

光子、引力子和中微子

如果无质量粒子不参与破坏宇称的相互作用，则螺旋度相反的两种粒子具有相同的相互作用行为，可以把它们当作同一种粒子的两种自由度，从而

> **自旋为 s 的无质量粒子具有 2 种自旋极化态，对应于 2 种螺旋度 $\lambda = \pm s$**

实际上，电磁相互作用、强相互作用和引力相互作用都保持宇称守恒

作为电磁场的量子，光子是自旋为 1 的无质量粒子，具有 -1 和 $+1$ 两种螺旋度，分别对应于真空电磁波的左旋圆极化和右旋圆极化

假想的引力子 (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度

标准模型中自旋为 $1/2$ 的各种中微子都没有质量，参与破坏宇称的弱相互作用

三代左旋正中微子 ν_e、ν_μ 和 ν_τ 的螺旋度是 $-1/2$，相应的反粒子是螺旋度为 $+1/2$ 的右旋反中微子 $\bar{\nu}_e$、$\bar{\nu}_\mu$ 和 $\bar{\nu}_\tau$

对左旋正中微子态作宇称变换将得到右旋正中微子态，但是，在实验中没有发现参与弱相互作用的右旋正中微子，因而标准模型没有引入它们