

量子场论

标准模型简介

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 1 月 12 日



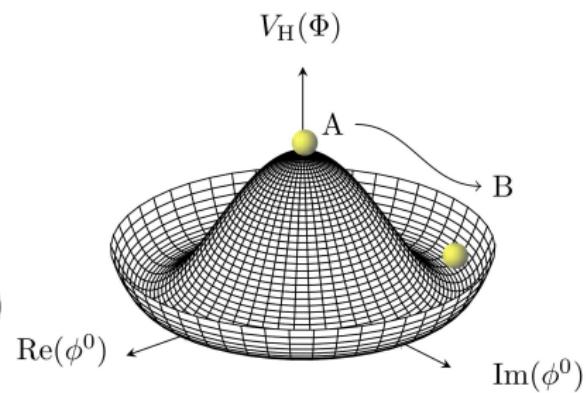
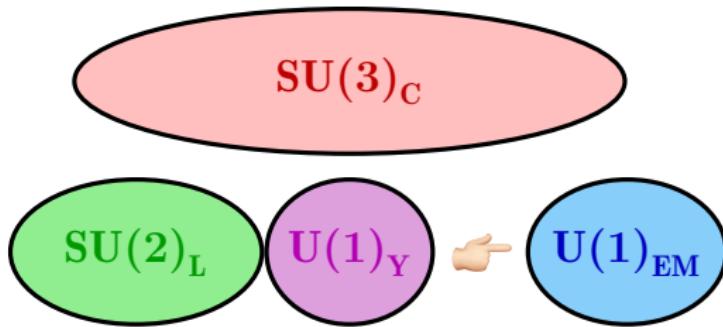
粒子物理标准模型

粒子物理**标准模型**是一个 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范场论

模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用

$SU(3)_C$ 部分描述**强相互作用**，称为**量子色动力学**，规范玻色子是**胶子**

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 部分描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱规范理论**，在这个理论中引入一个 **Higgs** 标量二重态，从而引起规范群的**对称性自发破缺**，使得 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群破缺为 $U(1)_{EM}$ 群



基本粒子质量起源

🍔 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

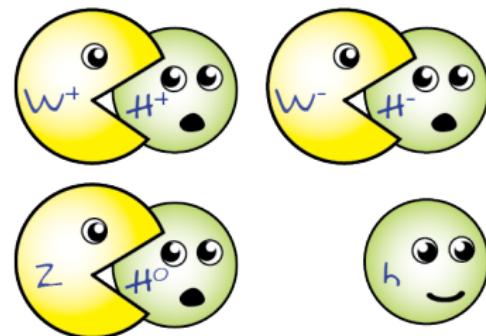
🍕 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得质量，成为 W^\pm 玻色子和 Z^0 玻色子，传递弱相互作用

🍰 剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递电磁相互作用

🌭 与 Higgs 场的 Yukawa 耦合导致左手和右手费米子组合成 Dirac 费米子，并获得质量

🦑 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

🥐 1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理



Higgs 玻色子

非 Abel 规范理论

♪♪ 非 Abel 群的生成元彼此不对易，因而规范变换形式与 U(1) 群 (Abel 群) 不同

🎷 1954 年，杨振宁和 Robert Mills 提出**非 Abel 规范理论**，也称为 **Yang-Mills 理论**，其规范场称为 **Yang-Mills 场**

🐎 对于非 Abel 的 Lie 群，生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ ，依赖时空坐标的群么正变换为 $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ ，旋量场多重态 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu^a(x)$ 的**规范变换**是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^aU^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

🍪 定义**协变导数** $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$ ，就可以利用 $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ 推出

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[\partial_\mu - ig \left(U A_\mu^a t^a U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \right) \right] U \psi \\ &= UU^\dagger(\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu \psi - igU A_\mu^a t^a \psi + U(\partial_\mu U^\dagger)U\psi \\ &= U(\partial_\mu - igU A_\mu^a t^a)\psi + U\partial_\mu(U^\dagger U)\psi = U(x)D_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

🍟 具有**非 Abel 规范对称性**的拉氏量是 $\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$ ，其中规范场的**场强张量** $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$

量子色动力学

量子色动力学 (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**，是 $SU(3)_C$ 非 **Abel** 规范理论，规范场 $G_\mu^a(x)$ 对应于 8 种胶子，夸克旋量场 $q(x)$ 是 $SU(3)_C$ 三重态，拉氏量

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a$ ，场强张量 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

g_s 称为**强耦合常数**，**结构常数** f^{abc} 对 3 个指标全反对称，独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

 $t^a = \lambda^a/2$ 是 $SU(3)_C$ 基础表示的生成元，其中 λ^a 是 8 个 **Gell-Mann 矩阵**

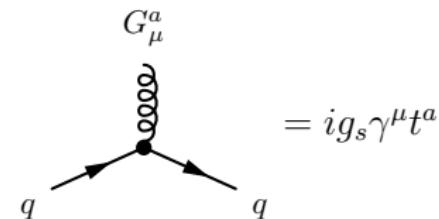
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

QCD 相互作用顶点

🍩 \mathcal{L}_{QCD} 中 $g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$ 项的相互作用顶点如右图

.– $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ 项带来非 Abel 规范理论**特有的**以下**规范玻色子自相互作用顶点**——胶子的**三线性**和**四线性**自相互作用顶点



$$= g_s f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

$$= -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

在 QED 中，电磁耦合常数 $\alpha = e^2/(4\pi)$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ 随能标升高而减小

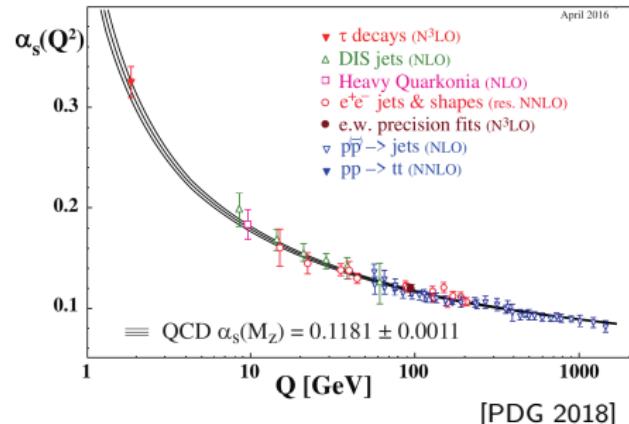
由于高能标意味着短距离，这个特性称为 **QCD 的渐近自由**

随着能标下降， α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中

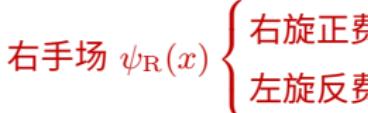


旋量场手征性与宇称不守恒

 利用**左手**投影算符 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ 和**右手**投影算符 $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为**左手旋量场** $\psi_L \equiv P_L \psi$ 和**右手旋量场** $\psi_R \equiv P_R \psi$

 对于**无质量**旋量场，或在可忽略质量的**高能极限**下，手征性等价于螺旋度

 左手场 $\psi_L(x)$  左旋正费米子
右旋反费米子 右手场 $\psi_R(x)$  右旋正费米子
左旋反费米子

 质量项 $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$ 相当于左右手旋量场的耦合项

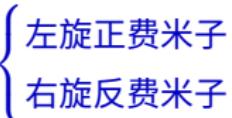
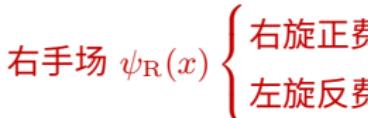
 在空间反射变换下，动量方向反转，自旋方向不变，因而螺旋度**符号翻转**

旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影算符 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ 和右手投影算符 $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为左手旋量场 $\psi_L \equiv P_L \psi$ 和右手旋量场 $\psi_R \equiv P_R \psi$

 对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

 左手场 $\psi_L(x)$  右手场 $\psi_R(x)$ 

 质量项 $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$ 相当于左右手旋量场的耦合项

 在空间反射变换下，动量方向反转，自旋方向不变，因而螺旋度符号翻转

 对于宇称守恒的理论，如量子电动力学和量子色动力学，存在空间反射对称性，左右手旋量场具有相同的相互作用

 在弱相互作用中，宇称不守恒，不存在空间反射对称性，其根源在于左右手旋量场参与不同的规范相互作用

电弱规范理论

III 电弱规范理论是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

🐙 $SU(2)_L$ 的生成元称为弱同位旋 T^a , $U(1)_Y$ 的生成元称为弱超荷 Y

🦀 电荷 $Q = T^3 + Y$ 是 T^3 和 Y 的线性组合

🐟 左手旋量场构成 $SU(2)_L$ 二重态, 右手旋量场则是 $SU(2)_L$ 单态

统一记号	第1代	第2代	第3代	T^3	Y	Q
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1/2	-1/2	0
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	1/2	1/6	2/3
ℓ_{iR}	e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
u_{iR}	u_R	c_R	t_R	0	2/3	2/3
d'_{iR}	d'_R	s'_R	b'_R	0	-1/3	-1/3

🐟 规范本征态 d'_i 通过 CKM 矩阵 V_{ij} 与质量本征态 d_i 联系起来: $d'_i = V_{ij} d_j$

费米子的电弱规范不变拉氏量



三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{Q}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{iR} + \bar{u}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\gamma^\mu D_\mu d'_{iR}$$

 SU(2)_L 二重态 Q_{iL} 和 L_{iL} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig\mathbf{W}_\mu^a T^a - ig'Y\mathbf{B}_\mu$ ，其中 $T^a = \sigma^a/2$ ；SU(2)_L 单态 ℓ_{iR} 、 u_{iR} 和 d'_{iR} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig'Y\mathbf{B}_\mu$

 这里**没有质量项**：质量项耦合左右手旋量场，从而破坏规范对称性

费米子的电弱规范不变拉氏量



三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{Q}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{iR} + \bar{u}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\gamma^\mu D_\mu d'_{iR}$$

SU(2)_L 二重态 Q_{iL} 和 L_{iL} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'Y B_\mu$ ，其中 $T^a = \sigma^a/2$ ；SU(2)_L 单态 ℓ_{iR} 、 u_{iR} 和 d'_{iR} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig'Y B_\mu$

这里**没有质量项**：质量项耦合左右手旋量场，从而破坏规范对称性

规范场 $W_\mu^a(x)$ ($a = 1, 2, 3$) 和 $B_\mu(x)$ 跟**左手旋量场的耦合与右手旋量场不同**，而电磁场 $A_\mu(x)$ 却**相同** 为了得到电磁相互作用，需要把 W_μ^3 和 B_μ **混合**起来

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_W \equiv \sqrt{1 - s_W^2}$$

g 是 SU(2)_L 规范耦合， g' 是 U(1)_Y 规范耦合，转动角 θ_W 称为 **Weinberg 角**

A_μ 对应于**光子**，传递电磁相互作用，**电磁耦合** $e = g s_W = g' c_W$

Z_μ 和 $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ 对应于 **Z^0 和 W^\pm 玻色子**，传递弱相互作用

费米子的电弱规范相互作用

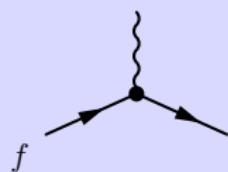


费米子电弱规范相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset eA_\mu J_{\text{EM}}^\mu + gZ_\mu J_Z^\mu + g(W_\mu^+ J_W^{+,\mu} + \text{H.c.})$

电磁流 $J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^\mu f$, **弱带电流** $J_W^{+,\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{i\text{L}} \gamma^\mu V_{ij} d_{j\text{L}} + \bar{\nu}_{i\text{L}} \gamma^\mu \ell_{i\text{L}})$

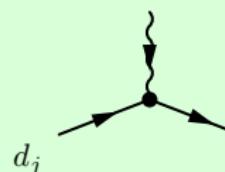
弱中性流 $J_Z^\mu \equiv \frac{1}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f$, $g_V^f \equiv T_f^3 - 2Q_f s_W^2$, $g_A^f \equiv T_f^3$

A_μ



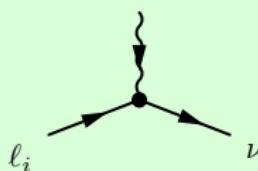
$$= iQ_f e \gamma^\mu$$

W_μ



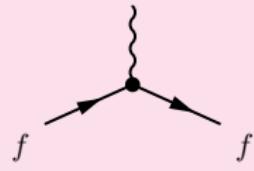
$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_{\text{L}}$$

W_μ



$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_{\text{L}}$$

Z_μ



$$= i \frac{g}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5)$$

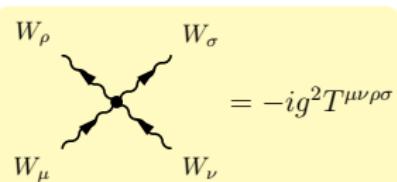
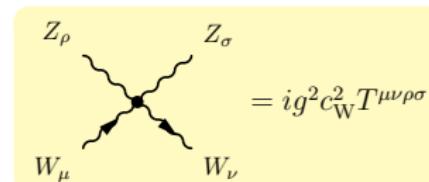
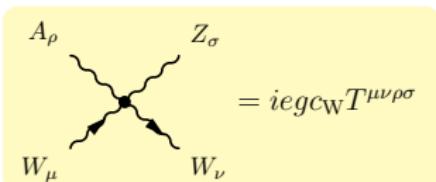
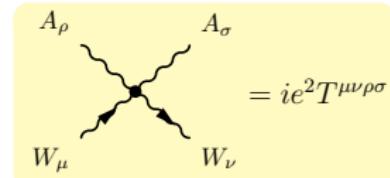
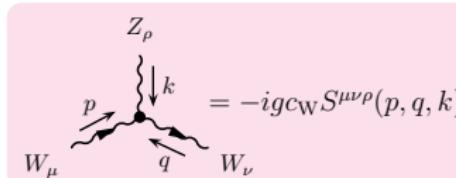
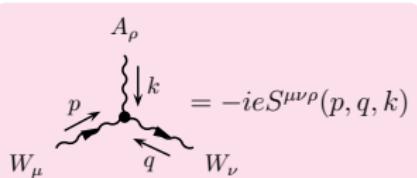
电弱规范玻色子的自相互作用



电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

场强张量 $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$, $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$



$$S^{\mu\nu\rho}(p, q, k) \equiv g^{\mu\nu}(p - q)^\rho + g^{\nu\rho}(q - k)^\mu + g^{\rho\mu}(k - p)^\nu$$

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$$

Brout-Englert-Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但上述 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论的拉氏量还没有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

😢 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

😢 直接引入旋量场的质量项会破坏 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性

Brout-Englert-Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但上述 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论的拉氏量还没有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

😢 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

😢 直接引入旋量场的质量项会破坏 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性

🤔 为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入 Brout-Englert-Higgs (BEH) 机制，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺

💡 引进 Higgs 标量场 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ ， ϕ^+ 和 ϕ^0 都是复标量场； Φ 是 $SU(2)_L$ 二重态，具有弱超荷 $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

⚽ 协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ ， $T^a = \sigma^a/2$

🏈 $V_H(\Phi)$ 是 Higgs 标量场的势能项，依赖于 $\Phi^\dagger \Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

自发对称性破缺

 Higgs 场 **势能** 的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定；假设 $\lambda > 0$

 如果 $\mu^2 < 0$ ，势能项 $V_H(\Phi)$ 的最小值对应于 $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为 $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下**不变**，故**规范对称性未受到破坏**

自发对称性破缺

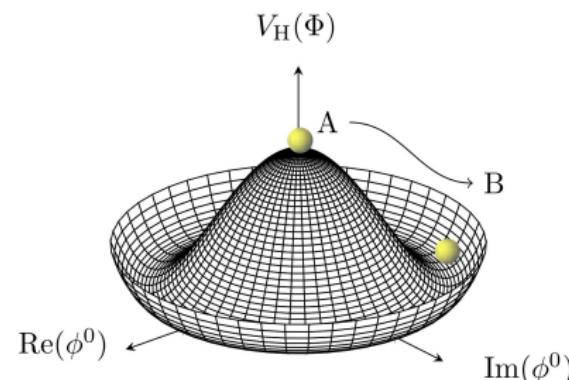
 Higgs 场势能的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定；假设 $\lambda > 0$

 如果 $\mu^2 < 0$ ，势能项 $V_H(\Phi)$ 的最小值对应于 $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为 $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏

 如果 $\mu^2 > 0$ ， $\Phi^\dagger \Phi = 0$ 处变成 $V_H(\Phi)$ 的极大值，而最小值位于 $\Phi^\dagger \Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上，其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

 若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_H(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现右图所示墨西哥草帽状的形式；Higgs 场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点，不失一般性，可取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

 电弱规范变换会改变这个期待值，故真空态不满足电弱规范对称性；这种拉氏量满足对称性、真空态却不能满足的现象称为对称性自发破缺



希格斯玻色子



以上述真空期待值 $\langle \Phi \rangle$ 为基础, 考虑沿 ϕ^0 实轴扰动的实标量场 $H(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2$$



这种参数化方法称为么正规范, 其它规范可由 $SU(2)_L$ 规范变换得到

希格斯玻色子



以上述真空期待值 $\langle \Phi \rangle$ 为基础, 考虑沿 ϕ^0 实轴扰动的实标量场 $H(x)$

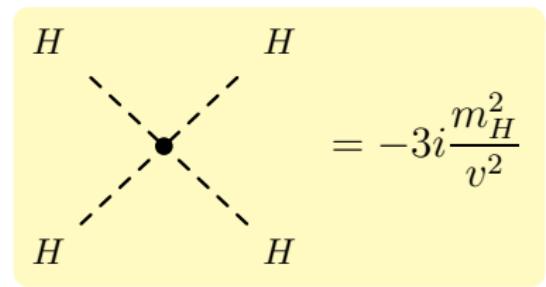
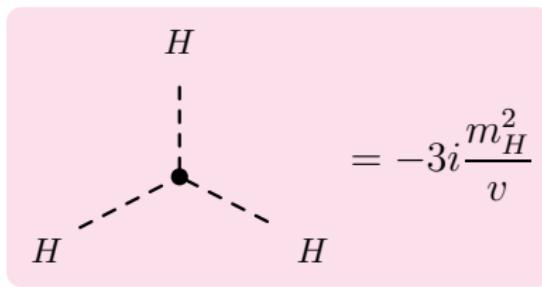
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2$$



这种参数化方法称为 **么正规范**, 其它规范可由 $SU(2)_L$ 规范变换得到

$$\text{🍔 } -V_H(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2v^2 - \frac{1}{2}m_H^2H^2 - \frac{m_H^2}{2v}H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2}H^4$$

🍞 $m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$, 实标量场 H 对应于一个 **质量为 m_H** 的中性标量粒子 H^0 , 称为 **Higgs 玻色子**, 具有 **三线性和四线性自相互作用**



规范玻色子质量

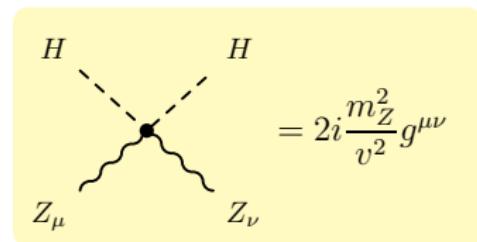
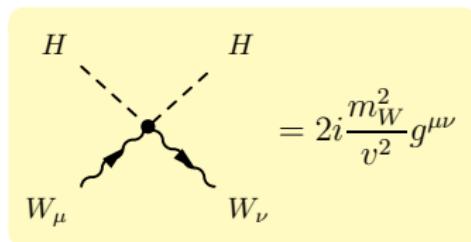
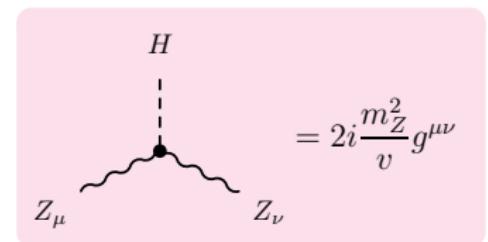
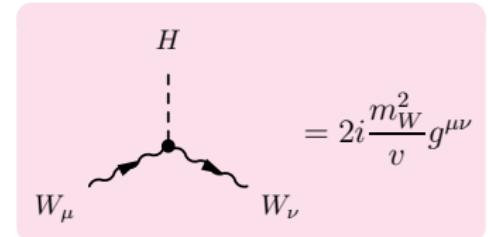
在么正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} (\partial^\mu H) (\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v} H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v} H Z_\mu Z^\mu + \frac{m_W^2}{v^2} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2} H^2 Z_\mu Z^\mu$$

🍎 $m_W \equiv \frac{1}{2} g v, \quad m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v$

🍸 对称性自发破缺之后， W^\pm 和 Z^0 规范玻色

子获得质量 m_W 和 m_Z ，有 3 个希格斯场自由度变成它们的纵向极化分量



费米子质量



Higgs 场与旋量场之间能够发生电弱规范不变的 Yukawa 相互作用

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_d^{ij} \bar{Q}_{iL} d'_{jR} \Phi - y_{u_i} \bar{Q}_{iL} u_{iR} \tilde{\Phi} - y_{\ell_i} \bar{\ell}_{iL} \ell_{iR} \Phi + \text{H.c.}, \quad \tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^*$$



Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵 V 将 \tilde{y}_d^{ij} 对角化，满足

$$V_{li}^\dagger \tilde{y}_d^{ij} V_{jk} = y_{dk} \delta_{lk}$$



对称性自发破缺之后，Yukawa 耦合项化为

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i$$

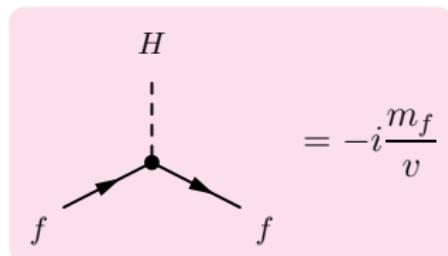


$$m_{d_i} \equiv \frac{y_{d_i} v}{\sqrt{2}}, \quad m_{u_i} \equiv \frac{y_{u_i} v}{\sqrt{2}}, \quad m_{\ell_i} \equiv \frac{y_{\ell_i} v}{\sqrt{2}}$$



可见，费米子获得了质量

费米子与 Higgs 玻色子发生 Yukawa 相互作用，耦合常数正比于费米子质量



夸克味混合



在标准模型中, 不失一般性, 可以将上型夸克的规范态就取为质量态, 而下型夸克的规范态与质量态通过 **CKM 矩阵 V** 联系:

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

⚓ 概率守恒要求 V 是正矩阵, 标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ c_{23} & s_{23} & \\ -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} & \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & c_{13} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} s_{ij} &\equiv \sin \theta_{ij} \\ c_{ij} &\equiv \cos \theta_{ij} \end{aligned}$$

🔑 V 包含 3 个转动角 $\theta_{12} \simeq 13^\circ$, $\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$, $\theta_{13} \simeq 0.20^\circ$,
1 个引起 **CP 破坏** 的复相角 $\delta \simeq 71^\circ$

CKM 矩阵元



拟合实验数据得到 **CKM 矩阵元的模** 为

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.97446 \pm 0.00010 & 0.22452 \pm 0.00044 & 0.00365 \pm 0.00012 \\ 0.22438 \pm 0.00044 & 0.97359^{+0.00010}_{-0.00011} & 0.04214 \pm 0.00076 \\ 0.00896^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.04133 \pm 0.00074 & 0.999105 \pm 0.000032 \end{pmatrix}$$



如果忽略第三代夸克的混合, CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C & \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_C \text{ 称为 } \text{Cabibbo 角}, \text{ 满足 } \sin \theta_C = |V_{12}|$$



CKM 矩阵的**非对角元**非零



弱带电流可以耦合**不同代的夸克**

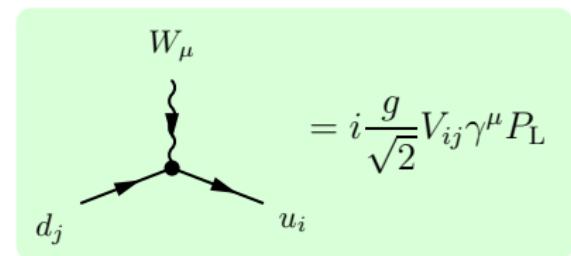


$W^+ \rightarrow u\bar{d}'$ 过程在质量态上表现为

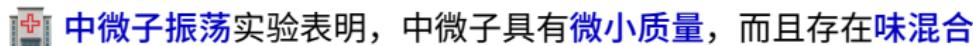
$$W^+ \rightarrow u\bar{d} \text{ (} V_{11} \text{ 引起)}$$

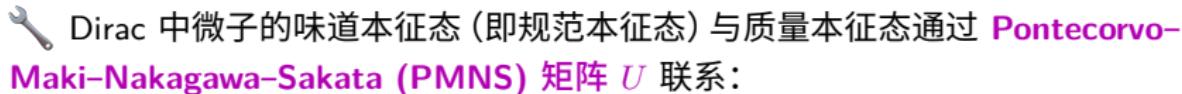
$$W^+ \rightarrow u\bar{s} \text{ (} V_{12} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{b} \text{ (} V_{13} \text{ 引起)}$$

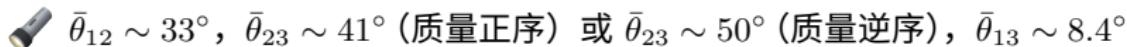


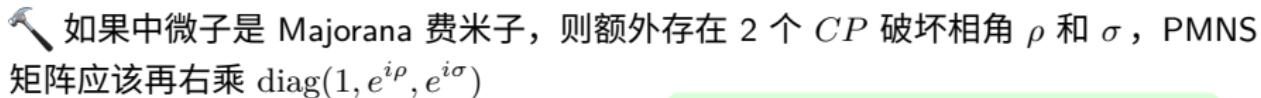
超出标准模型：中微子味混合

 中微子振荡实验表明，中微子具有微小质量，而且存在味混合

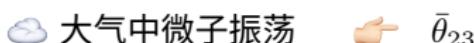
 Dirac 中微子的味道本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵 U 联系：

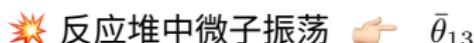
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$

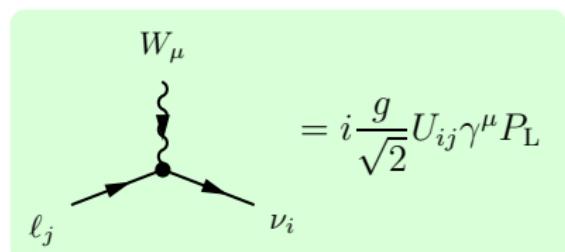
 $\bar{\theta}_{12} \sim 33^\circ$, $\bar{\theta}_{23} \sim 41^\circ$ (质量正序) 或 $\bar{\theta}_{23} \sim 50^\circ$ (质量逆序), $\bar{\theta}_{13} \sim 8.4^\circ$

 如果中微子是 Majorana 费米子，则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ρ 和 σ ，PMNS 矩阵应该再右乘 $\text{diag}(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$

 太阳中微子振荡  $\bar{\theta}_{12}$

 大气中微子振荡  $\bar{\theta}_{23}$

 反应堆中微子振荡  $\bar{\theta}_{13}$



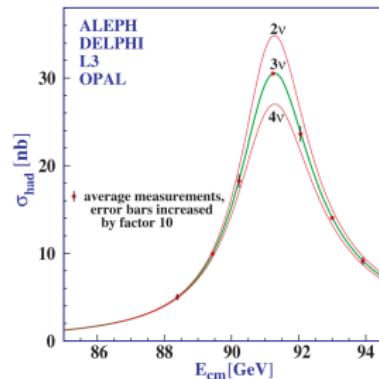
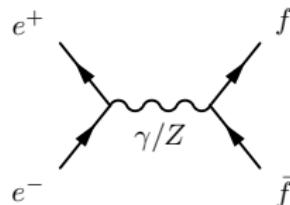
e^+e^- 湮灭



通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

🚀 $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的**共振峰**



e^+e^- 湮灭

通过电磁流和弱中性流相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

在 $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰

受共振态和弱中性流影响较小时，

截面比 $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ 体现

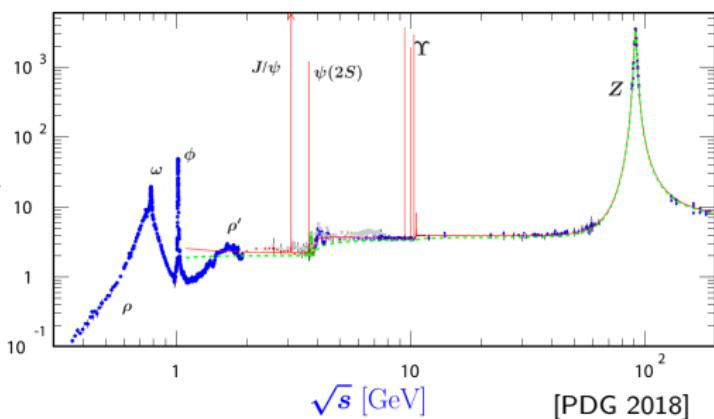
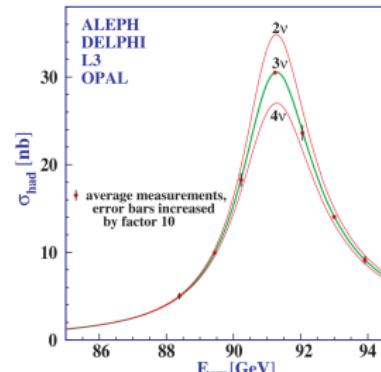
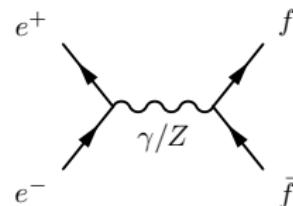
夸克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

在 $1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.6 \text{ GeV}$ 处，

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad \textcolor{blue}{R}$$

在 $3.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ GeV}$ 处，

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$



β 衰变



弱相互作用引起原子核 β 衰变

质量数为 $A = Z + N$ 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子，通过 β 衰变会变成具有 $Z + 1$ 个质子和 $N - 1$ 个中子的原子核 A' ，即

$$A(Z, N) \rightarrow A'(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$



在核子层次，以上过程体现为中子 β 衰变，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$



在夸克层次，以上过程体现为 d 夸克 β 衰变

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

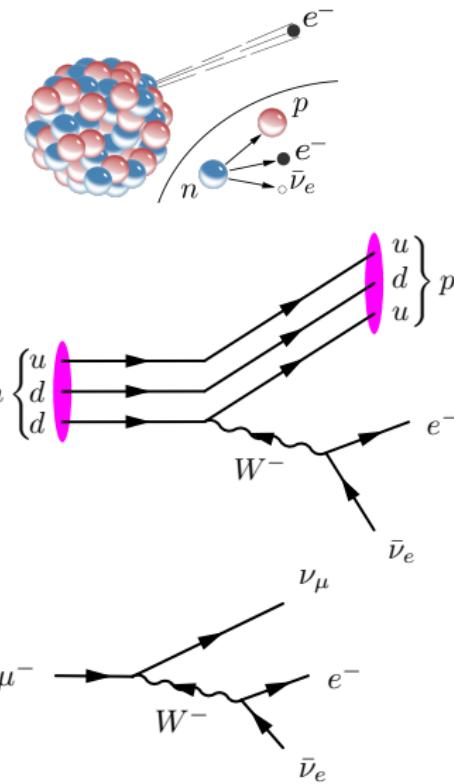


此过程来自 W^- 玻色子传递的弱带电流相互作用



在轻子方面，类似的过程有 μ 子衰变

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变

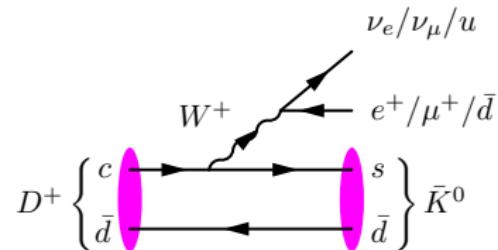


$D^+(c\bar{d})$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变, 称为旁观者



介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变



$D^+(c\bar{d})$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变, 称为旁观者

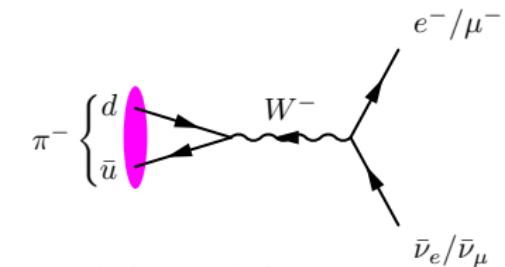
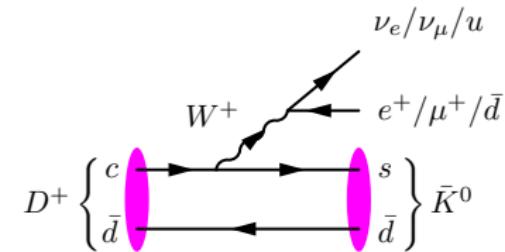


$\pi^-(\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

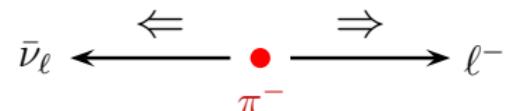
$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



π^- 静止系中, 角动量守恒要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同, 但弱带电流只耦合左旋费米子和右旋反费米子, 需要由质量翻转螺旋度



$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$



$\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%, $\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%