



粒子物理标准模型

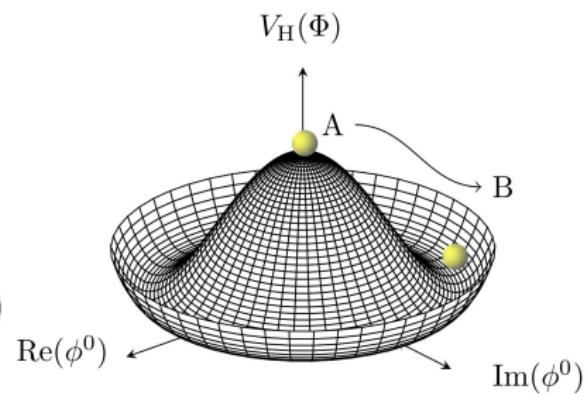
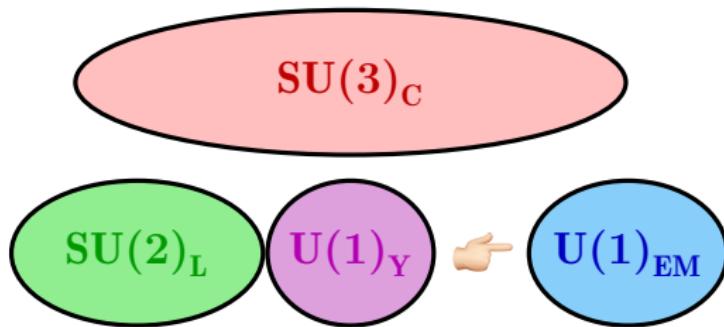


粒子物理**标准模型**是一个 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范场论

 模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用

 $SU(3)_C$ 部分描述**强相互作用**，称为**量子色动力学**，规范玻色子是**胶子**

 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 部分描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱规范理论**，在这个理论中引入一个 **Higgs** 标量二重态，从而引起规范群的**对称性自发破缺**，使得 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群破缺为 **$U(1)_{EM}$ 群**



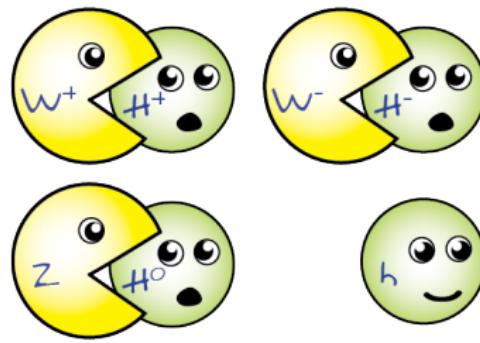


基本粒子质量起源

🍔 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都**没有质量**，具有不同量子数

pizza 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得**质量**，成为 W^\pm 玻色子和 Z^0 玻色子，传递**弱相互作用**

cake 剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，传递**电磁相互作用**



Higgs 玻色子



基本粒子质量起源

🍔 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都**没有质量**，具有不同量子数

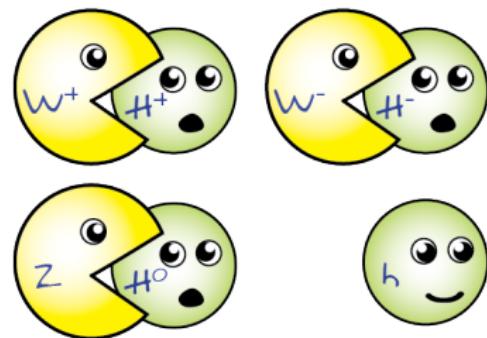
🍕 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个 Higgs 自由度结合，从而获得**质量**，成为 W^\pm 玻色子和 Z^0 玻色子，传递**弱相互作用**

🍰 剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，传递**电磁相互作用**

🍒 与 Higgs 场的 Yukawa 耦合导致左手和右手费米子组合成 Dirac 费米子，并获得**质量**

🥨 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

🥐 1998 年实验发现中微子振荡，证明**中微子具有质量**，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理



Higgs 玻色子

非 Abel 规范理论

♪♪ 非 Abel 群的生成元彼此不对易，因而规范变换形式与 U(1) 群（Abel 群）不同

鼓 1954 年，杨振宁和 Robert Mills 提出**非 Abel 规范理论**，也称为 **Yang-Mills 理论**，其规范场称为 **Yang-Mills 场**

马 对于非 Abel 的 Lie 群，生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$ ，依赖时空坐标的群么正变换为 $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ ，旋量场多重态 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu^a(x)$ 的规范变换是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^a U^\dagger(x) - \frac{i}{g} U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

饼干 定义协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a t^a$ ，就可以利用 $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ 推出

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[\partial_\mu + ig \left(U A_\mu^a t^a U^\dagger - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \right) \right] U \psi \\ &= UU^\dagger (\partial_\mu U) \psi + U \partial_\mu \psi + ig U A_\mu^a t^a \psi + U (\partial_\mu U^\dagger) U \psi \\ &= U (\partial_\mu + ig A_\mu^a t^a) \psi + U \partial_\mu (U^\dagger U) \psi = U(x) D_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

薯条 具有**非 Abel 规范对称性**的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$$

球 规范场的**场强张量** $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

量子色动力学



量子色动力学 (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是 **SU(3)_C** 非 Abel 规范理论, 规范场 $G_\mu^a(x)$ 对应于 8 种胶子, 夸克旋量场 $q(x)$ 是 **SU(3)_C** 三重态, 拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q} (\text{i} \gamma^\mu D_\mu - m_q) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

◆ 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + \text{i} g_s G_\mu^a t^a$, 场强张量 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

◆ g_s 称为强耦合常数, 结构常数 f^{abc} 对 3 个指标全反对称, 独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

◆ $t^a = \lambda^a/2$ 是 **SU(3)_C** 基础表示的生成元, 其中 λ^a 是 8 个 **Gell-Mann** 矩阵

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{i} & 0 \\ \text{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

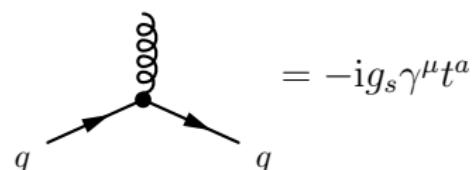
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{i} \\ 0 & \text{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

QCD 相互作用顶点

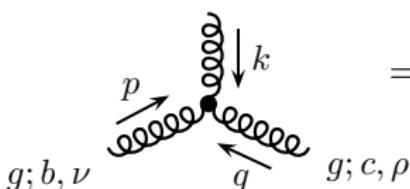
● \mathcal{L}_{QCD} 中 $-g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$ 项的相互作用顶点如右图

● $-G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}/4$ 项带来**非 Abel 规范理论**特有的以下**规范玻色子自相互作用顶点**——胶子 g 的**三线性和四线性**自相互作用顶点

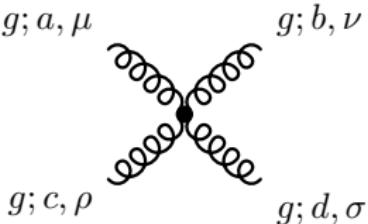
$g; a, \mu$



$g; a, \mu$



$g; a, \mu$



$$+ f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

$$+ f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

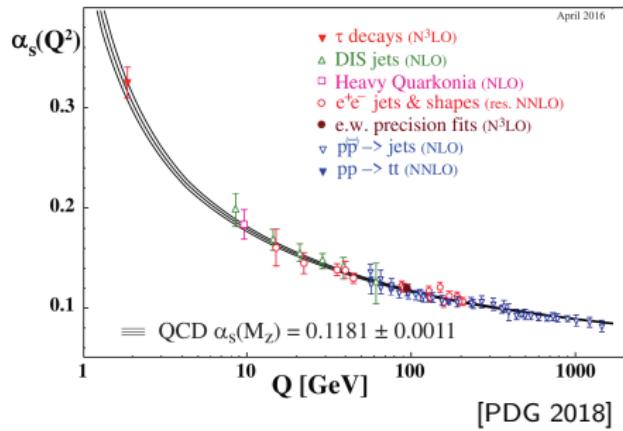
渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

在 QED 中，电磁耦合常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ 随能标升高而减小

这个特性称为 QCD 的渐近自由，而高能标意味着短距离



渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

在 QED 中，电磁耦合常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ 随能标升高而减小

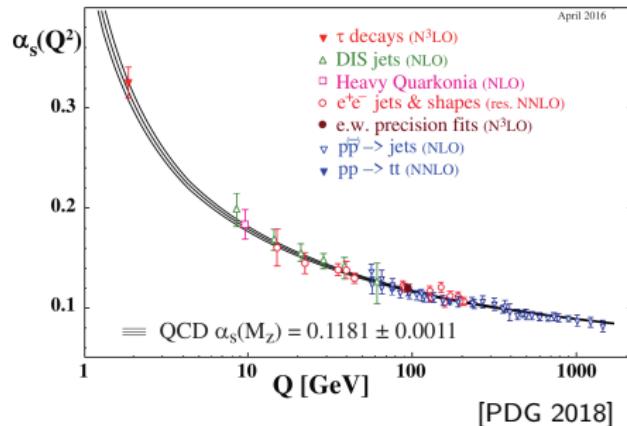
这个特性称为 QCD 的渐近自由，而高能标意味着短距离

随着能标下降， α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为夸克禁闭

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，顶夸克会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中



[PDG 2018]

旋量场手征性与宇称不守恒



利用左手投影矩阵 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ 和右手投影矩阵 $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$



将旋量场 $\psi(x)$ 分解为左手旋量场 $\psi_L \equiv P_L\psi$ 和右手旋量场 $\psi_R \equiv P_R\psi$



对于无质量旋量场, 或在可忽略质量的高能极限下, 手征性等价于螺旋度



左手场 $\psi_L(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{左旋正费米子} \\ \text{右旋反费米子} \end{array} \right.$	右手场 $\psi_R(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{右旋正费米子} \\ \text{左旋反费米子} \end{array} \right.$
---	---



质量项 $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$ 相当于左右手旋量场的耦合项



电弱规范理论



电弱规范理论的规范群是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$

每一代左手旋量场构成 2 个 $SU(2)_L$ 二重态, u'_i 和 d'_{iL} 标记夸克场的规范本征态

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} P_L \nu_i \\ P_L \ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}, \quad Q_{iL} = \begin{pmatrix} P_L u'_i \\ P_L d'_{iL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

它们的协变导数是 $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig'B_\mu Y$

$W_\mu^a(x)$ ($a = 1, 2, 3$) 是 $SU(2)_L$ 规范场, $B_\mu(x)$ 是 $U(1)_Y$ 规范场

g 和 g' 分别是 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的规范耦合常数

$\tau^a = \sigma^a/2$ 是 $SU(2)_L$ 群基础表示的生成元, 对应于弱同位旋

生成元 τ^3 的本征值是弱同位旋第 3 分量, 记为 T^3 ; Y 是弱超荷

电弱规范理论



电弱规范理论的规范群是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$

每一代左手旋量场构成 2 个 $SU(2)_L$ 二重态, u'_i 和 d'_{iL} 标记夸克场的规范本征态

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} P_L \nu_i \\ P_L \ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}, \quad Q_{iL} = \begin{pmatrix} P_L u'_i \\ P_L d'_{iL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

它们的协变导数是 $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig'B_\mu Y$

$W_\mu^a(x)$ ($a = 1, 2, 3$) 是 $SU(2)_L$ 规范场, $B_\mu(x)$ 是 $U(1)_Y$ 规范场

g 和 g' 分别是 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的规范耦合常数

$\tau^a = \sigma^a/2$ 是 $SU(2)_L$ 群基础表示的生成元, 对应于弱同位旋

生成元 τ^3 的本征值是弱同位旋第 3 分量, 记为 T^3 ; Y 是弱超荷

各代右手旋量场 $\ell_{iR} = P_R \ell_i, \quad u'_{iR} = P_R u'_i, \quad d'_{iR} = P_R d'_{iL}$ 是 $SU(2)_L$ 单态

它们的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu + ig'B_\mu Y$



Brout–Englert–Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但现在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变的拉氏量不能具有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

😢 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

😱 左右手旋量场参与不同的规范相互作用，直接引入质量项也会破坏规范对称性

Brout–Englert–Higgs 机制

！ 夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但现在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变的拉氏量不能具有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

😢 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

😢 左右手旋量场参与不同的规范相互作用，直接引入质量项也会破坏规范对称性

🤔 为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入 Brout–Englert–Higgs (BEH) 机制，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺

💡 引进 Higgs 标量场 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ ， ϕ^+ 和 ϕ^0 都是复标量场，角标表征电荷

💡 Φ 是 $SU(2)_L$ 二重态，具有弱超荷 $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

✓ 协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu + i g W_\mu^a \tau^a + i g' Y B_\mu$

✓ $V_H(\Phi)$ 是 Higgs 标量场的势能项，依赖于 $\Phi^\dagger \Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

幺正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空中期待值取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ 之后，其它真空中期待值可以通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 整体变换 $\langle \Phi \rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle \Phi \rangle$ 得到

 这是因为 $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ 在这样的变换下保持不变

 若 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ 且 $\alpha^3 = \alpha^Y$ ，则 $\alpha^3 \tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + 1)/2 = \text{diag}(\alpha^3, 0)$ ，
 $\exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) = \text{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$ ，而 $\langle \Phi \rangle$ 在此变换下不变

 因此，有 1 个方向的对称性没有受到破坏，只有 3 个方向的对称性发生自发破缺

 根据 Goldstone 定理，破缺后存在 3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子

 有 3 个规范玻色子结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 BEH 机制获得质量

么正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空期待值取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ 之后，其它真空期待值可以通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 整体变换 $\langle \Phi \rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle \Phi \rangle$ 得到

 这是因为 $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ 在这样的变换下保持不变

 若 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ 且 $\alpha^3 = \alpha^Y$ ，则 $\alpha^3 \tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3 (\sigma^3 + 1)/2 = \text{diag}(\alpha^3, 0)$ ，
 $\exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) = \text{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$ ，而 $\langle \Phi \rangle$ 在此变换下不变

 因此，有 1 个方向的对称性没有受到破坏，只有 3 个方向的对称性发生自发破缺

 根据 Goldstone 定理，破缺后存在 3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子

 有 3 个规范玻色子结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 BEH 机制获得质量

 以 $\langle \Phi \rangle$ 为基础，将 Higgs 场参数化为 $\Phi(x) = \exp \left[-i \frac{\chi^a(x)}{v} \tau^a \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$

 χ^a 和 H 都是实标量场，而 $\exp(-i\chi^a \tau^a/v)$ 因子能够通过 $SU(2)_L$ 规范变换消去

 因而可以直接取
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$
，这种取法称为么正规范



电弱规范玻色子的质量项

⚠ 由于 $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

🥩 有 $g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g W_\mu^3 & g(W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + i W_\mu^2) & g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix}$

👉 真空期待值 v 对协变导数 $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)]\Phi$ 的贡献为

$$D_\mu \Phi \supset i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \supset \frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

⚾ 协变动能项 $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$ 中正比于 v^2 的项是

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &\supset \frac{v^2}{8} [g^2 |W_\mu^1 - i W_\mu^2|^2 + (g' B_\mu - g W_\mu^3)^2] \\ &= \frac{v^2}{8} [g^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2 + W^{3\mu} W_\mu^3) + g'^2 B^\mu B_\mu - 2g g' B^\mu W_\mu^3] \end{aligned}$$

🍖 这些项是规范玻色子的质量项

Weinberg 转动



将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = \frac{1}{2} m_W^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \mathcal{M}_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

大蒜 W_μ^1 和 W_μ^2 获得的**质量**

$$m_W \equiv \frac{1}{2} gv$$

橘子 $W^{3\mu}$ 和 B^μ 的**质量平方矩阵**为 $\mathcal{M}_{W^3 B}^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$



Weinberg 转动



将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = \frac{1}{2} m_W^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} (W^{3\mu} - B^\mu) M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

W_μ^1 和 W_μ^2 获得的**质量**

$$m_W \equiv \frac{1}{2} g v$$

$W^{3\mu}$ 和 B^μ 的**质量平方矩阵**为 $M_{W^3 B}^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$

为了使 $M_{W^3 B}^2$ 矩阵**对角化**, 定义

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

其中

$$s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_W \equiv \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

θ_W 称为 Weinberg 角, 也称为**弱混合角**

从后面的讨论可以看出 A_μ 就是**电磁场**, 对应于光子; Z_μ 对应于**矢量玻色子 Z**



Z玻色子的质量

反过来，有 $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$

利用 $M_{W^3 B}^2 = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \begin{pmatrix} c_W^2 & -s_W c_W \\ -s_W c_W & s_W^2 \end{pmatrix}$ ，推出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W^2 & -s_W c_W \\ -s_W c_W & s_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \end{aligned}$$

Z玻色子的质量是

$$m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{gv}{2c_W} = \frac{m_W}{c_W}$$

而光子没有质量

实验测得 $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ 和 $m_W = 80.4 \text{ GeV}$ ，故 $\theta_W = \cos^{-1} \frac{m_W}{m_Z} = 28.2^\circ$

W^\pm 玻色子的质量

另一方面，用质量相同的实矢量场 W_μ^1 和 W_μ^2 线性组合出复矢量场

$$W_\mu^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)$$

它的厄米共轭为 $W_\mu^- \equiv (W_\mu^+)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)$

则 $W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-)$, $W_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-)$

从而 $\frac{1}{2}(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) = W^{+\mu}W_\mu^-$, 于是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GBM}} &= \frac{1}{2}m_W^2(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) + \frac{1}{2}\left(W^{3\mu} B^\mu\right) M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= m_W^2 W^{+\mu}W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu\end{aligned}$$

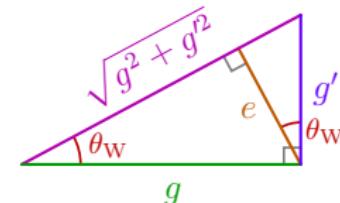
复矢量场 W_μ^+ 描述一对正反矢量玻色子 W^\pm , 质量为 m_W

可见，BEH 机制使传递弱相互作用的规范玻色子 W^\pm 和 Z 获得了质量，有 3 个 Higgs 场自由度变成它们的纵向极化分量

用规范场质量本征态表达

接下来用质量本征态 W_μ^\pm 、 A_μ 和 Z_μ 表达 $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$

由 $B_\mu = c_W A_\mu - s_W Z_\mu$ 和 $W_\mu^3 = s_W A_\mu + c_W Z_\mu$ 得



$$\begin{aligned} g' B_\mu + g W_\mu^3 &= g'(c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g(s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= \frac{2gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu + \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu = 2eA_\mu + \frac{g}{c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu \end{aligned}$$

其中 $e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = gs_W = g'c_W$ ，后面讨论将表明 e 就是单位电荷量

协变导数 $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)]\Phi$ 中的相关因子化为

$$\begin{aligned} g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g W_\mu^3 & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} eA_\mu + \frac{g}{2c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu & \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{g}{2c_W}Z_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Higgs 场协变动能项

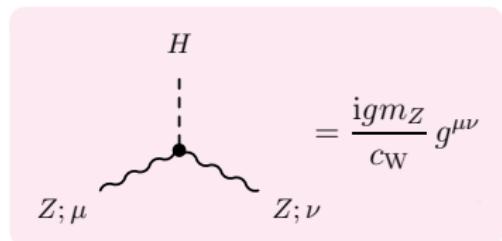
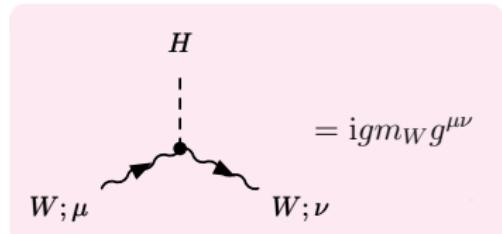
⚠ 于是，幺正规范下的 Higgs 场协变动能项化为

$$\begin{aligned}
 & (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \\
 &= |[\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)] \Phi|^2 \\
 &= \left| \begin{pmatrix} \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{ig}{2c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{ig}{2c_W}Z_\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^-(v + H) & \partial_\mu H + \frac{ig}{2c_W}Z_\mu(v + H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+(v + H) \\ \partial_\mu H - \frac{ig}{2c_W}Z_\mu(v + H) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + (v + H)^2 \left(\frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2}{8c_W^2} Z_\mu Z^\mu \right)
 \end{aligned}$$

Higgs 玻色子与 W^\pm 、 Z 玻色子的耦合

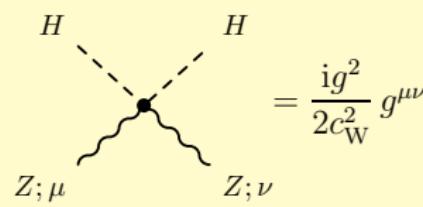
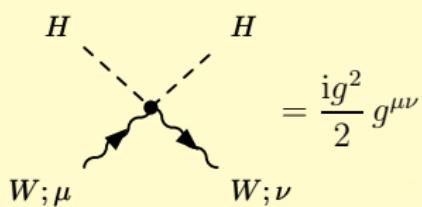
将上述 Higgs 场协变动能项表达为

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} (\partial^\mu H) (\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + g m_W H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g m_Z}{2 c_W} H Z_\mu Z^\mu + \frac{g^2}{4} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g^2}{8 c_W^2} H^2 Z_\mu Z^\mu$$



除了 W^\pm 和 Z 玻色子的**质量项**之外

还出现了 Higgs 玻色子 H 与 W^\pm 、 Z 玻色子的**三线性和四线性**耦合项



Yukawa 相互作用

 Higgs 场 $\Phi(x)$ 的弱超荷为 $+1/2$ ，记 $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$ ，引入 $\Phi(x)$ 的共轭态

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma^2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

 则 $\tilde{\Phi}(x)$ 是弱超荷为 $-1/2$ 的 $SU(2)_L$ 二重态

 在么正规范下， $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

Yukawa 相互作用



Higgs 场 $\Phi(x)$ 的弱超荷为 $+1/2$ ，记 $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$ ，引入 $\Phi(x)$ 的共轭态

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma^2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

则 $\tilde{\Phi}(x)$ 是弱超荷为 $-1/2$ 的 $SU(2)_L$ 二重态

在么正规范下， $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

与费米子场组成满足 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性的 Yukawa 相互作用拉氏量

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_{d,ij} \bar{Q}_{iL} d'_{jR} \Phi - \tilde{y}_{u,ij} \bar{Q}_{iL} u'_{jR} \tilde{\Phi} - \color{blue}{y_{\ell_i}} \bar{L}_{iL} \ell_{iR} \Phi + \text{H.c.}$$

$$Y : -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

其中 H.c. 表示厄米共轭

Yukawa 耦合常数 $\tilde{y}_{d,ij}$ 和 $\tilde{y}_{u,ij}$ 联系着不同的夸克场

Yukawa 耦合常数 y_{ℓ_i} 只联系同一代的轻子场



么正规范下的 Yukawa 相互作用



在么正规范下，利用

$$\bar{Q}_{iL}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u}'_{iL} & \bar{d}'_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{d}'_{iL}$$

$$\bar{Q}_{iL}\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u}'_{iL} & \bar{d}'_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{u}'_{iL}$$

$$\bar{L}_{iL}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{iL} & \bar{\ell}_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{\ell}_{iL}$$

推出 $\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(\tilde{y}_{d,ij}\bar{d}'_{iL}d'_{jR} + \tilde{y}_{u,ij}\bar{u}'_{iL}u'_{jR} + y_{\ell_i}\bar{\ell}_{iL}\ell_{iR} + \text{H.c.})$

$\tilde{y}_{d,ij}$ 和 $\tilde{y}_{u,ij}$ 可看作 **3 × 3 矩阵** \tilde{y}_d 和 \tilde{y}_u 的元素

$\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger$ 是**厄米矩阵**，必定可以通过**么正矩阵** U_d 和 U_u 分别对角化成两个对角元为实数的**对角矩阵** y_D^2 和 y_U^2 ，满足 $U_d^\dagger\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger U_d = y_D^2$ 和 $U_u^\dagger\tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger U_u = y_U^2$ ，即

$$\tilde{y}_d\tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u\tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$$

Yukawa 耦合矩阵的对角化

 符合 $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$ 的 \tilde{y}_d 和 \tilde{y}_u 可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_D K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_U K_u^\dagger$$

 对角矩阵 y_D 和 y_U 满足 $y_D y_D = y_D^2$ 和 $y_U y_U = y_U^2$, K_d^\dagger 和 K_u^\dagger 是两个~~么~~正矩阵

 将 y_D 和 y_U 表示成

$$y_D = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_U = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

Yukawa 耦合矩阵的对角化

 符合 $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$ 的 \tilde{y}_d 和 \tilde{y}_u 可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_D K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_U K_u^\dagger$$

 对角矩阵 y_D 和 y_U 满足 $y_D y_D = y_D^2$ 和 $y_U y_U = y_U^2$ ， K_d^\dagger 和 K_u^\dagger 是两个么正矩阵

 将 y_D 和 y_U 表示成

$$y_D = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_U = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

 定义 $d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$ ， $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$ ， $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$ 和 $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$

 从而， $\bar{d}_{iL} = \bar{d}'_{jL} U_{d,jj}$ ， $\bar{u}_{iL} = \bar{u}'_{jL} U_{u,ji}$ ，则

$$\tilde{y}_{d,ij} \bar{d}'_{iL} d'_{jR} = \bar{d}'_{iL} (U_d y_d K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR} = \bar{d}'_{iL} U_{d,ik} y_{d_k} (K_d^\dagger)_{kj} d'_{jR} = y_{d_k} \bar{d}_{kL} d_{kR} = y_{d_i} \bar{d}_{iL} d_{iR}$$

$$\tilde{y}_{u,ij} \bar{u}'_{iL} u'_{jR} = \bar{u}'_{iL} (U_u y_u K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR} = y_{u_i} \bar{u}_{iL} u_{iR}$$

费米子质量和 Yukawa 耦合



于是得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(y_{d_i} \bar{d}_{iL} d_{iR} + y_{u_i} \bar{u}_{iL} u_{iR} + y_{\ell_i} \bar{\ell}_{iL} \ell_{iR} + \text{H.c.}) \\ &= -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i\end{aligned}$$

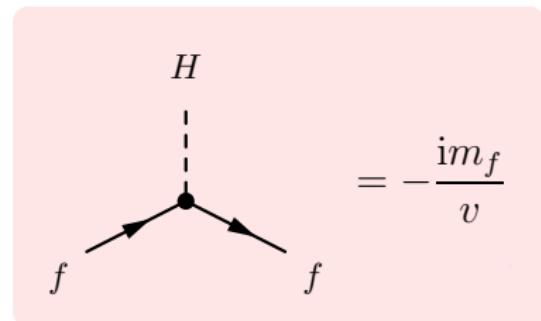
其中前三项是费米子质量项，后三项是 Higgs 玻色子与费米子的 Yukawa 耦合项

于是，三代夸克和带电轻子获得了质量

$$\begin{aligned}m_{d_i} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{d_i} v, \quad m_{u_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{u_i} v \\ m_{\ell_i} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{\ell_i} v\end{aligned}$$

d'_{iL} 、 d'_{iR} 、 u'_{iL} 和 u'_{iR} 是夸克规范本征态

d_{iL} 、 d_{iR} 、 u_{iL} 和 u_{iR} 是夸克质量本征态





Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵



$d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$, $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$, $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$ 和 $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$ 表明

$$d'_{iL} = U_{d,ij} d_{jL}, \quad d'_{iR} = K_{d,ij} d_{jR}, \quad u'_{iL} = U_{u,ij} u_{jL}, \quad u'_{iR} = K_{u,ij} u_{jR}$$



从而

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{kL} = \bar{d}_{jL} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{kL} = \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL}$$



同理有

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}, \quad \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} = \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR}, \quad \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} = \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}$$

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵



$d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$, $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$, $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$ 和 $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$ 表明

$$d'_{iL} = U_{d,ij} d_{jL}, \quad d'_{iR} = K_{d,ij} d_{jR}, \quad u'_{iL} = U_{u,ij} u_{jL}, \quad u'_{iR} = K_{u,ij} u_{jR}$$



从而

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{kL} = \bar{d}_{jL} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{kL} = \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL}$$



同理有

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}, \quad \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} = \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR}, \quad \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} = \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}$$



另一方面,

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{u}_{jL} (U_u^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{u,ik} d_{kL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL}$$

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} u_{kL} = \bar{d}_{jL} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{iL}$$



其中 $V \equiv U_u^\dagger U_d$ 称为 **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵**



其厄米共轭矩阵为 $V^\dagger = U_d^\dagger U_u$

费米子协变动能项

 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变的费米子协变动能项为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{Q}_{iL} iD Q_{iL} + \bar{u}'_{iR} iD u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} iD d'_{iR} + \bar{L}_{iL} iD L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} iD \ell_{iR}$$

 根据 $Q = T^3 + Y$ 和 $e = g_{SW} = g' c_W$, 有

$$\begin{aligned} g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 &= g' Y (c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g T^3 (s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= e(Y + T^3) A_\mu + \left(g c_W T^3 - \frac{g s_W}{c_W} s_W Y \right) Z_\mu = Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 c_W^2 - Y s_W^2) Z_\mu \\ &= Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \end{aligned}$$

 故 $D_\mu Q_{iL} = (\partial_\mu + ig' B_\mu Y + ig W_\mu^a \tau^a) Q_{iL}$

$$\begin{aligned} &= \partial_\mu Q_{iL} + i \begin{pmatrix} g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 & \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu Q_{iL} + i \begin{pmatrix} \left[Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \right] u'_{iL} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ d'_{iL} \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- u'_{iL} + \left[Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \right] d'_{iL} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\bar{Q}_{iL} iD\bar{Q}_{iL}$ 中的电弱规范相互作用项



于是, $\bar{Q}_{iL} iD\bar{Q}_{iL}$ 包含的电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{iL} iD\bar{Q}_{iL} &\supset - \left[QeA_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Qs_W^2) Z_\mu \right] \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} \\
 &\quad - \left[QeA_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Qs_W^2) Z_\mu \right] \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} \\
 &= - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} u_i \\
 &\quad - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu \right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} d_i \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i
 \end{aligned}$$



其中左手耦合系数为

$$g_L \equiv T^3 - Qs_W^2$$

$\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR}$ 中的电弱规范相互作用项

另一方面，

$$\begin{aligned} D_\mu d'_{iR} &= (\partial_\mu + ig' B_\mu Y) d'_{iR} = \partial_\mu d'_{iR} + ig' Q(c_W A_\mu - s_W Z_\mu) d'_{iR} \\ &= \partial_\mu d'_{iR} + iQeA_\mu d'_{iR} - \frac{ig}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu d'_{iR} \end{aligned}$$

则 $\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR}$ 包含的电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned} &\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR} \\ &\supset - \left(QeA_\mu - \frac{g}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu \right) \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} - \left(QeA_\mu - \frac{g}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu \right) \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} \\ &= - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_R Z_\mu \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} u_i - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_R Z_\mu \right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} d_i \end{aligned}$$

其中右手耦合系数为

$$g_R \equiv -Q s_W^2$$

费米子的电弱规范相互作用



引入矢量流和轴矢量流耦合系数

$$g_V \equiv g_L + g_R = T^3 - 2Q s_W^2, \quad g_A \equiv g_L - g_R = T^3$$

将以上夸克电弱规范相互作用项改写为

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL} + \bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR} \\ \supset & -Qe\bar{u}_i \gamma^\mu u_i A_\mu - Qe\bar{d}_i \gamma^\mu d_i A_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{u}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) u_i Z_\mu \\ & - \frac{g}{2c_W} \bar{d}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) d_i Z_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i \end{aligned}$$

同理， $\bar{L}_{iL} i\not{D} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{D} \ell_{iR}$ 包含的轻子电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned} & \bar{L}_{iL} i\not{D} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{D} \ell_{iR} \\ \supset & -Qe\bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \ell_i Z_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{\nu}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \nu_i Z_\mu \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \ell_i - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{\ell}_i \gamma^\mu P_L \nu_i \end{aligned}$$



费米子的电弱流耦合

将这些电弱规范相互作用项写成流耦合的形式，得

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu - Z_\mu J_Z^\mu - W_\mu^+ J_W^{+,\mu} - W_\mu^- J_W^{-,\mu}$$

电磁流

$$J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f e f \bar{f} \gamma^\mu f, \quad \text{其中 } f \text{ 代表任意费米子场 (质量本征态)}$$

弱中性流

$$J_Z^\mu \equiv \frac{g}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f, \quad g_V^f = T_f^3 - 2Q_f s_W^2, \quad g_A^f = T_f^3$$

弱带电流

$$J_W^{+,\mu} \equiv \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_i \gamma^\mu V_{ij} P_L d_j + \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \ell_i)$$

不同代夸克间相互作用
只发生在弱带电流耦合中，

弱带电流

$$J_W^{-,\mu} \equiv (J_W^{+,\mu})^\dagger = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i + \bar{\ell}_i \gamma^\mu P_L \nu_i)$$

源自 CKM 矩阵
 V 的非对角元

可以看到，电磁流耦合与 QED 耦合完全相同

由此辨认出 A_μ 是电磁场， e 是单位电荷量， $Q \equiv T^3 + Y$ 确实是电荷

为了保持电荷守恒，指定复矢量场 $W_\mu^+(x)$ 携带 $Q = +1$ 的电荷

费米子电弱规范相互作用的顶点规则

$\gamma; \mu$

$$= -iQ_f e \gamma^\mu$$

$Z; \mu$

$$= -\frac{ig}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5)$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

电弱规范玻色子的自相互作用

电弱规范场自身的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{EWG} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

场强张量 $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$, $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

$$W; \mu \quad \begin{matrix} \gamma; \rho \\ p \\ q \\ k \end{matrix} \quad W; \nu = i e S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho}$$

$$W; \mu \quad \begin{matrix} Z; \rho \\ p \\ q \\ k \end{matrix} \quad W; \nu = i g c_W S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho}$$

$$W; \mu \quad \begin{matrix} \gamma; \rho \\ p \\ q \\ k \end{matrix} \quad W; \nu = i e^2 T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$W; \mu \quad \begin{matrix} \gamma; \rho \\ p \\ q \\ k \end{matrix} \quad W; \nu = i e g c_W T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$W; \mu \quad \begin{matrix} Z; \rho \\ p \\ q \\ k \end{matrix} \quad W; \nu = i g^2 c_W^2 T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$W; \mu \quad \begin{matrix} W; \rho \\ p \\ q \\ k \end{matrix} \quad W; \nu = -i g^2 T^{\mu\nu\rho\sigma}$$

图中 $S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho} \equiv g^{\mu\nu}(p-q)^\rho + g^{\nu\rho}(q-k)^\mu + g^{\rho\mu}(k-p)^\nu$

$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$



CKM 矩阵

🚗 概率守恒要求 CKM 矩阵 V 是幺正矩阵，标准参数化形式为

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ c_{23} & s_{23} & \\ -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} & \\ & 1 & \\ -s_{13} e^{i\delta} & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⚓ 其中 $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ ， $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ ，拟合实验数据得到

$$s_{12} = 0.22501 \pm 0.00068, \quad s_{23} = 0.04183^{+0.00079}_{-0.00069}$$

$$s_{13} = 0.003732^{+0.000090}_{-0.000085}, \quad \delta = 1.147 \pm 0.026$$

🔑 V 包含 3 个转动角 $\theta_{12} \simeq 13^\circ$ ， $\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$ ， $\theta_{13} \simeq 0.21^\circ$ ，
1 个引起 CP 破坏的相角 $\delta \simeq 66^\circ$

夸克味混合

如果只讨论第一、二代夸克的混合，CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C & \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

 θ_C 称为 Cabibbo 角，满足 $\sin \theta_C = s_{12} = 0.225$

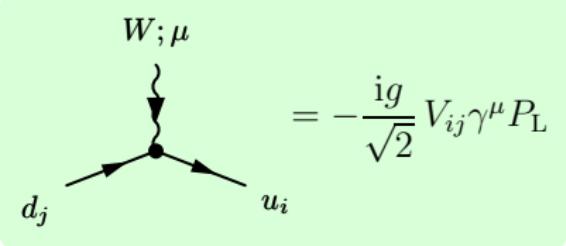
 CKM 矩阵的非对角元非零意味着弱带电流可以耦合不同代的夸克，这是夸克味混合现象

 $W^+ \rightarrow u' \bar{d}'$ 过程在质量态上表现为

$$W^+ \rightarrow u \bar{d} \text{ (} V_{11} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u \bar{s} \text{ (} V_{12} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u \bar{b} \text{ (} V_{13} \text{ 引起)}$$



超出标准模型：中微子味混合

 中微子振荡实验表明，中微子具有微小质量，而且存在味混合

 Dirac 中微子的味本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵 U 联系：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$

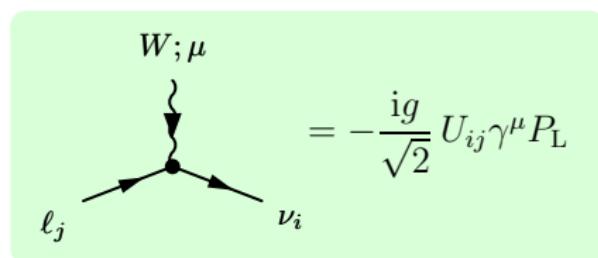
 $\bar{\theta}_{12} \sim 33^\circ$, $\bar{\theta}_{23} \sim 41^\circ$ (质量正序) 或 $\bar{\theta}_{23} \sim 50^\circ$ (质量逆序), $\bar{\theta}_{13} \sim 8.4^\circ$

 如果中微子是 Majorana 费米子，则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ρ 和 σ ，PMNS 矩阵应该再右乘 $\text{diag}(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$

 太阳中微子振荡  $\bar{\theta}_{12}$

 大气中微子振荡  $\bar{\theta}_{23}$

 反应堆中微子振荡  $\bar{\theta}_{13}$



e^+e^- 湮灭

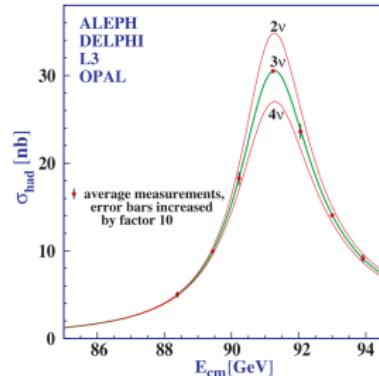
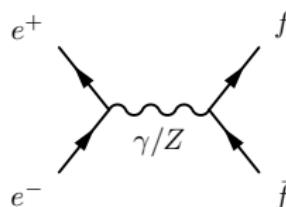


通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$



$\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的**共振峰**



e^+e^- 湮灭

通过电磁流和弱中性流相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

在 $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰

受共振态和弱中性流影响较小时，

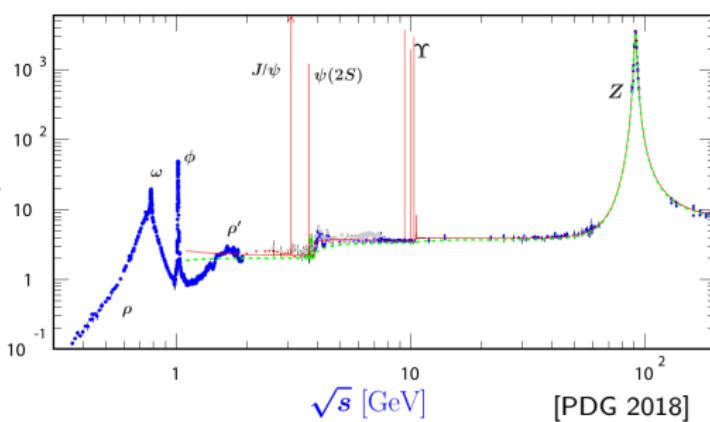
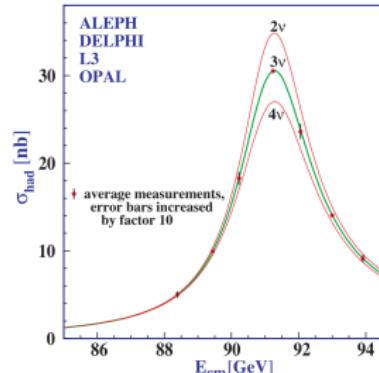
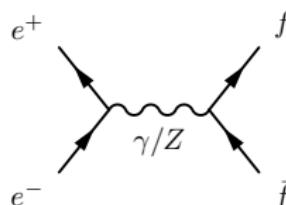
截面比 $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ 体现夸克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

在 $1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.6 \text{ GeV}$ 处，

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad R$$

在 $3.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ GeV}$ 处，

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$



β 衰变

弱相互作用引起原子核 β 衰变

质量数为 $A = Z + N$ 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子，通过 β 衰变会变成具有 $Z + 1$ 个质子和 $N - 1$ 个中子的原子核 A' ，即

$$A(Z, N) \rightarrow A'(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

在核子层次，以上过程体现为中子 β 衰变，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

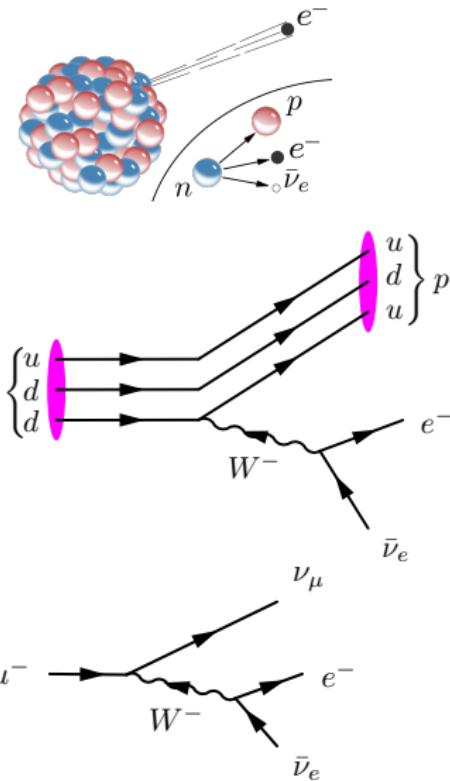
在夸克层次，以上过程体现为 d 夸克 β 衰变

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

此过程来自 W^- 玻色子传递的弱带电流相互作用

在轻子方面，类似的过程有 μ 子衰变

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



μ 子衰变



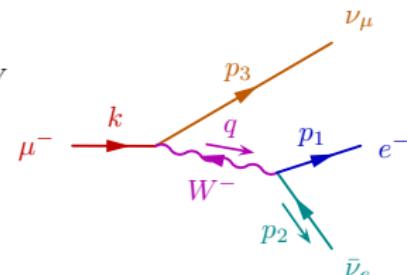
考虑 μ 子衰变过程 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ，相应的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p_3) \gamma^\mu P_L u(k) \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\nu P_L v(p_2) \\ &= \frac{ig^2(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{8(q^2 - m_W^2)} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(k) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v(p_2) \end{aligned}$$

由于 $m_\mu \ll m_W$ ， W 传播子的四维动量满足 $q^2 \ll m_W^2$

因此，可在低能近似下忽略 q^μ 和 q^2 ，将振幅化为

$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{ig^2}{8m_W^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(k) \bar{u}(p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(p_2)$$



μ 子衰变

考虑 μ 子衰变过程 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ，相应的领头阶不变振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p_3) \gamma^\mu P_L u(k) \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\nu P_L v(p_2) \\ &= \frac{ig^2(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/m_W^2)}{8(q^2 - m_W^2)} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(k) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v(p_2) \end{aligned}$$

由于 $m_\mu \ll m_W$ ， W 传播子的四维动量满足 $q^2 \ll m_W^2$

因此，可在低能近似下忽略 q^μ 和 q^2 ，将振幅化为

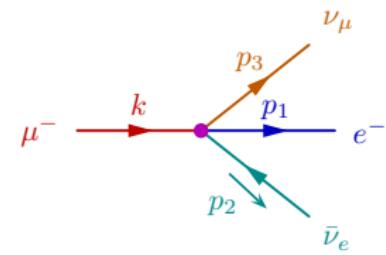
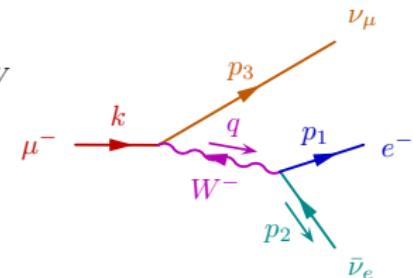
$$i\mathcal{M} \simeq -\frac{ig^2}{8m_W^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(k) \bar{u}(p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(p_2)$$

可以将这样的振幅看作有效拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{H.c.}$$

的结果，其中 Fermi 常数 G_F 定义为

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \equiv \frac{g^2}{8m_W^2}$$





四费米子相互作用理论



可进一步将 $\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{\mu} e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{H.c.}$

推广到其它参与弱相互作用的标准模型费米子

● 耦合常数 G_F 是普适的，对所有费米子都适用

● 这样得到的理论称为四费米子相互作用理论

● 为了解释 β 衰变，Enrico Fermi 于 1933 年首次提出这个理论

● 现在认为它是标准模型弱相互作用的低能有效理论



Enrico Fermi
(1901–1954)

四费米子相互作用理论

 可进一步将 $\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{\mu} e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{H.c.}$

推广到其它参与弱相互作用的标准模型费米子

 耦合常数 G_F 是普适的，对所有费米子都适用

 这样得到的理论称为四费米子相互作用理论

 为了解释 β 衰变，Enrico Fermi 于 1933 年首次提出这个理论

 现在认为它是标准模型弱相互作用的低能有效理论

 忽略电子质量，通过以上振幅计算出 μ 子寿命为 $\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} \simeq \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}$

 根据更精确的结果，由 $\tau_\mu = 2.197 \times 10^{-6} \text{ s}$ 推出 $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

 注意到 $m_W = gv/2$ ，Fermi 常数 G_F 与 Higgs 场真值 v 的关系为

$$G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2} = \frac{\sqrt{2}g^2}{2g^2v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}, \quad v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV}$$



Enrico Fermi
(1901–1954)

介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变

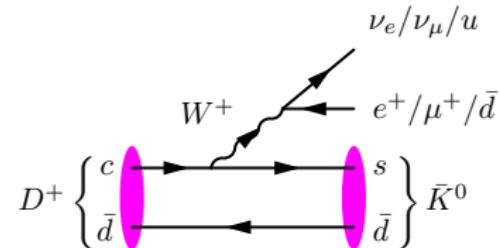


$D^+(c\bar{d})$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变, 称为旁观者



介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变



$D^+(cd)$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变, 称为旁观者

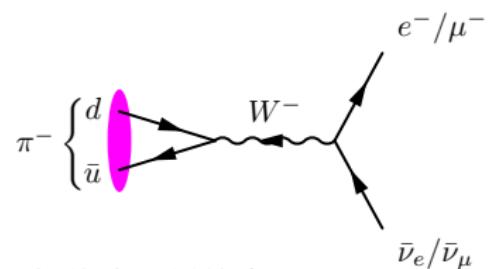
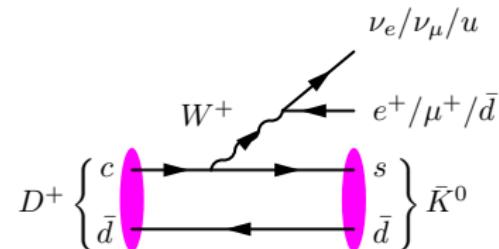


$\pi^- (\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



π^- 静止系中, 角动量守恒要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同, 但弱带电流只耦合左旋费米子和右旋反费米子, 需要由质量翻转螺旋度



$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$



$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%, $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%

