量 子 场 论

第 10 章　散射矩阵元与多点关联函数

10.4 节至 10.6 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2026 年 7 月 27 日

10.4 节　多点关联函数的微扰论

第 6、7 章借助**相互作用绘景**讨论了用**微扰论**处理**散射矩阵**的方法，引进了 **Feynman 图**和 **Feynman 规则**

既然 **LSZ 约化公式**将**散射矩阵**与**多点关联函数**联系起来，也可将**微扰论**研究转移到**多点关联函数**上，得到与前述章节**一致**的结论，并为**高阶计算**和**重整化**过程作铺垫

下面仍然以**实标量场**为例进行讨论，n **点关联函数** $\langle 0|\,\mathrm{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle$ 是用 **Heisenberg 绘景**中的**场算符** $\phi(x)$ 定义的，但是存在**相互作用**时我们**不知道**如何将 $\phi(x)$ 精确地表达出来，因而需要把它转化成**渐近场** $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 或 $\phi_{\mathrm{out}}(x)$ 来处理

10.4 节 多点关联函数的微扰论

第 6、7 章借助相互作用绘景讨论了用微扰论处理散射矩阵的方法，引进了 Feynman 图和 Feynman 规则

既然 LSZ 约化公式将散射矩阵与多点关联函数联系起来，也可将微扰论研究转移到多点关联函数上，得到与前述章节一致的结论，并为高阶计算和重整化过程作铺垫

下面仍然以实标量场为例进行讨论，n 点关联函数 $\langle 0|\,\mathrm{T}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle$ 是用 Heisenberg 绘景中的场算符 $\phi(x)$ 定义的，但是存在相互作用时我们不知道如何将 $\phi(x)$ 精确地表达出来，因而需要把它转化成渐近场 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 或 $\phi_{\mathrm{out}}(x)$ 来处理

渐近场相当于具有物理质量 m 的自由场，它们在本章讨论中取代了原先由相互作用绘景的场算符所扮演的角色

类似于 Heisenberg 绘景与相互作用绘景之间的变换关系，假设 $\phi(x)$ 与 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 由含时幺正算符 $W(t)$ 联系起来：

$$\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W(t), \quad \pi(x) = W^\dagger(t)\pi_{\mathrm{in}}(x)W(t)$$

$\pi(x)$ 和 $\pi_{\mathrm{in}}(x)$ 分别是 $\phi(x)$ 与 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 对应的共轭动量密度

渐近哈密顿量

- 将系统的**哈密顿量**分解为 $H(\phi,\pi)=H_0(\phi,\pi)+H_1(\phi,\pi)$
- 其中 H_0 是**自由部分**，H_1 是**相互作用部分**
- 它们一般可表达为 ϕ、π **和** $\nabla\phi$ **的多项式**的全空间积分
- 比如**自由实标量场**的哈密顿量是 $H=\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]$
- $\phi(x)$ 所满足的 **Heisenberg 运动方程**是 $\mathrm{i}\partial_0\phi=[\phi,H(\phi,\pi)]$
- 类似地，$\phi_{\mathrm{in}}(x)$ **的运动方程**是 $\mathrm{i}\partial_0\phi_{\mathrm{in}}=[\phi_{\mathrm{in}},H_{\mathrm{in}}(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})]$，其中**渐近哈密顿量** $H_{\mathrm{in}}(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})$ 形式相同，但需要将 H_0 中**裸质量** m_0 换成**物理质量** m

渐近哈密顿量

- 将系统的**哈密顿量**分解为 $H(\phi,\pi)=H_0(\phi,\pi)+H_1(\phi,\pi)$
- 其中 H_0 是**自由部分**，H_1 是**相互作用部分**
- 它们一般可表达为 ϕ、π **和** $\nabla\phi$ **的多项式**的全空间积分
- 比如**自由实标量场**的哈密顿量是 $H=\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]$
- $\phi(x)$ 所满足的 **Heisenberg 运动方程**是 $\mathrm{i}\partial_0\phi=[\phi,H(\phi,\pi)]$
- 类似地，$\phi_{\mathrm{in}}(x)$ **的运动方程**是 $\mathrm{i}\partial_0\phi_{\mathrm{in}}=[\phi_{\mathrm{in}},H_{\mathrm{in}}(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})]$，其中**渐近哈密顿量** $H_{\mathrm{in}}(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})$ 与 $H_0(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})$ 形式相同，但需要将 H_0 中**裸质量** m_0 换成**物理质量** m
- 例如，在实标量场的 ϕ^4 **理论**中，

$$H_0(\phi,\pi)=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m_0^2\phi^2],\quad H_1(\phi,\pi)=\frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x\,\phi^4$$

- 而**渐近哈密顿量**为 $H_{\mathrm{in}}(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}})=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi_{\mathrm{in}}^2+(\nabla\phi_{\mathrm{in}})^2+m^2\phi_{\mathrm{in}}^2]$

算符方程

♊ $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t)$ 两边对时间求导，有

$$\mathrm{i}\partial_0\phi = \mathrm{i}(\partial_0 W^\dagger)\phi_{\rm in}W + \mathrm{i}W^\dagger(\partial_0\phi_{\rm in})W + \mathrm{i}W^\dagger\phi_{\rm in}\partial_0 W$$

♠ 由 $W(t)$ 算符的**幺正性条件** $W^\dagger W = \mathbb{I}$ 得

$$0 = \partial_0(W^\dagger W) = (\partial_0 W^\dagger)W + W^\dagger\partial_0 W$$

♥ 即

$$\partial_0 W^\dagger = -W^\dagger(\partial_0 W)W^\dagger$$

♣ 从而，利用**运动方程** $\mathrm{i}\partial_0\phi = [\phi, H(\phi,\pi)]$ 和 $\mathrm{i}\partial_0\phi_{\rm in} = [\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})]$ 推出

$$[\phi, H(\phi,\pi)] = \mathrm{i}\partial_0\phi = -\mathrm{i}W^\dagger(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\rm in}W + W^\dagger[\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})]W + \mathrm{i}W^\dagger\phi_{\rm in}\partial_0 W$$

♦ 左边乘以 W，右边乘以 $W^\dagger$，得到

$$W[\phi, H(\phi,\pi)]W^\dagger = -\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\rm in} + [\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})] + \mathrm{i}\phi_{\rm in}(\partial_0 W)W^\dagger$$

$\tilde{H}_1(\phi_{\rm in}, \pi_{\rm in})$

♋ 注意 $H(\phi,\pi)$ 是 ϕ、π **和** $\nabla\phi$ **的多项式**的积分，在 $H(\phi,\pi)$ 里**所有相邻算符之间插入** $W^\dagger W = \mathbb{I}$，利用 $\phi_{\rm in}(x) = W(t)\phi(x)W^\dagger(t)$ 和 $\pi_{\rm in}(x) = W(t)\pi(x)W^\dagger(t)$，推出

$$WH(\phi,\pi)W^\dagger = H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$$

🃏 $W[\phi, H(\phi,\pi)]W^\dagger = -\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger\phi_{\rm in} + [\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})] + \mathrm{i}\phi_{\rm in}(\partial_0 W)W^\dagger$ 化为

$$[\phi_{\rm in}, H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})] = -\mathrm{i}[(\partial_0 W)W^\dagger, \phi_{\rm in}] + [\phi_{\rm in}, H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})]$$

🃏 这意味着

$$[\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}), \phi_{\rm in}] = 0$$

♟ 其中 $\boxed{\tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) \equiv H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) - H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})}$ 是用**渐近场**表达的

🀄 将 ϕ 和 $\phi_{\rm in}$ **替换成** π **和** $\pi_{\rm in}$，重复上述推导过程，得到

$$[\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}), \pi_{\rm in}] = 0$$

裸质量与物理质量的平方差

♌ 注意，**物理质量** m 与**裸质量** m_0 不同

🎲 这里的 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) \equiv H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) - H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$ 也与 $H_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$ 有所差别

🎰 如果相互作用项**不包含** $\phi(x)$ 的时空导数 $\partial_\mu\phi$，则 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in})$ **不依赖于** $\pi_{\rm in}(x)$，只依赖于 $\phi_{\rm in}(x)$；下面只考虑这种情况，将它改记为 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in})$

🎱 比如，在 ϕ^4 **理论**中，有

$$H(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi_{\rm in}^2 + (\nabla\phi_{\rm in})^2 + m_0^2\phi_{\rm in}^2] + \frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x\,\phi_{\rm in}^4$$

$$H_{\rm in}(\phi_{\rm in},\pi_{\rm in}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi_{\rm in}^2 + (\nabla\phi_{\rm in})^2 + m^2\phi_{\rm in}^2]$$

🕹️ 故 $\tilde{H}_1(\phi_{\rm in}) = \int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}(m_0^2 - m^2)\phi_{\rm in}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\rm in}^4\right] = \int \mathrm{d}^3x\left(\frac{1}{2}\delta m^2\phi_{\rm in}^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_{\rm in}^4\right)$

🎮 其中 $\boxed{\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2}$ 是**裸质量平方**与**物理质量平方**之**差**

$W(t)$ 的运动方程

♍ $[\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}), \phi_{\mathrm{in}}] = 0$ 和 $[\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}), \pi_{\mathrm{in}}] = 0$ 表明，**算符** $A(t) \equiv \mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}})$ 与 ϕ_{in}、π_{in} 都是**对易**的

由于 ϕ_{in} 和 π_{in} 是系统的**正则变量**，用它们可以构建**一组算符完备集**，而这组完备集中的任意算符都**与 $A(t)$ 对易**，这说明**算符 $A(t)$** 必定**正比于恒等算符 $\mathbb{I}$**，即

$$\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}) = c(t)\,\mathbb{I}$$

其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的**实值 c 数函数**

$W(t)$ 的运动方程

♍ $[\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}), \phi_{\mathrm{in}}] = 0$ 和 $[\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}), \pi_{\mathrm{in}}] = 0$ 表明，**算符** $A(t) \equiv \mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}})$ 与 ϕ_{in}、π_{in} 都是**对易**的

由于 ϕ_{in} 和 π_{in} 是系统的**正则变量**，用它们可以构建**一组算符完备集**，而这组完备集中的任意算符都**与 $A(t)$ 对易**，这说明**算符 $A(t)$** 必定**正比于恒等算符 $\mathbb{I}$**，即

$$\mathrm{i}(\partial_0 W)W^\dagger - \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}) = c(t)\,\mathbb{I}$$

其中系数 $c(t)$ 是时间 t 的**实值 c 数函数**；改写上式，得到 **$W(t)$ 的运动方程**

$$\boxed{\mathrm{i}\partial_0 W(t) = \tilde{H}_1^c(t)W(t)}$$

这里 $\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{\mathrm{in}}) + c(t)$ 是用**入场** $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 表达出来的**时间 t 的函数**

此方程与 6.2 节**时间演化算符**的微分方程 $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_1^{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0)$ 形式相同

采用类似的求解方法，将**解**表达为

$$W(t) = W(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \tilde{H}_1^c(t_1)W(t_1)$$

时间演化算符的 Dyson 级数

重复迭代，利用**时序乘积**得到

$$
\begin{aligned}
W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \, \mathsf{T}[\tilde{H}_1^c(t_1) \cdots \tilde{H}_1^c(t_n)] W(t_0) \\
&= \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \tilde{H}_1^c(t')\right] W(t_0)
\end{aligned}
$$

在 6.2 节中，**时间演化算符** $U(t, t_0) = V(t)V^\dagger(t_0)$ 依赖于联系 **Heisenberg 绘景**和**相互作用绘景**的**含时幺正算符** $V(t)$

现在**渐近场** $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 扮演了**相互作用绘景**的**场算符**的角色，因此应该用 $W(t)$ 取代 $V(t)$，将**时间演化算符**定义为

$$
\boxed{U(t, t_0) \equiv W(t)W^\dagger(t_0) = \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \tilde{H}_1^c(t')\right]}
$$

这个结果也是一个 **Dyson 级数**，只不过 $\tilde{H}_1^c(t')$ 取代了原来的 $H_1^{\mathrm{I}}(t')$

这样定义的时间演化算符仍然具有 6.2 节所描述的各种性质

n 点关联函数与渐近场

♏ 接下来用**渐近场**来表达 **n 点关联函数**，由**变换关系** $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t)$ 得

$$
\begin{aligned}
&G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)]\,|0\rangle \\
=\ &\langle 0|\,\mathsf{T}[W^\dagger(t_1)\phi_{\rm in}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\rm in}(x_2)W(t_2)\cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\rm in}(x_n)W(t_n)]\,|0\rangle \\
=\ &\langle 0|\,\mathsf{T}[W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(t_1)\phi_{\rm in}(x_1)W(t_1)W^\dagger(t_2)\phi_{\rm in}(x_2)W(t_2) \\
&\qquad\times\cdots W^\dagger(t_n)\phi_{\rm in}(x_n)W(t_n)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)]\,|0\rangle \\
=\ &\langle 0|\,W^\dagger(+\infty)\,\mathsf{T}[U(+\infty,t_1)\phi_{\rm in}(x_1)U(t_1,t_2)\phi_{\rm in}(x_2) \\
&\qquad\qquad\times\cdots U(t_{n-1},t_n)\phi_{\rm in}(x_n)U(t_n,-\infty)]\,W(-\infty)\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

🔓 第三步在方括号中插入 $W^\dagger(+\infty)W(+\infty) = \mathbb{I}$ 和 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty) = \mathbb{I}$

🔑 最后一步改写成**时间演化算符** $U(t,t_0) \equiv W(t)W^\dagger(t_0)$ 的形式

🔓 由于**时序乘积**里面的含时算符能够**任意移动**，可以让里面的**时间演化算符相邻排列**，再由**乘法规则** $U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$ 得到

$$U(+\infty,t_1)U(t_1,t_2)\cdots U(t_{n-1},t_n)U(t_n,-\infty) = U(+\infty,-\infty)$$

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0|\,W^\dagger(+\infty)\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)U(+\infty,-\infty)]\,W(-\infty)\,|0\rangle$$

$\langle\Psi_p;\mathrm{in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle$

- 现在需要知道 $W(+\infty)$ 和 $W(-\infty)$ 对**真空态** $|0\rangle$ 作用的结果
- 设 $|\Psi_p;\mathrm{in}\rangle$ 是包含**一个四维动量为 p^μ 的粒子**的**任意入态**，表达为

$$|\Psi_p;\mathrm{in}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\mathrm{in}}\,|\Psi;\mathrm{in}\rangle$$

- 其中 $|\Psi;\mathrm{in}\rangle$ 包含除这个粒子之外的**其它成分**
- 利用 $a_{\mathbf{p},\mathrm{in}} = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 推出

$$\begin{aligned}\langle\Psi_p;\mathrm{in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,a_{\mathbf{p},\mathrm{in}}W(-\infty)\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,\phi_{\mathrm{in}}(x)W(-\infty)\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,W(t)\phi(x)W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle\end{aligned}$$

- 已用到**变换关系** $\phi_{\mathrm{in}}(x) = W(t)\phi(x)W^\dagger(t)$；取 $t\to-\infty$ **的极限**，由**渐近条件**得

$$\langle\Psi_p;\mathrm{in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle = \mathrm{i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle$$

处理 $\langle\Psi_p;\mathrm{in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}[W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)] &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\partial_0 W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}W(t)\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)\\
&\quad+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0 W^\dagger(t)-(\partial_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)\\
&= W(t)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathrm{in}}(x)]W^\dagger(t)\\
&\quad+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[\partial_0 W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)+W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0 W^\dagger(t)]
\end{aligned}
$$

从而 $\langle\Psi_p;\mathrm{in}|\,W(-\infty)\,|0\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle\\
&= \mathrm{i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,W(t)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathrm{in}}(x)]W^\dagger(t)W(-\infty)\,|0\rangle\\
&\quad+\mathrm{i}\sqrt{Z}\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,[\partial_0 W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)W^\dagger(t)\\
&\qquad\qquad+W(t)\phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0 W^\dagger(t)]W(-\infty)\,|0\rangle\\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}Z}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,W(-\infty)a_{\mathbf{p},\mathrm{in}}\,|0\rangle\\
&\quad+\mathrm{i}\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\langle\Psi;\mathrm{in}|\,[\partial_0 W(t)\phi(x)+W(t)\phi(x)\partial_0 W^\dagger(t)W(t)]\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

第一项的推导用到 $W^\dagger(-\infty)W(-\infty)=\mathbb{I}$，由于 $a_{\mathbf{p},\mathrm{in}}\,|0\rangle=0$，此项贡献为零

$W(+\infty)\left|0\right\rangle, W(-\infty)\left|0\right\rangle$ 与真空态

- 用变换关系 $\phi(x) = W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t)$ 将 $\left\langle\Psi_p;{\rm in}\right| W(-\infty)\left|0\right\rangle$ **第二项**中算符化为

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 W(t)\phi(x) + W(t)\phi(x)\partial_0 W^\dagger(t)W(t)\\
=\ &\partial_0 W(t)W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t) + \phi_{\rm in}(x)W(t)\partial_0 W^\dagger(t)W(t)\\
=\ &\partial_0 W(t)W^\dagger(t)\phi_{\rm in}(x)W(t) + \phi_{\rm in}(x)\{\partial_0[W(t)W^\dagger(t)] - \partial_0 W(t)W^\dagger(t)\}W(t)\\
=\ &[\partial_0 W(t)W^\dagger(t), \phi_{\rm in}(x)]W(t) = -{\rm i}[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\rm in}(x)]W(t)
\end{aligned}
$$

- 最后一步用到**运动方程** ${\rm i}\partial_0 W = \tilde{H}_1^c(t)W$
- 已经假设 $\tilde{H}_1^c(t)$ **只依赖于** $\phi_{\rm in}(x)$，因此等时对易关系保证 $[\tilde{H}_1^c(t), \phi_{\rm in}(x)] = 0$
- 从而 $\left\langle\Psi_p;{\rm in}\right| W(-\infty)\left|0\right\rangle$ **第二项的贡献也是零**，于是

$$\left\langle\Psi_p;{\rm in}\right| W(-\infty)\left|0\right\rangle = 0$$

- 由于 $\left|\Psi_p;{\rm in}\right\rangle$ 是至少包含一个粒子的**任意**入态，上式表明**态矢** $W(-\infty)\left|0\right\rangle$ **不包含任何粒子**，它至多与**真空态**相差一个**相位因子** c_-，即 $W(-\infty)\left|0\right\rangle = c_-\left|0\right\rangle$
- 类似地，可以推出 $W(+\infty)\left|0\right\rangle = c_+\left|0\right\rangle$，其中 c_+ 是另一个**相位因子**

表达 n 点关联函数

由真空态的归一化条件和 $W(t)$ 的幺正性得

$$
\begin{aligned}
1 &= \langle 0|0\rangle = \langle 0|\, W^\dagger(+\infty)W(+\infty)W^\dagger(-\infty)W(-\infty)\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\, W^\dagger(+\infty)U(+\infty,-\infty)W(-\infty)\,|0\rangle = c_+^* c_-\,\langle 0|\, U(+\infty,-\infty)\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

故 $c_+^* c_- = \dfrac{1}{\langle 0|\, U(+\infty,-\infty)\,|0\rangle}$

结合 **Dyson 级数**，将 n **点关联函数**表达为

$$
\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) &= \langle 0|\, W^\dagger(+\infty)\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)U(+\infty,-\infty)]\,W(-\infty)\,|0\rangle \\
&= c_+^* c_-\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)U(+\infty,-\infty)]\,|0\rangle \\
&= \frac{\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\tilde{H}_1^c(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\,\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\tilde{H}_1^c(t)\right]|0\rangle}
\end{aligned}
$$

将 $\tilde{H}_1^c(t) \equiv \tilde{H}_1(\phi_{\rm in}) + c(t)$ 代入上式的**分子**和**分母**中，则 $c(t)$ 贡献一个相位因子 $C \equiv \exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,c(t)\right]$，分子和分母的这个**共同因子相互抵消**

化简 n 点关联函数

因此，$c(t)$ 实际上对 n 点关联函数没有贡献

可以用 $\tilde{H}_1(t) = \tilde{H}_1(\phi_{\text{in}}) = H(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$ 替代 $\tilde{H}_1^c(t)$，得到

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0| \mathsf{T} \left\{ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp\left[-\mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \tilde{H}_1(t) \right] \right\} |0\rangle$$

其中归一化因子

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &\equiv \langle 0| \mathsf{T} \exp\left[-\mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \tilde{H}_1(t) \right] |0\rangle = \langle 0| \mathsf{T} \exp\left\{ -\mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, [\tilde{H}_1^c(t) - c(t)] \right\} |0\rangle \\ &= C^* \langle 0| U(+\infty, -\infty) |0\rangle = \frac{C^*}{c_+^* c_-} \end{aligned}$$

只是一个相位因子，它描述从真空态到真空态的跃迁过程

设 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 是 $\tilde{H}_1(t)$ 的空间密度，它是用渐近场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 表达的，满足

$$\tilde{H}_1(t) = \int \mathrm{d}^3 x\, \tilde{\mathcal{H}}_1(x)$$

n 点关联函数的微扰级数

☯ 将指数函数展开，得到 n 点关联函数的微扰级数

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{\mathcal{N}}\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle$$
$$=\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)]\,|0\rangle$$

💡 其中归一化因子展开为

$$\mathcal{N}=\langle 0|\,\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]|0\rangle$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)]\,|0\rangle$$

🮐 可以利用 **Wick 定理**处理这个微扰级数，并导出 **Feynman 图**

10.5 节 多点关联函数的 Feynman 图

- 本节在 ϕ^4 **理论**中讨论**多点关联函数**的**微扰论**，并画出 **Feynman 图**
- 将 ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分，$\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x)$

$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2}\,\delta m^2 \phi_{\rm in}^2(x), \quad \mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!}\,\phi_{\rm in}^4(x)$$

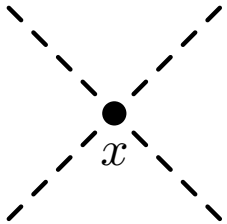
- 可见，$\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 **相互作用项** $\mathcal{H}_\lambda$ 之外，还出现了 $\phi_{\rm in}$ 的**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2}$，它跟**质量重整化** (mass renormalization) 有关

10.5 节　多点关联函数的 Feynman 图

- 本节在 ϕ^4 **理论**中讨论**多点关联函数**的**微扰论**，并画出 **Feynman 图**
- 将 ϕ^4 理论的 $\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 分为两个部分，$\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = \mathcal{H}_{\delta m^2}(x) + \mathcal{H}_\lambda(x)$

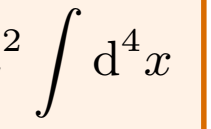
$$\mathcal{H}_{\delta m^2}(x) \equiv \frac{1}{2}\,\delta m^2 \phi_{\rm in}^2(x), \quad \mathcal{H}_\lambda(x) \equiv \frac{\lambda}{4!}\,\phi_{\rm in}^4(x)$$

- 可见，$\tilde{\mathcal{H}}_1(x)$ 中除了 ϕ^4 **相互作用项** $\mathcal{H}_\lambda$ 之外，还出现了 $\phi_{\rm in}$ 的**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2}$，它跟**质量重整化** (mass renormalization) 有关
- 根据 7.3 节讨论，$\mathcal{H}_\lambda$ 在**位置空间**中给出的**顶点规则**为



$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4 x$$

- 类似地，$\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 给出**位置空间“顶点规则”**



$$= -\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4 x$$

- 相应的**动量空间规则**为

$$= -\mathrm{i}\delta m^2$$

10.5.1 小节 两点关联函数的 Feynman 图

现在将两点关联函数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ 与归一化因子 $\mathcal{N}$ 的乘积展开，得

$$\begin{aligned}\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2) &= \langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle \\ &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle - \frac{\mathrm{i}\delta m^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^2(x)]\,|0\rangle \\ &\quad -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^4(x)]\,|0\rangle + \cdots\end{aligned}$$

这里省略了高阶贡献

下面处理前三项中的真空期待值，应用 Wick 定理将时序乘积转化为正规乘积

由于任意多个场算符的正规乘积的真空期待值为零，只有正规乘积中所有的场算符都发生了缩并，才能得到非平庸的结果

我们称这种情况为完全缩并

两点关联函数的分解

- $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ **第一项**是 6.4.1 小节讨论的**实标量场 Feynman 传播子**，

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle = D_{\rm F}(x_1 - x_2) = D_{12}$$

- 它是用**物理质量** m 表达的
- 为便于书写，这里引进 Feynman 传播子的**缩写记号**，定义为

$$D_{ij} \equiv D_{\rm F}(x_i - x_j) = D_{ji}, \quad D_{xy} \equiv D_{\rm F}(x - y) = D_{yx}, \quad D_{ix} \equiv D_{\rm F}(x_i - x) = D_{xi}$$

两点关联函数的分解

- $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2)$ **第一项**是 6.4.1 小节讨论的**实标量场 Feynman 传播子**，

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)]\,|0\rangle = D_{\rm F}(x_1-x_2) = D_{12}$$

- 它是用**物理质量** m 表达的
- 为便于书写，这里引进 Feynman 传播子的**缩写记号**，定义为

$$D_{ij} \equiv D_{\rm F}(x_i-x_j) = D_{ji}, \quad D_{xy} \equiv D_{\rm F}(x-y) = D_{yx}, \quad D_{ix} \equiv D_{\rm F}(x_i-x) = D_{xi}$$

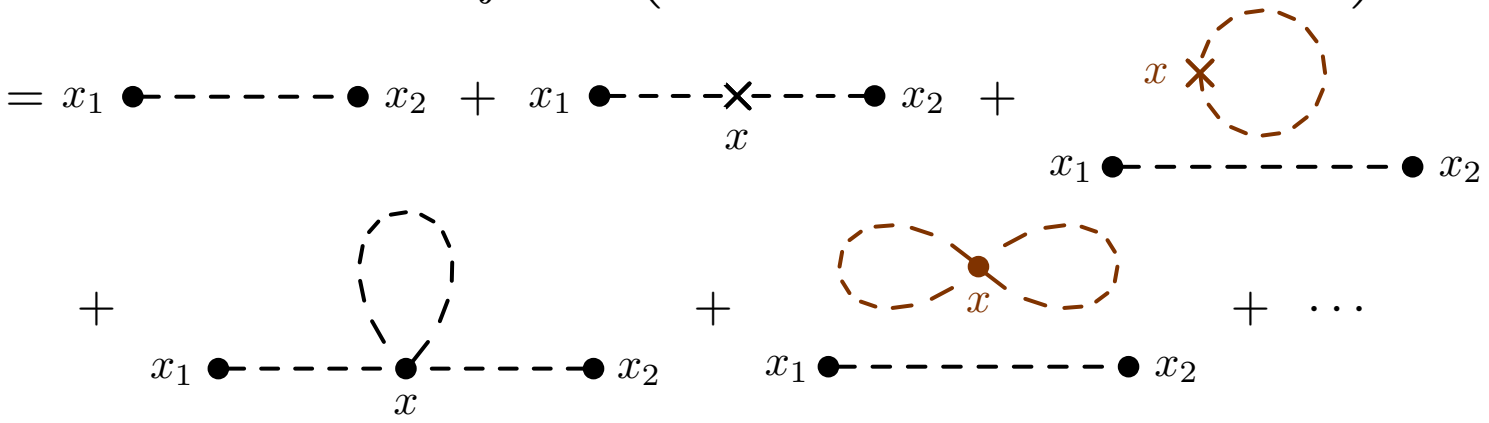
- $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2)$ **第二项**和**第三项**中的真空期待值分解为

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^2(x)]\,|0\rangle &= A_2^2\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)]\,|0\rangle \\
&\quad + \langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)]\,|0\rangle \\
&= 2D_{1x}D_{x2} + D_{12}D_{xx} \\
\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}^4(x)]\,|0\rangle &= C_4^2A_2^2\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)]\,|0\rangle \\
&\quad + C_3^1\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)\phi_{\rm in}(x)]\,|0\rangle \\
&= 12D_{1x}D_{xx}D_{x2} + 3D_{12}D_{xx}D_{xx}
\end{aligned}$$

用 Feynman 图表示两点关联函数

将这些结果代回 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2)$，根据**位置空间 Feynman 规则**画出 Feynman 图，

$$\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2) = D_{12} - \mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4x \left(D_{1x}D_{x2} + \frac{1}{2} D_{12}D_{xx} \right)$$
$$- \mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2} D_{1x}D_{xx}D_{x2} + \frac{1}{8} D_{12}D_{xx}D_{xx} \right) + \cdots$$



第一步中 3 个分数因子的分母正是 **Feynman 图的对称性因子**

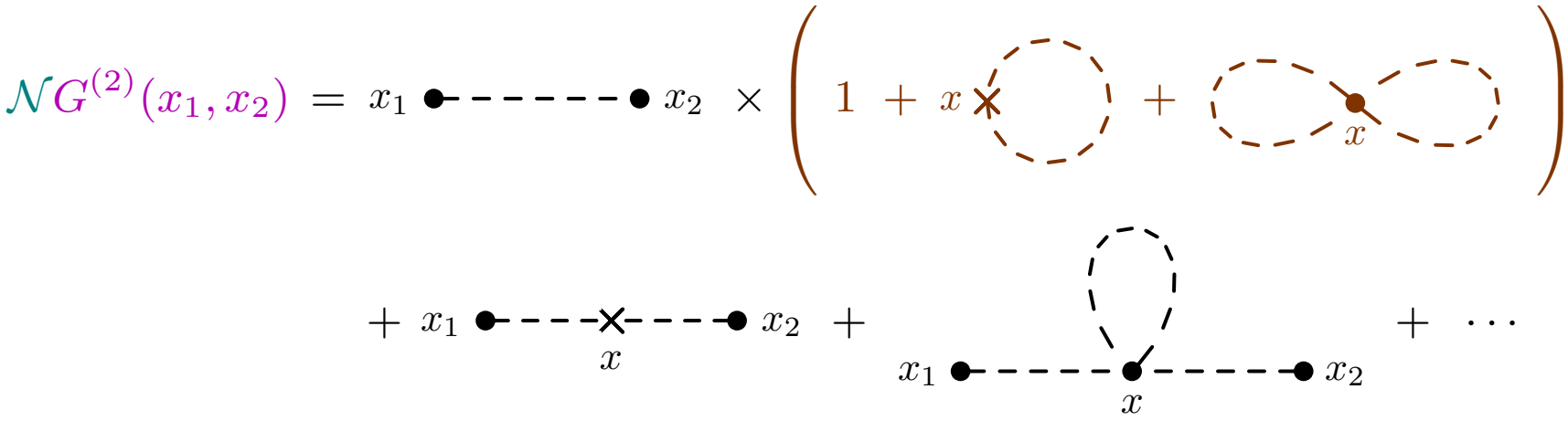
2 点关联函数 $G^{(2)}(x_1,x_2)$ 的宗量是**两个时空点** x_1^μ **和** x_2^μ，称为**外点** (external point)，在**多点关联函数的 Feynman 图**中用**圆点**表示

一般地，n **点关联函数** $G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ 描述 $\boldsymbol{n}$ **个外点**之间的**关联**，根据 **LSZ 约化公式**，这 n 个外点对应于 $\boldsymbol{T}$ **矩阵元**相应 Feynman 图中的 $\boldsymbol{n}$ **条外线**

气泡图和连通图

$\mathcal{N}G^{(2)}(x_1,x_2)$ 中有 3 项包含 D_{12}，它对应于从 x_1 到 x_2 的 Feynman 传播子

合并这 3 个同类项，将 D_{12} 的图形提取出来，余下 1 加上两个气泡图：



气泡图的特点是不与任何外点相连；将各个外点都连接起来且不包含气泡图的 Feynman 图称为连通图 (connected diagram)

可见，这里第一项因式分解为连通图与 1 加两个气泡图的乘积，这样的因子化 (factorization) 是普遍的，下面作一般论述

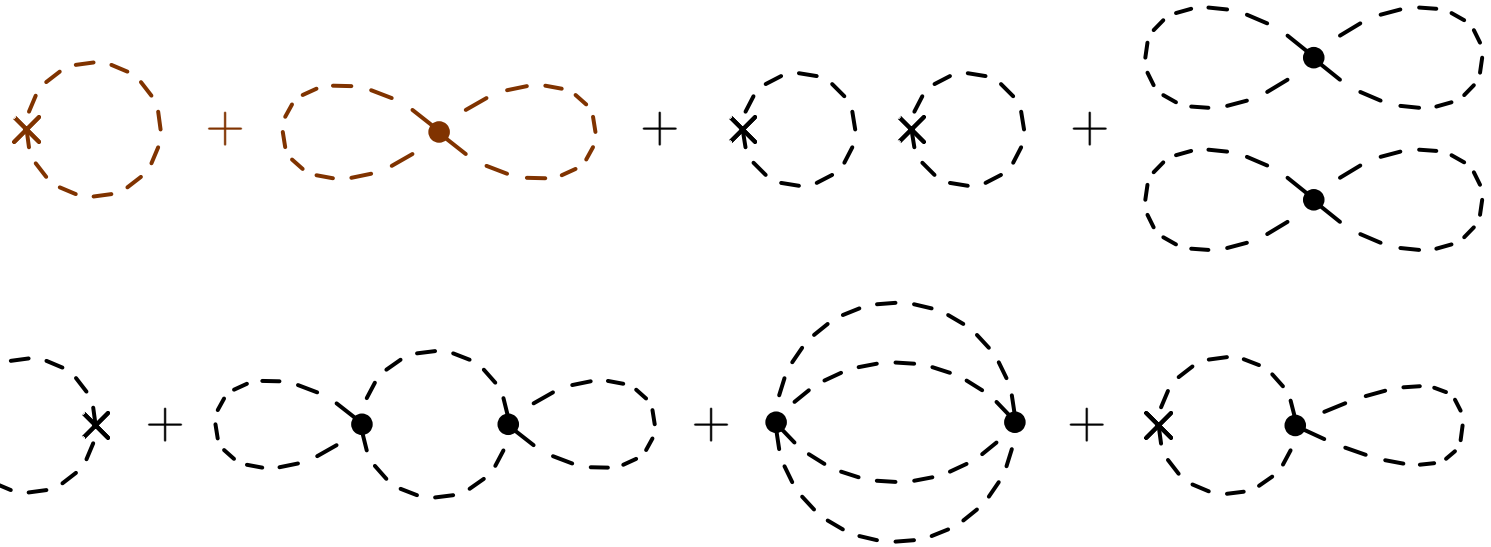
归一化因子的 Feynman 图

归一化因子 $\mathcal{N} = \langle 0|\,\mathrm{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]|0\rangle$ 对所有时空点都进行积分，而相应的 Feynman 图不包含任何外点，必然对应着各种各样的气泡图

在 ϕ^4 理论中，有

$$\mathcal{N} = \langle 0|\,\mathrm{T}\exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}\,\delta m^2\phi_{\mathrm{in}}^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\,\phi_{\mathrm{in}}^4(x)\right]\right\}|0\rangle$$

$= 1 +$



$+ \cdots$

这里前三项正是上一页 $\mathcal{N}G^{(2)}(x_1, x_2)$ 图形表达式圆括号中的项

多点关联函数与连通图

由此可以猜测，

n 点关联函数

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{\mathcal{N}}\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle$$

中的 $1/\mathcal{N}$ 因子正好抵消了所有气泡图对真空期待值

$$\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle$$

的贡献，故相关 Feynman 图都是连通图

接下来给出证明

关于连通图的证明

证明 对 $\mathcal{N}G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ 应用 **Wick 定理**，只保留有**非平庸贡献**的**完全缩并**；注意完全缩并的结果必定是 **c 数**，可用**真空期待值**表示

从而将相关贡献分解为两个真空期待值之积，要求**第一个真空期待值**只包含**连通图**的贡献，**第二个真空期待值**只包含**气泡图**的贡献，得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)]\,|0\rangle\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_k\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\\
&\times\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j})\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
&\times\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_k)\text{ 的所有完全缩并}]\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

对于**某个 k 值**，**挑选 j 个 $\tilde{\mathcal{H}}_1$** 放在**第二个真空期待值**中的方法有 $C_k^j=\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ 种，因而需要考虑这个因子，再对 j 求和

拆解积分

🥨 **拆解积分**，利用 $\frac{1}{m!} \to 0\ (m<0)$ 将 j **的求和上限**扩展到**无穷大**，得

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{k-j}}{(k-j)!}\frac{(-\mathrm{i})^{j}}{j!}\\
&\times\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_{k-j}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j})\ \text{的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
&\times\int \mathrm{d}^4y_{k-j+1}\cdots\mathrm{d}^4y_{k}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k-j+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{k})\ \text{的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
=&\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{i}}{i!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_{i}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i})\ \text{的所有完全缩并}]\,|0\rangle\\
&\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{j}}{j!}\int \mathrm{d}^4y_{i+1}\cdots\mathrm{d}^4y_{i+j}\,\langle 0|\,\mathsf{N}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})\ \text{的所有完全缩并}]\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

🥐 第二步作**变量替换**，令 $i\equiv k-j$，分开两个求和，第二个求和式正是**归一化因子**

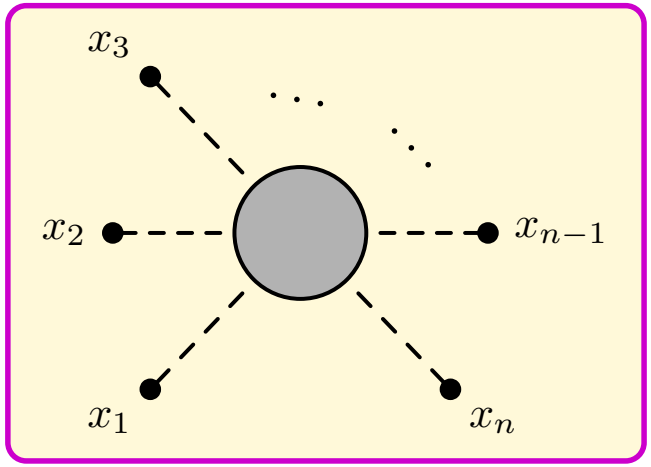
$$
\mathcal{N}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{j}}{j!}\int \mathrm{d}^4y_{i+1}\cdots\mathrm{d}^4y_{i+j}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+1})\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_{i+j})]\,|0\rangle
$$

完成证明

将归一化因子从左右两边同时约去，推出

$$
\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^i}{i!}\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_i \\
&\quad\times\langle 0|\,\mathsf{N}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{in}}(x_n)\tilde{\mathcal{H}}_1(y_1)\cdots\tilde{\mathcal{H}}_1(y_i)\ \text{的所有完全缩并}]\,|0\rangle \\
&= \text{包含 } n \text{ 个外点 } x_1,\cdots,x_n \text{ 的所有连通图}
\end{aligned}
$$

$=$



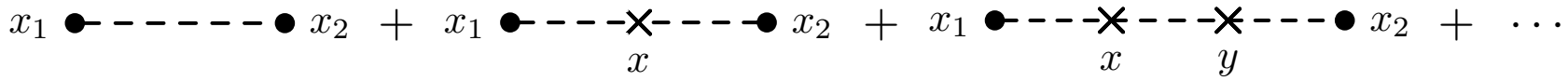
第三步用灰色圆形表示所有连通图的贡献

证毕

二次项对两点关联函数的贡献

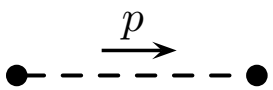
- 下面考察**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2} = \dfrac{1}{2}\,\delta m^2 \phi_{\rm in}^2(x)$ 的影响，考虑**各种连通图**，那么它对**两点关联函数**的贡献为

$$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0| \mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\exp\left[-{\rm i}\int {\rm d}^4x\, \mathcal{H}_{\delta m^2}(x)\right]\right\}|0\rangle$$

$=$ 

$$= D_{12} - {\rm i}\delta m^2 \int {\rm d}^4x\, D_{1x}D_{x2} + (-{\rm i}\delta m^2)^2 \int {\rm d}^4x\, {\rm d}^4y\, D_{1x}D_{xy}D_{y2} + \cdots$$

- 上式第一步直接画出 **Feynman 图**，第二步根据 **Feynman 规则**写出代数表达式
- $G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, 0)$ 的 **Fourier 变换**是 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) \equiv \displaystyle\int {\rm d}^4x_1\, {\rm e}^{{\rm i}p\cdot x_1} G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, 0)$
- 首先，$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2)$ **第一项**对 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献是**动量空间**中的 **Feynman 传播子**

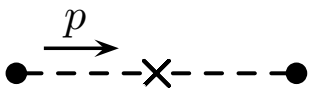
$$\tilde{D}_{\rm F}(p) = \frac{\rm i}{p^2 - m^2 + {\rm i}\epsilon} =$$ 

- 其中第二步画出相应的**动量空间 Feynman 图**

$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2)$ 第二项的贡献

🐵 其次，$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2)$ **第二项**对 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献为

$$
\begin{aligned}
& -\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4 x_1\, \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} D_{\mathrm{F}}(x_1 - x) D_{\mathrm{F}}(x) \\
= & -\mathrm{i}\delta m^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 x_1\, \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 p_1\, \mathrm{d}^4 p_2}{(2\pi)^8}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\, \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot(x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= & -\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4 p_1\, \mathrm{d}^4 p_2\, \delta^{(4)}(p_1 - p)\delta^{(4)}(p_2 - p_1)\, \frac{\mathrm{i}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= & \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}\delta m^2)\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= & \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)
\end{aligned}
$$

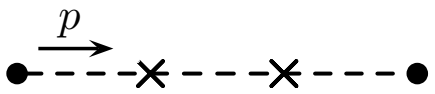
$=$ 

🥓 最后一步根据**动量空间 Feynman 规则**画出 **Feynman 图**

$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2)$ 第三项的贡献

最后，$G^{(2)}_{\delta m^2}(x_1, x_2)$ **第三项**对 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 的贡献是

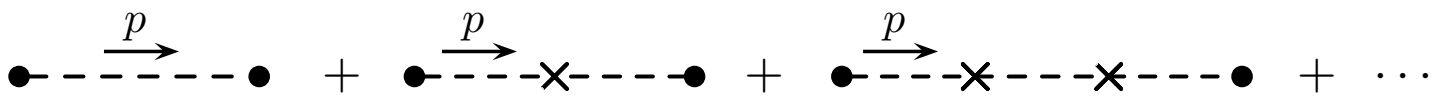
$$
\begin{aligned}
&(-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \mathrm{d}^4 x_1\, \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} D_{\mathrm{F}}(x_1 - x) D_{\mathrm{F}}(x - y) D_{\mathrm{F}}(y) \\
= {} & (-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 x_1\, \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \mathrm{d}^4 p_1\, \mathrm{d}^4 p_2\, \mathrm{d}^4 p_3}{(2\pi)^{12}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1} \\
& \qquad \times \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot(x_1 - x)}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot(x - y)}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_3\cdot y}}{p_3^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= {} & (-\mathrm{i}\delta m^2)^2 \int \mathrm{d}^4 p_1\, \mathrm{d}^4 p_2\, \mathrm{d}^4 p_3\, \delta^{(4)}(p_1 - p)\delta^{(4)}(p_2 - p_1)\delta^{(4)}(p_3 - p_2) \\
& \times \frac{\mathrm{i}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}}{p_3^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= {} & \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}\delta m^2) \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}\delta m^2) \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= {} & \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) =
\end{aligned}
$$



二次项对动量空间传播子的贡献

🐶 综上，**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对**动量空间传播子** $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的贡献为

$$\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) = \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \cdots$$

$=$ 

🥪 可见，对**多点关联函数**作 **Fourier 变换**后，进行**时空坐标**和**四维动量**的**积分**，则**位置空间中的 Feynman 传播子** D_{F} 转换为相应的**动量空间 Feynman 传播子** $\tilde{D}_{\mathrm{F}}$

🍟 而与顶点联系在一起的**时空积分**已经用掉了，这说明剩下的因子正好可以用**动量空间中的 Feynman 规则**描述，由此得到一个普遍结论：

> **多点关联函数**的 **Fourier 变换**对应于**动量空间**中的 **Feynman 图**

🍕 因此可以利用**动量空间 Feynman 规则**直接计算**多点关联函数**的 **Fourier 变换**

等比级数

🐷 现在 $\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p)$ 表达式是一个**等比级数**，可改写为

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) &= \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) + \cdots \\ &= \tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)\sum_{k=0}^{\infty}[(-\mathrm{i}\delta m^2)\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p)]^k = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\delta m^2}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right)^k\end{aligned}$$

🍖 由**等比级数公式** $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \ (|z| < 1)$ 得

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-z/a} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k, \quad |z| < |a|$$

🌭 δm^2 是微扰论中的**小量**，取 $a = p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon$ 和 $z = \delta m^2$，有

$$\tilde{G}^{(2)}_{\delta m^2}(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 + \mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

🌮 第二步用到定义式 $\delta m^2 \equiv m_0^2 - m^2$，可见，**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 对**两点关联函数**的影响是将**极点位置**从**物理质量平方** m^2 移动到**裸质量平方** m_0^2 处

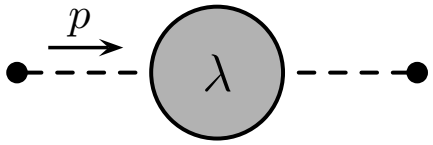
相互作用项对两点关联函数的贡献

接下来考虑 ϕ^4 **相互作用项** $\mathcal{H}_\lambda = \dfrac{\lambda}{4!}\,\phi_{\rm in}^4(x)$，它对**两点关联函数**的贡献为

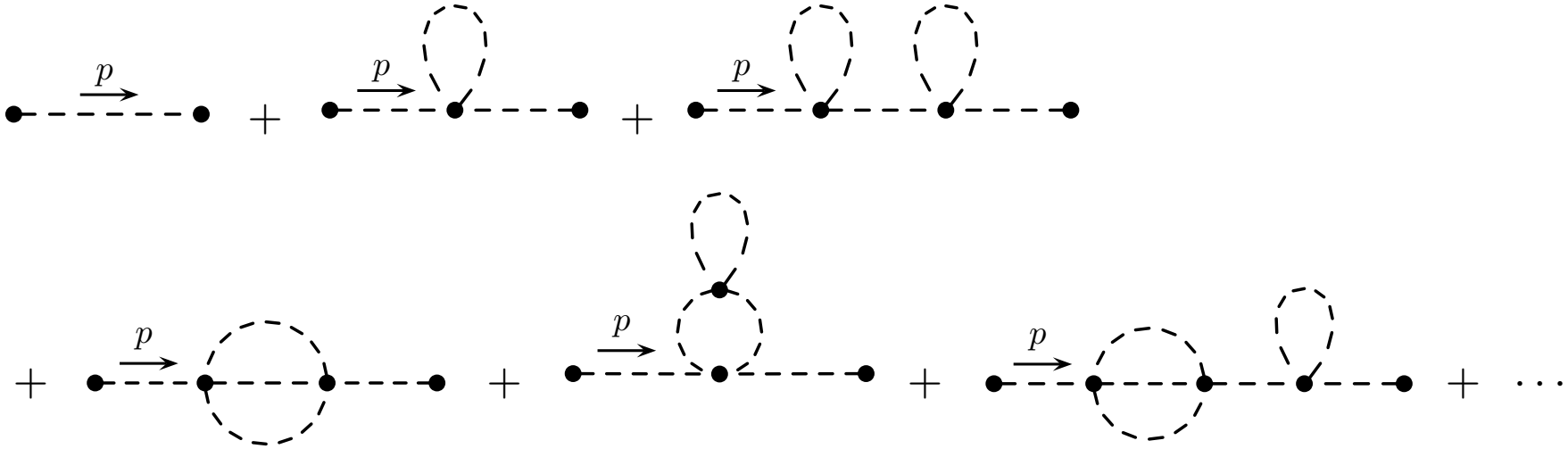
$$G_\lambda^{(2)}(x_1,x_2) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}}\,\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{H}_\lambda(x)\right]\right\}|0\rangle$$

作 **Fourier 变换**，将各种**连通图**画出来，得

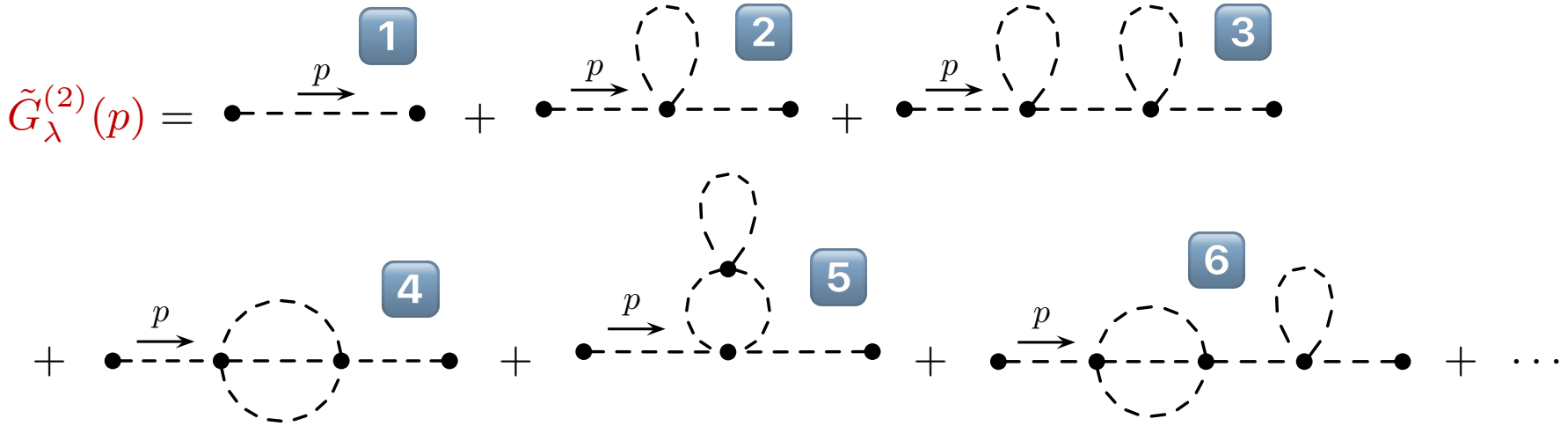
$$\tilde{G}_\lambda^{(2)}(p) \equiv \int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,G_\lambda^{(2)}(x_1,0) =$$



$=$

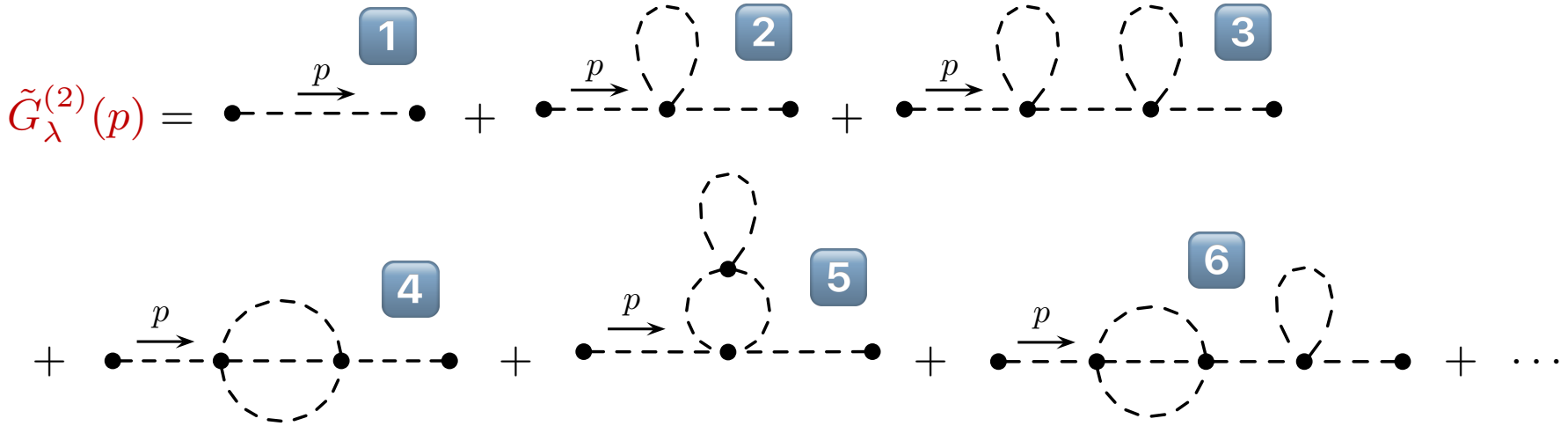


单粒子不可约图



- 在这些连通图中，3 和 6 是可以约化的
- 如果从 3 中移除连接中间两个点的内线，那么它会分割成两个不相连的部分
- 如果从 6 中移除连接第三和第四个点的内线，它也会分割成两个不相连部分

单粒子不可约图



在这些连通图中，3 和 6 是可以约化的

如果从 3 中移除连接中间两个点的内线，那么它会分割成两个不相连的部分

如果从 6 中移除连接第三和第四个点的内线，它也会分割成两个不相连部分

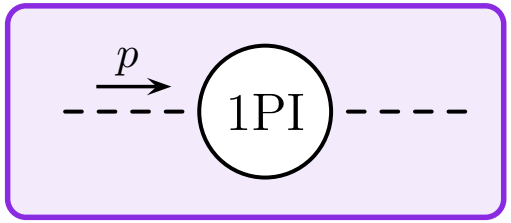
对于图 2 、4 、5 ，移除连接任意两个顶点的一条内线之后**不会**分割成两个不相连的部分，像这样的图称为单粒子不可约图 (one-particle irreducible diagram)，简称 1PI 图。注意，在定义上，我们并不把 1 当作 1PI 图

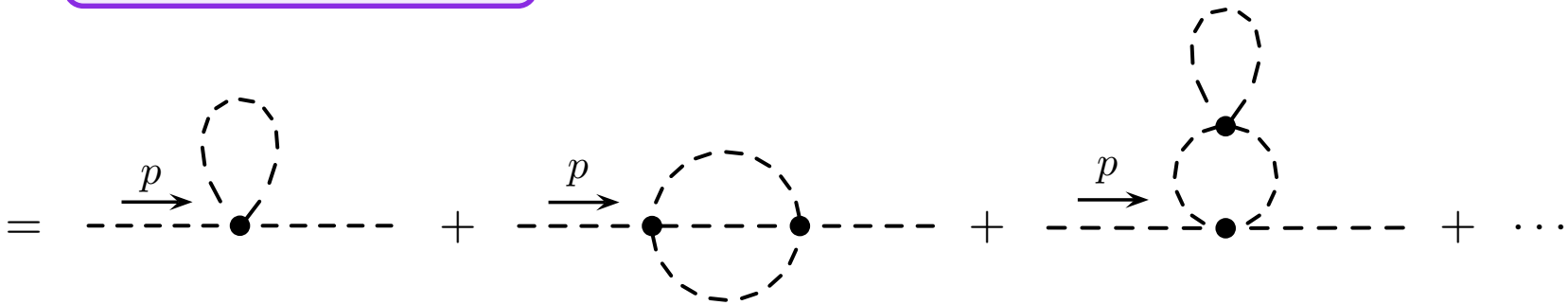
可利用 1PI 图约化各种连通图，比如 3 约化成两个 2 ，6 约化成 4 和 2

两点关联函数的所有 1PI 图

- 将**所有**由 $\mathcal{H}_\lambda$ 贡献的**两点关联函数 1PI 图**记作

$-\mathrm{i}\Pi(p^2) =$



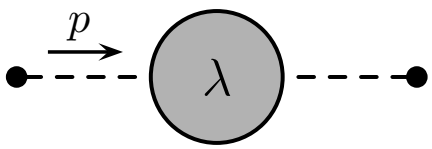


- 这些 **1PI 图**都属于 7.3 节讨论过的 ϕ **粒子自能图**
- 定义上 **1PI 自能图** $-\mathrm{i}\Pi(p^2)$ 的**表达式**中**不包含**两个连接外点的 **Feynman 传播子**
- **Lorentz 对称性**保证 $\Pi(p^2)$ 是 p^2 **的函数**
- $\Pi(p^2)$ 的**领头阶**是 λ^1 **阶**，因而它是微扰论中的**小量**

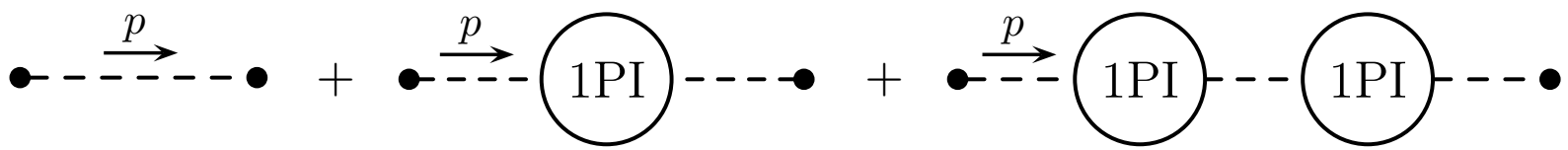
相互作用项对动量空间传播子的贡献

利用 **1PI 自能图** $-\mathrm{i}\Pi(p^2)$ 可以将 $\tilde{G}^{(2)}_\lambda(p)$ 表达为

$\tilde{G}^{(2)}_\lambda(p) =$



$=$



$$= \tilde{D}_\mathrm{F}(p) + \tilde{D}_\mathrm{F}(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_\mathrm{F}(p) + \tilde{D}_\mathrm{F}(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_\mathrm{F}(p)[-\mathrm{i}\Pi(p^2)]\tilde{D}_\mathrm{F}(p) + \cdots$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right]^k = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}$$

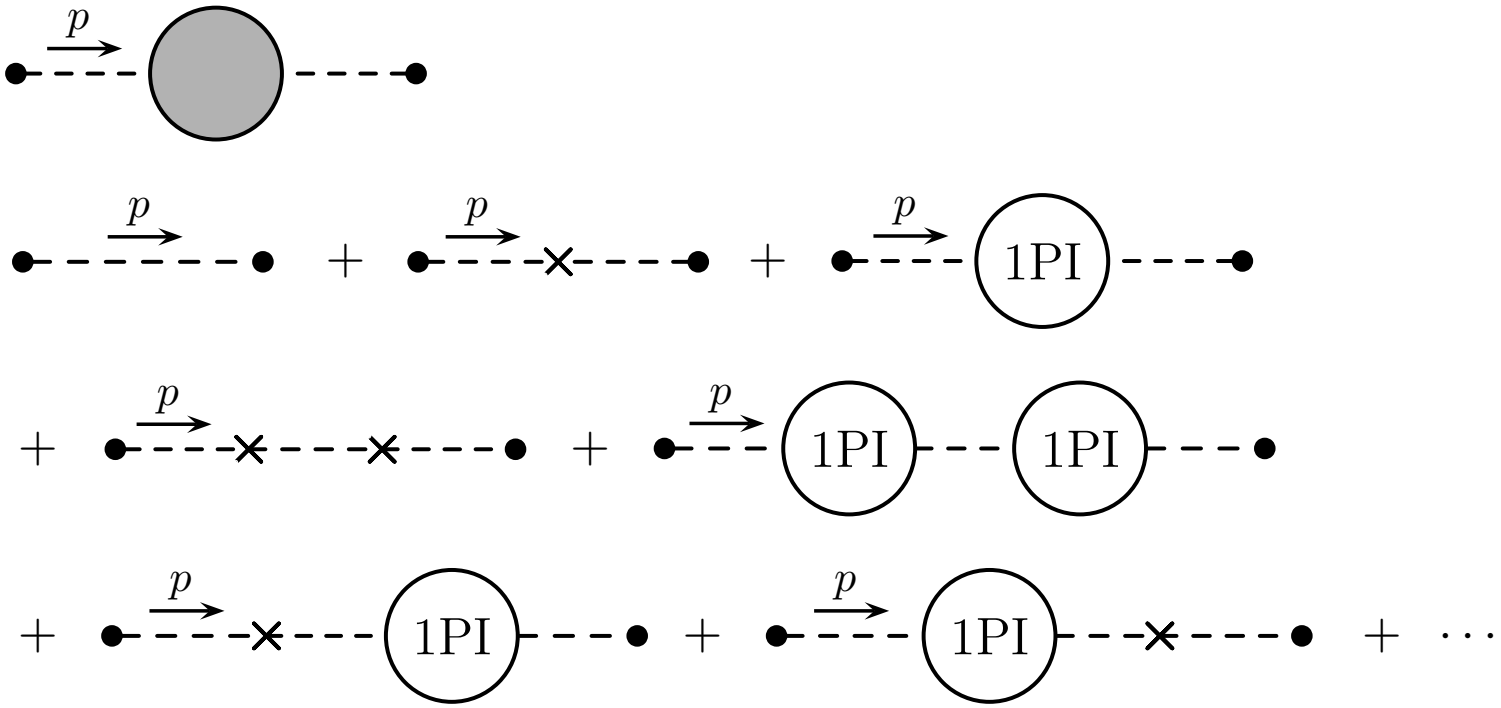
最后一步用到 $\dfrac{1}{a-z} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k, \quad |z| < |a|$

这个结果表明**相互作用项** $\mathcal{H}_\lambda$ 也会影响**两点关联函数**的**极点位置**

动量空间中的完整传播子

🐻 将 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 和 $\mathcal{H}_\lambda$ 的贡献合起来，**动量空间**中的**两点关联函数**（即**完整的传播子**）是

$\tilde{G}^{(2)}(p) =$



$$= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\delta m^2 + \Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \right]^k = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}$$

质量重整化条件

- 在**单粒子态极点**附近，$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 **Källén-Lehmann 谱表示**

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{i}\rho(s)}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}$$ 的**第一项**相同，即

$$\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon} \xrightarrow{p^0 \to E_{\mathbf{p}}} \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

- 可见，为了**保持极点**位于**物理质量** m 的平方处，必须要求 $\boxed{\delta m^2 = -\Pi(m^2)}$
- 这是**质量重整化条件**，它表明**质量重整化常数** δm^2 由 **1PI 自能图**的 $\Pi(p^2)$ 决定

质量重整化条件

🐼 在**单粒子态极点**附近，$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 的行为应该与 **Källén-Lehmann 谱表示**

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{i}\rho(s)}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}$$ 的**第一项**相同，即

$$\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon} \xrightarrow{p^0 \to E_{\mathbf{p}}} \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

🍩 可见，为了**保持极点**位于**物理质量** m 的平方处，必须要求 $\boxed{\delta m^2 = -\Pi(m^2)}$

🍪 这是**质量重整化条件**，它表明**质量重整化常数** δm^2 由 **1PI 自能图**的 $\Pi(p^2)$ 决定

🥠 由于 $\Pi(p^2)$ 的**领头阶**是 λ^1 **阶**，δm^2 的领头阶也是 λ^1 **阶**

🥮 在**圈图**计算中，$\Pi(p^2)$ 是**发散**的，因而 δm^2 也是**发散**的；不过，它们相加时**发散部分相互抵消**，因此对传播子的**修正量** $f(p^2) \equiv \delta m^2 + \Pi(p^2)$ 是**有限**的 $\mathcal{O}(\lambda)$ **小量**

🫚 由于**二次项** $\mathcal{H}_{\delta m^2} = \frac{1}{2}\delta m^2 \phi_{\mathrm{in}}^2(x)$ 的贡献**抵消**了**相互作用项** $\mathcal{H}_\lambda$ 对**极点位置**的影响，我们称 $\mathcal{H}_{\delta m^2}$ 为**质量抵消项** (mass counter term)

展开 $f(p^2)$

🐼 正是因为在高阶计算中**相互作用项**的贡献**移动**了**极点位置**，我们需要从拉氏量中的**裸质量平方** m_0^2 里面分离出 δm^2 来**抵消**它的影响，并**吸收圈图**引起的**发散**

🍮 这就是**重整化**的基本思想

展开 $f(p^2)$

🐼 正是因为在高阶计算中**相互作用项**的贡献**移动**了**极点位置**，我们需要从拉氏量中的**裸质量平方** m_0^2 里面分离出 δm^2 来**抵消**它的影响，并**吸收圈图**引起的**发散**

🍮 这就是**重整化**的基本思想

🧁 在 $p^2 = m^2$ 附近将 $f(p^2) = \delta m^2 + \Pi(p^2)$ 展开，得

$$f(p^2) \simeq \delta m^2 + \Pi(m^2) + (p^2 - m^2) \left.\frac{\mathrm{d}f(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2]$$

$$= (p^2 - m^2) \left.\frac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2} + \mathcal{O}[(p^2 - m^2)^2]$$

🥧 从而 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 $p^2 = m^2$ 附近近似为

$$\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon} \simeq \frac{\mathrm{i}}{(p^2 - m^2)\left[1 - \mathrm{d}\Pi(p^2)/\mathrm{d}p^2|_{p^2=m^2}\right] + \mathrm{i}\epsilon}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\left[1 - \left.\frac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}\right]^{-1}$$

场强重整化条件

- 比较 $\dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m^2-\delta m^2-\Pi(p^2)+\mathrm{i}\epsilon} \simeq \dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\left[1-\left.\dfrac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}\right]^{-1}$ 与 $\dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m^2-\delta m^2-\Pi(p^2)+\mathrm{i}\epsilon} \xrightarrow{p^0\to E_{\mathbf{p}}} \dfrac{\mathrm{i}Z}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$，推出

$$\boxed{Z^{-1}=1-\left.\frac{\mathrm{d}\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}}$$

- 这是**场强重整化条件**，它表明**场强重整化常数** Z 也由 **1PI 自能图** $\Pi(p^2)$ 决定
- 而且

$$Z=1+\mathcal{O}(\lambda)$$

10.5.2 小节 四点关联函数的 Feynman 图

现在讨论**四点关联函数**，展开到 λ^1 **阶**，有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
=\ &\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle\\
=\ &\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)]\,|0\rangle\\
&-\frac{\mathrm{i}\delta m^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)\phi_{\mathrm{in}}^2(x)]\,|0\rangle\\
&-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2)\phi_{\mathrm{in}}(x_3)\phi_{\mathrm{in}}(x_4)\phi_{\mathrm{in}}^4(x)]\,|0\rangle+\mathcal{O}(\lambda^2)
\end{aligned}
$$

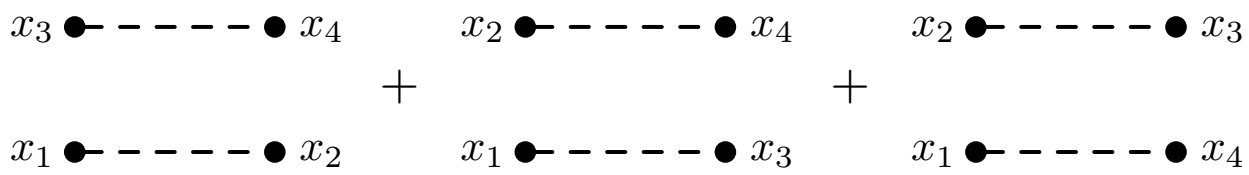
10.5.2 小节 四点关联函数的 Feynman 图

现在讨论**四点关联函数**，展开到 λ^1 **阶**，有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
=\ &\langle 0|\,\mathsf{T}\left\{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x_3)\phi_{\rm in}(x_4)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{\mathcal{H}}_1(x)\right]\right\}|0\rangle\\
=\ &\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x_3)\phi_{\rm in}(x_4)]\,|0\rangle\\
&-\frac{\mathrm{i}\delta m^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x_3)\phi_{\rm in}(x_4)\phi_{\rm in}^2(x)]\,|0\rangle\\
&-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)\phi_{\rm in}(x_3)\phi_{\rm in}(x_4)\phi_{\rm in}^4(x)]\,|0\rangle+\mathcal{O}(\lambda^2)
\end{aligned}
$$

首先，$\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ **第一项**给出的**连通图**为

$G_0^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$



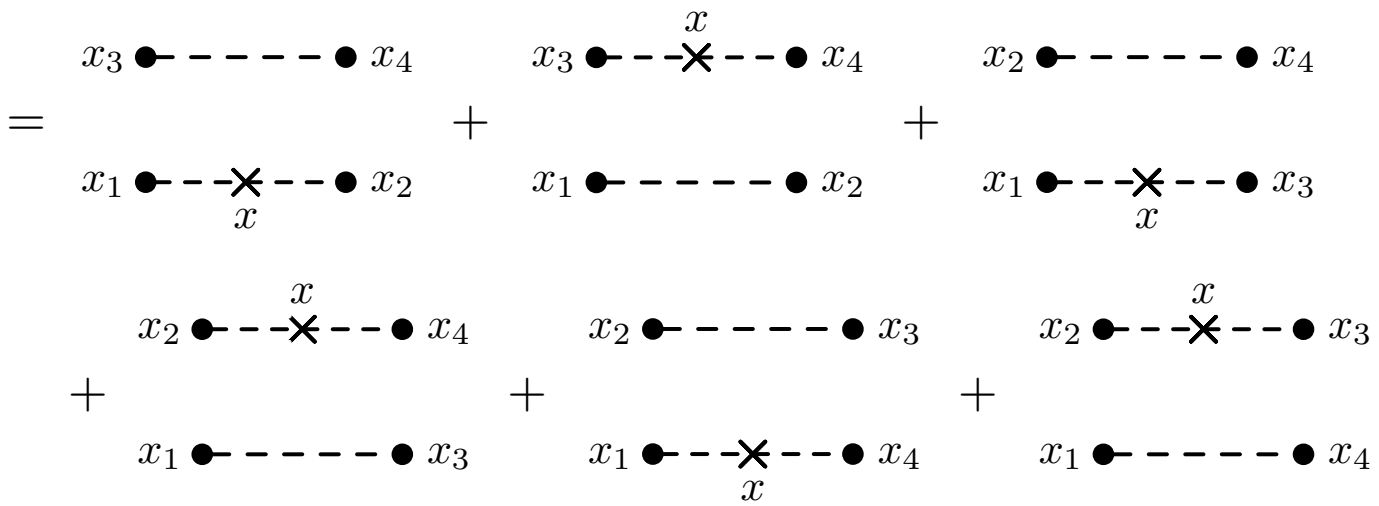
$$= D_{12}D_{34}+D_{13}D_{24}+D_{14}D_{23}$$

这三个图各自描述两个**独立传播**的**自由粒子**，与**散射过程无关**

质量重整化常数的修正

其次，$\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 第二项给出的连通图为

$$G^{(4)}_{\delta m^2}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$



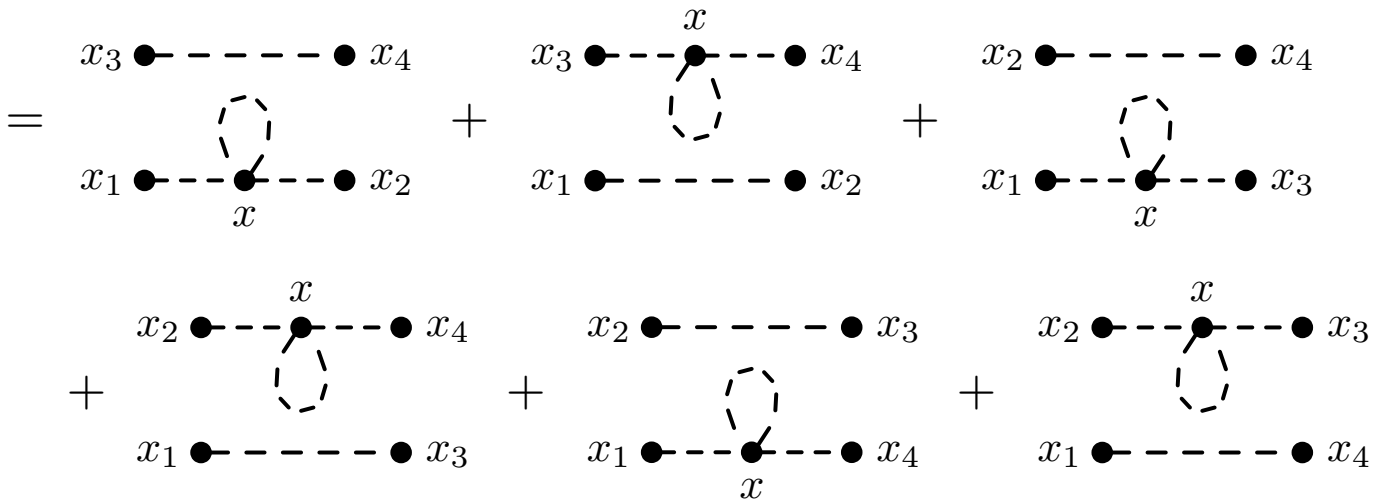
$$= -\mathrm{i}\delta m^2 \int \mathrm{d}^4x \left(D_{1x}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{x4} + D_{1x}D_{x3}D_{24} + D_{13}D_{2x}D_{x4} + D_{1x}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{x3}\right)$$

这些图在各个自由传播子上加入质量重整化常数的修正，跟散射过程也没有关系

单圈自能图的修正

最后，$\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 第三项给出的两种连通图，第一种连通图为

$$G^{(4)}_{\lambda,1}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$



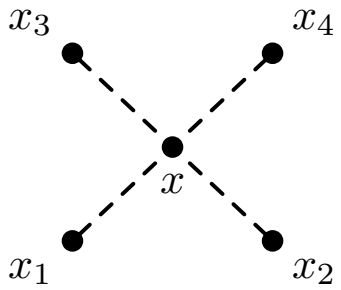
$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x \left(D_{1x}D_{xx}D_{x2}D_{34} + D_{12}D_{3x}D_{xx}D_{x4} + D_{1x}D_{xx}D_{x3}D_{24} + D_{13}D_{2x}D_{xx}D_{x4} + D_{1x}D_{xx}D_{x4}D_{23} + D_{14}D_{2x}D_{xx}D_{x3}\right)$$

这些图只是在各个自由传播子上加入单圈自能图的修正，与散射过程无关

连通图与散射过程

🐗 $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ **第三项**给出的**第二种连通图**为

$$G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$



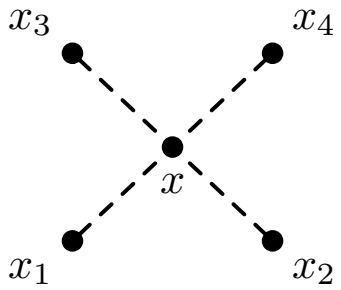
$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, D_{1x}D_{2x}D_{3x}D_{4x}$$

🌧️ 像这样所有外点彼此都连接在一起的连通图称为**完全连通图**；只有这种完全连通图会贡献到 $\phi\phi \to \phi\phi$ **散射过程**，接下来应用 **LSZ 约化公式**以得到 T **矩阵元**

连通图与散射过程

🐗 $\mathcal{N}G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 第三项给出的第二种连通图为

$$G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$



$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, D_{1x}D_{2x}D_{3x}D_{4x}$$

🌧️ 像这样所有外点彼此都连接在一起的连通图称为完全连通图；只有这种完全连通图会贡献到 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程，接下来应用 LSZ 约化公式以得到 T 矩阵元

☔ 为此，先计算 Klein-Gordon 微分算符对 Feynman 传播子的作用，有

$$(\partial_x^2+m^2)D_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(\partial_x^2+m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(-p^2+m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$$

☂️ 即

$$\boxed{(\partial_x^2+m^2)D_{\mathrm{F}}(x-y) = -\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y)}$$

🪶 可见，Feynman 传播子是 Klein-Gordon 微分算符的 Green 函数

T 矩阵元

🦁 将 $G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 代入 **LSZ 约化公式**，得到 $\phi\phi\to\phi\phi$ 的 T **矩阵元**为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_{fi} &= \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\right)^4 \int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x_3+p_2\cdot x_4)} \\
&\qquad \times(\partial^2_{x_1}+m^2)(\partial^2_{x_2}+m^2)(\partial^2_{x_3}+m^2)(\partial^2_{x_4}+m^2)G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\
&= -\mathrm{i}\lambda\,\frac{\mathrm{i}^4}{Z^2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x_3+p_2\cdot x_4)} \\
&\qquad \times(\partial^2_{x_1}+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_1-x)(\partial^2_{x_2}+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_2-x) \\
&\qquad \times(\partial^2_{x_3}+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_3-x)(\partial^2_{x_4}+m^2)D_{\mathrm{F}}(x_4-x) \\
&= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x_3+p_2\cdot x_4)} \\
&\qquad \times\delta^{(4)}(x_1-x)\delta^{(4)}(x_2-x)\delta^{(4)}(x_3-x)\delta^{(4)}(x_4-x) \\
&= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1+p_2-q_1-q_2)\cdot x} = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)
\end{aligned}
$$

领头阶计算

- 与 $\mathrm{i}T_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\,\mathrm{i}\mathcal{M}$ 比较，则 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程的不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2} = -\mathrm{i}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

- 第二步用到 $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$
- 在 λ^1 阶，这里得到的 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 与 7.3 节中的领头阶计算结果相同
- 可以看到，

> 在微扰论的领头阶计算中，可取 $Z = 1$ 和 $\delta m^2 = 0$
>
> 即不需要考虑重整化常数的影响

- 这说明第 7、8、9 章中关于领头阶过程的计算方法是合理的

动量空间中的四点关联函数

对 $G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 作 **Fourier 变换**，得

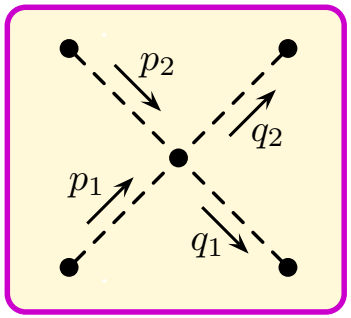
$$
\begin{aligned}
&\tilde{G}^{(4)}_{\lambda,2}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)\\
&= \int\left(\prod_{i=1}^{4}\mathrm{d}^4x_i\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-p_1\cdot x_3-p_2\cdot x_4)}G^{(4)}_{\lambda,2}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
&= -\mathrm{i}\lambda\int\mathrm{d}^4x\left(\prod_{i=1}^{4}\mathrm{d}^4x_i\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-p_1\cdot x_3-p_2\cdot x_4)}\\
&\qquad\times D_{\mathrm{F}}(x_1-x)D_{\mathrm{F}}(x_2-x)D_{\mathrm{F}}(x_3-x)D_{\mathrm{F}}(x_4-x)\\
&= -\mathrm{i}\lambda\int\mathrm{d}^4x\left(\prod_{i=1}^{4}\mathrm{d}^4x_i\right)\left(\prod_{j=1}^{4}\frac{\mathrm{d}^4k_j}{(2\pi)^4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-p_1\cdot x_3-p_2\cdot x_4)}\\
&\qquad\times\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot(x_1-x)}}{k_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot(x_2-x)}}{k_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3\cdot(x_3-x)}}{k_3^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_4\cdot(x_4-x)}}{k_4^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}
\end{aligned}
$$

动量空间中的 Feynman 图

完成积分，得到

$$
\begin{aligned}
&\tilde{G}^{(4)}_{\lambda,2}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)\\
=\ & -\mathrm{i}\lambda\int\left(\prod_{j=1}^{4}\mathrm{d}^4k_j\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3+k_4)\\
&\times\delta^{(4)}(k_1-q_1)\delta^{(4)}(k_2-q_2)\delta^{(4)}(k_3+p_1)\delta^{(4)}(k_4+p_2)\\
&\times\frac{\mathrm{i}}{k_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k_3^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k_4^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\
=\ & (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\\
&\times(-\mathrm{i}\lambda)\frac{\mathrm{i}}{q_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{q_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\times$$



这个结果确实对应于**动量空间中的 Feynman 图**

再次得到 T 矩阵元

- 不过，额外出现了一个表征**能动量守恒**的 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$ **因子**
- 毕竟之前使用的**动量空间 Feynman 规则**是针对**不变振幅** $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 设置的
- 而**动量空间**中的**多点关联函数**通过 **LSZ 约化公式**联系着 $\boldsymbol{T}$ **矩阵元** $\mathrm{i}T_{fi}$
- 后者相对于 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 就是多了**这个因子**

再次得到 T 矩阵元

- 不过，额外出现了一个表征**能动量守恒**的 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$ **因子**
- 毕竟之前使用的**动量空间 Feynman 规则**是针对**不变振幅** $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 设置的
- 而**动量空间**中的**多点关联函数**通过 **LSZ 约化公式**联系着 **T 矩阵元** $\mathrm{i}T_{fi}$
- 后者相对于 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 就是多了**这个因子**
- 10.3 小节推导的 **LSZ 约化公式**的另一种表述给出

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1,q_2,-p_1,-p_2) \xrightarrow[q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_2^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{i}T_{fi}$$

- 与上一页的结果比较，同样可以得到 $\phi\phi\to\phi\phi$ 散射过程的 T 矩阵元

$$\mathrm{i}T_{fi} = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{Z^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$$

10.5.3 小节 切断 Feynman 图

接下来讨论在**微扰论**中考虑**所有阶贡献**时的形式结果，**LSZ 约化公式**

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[q_j^0 \to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{q_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{i}T_{fi}$$

中的**四点关联函数**原则上包括了**所有阶贡献**的**四点完全连通图**，因而**每个外点**都会联系着一个**完整传播子**，受到**场强重整化常数** Z 的影响

结合**完整传播子**的形式 $\tilde{G}^{(2)}(p) = \dfrac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \displaystyle\int_{\sim 4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{i}\rho(s)}{p^2 - s + \mathrm{i}\epsilon}$

将**动量空间**中**完整**的**四点关联函数**改写为

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[q_j^0 \to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{\mathrm{i}Z}{q_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{q_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}T_{fi}}{(\sqrt{Z})^4}$$

即每个**外点**贡献一个 $\mathrm{i}Z/(q_i^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)$ 或 $\mathrm{i}Z/(p_i^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)$ 形式的**完整传播子**

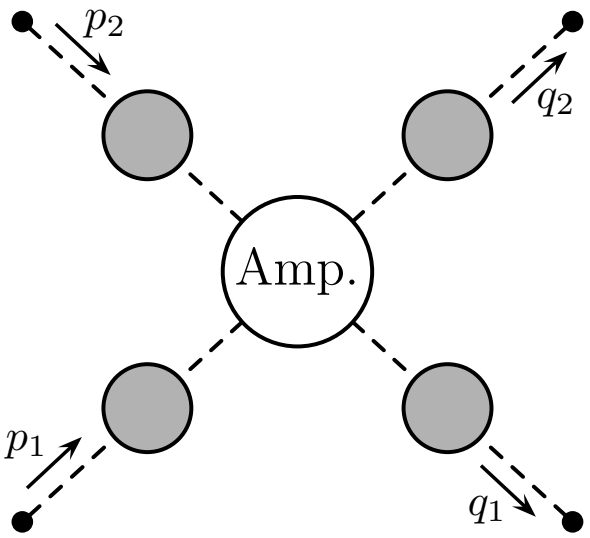
切断 Feynman 图

用 Feynman 图将**四点关联函数**表示为

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$$

$$\xrightarrow[q_j^0 \to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{\mathrm{i}Z}{q_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{q_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}T_{fi}}{(\sqrt{Z})^4}$$

$=$



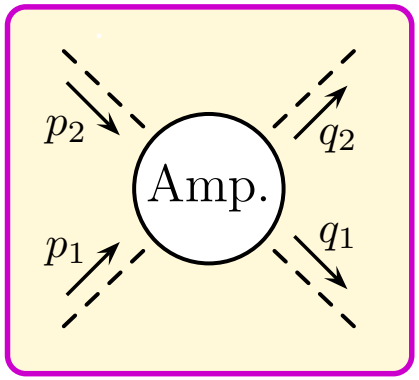
将与**外点**相连的**所有完整传播子**从 Feynman 图上**切除**，得到的部分称为**切断** (amputated) **Feynman 图**，在图中用 **“Amp.”** 标记

切断 Feynman 图与动量空间 Feynman 规则

🦀 将**四个完整传播子**从 $\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2)$ 的 Feynman 图中抽取出来，得到

$$\tilde{G}^{(4)}(q_1, q_2, -p_1, -p_2) \xrightarrow[q_j^0 \to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{\mathrm{i}Z}{q_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{q_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$

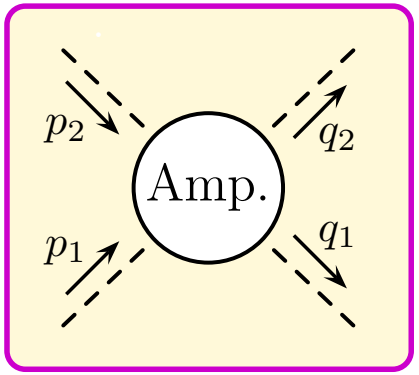


⛰️ 这里还抽出了表征**能动量守恒**的 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$ **因子**，从而剩余的**切断 Feynman 图**直接对应于**动量空间 Feynman 规则**

$2 \to 2$ 散射过程的不变振幅

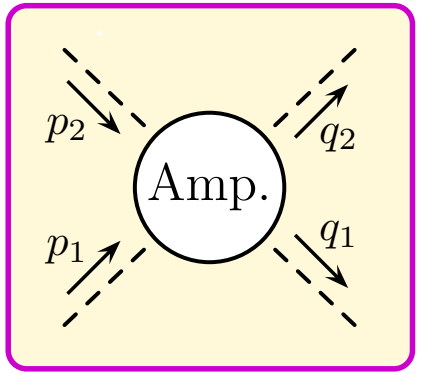
🐬 比较前两页的结果，推出 T 矩阵元的形式为

$$\mathrm{i}T_{fi} = (\sqrt{Z})^4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$



⛰️ 从而不变振幅表达成

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = (\sqrt{Z})^4 \times$$

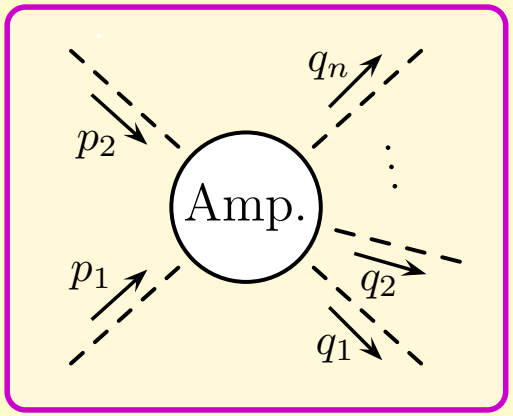


🌋 可见，除了用动量空间 Feynman 规则计算所有切断的完全连通 Feynman 图之外，还要乘上 $(\sqrt{Z})^4$ 因子才能得到正确的不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$

任意 $2 \to n$ 散射过程的不变振幅

推广到任意 $2 \to n$ 散射过程，不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = (\sqrt{Z})^{n+2} \times$$



即每条外线贡献一个 $\sqrt{Z}$ 因子，这个因子修正了外线的场强

在领头阶计算中，这些 $\sqrt{Z}$ 因子都是 1，无关紧要

但在更高阶计算中需要把它们考虑进来才能获得正确的结果

Dirac 旋量场的完整四点关联函数

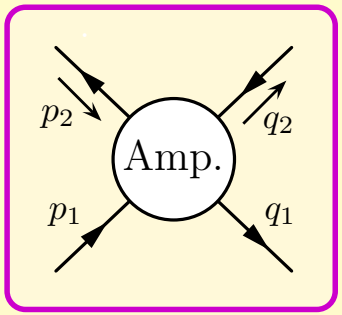
- 以上讨论可进一步推广到**其它量子场**
- 对于 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$，10.3 节讨论的**动量空间**中**完整四点关联函数**的 Feynman 图结构为

$$\tilde{G}^{(4)}_{b_2 b_1 a_1 a_2}(q_2, q_1, -p_1, -p_2) \xrightarrow[q_i^0 \to E_{\mathbf{q}_i}]{p_i^0 \to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{\mathrm{i}Z_2(\not{q}_1 + m)_{b_1 d_1}}{q_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z_2(-\not{p}_2 + m)_{a_2 c_2}}{p_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}\tilde{T}_{d_2 d_1 c_1 c_2}}{\left(\sqrt{Z_2}\right)^4}$$

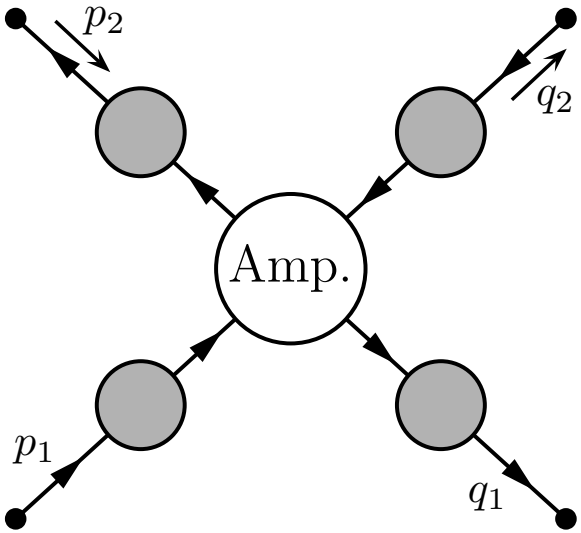
$$\times \frac{\mathrm{i}Z_2(-\not{q}_2 + m)_{d_2 b_2}}{q_2^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}Z_2(\not{p}_1 + m)_{c_1 a_1}}{p_1^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

- Feynman 图中**反粒子**的动量方向与费米子线方向**相反**，这恰好对应于代数表达式中四维动量 p_2^μ 和 q_2^μ 所乘上的**负号**
- 相应的**不变振幅**是

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \left(\sqrt{Z_2}\right)^4 \times$$



$=$



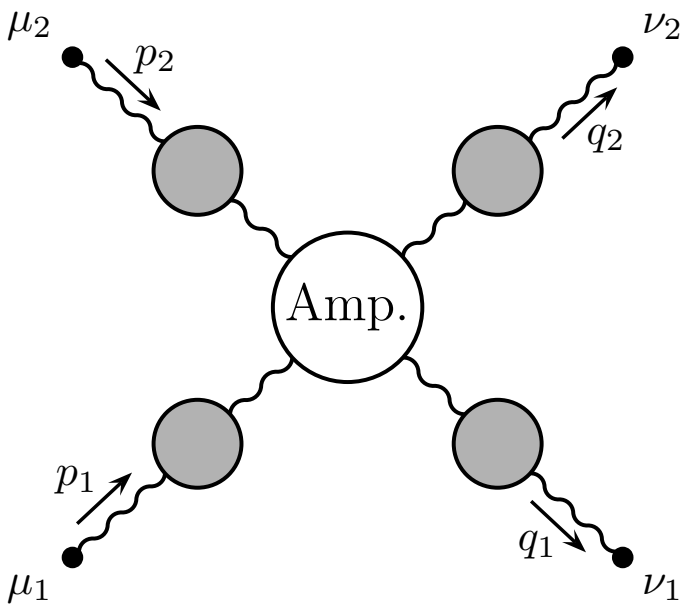
无质量实矢量场的完整四点关联函数

对于无质量实矢量场 $A^\nu(x)$，10.3 节讨论的动量空间中完整四点关联函数的 Feynman 图结构为

$$\tilde{G}^{(4),\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(q_1,q_2,-p_1,-p_2)$$

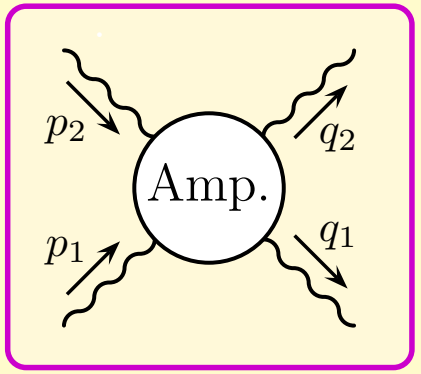
$$\xrightarrow[q_j^0\to E_{\mathbf{q}_j}]{p_i^0\to E_{\mathbf{p}_i}} \frac{-\mathrm{i}Z_3 g^{\nu_1\sigma_1}}{q_1^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{-\mathrm{i}Z_3 g^{\nu_2\sigma_2}}{q_2^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{-\mathrm{i}Z_3 g^{\mu_1\rho_1}}{p_1^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{-\mathrm{i}Z_3 g^{\mu_2\rho_2}}{p_2^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\tilde{T}_{\sigma_1\sigma_2\rho_1\rho_2}}{\left(\sqrt{Z_3}\right)^4}$$

$=$



相应的不变振幅是

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \left(\sqrt{Z_3}\right)^4 \times$$



10.6 节 光学定理和不稳定粒子

在量子散射理论中，概率守恒体现为 S 算符的幺正性，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的光学定理 (optical theorem)

将 S 算符的分解式 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$ 代入幺正性条件，得到

$$\mathbb{I} = S^\dagger S = (\mathbb{I} - \mathrm{i}T^\dagger)(\mathbb{I} + \mathrm{i}T) = \mathbb{I} + \mathrm{i}(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

可见，
$$-\mathrm{i}(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

将上式右边放到双粒子态 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathrm{in}|$ 和 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle$ 之间，得到 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathrm{in}| T^\dagger T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle$，下面省略“in”记号，考虑插入一组中间态完备集

10.6 节 光学定理和不稳定粒子

在量子散射理论中，概率守恒体现为 S 算符的幺正性，它有一些重要的后果，其中之一便是本节将要讨论的光学定理 (optical theorem)

将 S 算符的分解式 $S = \mathbb{I} + \mathrm{i}T$ 代入幺正性条件，得到

$$\mathbb{I} = S^\dagger S = (\mathbb{I} - \mathrm{i}T^\dagger)(\mathbb{I} + \mathrm{i}T) = \mathbb{I} + \mathrm{i}(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

可见，
$$-\mathrm{i}(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

将上式右边放到双粒子态 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathrm{in}|$ 和 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle$ 之间，得到 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathrm{in}| T^\dagger T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle$，下面省略“in”记号，考虑插入一组中间态完备集

参考单粒子态的完备性关系，任意粒子态 $|\{\mathbf{q}_i\}\rangle$ 的完备性关系表达成

$$\sum_n \left(\frac{1}{\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n \int \frac{\mathrm{d}^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) |\{\mathbf{q}_i\}\rangle \langle\{\mathbf{q}_i\}| = \mathbb{I}$$

$\mathcal{S}_n$ 是 n 个粒子的对称性因子，用于抵消对全同量子态的重复计数，从而

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2| T^\dagger T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = \sum_n \left(\frac{1}{\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n \int \frac{\mathrm{d}^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2| T^\dagger |\{\mathbf{q}_i\}\rangle \langle\{\mathbf{q}_i\}| T |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$$

处理等式右边

根据 $\mathrm{i}T_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\,\mathrm{i}\mathcal{M}$，用不变振幅将右边两个 T 矩阵表达成

$$\langle\{\mathbf{q}_i\}|\,T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-\sum_i q_i\right)\mathcal{M}(p_1,p_2\to\{q_i\})$$

$$\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T^\dagger\,|\{\mathbf{q}_i\}\rangle = \langle\{\mathbf{q}_i\}|\,T\,|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\rangle^* = (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_1+k_2-\sum_i q_i\right)\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to\{q_i\})$$

由此得到

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,T^\dagger T\,|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle &= \sum_n\left(\frac{1}{\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^n\int\frac{\mathrm{d}^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}}\right)\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to\{q_i\})\mathcal{M}(p_1,p_2\to\{q_i\})\\ &\quad\times(2\pi)^8\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-\sum_i q_i\right)\delta^{(4)}\left(k_1+k_2-\sum_i q_i\right)\\ &= \sum_n\left(\frac{1}{\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^n\int\frac{\mathrm{d}^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}}\right)\mathcal{M}^*(k_1,k_2\to\{q_i\})\mathcal{M}(p_1,p_2\to\{q_i\})\\ &\quad\times(2\pi)^8\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-\sum_i q_i\right)\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)\end{aligned}$$

第二步用到 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$

处理等式左边

- 另一方面，由于

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2)$$

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle^* = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2)$$

将 $-\mathrm{i}(T - T^\dagger) = T^\dagger T$ **左边**放到 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 |$ 和 $| \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$ 之间，得

$$\begin{aligned} -\mathrm{i} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | (T - T^\dagger) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = & -\mathrm{i}[\mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2)] \\ & \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \end{aligned}$$

处理等式左边

另一方面，由于

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2)$$

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle^* = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2)$$

将 $-\mathrm{i}(T - T^\dagger) = T^\dagger T$ 左边放到 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 |$ 和 $| \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$ 之间，得

$$\begin{aligned} -\mathrm{i} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | (T - T^\dagger) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= -\mathrm{i}[\mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2)] \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \end{aligned}$$

上式与上一页的 $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | T^\dagger T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$ 表达式相等，必有

$$\begin{aligned} &-\mathrm{i}[\mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2)] \\ &= \sum_n \left(\frac{1}{\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n \int \frac{\mathrm{d}^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_i q_i \right) \\ &\quad \times \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to \{q_i\}) \mathcal{M}(p_1, p_2 \to \{q_i\}) \end{aligned}$$

推广的光学定理

- 将上式简记为

$$-\mathrm{i}[\mathcal{M}(a\to b)-\mathcal{M}^*(b\to a)]=\sum_f\frac{1}{\mathcal{S}_f}\int \mathrm{d}\Pi_f\,\mathcal{M}^*(b\to f)\mathcal{M}(a\to f)$$

- 注意 $\int \mathrm{d}\Pi_f$ 的定义类似于**多体不变相空间**，包含了 $(2\pi)^4$ 乘以四维 δ 函数的因子
- 这就是**广义光学定理**
- 尽管这里以 $2\to 2$ **散射**为例开始讨论，最后得到的结论是**普遍适用**的
- a 和 b 可以是**单粒子态**，也可以是**任意多粒子态**，f 则需要取**相互作用理论允许的所有末态**，涉及到的粒子可以具有**自旋**，也可以是**不同种类**的粒子
- 上式在**微扰论**的**每一阶**都成立，不过它的**左边**对应于**振幅**，而**右边**则对应于**两个振幅之积**，所以会联系**不同阶**计算出来的振幅

推广的光学定理

- 将上式简记为

$$-\mathrm{i}[\mathcal{M}(a\to b)-\mathcal{M}^*(b\to a)]=\sum_f\frac{1}{\mathcal{S}_f}\int \mathrm{d}\Pi_f\,\mathcal{M}^*(b\to f)\mathcal{M}(a\to f)$$

- 以**实标量场**的 ϕ^4 **理论**为例，在 λ^2 **阶**讨论上式，如果**右边每个振幅**是 λ^1 **阶**的 $2\to 2$ **树图振幅**，则**左边**必须是 λ^2 **阶**的 $2\to 2$ **单圈振幅**才能与右边相匹配
- 因此，上式意味着**圈图振幅**与**树图振幅**有一定的联系
- 只要**树图**是存在的，则**圈图**必定也是存在的
- 通常认为树图代表着**经典物理**，而圈图代表着**量子效应**
- 广义光学定理表明，**只存在树图**的**经典相互作用理论**会**违反幺正性**

光学定理

🏠 回到 $2 \to 2$ 散射的情况，如果初末态完全相同，则相应的散射称为向前散射 (forward scattering)，此时 $k_1 = p_1$，$k_2 = p_2$，有

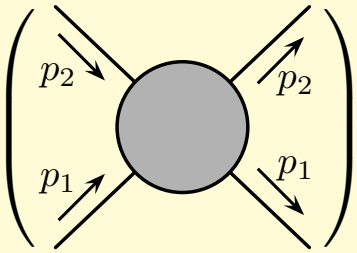
$$\mathcal{M}(p_1, p_2 \to k_1, k_2) - \mathcal{M}^*(k_1, k_2 \to p_1, p_2) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2)$$

👗 广义光学定理化为量子场论中的光学定理

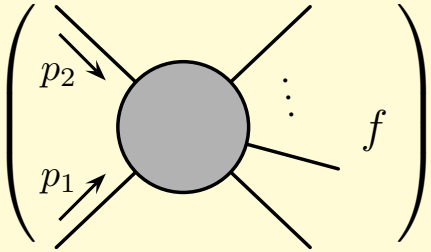
$$\boxed{2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2) = \sum_f \frac{1}{\mathcal{S}_f} \int \mathrm{d}\Pi_f\, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2}$$

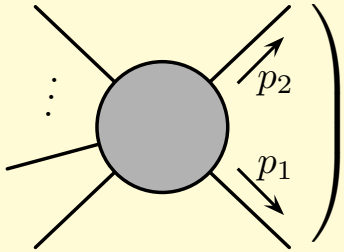
💃 用 Feynman 图将上式表示为

$$2\,\mathrm{Im}$$



$$= \sum_f \frac{1}{\mathcal{S}_f} \int \mathrm{d}\Pi_f$$





🕺 它表明向前散射振幅的虚部对应于所有可能中间态的贡献之和

总散射截面

🏠 与 6.5.2 小节**截面公式** $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \displaystyle\int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$ 对比

🔧 可以看出，$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2) = \displaystyle\sum_f \frac{1}{\mathcal{S}_f} \int \mathrm{d}\Pi_f\, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2$ 右边正比于包含所有末态过程的**总散射截面** σ_{tot}

🔨 **质心系总截面**表达为 $\sigma_{\text{tot}} = \dfrac{1}{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \displaystyle\sum_f \frac{1}{\mathcal{S}_f} \int \mathrm{d}\Pi_f\, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2$

👨🏻‍🔧 其中 $\mathcal{S}_f$ 是**末态对称性因子**

🛠️ 为了得到简单的表达式，假设 p_1 和 p_2 对应的两个粒子具有**相同质量**

🥽 从而 $E_{\mathbf{p}_1} = E_{\mathbf{p}_2} = \dfrac{E_{\text{CM}}}{2}$，且 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \dfrac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}}$，于是

$$4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}\frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}} = 4E_{\text{CM}}|\mathbf{p}_1|$$

👨🏻‍🏭 故

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{4E_{\text{CM}}|\mathbf{p}_1|} \sum_f \frac{1}{\mathcal{S}_f} \int \mathrm{d}\Pi_f\, |\mathcal{M}(p_1, p_2 \to f)|^2$$

光学定理的另一个形式

🏘️ 从而，$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1,p_2\to p_1,p_2)=\sum_f \frac{1}{\mathcal{S}_f}\int \mathrm{d}\Pi_f\,|\mathcal{M}(p_1,p_2\to f)|^2$ 化为

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(p_1,p_2\to p_1,p_2)=2E_{\mathrm{CM}}|\mathbf{p}_1|\,\sigma_{\mathrm{tot}}}$$

👩🏻‍🍳 这是**光学定理**的常见形式

🔪 在**量子理论**中考虑**束流打靶**过程，那么，**向前散射振幅**的**虚部**对应于束流经过靶时**入射波**的**衰减**

🥒 它应当**正比于发生散射的概率**，而后者是由**总散射截面**描述的

🍲 上式给出了精确的对应关系

不稳定粒子

现在将**广义光学定理**

$$-\mathrm{i}[\mathcal{M}(a\to b)-\mathcal{M}^*(b\to a)]=\sum_f\frac{1}{\mathcal{S}_f}\int \mathrm{d}\Pi_f\,\mathcal{M}^*(b\to f)\mathcal{M}(a\to f)$$

应用到从一个**不稳定粒子 $\mathcal{A}$ 跃迁到自身**的 $1\to 1$ **“散射”过程**上

在 $\mathcal{A}$ **的静止系**中，有

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\mathcal{A}\to\mathcal{A})=\sum_f\frac{1}{\mathcal{S}_f}\int \mathrm{d}\Pi_f\,|\mathcal{M}(\mathcal{A}\to f)|^2=2m_{\mathcal{A}}\sum_f\Gamma_f$$

其中 Γ_f 就是**衰变分宽度**，而所有分宽度之和是 $\mathcal{A}$ 粒子的**总宽度** $\Gamma_{\mathcal{A}}=\sum_f\Gamma_f$

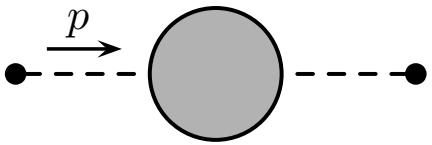
因此，**振幅 $\mathcal{M}(\mathcal{A}\to\mathcal{A})$ 虚部**与**衰变总宽度**的关系为

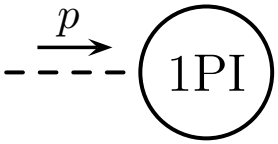
$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\mathcal{A}\to\mathcal{A})=m_{\mathcal{A}}\Gamma_{\mathcal{A}}}$$

另一方面，**稳定粒子**的**衰变宽度为零**，而相应**振幅 $\mathcal{M}(\mathcal{A}\to\mathcal{A})$** 是**实数**

不稳定的实标量玻色子

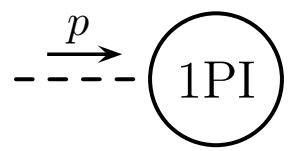
对于**不稳定**的**实标量玻色子** ϕ，前面的计算给出了**完整的动量空间传播子**

$\tilde{G}^{(2)}(p) =$  $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Pi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}$

其中 $\Pi(p^2)$ 来自 **1PI 自能图**  $= -\mathrm{i}\Pi(p^2)$

将**传播子**看成 $1 \to 1$ **“散射”过程**，要求 p^μ 满足**质壳条件** $p^2 = m^2$

类比前面推出的**不变振幅**与**切断 Feynman 图**的关系，有

$\mathrm{i}\mathcal{M}(\phi \to \phi) = (\sqrt{Z})^2 \times \Bigg($  $\Bigg)\Bigg|_{p^2=m^2} = -\mathrm{i}Z\Pi(m^2)$

注意这里**切断的完全连通 Feynman 图**就是 **1PI 自能图**

从而，ϕ **的衰变总宽度**表达为 $\Gamma = \dfrac{1}{m}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\phi \to \phi) = -\dfrac{Z}{m}\,\mathrm{Im}\,\Pi(m^2)$

修正重整化条件

可见，**不稳定 ϕ 粒子**的 $\Pi(p^2)$ 必定具有**虚部**，将**完整传播子**改写为

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - \delta m^2 - \mathrm{Re}\,\Pi(p^2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)}$$

这里已经把分母中的**无穷小量** $\epsilon \ll |\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2)|$ **忽略掉**了

从而，需要把**质量重整化条件**修改为

$$\boxed{\delta m^2 = -\mathrm{Re}\,\Pi(m^2)}$$

使**物理质量 m 的平方**对应于**极点位置的实部**

场强重整化条件修改为

$$\boxed{Z^{-1} = 1 - \left.\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\Pi(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}}$$

完整传播子在极点附近的近似

🏯 $\operatorname{Im}\Pi(p^2)$ 的存在使 $\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 p^2 复平面上的**单粒子态极点**远离实轴，具体位置由 $p^2 = m^2 + \delta m^2 + \operatorname{Re}\Pi(p^2) + \mathrm{i}\operatorname{Im}\Pi(p^2)$ 决定，$\tilde{G}^{(2)}(p)$ 在 $p^2 = m^2$ **附近**近似为

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)}(p) &\simeq \frac{\mathrm{i}}{(p^2-m^2)[1-\mathrm{d}\operatorname{Re}\Pi(p^2)/\mathrm{d}p^2|_{p^2=m^2}] - \mathrm{i}\operatorname{Im}\Pi(p^2)} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{(p^2-m^2)Z^{-1} - \mathrm{i}\operatorname{Im}\Pi(p^2)} = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2-m^2-\mathrm{i}Z\operatorname{Im}\Pi(p^2)}.\end{aligned}$$

👨‍🎨 如果 $|\operatorname{Im}\Pi(p^2)|$ 在**极点附近远小于** m^2，那么**极点位置**与 $p^2 = m^2$ 的**偏离较小**

🎨 从而，**完整的 ϕ 传播子**在**极点附近**的行为是

$$\tilde{G}^{(2)}(p) \simeq \frac{\mathrm{i}Z}{p^2-m^2-\mathrm{i}Z\operatorname{Im}\Pi(m^2)} = \frac{\mathrm{i}Z}{p^2-m^2+\mathrm{i}m\Gamma} \simeq \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}m\Gamma}$$

🖌️ 第二步用到 $\Gamma = -\dfrac{Z}{m}\operatorname{Im}\Pi(m^2)$，第三步取**近似** $Z \simeq 1$

🖼️ 可见，**极点位置**在 p^2 复平面**实轴下方** $p^2 = m^2 - \mathrm{i}m\Gamma$ 处

相对论性 Breit-Wigner 分布

若上述 ϕ **传播子**出现在某个 s **通道散射过程**中，有 $p^2 = s$，则**散射截面**满足

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 + \mathrm{i}m\Gamma} \right|^2 = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2}$$

它在 $s = m^2$ **附近**呈示出**相对论性 Breit-Wigner 分布**

近似成立的条件 $|\operatorname{Im}\Pi(m^2)| \ll m^2$ 可以等价为**窄宽度条件**

$$\Gamma \ll m$$

相应的 s 通道不稳定粒子是一个**共振态**

散射截面在 $s = m^2$ 处得到**共振增强**，有 $\sigma \propto \dfrac{1}{(m\Gamma)^2}$

也就是说，**宽度越窄**，**截面越大**

Gregory Breit
(1899–1981)

Eugene Wigner
(19102–1995)

Breit-Wigner 分布

🏨 在 $s = m^2$ 附近取 $\sqrt{s} + m \simeq 2m$ 的近似，将散射截面化为

$$\sigma \propto \frac{1}{(\sqrt{s}+m)^2(\sqrt{s}-m)^2 + m^2\Gamma^2} \simeq \frac{1}{4m^2(\sqrt{s}-m)^2 + m^2\Gamma^2}$$
$$= \frac{1}{4m^2}\frac{1}{(\sqrt{s}-m)^2 + \Gamma^2/4}$$

🔔 可见，散射截面在 $s = m^2$ 附近正比于归一化的 **Breit-Wigner 分布**

$$\boxed{f_{\mathrm{BW}}(\sqrt{s}) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\sqrt{s}-m)^2 + \Gamma^2/4}}$$

🕴 这个概率密度分布也称为 **Cauchy 分布**或 **Lorentz 分布**

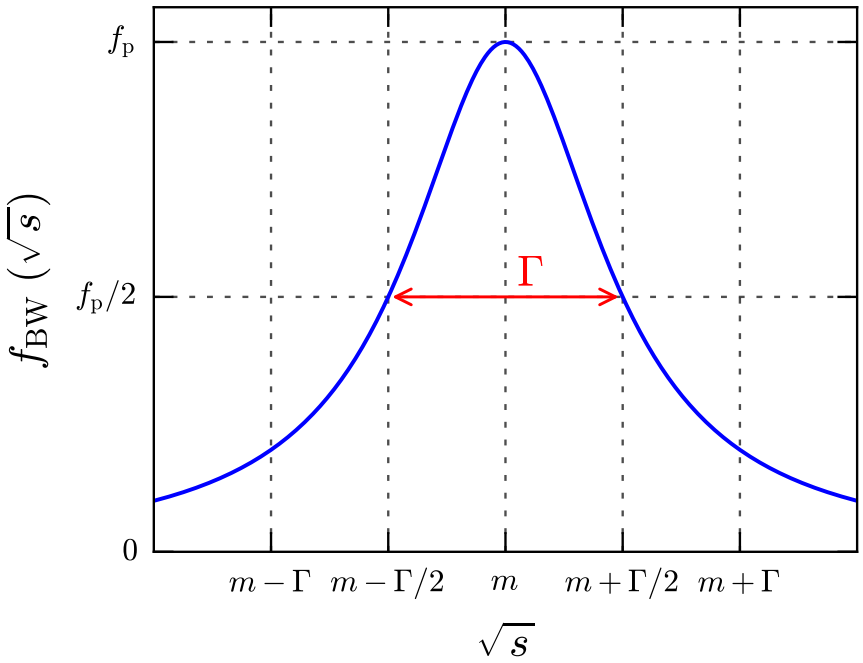
Breit-Wigner 分布图象

🏫 **Breit-Wigner 分布**的图象如右图所示

👮🏻 可见，**不稳定粒子**的**质量**并不取固定值，而是呈现出一个 **Breit-Wigner 分布**

🚑 前面所说的**物理质量** m 是这个分布的**中心值**，也是**概率最大**的地方

🚨 **衰变宽度** Γ 是这个分布的**半峰全宽**，这是它被称为“宽度”的原因



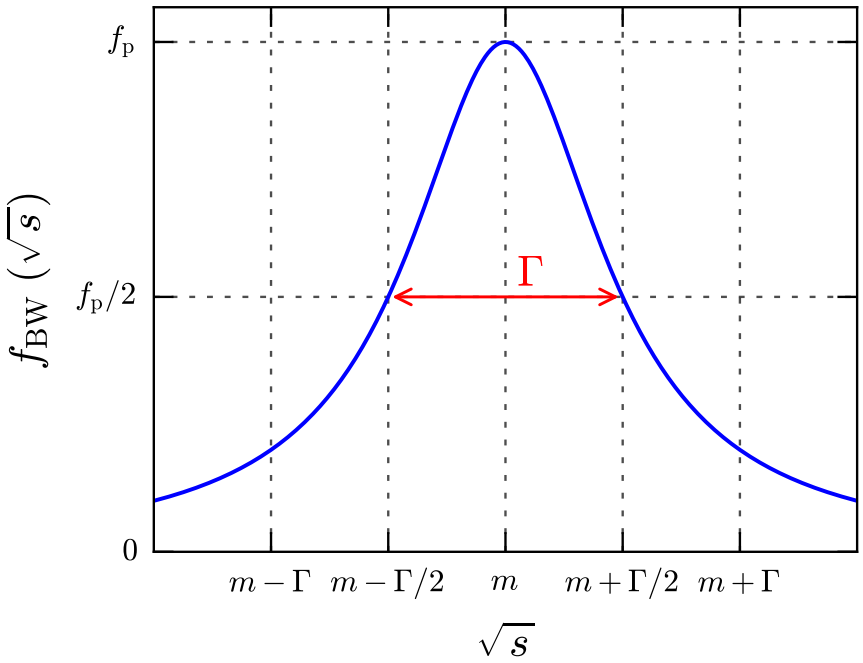
Breit-Wigner 分布图象

🏫 **Breit-Wigner 分布**的图象如右图所示

👮 可见，**不稳定粒子**的**质量**并不取固定值，而是呈现出一个 **Breit-Wigner 分布**

🚓 前面所说的**物理质量** m 是这个分布的**中心值**，也是**概率最大**的地方

🚨 **衰变宽度** Γ 是这个分布的**半峰全宽**，这是它被称为“宽度”的原因



🔦 任何**归一化概率密度分布**在**宽度趋于零**的极限下都会变成 δ **函数**，故

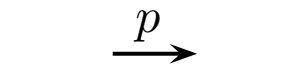
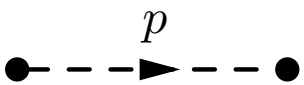
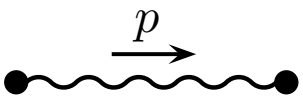
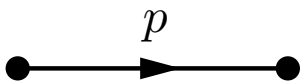
$$\lim_{\Gamma\to 0} f_{\mathrm{BW}}(\sqrt{s}) = \delta(\sqrt{s}-m)$$

🚧 当 $\Gamma = 0$ 时，**寿命** $\tau = \dfrac{1}{\Gamma} \to \infty$，粒子是**稳定**的，而**质量**固定为 m

不稳定粒子的动量空间内线规则

上述关于**不稳定粒子**的讨论可以推广到**其它类型**的量子场和粒子

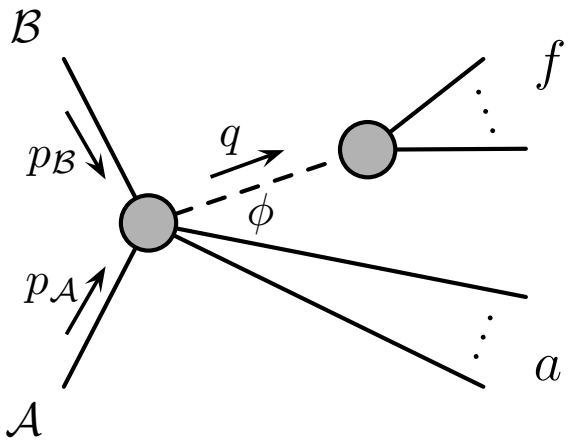
在**窄宽度条件**下，假如要在**树图**计算中考虑**衰变宽度**的效应，只需采用下列**不稳定粒子**的**动量空间内线规则**

1. 实标量玻色子 ϕ 内线：  $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i} m_\phi \Gamma_\phi}$
2. 复标量玻色子 ϕ 内线：  $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i} m_\phi \Gamma_\phi}$
3. 有质量实矢量玻色子 A 内线：ν  μ $= \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i} m_A \Gamma_A}$
4. Dirac 费米子 ψ 内线：  $= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi}$

包含窄宽度内线的散射过程

考虑右图 $2 \to n$ 散射过程，它包含一条具有类时动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线

n 个末态粒子分为两部分，其中 a 部分包含 n_a 个粒子，而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 玻色子内线



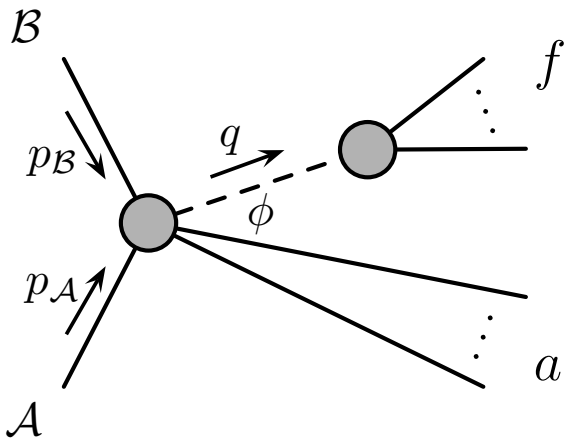
如果这个散射过程的质心能足够高，使末态相空间包含 ϕ 粒子质壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域

那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可对散射截面进行因子化

包含窄宽度内线的散射过程

考虑右图 $2 \to n$ 散射过程，它包含一条具有类时动量 q^μ 的窄宽度标量玻色子 ϕ 的内线

n 个末态粒子分为两部分，其中 a 部分包含 n_a 个粒子，而 f 部分的 $n - n_a$ 个粒子都连接着 ϕ 玻色子内线



如果这个散射过程的质心能足够高，使末态相空间包含 ϕ 粒子质壳条件 $q^2 = m^2$ 得到满足的区域

那么由于共振效应，在壳 ϕ 粒子的贡献将是主导的，可对散射截面进行因子化

将 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + f$ 散射过程的不变振幅分解为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2 - m^2 + \mathrm{i}m\Gamma}\,\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2)$$

其中 $\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{P}(q^2)$ 是 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + \phi$ 部分的振幅，$\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{D}(q^2)$ 是 $\phi \to f$ 部分的振幅，它们具有对 q^2 的依赖性，由 ϕ 传播子连接起来

表达散射截面

🏛️ 假设 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)$ 都是**实数**，这对**不包含其它不稳定粒子**的**树图过程**一般是成立的，则不变振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2-m^2)^2+(m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)|^2$$

❤️ 设末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，$\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+f$ **散射截面**表达为

$$\sigma = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2-m^2)^2+(m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)|^2$$

💍 其中 $F=4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}v_{\mathrm{Møl}}$ 是**入射流因子**

表达散射截面

假设 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)$ 和 $\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)$ 都是**实数**，这对**不包含其它不稳定粒子**的**树图过程**一般是成立的，则不变振幅模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2-m^2)^2+(m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)|^2$$

设末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，$\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+f$ **散射截面**表达为

$$\sigma = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)|^2 \frac{1}{(q^2-m^2)^2+(m\Gamma)^2} |\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)|^2$$

其中 $F = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}v_{\mathrm{M\o l}}$ 是**入射流因子**

将 a 和 f 的末态粒子的四维动量之和分别记作 $p_a^\mu = \sum_{i=1}^{n_a} p_i^\mu$ 和 $p_f^\mu = \sum_{j=n_a+1}^{n} p_j^\mu$

n **体末态相空间**表达成

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{i=1}^{n_a}\int \frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\right)\left(\prod_{j=n_a+1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_a-p_f)$$

下面对它进行分解

利用 δ 函数

把 $\int \mathrm{d}p^0\,\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)=\dfrac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$ 改写成

$$\int \mathrm{d}q^0\,\theta(q^0)\delta(q^2-s_\phi)=\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)},\quad \tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)\equiv\sqrt{|\mathbf{q}|^2+s_\phi},\quad s_\phi>0$$

类时的 q^μ 必定满足 $q^0>0$，由 δ 函数的性质推出

$$\begin{aligned}1&=\int \mathrm{d}^4q\,\delta^{(4)}(q-p_f)\int \mathrm{d}s_\phi\,\theta(q^0)\delta(q^2-s_\phi)\\&=\int \mathrm{d}s_\phi\int \mathrm{d}^3q\int \mathrm{d}q^0\,\theta(q^0)\delta(q^2-s_\phi)\delta^{(4)}(q-p_f)\\&=\int\frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_f)\end{aligned}$$

注意对 q^0 积分之后，最后一行中的四维动量 q^μ 满足

$$q^0=\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi),\quad q^2=s_\phi$$

分解末态相空间

将上页公式插入到 n 体末态相空间中，得

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{i=1}^{n_a}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\right)\left(\prod_{j=n_a+1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_a-p_f)$$

$$\times\int \frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_f)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi)\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi)$$

其中

$$\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\tilde{E}_{\mathbf{q}}(s_\phi)}\left(\prod_{i=1}^{n_a}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_a-q)$$

$$\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi) \equiv \left(\prod_{j=n_a+1}^{n}\int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_f)$$

分别对应于 $\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+\phi$ 部分和 $\phi\to f$ 部分的末态相空间

这里标注了它们对 s_ϕ 的依赖性

分解散射截面

于是，$\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+f$ **散射截面**化为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{F}\int \mathrm{d}\Pi_n\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(q^2)|^2\,\frac{1}{(q^2-m^2)^2+(m\Gamma)^2}\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(q^2)|^2\\ &= \frac{1}{F}\int\frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi)\int \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(s_\phi)|^2\,\frac{1}{(s_\phi-m^2)^2+(m\Gamma)^2}\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(s_\phi)|^2\end{aligned}$$

将上式中 ϕ **玻色子内线**的贡献改写为

$$\frac{1}{(s_\phi-m^2)^2+(m\Gamma)^2}=\frac{\pi}{m\Gamma}\,\frac{2m\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{(s_\phi-m^2)^2+(2m\Gamma)^2/4}$$

它正比于**中心值**为 m^2、**宽度**为 $2m\Gamma$ 的 **Breit-Wigner 分布**，**比例因子**为 $\dfrac{\pi}{m\Gamma}$

在 $\dfrac{\Gamma}{m}\ll 1$ 的**窄宽度条件**下，由 $\lim\limits_{\Gamma\to 0} f_{\mathrm{BW}}(\sqrt{s})=\delta(\sqrt{s}-m)$ 得

$$\boxed{\frac{1}{(s_\phi-m^2)^2+(m\Gamma)^2}\simeq\frac{\pi}{m\Gamma}\,\delta(s_\phi-m^2)}$$

散射截面的因子化

从而 $\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+f$ **散射截面**近似为

$$\sigma \simeq \frac{1}{F}\int\frac{\mathrm{d}s_\phi}{2\pi}\int\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(s_\phi)\int\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(s_\phi)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(s_\phi)|^2\,\frac{\pi}{m\Gamma}\,\delta(s_\phi-m^2)|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(s_\phi)|^2$$
$$=\frac{1}{F}\int\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(m^2)|^2\,\frac{1}{\Gamma}\frac{1}{2m}\int\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(m^2)|^2=\sigma_{\mathrm{P}}\,\frac{\Gamma_f}{\Gamma}$$

其中

$$\sigma_{\mathrm{P}}=\frac{1}{F}\int\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{P}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{P}}(m^2)|^2$$

是通过 $\mathcal{A}+\mathcal{B}\to a+\phi$ **散射过程**产生 ϕ 玻色子的**产生截面**

而

$$\Gamma_f=\frac{1}{2m}\int\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{D}}(m^2)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(m^2)|^2$$

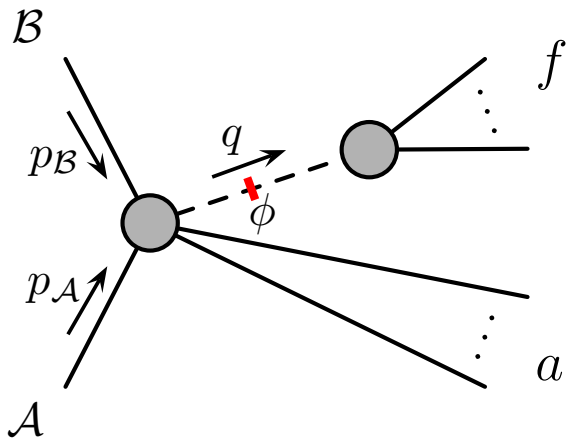
是 $\phi\to f$ **衰变过程**的**分宽度**

注意这些公式里面 ϕ **玻色子**是**在壳**的，质量为 m

窄宽度近似

由分宽度与分支比之间的关系 $\Gamma_f = \Gamma B_f$ 将散射截面改写为

$$\boxed{\sigma \simeq \sigma_{\mathrm{P}} B_f}$$



也就是说，只要 ϕ 玻色子内线在运动学允许的范围内能够取得在壳动量，就可以把 Feynman 图中 ϕ 玻色子的内线剪开

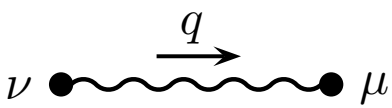
得到 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + \phi$ 和 $\phi \to f$ 的 Feynman 图，分别计算共振态 ϕ 的产生截面 σ_{P} 和衰变分支比 B_f，乘起来就得到 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \to a + f$ 散射截面 σ

这种将包含共振态的散射截面因子化的方法称为窄宽度近似

推广到矢量玻色子

以上讨论对于**共振态**为**实标量玻色子**或**复标量玻色子**的情况都成立，也可以将它推广到**其它共振态**

如果**共振态**是**有质量**的**矢量玻色子** A，用**极化求和关系**将它的**传播子**改写成



$$= \frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / m_A^2)}{q^2 - m_A^2 + \mathrm{i} m_A \Gamma_A}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_A^2 + \mathrm{i} m_A \Gamma_A} \sum_{\lambda=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q}, \lambda) \varepsilon^\nu(\mathbf{q}, \lambda)$$

那么，$\varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q}, \lambda)$ 正好是**产生过程**中的 A 玻色子**出射外线因子**

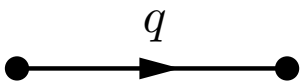
而 $\varepsilon^\nu(\mathbf{q}, \lambda)$ 是**衰变过程**的 A 玻色子**入射外线因子**

对 λ 求和则考虑了**所有极化态**的贡献

因此同样可以应用**窄宽度近似**将散射截面**因子化**

推广到 Dirac 费米子

- 如果**共振态**是 **Dirac 正费米子** ψ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向**相同**
- 用**自旋求和关系**将相应**传播子**改写为

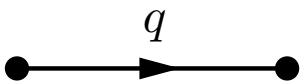


$$= \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi} = \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$$

- 那么 $\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $u(\mathbf{q}, \lambda)$ 刚好分别是**产生过程**和**衰变过程**中**正费米子** ψ 的**外线因子**

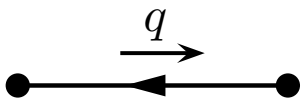
推广到 Dirac 费米子

- 如果**共振态**是 **Dirac 正费米子** ψ，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向**相同**
- 用**自旋求和关系**将相应**传播子**改写为



$$= \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi} = \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{q}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$$

- 那么 $\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $u(\mathbf{q}, \lambda)$ 刚好分别是**产生过程**和**衰变过程**中**正费米子** ψ 的**外线因子**
- 如果**共振态**是 **Dirac 反费米子** $\bar{\psi}$，则 q^μ 的方向与费米子内线上的箭头方向**相反**
- 相应的**传播子**为



$$= \frac{\mathrm{i}(-\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi} = \frac{-\mathrm{i}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i} m_\psi \Gamma_\psi} \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{q}, \lambda) \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)$$

- 那么 $v(\mathbf{q}, \lambda)$ 和 $\bar{v}(\mathbf{q}, \lambda)$ 也分别是**产生过程**和**衰变过程**中**反费米子** $\bar{\psi}$ 的**外线因子**
- 尽管上式结果多了一个**整体负号**，它不会影响振幅模方和散射截面