封一：

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

本科生毕业论文（设计）

题　目：扩展晶格气模型中的合作策略选择及其演化

院　系：数学与计算科学学院

专　业：信息与计算科学

学生姓名：景伊之

学　号：10316058

指导教师（职称）：王远世 教授

二〇一四　年 十二　月

封二:

说 明

1. 毕业论文（设计）的写作格式要求请参照《中山大学本科生毕业论文的有关规定》和《中山大学本科生毕业论文（设计）写作与印制规范》。
2. 除完成毕业论文（设计）外，还须填写三份表格:
    1. 表一 毕业论文（设计）开题报告;
    2. 表二 毕业论文（设计）过程检查情况记录表;
    3. 表三 毕业论文（设计）答辩情况（不要求答辩者可不填附表三）。
3. 上述表格均可从教务处主页的“表格下载”处下载，如表格篇幅不够，可另附纸。每份毕业论文（设计）定稿装订时应随同附上这三份表格。
4. 封三是毕业论文（设计）成绩评定的主要依据，请认真填写。

表一　毕业论文（设计）开题报告

论文（设计）题目：扩展晶格气模型中的合作策略选择及其演化
（简述选题的目的、思路、方法、相关支持条件及进度安排等） 1.　选题目的 　　在生物界以及人类社会，种群间的关系可以大致划分为捕食、竞争与合作三种。其中捕食和竞争关系长期以来得到了较为充分的考察，而合作关系则比较复杂，虽然已有大量研究，仍有未及之处。 　　描述种群关系的经典模型之一是Lotka-Volterra方程，它可以很好地应用于竞争和捕食关系。然而在应用于合作关系时，会出现两个缺陷：一是收敛性的问题，二是无法反应Alle效应。为此，许多研究尝试应用其它数学模型。其中之一是Iwata等提出的晶格气模型，它能够有效地反映合作关系中的多个方面。本文尝试应用这个模型描述人类社会族群间的合作，并讨论合作的效果及其影响因素。 　　另一方面，对于人类群体而言，合作策略的选择也是一个值得考察的问题。在博弈论中对此有长期关注，其中一个适用于连续时间的、多回合博弈的模型是复制动态方程，它可以刻画存在学习行为时的策略演化。本文尝试使用这一模型描述二族群博弈的状况及对于合作策略的选择，以求由此得到合作实现的条件和机制。 2. 论文思路 　　本文将首先回顾对于合作的相关研究，包括Lotka-Volterra方程的应用和不足之处。然后简要介绍晶格气模型的性质和应用。随后对这一模型进行扩展，并应用于对族群合作的考察，建立描述族群合作的基本模型，分析其性质，并结合现实背景讨论。另一方面， 利用复制动态方程，结合晶格气模型的相关结论及现实背景考察稳定合作策略形成的条件。最后进行总结和延伸。 3. 研究方法 　　本文拟采用理论推导与数值模拟结合的方法，首先建立相关理论模型，然后利用Mathematica等软件进行模拟考察。 4. 相关支持条件 　本研究可以利用校图书馆的文献和其它电子资源，也可以使用相关软件和平台。

5. 进度安排

2014.7-2014.8: 开题和前期研究

2014.8-2014.11: 继续研究及论文写作

2014.12: 完成、修改和提交论文

学生签名: 景伊之 2014年 7 月 2 日

指导教师意见:

1、同意开题（ ） 2、修改后开题（ ） 3、重新开题（ ）

指导教师签名: 年 月 日

表二　　毕业论文（设计）过程检查情况记录表

指导教师分阶段检查论文的进展情况（要求过程检查记录不少于3次）：

第1次检查 2014-7-4

学生总结：就论文选题与导师讨论，并请教导师的意见。

指导教师意见：对选题范围进行了一定修正，同意提出的选题

第2次检查 2014-7-17

学生总结：关于论文中的理论构建、部分方程求解以及定理的证明向导师寻求意见。

指导教师意见：同意关于论文结构的观点，对于部分理论要点提出了建议。

第3次检查 2014-7-29

学生总结：向导师提交论文初稿，并寻求建议。

指导教师意见：提出了一些问题和改进之处。

第4次检查 2014-11-23

学生总结：向导师提交论文终稿。

指导教师意见：提出了一些修改建议。

学生签名：景伊之　　2014 年 12 月 15 日

指导教师签名：　　　　年　月　日

总体完成情况	指导教师意见: 1、按计划完成，完成情况优（ ） 2、按计划完成，完成情况良（ ） 3、基本按计划完成，完成情况合格（ ） 4、完成情况不合格（ ） 指导教师签名: 年 月 日

表三　　毕业论文（设计）答辩情况登记表

答辩人		专 业	
论文（设计）题目			
答辩小组成员			
答辩记录： 记录人签名：　　　　　　　　年　月　日			

学术诚信声明

本人所呈交的毕业论文，是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料均真实可靠。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。本毕业论文的知识产权归属于培养单位。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

本人签名：景伊之 日期： 2014-12-15

扩展晶格气模型中的合作策略选择及其演化

景伊之*

[摘要]：本文在演化博弈理论的框架内，通过扩展的晶格气模型分析了二种群博弈的情境中，种群生存能力、繁衍速率、合作的收益与代价等因素对于演化结果和均衡时数量的影响，并利用此模型导出的结果，通过建构复制动态方程分析了由种群生存能力和环境资源等条件限制的特定情境下，拥有学习能力的博弈主体对于合作策略的选择及其演化。结果表明种群能否生存及稳定时的数量既受环境变量影响，也与合作程度及代价有关；在一定条件下，选择合作策略可以成为演化的稳定状态。

[关键词] 演化博弈 晶格气模型 复制动态方程 合作策略

1

[1]中山大学数学与计算科学学院，信息与计算科学专业，2010级。Email: jingyz42@gmail.com

The Choice and Evolution of Cooperative Strategy in an Extended Lattice Gas Model

Yizhi Jing

December 14, 2014

[Abstract] This article applies an extended lattice gas model within the framework of evolutionary game theory to study the competition and cooperation behaviour in a kind of two-player game. It analysed the influence of different factors on the outcome of the game, including the species' birth rates, death rates, and the bene- fits and costs of cooperation. Then the results were utilised to construct a replicator equation in order to study the choice of cooperation of individuals with the ability of learning in certain situations. Results show that the survival and the equilib-rium points of species are influenced both by the environmental parameters, and the benefits and costs of cooperation; meanwhile, if certain conditions are met, choosing cooperation can become the evolutionary stable strategy.

[Keywords] evolutionary game theory, lattice gas model, replicator equation, co-operation strategy

目录

1 引言

在自然界与人类社会中，竞争与合作是群体间关系的两种重要形式。竞争是不同主体争夺有限资源的过程，合作则是不同主体相互依赖、共同获利的状态。这两种关系在自然科学和社会科学领域均得到长期关注，并有多种不同模型被用以解释其机制。但在关于竞争关系的研究相对成熟、完备的同时，关于合作的研究则显得更为复杂，而受到的关注相对较少。

描述种群关系的经典模型之一是20世纪20年代由数学家Alfred J. Lotka和Vito Volterra分别提出的Lotka-Volterra方程 [3]。该方程的基本形式是

$$\frac{dN_1}{dt} = -d_1N_1 + N_1(r_1 + a_1N_2)(1 - N_1 - N_2)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = -d_2N_2 + N_2(r_2 + a_2N_1)(1 - N_1 - N_2)]$$

其中N_1, N_2分别表示种群1, 种群2的密度，r_1, r_2表示其自然增长率，d_1, d_2表示死亡率，a_1, a_2则是两种群间的相互作用。

该模型的初衷是描述种群间的竞争关系，并在这种情况下可以取得良好的效果。然而在尝试用于描述合作关系时，会出现两个问题：一是在种群间合作关系的影响过大（$a_1a_2 \geqslant d_1d_2$）时，种群密度会趋于无穷大；二是这个模型无法描述Alle效应，即是在种群规模低于某一下限时，无论合作的程度如何，两个种群都无法生存的情况。

在Lotka-Volterra模型之外，也有许多描述种群间合作关系的模型。本文主要关注的是由Iwata等建立的晶格气模型（lattice gas model）[2]. 该模型以相对简单的形式，有效地描述了二种群共生的状态。其基本形式如下：

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1N_1[-d_1 + (1 + \frac{a_1N_1}{1 + N_2}(1 - N_1 - N_2)]$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2N_2[-d_2 + (1 + \frac{a_2N_2}{1 + N_1}(1 - N_1 - N_2)]$$

其中N_1, N_2表示种群1和种群2的密度，r_1, r_2是其自然增长率，d_1, d_2是死亡率, a_1, a_2 是种群2和种群1对彼此的合作效果。该模型可以相对准确地描述互利共生、片利共生和选择性共生的情况，并且对种群密度等初始状态表现出相当明显的敏感性。

在生态领域之外，关于合作的演化博弈模型也可以应用在解读社会现象之中，如囚徒困境、公有地困境等。而在这种情况下，由于主体的复杂程度，对于合作行为的解释更成为一种挑战。在这个领域常用的角度是将合作看作是通过学习或继承而选择的一种策略。而对于策略的选择同样可以用博弈论中的模型解释。

一个描述策略学习过程的常用模型是复制动态方程，其基本形式如下：

$$\frac{dp}{dt} = p_i(t)(f_i(t) - f(t)$$

其中对于群体中的每个个体i, α表示其学习新策略的速率，β是其改变策略的概率，$f_i(t)$是选择策略i的期望收益，f(t)是所有策略的平均期望收益。该模型及其变体可以描述存在学习或继承等行为情况下的策略演化。

本文首先建立对基本晶格气模型的一种扩展，以描述二种群博弈的演化情形；然后针对以两个假想群体建立的案例中的一种特定情况（片利合作），利用复制动态方程详细分析选择合作策略的条件。正文的结构如下：第二节讨论Iwata晶格气模型的数学性质，第三节建立一个扩展的晶格气模型以适应于对合作策略的研究，并讨论不同参数的变化对于其均衡解的影响，第四节引入合作动态方程分析特定情境下合作策略的选择及其演化，第五节是讨论和总结。

2 晶格气模型及其特性

由日本学者Iwata等提出的晶格气模型是晶格模型的一种平均场形式。该模型考虑一个晶格，其中任意两个单位之间以同等的概率发生互动（“全局性互动”）。设想一组晶格被两个种群N_1,N_2 占据，若一个N_1个体以r_1的概率与一个空的晶格接触，则增值为两个N_1个体；若没有空的晶格能够繁殖，则以d_1的概率自然凋灭。同样地，一个N_2个体以r_2概率得到一个空的晶格时繁衍为两个个体，而在没有空的晶格时以d_2的概率凋亡。以上可以表示为：

$$N_1 + O \rightarrow 2N_1,$$
$$N_2 + O \rightarrow 2N_2$$
$$N_1 \rightarrow O,$$
$$N_2 \rightarrow O$$

故种群N_1, N_2在独立生存状态下的状况可以表示为，

$$\frac{dN_1}{dt} = -d_1N_1 + r_1N_1(1 - N_1 - N_2),$$
$$\frac{dN_2}{dt} = -d_2N_2 + r_2N_2(1 - N_1 - N_2)$$

用a_1表示种群2对于种群1的作用，a_2表示种群1对种群2的作用，即得到共生关系模型

$$\frac{dN_1}{dt} = -d_1N_1 + N_1(r_1 + a_1N_2)(1 - N_1 - N_2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -d_2N_2 + N_2(r_2 + a_2N_1)(1 - N_1 - N_2) \tag{1}$$

依参数取值范围不同，可以将方程描述的共生关系分为三类:

a. 当$r_1 > 0, r_2 > 0$时，属于选择性共生，种群1和种群2都可以不依靠与对方合作而生存。

b. 当$r_1 > 0, r_2 = 0$或$r_1 = 0, r_2 > 0$时，属于片利共生，其中一个种群可以独立生存，另一个必须依靠合作才能生存。

c. $r_1 = 0, r_2 = 0$时，属于互利共生，两个种群都必须依靠合作才能生存。

3 模型拓展与案例分析

3.1 模型拓展

下文以一个案例对此基准模型进行扩展。考虑人类社会中的两个群体（下文称为群体1和群体2）。当资源不足时，群体1通过贸易、掠夺等方式，从群体2获得资源，形成（广义的）合作。同样地群体2也可以从群体1获得资源。这可以看作是一种互利或片利的共生关系，而此种合作关系的形成往往伴随着一定代价，如支付的货款、战争带来的损失等。因此可以对前述基本模型作一扩展，令m_1, m_2分别表示群体1，群体2在形成合作时支付的代价，则建立扩展的晶格气模型:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= -d_1N_1 + N_1(r_1 + a_1N_2 - m_1)(1 - N_1 - N_2)\\ \frac{dN_2}{dt} &= -d_2N_2 + N_2(r_2 + a_2N_1 - m_2)(1 - N_1 - N_2)\end{aligned} \tag{2}$$

容易解得该方程组的三类均衡解:

(i) 原点: O$(0, 0)$表示群体群体1和群体2均灭绝

(ii) 边界点 : $O_1(1 - \frac{d_1}{r_1 - m_1}, 0)$ 表示群体1生存，群体2消失；$O_2(0, 1 - \frac{d_2}{r_2 - m_2})$ 表示群体1消失，群体2生存。

(iii) 内点：$O\pm(x, y) = (x*_\pm, y*_\pm)$ 表示群体1和群体2均生存，其中$(x*_\pm, y*_\pm)$是等倾线方程组:

$$\begin{aligned}L_1 &: -d_1 + (r_1 + a_1N_2 - m_1)(1 - N_1 - N_2) = 0\\ L_2 &: -d_2 + (r_2 + a_2N_1 - m_2)(1 - N_1 - N_2) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

的解。

以下讨论均衡解的性质。方程组（3）的Jacobi矩阵是：

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{11} &= -d_1 - (r_1 - m_1 + N_2 a_1)(N_1 + N_2 - 1) - N_1(r_1 - m_1 + N_2 a_1), \\
\mathfrak{a}_{12} &= -N_1(r_1 - m_1 + N_2 a_1) - N_1 a_1 (N_1 + N_2 - 1), \\
\mathfrak{a}_{21} &= -N_2(r_2 - m_2 + N_1 a_2) - N_2 a_2 (N_1 + N_2 - 1), \\
\mathfrak{a}_{22} &= -d_2 - (r_2 - m_2 + N_1 a_2)(N_1 + N_2 - 1) - N_2(r_2 - m_2 + N_1 a_2)
\end{aligned}$$

代入各均衡点的值得到

$$\mathrm{J(O)} = \begin{pmatrix} -d_1 + r_1 - m_1 & 0 \\ 0 & -d_2 + r_2 - m_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J(O_1)} = \begin{pmatrix} m_1 - r_1 + d_1 & r_1 + m_1 + d_1 + \frac{a_1 d_1}{r_1 - m_1}(1 - \frac{d_2}{r_1 - m_1}) \\ 0 & -d_2 - r_2 + m_2 - a_2 + \frac{d_1 a_2}{r_1 - m_1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J(O_2)} = \begin{pmatrix} -d_1 + \frac{d_2}{r_2 - m_2}(r_1 - m_1 + a_1 - \frac{a_1 d_2}{r_2 - m_2}) & 0 \\ d_2 - r_2 + m_2 + a_2(\frac{d_2}{r_2 - m_2})(1 - \frac{d_2}{r_2 - m_2}) & d_2 - r_2 - m_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J(O_+)} = \begin{pmatrix} -x*_+(r_1 - m_1 + y*_+ a_1) & -x*_+(r_1 - m_1 + y*_+ a_1) - x*_+ a_1 (x*_+ + y*_+ - 1) \\ -y*_+(r_2 - m_2 + x*_+ a_2) - y*_+ a_2 (x*_+ + y*_+ - 1) & -y*_+(r_2 - m_2 + x*_+ a_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J(O_-)} = \begin{pmatrix} -x*_-(r_1 - m_1 + y*_- a_1) & -x*_-(r_1 - m_1 + y*_- a_1) - x*_- a_1 (x*_- + y*_- - 1) \\ -y*_-(r_2 - m_2 + x*_- a_2) - y*_- a_2 (x*_- + y*_- - 1) & -y*_-(r_2 - m_2 + x*_- a_2) \end{pmatrix}$$

易见在均衡解中，O始终存在，并在$\frac{d_1}{r_1} > 0, \frac{d_2}{r_2} > 0$时为稳定解；其它均衡解的存在性取决于各参数的取值，下面结合数值模拟对其进行讨论。

3.2 数值模拟

3.2.1 生存能力

首先在固定其它参数的情况下，改变d_1, d_2的取值以研究群体生存能力的不同对演化结果的影响。以下两组图像中，取$a_1 = a_2 = 10, r_1 = r_2 = 1, m_1 = m_2 = 1$，第一组中，同时改变$d_1, d_2$的取值，第二组中，固定$d_2$=1, 只改变$d_1$的值。

图1. $a1 = a2 = 10, r1 = r2 = 1, m1 = m2 = 1, d1, d2$的取值下降时方程⑵均衡解的演化

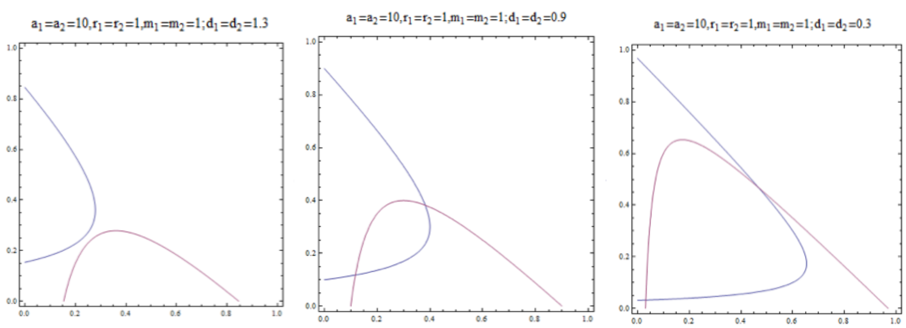
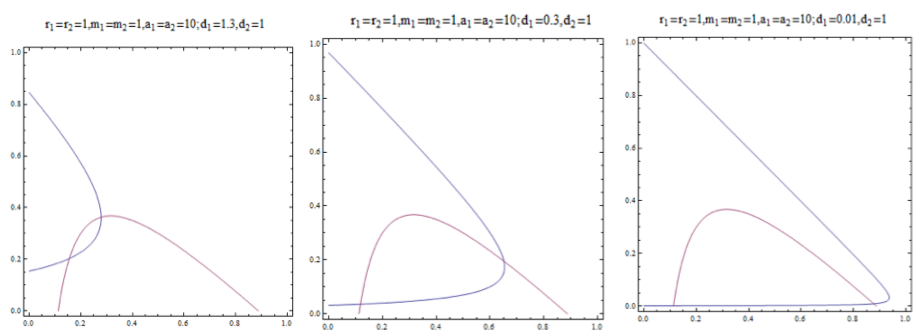


图2. $a1 = a2 = 10, r1 = r2 = 1, m1 = m2 = 1, d2 = 1, d1$的取值下降时方程⑵均衡解的演化



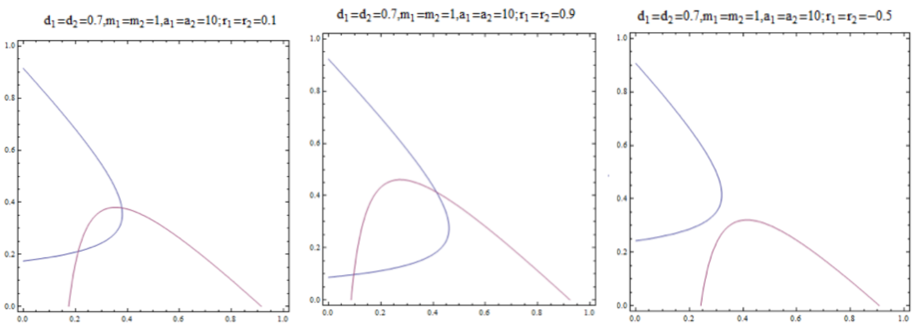
由图1可以看出当d_1, d_2的取值超过一定限度时，没有全局范围内的非零稳定解，其现实意义是死亡率高于一定程度时，两个群体均无法生存；d_1, d_2的取值降低时，稳定解朝右上方移动，代表死亡率越低时，群体规模越大。

由图二可以发现在固定d_2的情况下，随着d_1取值下降，稳定解向右下移动，其现实意义是群体1的规模扩大，并压缩群体2的生存空间；当群体1的规模无限制增加时，群体2趋向于灭绝。

3.2.2　繁殖速率

然后固定其它参数，改变r_1, r_2的取值，观察群体繁殖能力对演化结果的影响。以下两组图像中，取$a_1 = a_2 = 10, d_1 = d_2 = 1, m_1 = m_2 = 1$，第一组中，同时改变$r_1, r_2$的取值，第二组中，固定$r_2$=1, 只改变$r_1$的值。

图3. $a_1 = a_2 = 10, d_1 = d_2 = 1, m_1 = m_2 = 1, r_1, r_2$的取值下降时方程(2)均衡解的演化



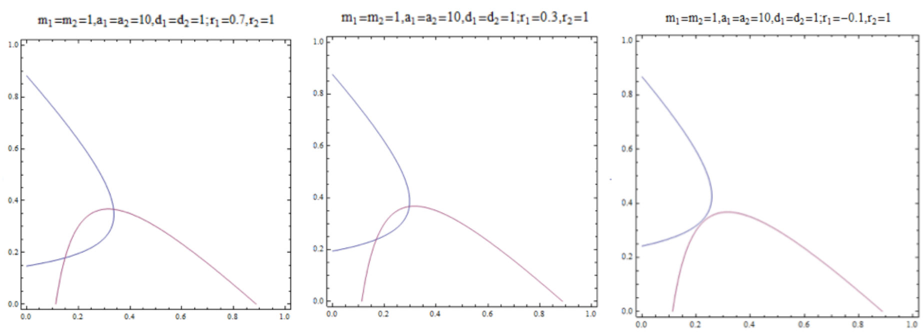


图4. $a_1 = a_2 = 10, d_1 = d_2 = 1, m_1 = m_2 = 1, r_2 = 1, r_1$的取值下降时方程(2)均衡解的演化

从图3可以看出当r_1, r_2下降时，稳定解向左移动，在低于一定限度时第一象限内没有稳定解，在现实背景下可以理解为，只有在繁殖能力超过一定限度时，群体才能生存。从图4看出群体1的增长速率下降时，稳定解向左上移动，在$r_1 < 0$时不存在稳定解。

3.2.3　合作程度

本部分固定其余参数，改变a_1, a_2的取值，观察群体间的合作程度对演化结果的影响。以下两组图像中，取$r_1 = r_2 = 1, d_1 = d_2 = 1, m_1 = m_2 = 1$，第一组中，同时改变$a_1, a_2$的取值，第二组中，固定$a_2$=1, 只改变$a_1$的值。

图5.$r_1 = r_2 = 1, d_1 = d_2 = 1, m_1 = m_2 = 1, a_1, a_2$的取值上升时方程(2)均衡解的演化

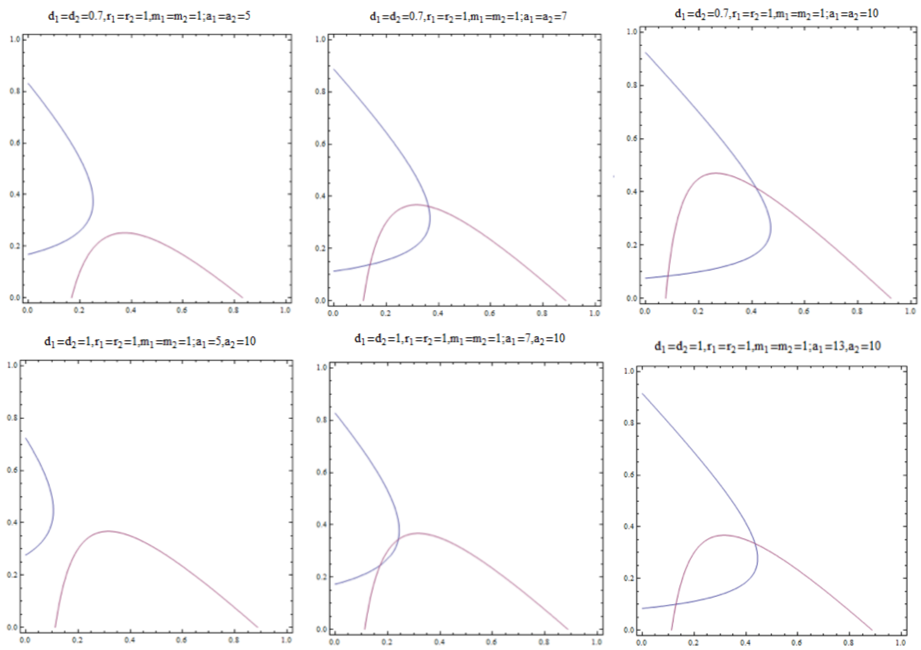


图6.$r_1 = r_2 = 1, d_1 = d_2 = 1, m_1 = m_2 = 1, a_2 = 10, a_1$的取值上升时方程⑵均衡解的演化

从图5可以看出，a_1, a_2的取值增加时，稳定点向右移动，表明其它条件不变的情况下，两群体合作程度的增加对于彼此都是有利的。

从第二组图像可见，在群体1原本不能独自生存的情况下，群体2给予的合作可以使群体1生存；然而若群体2给予的合作程度太高，则会使群体1无限制地增长，反而导致自身的灭绝；而若群体2灭绝，群体1又会得不到支持而灭绝。

3.2.4 合作代价

本部分固定其余参数，改变m_1, m_2的取值，观察群体间产生合作需要支付的代价对演化结果的影响。以下两组图像中，取$r_1 = r_2 = 1, d_1 = d_2 = 1, a_1 = a_2 = 10$，第一组中，同时改变$m_1, m_2$的取值，第二组中，固定$m_2$=1, 只改变$m_1$的值。

图7.$r_1 = r_2 = 1, d_1 = d_2 = 1, a_1 = a_2 = 10, m_1, m_2$的取值上升时方程⑵均衡解的演化

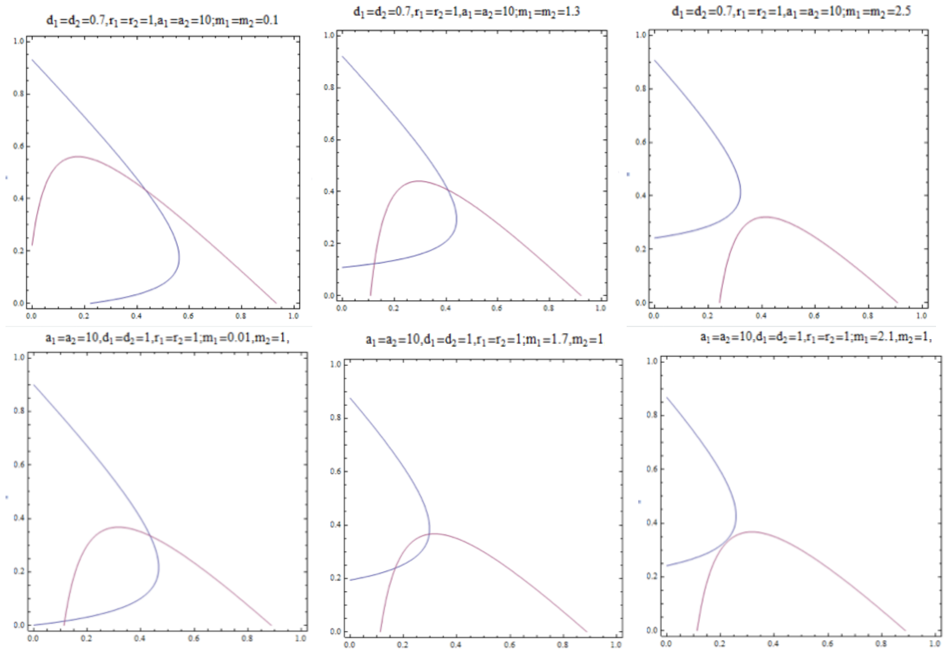


图8.$r_1 = r_2 = 1, d_1 = d_2 = 1, a_1 = a_2 = 10, m_2 = 1, m_1$的取值上升时方程(2)均衡解的演化

从图8可见随着合作代价的增加，稳定解向左移动，说明在现实环境中合作的代价越大，两群体能够获得的收益越小，以至于无法形成稳定解。图9中，随着m_1增加，稳定解向左移动，可以看出对于群体1而言，合作需要支付的代价越大，群体1能够获得的收益越少。

4 合作策略的选择与演化

从上一节的讨论可以看到群体的初始密度、出生与死亡率、合作程度与合作代价等因素对于演化结果都有影响，因而选择合作与否的结果有一定程度的不确定性。因此，为了确定群体在不同情况下是否会选择合作策略，需要进一步的研究。这里假设群体中的个体有着学习与选择的能力，则在条件允许的情况下，连续的时间t后，演化的结果将会趋向最为有利的方向；由此便可分析合作策略达成的条件与其影响。基于此种假设，考虑有群体1和群体2。在互利共生的条件下，由于群体1和群体2都不能独立生存，因而必然会选择合作，这种情况显得没有太多讨论的必要性。对于选择性共生的情况，容易证明理性选择只取决于合作收益与合作代价的比较，因此也不再专门讨论。

因此针对片利共生的情况进行讨论。设定群体1可以独立生存，而群体2不能。可以建立2x2的收益支付矩阵如下:

群体2/群体1	合作	不合作
合作	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
不合作	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})

其中

$(\mathfrak{a}_{11}, b_{11}) = (-d_1N_1 + N_1(r_1 + a_1N_2 - m_1)(1 - N_2 - N_2), (-d_2N_2 + N_2(r_2 + a_2N_1 - m_2)(1 - N_2 - N_2),$
$(\mathfrak{a}_{12}, b_{12}) = (-d_1N_1 + N_1(r_1 - m_1)(1 - N1 - N2), 0),$
$(\mathfrak{a}_{21}, b_{21}) = (-d_1N_1 + N_1r_1(1 - N1), 0),$
$(\mathfrak{a}_{22}, b_{22}) = (-d_1N_1 + N_1r_1(1 - N_1), 0)$

以下关于群体1的策略选择进行讨论。选择合作时的收益为

$$f_1 = N_1(-1 + p)p(-m_1(-1 + N_1 + N_2) + N_2(a_1(-1 + N_1 + N_2)p + r_1))$$

选择不合作的收益为

$$f_2 = -N_1(d_1 + (-1 + N_1)r_1)$$

因此平均收益为

$$f_3 = p(f_1-(1-p)f_2 = N_1(-d_1+m_1(-1+N_1+N_2)p+a_1N_2p^2-a_1N_1N_2p^2-a_1N_2^2p^2+r_1-N_1r_1-N_2pr_1)$$

得到关于群体1选择合作策略的复制动态方程为

$$f : \frac{dp}{dt} = p(f_1-f_3) = N_1(-1+p)p(-m_1(-1+N_1+N_2)+N_2(a_1(-1+N_1+N_2)p+r_1))$$

令 f=0, 得到三个解:

$$p = 0$$
$$p = 1$$
$$p = \frac{-m_1 + m_1N_1 + m_1N_2 - N_2r_1}{-m_1 + m_1N_1 - a_1N_2 + a_1N_1N_2 + a_1N_2^2}$$

对p求导以研究解的稳定性,

$$f'(p) = N_1(-m_1(-1+N_1+N_2)(-1+2p)+N_2(a_1(-1+N_1+N_2)p(-2+3p)+(-1+2p)r1))$$

表1. 均衡解的存在性和稳定性条件

均衡解	稳定性条件
p=0	$m_1 < \frac{N_2 r_1}{N_1+N_2-1}$
p=1	$m_1 > \frac{N_2(a_1 b+r_1)}{N_1 b}$
p= $\frac{-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}$	Δ<0

将不同解分别代入f'(p)中，

$$f'(0) = N_1(m_1(-1+N_1+N_2) - N_2 r_1)$$

令f'(0) < 0, 考虑现实背景中$N_1, N_2 \geqslant 0$的条件，解得

$$m_1 < \frac{N_2 r_1}{N_1+N_2-1}$$

令f'(1) < 0, 同样解得

$$m_1 > \frac{N_2(a_1(N_1+N_2-1)+r_1)}{N_1(N_1+N_2-1)}$$

令c = $\frac{-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}$, 则

$$f'(c) = N_1(-m_1(-1+N_1+N_2)(-1+\frac{2(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1)}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}) +N_2r_1(-1+\frac{2(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2})) + \frac{(a_1(-1+N_1+N_2)(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1)(-2+\frac{3(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1)}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}))}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}$$

综上可将解的存在性和稳定性列出，如表1:

其中

$$\triangle = N_1(-m_1(-1+N_1+N_2)(-1+\frac{2(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1)}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}) +N_2r_1(-1+\frac{2(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2})) + \frac{(a_1(-1+N_1+N_2)(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1)(-2+\frac{3(-m_1+m_1N_1+m_1N_2-N_2r_1)}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}))}{-m_1+m_1N_1-a_1N_2+a_1N_1N_2+a_1N_2^2}$$

结合现实背景，可以看出:

- $m_1 < \frac{N_2 r_1}{N_1+N_2-1}$ 时，p=0是稳定解，表明群体1趋向于选择不合作。
- $m_1 > \frac{N_2(a_1 b+r_1)}{N_1 b}$ 时，p=1是稳定解，表明群体1趋向于选择合作。
- △<0时，f'(p)=c是一个除0和1之外的演化稳定的合作策略。

5 讨论与总结

上文呈现了对二种群博弈情境下合作策略形成的一种探讨。首先建立了一个扩展的晶格气模型，并讨论了多种因素对于种群演化结果的影响：数值模拟发现种群自身条件，如生存能力、繁殖速率等在很大程度上影响了达到均衡解时的种群数量；然而种群间的合作，包括合作获得的收益与为形成合作而支付的代价，同样影响均衡时的数量。尤其是当群体1不能独立生存时，群体2给予的合作可以使其能够存续，而相应地，群体1给予的合作也使种群2的数量增加；然而若群体2给予的合作过多，将使种群1过度繁衍而压缩种群2的空间，导致自身灭绝，以致种群1同样地灭绝。

这些结果表明对于理性的博弈主体而言，是否选择合作策略将受以上多种因素的影响。因此本文利用扩展晶格气模型得到的结果，建立两个假想群体博弈的收益支付矩阵，从中导出连续时间t下的复制动态方程，以研究存在学习行为的情况下，对于合作策略选择的演化方向。结果表明在模型描述的片利共生系统中，是否选择合作策略取决于合作代价、合作收益以及两个群体的密度这几个变量间的关系，在一定参数范围内，有可能达到选择合作策略的稳定解。

现实世界中的竞争与合作关系存在许多变化，尤其是对于具有复杂行为能力的主体而言，当前的收益和风险，对于未来的预期，以及种种非理性因素都会影响其选择。演化博弈模型可以对这些因素进行有效的分析，然而由于现实问题的复杂程度，不同的模型往往只能聚焦于其中某些方面。本文仅仅讨论了片利共生关系中的一种情况，若条件允许，对其它不同情形进行更深入的考察将可能进一步丰富对这个问题的研究。

参考文献：

[1] A. J. Lotka. Contribution to the theory of periodic reactions. 1910.

[2] Marco Archetti and István Scheuring. Review: Game theory of public goods in one-shot social dilemmas without assortment. Journal of theoretical biology, 299:9 – 20, April 2012.

[3] J. Hofbauer and K. Sigmund. Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge University Press, 1998.

[4] Shigehide Iwata, Kazuyuki Kobayashi, Shinichiro Higa, Jin Yoshimura, and Kei-ichi Tainaka. A simple population theory for mutualism by the use of lattice gas model. Ecological Modelling, 222(13):2042 – 2048, July 2011.

[5] 艾熊峰. 国有企业和民营企业的竞争与合作：一个演 化博弈的视角. 2014.

[6] J M McNamara, P C Trimmer, and a I Houston. The ecological rationality of state-dependent valuation. Psychological review, 119(1):114 – 9, January 2012.

[7] John M McNamara, Zoltan Barta, Lutz Fromhage, and Alasdair I Houston. The coevolution of choosiness and cooperation. Nature, 451(7175):189 – 92, January 2008.

[8] Peter Schuster and Karl Sigmund. Replicator dynamics. Journal of Theoretical Biology, 100(3):533 – 538, February 1983.

[9] Yuanshi Wang and Hong Wu. A mutualism-competition model characterizing competitors with mutualism at low density. Mathematical and Computer Modelling, 53(9-10):1654 – 1663, May 2011.

[10] Yuanshi Wang and Hong Wu. Dynamics of a mutualism model with saturated response. Applied Mathematics and Computation, 240:16 – 29, August 2014.

[11] Yuanshi Wang, Hong Wu, and Shan Sun. Persistence of pollination mutualisms in plant-pollinator-robber systems. Theoretical population biology, 81(3):243 – 50, May 2012.

致谢

在此我希望首先感谢王远世老师悉心给予指导和支持，在文章的理论构建、模拟分析和延伸等方面提供种种建议，并在远隔重洋时仍然拨冗审阅。

同样希望感谢我的父亲和母亲给予我的一切。

还要感谢我在本科期间的室友、同学和老师，是他们的理解和鼓励支持着我完成双专业的学习。

感谢在研究和写作期间陪伴我的J.R.R.Tolkien的作品，Mansun的音乐，以及其他一些虚构和非虚构的人物。

封三：

毕业论文（设计）成绩评定记录

指导教师评语：   成绩评定： 指导教师签名： 年 月 日
答辩小组或专业负责人意见：   成绩评定： 签名（章）： 年 月 日
院系负责人意见：   成绩评定： 签名（章）： 年 月 日