(a)

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\1&2&0\\-1&0&-2\\0&1&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&3&-3\\0&-1&1\\0&1&-1\\0&3&-3\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(A)=2$

0空间维数 $3-\text{Rank}(A)=1$

列空间维数 2.

(b) $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

(d) $$C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Col}(C) \neq \mathrm{Col}(A)$$

(e) $[a_1 \ a_2 \ a_3] = A \quad [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] = C$

$$C = [-a_1 + a_2 \quad a_1 + 2a_2 \quad 2a_1 + a_2 \quad a_1 + a_2]$$

$$= [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

(a) $Z = TY$, T is an upper triangular matrix.

(b) $W = VP$, P swaps adjacent odd and even column.

(c) $\langle p_i, q_i \rangle \geq 0$. p_i, q_i is i column of P, Q, repently.

(d) $A = [a_1 \cdots a_i \cdots a_k \; a_{k+1} \cdots a_j \cdots a_n]$, $i = 1 \cdots k$, $j = k+1, \cdots, n$

$\langle a_i, a_j \rangle = 0$.

6. (a) $$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad a_i \in R, \; i = 1 \cdots n.$$

$$aa^T = \begin{bmatrix} a_1 a^T \\ a_2 a^T \\ \vdots \\ a_n a^T \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 a^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(aa^T) = 1$.

(b). $AB=0$ $\quad Rank(AB)=0$.

如果A满秩，则 $Rank(AB)=Rank(B)=0$

因此 $B=0$ 与已知矛盾。

同理B满秩，$A=0$ 与已知矛盾。

因此，如果 $AB=0$，A, B都不能满秩得证。

(c) 设 $Rank(A)=r$. 那么A存在一个最大线性无关组 $v_1 \cdots v_r$

如果 $Ax=b$ 有解，意味着 b 可以被 $[a_1, \cdots a_n]$ 线性表示，那么 b 也可以被 $v_1 \cdots v_r$ 线性表出。

$$[a_1\ a_2 \cdots a_n]x=[v_1 \cdots v_r]\overline{x}=b$$

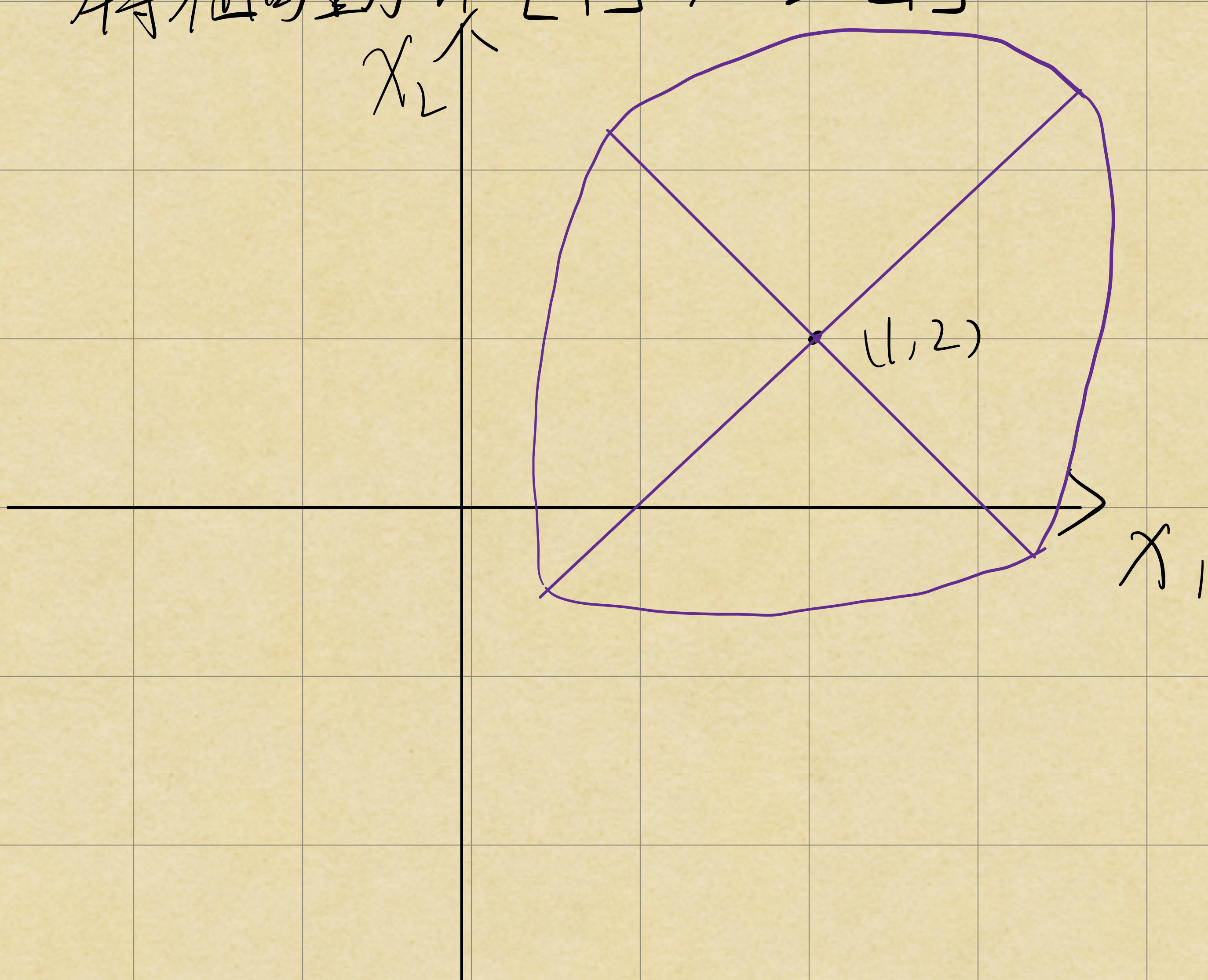
所以 $v_1 \cdots v_r$ 仍是增广矩阵 $(A|b)$ 的一个最大线性无关组。因此 $Ax=b$ 有解就等价于 $Rank(A)=Rank(A|b)$.

7. (a) $P = A^T A$, $A_p = \begin{bmatrix} \sqrt{P_{11}} & -\sqrt{P_{12}} \\ \sqrt{P_{12}} & \sqrt{P_{22}} \end{bmatrix}$

$E_2(A_p, x_c)$

(b) P 的特征值，$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$.

特征向量为 $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



8. (1) $P_1 \cap P_2 = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\}$

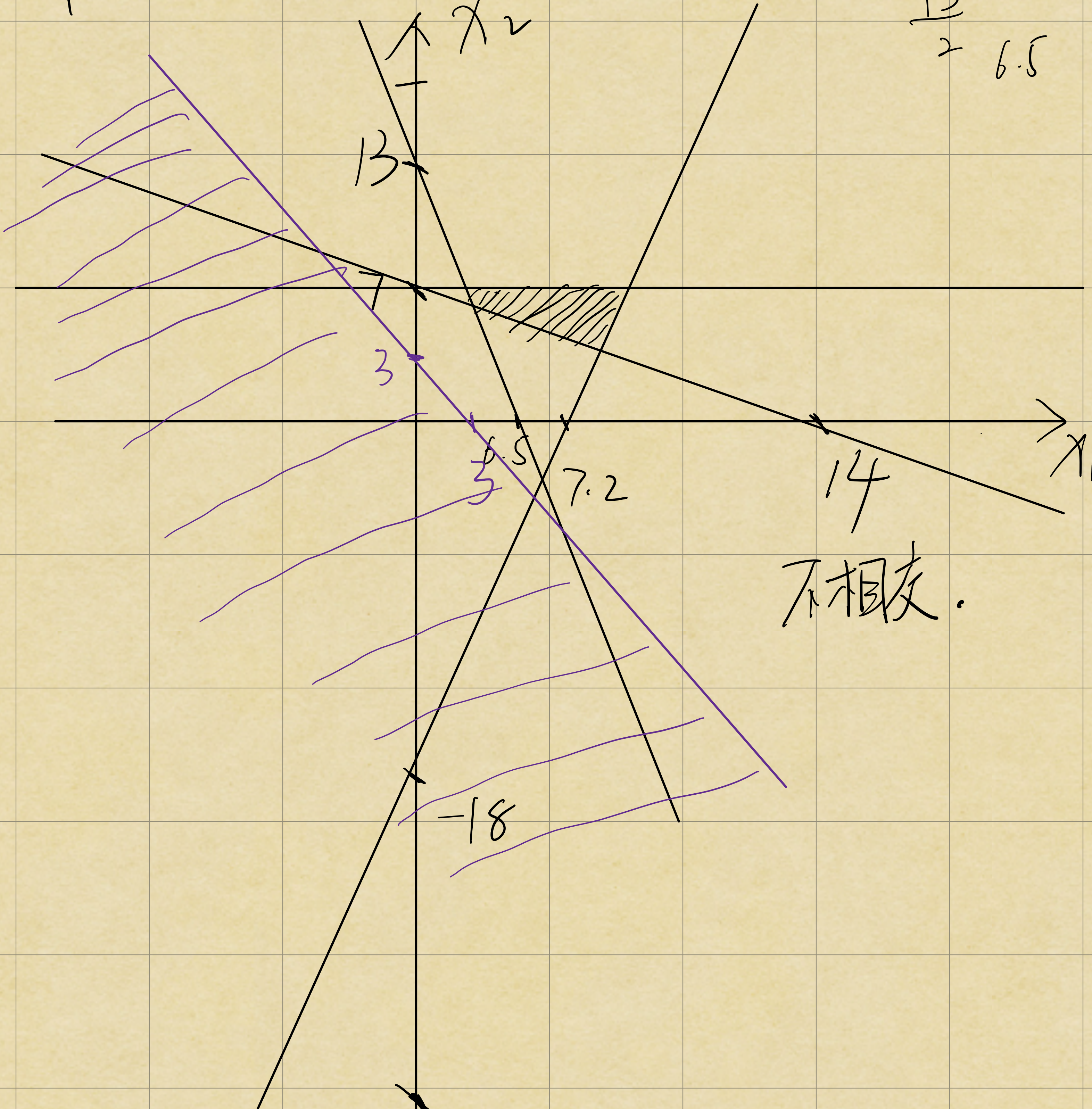
(2) $P_1 = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \\ -1 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ -14 \\ -26 \end{bmatrix} \right\}$

半平面 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \le 3$.

设 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $P = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \begin{cases} x_2 \le 7 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 36 \\ -x_1 - 2x_2 \le -14 \\ -4x_1 - 2x_2 \le -26 \end{cases} \right\}$

半平面: $x_1 + x_2 \le 3$

$\frac{13}{2}$ 6.5



不相交.