



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 基于改进 L-K 泛函的时滞系统稳定性研究及
应用

作者姓名 王毅博

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2022 年 12 月

中图分类号：TP13
UDC：621.3

学校代码：10216
密级：公开

工学博士学位论文

基于改进 L-K 泛函的时滞系统稳定性研究及 应用

博士研究生：王毅博

导 师：华长春 教授

申 请 学 位：工学博士

学 科 专 业：控制科学与工程

所 属 学 院：电气工程学院

答 辩 日 期：2022 年 12 月

授予学位单位：燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**STABILITY RESEARCH AND
APPLICATION FOR TIME-DELAY
SYSTEMS BASED ON THE IMPROVED L-
K FUNCTIONAL**

by Wang Yibo

Supervisor: Hua Changchun

Yanshan University

December, 2022

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《基于改进 L-K 泛函的时滞系统稳定性研究及应用》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字： 日期： 年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《基于改进 L-K 泛函的时滞系统稳定性研究及应用》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密☒。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘要

时滞现象遍及工程领域的能量交换和信息传播过程。工业控制系统网络化和数字化的演变，导致系统易发生数据堵塞和计算等待，诱发通讯延迟。因此，分析时滞稳定上界与系统稳定性的关系，降低时滞信号对系统性能的影响，保证系统稳定运行具有重要的理论和工程意义。本文基于改进 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函研究几类线性 and 非线性时滞系统的稳定性分析及应用问题。根据系统的时滞特性，提出新型泛函增广项、时滞乘积项和非对称项，改进 L-K 泛函设计方法，构建广义互凸不等式和参数可调的多项式矩阵不等式，得到放松保守性的系统稳定判据。论文主要内容如下：

(1) 针对具有电动汽车接入和传输时滞的互联负载频率控制(Load Frequency Control, LFC)系统，构建基于偏积分(Partial Integral, PI)算子的完全 L-K 泛函，结合分布式参数系统模型，建立 PI 算子不等式形式的 LFC 系统稳定性判据。利用 PIE 工具箱分析系统控制增益与时滞稳定上界间的相互关系，验证所提稳定条件的有效性。

(2) 针对具有加性时变时滞和外部扰动的微电网 LFC 系统，考虑开放性传输网络的时滞特性，增广系统状态与时滞相关向量，构建新型增广 L-K 泛函，得到保守性较低的系统稳定判据。基于所得稳定条件分析系统时滞稳定上界、控制增益与扰动参数间的相互关系。

(3) 针对具有不确定性和输入时滞的网络化控制系统，构建时滞乘积和积分项整合更多系统信息，提出新型时滞乘积 L-K 泛函。为保证泛函导数的负定性，根据时滞区间动态分割方法，构建参数可调的二次矩阵多项式不等式。基于所提新型时滞乘积 L-K 泛函和矩阵多项式不等式，构建具有较低保守性的 H_∞ 稳定判据和控制器设计策略，通过数值算例验证所提判据的低保守性。

(4) 针对具有时变时滞的非线性 Takagi-Sugeno(T-S)模糊系统，构建新型非对称项，放松泛函矩阵变量的限制条件，提出具有时滞乘积项的非对称 L-K 泛函。对于 L-K 泛函导数中的积分项，通过高阶矩阵多项式不等式引入松弛变量，提出广义互凸不等式。结合所提非对称 L-K 泛函和广义互凸不等式，建立保守性较低的系统稳定判据和镇定条件，通过数值算例表明所提条件的有效性。

(5) 针对时变时滞非线性神经网络系统, 增广神经网络系统状态信息, 构建增广 L-K 泛函。然后, 基于所提增广 L-K 泛函, 改进泛函时滞乘积项, 提出新型时滞乘积 L-K 泛函。结合所提 L-K 泛函和广义互凸不等式, 构建神经网络系统的稳定判据, 通过数值算例分析两类 L-K 泛函的保守性。

关键词: 时滞系统; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 渐近稳定; 广义互凸不等式; 矩阵多项式不等式

Abstract

Time delays pervade energy exchange and information propagation in engineering fields. Since the industrial control system is networked and digitalized, the system is prone to data blockage and computational waiting, and the communication network is also susceptible to signal delays. Hence, it is of great theoretical and engineering significance to analyze the relationship between time delays and stability, reduce the influence of delay signals on system performance, and ensure the stable operation of the system. This dissertation investigates the stability and applications of several linear and nonlinear time delay systems based on the improved L-K functional. According to the time delay properties, this paper proposes novel augmented terms, time delay product terms, and asymmetric terms to improve the design method of L-K functional. Furthermore, by establishing the generalized reciprocally convex inequality and polynomial matrix inequality with adjustable parameters, stability criteria with relaxed conservatism are derived. The main contents of the dissertation are summarized as follows.

(1) For interconnected LFC systems with electric vehicles and time delays, the complete L-K functional based on the PI operator is constructed. Then, the novel stability criteria are established in the form of the PI operator inequality by incorporating the distributed parameter system presentation. With the help of the PIETOOLS, the relationships between the maximum delay bound and the control parameters are obtained. Numerical examples are provided to verify the advantages of the stability criteria.

(2) For micro-grid LFC systems with additive time-varying delays and external disturbances, the system state and delay-dependent vectors are integrated to construct a novel augmented L-K functional. It is worth noting that the L-K functional considers the additive time delay properties of the open transmission network. Then, the system stability criteria with less conservatism are derived based on the proposed L-K functional. Based on the obtained stability conditions, the interrelationships between the maximum time delay bounds, control gains, and disturbance parameters are studied.

(3) For networked control systems with uncertainty and input time-varying delay, a

novel L-K functional with time delay product terms is proposed by constructing time delay product and integral terms. To ensure the negative definiteness of the functional derivatives, a quadratic matrix polynomial inequality with tunable parameters is proposed based on the dynamic partitioning method of the time delay interval. Then, the H_∞ stability criteria and the controller are established based on the novel L-K functional and inequality. Numerical examples are provided to verify the less conservativeness of the stability criteria.

(4) For nonlinear T-S fuzzy systems with time-varying time delay, a novel asymmetric L-K functional with time delay product terms is developed. By constructing new asymmetric terms, the constraints on the matrix variables in the L-K functional are relaxed. By introducing the slack matrices, the generalized reciprocally convex inequality is proposed to estimate the integral terms in the derivatives of the L-K functional. Based on the asymmetric L-K functional and generalized reciprocally convex inequality, less conservative stability criteria and controller design methods are established. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed conditions.

(5) For nonlinear neural network systems with time-varying delays, an augmented L-K functional is constructed by integrating the neural network state information. Then, based on the proposed augmented L-K functional, a novel L-K functional with time delay product terms is developed by including some delay-dependent vectors. The stability criteria of the neural network are constructed by combining the proposed L-K functional and the generalized reciprocally convex inequality. The conservatism of the two types of L-K functional is compared by numerical examples.

Keywords: Time-delay system; Lyapunov-Krasovskii functional; Reciprocally convex inequality; Asymptotically stable; matrix polynomial inequality

目 录

摘 要	I
Abstract	III
主要符号说明	VII
第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 时滞系统稳定性研究现状	2
1.2.1 L-K 泛函设计的研究现状	5
1.2.2 不等式技术的研究现状	8
1.3 主要存在的问题	12
1.4 本文的研究思路与研究内容	14
1.4.1 研究思路	14
1.4.2 研究内容	15
第 2 章 改进完全 L-K 泛函的线性时滞电力系统稳定分析	17
2.1 引言	17
2.2 互联 LFC 系统稳定分析	19
2.2.1 互联 LFC 系统描述	19
2.2.2 互联 LFC 系统稳定分析	23
2.3 新型时滞 LFC 系统稳定分析	24
2.3.1 新型时滞 LFC 系统描述	24
2.3.2 新型时滞 LFC 系统稳定分析	28
2.4 数值算例	29
2.4.1 单区域 LFC 系统稳定性分析	29
2.4.2 多区域 LFC 系统稳定性分析	32
2.5 本章小结	34
第 3 章 改进增广 L-K 泛函的线性时滞微电网系统稳定分析	35
3.1 引言	35
3.2 问题描述及预备知识	36
3.3 主要结果	39
3.3.1 单时滞微电网 LFC 系统稳定分析	39
3.3.2 加性时滞微电网 LFC 系统稳定分析	42
3.4 数值算例	44

3.5 本章小结	47
第 4 章 改进时滞乘积 L-K 泛函的线性时滞网络化控制系统稳定分析.....	48
4.1 引言	48
4.2 问题描述及预备知识	50
4.3 新型矩阵多项式不等式	51
4.4 主要结果	53
4.5 数值算例	59
4.6 本章小结	67
第 5 章 改进非对称 L-K 泛函的时滞非线性 T-S 模糊系统稳定分析	68
5.1 引言	68
5.2 问题描述及预备知识	69
5.3 广义互凸不等式	71
5.4 主要结果	74
5.4.1 时滞 T-S 模糊系统稳定分析.....	74
5.4.2 时滞 T-S 模糊系统控制器设计.....	79
5.5 数值算例	82
5.6 本章小结	85
第 6 章 改进时滞乘积 L-K 泛函的时滞非线性神经网络稳定分析.....	86
6.1 引言	86
6.2 问题描述及预备知识	87
6.3 主要结果	89
6.3.1 基于增广 L-K 泛函的神经网络稳定性分析.....	89
6.3.2 基于时滞乘积 L-K 泛函的神经网络稳定性分析.....	94
6.4 数值仿真	99
6.5 本章小结	102
结 论	103
参考文献	105
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果	118

主要符号说明

\mathbf{R}	实数集
$\mathbf{R}^{m \times n}$	$m \times n$ 维实数矩阵集
$\mathbf{L}_2^n[s]$	从 s 到 \mathbf{R}^n 上的 Lesbesque 平方可积的向量函数
\mathbf{S}_n^+	$m \times n$ 非负实数集
$Z_{n,m}$	内积空间 $\mathbf{R}^n \times L_2^m[s]$
$W_2^n[s]$	$\{x: x \in L_2^n[s], \dot{x} \in L_2^n[s]\}$
$\langle x, y \rangle_Z$	Z 空间上的内积, 当 $Z := Z_{n,m}$ 时, 对任意 $x \in Z$, $y \in Z$, 有 $\langle x, y \rangle_Z = \int_x x^T y ds$
$X > 0$	矩阵 X 为正定矩阵
X^T	矩阵 X 转置
X^{-1}	矩阵 X 的逆矩阵
I	适合维数的单位矩阵
O	适合维数的零矩阵
$*$	矩阵中的对称项
C_i^j	i 中取 j 个元素的组合数
$col\{A, B, C\}$	A, B, C 组成的列向量
$He\{A\}$	$A + A^T$
$diag\{A, B, C\}$	A, B, C 组成的对角矩阵
$\ \cdot\ $	向量或矩阵范数
$\ \cdot\ _C$	$\max_{a \leq s \leq b} \ \phi(s)\ $
x_t	$x_t(s) = x(t+s), s \in [-\tau, 0]$

第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

时滞现象，又称为时延现象或滞后现象，泛指行为的执行时刻与显效时刻不一致的情况。自然界中物质、能量和信息的转移与输运都需要一定的时间，如生物种群演变，病毒传播，光传导等，客观导致了时滞现象的存在性和普遍性。从系统动态的角度出发，时滞现象是指系统状态的演变方向受到系统当前状态的影响，同时也与系统的历史状态相关。对于具有实时特性的工程实际系统，时滞现象会明显改变系统动态的演变，对系统性能和稳定性造成不可避免的冲击。将此类具有时滞特性的系统并称为时滞系统。

时滞系统常常使用泛函微分方程，又称微分差分方程或时滞微分方程，刻画系统动态。18世纪初，Euler等人对曲线渐缩线问题的讨论可称之为对泛函微分方程的首次研究。泛函微分方程解的渐近性质即为时滞系统的稳定性，成为研究的关键。因为稳定性是系统最基本的特性之一，其描述了系统受到扰动恢复至平稳的能力。在工程应用领域，Volterra 利用泛函微分方程分析了材料的粘弹性^[1]。1942 年，Minorsky 针对大型船舶的摆动平衡问题，基于泛函微分方程对船体摆动进行建模并分析^[2]。理论研究领域，Chebotarev 研究了拟多项式的 Routh-Hurwitz 问题，推动了针对泛函微分方程稳定性的研究^[3]。Myshkis 首次解决了泛函微分方程的初始条件问题^[4]。1956 年，Krasovskii 将李雅普诺夫稳定理论推广到时滞系统的研究中。这些早期成果丰富并促进了时滞系统的研究。近年来，针对系统时滞现象的工程和理论研究愈加丰硕，2000 年，顾克勤在第 39 届 IEEE 控制与决策会议上首次提出基于积分不等式的研究思路，用于解决时滞系统的稳定性分析问题^[5]。2014 年，Emilia Fridman 利用时滞状态刻画采样控制信号，基于时滞系统研究了采样控制策略^[6]。国际自动控制联合会(简称，IFAC)自 1998 年起针对时滞系统稳定性的研究多次组织研讨会和学术会议。因此，时滞系统的稳定性问题(即泛函微分方程解的渐近性质)一直是学术和工程领域的研究重点。

在工程控制领域，时滞现象作为频发的动力学行为，常见于化学化工、核反应堆系统、金属切削运动控制、生物捕食-猎物演变以及连续轧染等实际系统控制中。

采样控制、事件触发控制以及信号延迟攻击等理论框架，可主动引入时滞信号对系统进行建模和分析。而且伴随数字控制技术和网络化系统的推进趋向，大量传感和控制信息数据需要通过网络通道传输，不可避免的造成信号时滞。值得关注的是无论时滞信号发生在系统状态、控制输入还是测量传输中，都可能对系统动态造成不可预估的影响。一般来说信号传输延迟对系统动态的影响可以分为积极影响和消极影响两类。对于某些系统，尽管信号的延迟导致信息传递的滞后，但仍能改善系统的整体性能。典型案例如恒温调节系统，常用于仓库储存、厨房设备和家禽孵化等场景。恒温系统需要打开或关闭加热或制冷设备，调节环境到达指定温度。为了减少频繁启动设备带来的损耗，恒温系统会主动引入时滞。在环境达到或低于指定温度时不会立刻关闭或打开调温设备。但是多数情况下，系统状态或控制信号的时滞现象会给系统的分析和控制造成困扰^[7]。信号的延迟易导致系统性能下降，甚至控制器失效。例如以下二阶线性时不变系统。

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t-h) \quad (1-1)$$

设置自然频率 $\omega_n = 2$ ，阻尼比 $\xi = 0.5$ 。当时滞 $h = 0$ 时，对系统实施阶跃输入，系统响应为欠阻尼渐近稳定，震荡衰减至期望目标值。当设置输入时滞 $h = 1$ 时，系统的阶跃响应为发散。众所周知，二阶系统常用于表达各类工程实际系统，如电子电路、弹簧阻尼以及汽车悬架等。故此，研究系统时滞与稳定性的关系具有显要的应用价值。在理论分析方面，时滞系统的特征方程包含数个超越项，属于超越方程。相比于线性系统的分析与综合，针对时滞系统稳定性的研究具有较高的难度和挑战。

综上所述，由于时滞系统广泛存在于各类工程实际系统中，且信号的延迟导致系统动态复杂难解，其稳定性问题一直是工程领域的难点。因此，针对线性和非线性时滞系统展开研究具有深重的意义。

1.2 时滞系统稳定性研究现状

典型时滞系统可以由模型(1-2)表示。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + \omega(t) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1-2)$$

其中 A 和 A_d 为给定的系统矩阵， $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\omega(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别表示系统的状态和外部干扰输入， τ 为系统具有的时滞量， $\phi(t)$ 表示系统的初始条件。当系统的时滞量 τ 设

为零时，系统(1-2)退化为常见的线性系统。当系统的时滞量 τ 与时间相关时，系统(1-2)为常见的时变时滞系统。当时滞量 τ 不为零时，系统的状态轨迹会受到时滞状态的影响，导致系统的性能下降和不稳定。因此，获得系统的稳定判据条件，计算时滞稳定上界，设计有效控制方法成为时滞系统研究的重点。自 1949 年，Myshkis 正式引入泛函微分方程的概念后，时滞系统稳定性的研究可分类为根轨迹法和时域法。这两类方法分别对应不同的技术路线和研究结果，以下分别介绍根轨迹法和时域法的研究现状。

根轨迹法，又称频域法，通过分析特征方程根的分布情况，判断时滞系统的稳定性。时滞系统特征方程可描述为具有无穷个数根的拟多项式形式。文献[8]指出得到系统特征方程所有的根是不切实际的。根轨迹法主要依据时滞系统的指数连续性和虚根位置，基于特征根的分布状态，得出系统稳定性的充要条件。文献[9]采用直接法对时滞系统的稳定区域进行分析，同时指出直接法适合于简单型时滞系统，针对多重时滞系统的结果较少。文献[10]基于频域扫描方法，考虑均匀分布时滞，提出系统充分必要的稳定条件。文献[11]提出一种代数方法，针对中立型时滞系统，得到特征根在非负实部的区域分布。Nejat Olgac 和 Rifat Sipahi 在文献[12]中提出一种根聚类法，针对多重时滞系统，得到系统的稳定区域。文献[13]首次提出基于皮瑟级数的方法，得到时滞系统的临界值，分析时滞系统的完全稳定性。综上可知，根轨迹法根据时滞系统特征方程根的分布，分析系统完全稳定性，能够得到系统稳定的充要条件。因此，根轨迹法对时滞系统稳定性的研究带来了丰硕成果。值得注意的是，虽然根轨迹法能够得到精确时滞边界，但是其局限性也明显的。首先，系统维数和时滞状态较多时，对系统特征方程根的求解与分析也会更加困难。其次，根轨迹法无法处理具有时变时滞，可变参数以及不确定性的系统，且能够开发的控制策略也有限。因此，根轨迹法常用于具有多重定常时滞系统的研究中。

针对具有时变时滞系统的稳定性问题，时域法被提出并得到大量系统稳定判据。时域法基于李雅普诺夫稳定理论，依托系统状态空间表达，得到时滞系统得稳定性条件。自从泛函微分方程的概念提出后，学者们就尝试将李雅普诺夫理论推广至时滞系统稳定分析中。Krasovskii 在文献[14]中首次提出针对时滞系统的李雅普诺夫函数应当考虑时滞状态 $x_t(s)$ 。引入时滞状态到李雅普诺夫函数中，得到 L-K 泛函。如果存在 L-K 泛函 $V(t)$ 满足式(1-3)，则原系统是渐近稳定的。

$$\begin{aligned} u(\|x(t)\|) &\leq V(t) \leq v(\|x_t\|_C) \\ \dot{V}(t) &\leq -w(\|x(t)\|) \end{aligned} \quad (1-3)$$

其中, u 、 v 和 w 是严格递增函数并满足 $u(0)=v(0)=w(0)=0$ 和 $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s)=\infty$ 。基于 L-K 泛函方法, 得到许多重要的时滞相关稳定判据。1997 年, 文献[15]提出一种离散 L-K 泛函, 对于时滞系统得到精确的时滞稳定区间。2002 年, 文献[16]提出模型变换方法, 利用微积分公式得到具有分布时滞的系统。基于模型变换方法, L-K 泛函的导数中会存在一些交叉项, 文献[17]和[18]分别提出 Park 不等式和 Moon 不等式处理此类交叉项。2004 年, 文献[19]提出自由权矩阵的方法, 得到比模型变换方法保守性更低的稳定判据。2010 年, 文献[20]提出基于时滞分解的 L-K 泛函, 降低了稳定结果的保守性。综上, 学者们基于 L-K 泛函方法对时变时滞系统展开研究, 并得到许多创新性成果。时域法中另一个重要的研究分支为 Lyapunov-Razumikhin (L-R)函数方法[21]。1956 年, Razumikhin 避开 L-K 泛函方法, 基于李雅普诺夫稳定理论提出 Razumikhin 定理。如果存在李雅普诺夫函数 $V(t)$ 满足条件(1-4), 则原时滞系统是渐近稳定的。

$$\begin{aligned} u(\|x(t)\|) &\leq V(t) \leq v(\|x(t)\|) \\ \dot{V}(t) &\leq -w(\|x(t)\|), \text{ if } V(t+s, x(t+s)) \leq p(V(t)), \forall s \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中, u 、 v 和 w 是严格递增函数并满足 $u(0)=v(0)=w(0)=0$, p 是连续非递减函数满足 $p(s)>s, (s>0)$ 。相比于 L-K 泛函方法, L-R 函数方法主要依据二次型的李雅普诺夫函数, 无需构建复杂的泛函方程。文献[22]利用 L-R 函数研究了时滞系统的鲁棒稳定问题。文献[23]结合 Halanay 不等式和 L-R 函数, 针对离散神经网络系统, 研究了系统的指数稳定问题, 得到时滞无关判据。文献[24]总结分析常用的时滞系统的研究方法, 基于 L-R 函数方法, 得到系统时滞无关稳定条件。综上, L-K 泛函和 L-R 函数方法是时域法的基石, 两者在时滞系统稳定性的研究中都得到了广泛的应用和发展。然而, L-K 泛函方法由于构建了包含 $x_t(s)$ 的泛函, 包含了更多系统信息, 能够得到系统的时滞相关稳定判据。相比于 L-R 函数方法, L-K 泛函方法具有较低的保守性和较强的灵活性, 是时滞系统稳定分析领域最常用的研究方法。由于 L-K 泛函方法仅能得到系统稳定的充分不必要条件而非一般解, 所得判据中不可避免的存在保守性。因此, 提高 L-K 泛函方法的精准度, 降低所得判据的保守性, 获得更准确的时滞稳定边界是研究的重点和难点。为了降低 L-K 泛函给稳定判据带来的保守性, 现有研究从 L-K 泛函的构建和分析两个方面展开研究。

1.2.1 L-K 泛函设计的研究现状

L-K 泛函方法的基本研究路线是确定一个表示系统能量的正定泛函 $V(t)$ ，使其沿系统轨迹相对时间的导数负定，从而保证系统整体能量呈持续衰减的状态。研究过程中主要难点是设计 L-K 泛函，确保泛函的正定性和泛函导数负定性，所得条件共同组成了时滞系统的稳定判据^[25]。L-K 泛函的设计具有很多形式和方法，固有的保守性也不尽相同。值得注意的是泛函的建构没有统一的标准和模式，但基本的设计理念是尽可能多的包含系统状态和时滞信息，准确的表征系统能量。通过文献调查法，本文按照 L-K 泛函的提出时间，结合其发展情况，梳理了构建 L-K 泛函的现状。

(1) 完全 L-K 泛函

完全 L-K 泛函是一种基于完全平方函数的泛函设计方法，典型形式如式(1-5)所示。

$$\begin{aligned}
 V(t) = & x^T(t)Px(t) + 2x^T(t)\int_{-\tau}^0 Q(s)x_t(s)ds \\
 & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x_t^T(s)T(s,u)x_t(u)dsdu + \int_{-\tau}^0 x_t^T(s)S(s)x_t(s)ds
 \end{aligned} \tag{1-5}$$

其中 P 为实数矩阵， $Q(s)$ ， $T(s)$ 和 $S(s)$ 为实函数矩阵。通过设置时滞 $\tau=0$ ，完全 L-K 泛函退化为常用的二次型李雅普诺夫函数。基于完全平方函数，文献[26]首次提出完全 L-K 泛函分析了定常时滞系统的稳定性。文献[27]指出不变时滞系统的渐近稳定性等价于存在完全 L-K 泛函。然而，文献[27]并没有从数值角度提供泛函参数化的方法。1997 年，文献[28]提出一种离散化方法，实现完全 L-K 泛函的参数化，基于线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)条件得到时滞系统的稳定判据。2007 年，文献[29]利用平方和工具箱(SOSTOOL)分析时滞系统的渐近稳定问题。文献[30]提出一种新型完全 L-K 泛函的参数化方法，应用到线性离散时滞系统的稳定性研究中，得到系统稳定条件。文献[31]针对具有不确定时滞的系统，得出系统鲁棒稳定判据。文献[32]提出新型完全 L-K 泛函，利用平方和技术，研究了多重时滞系统的 H_∞ 稳定问题。综上，针对多重线性时滞系统，完全 L-K 泛函能够得到几乎不含保守性的稳定条件。但由于其参数化和求解难度较大，所判据的计算复杂度较高。

(2) 时滞无关 L-K 泛函

时滞无关 L-K 泛函是最简单的泛函设计方法，具体形式如式(1-6)所示。由一个

二次项和一重积分项组成。设置完全 L-K 泛函中 $R(s)$ 为实数矩阵, $Q(s)$ 和 $T(s,u)$ 为合适维数的零矩阵, 那么, 式(1-5)等价于式(1-6)中的泛函形式。

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Rx(s)ds \quad (1-6)$$

基于时滞无关 L-K 泛函得到的约束限制条件不包含任何时滞信息, 因此将这类稳定条件称为时滞无关稳定判据, 即对于任意大的时滞, 系统均为渐近稳定。文献[28]基于时滞无关 L-K 泛函, 研究了系统的时滞无关稳定问题。文献[33]提出时滞观测器设计方法, 利用时滞无关 L-K 泛函实现系统的稳定化策略。文献[34]针对中立型多重时滞系统, 基于时滞无关 L-K 泛函提出 H_∞ 控制器, 得到时滞无关稳定条件及控制器设计。基于 L-K 泛函方法, 文献[35]针对具有不确定性的系统, 得到时滞无与相关稳定判据。综上, 时滞无关 L-K 泛函结构简单, 针对时滞系统稳定性无需复杂的计算与分析。但是, 其仅能获得时滞无关稳定判据。具有时滞无关稳定性的实际系统较少, 因此时滞无关 L-K 泛函的应用范围有限, 相关研究成果主要集中在 2000 年以前。为了减低 L-K 泛函方法固有的保守性, 取得时滞相关稳定判据, 提出时滞相关 L-K 泛函, 如下:

(3) 增广 L-K 泛函

增广 L-K 泛函多用来降低判据保守性, 获得时滞相关稳定判据。相比时滞无关 L-K 泛函, 具有如下特点: 第一, 通过对二次项增广扩维, 涵盖更多得系统状态和时滞向量。第二, 考虑 $\dot{x}_t(s)$ 相关项。通过设定合适的矩阵参数, 时滞无关 L-K 泛函是增广 L-K 泛函的一个特例。得益于式(1-7)的最后一项, 基于增广 L-K 泛函的约束限制条件包含时滞 τ 。因此, 增广 L-K 泛函能够得到时滞相关稳定判据。

$$V(t) = \eta_1^T(t)S\eta_1(t) + \int_{t-\tau}^t \eta_2^T(s)Q\eta_2(s)ds + \int_{t-\tau}^t \int_u^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsdu \quad (1-7)$$

其中 $\eta_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-\tau), \int_{t-\tau}^t x(s)ds\}$, $\eta_2(s) = \text{col}\{x(s), \dot{x}(s)\}$ 。

基于增广 L-K 泛函得到的系统稳定条件与时滞相关, 即系统的稳定性与时滞受到大小的影响。文献[36]利用增广 L-K 泛函得到中立型时滞系统的时滞相关稳定判据。文献[37]通过改进增广型 L-K 泛函, 研究了电力系统控制器增益与时滞稳定上界之间的相互关系。通过增广 L-K 泛函和无限级数的积分不等式, 文献[38]针对时滞系统提出了一种新型稳定性条件。文献[39]提出新型增广 L-K 泛函, 针对具有加性时滞的网络化系统放松了系统的稳定条件。文献[40]利用增广 L-K 泛函研究了具有加性时变时滞的神经网络系统。通过增广系统向量和时滞相关项, 文献[41]获得

了新型增广 L-K 泛函并用于时滞神经网络系统的稳定分析中。文献[42]改进增广 L-K 泛函，针对非线性时滞 T-S 模糊系统获得时滞相关稳定判据。综上，增广 L-K 泛函已经被广泛用于时滞系统的稳定分析中，并取得一系列保守性较低的系统稳定判据。增广 L-K 泛函已经成为时滞系统领域最常用的泛函形式之一。下面介绍三种基于增广 L-K 泛函的改进形式。

(4) 时滞分割 L-K 泛函

基于时滞离散化思想，时滞分割 L-K 泛函将时滞区间分段，得到时滞状态的中间值 $x_t(-\tau/2)$ 。将包含 $x_t(-\tau/2)$ 的式(1-8)综合到增广 L-K 泛函中，可以得到时滞分割 L-K 泛函。

$$V(t) = \int_{t-\tau/2}^t \eta_2^T(s) R_1 \eta_2(s) ds \quad (1-8)$$

其中 $\eta_2(t) = \text{col}\{x(u), x(u - \tau/2)\}$ 。

通过细化时滞区间，可以得到更多关于时滞中间状态的函数。这些函数的加入丰富了系统信息，能够降低所得判据的保守性。文献[43]基于时滞分割 L-K 泛函得到系统的时滞相关稳定判据，并且讨论了时滞区间与判据保守性的关系。通过将时滞区间分解为多个等距的子区间，文献[44]引入可调参数 δ 构建了新型时滞分割 L-K 泛函。针对时滞神经网络系统，文献[45]设计时滞分割 L-K 泛函，得到参数可调的时滞相关稳定条件。文献[46]将时滞区间分割为非等距子区间，设计新型时滞分割 L-K 泛函，推广至离散时滞系统，构建系统稳定判据。综上，通过将时滞区间等距或任意比例分割，能够丰富 L-K 泛函所包含的时滞状态信息。然而，随着时滞区间更细化的分割，所得判据的计算复杂度会逐渐增加，而且与稳定条件保守性边际递减。因此，需要根据系统维数和保守性的要求，设计合适的分割区间是构建时滞分割 L-K 泛函的关键。

(5) 多重积分 L-K 泛函

多重积分 L-K 泛函是在增广 L-K 泛函的基础上引入多重积分项，如式(1-9)所示。通过引入不同的高阶积分项，增加泛函的待求解矩阵，能够有效提高判据的最大允许时滞。

$$V(t) = \int_{-h}^0 \int_u^0 \int_{t+v}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds dv du \quad (1-9)$$

多重积分 L-K 泛函不限于式(1-9)中的三重积分，可以囊括更高阶的积分项。文献[47]提出一种包含 n 阶积分项的 L-K 泛函，针对中立型时滞系统得到保守性较低

的稳定结果。文献[48]提出具有三重积分项和四重积分项的 L-K 泛函，基于高阶积分不等式，得到时滞递归神经网络的稳定判据。文献[49]利用多重积分 L-K 泛函和自由矩阵不等式，引入参数调节积分项数目，放松了系统稳定条件。文献[50]构建新型积分不等式技术，用于估计 L-K 泛函中三重积分项的导数，提出保守性较低系统的稳定条件。综上，多重积分 L-K 泛函通过引入更多的高阶积分项，降低了泛函固有的保守性。然而，高阶积分项会使 L-K 泛函的结构复杂化，计算求解困难。随着积分项的增加，对于判据保守性的改善也会逐步减少。因此，对于多重积分项的引入需要考虑稳定判据计算复杂度和保守性的平衡。

(6) 时滞乘积 L-K 泛函

在增广 L-K 泛函的基础上，通过考虑时滞乘积相关项如式(1-10)，可得时滞乘积 L-K 泛函。通过设置 $P_1 = P_2 = 0$ ，时滞乘积 L-K 泛函等价于增广 L-K 泛函。

$$V(t) = \tau(t)x^T(t)P_1x(t) + (\tau - \tau(t))x^T(t)P_2x(t) \quad (1-10)$$

时滞乘积 L-K 泛函通过设计各类时滞乘积相关项，将更多时滞信息综合到泛函设计中，对于时变时滞系统的稳定分析具有较大的改善。2016 年，文献[51]首次提出时滞乘积 L-K 泛函，结合广义自由矩阵不等式，得到时滞离散系统的稳定条件。文献[52]考虑网络化控制系统的随机攻击问题，设计时滞乘积 L-K 泛函，得到基于 LMI 的系统稳定条件。文献[53]发展了时滞乘积 L-K 泛函，结合高阶积分不等式，针对具有时变时滞 T-S 模糊系统，放松了系统稳定的限制条件。文献[54]介绍了具有新型时滞乘积项的 L-K 泛函，用于时滞神经网络系统的稳定分析中。文献[55]针对广义时滞神经网络系统，提出新型时滞乘积 L-K 泛函，研究时滞稳定上界对系统稳定性的关系。综上，时滞乘积 L-K 泛函通过引入时滞信息到泛函的建构中，有效降低了所得判据的保守性。由于将时滞乘积项引入 L-K 泛函，因此所得判据也是与时滞导数相关的。

1.2.2 不等式技术的研究现状

根据李雅普诺夫稳定性理论，建立合适的 L-K 泛函后，获得保证泛函导数负定的条件成为关键。在时滞系统稳定性分析领域，这也是众多学者的研究方向。因为，L-K 泛函一旦选定，那么其包含的保守性也随之确定。泛函导数的估计成为影响系统判据保守性的重要因素。首先，完全 L-K 泛函通过保障满足要求的完全平方函数的存在性，证明完全 L-K 泛函导数的负定，无需对完全 L-K 泛函导数进行放缩

和估计。因此，完全 L-K 泛函在计算泛函导数时几乎不会产生保守性^[56]。其次，对于时滞无关 L-K 泛函，由于其设计简单，求导后容易得到基于线性矩阵不等式的稳定条件。时滞无关 L-K 泛函的研究也无需考虑泛函导数的估计问题。最后，针对增广 L-K 泛函及其改进型泛函，由于二重积分项的存在，其导数不可避免的会产生积分项。为了获得可处理的系统稳定判定条件，各类不等式技术被广泛研究。下面根据不同技术的发展脉络详细介绍其发展现状。

(1) 积分不等式

根据典型增广 L-K 泛函(1-7)，双重积分项求导后可得如下积分形式

$$\dot{V}(t) = \tau \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t x^T(s) R x(s) ds \quad (1-11)$$

显然，式(1-11)中的单重积分项无法直接利用线性矩阵不等式工具箱优化求解。由于矩阵 R 为正定矩阵，直接删除整个积分项并不会影响 $\dot{V}(t)$ 的负定性。但会明显增大所得判据的保守性。如何准确估计积分项，并得到可直接处理的 LMI 条件，成为降低系统保守性的关键。研究早期阶段，学者们提出了交叉项不等式，模型变换方法和自由权矩阵技术等手段消除或者估计积分项。然而，相比于积分不等式，早期的估计方法可能会引入不必要的保守性或给系统引入额外的动态。因此，本文主要关注积分不等式技术的发展现状。为了准确估计式(1-11)中的积分项，根据舒尔补定理，文献[5]首次提出 Jensen 积分不等式，如下：

$$\int_{t-\tau}^t x^T(s) R x(s) ds \geq \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t x(s) ds R \int_{t-\tau}^t x(s) ds \quad (1-12)$$

Jensen 积分不等式在时滞系统分析中应用广泛，并且现有文献对其进行了许多的改进和创新。文献[57]提出一类改进型 Jensen 积分不等式，降低了估计误差，减少了系统稳定判据的保守性。文献[58]提出利用时滞分割法降低 Jensen 积分不等式的保守性。证明了细化时滞区间能够使得 Jensen 积分不等式的估计误差任意小。在某些情况下，非均匀时滞分割方案也被证明是有效的改进方法。文献[59]利用 Jensen 积分不等式保证了 L-K 泛函的正定性。无要求所有 L-K 泛函中的矩阵满足正定条件，降低了 L-K 泛函固有的给保守性。同样，文献[60]也利用 Jensen 积分不等式得到 L-K 泛函的正定条件，针对时滞神经网络系统得到保守性较低的稳定判据。文献[39]针对具有不确定性和加性时滞系统的稳定性问题，提出非脆弱采样控制器。尽管 Jensen 积分不等式已经得到广泛的应用和发展，但是发展放缩误差更小

的不等式是降低保守性的有效手段。2013 年, 文献[61]首次提出 Wirtinger 积分不等式, 进一步减小了放缩误差, 具体形式如下:

$$\int_a^b x^T(u)Rx(u)du \geq \frac{1}{b-a}(\mathcal{G}_1^T R \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2^T 3R \mathcal{G}_2) \quad (1-13)$$

其中

$$\mathcal{G}_1 = \int_a^b x(s)ds, \quad \mathcal{G}_2 = \int_a^b x(s)ds - \frac{2}{b-a} \int_a^b \int_u^b x(s)dsdu$$

Wirtinger 不等式是傅里叶分析中常用的一种不等式技术。文献[61]由此提出 Wirtinger 积分不等式用于估计 L-K 泛函导数的交叉项。根据式(1-13)右侧各项可得, Wirtinger 积分不等式包含 Jensen 积分不等式作为特例。文献[62]针对大规模多区域电力负载频率控制系统, 结合 Wirtinger 积分不等式技术, 得到计算复杂度较低的稳定判据。基于 Wirtinger 积分不等式, 文献[63]提出新型多重积分不等式, 用于估计多重积分项, 降低了时滞神经网络系统判据的保守性。文献[64]结合 Wirtinger 积分不等式和互凸不等式, 研究了时滞神经网络系统的指数稳定问题。文献[65]基于改进型 Wirtinger 积分不等式, 针对具有采样控制的 T-S 模糊系统, 提出稳定化控制策略。综上, Wirtinger 积分不等式在时滞系统的稳定分析中发挥了重要作用。沿着 Wirtinger 积分不等式的设计思路, 继续增加不等式右侧的非负项, 是否能够获得误差更小的积分不等式。对此文献[66]提出 Bessel-Legendre(B-L)积分不等式, 如下:

$$\int_a^b x^T(u)Rx(u)du \geq \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N (2i+1) \mathcal{G}_i^T R \mathcal{G}_i, (\mathcal{G}_i = \int_a^b L_k(s)x(s)ds) \quad (1-14)$$

其中 $L_k(s)$ 为 Legendre 多项式。

依据 Legendre 多项式的正交特性, B-L 积分不等式被提出用于估计 $\dot{V}(t)$ 中的积分项。显而易见, 式(1-14)中的 N 取 0 和 1 时, B-L 积分不等式分别等价于式(1-12)和式(1-13)。也说明 B-L 积分不等式的保守性能够通过提高参数 N 而降低。文献[67]研究了具有时变传输时延的电力负载频率控制系统, 运用 B-L 积分不等式建立了新型稳定判据。文献[68]改进了 B-L 积分不等式, 针对时滞神经网络系统建立了保守性较低的稳定判据。文献[69]基于高阶多项式, 构建了新型 B-L 积分不等式, 针对具有时变时滞 T-S 模糊系统, 得到系统稳定条件和控制策略。

(2) 互凸不等式

针对时变时滞系统的稳定性分析问题, L-K 泛函方法具有独特的优势。在对 L-

K 泛函导数的处理中，为了降低所提判据的保守性，将式(1-11)中的单积分项拆分为如下形式

$$\int_{t-\tau}^t x^T(s)Rx(s)ds = \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Rx(s)ds + \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} x^T(s)Rx(s)ds \quad (1-15)$$

式(1-15)本质是时滞分割思想的应用与推广。时滞 $\tau(t)$ 的引入丰富了 L-K 泛函包含的状态信息，能够有效提高判据的最大时滞上界。但是，式(1-15)仍需通过积分不等式进行估计，并会导致 $\dot{V}(t)$ 中出现如下的凸组合。

$$\theta_R := \begin{bmatrix} 1/\varepsilon R & O \\ * & 1/(1-\varepsilon)R \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \tau(t)/\tau \quad (1-16)$$

为了准确估计式(1-16)，得到可直接处理的线性矩阵不等式条件。2011 年，文献[70]首次提出互凸不等式用于估计凸组合，如下：

$$\theta_R \geq \begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

文献[61]基于互凸不等式和 Wirtinger 积分不等式，研究了中立型时滞系统的稳定性问题。针对时滞离散 T-S 模糊奇异系统，文献[71]利用互凸不等式研究了系统耗散性问题。文献[65]将结合互凸不等式和模糊 Lyapunov 泛函，得出时滞 T-S 模糊系统的稳定判据。通过式(1-17)可以看出，不等式右侧关于参数 ε 无关，可能会增加不等式的保守性。为了解决此类问题，文献[72]提出如下时滞相关互凸不等式，引入与参数 ε 相关的松弛变量放松不等式的边界

$$\theta_R \geq \begin{bmatrix} R + (1-\varepsilon)X_1 & \varepsilon Y_1 + (1-\varepsilon)Y_2 \\ * & R + \varepsilon X_2 \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

其中，式(1-18)的前提条件参见文献[72]。取 $Y_1 = Y_2$ 和 $X_1 = X_2 = O$ ，时滞相关互凸不等式等价于文献[70]的结果。因此，时滞相关不等式包含了更多的松弛矩阵，具有一般性。文献[73]基于时滞相关互凸不等式，得到时滞系统的稳定条件，利用三个数值算例证明其有效性。基于上述结果，文献[74]提出一种包含矩阵逆的新型互凸不等式。但所得结果需要借助舒尔补定理进行处理。文献[75]基于新型互凸不等式研究了时滞模糊系统的稳定性和稳定化问题。综上，时滞相关互凸不等式在降低判据保守性上具有一定的优势。为了进一步减少凸组合的估计误差，文献[77]通过引入 ε^2 的相关项，得到如下不等式

$$\theta_R \geq \begin{bmatrix} R+T_1 & T_1 \\ * & R+T_3 \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= (1-\varepsilon)X_1 + \varepsilon(1-\varepsilon)X_3, \quad T_2 = \varepsilon Y_1 + (1-\varepsilon)Y_2 + \varepsilon^2 Y_3 + (1-\varepsilon)^2 Y_4, \\ T_3 &= \varepsilon X_2 + \varepsilon(1-\varepsilon)X_4 \end{aligned}$$

通过设定部分矩阵参数，可以证明文献[77]的结果包括时滞相关互凸不等式。文献[78]通过扩展多项式的阶次，得到包含 ε^N 相关项的互凸不等式。基于上述结果，文献[79]提出了一个具有仿射参数的扩展型互凸不等式。该方法在不影响不等式保守性的前提下减少了决策变量的数量，降低了计算复杂度。

(3) 矩阵多项式不等式

积分不等式和互凸不等式在泛函导数的负定性证明中发挥了关键作用，能够有效、准确的估计积分项。利用积分不等式和 L-K 泛函得到的 LMI 条件如果关于时滞 $\tau(t)$ 仿射，那么可直接计算系统的最大时滞上界。但是当高阶积分不等式，如 B-L 积分不等式、辅助函数积分不等式等，结合增广 L-K 泛函时，得到的 LMI 条件很容易出现如下形式^[80]

$$f(\tau(t)) = a_2 \tau^2(t) + a_1 \tau(t) + a_0 \quad (1-20)$$

其中 $a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}^n$ 。矩阵多项式(1-20)无法直接通过仿射关系保证 $f(\tau(t)) < 0$ 成立。因此，如何得到可执行条件以保证泛函导数的负定性成为一个开放性问题。文献[81]通过设定 $a_2 > 0$ 保证了原矩阵多项式的凸性，代入时滞区间的端点保证了泛函导数的负定。然而，这种方法明显给系统稳定判据引入了保守性。文献[57]提出一个改进型矩阵多项式不等式，撤除了 $a_2 > 0$ 的限制条件。文献[82]通过考虑时滞区间端点的几何性质，得到新型二次矩阵多项式不等式。文献[77]通过时滞分割方法，基于切线信息得到参数可调的矩阵多项式不等式，保证了泛函导数的负定性。根据泰勒公式，文献[55]提出了一种宽松的负定性判定方法，包含文献[83]的结果。文献[84]针对时滞相关的二次矩阵多项式提出了基于几何性质的约束条件，通过调节可变参数降低系统判据的保守性。

1.3 主要存在的问题

通过上述文献调查，对于时滞系统稳定性分析问题已经存在大量具有贡献性的研究成果。然而，考虑到时滞信号对系统动态和控制性能造成的恶化，实际工程系

统中时滞信号的分析与处理方面仍存在诸多问题。针对时滞系统稳定性分析研究的不足，本文从以下两个方面进行阐述。

(1) L-K 泛函构造方面

首先，完全 L-K 泛函的构造问题。基于上述研究的现状分析，L-K 泛函的构造是降低系统判据保守性的关键，也是时滞系统稳定性分析的第一步。完全 L-K 泛函基于完全平方函数的构造形式，充分扩大了泛函的求解域。然而，针对完全 L-K 泛函的研究，现有研究成果大多基于状态空间表达，利用时滞分割方法对泛函进行参数化和稳定分析。所得到的系统稳定判据求解难度大，计算复杂度高。对于实际工程系统很难应用上述方法所得到的易于求解的稳定性结果。

其次，增广 L-K 泛函的优化设计问题。复杂控制系统和通讯网络的普遍应用，线性时滞系统常常不能完全表征系统的特性。系统不确定性、非线性扰动和输入时滞等经常被考虑在系统的模型中，例如，具有电动汽车接入的电力系统、具有滞后攻击的网络化控制系统以及时滞非线性系统等。对于此类系统，增广 L-K 泛函具有结构灵活、保守性低，易于设计控制器等优点。然而，现有大部分结果对增广 L-K 泛函的设计主要通过增加积分项、增广项和时滞分割等手段。这些方法对于保守性的改善，随着计算复杂度边际递减。因此，以工程系统为背景，考虑系统及时滞特性改进增广 L-K 泛函，得到保守性较低的稳定判据和控制策略有待进一步研究。

(2) 不等式设计方面

首先，广义互凸不等式的设计和应用问题。由于通讯带宽受限和网络攻击的存在，时变函数常用于描述系统的传输时延。相比于定常时滞，时变时滞对于延迟现象的刻画更加准确。针对时变时滞系统的 L-K 泛函分析，拆分时滞区间是降低保守性的有效方式。互凸不等式技术被用来估计拆分区间的泛函交叉项，得到可直接处理的稳定条件。尽管现有研究已经提出扩展互凸不等式和时滞相关互凸不等式等技术，但其未充分利用松弛变量和时滞相关项，增大了交叉项的估计误差，导致现有互凸不等式技术存在较大的局限性。因此，现有互凸不等式会给系统稳定判据带来额外的保守性。

其次，多项式矩阵不等式的构建问题。依据增广 L-K 泛函和高阶积分不等式得到的稳定判据容易包含 $d^2(t)$ 相关项，构成二次矩阵多项式。判定二次矩阵多项式的负定性也是影响判据保守性的重要因素。然而，现有研究结果没有充分考虑子区域的优化问题。且引入的可调参数区间较大，增加了所得判据的迭代计算时间。因

此, 针对二次矩阵多项式不等式仍存有优化空间。

1.4 本文的研究思路与研究内容

1.4.1 研究思路

通过分析 L-K 泛函和不等式技术方面的不足, 本文针对时滞系统的稳定分析及控制问题, 改进了 L-K 泛函设计, 提出广义互凸不等式, 对线性 and 非线性时滞系统的稳定性分析与控制器设计等问题展开研究。论文的研究思路如图 1-1 所示。

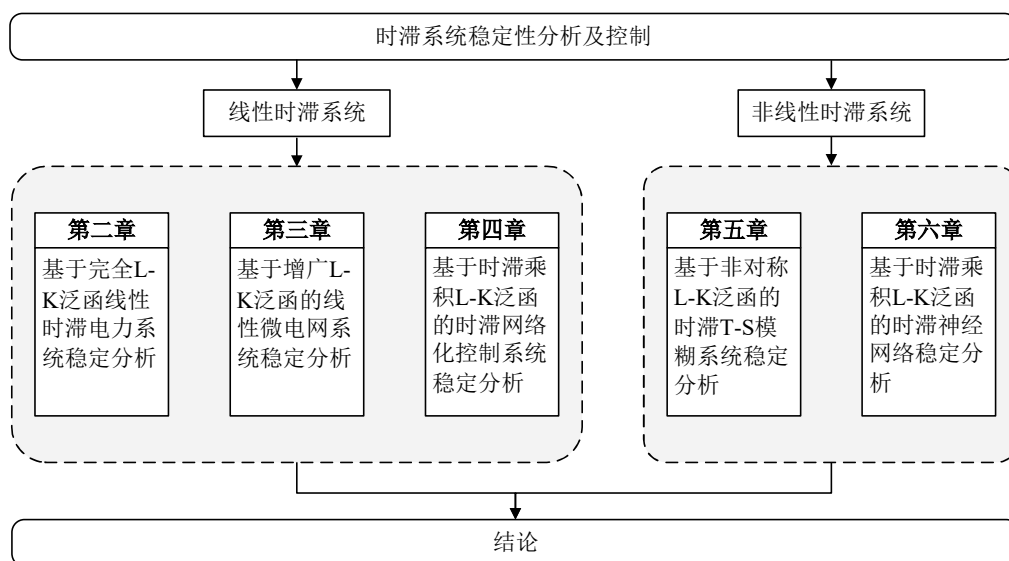


图 1-1 论文研究思路

Fig. 1-1 Research ideas of the dissertation

首先, 阐述了时滞系统稳定性研究的重要性, 并通过现有研究对时滞系统稳定性的研究现状进行了回顾与总结。其次, 第 2、3、4 章设计不同类型 L-K 泛函, 针对线性时滞系统的稳定性问题展开研究。第 2 章基于完全 L-K 泛函研究了线性时滞电力负载频率控制系统的稳定分析问题。第 3 章提出具有加性时滞的线性微电网系统, 基于增广 L-K 泛函得到系统稳定判据。基于增广 L-K 泛函设计方法, 第 4 章建立时滞乘积 L-K 泛函, 研究了时滞网络化控制系统的稳定分析及控制器设计问题。最后, 第 5、6 章研究了非线性时滞系统的稳定性。第 5 章构建广义互凸不等式, 设计非对称 L-K 泛函, 提出时滞 T-S 模糊系统的稳定条件及控制方法。第 6 章设计新型时滞乘积 L-K 泛函和增广 L-K 泛函, 针对具有时变时滞的非线性神经网络系统, 提出保守性较低的稳定判据。

1.4.2 研究内容

本文基于改进 L-K 泛函方法研究了几类工程时滞系统的稳定性分析问题。针对前节阐述的 L-K 泛函设计与导数估计中存在的不足,改进 L-K 泛函的设计方法,构建不等式,降低系统稳定判据的保守性。本文各章的内容安排如下:

第 2 章研究了具有传输时滞的线性互联 LFC 系统的稳定性问题。针对互联 LFC 系统和具有电动汽车并网的新型 LFC 系统,依据基础状态和 PI 算子,建立分布式参数系统。然后,建立完全 L-K 泛函,得到基于 PI 算子不等式的稳定条件。通过 PIE 工具箱求解所得算子不等式,分析系统时滞稳定上界与控制参数的关系。数值算例和仿真实验验证结果的精确度和有效性。

第 3 章研究了具有加性时滞和外部扰动的微电网系统稳定性问题。基于上章的研究对象,考虑新能源发电技术的集成,提出具有非线性扰动的时滞微电网系统。针对系统传输网络具有的加性时滞,通过增广时滞状态与系统状态信息,构建新型增广 L-K 泛函,得到保守性较低的稳定条件。利用所提判据分析时滞上界、控制参数与扰动参数与系统稳定性的关系。最后,仿真案例表明了所提泛函的低保守性和稳定结果的有效性。

第 4 章研究了具有不确定性和输入时滞的网络化控制系统的稳定分析及应用。本章构建新型时滞乘积 L-K 泛函,丰富泛函中的时滞信息。为了确保泛函导数的负定性,提出新型二次矩阵多项式不等式。通过调整优化引入的参数,所提不等式包括部分现有方法作为特例。基于所提时滞乘积 L-K 泛函和多项式不等式,建立保守性较低的 H_∞ 稳定判据和控制器设计策略。

第 5 章研究了非线性时滞 T-S 模糊系统的稳定分析及控制设计问题。为了放松泛函矩阵变量正定限制条件,本章提出一类新型非对称 L-K 泛函,通过积分不等式保证泛函的正定性。为了减少泛函交叉项的估计误差,本章引入更多的矩阵变量,构建一种广义互凸不等式,其包含一些现有结果。结合提出的非对称 L-K 泛函和互凸不等式,建立新型系统稳定判据和控制器设计方法。

第 6 章研究了非线性时滞神经网络系统的稳定性分析问题。结合上章提出的广义互凸不等式,本章将其推广应用到神经网络系统的稳定性分析中。为了放松系统时滞稳定上界,本章改进了增广 L-K 泛函和时滞乘积 L-K 泛函,使其涵盖更多的时滞相关和积分项。基于新型 L-K 泛函和广义互凸不等式,改进系统稳定条件的保守

性。最后，通过数值算例表明稳定条件的优越性和低保守性。

最后，总结本文研究内容，针对本文研究的不足和问题，指出了时滞系统领域未来的研究方向。

第2章 改进完全 L-K 泛函的线性时滞电力系统稳定分析

析

本章研究具有传输时滞 LFC 系统的稳定性分析问题，建立了基于 PI 算子不等式的稳定判据。首先，考虑多区域互联时滞 LFC 系统和电动汽车接入的新型时滞 LFC 系统，构建基于 PI 算子的分布式参数系统。然后，构建完全 L-K 泛函，得到基于 PI 算子不等式的系统稳定条件。最后，通过 PIE 工具箱求解所提判据，分析系统控制参数与时滞稳定上界间的相互关系。

2.1 引言

电网频率是电力系统稳定运行的重要标准之一。电网频率的频繁波动可能会降低电力系统的机械功率，影响电网系统的动态性能和稳定运行。负载频率控制系统借助广域测量系统获取电网运行信息，通过调节电网系统的电力供需，将电网频率动态的维持在期望值。大规模多区域 LFC 系统中的测量信息和控制信息需要依靠开放式通讯网络进行传输，这类传输策略能够以较低的功耗实现信息的双向传输。然而，开放式通讯网络会导致测量和控制信号在监测和传输过程中出现等待、阻塞和丢包等情况，称为时滞现象。测量信号的延迟易导致信息传输时序错乱或数据包丢失、多包传输等问题。控制信号的延迟易导致系统控制器失效，造成电网系统的崩溃或性能下降。因此，准确估计电力系统的时滞稳定区间能够有效指导 LFC 系统的控制器设计，具有重要的现实意义。

具有开放式通信网络的 LFC 系统是一个典型的时滞系统^[85]。基于状态空间表示方法，泛函微分方程是描述具有传输时滞 LFC 系统最常用的方法之一。文献[86]研究了具有 PI 控制器的单区域和多区域 LFC 系统的稳定性问题。文献[37]构造新型增广 L-K 泛函，分析市场环境下系统时滞稳定上界和控制增益与系统稳定性的关系。文献[87]针对时滞单区域 LFC 系统，利用互凸不等式，得到系统鲁棒稳定条件。文献[67]研究了具有传输时延和非线性干扰的多区域 LFC 系统，运用 B-L 积分不等式建立了较低保守性的稳定判据。文献[62]提出一种模型重构的方法，结合 Wirtinger

积分不等式技术, 得到计算复杂度较低的系统稳定判据。综上, 针对时滞 LFC 系统的稳定性研究, 现有文献基于泛函微分方程取得了许多建设性成果。然而, 构造 L-K 泛函只能依靠研究者的经验, 依靠积分不等式估计交叉项, 不可避免的增加了稳定判据的保守性。完全 L-K 泛函结合偏积分 PI 算子能够有效避免了 L-K 泛函的构建和估计问题。借助 PI 算子和基础状态可将时滞微分方程表达的时滞系统转化为偏积分方程(Partial Integral Equation, PIE)的形式^[31]。文献[32]首次提出基础状态的概念, 利用 PI 算子和基础状态概念描述时滞微分方程。文献[88]提出 PIE 工具箱能够高效地构造和求解 PI 算子不等式。针对多重时滞系统, 文献[31]研究了系统的稳定性问题, 提出保守性较低的时滞相关稳定判据。通过构建完全 L-K 泛函来分析系统的稳定性, 分析过程不涉及积分不等式技术的使用, 因此所得结果几乎不包含保守性。可以说线性算子理论为时滞多区域 LFC 系统的稳定性分析提供了新思路。

电动汽车在电力系统的大规模部署, 有利于提高电网对不稳定发电技术的消纳能力, 增强系统的可靠性, 灵活性和协调多种发电资源得能力。电动汽车通过双向电力电子技术接入电网参与 LFC 系统的一次调频和二次调频, 通过模拟调速器和提供发电电源, 抑制因多资源发电并网引起的电网频率波动, 以协助发电厂快速响应以达到预期要求。具有电动汽车接入的 LFC 系统受到多方面研究者的关注。文献[89]引入具有 H_∞ 性能的鲁棒控制方案到多区域电力系统中, 确保汽车充电策略优化下 LFC 系统的稳定性。针对具有网络欺骗攻击的单区域 LFC 系统, 文献[90]提出具有记忆效应的 H_∞ 控制器, 确保网络攻击下系统的稳定性。文献[91]采用事件触发控制策略, 研究了具有电动汽车接入 LFC 系统的稳定性问题。文献[92]分析了具有电动汽车接入和传输延迟的单区域 LFC 系统。电动汽车的大规模接入有利于 LFC 系统抑制负荷变化引起的频率震荡。因此, 基于 PI 算子研究具有电动汽车接入和传输时滞的多区域 LFC 系统是本章的研究动机。

本文研究了时滞多区域 LFC 系统和具有电动汽车接入 LFC 系统的稳定性问题。首先, 依据 PI 算子和基础状态, 构建 PIE 表示的时滞多区域 LFC 系统模型。然后, 构建完全 L-K 泛函并以 PI 算子内积的形式给出, 避免使用积分不等式技术。基于李雅普诺夫方法获得保守性较低的稳定判据, 结合 PIE 工具箱得到系统的时滞稳定上界, 进一步分析时滞稳定上节与控制增益的关系。最后, 数值算例验证了所提方法的低保守性。

2.2 互联 LFC 系统稳定分析

2.2.1 互联 LFC 系统描述

本节首先回顾了具有传输时滞的互联 LFC 系统模型，其结构如图 2-1 所示。

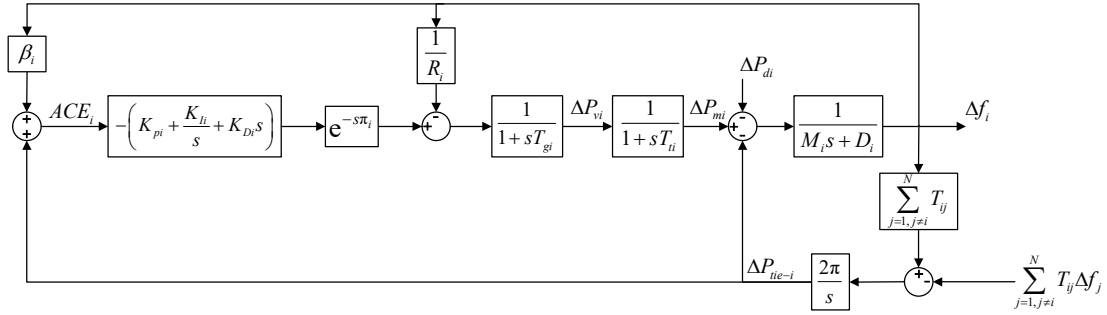


图 2-1 时滞多区域 LFC 系统框图

Fig. 2-1 Scheme diagram of delayed Multi-area LFC system

其中， ΔP_{vi} ， ΔP_{di} ， ΔP_{mi} 和 Δf_i 分别代表 i 区域的汽轮机阀门位置变化量，负荷扰动，机械输出功率和系统频率偏差。 M_i 和 D_i 分别是 i 区域发电机的转动惯量和阻尼系数。 T_{ti} 和 T_{gi} 分别表示 i 区域汽轮机和机组调速器的惯性时间常数， T_{ij} 代表区域 i 和区域 j 间联络线的同步系数， ΔP_{tie-i} 和 $ACE_i(t)$ 表示区域 i 联络线上的净交换功率偏差和区域控制误差。为方便分析，使用静态输出反馈控制策略代替 PID 控制策略，可得互联 LFC 系统模型如下：

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - \tau_i) + F \Delta P_d(t) \quad (2-1)$$

其中， A_0 ， A_i 和 F 为给定的系统矩阵， $x = [x_1, \dots, x_N]^T \in \mathbf{R}^N$ 是系统向量， $x(t - \tau_i)$ 代表系统传输时滞，具体系统参数如下：

$$\begin{aligned} x_i^T &= [\Delta f_i, \Delta P_{tie-i}, \Delta P_{mi}, \Delta P_{vi}, \int ACE_i(t) dt] \\ A_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ A_{di1} \cdots A_{diN} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \\ F &= \text{diag}\{F_1, \dots, F_N\}, \quad \Delta P_d(t) = [\Delta P_{d1}, \Delta P_{d2}, \dots, \Delta P_{dN}]^T \\ A_{ii} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \mathbf{0} \\ \hat{C}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ A_{dii} &= -B_i K_i C_i, \quad A_{dij} = -B_i K_i C_{ij} \end{aligned}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{T_{gi}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad C_i = \begin{bmatrix} \hat{C}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \\ \hat{C}_i \hat{A}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{C}_i \hat{A}_{ij} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_i = [\beta_i, 1, 0, 0], \quad T_{ij} = T_{ji}$$

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} -\frac{D_i}{M_i} & -\frac{1}{M_i} & \frac{1}{M_i} & 0 \\ 2\pi \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ii}} & \frac{1}{T_{ii}} \\ -\frac{1}{T_{gi} R_i} & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{gi}} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\pi T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

多区域互联 LFC 系统依托联络线实现各区域的功率交换，因此，净交换功率满足如下

$$\sum_{i=1}^N \Delta P_{tie-i} = 0 \quad (2-2)$$

根据文献[62]可得，扰动不会影响 LFC 系统的内部稳定性。因此，互联多区域 LFC 系统的稳定性研究可基于如下多重时滞系统的形式

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - \tau_i) \quad (2-3)$$

其中，时滞满足 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_N$ 。

然后，根据时滞微分方程表示的 LFC 系统模型(2-3)，推导出基于 PIE 的系统模型。引入 PI 算子的定义。

定义 **2-1**^[32] 对于线性算子 $H \begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix} : \mathbf{R}^m \times \mathbf{L}_2^n[-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^p \times \mathbf{L}_2^q[-1, 0]$ ，具有如下形式：

$$\left(H \begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} \right)(s) := \begin{bmatrix} Px + \int_{-1}^0 Q_1(s) \psi(s) ds \\ Q_2(s)x + \Xi(R_i, \psi) \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

其中， $\Xi(R_i, \psi) = R_0(s)\psi(s) + \int_{-1}^s R_1(s, \eta)\psi(\eta)d\eta + \int_s^0 R_2(s, \eta)\psi(\eta)d\eta$ ，矩阵 $P \in \mathbf{R}^{p \times m}$ ，矩阵函数 $Q_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbf{W}_2^{p \times n}$ ， $Q_2 : [-1, 0] \rightarrow \mathbf{W}_2^{q \times m}$ ， $R_0 : [-1, 0] \rightarrow \mathbf{W}_2^{q \times n}$ ， $R_1, R_2 : [-1, 0] \times [-1, 0] \rightarrow \mathbf{W}_2^{q \times n}$ ，则称算子 H 为 PI 算子。

根据文献[32]可知 PI 算子是正定且自伴的，可以通过采用矩阵值函数进行参数化。引理 2-1 给出了 PI 算子的参数化方法。

引理 2-1^[93]：对任意多项式矩阵函数 $G_1: [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^{m_1 \times n}$ ， $G_2: [-1, 0] \times [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^{m_2 \times n}$ 和函数 $f(s) \geq 0 (s \in [-1, 0])$ ，定义

$$\begin{aligned} P &= S_{11} \int_{-1}^0 f(s) ds \\ Q &= f(s) S_{12} G_1(s) + \int_s^0 f(\eta) S_{13} G_2(\eta, s) ds + \int_{-1}^s f(\eta) S_{14} G_2(\eta, s) ds \\ R_0(s) &= f(s) G_1^T(s) S_{22} G_1(s) \\ R_1(s, \eta) &= f(s) G_1^T(s) S_{23} G_2(s, \eta) + f(\eta) G_2^T(\eta, s) S_{42} G_1(\eta) \\ &\quad + \int_s^0 f(\theta) G_2^T(\theta, s) S_{33} G_2(\theta, \eta) d\theta \\ &\quad + \int_\eta^s f(\theta) G_2^T(\theta, s) S_{43} G_2(\theta, \eta) d\theta \\ &\quad + \int_{-1}^\eta f(\theta) G_2^T(\theta, s) S_{44} G_2(\theta, \eta) d\theta \\ R_2(s, \eta) &= f(s) G_1^T(s) S_{32} G_2(s, \eta) + f(\eta) G_2^T(\eta, s) S_{24} G_1(\eta) \\ &\quad + \int_\eta^0 f(\theta) G_2^T(\theta, s) S_{33} G_2(\theta, \eta) d\theta \\ &\quad + \int_s^\eta f(\theta) G_2^T(\theta, s) S_{34} G_2(\theta, \eta) d\theta \\ &\quad + \int_{-1}^s f(\theta) G_2^T(\theta, s) S_{44} G_2(\theta, \eta) d\theta \end{aligned}$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \geq 0$$

且 $S_{11} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ， $S_{22} \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_1}$ ， $S_{33} \in \mathbf{R}^{m_2 \times m_2}$ ，和 $S_{44} \in \mathbf{R}^{m_3 \times m_3}$ ，则对任意 $\begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}(s) \in Z_{m,n}$ ，

PI 算子满足

$$H \begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix} > 0 \quad (2-5)$$

本章目标是构建基于 PI 算子不等式的系统稳定判据。目前 PIE 工具箱可以直接优化求解 PI 算子不等式条件，因此，本文仅提供正定 PI 算子的参数化方法，逆 PI 算子等参数化方法可参考文献[94]。

定义如下函数

$$\psi_i(t, s) = x(t + s\tau_i), s \in [-1, 0] \quad (2-6)$$

$\psi_i(t, s)$ 可以表示系统时滞信道的历史状态，边界条件如下：

$$\psi_i(t, 0) = x(t), \quad \psi_{is}(t, s) = \frac{1}{\tau_i} \psi_{is}(t, s) \quad (2-7)$$

根据微积分基本定理，可得

$$\begin{cases} \psi_i(t, s) = \psi_i(t, 0) - \int_s^0 \psi_{is}(t, \eta) d\eta \\ \psi_i(t, -1) = x(t - \tau_i) \end{cases} \quad (2-8)$$

定义

$$\psi(t, s) = [\psi_1^T(t, s), \psi_2^T(t, s), \dots, \psi_N^T(t, s)]^T \quad (2-9)$$

结合式(2-6)至式(2-9)，可得

$$\bar{I}\dot{x}(t) - \int_s^0 \dot{\psi}_s(t, \eta) d\eta = H\psi_s(t, s) \quad (2-10)$$

其中

$$H = \text{diag}\left\{\frac{1}{\tau_1}I, \dots, \frac{1}{\tau_N}I\right\}, \quad \bar{I} = [I, \dots, I]^T \quad (2-11)$$

将式(2-8)代入式(2-3)，可得：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - \tau_i) \\ &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^N A_i (x(t) - \int_{-1}^0 \psi_{is}(t, \eta) d\eta) \\ &= \bar{A}_0x(t) - \int_{-1}^0 \bar{A}_i(s) \psi_s(t, s) ds \end{aligned} \quad (2-12)$$

其中， $\bar{A}_0 = A_0 + \sum_{i=1}^N A_i$ ， $\bar{A}_i = [A_i, \dots, A_N]$ 。

根据文献[32]，引入基础状态变量 $x_f = [x^T(t), \psi_s^T(t, s)]^T \in \mathbf{Z}_{m, n, K}$ 。系统(2-3)能够重写为如下耦合形式。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \Xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0x(t) - \int_{-1}^0 \bar{A}_i(s) \psi_s(t, s) ds \\ H\psi_s(t, s) \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

其中， $\Xi = \bar{I}\dot{x}(t) - \int_s^0 \dot{\psi}_s(t, \eta) d\eta$ 。

综合式(2-12)-式(2-13)，定义 PI 算子 $T: \mathbf{Z}_{n, nN} \rightarrow \mathbf{Z}_{n, nN}$ 和 $A: \mathbf{Z}_{n, nN} \rightarrow \mathbf{Z}_{n, nN}$ ，互联 LFC 系统(2-3)重述为如下 PIE 表达

$$T\dot{x}_f(t) = Ax_f(t) \quad (2-14)$$

$$\text{其中 } A = H \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & -\bar{A}_1 \\ 0 & \{H, 0, 0\} \end{bmatrix}, \quad T = H \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{I} & \{0, 0, -I_{nk}\} \end{bmatrix}.$$

当 $\psi(t, s)$ 满足边界条件式(2-7)时, 系统(2-14)的状态完全等价于系统(2-3), 即两种系统表达方式具有相同的解 $x(t)$ 。所以对于互联 LFC 系统(2-3)的稳定性分析问题可以通过研究系统(2-14)获得。

基于泛函微分方程的 LFC 系统中包含了隐式动态 $x(t - \tau_i)$, 加大了系统稳定性分析的难度。而基于 PIE 表达的 LFC 系统通过边界条件式(2-7)和状态 $\psi(t, s)$ 定义系统隐式动态, 使得系统形式更接近于线性系统, 简化了系统的稳定性分析过程, 有利于得到更符合工程实际的系统稳定判据。

2.2.2 互联 LFC 系统稳定分析

本节给出基于 PI 算子不等式的时滞多区域 LFC 系统的稳定判据。依据上节得到的 LFC 系统 PIE 模型, 构建完全 L-K 泛函, 得到系统稳定判据。利用 PIE 工具箱对稳定约束条件进行优化求解, 计算系统的时滞稳定上界。

定理 2-1: 如果存在 PI 算子 H , 对于给定标量 $\tau_i (i=0, 1, \dots, N)$, 使得以下算子不等式成立

$$T^*HA + A^*HT < 0 \quad (2-15)$$

则系统(2-3)是渐近稳定的。

证明: 建立如下完全 L-K 泛函

$$V(x_f) = \langle Tx_f, HTx_f \rangle_Z \quad (2-16)$$

PI 算子 A, T 如式(2-14)所示, 由于 PI 算子是正定算子, 所以对于任意 ε , $V(x_f) \geq \varepsilon \|x_f\|^2$ 成立。对 $V(x_f)$ 求导可得。

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_f) &= \langle Tx_f, HAx_f \rangle_Z + \langle Ax_f, HTx_f \rangle_Z \\ &= \langle x_f, (T^*HA + A^*HT)x_f \rangle_Z \end{aligned} \quad (2-17)$$

由式(2-15)可得, $\dot{V}(x_f) < 0$ 。即系统(2-3)是渐近稳定的。

注 2-1: 本章首先建立互联时滞 LFC 系统的分布式参数系统模型, 基于 PI 算子设计完全 L-K 泛函, 以算子不等式技术给出系统稳定判据。基于时滞相关 L-K 泛函方法, 不可避免使用积分不等式处理交叉项。然而, 不等式技术的本质是对泛函导数的近似估计, 被动引入保守性到稳定判据。本章所提完全 L-K 泛函无需借助积分

不等式技术，因此所提出的稳定判据具有较低的保守性。

关于定理 2-1 中 PI 算子不等式的求解可以利用 PIE 工具箱。首先，根据系统方程与参数构建基于 PIE 表达的系统模型。设定时滞 τ_i 的初始值，通过 PIE 工具箱迭代求解算子不等式是否存在可行解，进而判断系统的渐近稳定性。本节给出求解时滞稳定上界的计算流程图，如图 2-2 所示。

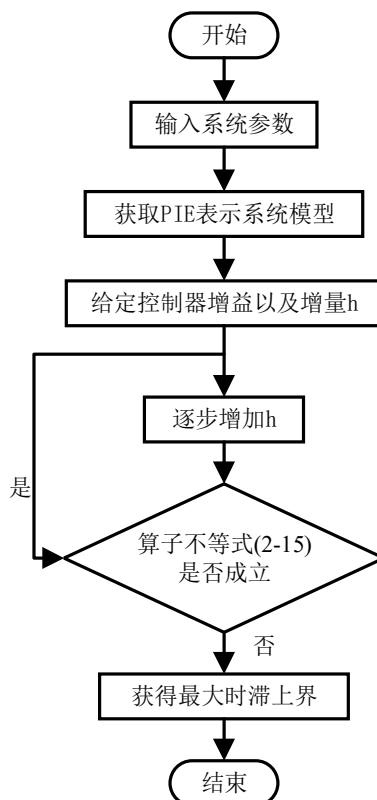


图 2-2 时滞稳定上界的计算流程图

Fig. 2-2 Flowchart for calculating delay stability margins

2.3 新型时滞 LFC 系统稳定分析

基于上节提出的互联 LFC 系统，本节建立具有电动汽车接入和传输时滞的新型多区域 LFC 系统，得到系统的 PIE 表示。设计完全 L-K 泛函处理系统不确定性，得到新型 LFC 系统的时滞相关稳定判据。

2.3.1 新型时滞 LFC 系统描述

根据互联 LFC 系统结构，在每个控制区域中考虑电动汽车接入，得到具有电动汽车接入的新型 LFC 系统。图 2-3 展示了新型 LFC 系统的第 i 个区域结构。 α_{i1} 和

α_{i2} 表示不同发电设备的参与系数。 T_{ei} 和 K_{ei} 分别表示电动汽车一阶模型的时间常数和增益。

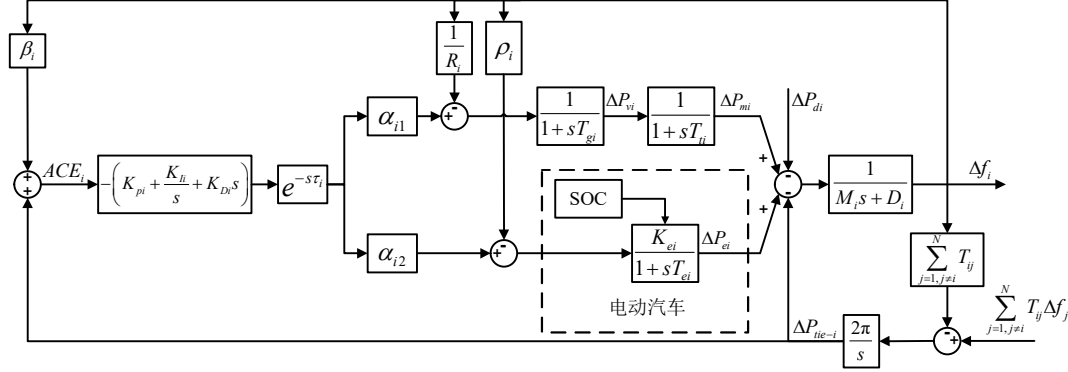


图 2-3 考虑电动汽车的新型时滞 LFC 系统框图

Fig. 2-3 Structure of the new LFC system with EVs and time delays

图 2-3 考虑了具有电池充电管理系统的电动汽车并网。然而，并非所有电动汽车都配备电池管理系统。采用 η 代表具有电池管理系统的电动汽车占比。则参数 K_{ei} 设计为

$$K_{ei} = \bar{K}_{ei} - \eta \bar{K}_{ei} g(t) \quad (2-18)$$

$g(t)$ 是一类连续函数，其满足条件 $0 \leq g(t) \leq 1$ 。则第 i 个区域系统如下

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = (A_i + \Delta A_i)x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}x_j(t) + (B_i + \Delta B_i)u_i(t - \tau_i) + F_i \Delta P_{di}(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (2-19)$$

其中

$$x_i(t) = [\Delta f_i \quad \Delta P_{tie-i} \quad \Delta P_{mi} \quad \Delta P_{vi} \quad \Delta P_{ei}]^T, \quad y_i(t) = ACE_i(t)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11i} = \begin{bmatrix} -\frac{D_i}{M_i} & -\frac{1}{M_i} & \frac{1}{M_i} \\ 2\pi \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ti}} \end{bmatrix}, \quad \Delta A_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\rho_i \bar{K}_{ei} \eta g(t)}{T_{ei}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{T_{ii}} \\ \frac{1}{M_i} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad A_{21i} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{gi}R_i} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_i \bar{K}_{ei}}{T_{ei}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22i} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{gi}} & 0 \\ 0u & -\frac{1}{T_{ei}} \end{bmatrix} \\
 B_i^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{i1}}{T_{gi}} & \frac{\alpha_{i2} \bar{K}_{ei}}{T_{ei}} \end{bmatrix}, \quad \Delta B_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\eta \bar{K}_{ei} \alpha_{i2} g(t)}{T_{ei}} \end{bmatrix} \\
 F_i^T &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{M_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = [\beta_i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
 \end{aligned}$$

采用静态输出反馈策略，可得单区域闭环 LFC 系统如下

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_i &= (\hat{A}_{ii} + \Delta \hat{A}_{ii}) \hat{x}_i(t) + (\hat{A}_{dii} + \Delta \hat{A}_{dii}) \hat{x}_i(t - \tau_i) \\
 &+ \sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{A}_{ij} \hat{x}_j(t) + (\hat{A}_{dij} + \Delta \hat{A}_{dij}) \hat{x}_j(t - \tau_i)) + \hat{F}_i \Delta P_d(t)
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{ii} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{A}_{ii} = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \Delta \hat{A}_{dii} &= -\Delta \hat{B}_i K_i \hat{C}_i, \quad \Delta \hat{A}_{dij} = -\Delta \hat{B}_i K_i \hat{C}_{ij} \\
 \hat{A}_{dii} &= -\hat{B}_i K_i \hat{C}_i, \quad \hat{A}_{dij} = -\hat{B}_i K_i \hat{C}_{ij} \\
 \hat{F}_i &= \bar{F} - \hat{B}_i K_i \hat{D}_i - \Delta \hat{B}_i K_i \hat{D}_i, \quad \bar{F}^T = \begin{bmatrix} F_i^T & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{B}_i^T &= \begin{bmatrix} B_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{B}_i^T = \begin{bmatrix} \Delta B_i & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{C}_i &= \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & 1 \\ C_i A_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C_i A_{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_i F_i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

定义 $x = [\hat{x}_1^T, \dots, \hat{x}_N^T]^T$ ，根据式(2-20)可得，具有电动汽车接入和传输时滞的新型 LFC 系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + \sum_{i=1}^N (A_{di} + \Delta A_{di})x(t - \tau_i) + F \Delta P_d(t) \tag{2-21}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{N1} & \cdots & \hat{A}_{NN} \end{bmatrix}, \quad A_{di} = \begin{bmatrix} 0_{6(i-1) \times 6N} \\ \hat{A}_{di1}, \dots, \hat{A}_{diN1} \\ 0_{6(N-i) \times 6N} \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_{di} = \begin{bmatrix} 0_{6(i-1) \times 6N} \\ \Delta \hat{A}_{di1}, \dots, \Delta \hat{A}_{diN} \\ 0_{6(N-i) \times 6N} \end{bmatrix}, \quad \Delta P_d(t) = \begin{bmatrix} \Delta P_{d1}(t) \\ \vdots \\ \Delta P_{dN}(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta A = \text{diag}\{\Delta \hat{A}_{11}, \dots, \Delta \hat{A}_{NN}\}, \quad F = \text{diag}\{\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_N\}$$

根据系统外部扰动的特点，其不会影响 LFC 系统的内部稳定性。因此，新型 LFC 系统的稳定性分析可以基于如下系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + \sum_{i=1}^N (A_{di} + \Delta A_{di})x(t - \tau_i) \quad (2-22)$$

注 2-2: 本节构建了一类具有电动汽车接入和传输时滞的新型 LFC 系统，充分考虑了汽车电池充电管理系统的部署，提高了 LFC 系统模型的一般性。文献[89]仅考虑了具有电动汽车接入的单区域 LFC 系统，而实际电网系统具有多区互联的模式。文献[90]和[91]研究了不具备电池充电管理系统的电动汽车接入 LFC 系统。因此，本节所提新型 LFC 系统更具一般性，文献[89-91]的模型均可视为本节所提系统的特殊情况。

根据 PI 算子定义，系统(2-22)可以转换为如下形式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + \sum_{i=1}^N (A_{di} + \Delta A_{di})x(t - \tau_i) \\ &= (A + \Delta A)x(t) + \sum_{i=1}^N (A_{di} + \Delta A_{di})(x(t) - \int_{-1}^0 \psi_{is}(t, \eta) d\eta) \\ &= \bar{A}_0 x(t) - \int_{-1}^0 \bar{A}_1 \psi_s(t, s) ds + \Delta \bar{A}_0 x(t) - \int_{-1}^0 \Delta \bar{A}_1 \psi_s(t, s) ds \end{aligned} \quad (2-23)$$

其中

$$\bar{A}_0 = A + \sum_{i=1}^N A_{di}, \quad \bar{A}_1 = [A_{d1}, \dots, A_{dN}], \quad \Delta \bar{A}_0 = \Delta A + \sum_{i=1}^N \Delta A_{di}, \quad \Delta \bar{A}_1 = [\Delta A_{d1}, \dots, \Delta A_{dN}]$$

定义基础状态变量 $x_f = [x^T(t), \psi_s^T(t, s)]^T \in \mathbf{Z}_{m,n,K}$ 。基于式(2-10)和式(2-23)，系统(2-22)可重写为如下耦合形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \bar{I}\dot{x}(t) - \int_s^0 \dot{\psi}_s(t, \eta) d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{A}_0 + \Delta \bar{A}_0)x(t) - \int_{-1}^0 (\bar{A}_1 + \Delta \bar{A}_1)\psi_s(t, s) ds \\ \Upsilon \psi_s(t, s) \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

定义 PI 算子 $\mathcal{T}: \mathbf{Z}_{n,nN} \rightarrow \mathbf{Z}_{n,nN}$ 和 $\mathcal{A}: \mathbf{Z}_{n,nN} \rightarrow \mathbf{Z}_{n,nN}$ ，耦合系统(2-24)可以直接转换为 PIE 形式，如下：

$$\mathcal{T}x_f(t) = \mathcal{A}x_f(t) \quad (2-25)$$

其中

$$\mathcal{T} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{I} & \{0, 0, -I\} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 + \Delta \bar{A}_0 & \bar{A}_1 + \Delta \bar{A}_1 \\ 0 & \{\Upsilon, 0, 0\} \end{bmatrix}$$

2.3.2 新型时滞 LFC 系统稳定分析

本节依据 PIE 形式的多区域 LFC 系统，构建完全 L-K 泛函，以线性算子不等式的形式给出具有较低保守性的系统稳定判据。

定理 2-2: 对于给定的时滞 $\tau_i (i=0, 1, \dots, N)$ 和 $g \in \{0, 1\}$ ，若存在正定 PI 算子 \mathcal{P} 使得如下算子不等式成立

$$\mathcal{T}^* \mathcal{P} (\mathcal{A}_1 + g \mathcal{A}_2) + (\mathcal{A}_1 + g \mathcal{A}_2)^* \mathcal{P} \mathcal{T} < 0 \quad (2-26)$$

则系统(2-25)是渐近稳定的。

证明：建立如下完全 L-K 泛函

$$V(x_f) = \langle \mathcal{T}x_f, \mathcal{P}\mathcal{T}x_f \rangle_Z \quad (2-27)$$

通过计算 $V(x_f)$ 的导数，得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_f) &= \langle \mathcal{T}x_f, \mathcal{P}\mathcal{A}x_f \rangle_Z + \langle \mathcal{A}x_f, \mathcal{P}\mathcal{T}x_f \rangle_Z \\ &= \langle x_f, \mathcal{T}^* \mathcal{P}\mathcal{A}x_f \rangle_Z + \langle x_f, \mathcal{A}^* \mathcal{P}\mathcal{T}x_f \rangle_Z \\ &= \langle x_f, (\mathcal{T}^* \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{A}^* \mathcal{P}\mathcal{T})x_f \rangle_Z \end{aligned} \quad (2-28)$$

具有不确定性的 PI 算子 \mathcal{A} 满足以下条件

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + g(t) \mathcal{A}_2 \quad (2-29)$$

其中

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{P} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \\ 0 & \{\Upsilon, 0, 0\} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{P} \begin{bmatrix} \Delta \bar{A}_0 & \Delta \bar{A}_1 \\ 0 & \{0, 0, 0\} \end{bmatrix}$$

根据式(2-29)可得，算子 \mathcal{A} 是 \mathcal{A}_1 和 \mathcal{A}_2 的凸组合。如果存在正定算子 \mathcal{P} 对于 $g \in \{0, 1\}$ 满足式(2-26)，则 $\dot{V}(x_f) \leq 0$ 成立，那么具有电动汽车接入和传输时滞的新型 LFC 系统对 $\tau_i (i=0, 1, \dots, N)$ 是渐近稳定的。

注 2-3: 电动汽车的接入给 LFC 系统引入了不确定性 $\Delta A x(t)$ 和 $\Delta A_{di} x(t - \tau_i)$ ，定理 2-2 基于完全 L-K 泛函，给出基于 PI 算子不等式的系统稳定判据。相比于时滞相关 L-K 泛函，无需设计复杂的泛函和积分不等式。所构建的稳定条件结构简单，计算方便，有利于处理了新型 LFC 系统的稳定分析问题。

注 2-4: 根据引理 2-1，PI 算子可以利用矩阵值函数进行参数化。PIE 工具箱提供了构造和参数化 PI 算子的交互界面，可将 PI 算子不等式转化为一系列线性凸优

化问题, 高效求解算子不等式。基于所提出的方法, 本节给出新型 LFC 系统的时滞稳定上界计算步骤, 如下:

步骤 1: 建构 LFC 系统模型。通过分析系统构成组件(如非再热汽轮机、调速器等), 得到相应的系统模型参数。

步骤 2: 设计闭环系统。根据所得时滞微分方程, 将系统转化为基于 PI 算子的 PIE 表达。

步骤 3: 计算时滞稳定上界。根据定理 2-2, 构建 PI 算子, 设计算子不等式约束条件, 利用二分查找法得到 LFC 系统的时滞稳定上界。

步骤 4: 仿真实验。搭建系统仿真模型, 利用仿真结果验证所得时滞稳定上界的准确性。

2.4 数值算例

基于上节提出的定理 2-1 和定理 2-2, 本节分别对互联 LFC 系统和新型 LFC 系统进行仿真研究。通过数值算例和仿真结果表明所提判据的有效性和低保守性。根据文献[37]、[38]和[62], 表 2-1 给出了常用的多区域 LFC 系统参数。在不同参数下计算系统的时滞稳定上界, 通过与现有文献进行对比, 表明本文所提方法对系统稳定判据保守性的改善。

表 2-1 LFC 系统参数

Table 2-1 LFC system parameters

	T_t	T_g	R	D	β	M	T_{12}
区域 1	0.3	0.1	0.05	1	21	10	0.1986
区域 2	0.4	0.17	0.05	1.5	21.5	12	

2.4.1 单区域 LFC 系统稳定性分析

针对时滞单区域 LFC 系统, 结合定理 2-1 和 PIE 工具箱, 得出系统时滞稳定上界。与文献[38]的结果进行比较, 如表 2-2 所示。根据表 2-2 中数据可得, 相同控制增益下, 定理 2-1 所得的时滞稳定上界优于文献[38]的结果, 表明了本文所提稳定判据的低保守性。

其次, 基于定理 2-1, 设置不同的控制器增益 $K_p \in [0, 1]$ 和 $K_I \in [0, 1]$, 获得相应的时滞稳定上界, 如表 2-3 所示。由此可得控制增益与系统最大容许时滞的关系。

表 2-2 单区域时滞 LFC 系统的最大时滞上界

Table 2-2 The maximum delay boundary for delayed one-region LFC system

K_p	K_I	文献[38]	定理 2-1	K_p	K_I	文献[38]	定理 2-1
0.20	0.05	30.39	34.22	0.60	0.10	12.30	17.19
0.40	0.05	26.38	35.83	0.60	0.15	8.94	11.27
0.60	0.05	20.69	34.92	0.60	0.20	7.05	8.31
0.10	0.10	16.06	16.11	0.80	0.10	8.92	14.29
0.20	0.10	16.43	16.85	0.80	0.15	6.57	9.39
0.40	0.10	15.09	17.65	0.80	0.20	5.18	6.86

表 2-3 不同控制器增益下时滞单区域 LFC 的时滞稳定上界

Table 2-3 The maximum delay boundary for LFC system at different controller gains

K_p	K_I						
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.40	0.60	1.00
0	30.91	15.20	9.95	7.33	3.38	2.04	0.92
0.05	31.87	15.68	10.27	7.57	3.50	2.12	0.97
0.10	32.75	16.11	10.57	7.79	3.61	2.19	1.01
0.20	34.22	16.85	11.06	8.16	3.79	2.31	1.07
0.40	35.83	17.65	11.59	8.55	3.98	2.42	1.11
0.60	34.92	17.19	11.27	8.31	3.82	2.28	0.94
0.80	29.44	14.29	9.39	6.86	2.91	1.24	0.55
1.00	0.59	0.58	0.57	0.56	0.51	0.46	0.36

当 K_p 固定时, 时滞稳定上界随着 K_I 的增加而减小。而 K_I 对时滞稳定上界的影响可分为两个阶段。当 K_I 恒定, $K_p < 0.4$ 时, 时滞稳定上界的变化与 K_p 成正比; $K_p > 0.4$ 时, 时滞稳定上界的变化与 K_p 成反比。

最后, 对单区域 LFC 系统进行仿真实验。根据文献[37], 设置区域控制误差 $ACE(t)$ 的信号更新周期为两秒, 在 15s 处给定扰动。根据表 2-2 可得, 当 $K_p = 0.6$, $K_I = 0.1$ 时, 文献[38]和定理 2-1 得到的时滞稳定上界分别为 12.3s 和 17.19s。在仿真实验中, 设置不同的时滞上界($\tau = 12s$, $\tau = 17s$ 和 $\tau = 18s$), 得到系统状态 Δf 和 $ACE(t)$ 在不同时滞上界下的响应曲线, 如图 2-4 和图 2-5 所示。当时滞上界选为 12s 和 17s 时, 系统是渐近稳定的。时滞上界为 18s 时, 系统是不稳定的。仿真结果表明根据定理 2-1 所得到的时滞稳定上界具有较低保守性。

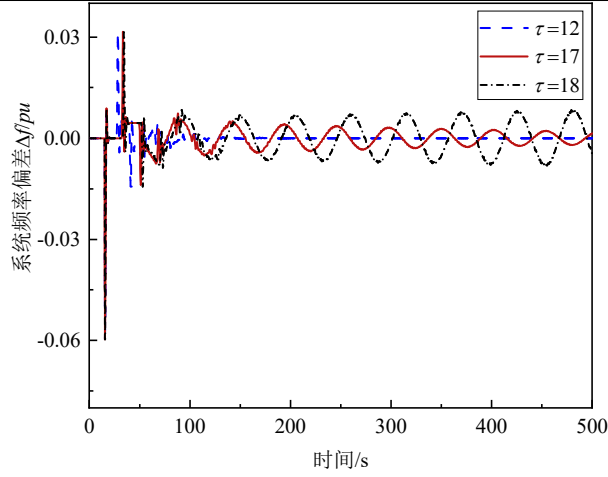


图 2-4 不同时滞上界系统的频率偏差

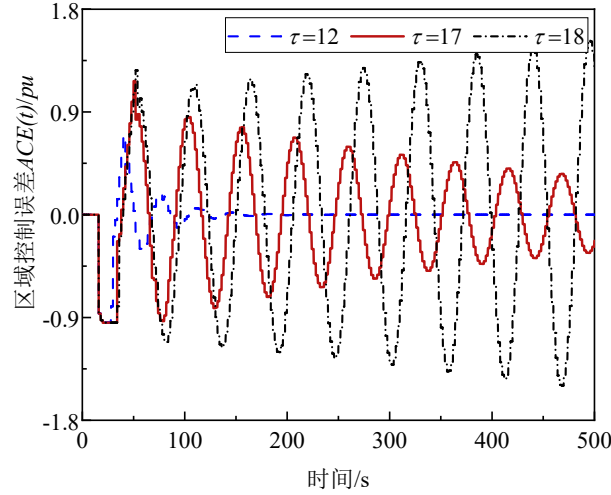
 Fig. 2-4 State response of Δf under different time-delay upper bounds


图 2-5 不同时滞上界系统的区域控制误差

 Fig. 2-5 State response of $ACE(t)$ under different time-delay upper bounds

对具有电动汽车接入和传输时滞的单区域 LFC 系统进行仿真实验。根据文献 [89], 电动汽车模型参数设置为 $\bar{K}=1$, $T_e=1$, $\alpha_1=0.8$, $\alpha_2=0.2$, $\rho_e=1$, $\lambda=0.8$ 。基于定理 2-2, 计算得出不同控制增益下系统的时滞稳定上界, 如表 2-4 所示。表 2-4 反映了相同控制参数下电动汽车接入对系统时滞稳定上界的影响。显然, 电动汽车的部署提高了 LFC 系统的时滞稳定上界, 帮助系统抵抗由信号延迟引起的性能下降。

本节给出具有电动汽车接入的单区域 LFC 系统的仿真结果, 如图 2-6 所示。取 $g(t)$ 为 0 到 1 之间任意随机数。控制参数和时滞分别设置为 $K_p=0.6$, $K_I=0.1$, $\tau=17$ 。图 2-6 展示了频率偏差 Δf 的响应曲线。通过与图 2-4 比较可得, 具有电动汽

车接入的 LFC 系统具有更快得响应速度，频率误差可以在短时间内收敛到稳态。这表明电动汽车的接入可以帮助发电厂快速抑制频率变化，提高电网的暂态性能。

表 2-4 具有电动汽车的单区域时滞 LFC 系统的最大时滞上界

Table 2-4 The maximum delay boundary for delayed one-region LFC system with EVs

K_p	K_I	定理 2-1	定理 2-2	K_p	K_I	定理 2-1	定理 2-2
0.10	0.05	32.75	44.86	0.60	0.10	17.19	25.06
0.20	0.05	34.22	46.53	0.60	0.15	11.27	16.61
0.40	0.05	35.83	49.09	0.60	0.20	8.31	12.37
0.60	0.05	34.92	50.35	0.60	0.40	3.82	5.96
0.10	0.10	16.11	22.32	0.80	0.05	29.44	49.8
0.20	0.10	16.85	23.15	0.80	0.15	9.39	16.41
0.40	0.10	17.65	24.43	0.80	0.20	6.86	12.21
0.80	0.10	14.29	24.78	0.80	0.40	2.91	5.82

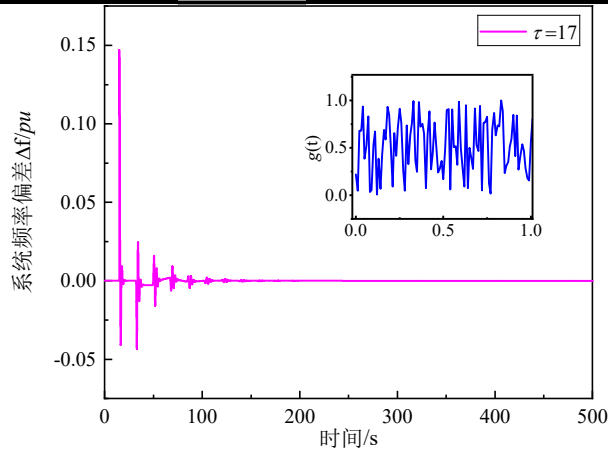


图 2-6 不同时滞上界系统的区域控制误差

Fig. 2-6 Structure of LFC system with EVs and time delays

2.4.2 多区域 LFC 系统稳定性分析

在时滞多区域 LFC 系统中，各个控制区域具有不同的系统参数。本节以时滞双区域 LFC 系统为例，假设各区域的控制参数为 $K_p = 0.4$ ， $K_I = 0.2$ 。基于定理 2-1 计算时滞双区域 LFC 系统的时滞稳定上界。与文献[37]，[62]和[95]进行比较，如表 2-5 所示。表 2-5 使用极坐标刻画两个区域的时滞大小， $\theta = \arctan(\tau_1 / \tau_2)$ 表示角度， $\tau = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2}$ 表示幅值。根据表 2-5 可得，本文所提定理 2-1 的结果优于文献[37]，[62]和[95]的结果，验证了本文所得方法的低保守性。

表 2-5 时滞双区域 LFC 系统时滞稳定上界

Table 2-5 The maximum delay boundary for delayed two-region LFC system

θ	[95]	[37]	[62]	定理 2-1
0	4.86	5.36	7.59	8.43
20	4.78	5.97	8.65	8.95
40	5.71	7.19	10.97	11.00
45	6.17	7.54	11.87	11.92
50	5.97	7.17	11.11	11.14
70	4.93	5.96	8.73	9.00
90	4.89	5.35	7.53	8.54

由表 2-5 可知控制参数 $K_p=0.4$ ， $K_I=0.2$ ，时滞参数为 $\tau=9.00$ ， $\theta=70^\circ$ 。根据极坐标变换，两区域的时滞上界分别为 8.45s 和 3.07s。对时滞双区域 LFC 系统进行仿真实验，图 2-7 展示了频率偏差的状态响应曲线，可得系统是渐近稳定的。

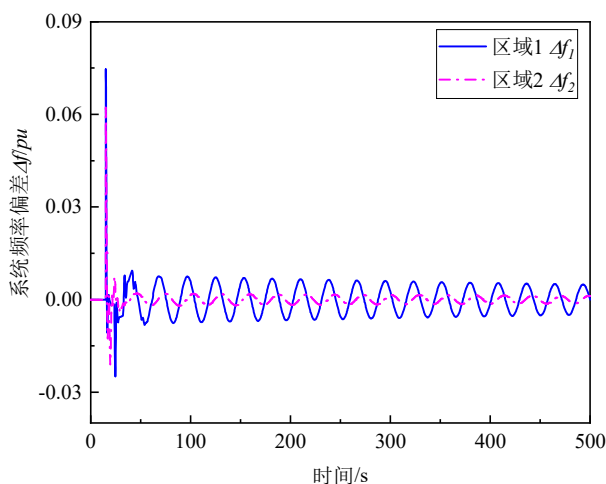


图 2-7 多区域 LFC 系统的频率偏差

Fig. 2-7 State response of Δf for multi-area LFC system with time-delays

针对具有电动汽车接入的新型 LFC 系统，设置电动汽车模型参数与单区域相同。根据定理 2-2 所提稳定判据，计算系统的时滞稳定上界。表 2-6 对比了是否具有电动汽车接入系统的时滞稳定上界($K_p=0.4$ ， $K_I=0.2$)。显然，电动汽车的部署可以提高系统的时滞稳定上界，但与单区域 LFC 系统相比，电动汽车的接入对多区域 LFC 系统的时滞稳定上界影响较小。

本节提供了具有电动汽车接入和传输时滞的多区域 LFC 系统的仿真结果。图 2-8 展示了相同的控制参数下(控制参数为 $K_p=0.4$ ， $K_I=0.2$ 时，时滞参数为

$\tau=9.00$, $\theta=70^\circ$), 两个区域的频率偏差 Δf_1 和 Δf_2 响应曲线。根据图 2-8 系统频率偏差快速达到稳定状态, 表明电动汽车的接入可以抑制电网的频率波动, 提高时滞多区域 LFC 系统的性能, 协助发电厂快速响应以达到预期要求。

表 2-6 具有电动汽车接入的时滞双区域 LFC 系统的时滞稳定上界

Table 2-6 The maximum delay boundary for delayed two-region LFC system with EVs

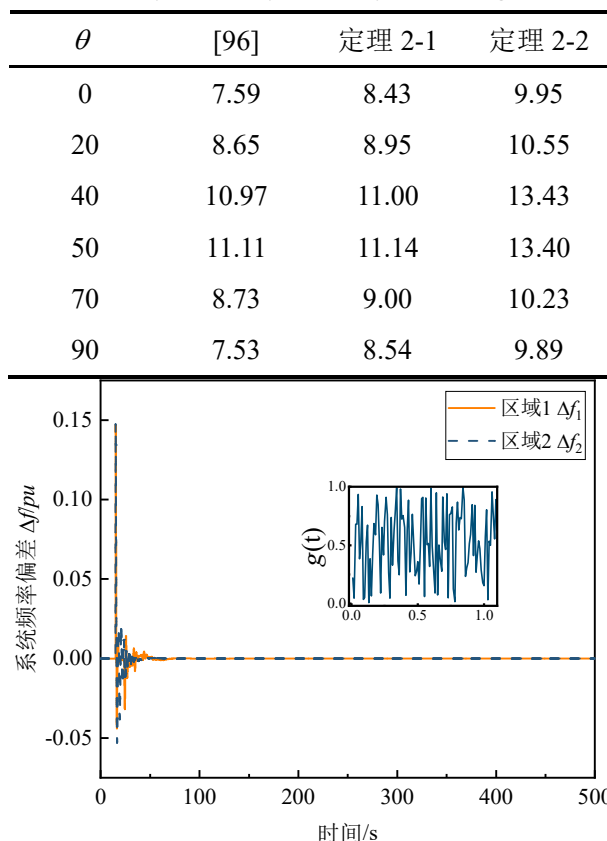


图 2-8 具有电动汽车接入的多区域 LFC 系统状态响应

Fig. 2-8 State response of multi-area LFC system with time-delays and EVs

2.5 本章小结

本章研究了具有传输时滞互联 LFC 系统的稳定性问题。充分考虑电动汽车的接入与并网, 利用 PIE 表示具有传输时滞的 LFC 系统模型。构建完全 L-K 泛函, 以 PI 算子不等式的形式给出保守性较低的系统稳定条件, 探讨了时滞稳定上界和控制参数间的关系。通过仿真算例验证了本文所提方法的低保守性。

第3章 改进增广 L-K 泛函的线性时滞微电网系统稳定分析

第2章考虑了一类互联 LFC 系统稳定分析问题，得到保守性较低的稳定判据。然而，基于 PI 算子不等式的稳定条件不适用于具有时变时滞的 LFC 系统。本章进一步研究具有加性时滞和外部扰动的微电网 LFC 系统的稳定性分析问题。首先，基于加型时滞区间构建多重积分项，提出新型增广 L-K 泛函。然后，基于所提增广 L-K 泛函，利用基于辅助函数的积分不等式，建立具有较低保守性的系统稳定性判据，得到系统时滞稳定上界、控制参数和非线性扰动间的相互关系。最后，通过数值算例验证所提稳定判据的低保守性。

3.1 引言

伴随可再生能源技术的兴起和并网，集成新能源发电的微电网系统开始逐步推广。如 2020 年，韩国庆州市推出的氢燃料电池发电项目，项目落地年发电量为 80 万 MWh。2021 年，青海省大柴旦县推出的光伏电站项目，每年提供清洁电能约 22 万 MWh，可供约 5 万户家庭用电。微电网系统包括多个分布式发电设备、蓄能设备和传输设施。不同类型不同形式的分布式发电单元，如光伏发电、微型燃气轮机和燃料电池等，能显著提高电力系统的综合性能和灵活性^[97]。因此，分布式发电和可再生能源是微电网系统演进发展的主要方向^[98]。

电网频率的稳定性和可控性是电力系统稳定运行是要素之一。可再生能源和分布式发电设备的工作周期是不规则且多变的，因此，需要通过负荷频率控制策略来确保系统在期望频率上稳定运行^[99]。微电网中央控制器依靠通信网络协调和控制电网中的所有分布式发电机。互联 LFC 系统通常依靠专用传输通道，忽略了系统的传输延迟^[100]。开放式通信网络能够提供低功耗的双向通讯，以较低的安装成本实现大规模、大数据量的信息交换，使全局角度的分析和控制电力系统成为可能。微电网 LFC 系统使用开放式通信网络在各分布式发电设备间进行信息传输^[101]。但是，使用开放式通信网络进行数据传输不可避免地会带来时延、网络拥塞和量化等问题

[102]。因此，提高传输时滞稳定上界，保障数据传输效率成为重要的研究方向。

针对互联 LFC 系统，为了获得较大的时滞稳定上界，减低稳定判据的保守性，研究者基于 L-K 泛函方法提出一系列研究成果。文献[86]利用时滞相关 L-K 泛函，考虑具有多个时滞状态的 LFC 系统，获得基于 LMI 的系统稳定判据。文献[37]针对市场化电网环境进一步研究了 LFC 系统的时滞相关稳定性问题。文献[103]提出了一种基于频域方法的稳定条件，为多区域 LFC 系统提供准确的时滞裕度。通过提出新型增广 L-K 泛函和基于无限级数的不等式，文献[38]改进了稳定条件的保守性。文献[67]基于截断 B-L 积分不等式，构建 LFC 系统的低保守性稳定判据。对于互联 LFC 电力系统存在大量具有建设性的研究，反观微电网 LFC 系统的研究成果甚少。文献[104]提出了一种基于根轨迹法的稳定判据，基于相位裕度确定系统稳定时滞区间。文献[105]基于时滞间的耦合关系，研究了具有电动汽车接入的多时滞 LFC 系统的稳定性问题。文献[106]研究了具有时变时滞微电网 LFC 系统的稳定性问题。通过文献分析，大多数研究集中在具有单向时滞的 LFC 系统上，这类系统将通信网络引起的延迟信号进行组合并简化为传输时滞或输入时滞。然而，对于具有开放式通信网络的微电网系统，信号传输可能会经历不同的信道，具有不同信号特征^[107]。将时滞信号化简合并可能给系统判据引入较高的保守性。

本章针对具有加性时变时滞和外部扰动的微电网 LFC 系统，提出了保守性较低的稳定判据。首先，考虑加性时变时滞和系统外部干扰的特性，建立了微电网 LFC 系统模型。其次，基于辅助函数的积分不等式构造增广 L-K 泛函，以 LMI 形式给出系统的稳定性判据。根据所提出的稳定判据，分析时滞稳定上界、控制增益和外部扰动之间的相互作用关系。最后，通过数值算例证明了所提稳定判据的有效性和低保守性。

3.2 问题描述及预备知识

本节构建了具有传输时延和非线性扰动的微电网 LFC 系统模型。图 3-1 给出了微电网 LFC 系统框图^[108]。表 3-1 详细解释了系统参数的含义。在所提系统模型中，风力和光伏发电机作为主要电力来源。可再生能源的电力供应是不规则且多变的，因此使用微型燃气轮机单元提供基本负荷。当发生意外的有功功率失衡时，将用于频率补偿的燃料电池和电解槽系统并入微电网系统。由于微电网电力系统的非线性和复杂性，难以准确建立系统模型。通常采用能够表征系统特点的线性系统模型对

系统进行分析与控制设计。图 3-1 展示了的系统构成要件在频率控制中的主要特征。由于开放式通信网络中的传输延迟，考虑传感器、控制器和执行器间的时滞信号 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 。

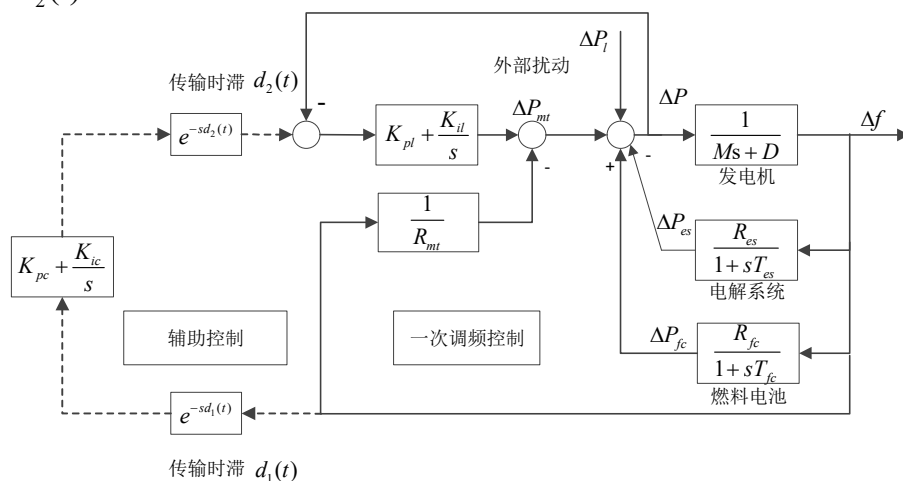


图 3-1 微电网负荷频率控制框图

Fig. 3-1 Microgrid load frequency control block diagram

表 3-1 微电网 LFC 系统参数表

Table 3-1 Parameters of microgrid LFC system

参数	含义	参数	含义
$\Delta f(t)$	频率偏差	R_{mt}	Drop 微型涡轮机的特性
M	发电机转动惯量	ΔP_{es}	燃料电池时间常数
D	发电机阻尼常数	ΔP_l	负载扰动
ΔP_{es}	电解槽输出功率	ΔP_{mt}	输出功率变化
R_{es}	电解槽增益	K_{pl}	本地控制器的比例增益
T_{es}	电解槽时间常数	K_{pc}	中心控制器的比例增益
ΔP_{fc}	燃料电池增益	K_{il}	本地控制器的积分增益
ΔP_{fc}	燃料电池输出功率	K_{ic}	中心控制器的积分增益

根据图 3-1，具有加性时变时滞和外部扰动的微电网 LFC 系统的状态空间表达如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t)) + F \Delta P_l(t) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (3-1)$$

其中， $x(t) = [K_{ic} \int \Delta f dt \quad \Delta P_{mt} \quad \Delta P_{fc} \quad \Delta P_{es} \quad \Delta f]^T$ 是状态向量。 A ， A_d ， F 为系统矩阵，具体如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & K_{ic} \\ 0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{fc}} & 0 & \frac{R_{fc}}{T_{fc}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{es}} & \frac{R_{es}}{T_{es}} \\ 0 & \frac{1}{M} & \frac{1}{M} & -\frac{1}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}, \quad A_d = [0_{5 \times 1} \quad A_{d2} \quad 0_{5 \times 1} \quad 0_{5 \times 1} \quad 0_{5 \times 1}]^T$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + K_{pl}}, \quad \epsilon_1 = \alpha(-K_{il} - \frac{1}{MR_{mt}}), \quad \epsilon_2 = \alpha(\frac{K_{pl}}{T_{fc}} - K_{il} - \frac{1}{MR_{mt}})$$

$$\epsilon_3 = \alpha(-\frac{K_{pl}}{T_{es}} + K_{il} + \frac{1}{MR_{mt}}), \quad \epsilon_4 = \alpha(-\frac{K_{pl}R_{fc}}{T_{fc}} + \frac{R_{pl}R_{es}}{T_{es}} + \frac{D}{MR_{mt}})$$

$$A_{d2} = \text{col}\{-\alpha K_{il}, -\alpha \frac{K_{pl}R_{pc}}{M}, -\alpha \frac{K_{pl}K_{pc}}{M}, \alpha \frac{K_{pl}K_{pc}}{M}, \alpha(-K_{il}K_{pc} + \frac{K_{pl}K_{pc}D}{M} - K_{pl}K_{ic})\}$$

时变时滞 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} 0 \leq d_1(t) \leq h_1, \quad \dot{d}_1(t) &\leq \mu_1 \\ 0 \leq d_2(t) \leq h_2, \quad \dot{d}_2(t) &\leq \mu_2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

定义 $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$ 和 $h = h_1 + h_2$ 。假设系统的外部扰动与系统状态和时滞状态相关, 满足如下条件

$$F\Delta P_l(t) = f(t, x(t), x(t-d(t))) \quad (3-3)$$

其中, $f(\cdot)$ 满足

$$f(\cdot)^T f(\cdot) \leq \alpha^2 x^T(t) Z^T Z x(t) + \beta^2 x^T(t-d(t)) X^T X x(t-d(t)) \quad (3-4)$$

其中 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$ 是已知的标量, Z 和 X 是适当维度的常数矩阵。标量 α 、 β 和矩阵 Z 、 X 用于量化系统的扰动幅度。当时滞信号 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 合并为单个时变时滞 $d(t)$ 时, 微电网 LFC 系统(3-1)重写为如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + F\Delta P_l(t) \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (3-5)$$

注 3-1: 针对微电网 LFC 系统(3-5), 文献[106]研究了系统稳定性分析问题。本文所提微电网 LFC 系统考虑了外部扰动以及加性传输时滞, 系统(3-5)可以认为是系统(3-1)的一个特例。因此, 本文所提微电网 LFC 系统更具一般性。为了得到系统的稳定判据, 给出如下引理:

引理 3-1^[109]: 对可微函数 $v(s): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 正定矩阵 R , 如下不等式成立

$$\int_a^b \dot{v}^T(s) R \dot{v}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^3 (2i-1) \Omega_i^T R \Omega_i \quad (3-6)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= v(b) - v(a), \quad \Omega_2 = v(b) + v(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b v(s) ds \\ \Omega_3 &= v(b) - v(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b v(s) ds - \frac{12}{b-a} \int_a^b \int_s^b v(u) du ds \end{aligned}$$

引理 3-2^[57]: 对于矩阵多项式 $g(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, x \in [0, h]$), 如果以下条件成立, 则 $g(x) < 0$ 。

$$g(0) < 0, \quad g(h) < 0, \quad -h^2 \alpha_2 + g(0) < 0 \quad (3-7)$$

3.3 主要结果

3.3.1 单时滞微电网 LFC 系统稳定分析

为方便表示, 定义如下符号

$$\begin{aligned} e_i &= \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (9-i)n} \end{bmatrix}^T \quad (i=1, \dots, 9) \\ e_s &= A e_1^T + A_d e_2^T + e_9^T, \quad e_0 = 0_{9n \times n} \\ v &= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & x^T(t-h) \end{bmatrix} \\ \chi_1(t) &= \begin{bmatrix} v & \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t x^T(s) ds & \frac{1}{h-d(t)} \int_{t-h}^{t-d(t)} x^T(s) ds \\ \frac{1}{d^2(t)} \int_{t-d(t)}^t \int_s^t x^T(u) du ds & \frac{1}{(h-d(t))^2} \int_{t-h}^{t-d(t)} \int_s^{t-d(t)} x^T(u) du ds \\ \int_{t-h}^t \int_s^t x^T(u) du ds & f^T(t, x(t), x(t-d(t))) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定理 3-1: 对于给定的标量 h 和 μ , 具有时变时滞 $d(t)$ 的系统(3-5)是渐近稳定的, 如果存在 $P \in \mathbf{S}_{3n}^+$, $U_1 \in \mathbf{S}_{3n}^+$, $U_2 \in \mathbf{S}_n^+$, $R \in \mathbf{S}_n^+$, 实数矩阵 $L \in \mathbf{R}^{9n \times n}$, $S \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$ 和标量 $\sigma_1 \geq 0$ 满足以下凸优化条件。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_1 & S \\ * & \psi_1 \end{bmatrix} &> 0 \\ \Upsilon_{[d(t)=0]} &< 0, \quad \Upsilon_{[d(t)=h]} < 0, \quad \Upsilon_{[d(t)=0]} - h^2 \zeta < 0 \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \text{diag}\{R, 3R, 5R\} \\
 Y_{[d(t)]} &= \text{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} e_1 & (h-d(t))e_5 + d(t)e_4 & e_8 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \times P \begin{bmatrix} e_s & e_1 - e_3 & he_1 - (h-d(t))e_5 - d(t)e_4 \end{bmatrix}^T \Big\} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} e_1 & e_0 & e_0 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_1 & e_0 & e_0 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad - (1-\mu) \begin{bmatrix} e_2 & e_1 - e_2 & d(t)e_4 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_2 & e_1 - e_2 & d(t)e_4 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + d(t) \text{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} e_4 & e_1 - e_4 & d(t)e_6 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_0 & e_s & e_1 \end{bmatrix}^T \right\} + e_1 U_2 e_1^T - e_3 U_2 e_3 \\
 &\quad + he_s R e_s^T - \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & S \\ * & \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \text{Sym}\left\{ L \left(d(t)^2 e_6^T + (h-d(t))^2 e_7^T + d(t)(h-d(t))e_4^T - e_8^T \right) \right\} \\
 &\quad - e_9 (\sigma_1 I) e_9^T + e_1 (\sigma_1 \alpha^2 Z^T Z) e_1^T + e_2 (\sigma_1 \beta^2 X^T X) e_2^T \\
 \gamma_1 &= \begin{bmatrix} e_1 - e_2 & e_1 + e_2 - 2e_4 & e_1 - e_2 + 6e_4 - 12e_6 \end{bmatrix} \\
 \gamma_2 &= \begin{bmatrix} e_2 - e_3 & e_2 + e_3 - 2e_5 & e_2 - e_3 + 6e_5 - 12e_7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

证明：构建如下增广 L-K 泛函

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \delta_1(t)^T P \delta_1(t) + \int_{t-d(t)}^t \delta_2(t,s)^T U_1 \delta_2(t,s) ds \\
 &\quad + \int_{t-h}^t x^T(s) U_2 x(s) ds + \int_{t-h}^t \int_s^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du ds
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \delta_1(t) &= \text{col}\{x(t), \int_{t-h}^t x(s) ds, \int_{t-h}^t \int_s^t x(u) du ds\} \\
 \delta_2(t,s) &= \text{col}\{x(s), \int_s^t \dot{x}(u) du, \int_s^t x(u) du\}
 \end{aligned}$$

泛函 $V_1(t)$ 沿系统(3-5)求导得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) &= \chi_1(t) \left\{ 2 \begin{bmatrix} e_1 & (h-d(t))e_5 + d(t)e_4 & e_8 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \times P \begin{bmatrix} e_s & e_1 - e_3 & he_1 - (h-d(t))e_5 - d(t)e_4 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \begin{bmatrix} e_1 & e_0 & e_0 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_1 & e_0 & e_0 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad - (1-\dot{d}(t)) \begin{bmatrix} e_2 & e_1 - e_2 & d(t)e_4 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_2 & e_1 - e_2 & d(t)e_4 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + 2d(t) \begin{bmatrix} e_4 & e_1 - e_4 & d(t)e_6 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_0 & e_s & e_1 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad \left. + e_1 U_2 e_1^T - e_3 U_2 e_3^T + he_s R e_s^T \right\} \chi_1^T(t) + V_a(t)
 \end{aligned} \tag{3-10}$$

基于引理 3-1 和文献[64]提出的互凸不等式， $V_a(t)$ 满足如下条件

$$\begin{aligned}
 V_a(t) &= -\int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
 &\leq -\frac{1}{h} \chi_1(t) \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & S \\ * & \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}^T \chi_1^T(t)
 \end{aligned} \quad (3-11)$$

对于任意 $\sigma_1 \geq 0$ 和 $L \in \mathbf{R}^{9n \times n}$ ，以下不等式成立

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \chi_1(t) \left(e_9(-\sigma_1 I) e_9^T + e_1(\sigma_1 \alpha^2 Z^T Z) e_1^T + e_2(\sigma_1 \beta^2 X^T X) e_2^T \right) \chi_1^T(t) \\
 0 &= 2\chi_1(t) L \left(d(t)^2 e_6^T + (h-d(t))^2 e_7^T + d(t)(h-d(t)) e_4^T - e_8^T \right) \chi_1^T(t)
 \end{aligned} \quad (3-12)$$

综合式(3-10)-式(3-12)，可得

$$\dot{V}_1(t) \leq \chi_1(t) \Upsilon_{[d(t)]} \chi_1^T(t) \quad (3-13)$$

针对二次矩阵多项式 $\Upsilon_{[d(t)]}$ ，结合引理 3-2 可得

$$\Upsilon_{[d(t)=0]} < 0, \quad \Upsilon_{[d(t)=h]} < 0, \quad \Upsilon_{[d(t)=0]} - h^2 \zeta < 0 \quad (3-14)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{1}{2} \frac{d^2 \Upsilon(d(t))}{d(d(t))^2} \\
 &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} e_0 & e_4 - e_5 & e_0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} e_0 & e_0 & e_5 - e_4 \end{bmatrix}^T \right\} \\
 &\quad - (1-u) \begin{bmatrix} e_0 & e_0 & e_4 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_0 & e_0 & e_4 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} e_0 & e_0 & e_6 \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} e_0 & e_s & e_1 \end{bmatrix}^T + L(e_6^T + e_7^T - e_4^T) \right\}
 \end{aligned}$$

综上可得，定理 3-1 所提不等式条件(3-8)等价于 $\Upsilon_{[d(t)]} < 0$ 。

当微电网 LFC 系统不存在外部扰动，且时滞导数 $\dot{d}(t)$ 上界的信息未知时，系统的稳定性条件可以通过设置 $\alpha = 0$ ， $\beta = 0$ 和 $U_1 = 0$ 得到，如下：

定理 3-2： 对于给定 h ，具有时变时滞 $d(t)$ 的系统(3-5)是渐近稳定的，如果存在对称矩阵 $P \in \mathbf{S}_{3n}^+$ ， $U_2 \in \mathbf{S}_n^+$ ， $R \in \mathbf{S}_n^+$ ，实数矩阵 $L \in \mathbf{R}^{9n \times n}$ ， $S \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$ 满足如下凸优化条件

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \psi_1 & S \\ * & \psi_1 \end{bmatrix} > 0 \\
 &\tilde{\Upsilon}_{[d(t)=0]} < 0, \quad \tilde{\Upsilon}_{[d(t)=h]} < 0, \quad \tilde{\Upsilon}_{[d(t)=0]} - h^2 \tilde{\zeta} < 0
 \end{aligned} \quad (3-15)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_{[d(t)]} = & \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & (h-d(t))\tilde{e}_5 + d(t)\tilde{e}_4 & \tilde{e}_8 \end{bmatrix} \right. \\
 & \times P \begin{bmatrix} \tilde{e}_s & \tilde{e}_1 - \tilde{e}_3 & h\tilde{e}_1 - (h-d(t))\tilde{e}_5 - d(t)\tilde{e}_4 \end{bmatrix}^T \Big\} \\
 & + \tilde{e}_1 U_2 \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_3 U_2 \tilde{e}_3 + h\tilde{e}_s R \tilde{e}_s^T - \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & S \\ * & \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}^T \\
 & + \text{Sym} \left\{ L \left(d(t)^2 \tilde{e}_6^T + (h-d(t))^2 \tilde{e}_7^T + d(t)(h-d(t))\tilde{e}_4^T - \tilde{e}_8^T \right) \right\} \\
 \tilde{\zeta} = & \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{e}_0 & \tilde{e}_4 - \tilde{e}_5 & \tilde{e}_0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{e}_0 & \tilde{e}_0 & \tilde{e}_5 - \tilde{e}_4 \end{bmatrix}^T + L \left(\tilde{e}_6^T + \tilde{e}_7^T - \tilde{e}_4^T \right) \right\} \\
 \tilde{e}_i = & \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (8-i)n} \end{bmatrix}^T \quad (i=1, \dots, 8), \quad \tilde{e}_s = A\tilde{e}_1^T + A_d\tilde{e}_2^T, \quad \tilde{e}_0 = 0_{8n \times n}
 \end{aligned}$$

证明：参考定理 3-1 可得。

3.3.2 加性时滞微电网 LFC 系统稳定分析

由于开放式通信网络各区域传输信道存在差异，时滞信号 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 的特性也不尽相同。因此，将时滞信号合并为单个延迟 $d(t)$ 可能会影响系统稳定判据的保守性。定理 3-3 给出了具有加性时变时滞微电网 LFC 系统的稳定判据。

定理 3-3: 对于给定的标量 h_1 , h_2 , μ_1 和 μ_2 , 具有加性时变时滞 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 的系统(3-1)是渐近稳定的, 如果存在对称矩阵 $P \in \mathbf{S}_{2n}^+$, $U_1 \in \mathbf{S}_n^+$, $U_2 \in \mathbf{S}_n^+$, $U_3 \in \mathbf{S}_n^+$, $U_4 \in \mathbf{S}_n^+$, $R \in \mathbf{S}_n^+$, 实数矩阵 $X_1 \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, $X_2 \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ 和标量 $\sigma_2 \geq 0$ 满足以下条件

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \psi_2 & X_2 \\ * & \psi_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \psi_2 & X_3 \\ * & \psi_2 \end{bmatrix} > 0 \\
 & \Psi_{[d(t)=0]} < 0, \quad \Psi_{[d(t)=h]} < 0
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \psi_2 = & \text{diag} \{R, 3R\} \\
 \Psi_{[d(t)]} = & \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & d_1(t)\bar{e}_6 + d_2(t)\bar{e}_7 + (h-d_2(t))\bar{e}_8 + (h_1-d_1(t))\bar{e}_9 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{e}_s & \bar{e}_1 - \bar{e}_3 \end{bmatrix}^T \right\} \\
 & + \bar{e}_1(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)\bar{e}_1^T - (1-\mu)\bar{e}_2 U_1 \bar{e}_2^T - \bar{e}_3 U_2 \bar{e}_3^T \\
 & - (1-\mu_1)\bar{e}_4 U_3 \bar{e}_4^T - (1-\mu_1)\bar{e}_5 U_4 \bar{e}_5^T + h\bar{e}_s(t)R\bar{e}_s(t) + \frac{1}{h_1} \zeta_1 \begin{bmatrix} \psi_2 & X_2 \\ * & \psi_2 \end{bmatrix} \zeta_1^T \\
 & + \frac{1}{h_2} \zeta_2 \begin{bmatrix} \psi_2 & X_3 \\ * & \psi_2 \end{bmatrix} \zeta_2^T - \bar{e}_{10}(\sigma_2 I)\bar{e}_{10}^T + \bar{e}_1(\sigma_2 \alpha^2 Z^T Z)\bar{e}_1^T + \bar{e}_2(\sigma_2 \beta^2 X^T X)\bar{e}_2^T \\
 \zeta_1 = & \begin{bmatrix} \bar{e}_1 - \bar{e}_4 & \bar{e}_1 + \bar{e}_4 - 2\bar{e}_6 & \bar{e}_5 - \bar{e}_3 & \bar{e}_5 + \bar{e}_3 - 2\bar{e}_9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\zeta_2 = [\bar{e}_4 - \bar{e}_2 \quad \bar{e}_4 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_7 \quad \bar{e}_2 - \bar{e}_5 \quad \bar{e}_2 + \bar{e}_5 - 2\bar{e}_8]$$

$$\bar{e}_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (10-i)n} \end{bmatrix}^T \quad (i=1, \dots, 10)$$

$$\bar{e}_s = A\bar{e}_1^T + A_d\bar{e}_2^T + \bar{e}_{10}^T, \quad \bar{e}_0 = 0_{10n \times n}$$

证明：考虑如下增广 L-K 泛函

$$\begin{aligned} V_2(t) = & \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-h}^t x(s)ds \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-h}^t x(s)ds \end{bmatrix} + \int_{t-d(t)}^t x^T(s)U_1x(s)ds \\ & + \int_{t-h}^t x^T(s)U_2x(s)ds + \int_{t-d_1(t)}^t x^T(s)U_3x(s)ds \\ & + \int_{t-d_1(t)-h_2}^t x^T(s)U_4x(s)ds + \int_{t-h}^t \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \end{aligned} \quad (3-17)$$

$V_2(t)$ 沿式(3-1)的导数如下

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \chi_2(t) \left(2[\bar{e}_1 \quad d_1(t)\bar{e}_6 + d_2(t)\bar{e}_7 + (h-d_2(t))\bar{e}_8 + (h_1-d_1(t))\bar{e}_9] \right. \\ & \times P[\bar{e}_s \quad \bar{e}_1 - \bar{e}_3]^T + \bar{e}_1(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)\bar{e}_1^T - (1-\dot{d}(t))\bar{e}_2U_1\bar{e}_2^T \\ & - \bar{e}_3U_2\bar{e}_3^T - (1-\dot{d}_1(t))\bar{e}_4U_3\bar{e}_4^T - (1-\dot{d}_1(t))\bar{e}_5U_4\bar{e}_5^T \\ & \left. + h\bar{e}_sR\bar{e}_s^T \right) \chi_2^T(t) - V_b(t) \end{aligned} \quad (3-18)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_2(t) = & \begin{bmatrix} v & x^T(t-d_1(t)) & x^T(t-d_1(t)) & \frac{1}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t x^T(s)ds & \frac{1}{d_2(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} x^T(s)ds \\ \frac{1}{h_2-d_2(t)} \int_{t-d_1(t)-h_2}^{t-d(t)} x^T(s)ds & \frac{1}{h_1-d_1(t)} \int_{t-h_1-h_2}^{t-d_1(t)-h_2} x^T(s)ds & f^T(t, x(t), x(t-d(t))) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

基于引理 3-1 和互凸不等式^[64]，得到 $V_b(t)$ 的估计值

$$\begin{aligned} V_b(t) = & \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds + \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ & + \int_{t-d_1(t)-h_2}^{t-d_1(t)} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds + \int_{t-h}^{t-d_1(t)-h_2} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ & \geq \chi_2(t) \left(\frac{1}{h_1} \zeta_1 \begin{bmatrix} \psi_2 & X_2 \\ * & \psi_2 \end{bmatrix} \zeta_1^T + \frac{1}{h_2} \zeta_2 \begin{bmatrix} \psi_2 & X_3 \\ * & \psi_2 \end{bmatrix} \zeta_2^T \right) \chi_2^T(t) \end{aligned} \quad (3-19)$$

对于任意 $\sigma_1 \geq 0$ ，如下不等式成立

$$0 \leq \chi_2(t) \left(\bar{e}_{10}(-\sigma_2 I) \bar{e}_{10}^T + \bar{e}_1(\sigma_2 \alpha^2 Z^T Z) \bar{e}_1^T + \bar{e}_2(\sigma_2 \beta^2 X^T X) \bar{e}_2^T \right) \chi_2^T(t) \quad (3-20)$$

结合式(3-18)-式(3-20)，可得

$$\dot{V}_2 \leq \chi_2(t) \Psi_{[d(t)]} \chi_2^T(t) \quad (3-21)$$

因此，当 LMI 条件(3-16)成立，可推断系统(3-1)是渐近稳定的。

注 3-2: 针对具有加性时滞的微电网 LFC 系统，提出新型增广 L-K 泛函 $V_2(t)$ ，降低判据固有保守性。首先，基于不同时滞区间，构建新型泛函积分项，利用更多时滞状态信息。其次，配合基于辅助函数积分不等式设计增广二次项，降低估计泛函导数的误差。因此，所提 L-K 泛函充分考虑了系统加性时滞特性，通过数值仿真验证了所提泛函的低保守性。

注 3-3: 定理 3-1 和定理 3-2 中使用了基于三阶辅助函数的积分不等式，提供了比 Wirtinger 积分不等式更准确的估计值。考虑到系统保守性和计算复杂度的平衡，定理 3-3 使用了基于二阶辅助函数的积分不等式。

3.4 数值算例

本节分别对具有单时滞和加性时滞的微电网 LFC 系统进行稳定性分析，计算时滞稳定上界。根据文献[104]，取 $D=1$ ， $R_{es}=1$ ， $K_{il}=1$ ， $K_{pl}=1$ ， $R_{mt}=0.04$ ， $M=10$ ， $R_{fc}=1$ ， $T_{fc}=4$ ，设置扰动相关矩阵 Z 和 X 为 $0.1I$ 。

例 3-1: (定常时滞)当 $\alpha=0$ ， $\beta=0$ ， $d(t)$ 为常数时延时，微电网 LFC 系统简化为具有定常时滞的标称系统。设置不同的控制参数 K_{pc} 和 K_{ic} ，根据定理 3-1 得到系统时滞稳定上界，如表 3-2 所示。基于根轨迹分析法，文献[104]给出了标称微电网 LFC 系统时滞稳定分析值，如表 3-3 所示。比较可得相同参数下，表 3-2 和表 3-3 之间最大误差小于 0.01。表明定理 3-1 提供了保守性较低的稳定判据。值得注意的是，基于 L-K 泛函方法构建的定理 3-1 可用于研究具有时变时滞和外部扰动的微电网 LFC 系统，而基于根轨迹法的稳定判据仅能处理具有定常时滞的标称系统。

例 3-2: (时变时滞)通过设置不同的控制参数、扰动条件和时变时滞约束，结合定理 3-1，获得系统时滞稳定上界如表 3-4 所示。表 3-4 反映了微电网 LFC 系统控制参数、扰动条件和时变时滞约束间的动态关系。随着扰动参数 α 和 β 的增加，时滞稳定上界显著降低。根据定理 3-2，得到时滞导数 $\dot{d}(t)$ 不受限的时滞稳定上界，如表 3-5 所示。相比于文献[106]，相同控制器增益下，定理 3-2 所得时滞稳定上界保守性更低。这表明了所提 L-K 泛函的有效性。根据表 3-5 可得，当控制增益 K_{pc} 恒定时，最大时滞界限随着 K_{ic} 下降而增加，并且随着 K_{pc} 减小，趋势更加明显。当

表 3-2 标称微电网 LFC 系统的时滞稳定上界

Table 3-2 Admitted maximum delay for the nominal micro-grid LFC system

K_p	K_I					
	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.2	7.8713	9.9443	11.5736	12.6737	13.2219	13.2725
0.4	4.1252	5.2651	6.2859	7.1559	7.8511	8.3577
0.6	2.8807	3.6647	4.3944	5.0543	5.6307	6.1132
0.8	2.2606	2.8577	3.4240	3.9501	4.4277	4.8495
1	1.8896	2.3717	2.8340	3.2702	3.6748	4.0424

表 3-3 标称微电网 LFC 系统的精确时滞边界

Table 3-3 Accurate delay margin for the nominal micro-grid LFC system

K_p	K_I					
	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.2	7.8713	9.9443	11.5736	12.6737	13.2220	13.2727
0.4	4.1252	5.2651	6.2859	7.1560	7.8512	8.3578
0.6	2.8808	3.6647	4.3945	5.0543	5.6308	6.1132
0.8	2.2606	2.8577	3.4240	3.9501	4.4277	4.8496
1	1.8897	2.3718	2.8340	3.2703	3.6748	4.0426

表 3-4 不同 u 和外部扰动下最大时滞上界Table 3-4 Admitted maximum delay bound for different u and load disturbance

K_p	K_I	$\alpha=0, \beta=0$		$\alpha=0, \beta=0.025$		$\alpha=\beta=0.025$	
		$\mu=0$	$\mu=0.5$	$\mu=0$	$\mu=0.5$	$\mu=0$	$\mu=0.5$
0.5	0.2	7.871	7.814	6.154	6.091	5.468	5.432
0.5	0.4	4.125	4.111	3.078	3.044	2.653	2.634
0.5	0.6	2.880	2.874	2.071	2.047	1.741	1.727
1.0	0.2	9.944	9.869	8.312	8.217	7.661	7.598
1.0	0.4	5.265	5.247	4.240	4.185	3.825	3.788
1.0	0.6	3.664	3.657	2.864	2.824	2.538	2.511

控制器参数 K_{ic} 恒定时，时滞稳定上界先增加，然后随着 K_{pc} 的增加而减小。本章所提判据充分反映了控制参数、扰动条件和时变时滞约束间的关系。

设置 $K_{pc}=0.5$ ， $K_{ic}=0.4$ ， $d(t)=3.044/2 \sin(t/3.044)+3.044/2$ ，外部干扰 $f=0.0025 \tanh x(t-d(t))$ 。仿真实验结果如图 3-2 所示，展示了微电网 LFC 系统的

状态响应。根据图 3-2 可得，系统个状态区域渐近稳定，表明了本文所得稳定条件的有效性。

表 3-5 最大时滞上界基于定理 3-2

Table 3-5 Admitted maximum delay based on Theorem 4-2

K_I	K_P							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0.2	9.864	12.469	12.653	11.087	9.359	7.959	6.876	6.031
0.4	5.246	7.105	8.249	8.575	8.159	7.385	6.578	5.861
0.6	3.656	5.028	6.057	6.678	6.859	6.636	6.173	5.637
0.8	2.852	3.933	4.811	5.442	5.802	5.876	5.697	5.358
1	2.368	3.257	4.013	4.602	5.007	5.211	5.213	5.043

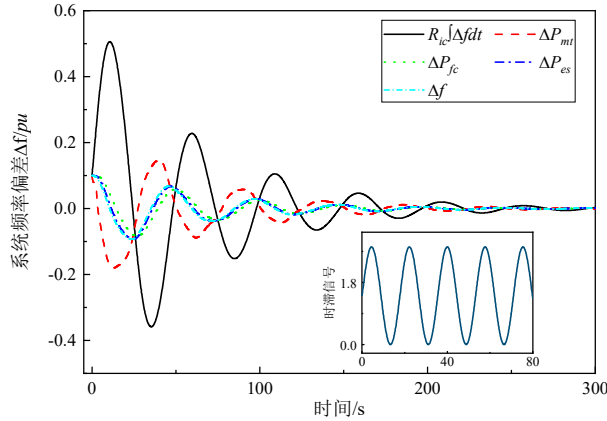


图 3-2 微电网 LFC 系统状态响应 (时变时滞)

Fig. 3-2 State responses of the micro-grid LFC system (time-varying delay)

例 3-3: (加性时变时滞)设置系统参数 $K_{pc} = 3$, $K_{ic} = 0.2$, $\mu_1 \leq 0.1$ 和 $\mu_2 \leq 0.8$, 针对具有加性时变时滞的微电网 LFC 系统进行稳定性分析。在不同的扰动条件下, 根据定理 3-3, 取 h_1 为 6、7 和 8, 得到时滞信号 $d_2(t)$ 的最大界限 h_2 。类似地, 取 h_2 为 3、4 和 5, 得到时滞信号 $d_1(t)$ 的最大允许界限 h_1 。表 3-6 提供了时滞稳定上界、扰动条件和控制参数之间的关系, 为微电网 LFC 系统的控制器设计提供指导。

针对具有加性时滞的微电网 LFC 系统进行仿真验证。设定时变时滞为 $d_1(t) = 2\sin(0.05t) + 4$ 和 $d_2(t) = 5.494/2\sin(1.6t/5.494) + 5.494/2$ ($d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 分别满足假设条件 $0 \leq d_1(t) \leq 6$, $0 \leq d_2(t) \leq 5.494$, $\mu_1 \leq 0.1$ 和 $\mu_2 \leq 0.8$)。根据假设, 设置负载扰动为 $f = 0.0025 \tanh x(t)$ 。微电网 LFC 系统的频率偏差响应如图 3-3 所示, 证明了所提方法的有效性。

表 3-6 具有加性时滞的 LFC 系统的时滞稳定上界

Table 3-6 Admitted maximum delay bound for LFC system with additive time-varying delay

扰动参数	h_2			h_1		
	$h_1 = 6$	$h_1 = 7$	$h_1 = 8$	$h_2 = 3$	$h_2 = 4$	$h_2 = 5$
$\alpha = 0, \beta = 0$	6.383	5.391	4.401	9.419	8.405	7.395
$\alpha = 0.0025, \beta = 0$	5.494	4.501	3.513	8.519	7.509	6.497
$\alpha = \beta = 0.0025$	5.173	4.181	3.192	8.192	7.185	6.177

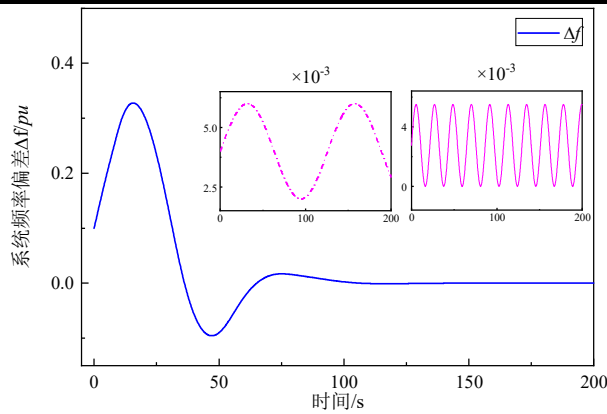


图 3-3 微电网 LFC 系统的频率偏差响应曲线

Fig. 3-3 Frequency deviation response curve of the micro-grid LFC system

3.5 本章小结

本章研究了具有加性时变时滞和非线性外部扰动的微电网 LFC 系统。考虑传输网络的双向通讯延迟，建立新型微电网 LFC 系统模型。通过所提增广 L-K 泛函，得到保守性较低的系统稳定条件。利用所提稳定判据分析了加性时变时滞信号对微电网 LFC 系统稳定性的影响。本文所提方法有助于微电网 LFC 系统时滞稳定上界的确定和控制器的设计。

第 4 章 改进时滞乘积 L-K 泛函的线性时滞网络 化控制系统稳定分析

第 3 章改进增广 L-K 泛函研究了微电网 LFC 系统稳定性问题。注意到增广 L-K 泛函对于系统时滞信息的描述存在局限,同时,第 3 章的稳定条件是以二次矩阵不等式的形式给出,存在优化空间。本章研究具有传输时滞和不确定性网络化控制系统(Networked Control Systems, NCS)的稳定性分析和控制设计问题。首先,通过时滞乘积项整合更多时滞和系统状态,构建时滞乘积 L-K 泛函。然后,引入可调参数优化时滞区间,提出参数可调的矩阵多项式不等式。基于所提矩阵多项式不等式和时滞乘积 L-K 泛函,构建具有较低保守性的新型 H_∞ 稳定判据和稳定化条件。最后,通过数值算例验证了所提矩阵多项式不等式的一般性和有效性。

4.1 引言

NCS 代表一类具有实时网络传输的控制系统,其测量和反馈控制信息都需要借助通信网络传输。与传统控制系统相比,NCS 的传感设备、控制单元和执行器等系统组件可以在广域空间上任意分布^[110]。在安装维护、功率要求和传输可靠性方面 NCS 具有显著的优势。因此,NCS 适用于远程操作系统、大规模电网和工厂监控等诸多领域^[111]。

网络传输的脆弱性、延迟性和数据易损等特性不可避免地会给 NCS 的分析和综合造成限制。图 4-1 展示了典型 NCS 的架构及组成,其中传感信号的数据包通过网络系统传输到控制端,然后由执行器驱动受控设备。为了保证网络传输中数据的准确性,通讯网络常采用握手机制预防突发的数据丢失^[112]。如果发生数据丢失或传输错误,立即激活重新传输。虽然检测重传能够减少反馈控制和传感信息的损失,但它可能增加传输的时间延迟。并且,随机发生的再次传输很可能导致网络信道拥塞,增加通信带宽的压力。另一方面,实时通信网络迫使系统开放网络接口,致使具有通信网络的 NCS 比传统系统面临更严峻的网络安全问题。图 4-1 展示了网络攻击入侵 NCS 通信网络的基本过程。通过阻塞通信链路,导致系统组件之间传输和感

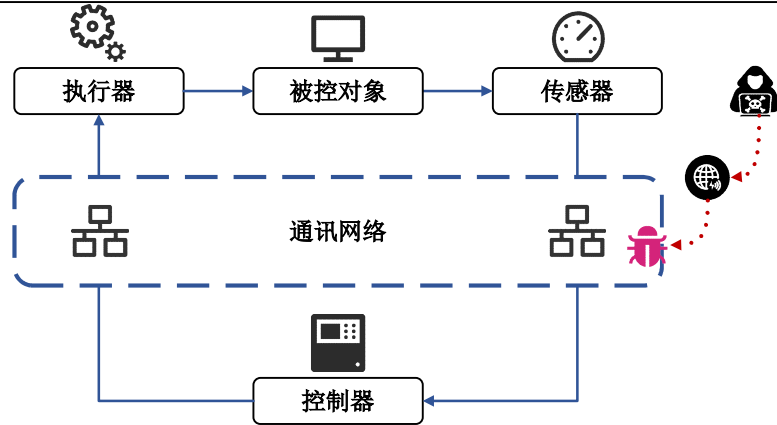


图 4-1 多网络化控制系统结构组成

Fig. 4-1 Network control systems with transmission delays

知信息被迫中断，攻击者依托通信网络发起攻击以破坏整个系统^[113]。因此，NCS 的反馈控制信号不可避免会因数据重传或网络攻击而出现延迟。降低时滞信号对 NCS 稳定性的影响，改善系统整体性能，一直是控制领域的研究热点。文献[111]研究了具有多个混合时滞信号的模糊网络化系统的稳定性问题。文献[114]针对具有马尔可夫跳跃延迟的 NSC，提出具有较少保守性的 H_∞ 稳定性判据。通过建构增广 L-K 泛函，文献[39]研究了具有加性时滞的 NCS。利用自适应控制方法，文献[112]研究了具有不确定时滞的线性多变量 NCS。文献[115]考虑具有较大时滞的 NCS，并将其结果推广至伺服控制系统。文献[116]构建新型 L-K 泛函，针对具有随机时滞的 NCS 建立系统稳定性条件。综上所述，L-K 泛函方法是分析和设计网络化控制系统时滞问题的有力工具。

L-K 泛函方法是一个具有多维应用的理论分析框架，研究时滞 NCS 的稳定性，旨在放松系统时滞稳定上界，获得系统控制器设计方案^[117]。现有研究中已经发展出多条技术路线增大时滞稳定上界。主要的技术路线之一是构造新型 L-K 泛函，例如简单 L-K 泛函^[118]、完全 L-K 泛函^[32]和增广 L-K 泛函^[119]。适切的 L-K 泛函能够详尽涵盖系统状态和时滞状态，有利于降低所得判据的保守性。文献[118]基于简单 L-K 泛函研究了 NCS 的事件触发问题。文献[120]引入非连续 L-K 泛函研究了 NCS 的采样控制问题。文献[121]设计了新型增广 L-K 泛函，与高阶积分不等式结合，建立了宽松的系统稳定条件。文献[52]提出了时滞乘积 L-K 泛函，导出基于 LMI 的系统稳定条件。因此，设计涵盖更多系统状态和时滞信息的 L-K 泛函是获取较低保守性稳定判据的重要方式。

依据 L-K 泛函方法得到的稳定条件普遍以线性矩阵不等式的形式呈现。然而，由于增广 L-K 泛函和高阶积分不等式的配合使用，所得判据包含与 $d^2(t)$ 相关项即二次矩阵多项式。那么，如何判定二次矩阵多项式的负定性成为影响判据保守性的关键因素之一。文献[77]提出一种时滞区间分段方法，利用切线信息来保证二次矩阵多项式的负定性。文献[82]通过考虑时滞区间端点的几何性质，得到新型二次矩阵多项式不等式。文献[55]根据泰勒公式提出了一种新型二次矩阵多项式不等式，包含文献[83]所提结果。文献[84]针对二次矩阵多项式，提出基于几何性质的约束条件，通过调节可变参数降低系统判据的保守性。文献[122]利用文献[83]所提矩阵多项式不等式，研究了时滞神经网络的稳定性问题。通过回顾现有研究成果可知，现有二次矩阵多项式不等式的设计方法，大多忽略了时滞区间的优化，限制了所得稳定判据的保守性。

本章提出新型二次矩阵多项式不等式和时滞乘积 L-K 泛函，针对具有不确定性和输入时滞的 NCS，得到系统的稳定判据和控制策略。首先，基于时滞分段方法引入优化参数，提出更具一般性的新型二次矩阵多项式不等式。其次，采用积分耦合项，引入时滞的二次乘积相关项，建立了新型时滞乘积 L-K 泛函。结合所提矩阵多项式不等式和 L-K 泛函，针对具有不确定性和传输延迟的 NCS，构建新型 H_∞ 稳定性分析和控制设计方法。最后，通过数值算例表明所提判据的低保守性，基于直升机测试系统验证控制器的有效性。

4.2 问题描述及预备知识

典型 NCS 的结构如图 4-1 所示。系统的动态方程可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_1 w(t) + Gp(t) \\ z(t) = Cx(t) + D_2 w(t) \\ q(t) = Ex(t) + E_q w(t) \end{cases} \quad (4-1)$$

其中， A 、 B 、 C 、 D_1 、 D_2 、 E 、 E_q 和 G 为系统矩阵， $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $u(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别表示系统状态和控制输入向量， $w(t) \in \mathbf{R}^v$ 和 $z(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别表示外部干扰和可测量输出， $p(t)$ 是系统具有的不确定性，满足如下关于 $q(t)$ 约束限制

$$\begin{cases} p(t) = \Delta(t)q(t) \\ s.t. \Delta^T(t)\Delta(t) \leq \sigma^2 I \end{cases} \quad (4-2)$$

其中， σ 为给定常数。具有输入时滞的控制器可描述为

$$u(t) = Kx(t - d(t)) \quad (4-3)$$

其中时变时滞函数 $d(t)$ 是由数据包重传或网络攻击引起的通信延迟, 满足以下条件

$$0 \leq d(t) \leq \bar{d}, \quad \mu_1 \leq \dot{d}(t) \leq \mu_2 \quad (4-4)$$

基于控制器(4-3), 闭环 NCS 重述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d(t)) + D_1 w(t) + Gp(t) \\ z(t) = Cx(t) + D_2 w(t) \\ q(t) = Ex(t) + E_q w(t) \\ x(t) = \varpi(t), \forall t \in [-d_2, 0] \end{cases} \quad (4-5)$$

其中, $\varpi(t)$ 为给定的系统初始条件。针对具有不确定性和输入时滞的 NCS, 为了得到系统稳定条件, 给出如下引理:

引理 4-1^[74]: 对于标量 $\varepsilon \in (0, 1)$, 矩阵 $R_1 > 0$ 和 $R_2 > 0$, 如果存在实数矩阵 T_1 和 T_2 , 对称矩阵 S_1 和 S_2 , 使得

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} S_1 & T_1 \\ * & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ * & S_2 \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

那么, 如下不等式约束成立

$$\begin{bmatrix} 1/\varepsilon R_1 & 0 \\ * & 1/(1-\varepsilon) R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ * & R_2 \end{bmatrix} + (1-\varepsilon) \begin{bmatrix} S_1 & T_2 \\ * & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & T_1 \\ * & S_2 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

引理 4-2^[66]: 对于可微函数 $x(u): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和矩阵 $R > 0$, 则

$$\int_{\alpha}^{\beta} \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \geq \frac{1}{\beta - \alpha} (\mathcal{G}_1^T R \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2^T 3R \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3^T 5R \mathcal{G}_3) \quad (4-8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= x(\beta) - x(\alpha), \quad \mathcal{G}_2 = x(\beta) + x(\alpha) - \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x(u) du \\ \mathcal{G}_3 &= \mathcal{G}_1 - \frac{6}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x(u) du + \frac{12}{(\beta - \alpha)^2} \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - u) x(u) du \end{aligned}$$

4.3 新型矩阵多项式不等式

定理 4-1: 对于二次矩阵多项式函数 $M(s) = \omega_2 s^2 + \omega_1 s + \omega_0$, 其中 $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^p$, $s \in [d_1, d_2]$ 。如果式(4-9)和式(4-10)对给定的 N 和 $\delta_j \in [0, 0.5]$ 成立, 则 $M(s) < 0$ 对于 $\forall s \in [d_1, d_2]$ 成立。

$$M(d_1) < 0, M(d_2) < 0 \quad (4-9)$$

$$M\left(\frac{s_{i+1}+s_i}{2}\right)-\left(\frac{s_{i+1}-s_i}{2}\right)^2\omega_2 < 0 \quad (4-10)$$

其中 s_i 定义在式(4-11), $i=0,1,\dots,3\cdot 2^{N-1}$ 和 $j=0,1,\dots,2^{N-1}$ 。

证明：首先，如果 $\omega_2 \geq 0$ ，则矩阵值函数 $M(s)$ 是凸函数。式(4-9)保证了 $M(s) < 0$ 对 $\forall s \in [d_1, d_2]$ 成立。

其次，当 $\omega_2 < 0$ 时，利用 $s_{3j} = j/2^{N-1} d_{12} + d_1$ 将时滞区间 $[d_1, d_2]$ 平均分成 2^{N-1} 个子区间，其中 $d_{12} = d_2 - d_1$ 。在每个子区间中，假设存在如下两个动点

$$\begin{aligned} s_{3j+1} &= (1-\delta_j)s_{3j} + \delta_j s_{3(j+1)} \\ s_{3j+2} &= (1-\delta_j)s_{3(j+1)} + \delta_j s_{3j} \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中 δ_j 是 $[0, 0.5]$ 中的任意常数。 $\{s_i\}$ 在区间 $[d_1, d_2]$ 上的分布可通过参数 δ_j 进行调整。 $M(s)$ 在 s_i 和 s_{i+1} 处的切线矩阵函数如下：

$$\begin{aligned} f_i(s) &= \dot{M}(s_i)(s-s_i) + M(s_i) \\ &= -\omega_2(s-s_i)^2 + \omega(x) \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned} f_{i+1}(s) &= \dot{M}(s_{i+1})(s-s_{i+1}) + M(s_{i+1}) \\ &= -\omega_2(s-s_{i+1})^2 + M(s) \end{aligned} \quad (4-13)$$

由于 $\omega_2 < 0$ ，如下不等式条件成立

$$f_i(s) \geq M(s), \quad f_{i+1}(s) \geq M(s) \quad (4-14)$$

通过联立式(4-12)-式(4-13)， $f_i(s)$ 和 $f_{i+1}(s)$ 在 $s=(s_i+s_{i+1})/2$ 处相交。因此，如果式(4-15)成立，则 $M(s) < 0$ 在区间 $[s_i, s_{i+1}]$ 上成立。

$$f_i\left(\frac{s_i+s_{i+1}}{2}\right) = M\left(\frac{s_{i+1}+s_i}{2}\right) - \left(\frac{s_{i+1}-s_i}{2}\right)^2\omega_2 < 0 \quad (4-15)$$

因此，当 $\omega_2 < 0$ 时，如果式(4-10)对于 $s_i (i=0,1,\dots,3\cdot 2^{N-1})$ 成立，那么 $M(s) < 0$ 。综合 $\omega_2 < 0$ 和 $\omega_2 \geq 0$ 两种情况，式(4-9)和(4-10)保证了 $M(s) < 0$ 对于 $s \in [d_1, d_2]$ 成立。

注 4-1：定理 4-1 通过引入可调参数 δ_j 和 N ，提出一种新型的二次矩阵多项式不等式。通过调整优化参数，定理 4-1 可包含部分现有方法，具体细节如下：

(1) 取 $\delta_j = 0.5$ ，定理 4-1 等价于文献[123]中的结果。由于 $\delta_j = 0.5$ ， s_{3j+1} 和 s_{3j+2} 等于 $(s_{3j} + s_{3(j+1)})/2$ ，则定理 4-1 简化为

$$M(d_1) < 0, M(d_2) < 0, \frac{h_{12}}{2^{k+1}} \dot{M}\left(\frac{(i-1)d_{12}}{2^k} + d_1\right) + M\left(\frac{(i-1)d_{12}}{2^k} + d_1\right) < 0 \quad (4-16)$$

明显，式(4-16)等价于文献[123]中的引理 3。

(2) 取 $N=1$ ， $s_2 = d_2$ 和 $\delta_1 \in [0, 1]$ ，定理 4-1 等价于文献[84]中结果。根据假设条

件, 取 $s_0 = d_1$, $s_1 = (1 - \delta_1)s_0 + \delta_1 s_3$, $s_2 = s_3 = d_2$ 。则定理 4-1 可简化为

$$\begin{aligned} M(d_1) < 0, \quad M\left(\frac{s_1 + s_0}{2}\right) - \left(\frac{s_1 - s_0}{2}\right)^2 \omega_2 < 0 \\ M(d_2) < 0, \quad M\left(\frac{s_2 + s_1}{2}\right) - \left(\frac{s_2 - s_1}{2}\right)^2 \omega_2 < 0 \end{aligned} \quad (4-17)$$

易得式(4-17)等价于文献[84]中的引理 3。

(3) 取 $N=1$ 和 $\delta_j = 0.5$, 定理 4-1 简化为文献[124]所提方法。

注 4-2: 定理 4-1 所得新型二次矩阵多项式不等式与文献[83]和文献[55]的结果不同。通过引入了两个独立参数, 运用矩阵切线函数的相交信息, 通过参数 δ_j 和 N 优化矩阵不等式。而且可调参数 δ_j 和 N 都是预先确定的标量值, 不会给系统稳定判据引入额外的计算复杂度。

4.4 主要结果

本节利用定理 4-1 提出的负定性方法, 建立了新型 H_∞ 稳定性判据和控制器设计方案。为表达简洁, 定义如下符号

$$\begin{aligned} d_t &= d(t), \quad d_h = \bar{d} - d(t), \quad \ell_0 = 0, \quad \ell_d = A\ell_1 + BK\ell_2 + D_1\ell_{10} + G\ell_{11} \\ \ell_i &= \begin{bmatrix} 0_{n(i-1)n} & I_n & 0_{n(11-i)n} \end{bmatrix} (i=1, 2, \dots, 11) \\ \eta_t &= \text{col}\{\xi_t, v_1, v_2, v_3, v_4, \dot{x}(t-d_t), \dot{x}(t-\bar{d}), w(t)\} \\ \xi_t &= \text{col}\{x(t), x(t-d_t), x(t-\bar{d})\}, \quad v_1 = \int_{t-d_t}^t \frac{x(u)}{d_t} du, \quad v_2 = \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \frac{x(u)}{d_h} du \\ v_3 &= \int_{t-d(t)}^t \frac{(t-u)x(u)}{d_t^2} du, \quad v_4 = \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \frac{(t-d_t-u)x(u)}{d_h^2} du \end{aligned}$$

定理 4-2: 对于给定整数 N 、可调参数 $\delta_j \in [0, 0.5]$ 和控制器增益 K , 网络化控制系统(4-5)是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 性能 γ , 如果存在 $P_i > 0$ ($i=1, \dots, 4$), $Z_k > 0$ 和 $R > 0$, 对称矩阵 S_k 和实数矩阵 T_k ($k=1, 2$), 对 $\dot{d}_t \in \{\mu_1, \mu_2\}$ 满足以下矩阵不等式约束条件。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R - S_1 & T_1 \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} R & T_2 \\ * & R - S_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Gamma(0, \dot{d}(t)) < 0, \quad \Gamma(\bar{d}, \dot{d}(t)) < 0 \\ \Gamma\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}, \dot{d}(t)\right) - \left(\frac{s_{i+1} - s_i}{2}\right)^2 \Gamma_2 < 0 (i=0, 1, \dots, 3 \cdot 2^{N-1}) \end{aligned} \quad (4-18)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Gamma(d_t, \dot{d}_t) &= \Gamma_2 d_t^2 + \Gamma_1 d_t + \Gamma_0 + \Upsilon + \Psi, \quad s_{3j} = j/2^{N-1} \bar{d} \\
 s_{3j+1} &= (1-\delta)x_{3j} + \delta x_{3(j+1)}, \quad s_{3j+2} = (1-\delta)x_{3(j+1)} + \delta x_{3j} \quad (j=0,1,\dots,2^{N-1}) \\
 \Gamma_0 &= He\{\bar{d}\gamma_1^T P_2 \gamma_2 + \bar{d}^2 \zeta_4^T P_4 \zeta_5 - \dot{d}_t \bar{d} \zeta_4^T P_4 \zeta_4 + \gamma_3^T Z_1 \gamma_4 + \gamma_5^T Z_2 \gamma_6 \\
 &\quad - N_1^T T_2 N_2 + \dot{d}_t \gamma_2^T (P_1 - P_2) \gamma_2\} + \gamma_7^T Z_1 \gamma_7 - (1-\dot{d}_t)(\gamma_8^T Z_1 \gamma_8 - \gamma_9^T Z_2 \gamma_9) \\
 &\quad - \gamma_{10}^T Z_2 \gamma_{10} + \bar{d}^2 \ell_d^T R \ell_d - N_1^T (R + S_1) N_1 - N_2^T R N_2 \\
 \Gamma_1 &= He\{\gamma_1^T (P_1 - P_2) \gamma_2 + \bar{d} \gamma_1^T P_2 \gamma_{11} + \dot{d}_t \gamma_2^T (P_1 - P_2) \gamma_{11} - 2\bar{d} \zeta_4^T P_4 \zeta_5 \\
 &\quad + \dot{d}_t \zeta_4^T (P_3 + P_4) \zeta_4 + \gamma_{12}^T Z_1 \gamma_4 + \gamma_{13}^T Z_2 \gamma_6 + \gamma_{14}^T Z_1 \gamma_7 - (1-\dot{d}_t)(\gamma_{15}^T Z_1 \gamma_8 - \gamma_{16}^T Z_2 \gamma_9) \\
 &\quad - \gamma_{17}^T Z_2 \gamma_{10} - \frac{1}{d} N_1^T (T_1 - T_2) N_2\} + \frac{1}{d} N_1^T S_1 N_1 - \frac{1}{d} N_2^T S_2 N_2 \\
 \Gamma_2 &= He\{\gamma_1^T (P_1 - P_2) \gamma_{11} + \zeta_4^T (P_3 + P_4) \zeta_5 + \gamma_{18}^T Z_1 \gamma_3 + \gamma_{19}^T Z_2 \gamma_6\} \\
 &\quad + \dot{d}_t \gamma_{11}^T (P_1 - P_2) \gamma_{11} + \gamma_{14}^T Z_1 \gamma_{14} - (1-\dot{d}_t)(\gamma_{15}^T Z_1 \gamma_{15} - \gamma_{16}^T Z_2 \gamma_{16}) + \gamma_{17}^T Z_2 \gamma_{17} \\
 \Upsilon &= (E \ell_1 + E_d \ell_{10})^T (E \ell_1 + E_d \ell_{10}) - \sigma^2 \ell_{11}^T \ell_{11} \\
 \Psi &= (C \ell_1^T + D_2 \ell_{10}^T)^T (C \ell_1^T + D_2 \ell_{10}^T) - I^2 \ell_{10}^T \ell_{10} \\
 \zeta_1^T &= [\ell_1^T - \ell_2^T - \dot{d}_t \ell_2^T \quad \ell_2^T - \ell_3^T - \dot{d}_t \ell_2^T] \\
 \zeta_2^T &= [(-1 + \dot{d}_t) \ell_2^T + \ell_4^T - \dot{d}_t \ell_6^T \quad -\ell_3^T + (1 - \dot{d}_t) \ell_5^T + \dot{d}_t \ell_7^T] \\
 \zeta_3^T &= [\ell_0^T \quad \ell_0^T \quad \ell_d^T \quad (1 - \dot{d}_t) \ell_8^T \quad \ell_9^T], \quad \zeta_4^T = [\ell_1^T \quad \ell_3^T], \quad \zeta_5^T = [\ell_d^T \quad \ell_9^T] \\
 \gamma_1 &= [\ell_d^T \quad (1 - \dot{d}_t) \ell_8^T \quad \ell_9^T \quad \zeta_1^T \quad \zeta_2^T], \quad \gamma_2 = [\ell_1^T \quad \ell_2^T \quad \ell_3^T \quad \ell_0^T \quad \bar{d} \ell_7^T \quad \ell_0^T \quad \bar{d} \ell_9^T] \\
 \gamma_3 &= [\ell_1^T - \ell_2^T \quad \ell_0^T \quad \zeta_6^T], \quad \zeta_6^T = [\ell_0^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T], \quad \gamma_4 = [\zeta_3^T \quad \ell_1^T \quad -(1 - \dot{d}_t) \ell_2^T] \\
 \gamma_5 &= [\ell_2^T - \ell_3^T \quad \bar{d} \ell_5^T \quad \bar{d} \ell_1^T \quad \bar{d} \ell_2^T \quad \bar{d} \ell_3^T \quad \bar{d}^2 (\ell_5^T - \ell_7^T) \quad \bar{d}^2 \ell_7^T] \\
 \gamma_6 &= [\zeta_3^T \quad (1 - \dot{d}_t) \ell_2^T \quad -\ell_3^T], \quad \gamma_7 = [\ell_d^T \quad \ell_1^T \quad \ell_1^T \quad \ell_2^T \quad \ell_3^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T] \\
 \gamma_8 &= [\ell_4^T \quad \ell_2^T \quad \ell_1^T \quad \ell_2^T \quad \ell_3^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T], \quad \gamma_9 = [\ell_8^T \quad \ell_2^T \quad \ell_1^T \quad \ell_2^T \quad \ell_3^T \quad \ell_0^T \quad \bar{d} \ell_5^T] \\
 \gamma_{10} &= [\ell_9^T \quad \ell_3^T \quad \ell_1^T \quad \ell_2^T \quad \ell_3^T \quad \bar{d} \ell_5^T \quad \ell_0^T], \quad \gamma_{11} = [\ell_0^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T \quad \ell_4^T \quad -\ell_5^T \quad \ell_6^T \quad -\ell_7^T] \\
 \gamma_{12} &= [\ell_0^T \quad \ell_4^T \quad \ell_1^T \quad \ell_2^T \quad \ell_3^T \quad \ell_0^T \quad \ell_0^T], \quad \gamma_{17} = [\zeta_6^T \quad -\ell_5^T \quad -\ell_0^T] \\
 \gamma_{13} &= [\ell_0^T \quad -\ell_5^T \quad -\ell_1^T \quad -\ell_2^T \quad -\ell_3^T \quad -2\bar{d}(\ell_5^T - \ell_7^T) \quad -2\bar{d} \ell_7^T] \\
 \gamma_{14} &= [\zeta_6^T \quad \ell_0^T \quad \ell_4^T], \quad \gamma_{15} = [\zeta_6^T \quad \ell_4^T \quad \ell_0^T], \quad \gamma_{16} = [\zeta_6^T \quad \ell_0^T \quad -\ell_5^T] \\
 \gamma_{18} &= [\zeta_6^T \quad \ell_4^T - \ell_6^T \quad \ell_6^T], \quad N_1 = [\ell_1^T - \ell_2^T \quad \ell_1^T + \ell_2^T - 2\ell_4^T \quad \ell_1^T - \ell_2^T - 6\ell_4^T + 12\ell_6^T] \\
 \gamma_{19} &= [\zeta_6^T \quad \ell_5^T - \ell_7^T \quad \ell_7^T], \quad N_2 = [\ell_2^T - \ell_3^T \quad \ell_2^T + \ell_3^T - 2\ell_5^T \quad \ell_2^T - \ell_3^T - 6\ell_5^T + 12\ell_7^T]
 \end{aligned}$$

证明：建构如下时滞乘积 L-K 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (4-19)$$

其中

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \varrho_1^T(t) P_\alpha \varrho_1(t) + \varrho_2^T(t) P_\beta \varrho_2(t) \\
 V_2(t) &= \int_{t-d_t}^t \varrho_3(t, u)^T Z_1 \varrho_3(t, u) du + \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \varrho_4(t, u)^T Z_2 \varrho_4(t, u) du \\
 V_3(t) &= \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \int_u^t \dot{x}^T(v) R \dot{x}(v) dv du \\
 P_\alpha &= d_t P_1 + (\bar{d} - d_t) P_2, \quad P_\beta = d_t^2 P_3 + (\bar{d} - d_t)^2 P_4 \\
 \varrho_1 &= \text{col}\{\xi_t, d_t v_1, d_h v_2, d_t v_3, d_h v_4\}, \quad \varrho_2(t) = \text{col}\{x(t), x(t - \bar{d})\} \\
 \varrho_3(t, u) &= \text{col}\{\dot{x}(u), x(u), \xi_t, \int_u^t x(v) dv, \int_{t-d_t}^u x(v) dv\} \\
 \varrho_4(t, u) &= \text{col}\{\dot{x}(u), x(u), \xi_t, \int_u^{t-d_t} x(v) dv, \int_{t-\bar{d}}^u x(v) dv\}
 \end{aligned}$$

计算 $\dot{V}(t)$ 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= 2\varrho_1^T(t) P_\alpha \dot{\varrho}_1(t) + \varrho_1^T(t) \dot{P}_\alpha \varrho_1(t) + 2\varrho_2^T(t) P_\beta \dot{\varrho}_2(t) + \varrho_2^T(t) \dot{P}_\beta \varrho_2(t) \\
 &\quad + \varrho_3(t, t)^T Z_1 \varrho_3(t, t) + \bar{d}^2 \dot{x}(t) R \dot{x}(t) - (1 - \dot{d}_t)(\varrho_3(t, t - d_t)^T Z_1 \varrho_3(t, t - d_t) \\
 &\quad + \varrho_4(t, t - d_t)^T Z_2 \varrho_4(t, t - d_t)) - \varrho_4(t, t - \bar{d})^T Z_2 \varrho_4(t, t - \bar{d}) \\
 &\quad + 2 \int_{t-d_t}^t \varrho_3^T(t, u) du Z_1 \frac{\partial \varrho_3(t, u)}{\partial t} + 2 \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \varrho_4^T(t, u) du Z_2 \frac{\partial \varrho_4(t, u)}{\partial t} \\
 &\quad - \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varrho_3(t, u)}{\partial t} &= \text{col}\{0, 0, \dot{x}(t), (1 - \dot{d}_t) \dot{x}(t - d_t), \dot{x}(t - \bar{d}), x(t), (\dot{d}_t - 1)x(t - d_t)\} \\
 \frac{\partial \varrho_4(t, u)}{\partial t} &= \text{col}\{0, 0, \dot{x}(t), (1 - \dot{d}_t) \dot{x}(t - d_t), \dot{x}(t - \bar{d}), (1 - \dot{d}_t)x(t - d_t), x(t - \bar{d})\} \\
 \int_{t-d_t}^t \varrho_3^T(t, u) du &= \text{col}\{x(t) - x(t - d_t), d_t v_1, d_t x(t), d_t x(t - d_t), d_t x(t - \bar{d}), \\
 &\quad d_t^2(v_1 - v_3), d_t^2 v_3\} \\
 \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \varrho_4^T(t, u) du &= \text{col}\{x(t - d_t) - x(t - \bar{d}), d_h v_2, d_h x(t), d_h x(t - d_t), \\
 &\quad d_h x(t - d_2), d_h^2(v_2 - v_4), d_h^2 v_4\}
 \end{aligned}$$

根据引理 4-1 和引理 4-2, 估计 $\dot{V}(t)$ 中的积分项, 得到如下线性矩阵不等式条件

$$\begin{aligned}
 -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du &= -\bar{d} \int_{t-d_t}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du - d_2 \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \\
 &\leq -\eta_t^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/\varepsilon R & 0 \\ 0 & 1/(1-\varepsilon) R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \eta_t
 \end{aligned} \tag{4-21}$$

$$\leq -\eta_t^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R + (1-\varepsilon)S_1 & (1-\varepsilon)T_2 + \varepsilon T_1 \\ * & R + \varepsilon S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \eta_t$$

根据限制条件(4-2)，系统不确定性约束为 $0 \leq q^T(t)q(t) - \sigma^2 p^T(t)p(t)$ ，则

$$0 \leq \eta_t^T ((E\ell_1 + E_d\ell_{10})^T (E\ell_1 + E_d\ell_{10}) - \sigma^2 \ell_{11}^T \ell_{11}) \eta_t \quad (4-22)$$

综合式(4-20)-(4-22)，可得

$$\dot{V}(t) \leq \eta_t^T (\Gamma(d_t, \dot{d}_t) - \Psi) \eta_t \quad (4-23)$$

为了保证系统 H_∞ 性能 $\sup_w (\|z(t)\|/\|w(t)\|) < \gamma$ ，设定

$$0 > z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t) + \dot{V}(t) \quad (4-24)$$

综合式(4-23)和式(4-24)，得到系统的鲁棒渐近稳定条件。

$$\begin{aligned} 0 &> (C\ell_1^T + D_2\ell_{10}^T)^T (C\ell_1^T + D_2\ell_{10}^T) - \gamma^2 \ell_6^T \ell_6 + \dot{V}(t) \\ &= \Gamma(d_t, \dot{d}_t) \end{aligned} \quad (4-25)$$

明显看出， $\Gamma(d_t, \dot{d}_t)$ 是关于 d_t 的二次矩阵多项式，可以分解为如下形式

$$\Gamma(d_t, \dot{d}_t) = d_t^2 \Gamma_2(d_t, \dot{d}_t) + d_t \Gamma_1(d_t, \dot{d}_t) + \Gamma_0(d_t, \dot{d}_t) + \Upsilon + \Psi \quad (4-26)$$

通过代数运算，可得二次矩阵多项式 $\Gamma(d_t, \dot{d}_t)$ 的系数 Γ_2 ， Γ_1 和 Γ_0 。由于 $\Gamma(d_t, \dot{d}_t)$ 关于 \dot{d}_t 是仿射的，当 $\Gamma(d_t, \mu_1) < 0$ 和 $\Gamma(d_t, \mu_2) < 0$ 时， $\Gamma(d_t, \dot{d}_t) < 0$ 对 $\forall \dot{d}_t \in [\mu_1, \mu_2]$ 成立。为方便起见，将 δ_j 设置为相同的值并记为 δ 。根据定理 4-1 可得，如果式(4-18)成立，则 $\Gamma(d_t, \dot{d}_t) < 0$ 。也就是说，不等式约束条件(4-18)对 $\dot{d}(t) \in [\mu_1, \mu_2]$ 成立，则原 NCS 系统性能函数 $\int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t)dt \leq 0$ 保证成立，证明完毕。

注 4-3：通过构建二次时滞乘积项 $\varrho_2^T(t)P_\beta\varrho_2(t)$ ，引入 ξ_1 和 ξ_2 改进单积分项，本章提出新型时滞乘积 L-K 泛函。通过取 $P_\beta = 0$ 和 $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ， $V(t)$ 等价于文献[123]所提 L-K 泛函。文本所提 L-K 泛函更具一般性，包含了更多的系统状态和时滞信息，增加了泛函的自由度，降低了稳定性判据的保守性。表 4-1 提供了计算系统时滞稳定上界的步骤。

定理 4-1 提供了具有系统不确定性和输入时滞 NCS 的稳定性判据。给定控制器增益 K ，基于所提稳定判据能够有效分析系统稳定性和时滞稳定区间的关系。然而，控制增益 K 与决策变量 P 相互耦合，耦合项无法直接通过线性矩阵工具箱优化

求解，即定理 4-1 无法直接求解控制增益 K 。因此，本节提出一种易于优化求解控制器参数的方法。

表 4-1 获取时滞稳定上界的步骤

Table 4-1 Step to obtain the maximum delay boundary

算法：基于定理 4-1 获得 NCS 最大时滞上界

输入：系统矩阵， H_∞ 性能参数 γ ，可调参数 N ，精度系数 d_{\min} 和 δ_{\min} ；

1. 设置初始值 $\delta = 0$ ， $\bar{d} = 0$ ， $N = 1$ ， $d_{tem} = 0$ ；
2. 创建决策变量 P_i ， Z_k ， R ， S_k ， T_k ；
3. 根据定理 4-1 构造决策变量 $\Gamma(d_i, \dot{d}_i)$ ；
4. 检查 LMI(4-18)的可行性；
5. 如果约束条件(4-18)可行，则
6. 令 $\bar{d} = \bar{d} + d_{\min}$ ，返回步骤 5；
7. 否则
8. 如果 $\delta \leq 0.5$ ，则
9. 令 $\delta = \delta + \delta_{\min}$ ， $d_{tem} = \bar{d} - d_{\min}$ ，返回步骤 5；
10. 否则
11. 令 $\bar{d} = d_{tem}$ ；
12. 结束
13. 结束
14. 如果放松 \bar{d} ，则
15. 返回步骤 1，令 $N = N + 1$ ；
16. 结束

输出：最大时滞上界 \bar{d}

定理 4-3：对于给定整数 N 、可调参数 $\delta \in [0, 0.5]$ ，网络化控制系统(4-5)是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 性能 γ ，如果存在 $\tilde{P}_i > 0 (i=1, \dots, 4)$ ， $\tilde{Z}_k > 0$ ， $\tilde{R} > 0$ ，对称矩阵 \tilde{S}_k 和实数矩阵 $\tilde{T}_k (k=1, 2)$ ， X ， Y ，对 $\dot{d}_i \in \{\mu_1, \mu_2\}$ 满足以下不等式约束条件

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} - \tilde{S}_1 & \tilde{T}_1 \\ * & \tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{T}_2 \\ * & \tilde{R} - \tilde{S}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \tilde{\Gamma}(0, \dot{d}_i) < 0, \tilde{\Gamma}(\bar{d}, \dot{d}_i) < 0 \quad (4-27)$$

$$\Phi\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}, \dot{d}_i\right) - \left(\frac{s_{i+1} - s_i}{2}\right)^2 \tilde{\Gamma}_2(\dot{d}_i) < 0 (i=0, 1, \dots, 3 \cdot 2^{N-1})$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi(d_i, \dot{d}_i) &= \tilde{\Gamma}_2 d_i^2 + \tilde{\Gamma}_1 d_i + \tilde{\Gamma}_0 + He\{\tilde{F} \tilde{\Gamma}_c\} \\ \tilde{\Gamma}_0 &= He\{\bar{d} \tilde{\Gamma}_1^T \tilde{P}_2 \tilde{\Gamma}_2 + \bar{d}^2 \tilde{\zeta}_4^T \tilde{P}_4 \tilde{\zeta}_5 - \dot{d}_i \bar{d} \tilde{\zeta}_4^T \tilde{P}_4 \tilde{\zeta}_4 + \tilde{\Gamma}_3^T \tilde{Z}_1 \tilde{\Gamma}_4 + \tilde{\Gamma}_5^T \tilde{Z}_2 \tilde{\Gamma}_6 \\ &\quad - N_1^T \tilde{T}_2 N_2 + \dot{d}_i \tilde{\Gamma}_2^T (\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2) \tilde{\Gamma}_2\} \tilde{\Gamma}_7^T \tilde{Z}_1 \tilde{\Gamma}_7 - (1 - \dot{d}_i) (\tilde{\Gamma}_8^T \tilde{Z}_1 \tilde{\Gamma}_8 - \tilde{\Gamma}_9^T \tilde{Z}_2 \tilde{\Gamma}_9) \\ &\quad - \tilde{\Gamma}_{10}^T \tilde{Z}_2 \tilde{\Gamma}_{10} + \bar{d}^2 \tilde{\ell}_{11}^T \tilde{R} \tilde{\ell}_{11} - N_1^T (\tilde{R} + \tilde{S}_1) N_1 - N_2^T \tilde{R} N_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_1 &= He\{\tilde{\Gamma}_1^T(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2)\tilde{\Gamma}_2 + \bar{d}\tilde{\Gamma}_1^T\tilde{P}_2\tilde{\Gamma}_{11} + \dot{d}_t\tilde{\Gamma}_2^T(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2)\tilde{\Gamma}_{11} - 2\bar{d}\tilde{\zeta}_4^T\tilde{P}_4\tilde{\zeta}_5 \\
 &\quad + \dot{d}_t\tilde{\zeta}_4^T(\tilde{P}_3 + \tilde{P}_4)\tilde{\zeta}_4 + \tilde{\Gamma}_{12}^T\tilde{Z}_1\tilde{\Gamma}_4\tilde{\Gamma}_{13}^T\tilde{Z}_2\tilde{\Gamma}_6 + \tilde{\Gamma}_{14}^T\tilde{Z}_1\tilde{\Gamma}_7 - (1 - \dot{d}_t)(\tilde{\Gamma}_{15}^T\tilde{Z}_1\tilde{\Gamma}_8 - \tilde{\Gamma}_{16}^T\tilde{Z}_2\tilde{\Gamma}_9) \\
 &\quad - \tilde{\Gamma}_{17}^T\tilde{Z}_2\tilde{\Gamma}_{10} - \frac{1}{d}N_1^T(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2)N_2\} + \frac{1}{d}N_1^T\tilde{S}_1N_1 - \frac{1}{d}N_2^T\tilde{S}_2N_2 \\
 \tilde{\Gamma}_2 &= He\{\tilde{\Gamma}_1^T(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2)\tilde{\Gamma}_{11} + \tilde{\zeta}_4^T(\tilde{P}_3 + \tilde{P}_4)\tilde{\zeta}_5 + \tilde{\Gamma}_{18}^T\tilde{Z}_1\tilde{\Gamma}_3 + \tilde{\Gamma}_{19}^T\tilde{Z}_2\tilde{\Gamma}_6\} \\
 &\quad + \dot{d}_t\tilde{\Gamma}_{11}^T(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2)\tilde{\Gamma}_{11} + \tilde{\Gamma}_{14}^T\tilde{Z}_1\tilde{\Gamma}_{14} - (1 - \dot{d}_t)(\tilde{\Gamma}_{15}^T\tilde{Z}_1\tilde{\Gamma}_{15} - \tilde{\Gamma}_{16}^T\tilde{Z}_2\tilde{\Gamma}_{16}) + \tilde{\Gamma}_{17}^T\tilde{Z}_2\tilde{\Gamma}_{17}, \\
 \tilde{Y} &= (E\tilde{\ell}_1 + E_d\tilde{\ell}_{10})^T(E\tilde{\ell}_1 + E_d\tilde{\ell}_{10}) - \sigma^2\tilde{\ell}_{11}^T\tilde{\ell}_{11} \\
 \tilde{\Psi} &= (C\tilde{\ell}_1^T + D_2\tilde{\ell}_{10}^T)^T(C\tilde{\ell}_1^T + D_2\tilde{\ell}_{10}^T) - \gamma^2\tilde{\ell}_{10}^T\tilde{\ell}_{10} \\
 \tilde{\zeta}_1^T &= [\tilde{\ell}_1^T - \tilde{\ell}_2^T - \dot{d}_t\tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_2^T - \tilde{\ell}_3^T - \dot{d}_t\tilde{\ell}_2^T] \\
 \tilde{\zeta}_2^T &= [(-1 + \dot{d}_t)\tilde{\ell}_2^T + \tilde{\ell}_4^T - \dot{d}_t\tilde{\ell}_6^T \quad -\tilde{\ell}_3^T + (1 - \dot{d}_t)\tilde{\ell}_5^T + \dot{d}_t\tilde{\ell}_7^T] \\
 \tilde{\zeta}_3^T &= [\tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_{11}^T \quad (1 - \dot{d}_t)\tilde{\ell}_8^T \quad \tilde{\ell}_9^T], \quad \tilde{\zeta}_4^T = [\tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_3^T] \\
 \tilde{\zeta}_5^T &= [\tilde{\ell}_{11}^T \quad \tilde{\ell}_9^T], \quad \tilde{\zeta}_6^T = [\tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T] \\
 \tilde{\Gamma}_1 &= [\tilde{\ell}_{11}^T \quad (1 - \dot{d}_t)\tilde{\ell}_8^T \quad \tilde{\ell}_9^T \quad \tilde{\zeta}_1^T \quad \tilde{\zeta}_2^T], \quad \tilde{\Gamma}_2 = [\tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_7^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_9^T] \\
 \tilde{\Gamma}_3 &= [\tilde{\ell}_1^T - \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\zeta}_6^T], \quad \tilde{\Gamma}_4 = [\tilde{\zeta}_3^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad -(1 - \dot{d}_t)\tilde{\ell}_2^T] \\
 \tilde{\Gamma}_5 &= [\tilde{\ell}_2^T - \tilde{\ell}_3^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_5^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_1^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_2^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_3^T \quad \bar{d}^2(\tilde{\ell}_5^T - \tilde{\ell}_7^T) \quad \bar{d}^2\tilde{\ell}_7^T] \\
 \tilde{\Gamma}_6 &= [\tilde{\zeta}_3^T \quad (1 - \dot{d}_t)\tilde{\ell}_2^T \quad -\tilde{\ell}_3^T], \quad \tilde{\Gamma}_7 = [\tilde{\ell}_{11}^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T] \\
 \tilde{\Gamma}_8 &= [\tilde{\ell}_4^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T], \quad \tilde{\Gamma}_9 = [\tilde{\ell}_8^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_5^T] \\
 \tilde{\Gamma}_{10} &= [\tilde{\ell}_9^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \bar{d}\tilde{\ell}_5^T \quad \tilde{\ell}_0^T], \quad \tilde{\Gamma}_{11} = [\tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_4^T \quad -\tilde{\ell}_5^T \quad \tilde{\ell}_6^T \quad -\tilde{\ell}_7^T] \\
 \tilde{\Gamma}_{12} &= [\tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_4^T \quad \tilde{\ell}_1^T \quad \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_0^T], \quad \tilde{\Gamma}_{17} = [\tilde{\zeta}_6^T \quad -\tilde{\ell}_5^T \quad -\tilde{\ell}_0^T] \\
 \tilde{\Gamma}_{13} &= [\tilde{\ell}_0^T \quad -\tilde{\ell}_5^T \quad -\tilde{\ell}_1^T \quad -\tilde{\ell}_2^T \quad -\tilde{\ell}_3^T \quad -2\bar{d}(\tilde{\ell}_5^T - \tilde{\ell}_7^T) \quad -2\bar{d}\tilde{\ell}_7^T] \\
 \tilde{\Gamma}_{14} &= [\tilde{\zeta}_6^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad \tilde{\ell}_4^T], \quad \tilde{\Gamma}_{15} = [\tilde{\zeta}_6^T \quad \tilde{\ell}_4^T \quad \tilde{\ell}_0^T], \quad \tilde{\Gamma}_{16} = [\tilde{\zeta}_6^T \quad \tilde{\ell}_0^T \quad -\tilde{\ell}_5^T] \\
 \tilde{\Gamma}_{18} &= [\tilde{\zeta}_6^T \quad \tilde{\ell}_4^T - \tilde{\ell}_6^T \quad \tilde{\ell}_6^T], \quad N_1 = [\tilde{\ell}_1^T - \tilde{\ell}_2^T \quad \tilde{\ell}_1^T + \tilde{\ell}_2^T - 2\tilde{\ell}_4^T \quad \tilde{\ell}_1^T - \tilde{\ell}_2^T - 6\tilde{\ell}_4^T + 12\tilde{\ell}_6^T] \\
 \tilde{\Gamma}_{19} &= [\tilde{\zeta}_6^T \quad \tilde{\ell}_5^T - \tilde{\ell}_7^T \quad \tilde{\ell}_7^T], \quad N_2 = [\tilde{\ell}_2^T - \tilde{\ell}_3^T \quad \tilde{\ell}_2^T + \tilde{\ell}_3^T - 2\tilde{\ell}_5^T \quad \tilde{\ell}_2^T - \tilde{\ell}_3^T - 6\tilde{\ell}_5^T + 12\tilde{\ell}_7^T]
 \end{aligned}$$

则控制器增益为 $K = YX^{-1}$ 。

证明：考虑式(4-19)中的时滞乘积 L-K 泛函，得到如下凸优化问题

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \tilde{\eta}_t^T \tilde{\Gamma}(d_t, \dot{d}_t) \tilde{\eta}_t < 0 \\
 s.t. \quad &0 = \Gamma_c \tilde{\eta}(t)
 \end{aligned} \tag{4-28}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t &= \text{col}\{\eta_t, \dot{x}(t)\}, \quad \tilde{\Gamma}(d_t, \dot{d}_t) = \bar{\Gamma}_2 d_t^2 + \tilde{\Gamma}_1 d_t + \tilde{\Gamma}_0 + \tilde{Y} + \tilde{\Psi} \\ \Gamma_c &= A\tilde{\ell}_1 + BK\tilde{\ell}_2 + D_1\tilde{\ell}_{10} + G\tilde{\ell}_{11} - \tilde{\ell}_{12}\end{aligned}$$

根据系统动态，得到如下零等式

$$\begin{aligned}0 &= 2(x^T(t)X_1 + \dot{x}^T(t)X_2)(-\dot{x}(t) + Ax(t) + BKx(t-d_t) + D_1w(t) + Gp(t) - \dot{x}(t)) \\ &= \tilde{\eta}^T(t)He\{F\Gamma_c\}\tilde{\eta}(t)\end{aligned}\quad (4-29)$$

其中， $F = \tilde{\ell}_1^T X_1 + \tilde{\ell}_{12}^T X_2$ ， $\Gamma_c = -\tilde{\ell}_{12} + A\tilde{\ell}_1 + BK\tilde{\ell}_2 + D_1\tilde{\ell}_{10} + G\tilde{\ell}_{11}$ 。

将式(4-28)与式(4-29)相加可得

$$\tilde{\Gamma}(d_t, \dot{d}_t) + He\{F\Gamma_c\} < 0 \quad (4-30)$$

定义 $X_2 = \nu_1 X_1$ 和 $X = X_1^{-T}$ ，对(4-30)前乘和后乘 χ_{12}^T 和 χ_{12} ，可得

$$\Phi(d_t, \dot{d}_t) < 0 \quad (4-31)$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi(d_t, \dot{d}_t) &= \tilde{\Gamma}_2 d_t^2 + \tilde{\Gamma}_1 d_t + \tilde{\Gamma}_0 + \tilde{Y} + \tilde{\Psi} + He\{F\tilde{\Gamma}_c\}, \quad \chi_i = \text{diag}\{\overbrace{\chi, \dots, \chi}^i\} \\ \tilde{P}_1 &= \chi_7^T P_i \chi_7, \quad \tilde{P}_2 = \chi_7^T P_i \chi_7, \quad \tilde{P}_3 = \chi_2^T P_i \chi_2, \quad \tilde{P}_4 = \chi_2^T P_i \chi_2, \quad \tilde{Q}_1 = \chi_7^T Q_1 \chi_7 \\ \tilde{Q}_2 &= \chi_7^T Q_2 \chi_7, \quad \tilde{Z} = \chi_1^T Z \chi_1, \quad \tilde{X}_1 = \chi_3^T X_1 \chi_3, \quad \tilde{X}_2 = \chi_3^T X_2 \chi_3, \quad \tilde{Y}_1 = \chi_3^T Y_1 \chi_3 \\ \tilde{Y}_2 &= \chi_3^T Y_2 \chi_3, \quad \tilde{F} = \tilde{\ell}_1^T + \nu_1 \tilde{\ell}_{12}^T, \quad \tilde{\Gamma}_c = -\chi_{12}^T \tilde{\ell}_{12} + A\chi_{12}^T \tilde{\ell}_1 + BY\tilde{\ell}_2 + G\chi_{12}^T \tilde{\ell}_{11} + D_1\chi_{12}^T \tilde{\ell}_{10}\end{aligned}$$

根据定理 4-1 可得， $\Phi(d_t, \dot{d}_t) < 0$ 等价于式(4-27)。选择控制参数为 $K = YX^{-1}$ ，系统(4-5)是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 性能 γ 。

4.5 数值算例

本节通过数值算例和仿真实验验证了所提判据的低保守性和控制器的有效性。

例 4-1 和例 4-2 分别研究了 NCS 的渐近稳定性和鲁棒稳定性问题。通过与现有文献结果比较所得时滞稳定上界，验证所提出方法的低保守性。例 4-3 基于直升机测试平台验证了控制器设计方案的有效性。

例 4-1：考虑 NCS 系统参数如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据定理 4-2, 结合 YALMIP 工具箱^[125], 得到系统最大时滞上界 \bar{d} 。将不同时滞导数 $\dot{d}(t)(\mu_2 = \mu_1)$ 的结果记录在表 4-2 中。根据表 4-2 可知, 定理 4-2 通过选取合适的参数 δ 和 N , 得到较大的时滞稳定边界。表明了所提矩阵多项式不等式定理 4-1 的有效性和一般性。

表 4-2 的最大时滞上界(例 3-1)

Table 4-2 The maximum allowable delay in Example 3-1

μ	0.1	0.2	0.5	0.8
[79]	7.230	4.556	2.509	1.940
[126]	7.400	4.795	2.717	2.089
[127]	7.401	4.765	2.709	2.091
[124]	7.572	4.947	2.801	2.137
[123]	7.685	4.985	2.806	2.148
定理 4-2 (N=1)	7.643	4.951	2.791	2.144
定理 4-2 (N=2)	7.674	4.974	2.803	2.149
定理 4-2 (N=3)	7.693	4.987	2.809	2.153
定理 4-2 (N=4)	7.700	4.996	2.812	2.155
定理 4-2 (N=5)	7.709	5.003	2.815	2.156

本节提供 100 个具有不同初始值的系统仿真结果, 如图 4-2 和图 4-3 所示。系统的初始条件在 $[-50, 50]$ 中随机选择。根据表 4-2 中的结果, 将时滞信号设置为 $d_t = 3.854 \sin(0.05/7.709t) + 3.854$ 。图 4-2 和图 4-3 展示了系统状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的响应曲线。根据响应轨迹明显得出系统是渐近稳定的, 这表明了所得稳定性方法的有效性。

例 4-2: 考虑 NCS 系统参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}, \quad BK = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}^T, \\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad E = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad E_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad G = \varphi I.$$

其中 $\varphi \in \{0.5, 1\}$ 。

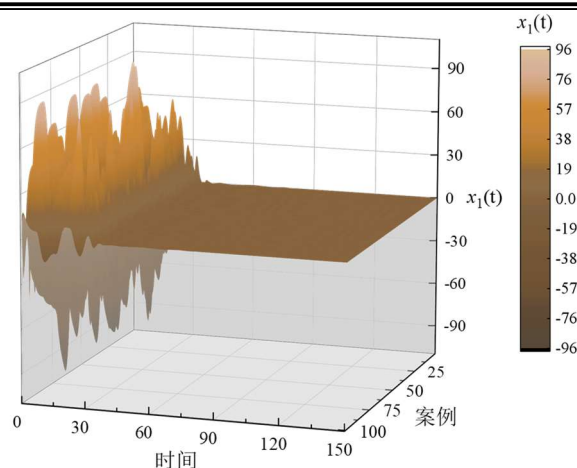

 图 4-2 系统状态 $x_1(t)$ 的响应轨迹

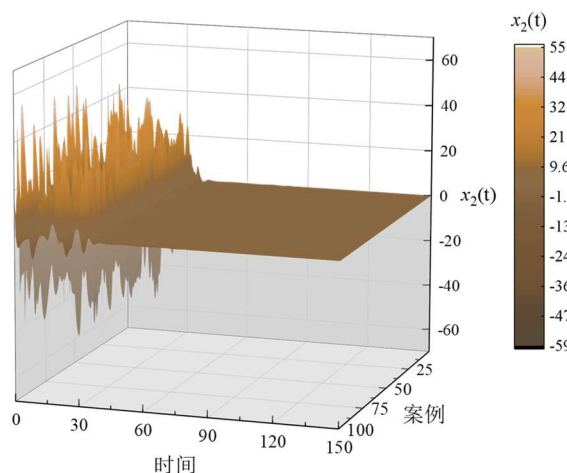
 Fig. 4-2 The response trajectory of the system state $x_1(t)$

 图 4-3 系统状态 $x_2(t)$ 的响应轨迹

 Fig. 4-3 The response trajectory of the system state $x_2(t)$

首先考虑具有传输时滞网络化控制系统的渐近稳定性问题。设定 $\kappa = -0.9$ ， $G = 0$ ， $D_1 = 0$ ，大量文献得到了该系统的时滞相关稳定条件^[123,124,126-128]。根据定理 4-2，得到系统时滞稳定上界 \bar{d} ，与现有文献的结果一同列举在表 4-3 中。得益于所提矩阵不等式，定理 4-2 相比其他方法提供了更大时滞稳定上界。并且，时滞稳定上界 \bar{d} 可通过参数 δ 进行优化。例如，取 $\delta = 0.1$ ，时滞稳定上界 $\bar{d} = 2.975$ 。但是，取 $\delta = 0.33$ ，时滞稳定上界 $\bar{d} = 3.02$ 。表明定理 4-1 引入的可调参数能够有效降低判据的保守性。设置时滞信号 $d_i = 1.75\sin(0.25/3.501t) + 1.75$ ，选择系统初始条件 $x_0 = [-15.96; 8.52]$ ，图 4-4 展示了系统的状态响应相图。根据图 4-4 可得系统是渐近稳定的，反映了本文所提方法的有效性。

表 4-3 时滞稳定上界(例 4-2, $\kappa = -0.9$)Table 4-3 The maximum allowable delay (Example 4-2, $\kappa = -0.9$)

μ	0.1	0.5	0.8
[126]	4.942	3.309	2.882
[127]	4.939	3.298	2.869
[124]	4.966	3.395	2.983
[128]	5.026	3.428	2.997
[123]	5.078	3.481	3.005
定理 4-2 (N=1)	5.036	3.425	2.980
定理 4-2 (N=2)	5.046	3.470	3.020
定理 4-2 (N=3)	5.064	3.489	3.038
定理 4-2 (N=4)	5.087	3.498	3.045
定理 4-2 (N=5)	5.091	3.501	3.047

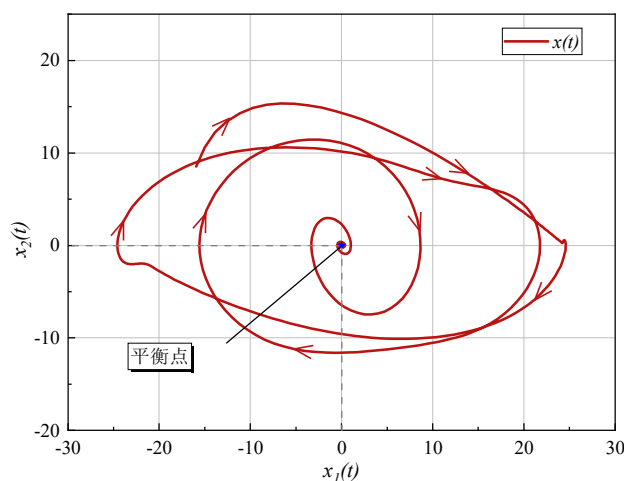


图 4-4 系统状态相位图(例 4-2)

Fig. 4-4 Phase diagram of the system states (Example 4-2)

当 $\kappa = -1$ 时, 文献[57]和[129]研究了网络化控制系统的鲁棒稳定性问题。根据文献[57]和[129], 给定 H_∞ 性能指标 $\gamma = 1$, 表 4-4 展示了不同参数 $\varphi \in \{0.5, 1\}$ 下的时滞稳定上界 \bar{d} 。根据表 4-4 可得, 定理 4-2 提供的稳定性判据比文献[57]和[129]的结果具有更低的保守性, 能够获得更大的时滞稳定边界。

例 4-3: 本算例基于两自由度直升机模型验证所提控制策略的有效性。图 4-5a 展示了两自由度直升机组件的组成。该系统由一个数据采集板、两个无刷直流电机和一个功率放大器构成。图 4-5b 展示了两自由度直升机的自由体图。该系

表 4-4 最大时滞上界(例 4-2, $\kappa = -1$)

Table 4-4 Maximum allowable delay in Example I

方法	$\varphi = 0.5$	$\varphi = 1$
[57]	1.37	1.04
[129]	1.50	1.05
定理 4-2	1.944	1.168

统模型具有两个自由度，分别为绕 Z 轴运动的偏航和绕 Y 轴旋转的俯仰，利用 ψ 和 θ 表示。通过将动能和势能代入拉格朗日函数，得到如下直升机的系统方程

$$\begin{cases} (J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\theta} = k_{pp} V_{mp} + k_{py} V_{my} - B_p \dot{\theta} - m_{heli} l_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi}^2 - m_{heli} g l_{cm} \cos(\theta) \\ (J_{eq,y} + m_{heli} \cos(\theta)^2 l_{cm}^2) \ddot{\psi} = k_{yy} V_{my} + k_{yp} V_{mp} + 2m_{heli} l_{cm}^2 \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi} - B_y \dot{\psi} \end{cases}$$

其中，参数含义如表 4-5 所示

表 4-5 实验室直升机系统参数表

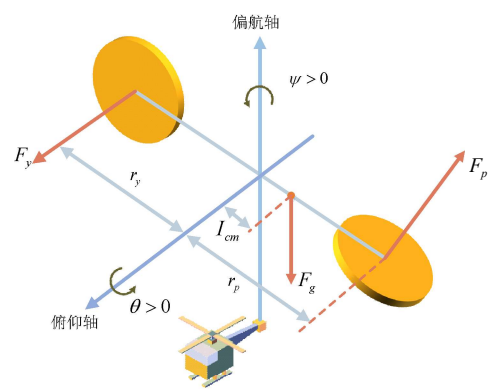
Table 4-5 Parameters of laboratory helicopter model

参数	含义	参数	含义
B_p	俯仰轴等效粘性阻尼	B_y	偏航轴等效粘性阻尼
m_{heli}	直升机总质量	$J_{eq,p}$	俯仰轴惯性力矩
$J_{eq,y}$	偏航轴惯性力矩	l_{cm}	直升机机身长度
K_{pp}	俯仰轴方向推力	K_{py}	俯仰轴方向扭矩
K_{yy}	偏航轴方向推力	K_{yp}	偏航轴方向扭矩



(a) 直升机组件的组成

(a) The components of the helicopter system



(b) 直升机的自由体图

(b) Free-body diagram of the helicopter system

图 4-5 直升机组件

Fig. 4-5 The helicopter system

基于围绕平衡点的线性化策略，两自由度直升机系统的非线性模型可转换为线性模型。代入 $\theta = \dot{\theta} = 0$ 和 $\psi = \dot{\psi} = 0$ ，可得两自由度直升机系统的线性状态空间。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases}$$

其中

$$x_t = [\theta \quad \psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T, \quad u_t = \begin{bmatrix} V_{mp} \\ V_{my} \end{bmatrix}, \quad z_t = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{B_p}{J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_y}{J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_{pp}}{J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2} & \frac{k_{py}}{J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2} \\ \frac{k_{yp}}{J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2} & \frac{k_{yy}}{J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2} \end{bmatrix}.$$

图 4-6 显示了网络化直升机系统工作站的工作流程框图。考虑到指令计算和网络攻击的情况，控制信号在传输过程中容易出现延迟。则闭环直升机网络化控制系统描述如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d_t) \\ z(t) = Cx(t) \\ x(t) = \varpi(t), \forall t \in [-d_2, 0] \end{cases} \quad (4-32)$$

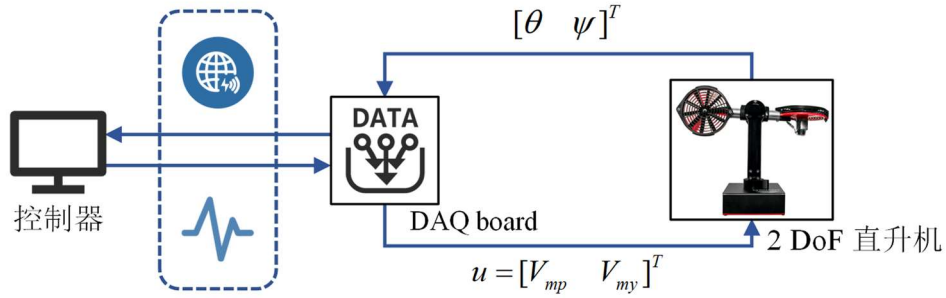


图 4-6 网络化直升机系统框图

Fig. 4-6 Networked Helicopter System Block Diagram

根据文献[130]，直升机闭环网络控制系统参数选取为： $B_p = 0.03 \text{ N/V}$ ， $B_y = 0.8 \text{ N/V}$ ， $m_h = 1.3872 \text{ kg}$ ， $J_{eqp} = 0.0384 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $J_{eqy} = 0.0432 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $l_c = 0.186 \text{ m}$ ， $K_{pp} = 0.204 \text{ Nm/V}$ ， $K_{yy} = 0.072 \text{ Nm/V}$ ， $K_{py} = 0.0068 \text{ Nm/V}$ ， $K_{yp} = 0.0219 \text{ Nm/V}$ 。假设时滞信号满足 $0 \leq d_t \leq 1$ 和 $-0.5 \leq \dot{d}_t \leq 0.5$ 。通过求解定理 4-3 的 LMI 条件，得到如下控制增益

$$K = \begin{bmatrix} -0.125 & 0.017 & -0.230 & -0.011 \\ 0.038 & -0.510 & 0.070 & 0.344 \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

通过仿真结果验证所提控制器的有效性。设置幅值为 0.1 的阶跃信号，设计控制器为 $u(t) = Kx(t - \bar{d})$ ，图 4-7 和图 4-8 分别展示了直升机系统的控制输入和系统状态相图。根据仿真结果可知，所有系统状态和控制输入收敛到平衡点。表明本文提控制方法的有效性。

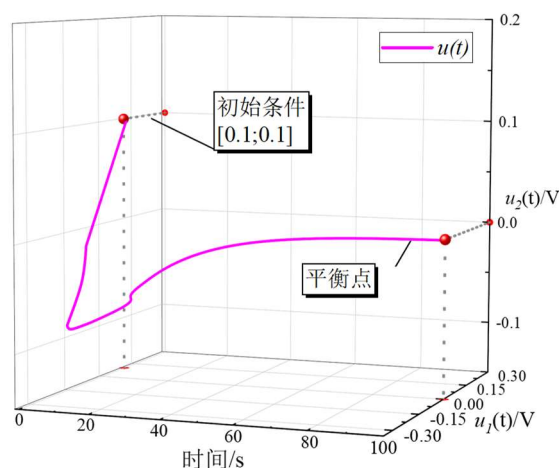


图 4-7 直升机系统控制输入(无扰动)

Fig. 4-7 Control input of the helicopter system (no disturbance)

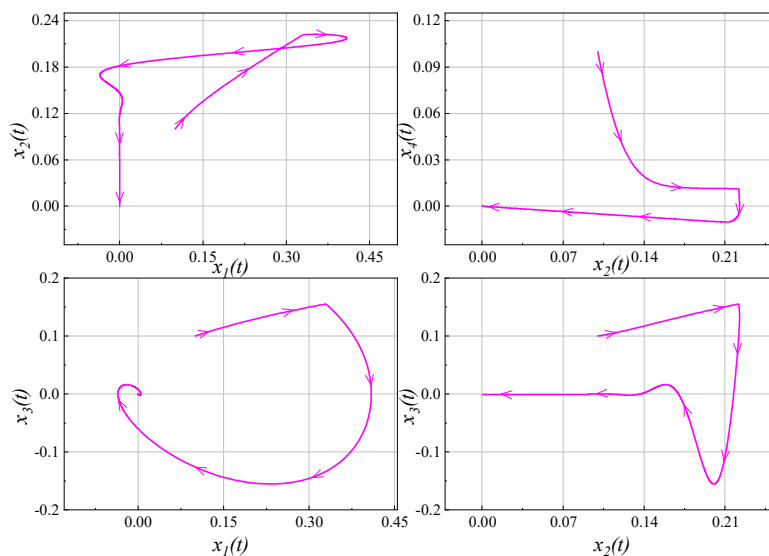


图 4-8 网络化直升机系统状态相图

Fig. 4-8 Phase diagram of networked helicopter system state

设置 $D_1 = [0.1 \ 0.5 \ 0.3 \ 0.1]^T$ ，其余系统参数保持不变，研究具有不确定性和

传输延迟的网络化直升机系统的鲁棒稳定性。通过求解定理 4-3 中的不等式条件，得到系统的最小 H_∞ 性能指标 γ 为 0.86，控制器参数如下：

$$K = \begin{bmatrix} -0.079 & -0.037 & 0.016 & -0.030 \\ -0.968 & -6.115 & 0.565 & -0.808 \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

图 4-9 展示了系统存在的干扰信号。图 4-10 和图 4-11 分别展示了有和无控制输入下系统的动态响应。图 4-12 显示了系统的控制输入。根据仿真结果可得，所得控制器实现了直升机系统得鲁棒稳定，验证了本文所提控制策略的有效性。

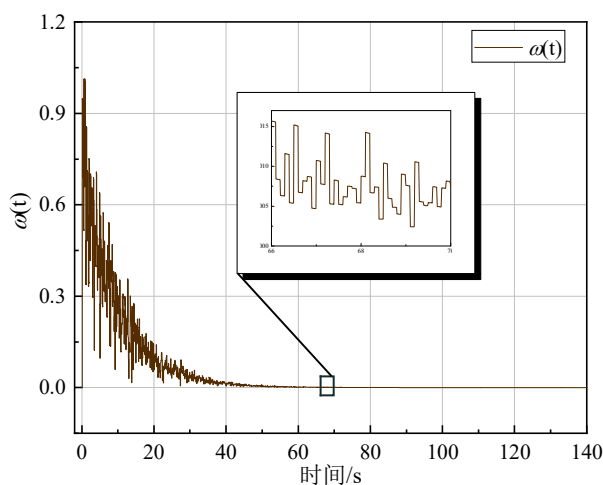


图 4-9 网络化直升机系统的扰动输入信号

Fig. 4-9 Disturbed input signals for networked helicopter systems

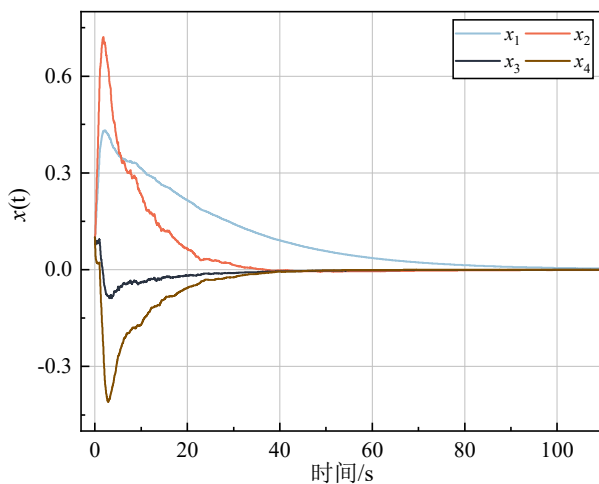


图 4-10 网络化直升机系统的状态响应

Fig. 4-10 System response of networked helicopter systems

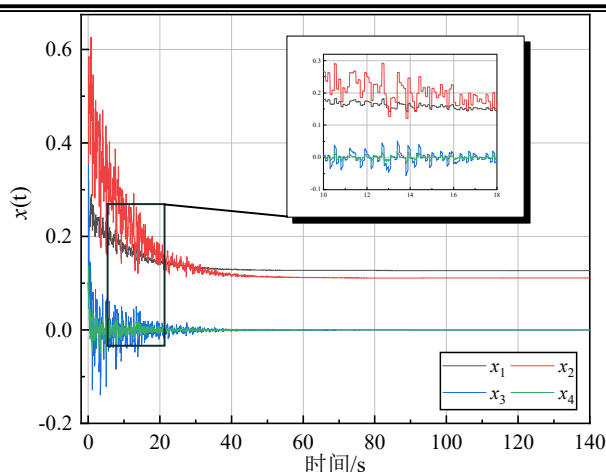


图 4-11 网络化直升机系统的状态响应(无控制输入)

Fig. 4-11 System response of networked helicopter systems (no controller)

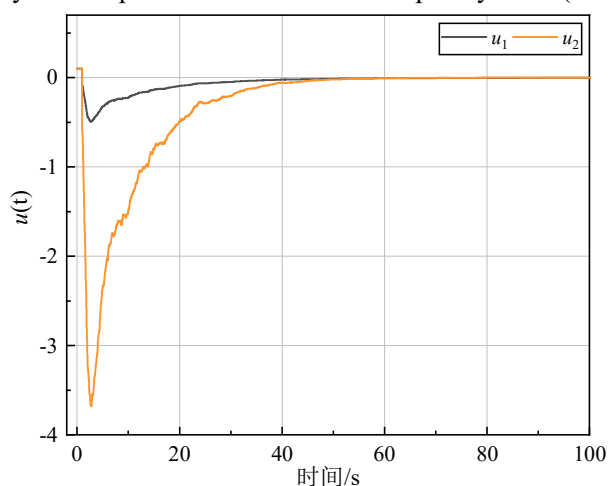


图 4-12 网络化直升机系统的控制输入

Fig. 4-12 Control inputs of networked helicopter systems

4.6 本章小结

本章提出一种参数可调的矩阵多项式不等式，基于新型时滞乘积 L-K 泛函，研究了具有不确定性和传输时滞 NCS 的稳定性分析和控制设计问题。基于提出的矩阵多项式不等式和时滞乘积 L-K 泛函，建立系统稳定判据和控制器设计方法。通过调节参数 N 和 δ ，有效降低系统稳定判据的保守性。最后，通过数值算例验证了所提方案的低保守性和优越性，基于两自由度直升机系统验证了所提控制器的有效性。

第 5 章 改进非对称 L-K 泛函的时滞非线性 T-S 模糊系统稳定分析

第 2, 3, 4 章聚焦于线性时滞系统的稳定性分析研究, 得到保守性较低的稳定判据。本章研究非线性时滞 T-S 模糊系统的稳定分析和控制问题。首先, 设计非对称项, 建立具有时滞乘积项的非对称 L-K 泛函, 放松矩阵的限制条件。其次, 通过高阶矩阵多项式引入松弛变量, 构建广义互凸不等式, 有效降低积分项的估计误差, 部分现存方法可认为是广义互凸不等式的特例。然后, 基于所提非对称 L-K 泛函和广义互凸不等式, 构建保守性较低的稳定判据和镇定条件。最后, 数值算例表明了所提稳定判据的低保守性和控制设计方案的有效性。

5.1 引言

T-S 模糊系统常用于描述工业控制系统中的非线性动态。通过平滑合并多个线性系统趋近原始非线性系统^[131]。借助线性系统理论以及 T-S 模糊规则研究非线性系统的控制问题。信号延迟是一般工程系统中不可避免的组成, 例如多智能体系统^[132]、神经网络^[133]和航空航天^[134]等。因此, 研究非线性时滞 T-S 模糊系统的稳定性与控制综合是十分必要的。非线性时滞 T-S 模糊系统的稳定性研究可分为时滞无关和时滞相关稳定条件。相比于时滞无关结果, 时滞相关判据综合考虑了系统的时滞信号对系统稳定性的影响, 具有更低的保守性^[135]。针对具有时变时滞非线性 T-S 模糊系统, 时滞相关稳定性研究的要旨是得到易于处理的 LMI 条件, 降低判据固有的保守性^[136]。

针对时滞 T-S 模糊系统的稳定性分析问题, 互凸不等式取得了许多具有创新性的成果。文献[70]首次提出利用边界定理来处理二次项的凸组合。文献[71]基于文献[70]所提方法研究了时滞离散 T-S 模糊奇异系统的耗散性问题。文献[65]结合互凸不等式和模糊 L-K 泛函, 得出时滞 T-S 模糊系统的稳定判据。文献[79]提出了一个具有仿射参数的扩展互凸不等式。与文献[72]中的方法相比, 该方法在不影响保守性的情况下减少了矩阵变量的数量, 降低了计算复杂度。文献[75]基于具有仿射参数

的扩展互凸不等式，推导得出时滞 T-S 系统的稳定性和镇定判据。文献[53]基于新型 L-K 泛函和具有仿射参数的扩展互凸不等式建立了模糊系统的稳定性条件。近期研究中，文献[123]通过考虑 $d(t)^2$ 相关项，提出了一种新型互凸不等式。通过引入多项式 $\alpha^m X_i$ ，文献[137]提出了具有可调参数的互凸不等式。文献[138]构建了具有两个仿射参数的互凸不等式，解决了 L-K 泛函导数中凸组合的估计问题。利用时滞的导数信息，文献[139]提出了一种新型时滞相关互凸不等式，建立时变时滞 T-S 模糊系统的稳定条件。更多的松弛变量对降低稳定判据的保守性是有效的。然而，鲜有研究将高阶矩阵多项式引入到互凸不等式的构建中。

提高时滞稳定上界的另一个技术路线是构建合适的 L-K 泛函，例如基于矩阵多项式的 L-K 泛函、增广 L-K 泛函和时滞分割 L-K 泛函等。适合的 L-K 泛函能够有效表达 T-S 模糊的系统状态信息，降低泛函的保守性。文献[140]基于时滞分解方法构建 L-K 泛函，构建模糊系统的稳定性和镇定条件。通过改进增广 L-K 泛函，文献[42]针对非线性时滞 T-S 模糊系统，得到保守性较低的稳定判据。文献[53]发展了时滞乘积 L-K 泛函，结合高阶积分不等式，建立宽松的稳定条件。上述 L-K 泛函设计中所有矩阵均为正定矩阵，增加了泛函的限制条件。文献[59]引入非对称项，得到一类新型非对称 L-K 泛函。文献[141]提出隶属函数相关非对称 L-K，用来获得时滞 T-S 模糊系统的稳定判据。

本章研究了具有时变时滞 T-S 模糊系统的稳定性分析和镇定问题。基于高阶矩阵多项式，提出广义互凸不等式，准确估计凸组合的边界，获得可以直接处理 LMI 条件。考虑时滞乘积项和非对称项，提出了一种新型非对称 L-K 泛函。基于所提广义互凸不等式和具有时滞乘积项的非对称 L-K 泛函，构建保守性较低的稳定判据和控制器设计方案。

5.2 问题描述及预备知识

考虑如下时变时滞非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t - h_t)) \\ x(t) = \omega(t) \quad h_t \in [-\bar{h}, 0] \end{cases} \quad (5-1)$$

其中， $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示系统状态向量。 $g(\cdot)$ 代表任意平滑连续函数。时变时滞 h_t 满足 $0 \leq h_t \leq \bar{h}$ 和 $u_1 \leq \dot{h}_t \leq u_2$ 。初始条件 $\omega(t)$ 是 $[-\bar{h}, 0]$ 上给定的连续函数。基于模糊设计规则，系统(5-1)可描述为如下 T-S 模糊模型

被控对象模糊规则 i : **IF** $\delta_1(t)$ is R_{i1} and ... and $\delta_p(t)$ is R_{ip} , **THEN**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{hi} x(t - h_i) + B_i u(t) \\ x(t) = \omega(t) \quad h_i \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (5-2)$$

其中, A_i 、 A_{hi} 和 B_i 是给定的系统矩阵。 $\delta_j(t)$ 表示包含 $x(t)$ 的系统前件变量, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制向量, R_{ij} ($i \in [1, \sigma], j \in [1, p]$) 表示模糊集, p 和 σ 分别表示系统的前件变量数量和模糊规则。

基于 T-S 模糊规则, 系统(5-2)的动态可描述如下:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i(\delta(t)) (A_i x(t) + A_{hi} x(t - h_i) + B_i u(t)) \quad (5-3)$$

其中

$$\lambda_i(\delta(t)) = \frac{\kappa_i(\delta(t))}{\sum_{i=1}^{\sigma} \kappa_i(\delta(t))}, \quad \kappa_i(\delta(t)) = \prod_{j=1}^p R_{ij}(\delta_j(t))$$

$R_{ij}(\delta_j(t))$ 表示 $\delta_j(t)$ 关于 R_{ij} 的隶属函数。模糊加权函数 $\lambda_i(\delta(t))$ 满足如下条件

$$\lambda_i(\delta(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i(\delta(t)) = 1 \quad (5-4)$$

考虑如下模糊反馈控制器

控制器模糊规则 i : **IF** $\delta_1(t)$ is R_{i1} and ... and $\delta_p(t)$ is R_{ip} , **THEN**

$$u(t) = K_j x(t) (j = 1, \dots, \sigma) \quad (5-5)$$

其中 K_j 是控制增益矩阵。全局控制器如下:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j(\delta(t)) K_j x(t) \quad (5-6)$$

综上, 闭环时滞 T-S 模糊系统可整合为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_i(\delta(t)) \lambda_j(\delta(t)) (A_i x(t) + B_i K_j x(t)) \\ & + \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_i(\delta(t)) \lambda_j(\delta(t)) A_{hi} x(t - h_i) \end{aligned} \quad (5-7)$$

记

$$\dot{x}(t) = (A(\delta_i) + B(\delta_i)K(\delta_i))x(t) + A_h(\delta_i)x(t - h_i) \quad (5-8)$$

为了得到 T-S 模糊系统的稳定条件, 给出如下两个引理:

引理 5-1^[142]: 对于给定矩阵多项式 $M_v(x) = x^{2v} S_{2v} + x^{2v-1} S_{2v-1} + \dots + S_0$ ($S_i \in \mathbf{S}^n$),

$M_v(x) > 0$ 对 $x \in [0, \bar{x}]$ 成立, 当且仅当存在 $N_p \in \mathbf{S}_+^{mv}$ 和斜对称矩阵 $N_s \in \mathbf{R}^{nv \times mv}$, 使得如下条件成立

$$\mathcal{S} - \mathcal{G}(\bar{x})^T \begin{bmatrix} N_p & N_s \\ * & -N_p \end{bmatrix} \mathcal{G}(\bar{x}) > 0 \quad (5-9)$$

其中

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_0 & 0.5S_1 & & & O \\ 0.5S_1 & S_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & S_{2m-2} & 0.5S_{2m-1} & \\ O & & 0.5S_{2m-1} & S_{2m} & \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(d) = \begin{bmatrix} dI & & & O \\ & \ddots & & \vdots \\ & & dI & O \\ dI & -2I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & dI & -2I \end{bmatrix}$$

引理 5-2^[68]: 对于非负整数 N , 标量 α_1 和 α_2 , 可微函数 $\omega(t)$, 以及给定矩阵 $R \in \mathbf{S}^{n+}$, 如下积分不等式成立

$$-\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \leq -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \xi^T \varpi_N^T \mathcal{R} \varpi_N \xi \quad (5-10)$$

其中

$$\Gamma_N = \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^N} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\alpha_2 - s)^{N-1} \psi(s) ds$$

$$\xi = [\psi^T(\alpha_2) \quad \psi^T(\alpha_1) \quad \Gamma_1^T \quad \cdots \quad \Gamma_N^T], \quad \mathcal{R} = \text{diag}\{R, 3R, \dots, (2N+1)R\}$$

$$\varpi_N = \begin{bmatrix} I & O \\ I & -C_1^1 C_2^1 I & & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ I & -C_N^1 C_{N+1}^1 I & \cdots & (-1)^N C_N^N C_{2N}^N I \end{bmatrix} \varpi_N, \quad \psi_N = \begin{bmatrix} I & -I \\ O & -I & I & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ O & -I & O & \cdots & NI \end{bmatrix}$$

5.3 广义互凸不等式

互凸不等式在非线性时滞 T-S 模糊系统的稳定性分析中承担着重要职能。现有结果包含了较少的松弛变量, 限制了互凸不等式的估计精度。因此, 本节基于高阶矩阵多项式提出一种广义互凸不等式。

定理 5-1: 对于非负整数 m 和矩阵 $R \in \mathbf{S}_+^n$, 如果存在矩阵 $M_i \in \mathbf{S}^n, N_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($i=1, \dots, 2m$), $X_p \in \mathbf{S}^{[m/2]n}$ 和斜对称矩阵 $X_s \in \mathbf{R}^{[m/2]n \times [m/2]n}$ 满足如下条件

$$\Theta - \mathcal{G}(1)^T \begin{bmatrix} X_s & X_p \\ * & -X_s \end{bmatrix} \mathcal{G}(1) > 0 \quad (5-11)$$

则以下不等式约束

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon} R & O \\ \epsilon & \\ * & \frac{1}{1-\epsilon} R \end{bmatrix} > \beta^m U_m + \beta^{m-1} U_{m-1} + \cdots + U_0 \quad (5-12)$$

对 $\forall \epsilon \in (0,1)$ 成立, 其中

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{bmatrix} S_0 + \bar{R} & 0.5S_1 & & & O \\ 0.5S_1 & S_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & S_{2[m/2]-2} & 0.5S_{2[m/2]-1} & \\ O & & 0.5S_{2[m/2]-1} & S_{2[m/2]} & \end{bmatrix} \\ S_j &= -\sum_{i=1}^m C_i^j (-1)^j \begin{bmatrix} O & N_{2i} \\ * & M_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{2j-1} & N_{2j-1} \\ * & O \end{bmatrix} (j=1, \dots, m) \\ U_j &= \begin{cases} \begin{bmatrix} R + M_1 & \sum_{i=0}^m N_{2i} \\ * & R \end{bmatrix}, & j=0 \\ O_1(k) + O_2(k) + C_m^k (-1)^k O_3, & k \in (0, m) \\ \begin{bmatrix} -M_{2m-1} & N_{2m-1} + (-1)^m N_{2m} \\ * & (-1)^{m+1} M_{2m} \end{bmatrix}, & j=m \end{cases} \\ O_1(k) &= \sum_{i=1}^{m-1} C_i^k (-1)^k \begin{bmatrix} O & N_{2i} \\ * & M_{2i+2} - M_{2i} \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \text{diag}\{R, R\} \\ O_2(k) &= \begin{bmatrix} M_{2k+1} - M_{2k-1} & M_{2k-1} \\ * & O \end{bmatrix}, \quad O_3 = \begin{bmatrix} O & N_{2m} \\ * & -M_{2m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

证明: 基于引理 5-1, 如果矩阵不等式(5-11)成立, 对于 $\beta \in (0,1)$, 如下矩阵不等式成立

$$0 < \beta^m S_m + \beta^{m-1} S_{m-1} + \cdots + S_0 + \bar{R} \quad (5-13)$$

通过将 S_j 代入式(5-13), 得到

$$\begin{aligned} 0 &< \bar{R} - \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=1}^m C_i^j (-1)^j \mathcal{M}_j + \mathcal{N}_j \right) \epsilon^j \\ &= \bar{R} - \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^m C_i^j (-\epsilon)^j \mathcal{M}_j - \sum_{j=0}^m \epsilon^j \mathcal{N}_j \end{aligned} \quad (5-14)$$

$$= \bar{R} - \sum_{i=1}^m \left((1-\epsilon)^i \mathcal{M}_j + \epsilon^i \mathcal{N}_j \right)$$

$$\text{其中 } \mathcal{M}_j = \begin{bmatrix} O & N_{2i} \\ * & M_{2i} \end{bmatrix}, \mathcal{N}_j = \begin{bmatrix} M_{2j-1} & N_{2j-1} \\ * & O \end{bmatrix}.$$

然后, 式(5-14)左右两边乘上 $\text{diag}\{\sqrt{1-\epsilon/\epsilon}I, \sqrt{\epsilon/1-\epsilon}I\}$, 得到

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} 1-\epsilon/\epsilon R & O \\ * & \epsilon/1-\epsilon R \end{bmatrix} &< - \sum_{i=1}^m \left((1-\epsilon)^i \begin{bmatrix} O & N_{2i} \\ * & -M_{2i} \end{bmatrix} + \epsilon^i \begin{bmatrix} -M_{2i-1} & N_{2i-1} \\ * & O \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (1-\epsilon)^{i-1} \begin{bmatrix} O & O \\ * & M_{2i} \end{bmatrix} + \epsilon^{i-1} \begin{bmatrix} M_{2i-1} & O \\ * & O \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (5-15)$$

对式(5-15)两边分别加 $\text{diag}\{R, R\}$ 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1/\epsilon R & O \\ * & 1/1-\epsilon R \end{bmatrix} &> \sum_{i=1}^{m-1} \left((1-\epsilon)^i \begin{bmatrix} O & N_{2i} \\ * & M_{2i+2} - M_{2i} \end{bmatrix} + \epsilon^i O_2(i) \right) + \begin{bmatrix} O & O \\ * & M_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} R & O \\ * & R \end{bmatrix} + (1-\epsilon)^m O_3 + \epsilon^m \begin{bmatrix} -M_{2m-1} & N_{2m-1} \\ * & O \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(O_1(k) + O_2(k) + C_m^j (-1)^j O_3 \right) \epsilon^j \\ &\quad + \begin{bmatrix} -M_{2m-1} & N_{2m-1} + (-1)^m N_{2m} \\ * & (-1)^{m+1} M_{2m} \end{bmatrix} \epsilon^m + \begin{bmatrix} R & O \\ * & R + M_2 \end{bmatrix} \\ &= \epsilon^m U_m + \epsilon^{m-1} U_{m-1} + \cdots + U_0 \end{aligned} \quad (5-16)$$

注 5-1: 通过高阶矩阵多项式, 引入松弛变量 M_j 和 N_j 到互凸不等式以减少不等式保守性。同时, 所提互凸不等式中松弛变量 M_j 和 N_j 的数量随着 m 的增加而增加。因此, 参数 m 能够调节广义互凸不等式保守性和计算复杂度间的平衡。定理 5-1 包含了文献[70]、[72]和[77]所提互凸不等式, 详细如下:

(1) 取 $m=0$, $M_1=M_2=0$ 和 $N_1=N_2=N$, 定理 5-1 等价于文献[70]的定理 1。

(2) 取 $m=1$, 由式(5-12)可得

$$\begin{bmatrix} 1/\epsilon R & O \\ * & 1/1-\epsilon R \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} R + (1-\epsilon)M_1 & \epsilon N_1 + (1-\epsilon)N_2 \\ * & R + \epsilon M_2 \end{bmatrix}$$

即定理 5-1 与文献[72]所提结果相同。

(3) 取 $m=2$, 由定理 5-1 可得

$$\begin{bmatrix} 1/\epsilon R & O \\ * & 1/1-\epsilon R \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ * & T_3 \end{bmatrix}$$

其中 $T_1 = (1-\epsilon)M_1 + \epsilon(1-\epsilon)M_3$, $T_2 = \epsilon N_1 + (1-\epsilon)N_2 + \epsilon^2 N_3 + (1-\epsilon)^2 N_4$, $T_3 = \epsilon(1-\epsilon)M_4 + \epsilon M_2$ 。定理 5-1 等价于文献[77]所提互凸不等式。

注 5-2: 文献[77]和文献[78]分别采用了 n 阶和 2 阶矩阵多项式负定性的充分条件。定理 5-1 利用了 n 阶矩阵多项式不等式的充要条件。因此, 本文所提出的广义互凸不等式具有更少的保守性。而且定理 5-1 的前提条件可以直接通过 LMI 求解。相比于文献[137]中的引理 1, 本文所提广义互凸不等式更适于时滞 T-S 模糊系统的稳定性研究。

5.4 主要结果

5.4.1 时滞 T-S 模糊系统稳定分析

本节基于定理 5-1 中的广义互凸不等式, 设计新型非对称 L-K 泛函, 针对非线性时滞 T-S 模糊系统, 建立新型系统稳定条件。为简洁起见, 定义如下符号。

$$\begin{aligned} d_i &= 1 - \dot{h}_i, \quad \eta_i(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h_i), x(t-\bar{h})\} \\ \eta_i &= \text{col}\{\eta_i(t), v_1, v_2, \dot{x}(t-h_i), \dot{x}(t-\bar{h})\} \\ v_1 &= \text{col}\{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}, \quad v_2 = \text{col}\{v_{21}, v_{22}, v_{23}\} \\ v_{1i} &= \int_{t-h_i}^t \frac{(t-s)^{i-1} x(s)}{h_i^i} ds, \quad v_{2i} = \int_{t-\bar{h}}^{t-h_i} \frac{(t-h_i-s)^{i-1} x(s)}{(\bar{h}-h_i)^i} ds \\ \ell_i &= \begin{bmatrix} O_{n,(i-1)n} & I_n & O_{n,(1-i)n} \end{bmatrix} (i=1, \dots, 11), \quad \ell_{si} = A_i \ell_1 + A_{hi} \ell_2 \end{aligned}$$

定理 5-2: 对于给定 \bar{h} , K_j , μ_1 和 μ_2 , 如果存在正定矩阵 R , G_k , Z_k , H_k , 对称矩阵 $P_i(t=0, \dots, 3)$, X_z , 任意矩阵 Y_z , Q_1 , $Q_2(z=1, \dots, 6)$ 和斜对称矩阵 M_k , N_k , $L_k(k=1, 2)$, 对于 $i=1, \dots, \sigma$ 满足式(5-27), 则系统(5-7)是渐近稳定的。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_p - \Delta(h_2)^T \begin{bmatrix} H_1 & L_1 \\ * & -H_1 \end{bmatrix} \Delta(h_2) &> 0 \\ \mathcal{X}_F - \Delta(1)^T \begin{bmatrix} H_2 & L_2 \\ * & -H_2 \end{bmatrix} \Delta(1) &< 0 \\ \mathcal{X}_{\Omega[\bar{\mu}]}^i - \Delta(h_2)^T \begin{bmatrix} Z_i & M_i \\ * & -Z_i \end{bmatrix} \Delta(h_2) &< 0 \\ \mathcal{X}_{\Omega[\underline{\mu}]}^i - \Delta(h_2)^T \begin{bmatrix} G_i & N_i \\ * & -G_i \end{bmatrix} \Delta(h_2) &< 0 \\ Y_1 &> 0, Y_2 > 0 \end{aligned} \tag{5-17}$$

其中

$$\mathcal{X}_P := \mathcal{F}(P_0, P_1, P_2, P_3, O), \quad \mathcal{X}_F := \mathcal{F}(F_0, F_1, F_2, F_3, O)$$

$$\mathcal{X}_{\Omega[\dot{h}_t]}^i := \mathcal{F}(\Omega_{0[\dot{h}_t]}^i, \Omega_{1[\dot{h}_t]}^i, \Omega_{2[\dot{h}_t]}^i, \Omega_{3[\dot{h}_t]}^i, \Omega_{4[\dot{h}_t]}^i)$$

$$F(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) := \begin{bmatrix} \kappa_0 & 0.5\kappa_1 & O \\ 0.5\kappa_1 & \kappa_2 & 0.5\kappa_3 \\ O & 0.5\kappa_3 & \kappa_4 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{0[\dot{h}_t]}^i = \Phi_{[0, \dot{h}_t]i}$$

$$\Omega_{1[\dot{h}_t]}^i = (\Phi_{[1, \dot{h}_t]i} - \Phi_{[-1, \dot{h}_t]i}) / 2 - \Omega_{3[\dot{h}_t]}^i$$

$$\Omega_{2[\dot{h}_t]}^i = (\Phi_{[1, \dot{h}_t]i} + \Phi_{[-1, \dot{h}_t]i}) / 2 - \Omega_{0[\dot{h}_t]}^i - \Omega_{4[\dot{h}_t]}^i$$

$$\Omega_{3[\dot{h}_t]}^i = (\Phi_{[2, \dot{h}_t]i} - \Phi_{[-2, \dot{h}_t]i} - 2\Phi_{[1, \dot{h}_t]i} + 2\Phi_{[-1, \dot{h}_t]i}) / 12$$

$$\Omega_{4[\dot{h}_t]}^i = (\Phi_{[2, \dot{h}_t]i} + \Phi_{[-2, \dot{h}_t]i} - 4\Phi_{[1, \dot{h}_t]i} - 4\Phi_{[-1, \dot{h}_t]i}) / 24 + \Omega_{0[\dot{h}_t]}^i / 4$$

$$\begin{aligned} \Phi_{[\dot{h}_t, \dot{h}_t]i} &= \Pi_1^T \mathcal{P}_t \Pi_2 + \Pi_1^T \widehat{\mathcal{P}}_t \Pi_1 + \Pi_3^T \mathcal{Q}_1 \Pi_4 - d_t \Pi_5^T \mathcal{Q}_1 \Pi_6 + d_t \Pi_5^T \mathcal{Q}_2 \Pi_6 \\ &\quad - \Pi_7^T \mathcal{Q}_2 \Pi_8 + \Pi_{10}^T \mathcal{Q}_1 \Pi_{13} + \Pi_{17}^T (h_t^3 U_3 + h_t^2 U_2 + h_t U_1 + U_0) \Pi_{17} \\ &\quad + \Pi_{14}^T \mathcal{Q}_2 \Pi_{13} + \bar{h}^2 \ell_{si}^T R \ell_{si} \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = \Pi_{11} + h_t \Pi_{12}, \quad \Pi_{11} = \text{col}\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, O, \bar{h} \ell_7, \bar{h} \ell_8, \bar{h} \ell_9\}$$

$$\Pi_{12} = \text{col}\{O, \ell_4, \ell_5, \ell_6, -\ell_7, -\ell_8, -\ell_9\}$$

$$\Pi_2 = \text{col}\{\ell_{si}, d_t \ell_{10}, \ell_{11}, \Pi_{21}, \Pi_{22}, \Pi_{23}, \Pi_{24}, \Pi_{25}, \Pi_{26}\}$$

$$\Pi_{21} = \ell_1 - d_t \ell_2, \quad \Pi_{22} = -d_t \ell_2 + \ell_4 - \dot{h}_t \ell_5$$

$$\Pi_{23} = -d_t \ell_2 + 2(\ell_5 - \dot{h}_t \ell_6), \quad \Pi_{24} = d_t \ell_2 - \ell_3$$

$$\Pi_{25} = -\ell_3 + d_t \ell_7 + \dot{h}_t \ell_8, \quad \Pi_{26} = -\ell_3 + 2(d_t \ell_8 + \dot{h}_t \ell_9)$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \dot{h}_t (3h_t^2 P_3 + 2h_t P_2 + P_1), \quad \tilde{R} = \text{diag}\{R, 3R, 5R, 7R\}$$

$$\Pi_3 = \text{col}\{\ell_1, \ell_{si}\}, \quad \Pi_4 = \text{col}\{\ell_1, \ell_{si}, \ell_1\}, \quad \Pi_5 = \text{col}\{\ell_2, \ell_{10}\}$$

$$\Pi_6 = \text{col}\{\ell_2, \ell_{10}, \ell_1\}, \quad \Pi_7 = \text{col}\{\ell_3, \ell_{11}\}, \quad \Pi_8 = \text{col}\{\ell_3, \ell_{11}, \ell_1\}$$

$$\Pi_{10} = \text{col}\{h_t \ell_4, \ell_1 - \ell_2\}, \quad \Pi_{13} = \text{col}\{\ell_0, \ell_0, \ell_{si}\}$$

$$\Pi_{14} = \text{col}\{(\bar{h} - h_t) \ell_7, \ell_2 - \ell_3\}, \quad \Pi_{15} = \varpi_3 \text{col}\{\ell_1, \ell_2, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$$

$$\Pi_{16} = \varpi_3 \text{col}\{\ell_2, \ell_3, \ell_7, \ell_8, \ell_9\}, \quad \Pi_{17} = \text{col}\{\Pi_{15}, \Pi_{16}\}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} R_1 + X_1 & Y_2 + Y_4 + Y_6 \\ * & R_1 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \frac{1}{\bar{h}^3} \begin{bmatrix} -X_5 & Y_5 - Y_6 \\ * & X_6 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \frac{1}{\bar{h}} \begin{bmatrix} X_3 - X_1 & Y_1 - Y_2 - 2Y_4 - 3Y_6 \\ * & X_2 + X_4 + X_6 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\bar{h}^2} \begin{bmatrix} -X_3 + X_5 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \\ * & -X_4 - 2X_6 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} -R & Y_2 + Y_4 + Y_6 \\ * & -R + X_2 + X_4 + X_6 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 - Y_2 - 2Y_4 - 3Y_6 \\ * & -X_2 - 2X_4 - 3X_6 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} X_5 & Y_5 - Y_6 \\ * & -X_6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(d)^T = \begin{bmatrix} dI & O & dI & O \\ O & dI & -2I & dI \\ O & O & O & -2I \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} X_3 & Y_3 + Y_4 + 3Y_6 \\ * & X_4 + 3X_6 \end{bmatrix}$$

证明：考虑如下具有时滞乘积项的非对称 L-K 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (5-18)$$

其中

$$V_1(t) = \psi_1^T(t) \mathcal{P}_t \psi_1(t)$$

$$V_2(t) = \int_{t-h_t}^t \psi_2^T(s) Q_1 \psi_3(t, s) ds + \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t} \psi_2^T(s) Q_2 \psi_3(t, s) ds$$

$$V_3(t) = \bar{h} \int_{t-\bar{h}}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds du$$

$$\mathcal{P}_t = h_t^s P_s + \dots + h_t P_1 + P_0$$

$$\psi_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h_t), x(t-h_2), h_t v_1(t), (\bar{h}-h_t) v_2(t)\}$$

$$\psi_2(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t)\}, \quad \psi_3(t, s) = \text{col}\{x(s), \dot{x}(s), x(t)\}$$

根据引理 5-1，当正定矩阵 G_1 和斜对称矩阵 S_1 满足条件(5-19)时 $\mathcal{P}_t > 0 (s=4)$ 成立。

$$\mathcal{F}(P_i) - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} G_1 & S_1 \\ * & -G_1 \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) > 0 \quad (5-19)$$

可得， $V_1(t) > 0$ 成立。应用 Jensen 积分不等式到 $V_3(t)$ 得到

$$V_3(t) \geq \int_{t-h_t}^t (x(t) - x(s))^T R (x(t) - x(s)) ds$$

$$+ \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t} (x(t) - x(s))^T R (x(t) - x(s)) ds \quad (5-20)$$

$V_2(t)$ 和 $V_3(t)$ 相加，推导得出

$$V_2(t) + V_3(t) \geq \int_{t-h_t}^t \psi_3(t, s)^T \Upsilon_1 \psi_3(t, s) ds$$

$$+ \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t} \psi_3(t, s)^T \Upsilon_2 \psi_3(t, s) ds \quad (5-21)$$

其中

$$\Upsilon_i = 0.5 \text{He}\{C_4 Q_i\} + C_3^T R C_3 \quad (i=1, 2)$$

$$C_3 = [-I \quad O \quad I], \quad C_4 = \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & I & O \end{bmatrix}$$

基于式(5-17), 可得 $V_2(t) + V_3(t) > 0$ 。综上, $V(t)$ 的正定性得到保障。计算 $V(t)$ 的导数得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \\
 &= He\{\psi_1^T(t) \mathcal{P} \dot{\psi}_1\} + \psi_1^T(t) \dot{\mathcal{P}} \psi_1(t) + \psi_2^T(t) \mathcal{Q}_1 \psi_3(t, t) \\
 &\quad - (1 - \dot{h}_t) \psi_2^T(t - h_t) \mathcal{Q}_1 \psi_3(t, t - h_t) \\
 &\quad + (1 - \dot{h}_t) \psi_2^T(t - h_t) \mathcal{Q}_2 \psi_3(t, t - h_t) \\
 &\quad - \psi_2^T(t - \bar{h}) \mathcal{Q}_2 \psi_3(t, t - \bar{h}) + \bar{h}^2 \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) + \mathcal{W}(t) \\
 &\quad + \left(\int_{t-h_t}^t \psi_2^T(s) ds \mathcal{Q}_1 + \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t} \psi_2^T(s) ds \mathcal{Q}_2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \psi_3(t, s) \\
 &= \eta^T(t) (\Pi_1^T \mathcal{P}_t \Pi_2 + \Pi_1^T \hat{\mathcal{P}}_t \Pi_1 + \Pi_3^T \mathcal{Q}_1 \Pi_4 - d_t \Pi_5^T \mathcal{Q}_1 \Pi_6 \\
 &\quad + d_t \Pi_5^T \mathcal{Q}_2 \Pi_6 - \Pi_7^T \mathcal{Q}_2 \Pi_8 + \Pi_{10} \mathcal{Q}_1 \Pi_{13} \\
 &\quad + \Pi_{14}^T \mathcal{Q}_2 \Pi_{13}) \eta(t) + \mathcal{W}(t)
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

根据引理 5-2, 可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(t) &= -h \int_{t-\bar{h}}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
 &= -h \int_{t-h_t}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds - h \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
 &\leq -\eta^T(t) \left(\frac{\bar{h}}{h_t} \Pi_{15}^T R \Pi_{15} + \frac{\bar{h}}{\bar{h} - h_t} \Pi_{16}^T R \Pi_{16} \right) \eta(t) \\
 &= -\eta^T(t) \begin{bmatrix} \Pi_{15} \\ \Pi_{16} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{h}/h_t R & O \\ * & \bar{h}/\bar{h} - h_t R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{15} \\ \Pi_{16} \end{bmatrix} \eta(t)
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

根据定理 5-1 (N=3), 如果式(5-17)成立, 则

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(t) &\leq -\eta^T(t) \begin{bmatrix} \Pi_{15} \\ \Pi_{16} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{h}/h_t R & O \\ * & \bar{h}/\bar{h} - h_t R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{15} \\ \Pi_{16} \end{bmatrix} \eta(t) \\
 &\leq -\eta^T(t) \Pi_{17}^T U \Pi_{17} \eta(t)
 \end{aligned} \tag{5-24}$$

其中 $U = h_t^3 U_3 + h_t^2 U_2 + h_t U_1 + U_0$ 。

将式(5-24)代入式(5-22), 得到以下约束条件

$$\dot{V}(t) \leq \eta(t)^T \Phi_{[h_t, \dot{h}_t]_t} \eta(t) \tag{5-25}$$

$\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]_t}$ 是关于 h_t 矩阵多项式, 可分解为如下形式

$$\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]i} = \sum_{j=0}^4 h_t^j \Omega_{j[h_t]}^i \quad (5-26)$$

矩阵多项式 $\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]i}$ 的系数 $\Omega_{j[h_t]}^i$ 可以通过代数运算得到，如定理 5-2 所示。由于 $\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]i}$ 在 \dot{h}_t 上是仿射的。因此，对于 $\forall \dot{h}_t \in [\mu_1, \mu_2]$ ， $\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]i} < 0$ 成立当且仅当 $\Phi_{[h_t, \mu_1]i} < 0$ 和 $\Phi_{[h_t, \mu_2]i} < 0$ 。利用定理 5-1，可以得出式(5-17)为 $\Phi_{[h_t, \underline{\mu}]i} < 0$ 和 $\Phi_{[h_t, \bar{\mu}]i} < 0$ 成立的充分条件。因此，如果存在变量满足不等式约束式(5-17)，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\dot{V}(t) \leq -\delta \eta^T(t) \eta(t) \leq -\delta x^T(t) x(t)$ 。

注 5-3：本文所提非对称 L-K 泛函引入了新型非对称项和时滞乘积项。值得注意的是，所提非对称 L-K 泛函可以通过设置 Q_1 和 Q_2 为对称矩阵，可得到对称形式的 L-K 泛函。而且，非对称项和 $V_1(t)$ 考虑了更多有关时变时滞和模糊系统状态的信息。因此，所提出的具有时滞乘积项的非对称 L-K 泛函具有更低保守性，有利于得到放松的稳定性条件。

为了验证所提结果的优越性和低保守性，基于定理 5-1 (N=2) 和对称 L-K 泛函，得到如下定理

定理 5-3：对于给定 \bar{h} ， K_j ， μ_1 和 μ_2 ，如果存在正定矩阵 R ， G_k ， Z_k ， H_k ， Q_1 ， Q_2 ，对称矩阵 $P_i (i=0, \dots, 3)$ ， X_z ，任意矩阵 $Y_z (z=1, \dots, 6)$ 和斜对称矩阵 M_k ， N_k ， $L_k (k=1, 2)$ ，对于 $i=1, \dots, \sigma$ 满足式(5-27)，则系统(5-7)是渐近稳定的。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_p - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} H_1 & L_1 \\ * & -H_1 \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) &> 0 \\ \tilde{\mathcal{X}}_F - \tilde{\Delta}(1)^T \begin{bmatrix} H_2 & L_2 \\ * & -H_2 \end{bmatrix} \tilde{\Delta}(1) &< 0 \\ \mathcal{X}_{\Omega[\mu_1]}^i - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} Z_i & M_i \\ * & -Z_i \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) &< 0 \\ \mathcal{X}_{\Omega[\mu_2]}^i - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} G_i & N_i \\ * & -G_i \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) &< 0 \end{aligned} \quad (5-27)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{[h_t, \dot{h}_t]i} &= \Pi_1^T \mathcal{P}_i \Pi_2 + \Pi_1^T \hat{\mathcal{P}}_i \Pi_1 + \ell_1^T Q_1 \ell_1 - d_i \ell_2^T Q_1 \ell_2 \\ &\quad + d_i \ell_2^T Q_2 \ell_2 - \ell_3^T Q_2 \ell_3 + \bar{h}^2 \ell_{si}^T \tilde{R} \ell_{si} \\ &\quad + \Pi_{17}^T (h_t^2 \tilde{U}_2 h_t \tilde{U}_1 + \tilde{U}_0) \Pi_{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{X}}_F &:= F(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, O, O) \\
 \tilde{\Delta}(d) &= \begin{bmatrix} dI & O \\ dI & -2I \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_0 = \begin{bmatrix} R_1 + X_1 & Y_2 + Y_4 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \\
 \tilde{U}_1 &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} X_3 - X_1 & Y_1 - Y_2 - 2Y_4 \\ * & X_2 + X_4 \end{bmatrix} \\
 \tilde{U}_2 &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -X_3 & Y_3 + Y_4 \\ * & -X_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} -R & Y_2 + Y_4 \\ * & -R + X_2 + X_4 \end{bmatrix} \\
 \tilde{F}_1 &= \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 - Y_2 - 2Y_4 \\ * & -X_2 - 2X_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} X_3 & Y_3 + Y_4 \\ * & X_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

证明：选取定理 5-2 所提 L-K 泛函并设置

$$V_2(t) = \int_{t-h}^t x^T(s) \tilde{Q}_1 x(s) ds + \int_{t-h}^{t-h_t} x^T(s) \tilde{Q}_2 x(s) ds \quad (5-28)$$

不难得到 $\dot{V}(t) \leq -\delta \eta^T(t) \eta(t) \leq -\delta x^T(t) x(t)$ 。

注 5-4：定理 5-2 与定理 5-3 使用了相同的技术路线，除了互凸不等式技术和非对称项 $V_2(t)$ 。通过比较定理 5-2 和定理 5-3 的时滞稳定上界，可明确反映本文所提技术的有效性，比较结果参见数值算例。

5.4.2 时滞 T-S 模糊系统控制器设计

基于所提稳定判据，系统(5-7)的控制器增益 K_j 可由如下定理得到

定理 5-4：对给定 \bar{h} ， μ_1 和 μ_2 ，如果存在正定矩阵 \bar{R} ， \bar{G}_k ， \bar{Z}_k ， \bar{H}_k ， J ，对称矩阵 \bar{P}_i ($i=0, \dots, 3$)， \bar{X}_z ，任意矩阵 \bar{Y}_z ， \bar{Q}_1 ， \bar{Q}_2 ($z=1, \dots, 6$)， W_j 和斜对称矩阵 \bar{M}_k ， \bar{N}_k ， \bar{L}_k ($k=1, 2$)，对于 $i=1, \dots, \sigma$ 和 $j=1, \dots, \sigma$ 满足式(5-29)，则系统(5-7)控制器增益矩阵为 $K_j = W_j J^{-1}$ 。

$$\begin{aligned}
 &\bar{\mathcal{X}}_P - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{L}_1 \\ * & -\bar{H}_1 \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) > 0 \\
 &\bar{\mathcal{X}}_F - \Delta(1)^T \begin{bmatrix} \bar{H}_2 & \bar{L}_2 \\ * & -\bar{H}_2 \end{bmatrix} \Delta(1) < 0 \\
 &\bar{\mathcal{X}}_{\Omega[\bar{\mu}]}^{ij} - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} \bar{Z}_i & \bar{M}_i \\ * & -\bar{Z}_i \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) < 0 \\
 &\bar{\mathcal{X}}_{\Omega[\underline{\mu}]}^{ij} - \Delta(\bar{h})^T \begin{bmatrix} \bar{G}_i & \bar{N}_i \\ * & -\bar{G}_i \end{bmatrix} \Delta(\bar{h}) < 0 \\
 &\Upsilon_1 > 0, \Upsilon_2 > 0
 \end{aligned} \quad (5-29)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{X}}_p &:= \mathcal{F}(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, O), \quad \bar{\mathcal{X}}_F := \mathcal{F}(\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, O) \\
 \bar{\mathcal{X}}_{\Omega[\dot{h}_t]}^{ij} &:= \mathcal{F}(\Omega_{0[\dot{h}_t]}^{ij}, \Omega_{1[\dot{h}_t]}^{ij}, \Omega_{2[\dot{h}_t]}^{ij}, \Omega_{3[\dot{h}_t]}^{ij}, \Omega_{4[\dot{h}_t]}^{ij}) \\
 \Omega_{0[\dot{h}_t]}^{ij} &= \bar{\Phi}_{[0, \dot{h}_t]ij} \\
 \Omega_{1[\dot{h}_t]}^{ij} &= (\bar{\Phi}_{[1, \dot{h}_t]ij} - \bar{\Phi}_{[-1, \dot{h}_t]ij}) / 2 - \Omega_{3[\dot{h}_t]}^{ij} \\
 \Omega_{2[\dot{h}_t]}^{ij} &= (\bar{\Phi}_{[1, \dot{h}_t]ij} + \bar{\Phi}_{[-1, \dot{h}_t]ij}) / 2 - \Omega_{0[\dot{h}_t]}^{ij} - \Omega_{4[\dot{h}_t]}^{ij} \\
 \Omega_{3[\dot{h}_t]}^{ij} &= (\bar{\Phi}_{[2, \dot{h}_t]ij} - \bar{\Phi}_{[-2, \dot{h}_t]ij} - 2\bar{\Phi}_{[1, \dot{h}_t]ij} + 2\bar{\Phi}_{[-1, \dot{h}_t]ij}) / 12 \\
 \Omega_{4[\dot{h}_t]}^{ij} &= (\bar{\Phi}_{[2, \dot{h}_t]ij} + \bar{\Phi}_{[-2, \dot{h}_t]ij} - 4\bar{\Phi}_{[1, \dot{h}_t]ij} - 4\bar{\Phi}_{[-1, \dot{h}_t]ij}) / 24 + \Omega_{0[\dot{h}_t]}^{ij} / 4 \\
 \bar{\Phi}_{[h_t, \dot{h}_t]ij} &= \bar{\Pi}_1^T \bar{\mathcal{P}}_t \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_1^T \bar{\mathcal{P}}_t \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_3^T \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_4 + \bar{h}^2 \ell_{12}^T \tilde{R} \ell_{12} \\
 &\quad - d_t \bar{\Pi}_5^T \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_6 + d_t \bar{\Pi}_5^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_6 - \bar{\Pi}_7^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_8 \\
 &\quad + \bar{\Pi}_{10} \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_{13} + \bar{\Pi}_{14}^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_{13} + He\{\bar{D}\bar{\Gamma}_c^{ij}\} \\
 &\quad + \bar{\Pi}_{17}^T (h_t^3 \bar{U}_3 + h_t^2 \bar{U}_2 + h_t \bar{U}_1 + \bar{U}_0) \bar{\Pi}_{17} \\
 \bar{\Pi}_1 &= \bar{\Pi}_{11} + h_t \bar{\Pi}_{12}, \quad \bar{\Pi}_{11} = col\{\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \bar{\ell}_3, O, \bar{h} \bar{\ell}_7, \bar{h} \bar{\ell}_8, \bar{h} \bar{\ell}_9\} \\
 \bar{\Pi}_{12} &= col\{O, \bar{\ell}_4, \bar{\ell}_5, \bar{\ell}_6, -\bar{\ell}_7, -\bar{\ell}_8, -\bar{\ell}_9\} \\
 \bar{\Pi}_2 &= col\{\bar{\ell}_{12}, d_t \bar{\ell}_{10}, \bar{\ell}_{11}, \bar{\Pi}_{21}, \bar{\Pi}_{22}, \bar{\Pi}_{23}, \bar{\Pi}_{24}, \bar{\Pi}_{25}, \bar{\Pi}_{26}\} \\
 \bar{\Pi}_{21} &= \bar{\ell}_1 - d_t \bar{\ell}_2, \quad \bar{\Pi}_{22} = -d_t \bar{\ell}_2 + \bar{\ell}_4 - \dot{h}_t \bar{\ell}_5 \\
 \bar{\Pi}_{23} &= -d_t \bar{\ell}_2 + 2(\bar{\ell}_5 - \dot{h}_t \bar{\ell}_6), \quad \bar{\Pi}_{24} = d_t \bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_3 \\
 \bar{\Pi}_{25} &= -\bar{\ell}_3 + d_t \bar{\ell}_7 + \dot{h}_t \bar{\ell}_8, \quad \bar{\Pi}_{26} = -\bar{\ell}_3 + 2(d_t \bar{\ell}_8 + \dot{h}_t \bar{\ell}_9) \\
 \hat{\mathcal{P}} &= \dot{h}_t (3h_t^2 P_3 + 2h_t P_2 + P_1), \quad \tilde{R} = diag\{R, 3R, 5R, 7R\} \\
 \bar{\Pi}_3 &= col\{\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_{si}\}, \quad \bar{\Pi}_4 = col\{\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_{si}, \bar{\ell}_1\}, \quad \bar{\Pi}_5 = col\{\bar{\ell}_2, \bar{\ell}_{10}\} \\
 \bar{\Pi}_6 &= col\{\bar{\ell}_2, \bar{\ell}_{10}, \bar{\ell}_1\}, \quad \bar{\Pi}_7 = col\{\bar{\ell}_3, \bar{\ell}_{11}\}, \quad \bar{\Pi}_8 = col\{\bar{\ell}_3, \bar{\ell}_{11}, \bar{\ell}_1\} \\
 \bar{\Pi}_{10} &= col\{h_t \bar{\ell}_4, \bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2\}, \quad \bar{\Pi}_{13} = col\{\bar{\ell}_0, \bar{\ell}_0, \bar{\ell}_{12}\} \\
 \bar{\Pi}_{14} &= col\{(\bar{h} - h_t) \bar{\ell}_7, \bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_3\}, \quad \bar{\Pi}_{15} = \varpi_3 col\{\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \bar{\ell}_4, \bar{\ell}_5, \bar{\ell}_6\} \\
 \bar{\Pi}_{16} &= \varpi_3 col\{\bar{\ell}_2, \bar{\ell}_3, \bar{\ell}_7, \bar{\ell}_8, \bar{\ell}_9\}, \quad \bar{\Pi}_{17} = col\{\bar{\Pi}_{15}, \bar{\Pi}_{16}\}
 \end{aligned}$$

证明：考虑式(5-18)中的 L-K 泛函可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \bar{\eta}_t^T \bar{\Phi}_{[h_t, \dot{h}_t]} \bar{\eta}_t < 0 \\
 s.t. \quad 0 &= \Gamma_c \bar{\eta}(t)
 \end{aligned} \tag{5-30}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_t &= \text{col}\{\eta_t, \dot{x}(t)\} \\
 \bar{\Phi}_{[h_t, h_t]} &= \bar{\Pi}_1^T \bar{\mathcal{P}}_t \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_1^T \hat{\bar{\mathcal{P}}}_t \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_3^T \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_4 - d_t \bar{\Pi}_5^T \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_6 \\
 &\quad + d_t \bar{\Pi}_5^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_6 - \bar{\Pi}_7^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_8 + \bar{\Pi}_{10} \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_{13} + \bar{\Pi}_{14}^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_{13} \\
 &\quad + \bar{\Pi}_{17}^T (h_t^3 U_3 + h_t^2 U_2 + h_t U_1 + U_0) \bar{\Pi}_{17} \\
 \Gamma_c &= (A(\delta_t) + B(\delta_t)) \bar{\ell}_1 + A_h(\delta_t) \bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_{12}
 \end{aligned}$$

根据系统动态，得到如下恒等式

$$\begin{aligned}
 0 &= 2(x^T(t)E_1 + \dot{x}^T(t)E_2 + x^T(t-h_t)E_3)(-\dot{x}(t) \\
 &\quad + (A(\delta_t) + B(\delta_t)K(\delta_t))x(t) + A_h(\delta_t)x(t-h_t)) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\delta(t)) \lambda_j(\delta(t)) \bar{\eta}^T(t) \text{He}\{D\Gamma_c^{ij}\} \bar{\eta}(t)
 \end{aligned} \tag{5-31}$$

其中

$$\begin{aligned}
 D &= \bar{\ell}_1^T E_1 + \bar{\ell}_2^T E_2 + \bar{\ell}_{12}^T E_3 \\
 \Gamma_c^{ij} &= -\bar{\ell}_{12} + (A_i + B_i K_j) \bar{\ell}_1 + A_{hi} \bar{\ell}_2
 \end{aligned}$$

综合式(5-30)和式(5-31)，得到

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\delta(t)) \lambda_j(\delta(t)) \bar{\eta}^T(t) (\bar{\Phi}_{[h_t, h_t]} + \text{He}\{D\Gamma_c^{ij}\}) \bar{\eta}(t) < 0 \tag{5-32}$$

系统的稳定性条件为如下：

$$\bar{\eta}^T(t) (\bar{\Phi}_{[h_t, h_t]} + \text{He}\{D\Gamma_c^{ij}\}) \bar{\eta}(t) < 0 \tag{5-33}$$

设定 $E_2 = \nu_2 E_1$ ， $E_3 = \nu_3 E_1$ 和 $\bar{D} = \bar{\ell}_1^T E_1 + \bar{\ell}_2^T \nu_2 E_1 + \bar{\ell}_{12}^T \nu_3 E_1$ ，定义 $W = E_1^{-T}$ 。对式(5-33)左乘 χ_{12}^T ，右乘 χ_{12} 得到

$$\bar{\Phi}_{[h_t, h_t]}^{ij} < 0 \tag{5-34}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{[h_t, h_t]}^{ij} &= \bar{\Pi}_1^T \bar{\mathcal{P}}_t \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_1^T \hat{\bar{\mathcal{P}}}_t \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_3^T \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_4 - d_t \bar{\Pi}_5^T \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_6 + d_t \bar{\Pi}_5^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_6 \\
 &\quad - \bar{\Pi}_7^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_8 + \bar{\Pi}_{10} \bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\Pi}_{13} + \bar{\Pi}_{14}^T \bar{\mathcal{Q}}_2 \bar{\Pi}_{13} + \text{He}\{\bar{D}\bar{\Gamma}_c^{ij}\} \\
 &\quad + \bar{\Pi}_{17}^T (h_t^3 \bar{U}_3 + h_t^2 \bar{U}_2 + h_t \bar{U}_1 + \bar{U}_0) \bar{\Pi}_{17} \\
 \chi_m &= \text{diag}\{\chi, \dots, \chi\}, \quad \bar{D} = \bar{\ell}_1^T + \nu_2 \bar{\ell}_2^T + \nu_3 \bar{\ell}_{12}^T, \quad \bar{\mathcal{P}}_t = \chi_9^T \mathcal{P}_t \chi_9 \\
 \bar{\mathcal{P}}_t &= \chi_9^T \hat{\mathcal{P}}_t \chi_9, \quad \bar{\mathcal{Q}}_1 = \chi_2^T \mathcal{Q}_1 \chi_3, \quad \bar{\mathcal{Q}}_2 = \chi_2^T \mathcal{Q}_2 \chi_3, \quad \bar{U}_0 = \chi_8^T U_0 \chi_8, \quad \bar{U}_1 = \chi_8^T U_1 \chi_8 \\
 \bar{U}_2 &= \chi_8^T U_2 \chi_8, \quad \bar{U}_3 = \chi_8^T U_3 \chi_8, \quad \bar{\Gamma}_c^{ij} = -J \bar{\ell}_{12} + (A_i J + B_i W_j) \bar{\ell}_1 + A_{hi} J \bar{\ell}_2
 \end{aligned}$$

$\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]ij}$ 可分解为

$$\Phi_{[h_t, \dot{h}_t]ij} = \sum_{k=0}^4 h_t^k \Omega_{k[h_t]}^{ij} \quad (5-35)$$

利用定理 5-1, 可得 $\Phi_{[h_t, \underline{\mu}]ij} < 0$ 和 $\Phi_{[h_t, \bar{\mu}]ij} < 0$ 等价于 LMI 条件(5-29)。

5.5 数值算例

本节利用数值算例验证了所提方案的低保守性。通过仿真实验得到系统动态响应, 表明了所提控制策略的有效性。

例 5-1: 考虑系统参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_{h1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0 & -0.75 \end{bmatrix}, \quad A_{h2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.85 \end{bmatrix}$$

取隶属度函数

$$\lambda_1(\delta_t) = \left(1 - \frac{1}{1+s}\right) \frac{1}{1+s}, \quad \lambda_2(\delta_t) = 1 - \lambda_1(\delta_t)$$

其中 $s = \exp(-5(x_1(t) - \pi/6))$ 。

根据定理 5-2 和定理 5-3, 表 5-1 提供了基于不同方法得到的时滞稳定上界。根据表 5-1 可得, 基于定理 5-2 得到的时滞稳定边界值优于比现有文献的结果。也就是说本章提广义互凸不等式降低了系统稳定判据的保守性。通过比较定理 5-2 和定理 5-3 可得, 非对称项 $V_2(t)$ 和广义互凸不等式在降低保守性方面发挥的关键作用。

表 5-1 时滞稳定上界(例 5-1)

Table 5-1 The Maximum allowable delay (example 5-1)			
$\bar{\mu}$	0.2	0.4	0.6
[143]	0.9119	0.9793	1.0639
[144]	1.1410	1.1500	1.1720
[145]	1.1639	1.1734	1.1994
[146]	1.7805	1.5339	1.4082
[147]	1.8728	1.6517	1.5205
定理 5-2	1.9577	1.7839	1.6624
定理 5-3	2.0101	1.8487	1.7349

从 $[-2,2]$ 中随机选择 100 个不同初始值，对系统进行仿真实验。根据表 5-1，时滞信号设置为 $h_t = 0.867\sin(1.2/1.734t) + 0.867$ ，满足 $0 \leq h_t \leq 1.734$ 和 $-0.6 \leq \dot{h}_t \leq 0.6$ 。图 5-1 和图 5-2 分别表示系统状态 x_1 和 x_2 的动态轨迹。据图可知系统是渐近稳定的，表明了所提判据的有效性。

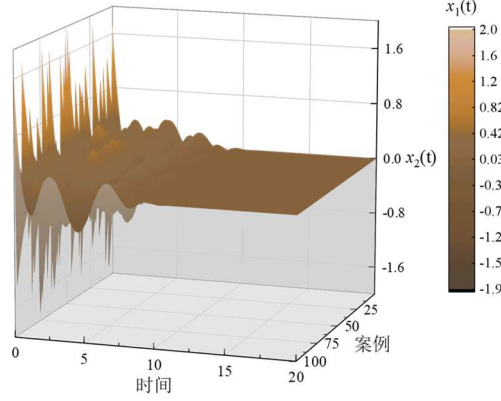


图 5-1 系统状态 x_1 的状态响应

Fig. 5-1 State responses of the system state x_1

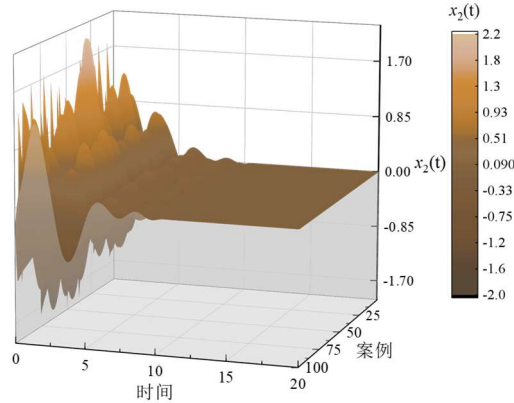


图 5-2 系统状态 x_2 的状态响应

Fig. 5-2 State response of the system state x_2

例 5-2：考虑如下拖车动力学系统^[75]

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -\frac{av\bar{t}}{Lt_0}z_1(t) - \frac{(1-a)v\bar{t}}{Lt_0}z_1(t-h_t) + \frac{v\bar{t}}{lt_0}u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{av\bar{t}}{Lt_0}z_1(t) + \frac{(1-a)v\bar{t}}{Lt_0}z_1(t-h_t) \\ \dot{z}_3(t) &= -\frac{v\bar{t}}{t_0}\sin(z_2(t)) + \frac{av\bar{t}}{2L}z_1(t) + \frac{(1-a)v\bar{t}}{2L}z_1(t-h_t)\end{aligned}$$

其中 $z_1(t)$ 代表角度差， $z_2(t)$ 和 $z_3(t)$ 分别表示拖车的角度和拖车后端的垂直位置， $u(t)$ 代表牵引角度。根据文献[75]和[76]，牵引长度 $l = 2.8\text{m}$ ，拖车长度 $L = 5.5\text{m}$ ，

卡车运行方向速度 $v = -1.0 \text{ m/s}$, $\bar{t} = 2.0 \text{ s}$, 时间间隔 $t_0 = 0.5 \text{ s}$ 。图 5-3 展示了卡车拖车系统模型图示。

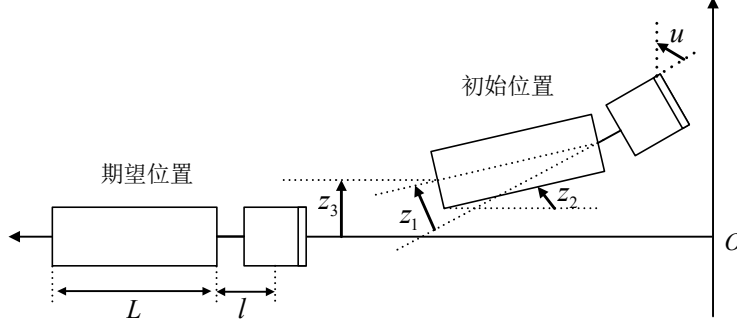


图 5-3 卡车拖车系统模型

Fig. 5-3 Truck-trailer system model

系数 a 用于衡量时滞状态在拖车系统中的比重。 $a=1$ 和 $a=0$ 分别表示系统不包含时滞信号和包含完整的时滞项。取 $a=0.7$, 系统隶属度函数 $\delta_i = z_2(t) + (v\bar{t}/2L)z_1(t) + (1-a)(v\bar{t}/2L)z_1(t-h_i)$, 则原系统可用如下 T-S 模糊模型描述

Plant Rule 1 : IF $\delta(t)$ is about 0,

Then $\dot{z}(t) = A_1 z(t) + A_{h1} z(t-h_i) + B_1 u(t)$

Plant Rule 2 : IF $\delta(t)$ is $-\pi$ or π ,

Then $\dot{z}(t) = A_2 z(t) + A_{h2} z(t-h_i) + B_2 u(t)$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{av\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{av\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{av^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{v\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{h1} = \begin{bmatrix} -\frac{(1-a)v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{(1-a)v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{(1-a)v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{v\bar{t}}{lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{av\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{av\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{av^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{\bar{g}v\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{h2} = \begin{bmatrix} -\frac{(1-a)v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{(1-a)v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \frac{(1-a)\bar{g}v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{v\bar{t}}{lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{g} = 10t_0/\pi$

假设时滞信号满足 $0 \leq h_t \leq 7$ 和 $-0.5 \leq \dot{h}_t \leq 0.5$ 。根据隶属度函数，可得

$$\lambda_1(\delta_t) = \frac{1 + \cos(0.5z_1(t))}{2}, \quad \lambda_2(\delta_t) = 1 - \lambda_1(\delta_t)$$

通过定理 5-4 求解得到系统控制器参数

$$K_1 = [1.3081 \quad -0.4795 \quad 0.0085]$$

$$K_2 = [1.3088 \quad -0.4963 \quad 0.0085]$$

为了表明所得控制器的有效性，本节提供了拖车动力系统的仿真结果。取初始值 $x(0) = [0.5\pi \quad -0.75\pi \quad -5]^T$ ，时滞信号 $h_t = 3.5\sin(1/7t) + 3.5$ 。图 5-4 展示了开环和闭环系统的系统状态轨迹。图 5-4 中的黑球和红球分别代表系统初始条件和平衡点。在相同初始值下，所提控制器使系统达到状态渐近稳定，并收敛到平衡点。因此，定理 5-4 中提出的控制方案对于非线性时滞 T-S 模糊系统是有效的。

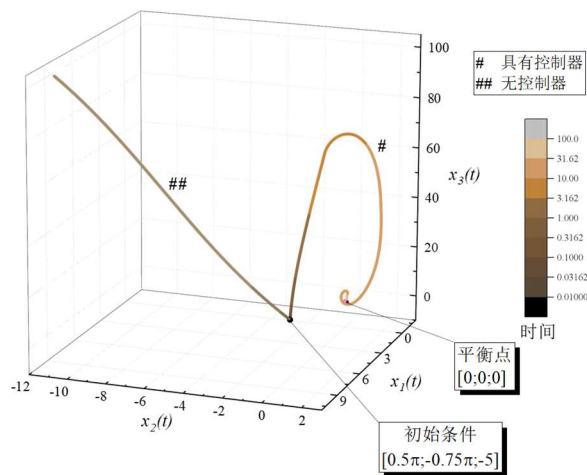


图 5-4 卡车拖车系统的状态响应

Fig. 5-4 State responses of the truck-trailer system

5.6 本章小结

本章研究了非线性时滞 T-S 模糊系统的稳定性与控制综合问题。通过引入更多的松弛矩阵变量，建立了广义互凸不等式。考虑新型非对称项和时滞乘积项，提出非对称 L-K 泛函。基于广义互凸不等式和具有时滞项的非对称 L-K 泛函，针对非线性时滞 T-S 模糊系统，提出了保守性较低的稳定判据和控制器设计方案。

第 6 章 改进时滞乘积 L-K 泛函的时滞非线性神经网络稳定分析

第 5 章提出了广义互凸不等式用于估计泛函导数中的凸组合项。本章基于广义互凸不等式研究了非线性时滞神经网络的时滞相关稳定问题。首先,通过增广神经网络系统状态信息,构建增广 L-K 泛函。其次,基于所提增广 L-K 泛函,引入时滞乘积项,建立新型时滞乘积 L-K 泛函。基于所提 L-K 泛函,结合广义凸不等式,得出较低保守性的时滞相关稳定判据。最后,通过数值算例表明了所提判据的低保守性。

6.1 引言

自从基于逻辑计算模型神经网络系统被提出,它在数据驱动、模式识别和深度学习等方面具有显著优势^[148]。神经网络系统由大量连接的单元或节点组成,称为人工神经元,相互连接用于模拟生物大脑中神经元的运行规律。神经元的输出是基于其输入和激活函数计算得到的^[149]。众所周知,由于神经元之间固有的切换速度和有限的网络通信带宽,时间延迟在神经网络系统中是不可避免的^[150]。时滞信号的存在可能会导致系统稳态崩塌。因此,针对非线性时滞神经网络的稳定性研究已然成为热点问题。

L-K 泛函方法是非线性时滞神经网络系统稳定性分析的常用方法。为了获得较低保守性的时滞相关判据,设计合适的 L-K 泛函是研究的关键^[63]。已经存在大量研究致力于降低神经网络系统稳定条件的保守性。文献[48]和[50]基于具有三重积分项构建 L-K 泛函,得到保守性较低的神经网络系统稳定判据。通过构建时滞相关项,文献[41]提出增广 L-K 泛函用于分析时滞神经网络系统的稳定性。文献[55]提出了新型时滞乘积 L-K 泛函,研究具有时变时滞的广义神经网络系统。文献[40]基于增广 L-K 泛函研究了具有加性时变时滞的神经网络系统稳定性。文献[151]结合循环 L-K 泛函与高阶积分不等式,针对随机马尔可夫跳跃神经网络,建立了更宽松的稳定条件。另一种降低判据保守性的方法是准确估计 L-K 泛函的导数。基于 Wirtinger 积分

不等式与互凸不等式，文献[63]得到时滞神经网络系统保守性较低的稳定条件。文献[152]基于自由权矩阵不等式，放松了系统的稳定性条件。文献[153]提出了一种基于非正交多项式的新型积分不等式，准确估计 L-K 泛函导数中的积分项。文献[68]提出新型 B-L 积分不等式，针对广义神经网络系统，建立保守性较低的稳定判据。综上，针对时滞神经网络系统的稳定性分析问题，现有研究将时滞系统领域所提出的积分不等式技术推广至神经网络系统，基于 L-K 泛函方法，得到了一系列具有贡献性的成果。然而，现有研究更多的关注了积分不等式的发展，忽略了 L-K 泛函的构建。众所周知，缺少 L-K 泛函的配合，仅降低积分不等式的估计误差，很难得到保守性较低的稳定判据。因此，设计合适 L-K 泛函，配合高阶积分不等式的使用，是降低判据保守性有效的研究路线。

本章针对非线性时滞神经网络系统，通过增广神经网络状态相关项，构造增广 L-K 泛函。然后，基于所提增广 L-K 泛函，设计新型时滞乘积项以包含更多时滞信息，提出时滞乘积 L-K 泛函。利用广义互凸不等式和所提 L-K 泛函，改进系统稳定判据保守性。最后，基于数值算例比较所提 L-K 泛函的保守性。

6.2 问题描述及预备知识

考虑时变时滞神经网络系统

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + W_0 g(y(t)) + W_1 g(y(t-h(t))) + J \quad (6-1)$$

其中 $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$ 表示神经元状态向量； $J = [J_1, \dots, J_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为输入向量； $g(y(t)) = [g_1(y_1(t)), \dots, g_n(y_n(t))]^T \in \mathbf{R}^n$ 为神经元激活函数； $W_0, W_1 \in \mathbf{R}^n$ 表示神经元间连接系数的权重矩阵。 $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbf{S}_n^+$ 为系统矩阵；时滞信号 $h(t)$ 为时变可微函数，满足

$$0 \leq h(t) \leq h, \quad \dot{h}(t) \leq h_D < 1 \quad (6-2)$$

假设 6-1^[149]：神经元激活函数 $g_i(\cdot) (i=1, 2, \dots, n)$ 是连续有界的并且满足

$$k_i^- \leq \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u - v} \leq k_i^+ (u, v \in \mathbf{N}, u \neq v, i=1, 2, \dots, n) \quad (6-3)$$

其中 k_i^- 和 k_i^+ 是已知常数。

基于假设 6-1 和 Brouwer 不动点定理，文献[154]证明了神经网络系统(6-1)平衡点 $y^* = [y_1^*, \dots, y_n^*]^T$ 的存在性和唯一性。借助变换 $x(t) = y(t) - y^*$ ，可将系统(6-1)的平衡点 y^* 移动到原点。则系统(6-1)可转换为如下形式

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 f(x(t-h(t))) \quad (6-4)$$

其中 $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ 是变换后状态向量。 $f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), \dots, f_n(x_n(t))]^T$ ($f_i(x_i(t)) = g_i(x_i(t) + y_i^*) - g_i(y_i^*)$, $f_i(0) = 0 (i=1, 2, \dots, n)$)。激活函数 $f_i(\cdot) (i=1, 2, \dots, n)$ 满足以下条件

$$k_i^- \leq \frac{f_i(v) - f_i(v)}{v - v} \leq k_i^+, v, v \in \mathbb{N}, v \neq v, i=1, 2, \dots, n \quad (6-5)$$

取 $v=0$ ，根据式(6-5)可得

$$k_i^- \leq \frac{f_i(v)}{v} \leq k_i^+, v \in \mathbb{N}, v \neq 0, i=1, 2, \dots, n \quad (6-6)$$

基于不等式(6-5)和(6-6)，如下不等式成立

$$\begin{aligned} [f_i(v) - f_i(v) - k_i^-(v - v)][k_i^+(v - v) - f_i(v) + f_i(v)] &\geq 0, i=1, 2, \dots, n \\ [f_i(v) - k_i^-v][k_i^+v - f_i(v)] &\geq 0, i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6-7)$$

为了研究时滞神经网络系统的稳定性问题，给出如下引理：

引理 6-1^[28]：对于矩阵 $R \in \mathbf{S}_n^+$ 和连续函数 $\omega(s) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ，以下不等式成立：

$$\int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \geq \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\int_a^\beta \omega(s) ds \right)^T R \left(\int_a^\beta \omega(s) ds \right) \quad (6-8)$$

引理 6-2^[155]：对于矩阵 $R \in \mathbf{S}_n^+$ ， $M_i \in \mathbf{R}^{k \times n} (i=1, 2, 3)$ ，任意向量 $\xi \in \mathbf{R}^k$ 和可微函数 $\omega(s) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ，以下不等式成立

$$-\int_a^b \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \leq \xi^T \left[\sum_{i=1}^3 \frac{b-a}{2i-1} M_i R^{-1} M_i^T + \sum_{i=1}^3 \text{Sym}\{M_i E_i\} \right] \xi \quad (6-9)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 \xi &= \omega(b) - \omega(a), \quad E_2 \xi = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(s) ds \\ E_3 \xi &= \omega(b) - \omega(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b \omega(s) ds - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_s^b \omega(u) du ds \end{aligned}$$

根据引理 6-2，易得

引理 6-3：对于矩阵 $R \in \mathbf{S}_n^+$ ， $N_i \in \mathbf{R}^{k \times n} (i=1, 2)$ ，任意向量 $\xi \in \mathbf{R}^k$ 和连续函数 $\omega(s) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ，以下条件成立

$$-\int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \leq \xi^T \left[(b-a)(N_1 R^{-1} N_1^T + \frac{1}{3} N_2 R^{-1} N_2^T) + \text{Sym}\{N_1 F_1 + N_2 F_2\} \right] \xi \quad (6-10)$$

其中

$$F_1\xi = \int_a^b \omega(s)ds, \quad F_2\xi = -\int_a^b \omega(s)ds + \frac{2}{b-a} \int_a^b \int_s^b \omega(u)duds$$

6.3 主要结果

本节提出新型增广 L-K 泛函和时滞乘积 L-K 泛函，研究时滞神经网络系统的渐近稳定性问题，改进系统的稳定性判据。

6.3.1 基于增广 L-K 泛函的神经网络稳定性分析

为表达简洁，介绍如下常用符号

$$\begin{aligned} e_i &= \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (14-i)n} \end{bmatrix}^T \quad (i=1,2,\dots,14) \\ e_s &= \begin{bmatrix} -A & 0_{n \times 5n} & W_0 & W_1 & 0_{n \times 6n} \end{bmatrix}^T, \quad e_0 = 0_{14n \times n} \\ \xi_1 &= \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), x(t-h), \dot{x}(t-h), \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x^T(s)ds, \frac{1}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)ds\} \\ \xi_2 &= \text{col}\{f(x(t)), f(x(t-h(t))), f(x(t-h)), \int_{t-h(t)}^t f(x(s))ds, \int_{t-h}^{t-h(t)} f(x(s))ds\} \\ \xi(t) &= \text{col}\{\xi_1, \xi_2, \frac{1}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x(u)duds, \frac{1}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x(u)duds, \int_{t-h}^t \int_s^t x(u)duds\} \end{aligned}$$

定理 6-1: 对于给定的标量 h 和 h_D ，对角矩阵 $K_m = \text{diag}\{k_1^-, \dots, k_n^-\}$ 和 $K_p = \text{diag}\{k_1^+, \dots, k_n^+\}$ ，时滞神经网络系统(6-4)是渐近稳定的，如果存在矩阵 $P \in \mathbf{S}_{5n}^+$ ， $Q_1 \in \mathbf{S}_{5n}^+$ ， $Q_2 \in \mathbf{S}_{3n}^+$ ， $Q_3 \in \mathbf{S}_n^+$ ， $Q_4 \in \mathbf{S}_n^+$ ， $Z \in \mathbf{S}_{2n}^+$ ，正定对角矩阵 $\Delta_i = \text{diag}\{\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni}\}$ ， $\Lambda_i = \text{diag}\{\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni}\} (i=1,2)$ ， $U_j = \text{diag}\{u_{1j}, \dots, u_{nj}\}$ ， $H_j = \text{diag}\{h_{1j}, \dots, h_{nj}\} (j=1,2,3)$ ，任意矩阵 $L \in \mathbf{R}^{14n \times n}$ ， $S_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $N_k, M_k \in \mathbf{R}^{14n \times n} (k=1,2,3)$ ， $N_k, M_k \in \mathbf{R}^{14n \times 2n} (k=4,5)$ 和对称矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n \times n} (i=1,2)$ 满足如下条件

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Psi_{1[h(t)=h]} & \Pi_1 \\ * & \Upsilon_1 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Psi_{1[h(t)=0]} & \Pi_2 \\ * & \Upsilon_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (i=1,2) \\ & \begin{bmatrix} Q_4 & S_1 \\ * & Q_4 \end{bmatrix} > 0, \quad Z_a > 0, \quad Z_b > 0 \end{aligned} \quad (6-11)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_{1[h(t)]} &= \Sigma_{[h(t)]}, \quad \Psi_{2[h(t)]} = \Sigma_{[h(t)]} - h^2 \varrho \\ \Sigma_{[h(t)]} &= \Xi_{1[h(t)]} + \Xi_2 + \Xi_{2[h(t)]} + \Xi_3 + \Xi_{3[h(t)]} + \Xi_4 + \Xi_5 + \Xi_{5[h(t)]} + \Xi_6 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Xi_{1[h(t)]} &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & h(t)e_5 + (h-h(t))e_6 & e_{10} + e_{11} & e_{14} \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \times P \begin{bmatrix} e_s & e_4 & e_1 - e_3 & e_7 - e_9 & he_1 - h(t)e_5 - (h-h(t))e_6 \end{bmatrix}^T \right\} \\
 \Xi_2 &= \begin{bmatrix} e_1 & e_1 & e_s & e_7 & e_0 \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} e_1 & e_1 & e_s & e_7 & e_0 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \text{Sym} \left\{ (e_7 - e_1 K_m) \Delta_1 e_s^T + (e_1 K_p - e_7) \Lambda_1 e_s^T \right\} + \text{Sym} \left\{ (e_9 - e_3 K_m) \Delta_2 e_4^T + (e_3 K_p - e_9) \Lambda_2 e_4^T \right\} \\
 \Xi_{2[h(t)]} &= - \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_4 & e_9 & h(t)e_5 + (h-h(t))e_6 \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_4 & e_9 & h(t)e_5 + (h-h(t))e_6 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} he_1 & h(t)e_5 + (h-h(t))e_6 & e_1 - e_3 & e_{10} + e_{11} & e_{14} \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} e_s & e_0 & e_0 & e_0 & e_1 \end{bmatrix}^T \right\} \\
 \Xi_3 &= \begin{bmatrix} e_1 & e_1 & e_7 \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} e_1 & e_1 & e_7 \end{bmatrix}^T - (1-h_D) \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_8 \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_8 \end{bmatrix}^T \\
 \Xi_{3[h(t)]} &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} h(t)e_1 & h(t)e_5 & e_{10} \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} e_s & e_0 & e_0 \end{bmatrix}^T \right\} \\
 \Xi_4 &= he_s Q_3 e_s^T + \text{Sym} \{ N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 + M_1 F_1 + M_2 F_2 + M_3 F_3 \} \\
 \Xi_{4[h(t)]} &= h(t) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2i-1} N_i Q_3^{-1} N_i^T + (h-h(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2i-1} M_i Q_3^{-1} M_i^T \\
 \Xi_5 &= h \begin{bmatrix} e_1 & e_s \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} e_1 & e_s \end{bmatrix}^T + e_1 P_1 e_1^T - e_2 P_1 e_2^T + e_2 P_2 e_2^T - e_3 P_2 e_3^T \\
 \Xi_{5[h(t)]} &= \text{Sym} \{ N_4 E_4 + N_5 E_5 + M_4 F_4 + M_5 F_5 \} \\
 Z_a &= Z + \begin{bmatrix} 0_n & P_1 \\ P_1 & 0_n \end{bmatrix} \quad Z_b = Z + \begin{bmatrix} 0_n & P_2 \\ P_2 & 0_n \end{bmatrix} \\
 \Xi_6 &= h^2 e_7 Q_4 e_7^T - \begin{bmatrix} e_{10} & e_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_4 & S_1 \\ * & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{10} & e_{11} \end{bmatrix}^T \\
 \Theta_1 &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} e_7 - e_8 - (e_1 - e_2) K_m \end{bmatrix} U_1 \begin{bmatrix} (e_1 - e_2) K_p - e_7 + e_8 \end{bmatrix}^T \right. \\
 &\quad + \begin{bmatrix} e_8 - e_9 - (e_2 - e_3) K_m \end{bmatrix} U_2 \begin{bmatrix} (e_2 - e_3) K_p - e_8 + e_9 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} e_7 - e_9 - (e_1 - e_3) K_m \end{bmatrix} U_3 \begin{bmatrix} (e_1 - e_3) K_p - e_7 + e_9 \end{bmatrix}^T \right\} \\
 \Theta_2 &= \text{Sym} \{ \begin{bmatrix} e_7 - e_1 K_m \end{bmatrix} H_1 \begin{bmatrix} e_1 K_p - e_7 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} e_8 - e_2 K_m \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} e_2 K_p - e_8 \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \begin{bmatrix} e_9 - e_3 K_m \end{bmatrix} H_3 \begin{bmatrix} e_3 K_p - e_9 \end{bmatrix}^T \} \\
 \Theta_3 &= \text{Sym} \left\{ L(h^2(t) e_{12}^T + (h-h(t))^2 e_{13}^T + h(t)(h-h(t)) e_5^T - e_{14}^T) \right\} \\
 \Pi_1 &= \begin{bmatrix} hN_1 & hN_2 & hN_3 & hN_4 & hN_5 \end{bmatrix} Y_1 = \text{diag} \{ -hQ_3, -3hQ_3, -5hQ_3, -hZ_a, -3hZ_a \} \\
 \Pi_2 &= \begin{bmatrix} hM_1 & hM_2 & hM_3 & hM_4 & hM_5 \end{bmatrix} Y_2 = \text{diag} \{ -hQ_3, -3hQ_3, -5hQ_3, -hZ_b, -3hZ_b \} \\
 E_1^T &= e_1 - e_2, \quad E_2^T = e_1 + e_2 - 2e_5, \quad E_3^T = e_1 - e_2 + 6e_5 - 12e_{12} \\
 F_1^T &= e_2 - e_3, \quad F_2^T = e_2 + e_3 - 2e_6, \quad F_3^T = e_2 - e_3 + 6e_6 - 12e_{13} \\
 E_4^T &= \begin{bmatrix} h(t)e_5 & e_1 - e_2 \end{bmatrix}, \quad E_5^T = \begin{bmatrix} h(t)(-e_5 + 2e_{12}) & e_1 + e_2 - 2e_5 \end{bmatrix} \\
 F_4^T &= \begin{bmatrix} (h-h(t))e_6 & e_2 - e_3 \end{bmatrix}, \quad F_5^T = \begin{bmatrix} (h-h(t))(-e_6 + 2e_{13}) & e_2 + e_3 - 2e_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

证明：构建增广 L-K 泛函

$$V(t) = \sum_{i=1}^6 V_i(t) \quad (6-12)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \mathcal{G}_1^T(t) P \mathcal{G}_1(t) \\ V_2(t) &= \int_{t-h}^t \eta_1^T(t, s) Q_1 \eta_1(t, s) ds + 2 \sum_{i=1}^n \left(\delta_{i1} \int_0^{x_i(t)} (f_i(s) - k_i^- s) ds + \lambda_{i1} \int_0^{x_i(t)} (k_i^+ s - f_i(s)) ds \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \left(\delta_{i2} \int_0^{x_i(t-h)} (f_i(s) - k_i^- s) ds + \lambda_{i2} \int_0^{x_i(t-h)} (k_i^+ s - f_i(s)) ds \right) \\ V_3(t) &= \int_{t-h(t)}^t \eta_2^T(t, s) Q_2 \eta_2(t, s) ds, \quad V_4(t) = \int_{t-h}^t \int_s^t \dot{x}^T(u) Q_3 \dot{x}(u) du ds \\ V_5(t) &= \int_{t-h}^t \int_s^t \mathcal{G}_2^T(u) Z \mathcal{G}_2(u) du ds, \quad V_6(t) = h \int_{t-h}^t \int_s^t f^T(x(u)) Q_4 f(x(u)) du ds \\ \mathcal{G}_1(t) &= \text{col}\{x(t), x(t-h), \int_{t-h}^t x(s) ds, \int_{t-h}^t f(x(s)) ds, \int_{t-h}^t \int_s^t x(u) du ds\} \\ \eta_1(t, s) &= \text{col}\{x(t), x(s), \dot{x}(s), f(x(s)), \int_s^t x(u) du\} \\ \eta_2(t, s) &= \text{col}\{x(t), x(s), f(x(s))\}, \quad \mathcal{G}_2(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t)\} \end{aligned}$$

计算 $\dot{V}_1(t)$, 得出

$$\dot{V}_1(t) = \xi^T(t) \Xi_{1[h(t)]} \xi(t) \quad (6-13)$$

对 $V_2(t)$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \eta_1^T(t, t) Q_1 \eta_1(t, t) + 2 \int_{t-h}^t \eta_1^T(t, s) Q_1 \left[\dot{x}^T(t) \quad 0_{n \times 3n} \quad x^T(t) \right]^T ds \\ &\quad - \eta_1^T(t, t-h) Q_1 \eta_1(t, t-h) + 2 \left[f(x(t)) - K_m x(t) \right]^T \Delta_1 \dot{x}(t) \\ &\quad + 2 \left[K_p x(t) - f(x(t)) \right]^T \Lambda_1 \dot{x}(t) + 2 \left[f(x(t-h)) - K_m x(t-h) \right]^T \\ &\quad \Delta_2 \dot{x}(t-h) + 2 \left[K_p x(t-h) - f(x(t-h)) \right]^T \Lambda_2 \dot{x}(t-h) \\ &= \xi^T(t) (\Xi_2 + \Xi_{2[h(t)]}) \xi(t) \end{aligned} \quad (6-14)$$

$\dot{V}_3(t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \eta_2^T(t, t) Q_2 \eta_2(t, t) - (1 - \dot{h}(t)) \eta_2^T(t, t-h(t)) Q_2 \eta_2(t, t-h(t)) \\ &\quad + 2 \int_{t-h(t)}^t \eta_2^T(t, s) Q_2 \left[\dot{x}^T(t) \quad 0_{n \times 2n} \right]^T ds \\ &\leq \xi^T(t) (\Xi_3 + \Xi_{3[h(t)]}) \xi(t) \end{aligned} \quad (6-15)$$

$V_4(t)$ 的导数如下:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4(t) &= h\dot{x}^T(t)Q_3\dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Q_3\dot{x}(s)ds \\
 &= h\dot{x}^T(t)Q_3\dot{x}(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)Q_3\dot{x}(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Q_3\dot{x}(s)ds
 \end{aligned} \tag{6-16}$$

基于引理 6-2，可以得到

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)Q_3\dot{x}(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Q_3\dot{x}(s)ds \\
 & \leq \xi^T(t)((h(t)(N_1Q_3^{-1}N_1^T + \frac{1}{3}N_2Q_3^{-1}N_2^T + \frac{1}{5}N_3Q_3^{-1}N_3^T) \\
 & \quad + \text{Sym}\{N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3\} \\
 & \quad + (h-h(t))(M_1Q_3^{-1}M_1^T + \frac{1}{3}M_2Q_3^{-1}M_2^T + \frac{1}{5}M_3Q_3^{-1}M_3^T) \\
 & \quad + \text{Sym}\{M_1F_1 + M_2F_2 + M_3F_3\})\xi(t)
 \end{aligned} \tag{6-17}$$

综合式(6-16)和式(6-17)得

$$\dot{V}_4(t) \leq \xi^T(t)(\Xi_4 + \Xi_{4[h(t)]})\xi(t) \tag{6-18}$$

$\dot{V}_5(t)$ 可表示为

$$\dot{V}_5(t) = h\mathcal{G}_2^T(t)Z\mathcal{G}_2(t) - \int_{t-h(t)}^t \mathcal{G}_2^T(s)Z\mathcal{G}_2(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \mathcal{G}_2^T(s)Z\mathcal{G}_2(s)ds \tag{6-19}$$

根据文献[35]和[156]，对于对称矩阵 $P_i(i=1,2)$ ，得到如下恒等式

$$\begin{aligned}
 0 &= x^T(t)P_1x(t) - x^T(t-h(t))P_1x(t-h(t)) - 2\int_{t-h(t)}^t x^T(s)P_1\dot{x}(s)ds \\
 0 &= x^T(t-h(t))P_2x(t-h(t)) - x^T(t-h)P_2x(t-h) - 2\int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)P_2\dot{x}(s)ds
 \end{aligned} \tag{6-20}$$

那么， $\dot{V}_5(t)$ 和两个零项之和可以表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_5(t) &= \xi^T(t)\Xi_5\xi(t) - \int_{t-h(t)}^t \mathcal{G}_2^T(s)Z\mathcal{G}_2(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \mathcal{G}_2^T(s)Z\mathcal{G}_2(s)ds \\
 & \quad - 2\int_{t-h(t)}^t x^T(s)P_1\dot{x}(s)ds - 2\int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)P_2\dot{x}(s)ds \\
 &= \xi^T(t)\Xi_5\xi(t) - \int_{t-h(t)}^t \mathcal{G}_2^T(s)Z_a\mathcal{G}_2(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \mathcal{G}_2^T(s)Z_b\mathcal{G}_2(s)ds
 \end{aligned} \tag{6-21}$$

基于引理 6-3，推导得出

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-h(t)}^t \mathcal{G}_2^T(s)Z_a\mathcal{G}_2(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \mathcal{G}_2^T(s)Z_b\mathcal{G}_2(s)ds \\
 & \leq \xi^T(t)\{h(t)(N_4Z_a^{-1}N_4^T + 1/3N_5Z_a^{-1}N_5^T) + \text{Sym}\{N_4E_4 + N_5E_5\} \\
 & \quad + (h-h(t))(M_4Z_b^{-1}M_4^T + 1/3M_5Z_b^{-1}M_5^T) + \text{Sym}\{M_4F_4 + M_5F_5\}\}\xi(t)
 \end{aligned} \tag{6-22}$$

综合式(6-21)-(6-22)，可得

$$\dot{V}_5(t) \leq \xi^T(t)(\Xi_5 + \Xi_{5[h(t)]} + \tilde{\Xi}_{5[h(t)]})\xi(t) \quad (6-23)$$

$\dot{V}_6(t)$ 的结果如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t) = & h^2 f^T(x(t))Q_4 f(x(t)) \\ & - h \int_{t-h(t)}^t f^T(x(s))Q_4 f(x(s))ds - h \int_{t-h}^{t-h(t)} f^T(x(s))Q_4 f(x(s))ds \end{aligned} \quad (6-24)$$

应用引理 6-1 和文献[157]中的互凸不等式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t) \leq & h^2 f^T(x(t))Q_4 f(x(t)) - \frac{h}{h(t)} \left(\int_{t-h(t)}^t f(x(s))ds \right)^T Q_4 \left(\int_{t-h(t)}^t f(x(s))ds \right) \\ & - \frac{h}{h-h(t)} \left(\int_{t-h}^{t-h(t)} f(x(s))ds \right)^T Q_4 \left(\int_{t-h}^{t-h(t)} f(x(s))ds \right) \\ \leq & h^2 f^T(x(t))Q_4 f(x(t)) - \Delta^T \begin{bmatrix} Q_4 & S_1 \\ * & Q_4 \end{bmatrix} \Delta \\ = & \xi^T(t)\Xi_6 \xi(t) \end{aligned} \quad (6-25)$$

其中 $\Delta = \text{col}\{\int_{t-h(t)}^t f(x(s))ds, \int_{t-h}^{t-h(t)} f(x(s))ds\}$ 。

根据假设条件式(6-7), 可得

$$\begin{aligned} \iota_i(s_1, s_2) = & 2[f(x(s_1)) - f(x(s_2)) - K_m(x(s_1) - x(s_2))]^T \\ & U_i [K_p(x(s_1) - x(s_2)) - f(x(s_1)) + f(x(s_2))] \\ \kappa_i(s) = & 2[f(x(s)) - K_m x(s)]^T H_i [K_p x(s) - f(x(s))] \end{aligned} \quad (6-26)$$

其中 $U_i = \text{diag}\{u_{1i}, \dots, u_{mi}\}, H_i = \text{diag}\{h_{1i}, \dots, h_{mi}\}, i = 1, 2, 3$ 。

则以下不等式成立

$$\begin{aligned} \iota_1(t, t-h(t)) + \iota_2(t-h(t), t-h) + \iota_3(t, t-h) & \geq 0 \\ \kappa_1(t) + \kappa_2(t-h(t)) + \kappa_3(t-h) & \geq 0 \end{aligned} \quad (6-27)$$

对于矩阵 $L \in \mathbf{R}^{14n \times n}$, 存在如下恒等式

$$\begin{aligned} 0 = & 2L \left\{ \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x(u)du ds + \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x(u)du ds + (h-h(t)) \int_{t-h(t)}^t x(s)ds \right. \\ & \left. - \int_{t-h}^t \int_s^t x(u)du ds \right\} \\ = & \xi^T(t)\Theta_3 \xi(t) \end{aligned} \quad (6-28)$$

基于式(6-13)-(6-28), $\dot{V}(t)$ 满足如下条件

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \xi^T(t)(\Sigma_{[h(t)]} + \Xi_{4[h(t)]} + \tilde{\Xi}_{5[h(t)]})\xi(t) \\ = & \xi^T(t)\Phi_{[h(t)]}\xi(t) \end{aligned} \quad (6-29)$$

显然, $\Phi_{[h(t)]}$ 是关于 $h(t)$ 的二次矩阵多项式。基于文献[57]可得

$$\Phi_{[h(t)=h]} < 0, \quad \Phi_{[h(t)=0]} < 0, \quad \Phi_{[h(t)=0]} - h^2 \varrho < 0 \quad (6-30)$$

其中

$$\begin{aligned} \varrho = \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi(h(t))}{d(h(t))^2} = & \text{Sym}\{[e_0 \quad e_0 \quad e_5 - e_6 \quad e_0 \quad e_0] P [e_0 \quad e_0 \quad e_0 \quad e_0 \quad e_6 - e_5]^T \\ & + L(e_{12} + e_{13} - e_5)^T\} - [e_0 \quad e_0 \quad e_0 \quad e_0 \quad e_5 - e_6] Q_1 [e_0 \quad e_0 \quad e_0 \quad e_0 \quad e_5 - e_6]^T \end{aligned}$$

如果 LMI 条件(6-11)成立, 则神经网络系统(6-4)是渐近稳定的。

注 6-1: 本章所提增广 L-K 泛函为了配合基于正交多项式的积分不等式, 设计新型增广项在 $V_1(t)$ 中。而且, 所提增广 L-K 泛函中包含更多的系统状态信息, 如 $V_2(t)$ 、 $V_3(t)$ 和 $V_5(t)$ 。使得 L-K 泛函导数产生新的交叉项, 有利于降低判据的保守性。基于数值算例验证了所提增广 L-K 泛函的低保守性。

6.3.2 基于时滞乘积 L-K 泛函的神经网络稳定性分析

基于上节提出得增广 L-K 泛函, 本节提出新型时滞乘积 L-K 泛函。结合定理 5-1 所提的广义互凸不等式, 针对广义非线性神经网络系统进行稳定分析。

考虑如下广义神经网络系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(W_2 x(t)) + W_1 f(W_2 x(t - d_t)) \\ x(t) = \omega(t), t \in [-\bar{d}, 0] \end{cases} \quad (6-31)$$

其中时滞信号 d_t 满足

$$0 \leq d_t \leq \bar{d}, \quad \underline{u} \leq \dot{d}_t \leq \bar{u} \quad (6-32)$$

激活函数 $f(\cdot)$ 满足如下条件

$$k_{mi} \leq \frac{f_i(\tau_1) - f_i(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \leq k_{pi}, (i=1, \dots, n) \quad (6-33)$$

其中 k_{mi} 和 k_{pi} 是已知常数。令 $K_m = \text{diag}\{k_{m1}, \dots, k_{mn}\}$ 和 $K_p = \text{diag}\{k_{p1}, \dots, k_{pn}\}$ 。

注 6-2: 相比于上节所研究的系统(6-4), 广义神经网络系统(6-31)更具一般性。取 $W_2 = I$, 系统(6-31)等价于(6-4)。因此, 神经网络系统(6-4)可以认为是广义神经网络系统的一个特例。针对广义神经网络系统(6-31)的研究更具理论价值。为简洁起见, 定义以下符号。

$$u_1(\alpha, \beta, g(s)) = \frac{1}{\alpha - \beta} \int_{t-\alpha}^{t-\beta} g(s) ds, \quad u_2(\alpha, \beta, g(s)) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \int_{t-\alpha}^{t-\beta} \int_{\theta}^{t-\beta} g(s) ds d\theta$$

$$\begin{aligned}
 d_m &= \bar{d} - d_t, \hat{d}_t := 1 - \dot{d}_t, \quad v_1 = u_1(d_t, 0, x(s)), \quad v_2 = u_1(\bar{d}, d_t, x(s)), \quad v_3 = u_2(d_t, 0, x(s)) \\
 v_4 &= u_2(\bar{d}, d_t, x(s)), \quad w_1 = u_1(d_t, 0, f(W_2 x(s))), \quad w_2 = u_1(\bar{d}, d_t, f(W_2 x(s))) \\
 \ell_i &= [O_{n, (i-1)n} \quad I_n \quad O_{n, (14-i)n}] (i=1, \dots, 14), \ell_s = -A\ell_1 + W_0\ell_8 + W_1\ell_9 \\
 \zeta_1(t) &= \text{col}\{x(t), x(t-d_t), x(t-\bar{d})\}, \quad \zeta_2(t) = \text{col}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\
 \zeta_4(t) &= \text{col}\{d_t w_1, d_m w_2\}, \quad \zeta_3(t) = \text{col}\{f(W_2 x(t)), f(W_2 x(t-d_t)), f(W_2 x(t-\bar{d}))\} \\
 \zeta_t &= \text{col}\{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t), \dot{x}(t-d_t), \dot{x}(t-\bar{d})\}
 \end{aligned}$$

定理 6-2: 对于给定 \bar{d} , $\underline{\mu}$, $\bar{\mu}$, $K_p = \text{diag}\{k_1^+, \dots, k_n^+\}$ 和 $K_m = \text{diag}\{k_1^-, \dots, k_n^-\}$, 系统(6-31)是渐近稳定的, 如果存在矩阵 $P_1 \in \mathbf{S}_+^{9n}$, $P_2 \in \mathbf{S}_+^{9n}$, $Q_1 \in \mathbf{S}_+^{6n}$, $Q_2 \in \mathbf{S}_+^{6n}$, $R \in \mathbf{S}_+^n$, $Z \in \mathbf{S}_+^{2n}$, $G_1 \in \mathbf{S}_+^{6n}$, $G_2 \in \mathbf{S}_+^{14n}$, $G_3 \in \mathbf{S}_+^{14n}$, $X_k \in \mathbf{S}^{3n} (k=1, 2, 3, 4)$, $X_z \in \mathbf{R}^{2n}$, $Y_t \in \mathbf{R}^{3n} (t=0, 1, 2)$, 对角矩阵 $L_1 \in \mathbf{S}_+^n$, $L_2 \in \mathbf{S}_+^n$, $H_j \in \mathbf{S}_+^n$, $T_j \in \mathbf{S}_+^n (j=1, 2, 3)$ 和斜对称矩阵 $N_1 \in \mathbf{R}^{6n}$, $N_2 \in \mathbf{R}^{14n}$, $N_3 \in \mathbf{R}^{14n}$, 满足如下条件

$$\begin{aligned}
 \Upsilon &> 0, \quad \mathcal{E}_U - \mathcal{G}_{[1]}^T \begin{bmatrix} G_1 & N_1 \\ * & -G_1 \end{bmatrix} \mathcal{G}_{[1]} < 0 \\
 \mathcal{E}_{\Theta}^{[u]} - \mathcal{G}_{[\bar{d}]}^T \begin{bmatrix} G_2 & N_2 \\ * & -G_2 \end{bmatrix} \mathcal{G}_{[\bar{d}]} &< 0 \\
 \mathcal{E}_{\Theta}^{[u]} - \mathcal{G}_{[\bar{d}]}^T \begin{bmatrix} G_3 & N_3 \\ * & -G_3 \end{bmatrix} \mathcal{G}_{[\bar{d}]} &< 0
 \end{aligned} \tag{6-34}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\Theta}^{[\dot{d}_t]} &:= \mathcal{D}(\Theta_{0[\dot{d}_t]}, \Theta_{1[\dot{d}_t]}, \Theta_{2[\dot{d}_t]}), \quad \mathcal{E}_U := \mathcal{D}(U_0, U_1, U_2) \\
 \mathcal{D}(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2) &:= \begin{bmatrix} \kappa_0 & \frac{1}{2}\kappa_1 \\ \frac{1}{2}\kappa_1 & \kappa_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_{[d]}^T = \begin{bmatrix} dI & O \\ dI & -2I \end{bmatrix} \\
 \Theta_{0[\dot{d}_t]} &= \bar{\mathfrak{U}}_{[0, \dot{d}_t]}, \quad \Theta_{1[\dot{d}_t]} = (\bar{\mathfrak{U}}_{[1, \dot{d}_t]} - \bar{\mathfrak{U}}_{[-1, \dot{d}_t]}) / 2 \\
 \Theta_{2[\dot{d}_t]} &= (\bar{\mathfrak{U}}_{[1, \dot{d}_t]} + \bar{\mathfrak{U}}_{[-1, \dot{d}_t]}) / 2 - \Theta_{0[\dot{d}_t]} \\
 \bar{\mathfrak{U}}_{[d_t, \dot{d}_t]} &= \Pi_1^T \mathcal{P}_{dt} \Pi_2 + \Pi_1^T \hat{\mathcal{P}}_{dt} \Pi_1 + \Pi_3^T Q_1 \Pi_3 - d_t \Pi_4^T Q_1 \Pi_4 \\
 &\quad + d_t \Pi_4^T Q_2 \Pi_4 - \Pi_5^T Q_2 \Pi_5 + \Pi_6 Q_1 \Pi_7 + \Pi_8^T Q_2 \Pi_7 \\
 &\quad + \bar{d}^2 (\ell_s^T R \ell_s + \Pi_9^T Z \Pi_9) + \text{He}\{((\ell_8 - K_m W_2 \ell_1) L_1 \\
 &\quad + (K_p W_2 \ell_1 - \ell_{11}) L_2) W_2 \ell_s\} - \Pi_{15}^T \Upsilon \Pi_{15} \\
 &\quad - \Pi_{14}^T (d_t^2 \mathcal{R}_2 + d_t \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0) \Pi_{14} + \Pi_{16} + \Pi_{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \text{col}\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_{11}, \ell_{12}, d_t \ell_4, d_t \ell_6, d_m \ell_5, d_m \ell_7\} \\
 \Pi_2 &= \text{col}\{\ell_s, \hat{d}_t \ell_{13}, \ell_{14}, \Pi_{21}, \Pi_{22}, \Pi_{23}, \Pi_{24}, \Pi_{25}, \Pi_{26}\} \\
 \Pi_{21} &= \ell_8 - \hat{d}_t \ell_9, \quad \Pi_{22} = \hat{d}_t \ell_9 - \ell_{10}, \quad \Pi_{23} = \ell_1 - \hat{d}_t \ell_2 \\
 \Pi_{24} &= \ell_1 - \hat{d}_t \ell_4 - \dot{d}_t \ell_6, \quad \Pi_{25} = \hat{d}_t \ell_2 - \ell_3, \quad \Pi_{26} = \hat{d}_t \ell_2 - \ell_5 + \dot{d}_t \ell_7 \\
 \hat{\mathcal{P}}_{dt} &= \dot{d}_t (P_1 - P_2), \quad \mathcal{R} = \text{diag}\{R, 3R, 5R\} \\
 \Pi_3 &= \text{col}\{\ell_1, \ell_s, \ell_0, d_t \ell_4, -d_t \ell_4, d_t \ell_4 + d_m \ell_5\} \\
 \Pi_4 &= \text{col}\{\ell_2, \ell_{13}, d_t \ell_4, \ell_0, \ell_0, d_m \ell_5\} \\
 \Pi_5 &= \text{col}\{\ell_3, \ell_{14}, d_t \ell_4 + d_m \ell_5, -d_m \ell_5, d_m \ell_5, \ell_0\} \\
 \Pi_{61} &= \text{col}\{d_t^2(\ell_6 - \ell_4), d_t^2(\ell_4 - \ell_6) + d_t d_m \ell_5\} \\
 \Pi_6 &= \text{col}\{d_t \ell_4, \ell_1 - \ell_2, d_t^2 \ell_6, d_t^2(\ell_4 - \ell_6), \Pi_{61}\} \\
 \Pi_{71} &= \text{col}\{d_m^2(2\ell_5 - \ell_7) + d_m d_t \ell_4, -d_m^2 \ell_7, d_m^2 \ell_7\} \\
 \Pi_7 &= \text{col}\{d_m \ell_5, \ell_2 - \ell_3, \Pi_{71}, d_m^2(\ell_5 - \ell_7)\} \\
 \Pi_8 &= \text{col}\{\ell_0, \ell_0, \ell_1, -\hat{d}_t \ell_2, \hat{d}_t \ell_2, -\ell_3\}, \quad \Pi_9 = \text{col}\{\ell_1, \ell_8\} \\
 \Pi_{10} &= \text{col}\{\ell_1 - \ell_2, \ell_1 + \ell_2 - 2\ell_4, \ell_1 - \ell_2 + 6\ell_4 - 12\ell_6\} \\
 \Pi_{11} &= \text{col}\{\ell_2 - \ell_3, \ell_2 + \ell_3 - 2\ell_5, \ell_2 - \ell_3 + 6\ell_5 - 12\ell_7\} \\
 \Pi_{12} &= \text{col}\{d_t \ell_4, \ell_{11}\}, \quad \Pi_{13} = \text{col}\{d_m \ell_4, \ell_{12}\} \\
 \Pi_{14} &= \text{col}\{\Pi_{10}, \Pi_{11}\}, \quad \Pi_{15} = \text{col}\{\Pi_{12}, \Pi_{13}\} \\
 \Pi_{16} &= \text{He}\{\Sigma_{i=1}^3(\ell_{i+7} - K_p W_2 \ell_i) H_i (K_m W_2 \ell_i - \ell_{i+7})\} \\
 \Pi_{17} &= \text{He}\{\Sigma_{i=1}^2((\ell_{i+7} - \ell_{i+8}) - K_p W_2(\ell_i - \ell_{i+1})) T_i \\
 &\quad \times (K_m W_2(\ell_i - \ell_{i+1}) - (\ell_{i+7} - \ell_{i+8})) + ((\ell_7 - \ell_9) \\
 &\quad - K_p W_2(\ell_1 - \ell_3)) T_i (K_m W_2(\ell_1 - \ell_3) - (\ell_7 - \ell_9))\} \\
 \mathcal{R}_0 &= \begin{bmatrix} R_1 + X_1 & Y_0 \\ * & R_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_1 = \frac{1}{\bar{h}} \begin{bmatrix} X_3 - X_1 & Y_1 \\ * & X_2 + X_4 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{R}_2 &= \frac{1}{\bar{h}^2} \begin{bmatrix} -X_3 & Y_2 \\ * & -X_4 \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} -R & Y_0 \\ * & -R + X_2 + X_4 \end{bmatrix} \\
 U_1 &= \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ * & -X_2 - 2X_4 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} X_3 & Y_2 \\ * & X_4 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} Z & X_z \\ * & Z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

证明：考虑如下时滞乘积 L-K 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \quad (6-35)$$

其中

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \psi_1^T(t) \mathcal{P}_{dt} \psi_1(t) \\
 V_2(t) &= \int_{t-d_t}^t \psi_2^T(t, s) Q_1 \psi_2(t, s) ds + \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \psi_2^T(t, s) Q_2 \psi_2(t, s) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3(t) &= \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds du + \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \int_u^t \psi_3^T(s) Z \psi_3(s) ds du \\
 V_4(t) &= 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{W_{2i}x(t)} (l_{2i} f_i^+(s) + l_{1i} f_i^-(s)) ds \\
 \mathcal{P}_{dt} &= d_t P_1 + (d - d_t) P_2, \quad \psi_1(t) = \text{col}\{\zeta_1, \zeta_4, d_t v_1, d_t v_3, d_m v_2, d_m v_4\} \\
 \psi_{21}(t, s) &= \text{col}\left\{\int_s^t x(u) du, \int_{t-d_t}^s x(u) du\right\}, \quad f_i^+(s) = k_i^+ s - f_i(s) \\
 \psi_{22}(t, s) &= \text{col}\left\{\int_s^{t-d_t} x(u) du, \int_{t-\bar{d}}^s x(u) du\right\}, \quad f_i^-(s) = f_i(s) - k_i^- s \\
 \psi_3(s) &= \text{col}\{x(s), f(W_2 x(s))\}, \\
 \psi_2(t, s) &= \text{col}\{x(s), \dot{x}(s), \psi_{21}(t, s), \psi_{22}(t, s)\},
 \end{aligned}$$

$V(t)$ 沿着系统轨迹求导, 可得如下条件

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) \\
 &= \text{He}\{\psi_1^T(t) \mathcal{P}_{dt} \dot{\psi}_1(t)\} + \psi_1^T(t) \dot{\mathcal{P}}_{dt} \psi_1(t) - \hat{d}_t \psi_2^T(t, t-d_t)(Q_1 - Q_2) \psi_2(t, t-d_t) \\
 &\quad + \psi_2^T(t, t) Q_1 \psi_2(t, t) - \psi_2^T(t, t-\bar{d}) Q_2 \psi_2(t, t-\bar{d}) + \bar{d}^2 \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) + \mathcal{W}_1(t) \\
 &\quad + \mathcal{W}_2(t) + \left(\int_{t-d_t}^t \psi_2^T(s) ds Q_1 + \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \psi_2^T(s) ds Q_2\right) \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(t, s) \\
 &\quad + \bar{d}^2 \psi_3^T(t) Z \psi_3(t) + 2 \sum_{i=1}^n (l_{1i} (k_i^+ W_{2i} x(t) - f_i(W_{2i} x(t))) \\
 &\quad + l_{2i} (f_i(W_{2i} x(t)) - k_i^- W_{2i} x(t)))
 \end{aligned} \tag{6-36}$$

其中

$$\mathcal{W}_1(t) = -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds, \quad \mathcal{W}_2(t) = -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \psi_3^T(s) Z \psi_3(s) ds$$

记为

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \zeta_t^T (\Pi_1^T \mathcal{P}_{dt} \Pi_2 + \Pi_1^T \hat{\mathcal{P}}_{dt} \Pi_1 + \Pi_3^T Q_1 \Pi_3 - d_t \Pi_4^T Q_1 \Pi_4 \\
 &\quad + d_t \Pi_4^T Q_2 \Pi_4 - \Pi_5^T Q_2 \Pi_5 + \Pi_6 Q_1 \Pi_7 + \Pi_8^T Q_2 \Pi_7 \\
 &\quad + \bar{d}^2 (\ell_s^T R \ell_s + \Pi_9^T Z \Pi_9) + \text{He}\{((\ell_8 - K_m W_2 \ell_1) L_1 \\
 &\quad + (K_p W_2 \ell_1 - \ell_{11}) L_2) W_2 \ell_s\} \zeta_t + \mathcal{W}_1(t) + \mathcal{W}_2(t)
 \end{aligned} \tag{6-37}$$

基于引理 4-2, 积分项 $\mathcal{W}_1(t)$ 和 $\mathcal{W}_2(t)$ 满足如下条件

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_1(t) &= -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
 &= -\bar{d} \int_{t-d_t}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds - \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
 &\leq \zeta_t^T \left(-\frac{\bar{d}}{d_t} \Pi_{10}^T \mathcal{R} \Pi_{10} - \frac{\bar{d}}{\bar{d}-d_t} \Pi_{11}^T \mathcal{R} \Pi_{11}\right) \zeta_t
 \end{aligned} \tag{6-38}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\zeta_t^T \begin{bmatrix} \Pi_{10} \\ \Pi_{11} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{d}/d_t \mathcal{R} & O \\ * & \bar{d}/(\bar{d}-d_t) \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{10} \\ \Pi_{11} \end{bmatrix} \zeta_t \\
 \mathcal{W}_1(t) &= -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \psi_3^T(s) Z \psi_3(s) ds \\
 &= -\bar{d} \int_{t-d_t}^t \psi_3^T(s) Z \psi_3(s) ds - \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^{t-d_t} \psi_3^T(s) Z \psi_3(s) ds \\
 &\leq \zeta_t^T \left(-\frac{\bar{d}}{d_t} \Pi_{12}^T Z \Pi_{12} - \frac{\bar{d}}{\bar{d}-d_t} \Pi_{13}^T Z \Pi_{13} \right) \zeta_t \\
 &= -\zeta_t^T \begin{bmatrix} \Pi_{12} \\ \Pi_{13} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{d}/d_t Z & O \\ * & \bar{d}/(\bar{d}-d_t) Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{12} \\ \Pi_{13} \end{bmatrix} \zeta_t
 \end{aligned} \tag{6-39}$$

基于定理 5-1 可得

$$\mathcal{W}_1(t) \leq -\zeta_t^T \Pi_{14}^T \mathcal{U} \Pi_{14} \zeta_t \tag{6-40}$$

其中 $\mathcal{U} = d_t^2 \mathcal{R}_2 + d_t \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0$ 。

$$\mathcal{W}_2(t) \leq -\zeta_t^T \Pi_{14}^T \Upsilon \Pi_{14} \zeta_t \tag{6-41}$$

根据激活函数的约束，以下等式成立

$$\kappa_1(\epsilon_1, U) \geq 0, \quad \kappa_2(\epsilon_1, \epsilon_2, U) \geq 0 \tag{6-42}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \kappa_1(\epsilon, U) &= He\{(f(W_2 x(\epsilon_1)) - K_p W_2 x(\epsilon_1))^T U \times (K_m W_2 x(\epsilon_1) - f(W_2 x(\epsilon_1)))\} \\
 \kappa_2(\epsilon_1, \epsilon_2, U) &= He\{((f(W_2 x(\epsilon_1)) - f(W_2 x(\epsilon_2))) - K_p W_2(x(\epsilon_1) - x(\epsilon_2)))^T \\
 &\quad U (K_m W_2(x(\epsilon_1) - x(\epsilon_2)) - (f(W_2 x(\epsilon_1)) - f(W_2 x(\epsilon_2))))\}
 \end{aligned}$$

给出如下正定项

$$\begin{aligned}
 \kappa_1(t, H_1) + \kappa_1(t - d_t, H_2) + \kappa_1(t - \bar{d}, H_3) &\geq 0 \\
 \kappa_2(t, t - d_t, T_1) + \kappa_2(t - d_t, t - \bar{d}, T_2) + \kappa_2(t, t - \bar{d}, T_3) &\geq 0
 \end{aligned} \tag{6-43}$$

记为

$$\zeta_t^T (\Pi_{16} + \Pi_{17}) \zeta_t \geq 0 \tag{6-44}$$

通过综合式(6-36)-(6-44)，能够得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \zeta_t^T \mathfrak{V}_{[d_t, \dot{d}_t]} \zeta_t \\
 &= \zeta_t^T (d_t^2 \Theta_{2[d_t]} + d_t \Theta_{1[\dot{d}_t]} + \Theta_{0[\dot{d}_t]}) \zeta_t
 \end{aligned} \tag{6-45}$$

其中 $\mathfrak{V}_{[d_t, \dot{d}_t]}$ 和 $\Theta_{j[\dot{d}_t]}$ 被定义在定理 6-2 中。 $\Theta_{j[\dot{d}_t]}$ 是矩阵多项式 $\mathfrak{V}_{[d_t, \dot{d}_t]}$ 的系数。

$\mathfrak{V}_{[d_t, \dot{d}_t]}$ 在 \dot{d}_t 上是仿射的, $\mathfrak{V}_{[d_t, \dot{d}_t]} < 0$ 对于 $\forall \dot{d}_t \in [\underline{u}, \bar{u}]$ 成立当且仅当 $\mathfrak{V}_{[d_t, \bar{u}]} < 0$ 和 $\mathfrak{V}_{[d_t, \underline{u}]} < 0$ 成立。基于定理 5-1, 如果 LMI 条件(6-34)存在可行解, 则 $\mathfrak{V}_{[d_t, \underline{u}]} < 0$ 和 $\mathfrak{V}_{[d_t, \bar{u}]} < 0$ 成立, 因此, 如果存在矩阵变量满足不等式约束(6-34), 则存在 $\delta > 0$ 使得 $\dot{V}(t) \leq -\delta x^T(t)x(t)$ 。

注 6-3: 基于上节所提增广 L-K 泛函, 设计激活函数相关项 $V_2(t)$ 和双积分项 $\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \int_u^t \psi_3^T(s) Z \psi_3(s) ds du$, 提出新型时滞乘积 L-K 函数。其包含了更多的时滞状态和激活函数信息。相比于增广 L-K 泛函, 所提时滞乘积 L-K 泛函包含了更多时滞信息, 有利于降低时滞判据的保守性。

注 6-4: 考虑神经网络系统稳定判据计算复杂度与保守性的平衡, 引入一阶时滞乘积项 $\psi_1^T(t) \mathcal{P}_{d_t} \psi_1(t)$ 。高阶时滞乘积项, 如 $\sum_{i=1}^n d_i^i P_i$ 和 $\sum_{i=2}^n (\bar{d} - d_i)^i P_i$, 与一阶时滞乘积项具有同质信息。而且, 高阶时滞乘积项的存在会大幅增加系统稳定判据所需的决策变量数。因此, 本章提出的时滞乘积 L-K 泛函有效平衡了所得判据的计算效率与计算复杂度关系。

6.4 数值仿真

本节通过数值算例与现有文献结果的进行比较, 表明所提 L-K 泛函的有效性和稳定判据的低保守性。

例 6-1: 考虑如下系统参数:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0.88 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \text{diag}\{0.4, 0.8\}, \quad K_m = \text{diag}\{0, 0\}, \quad J = [0.1, 0.6]^T$$

为了验证定理 6-1 所得稳定条件的低保守性, 表 6-1 记录了不同方法得到的时滞稳定上界。对于时滞导数上界未知或 $\dot{h}(t) \geq 1$ 的情况, 令式(6-12)中的 $V_3(t) = 0$, 可以得到相应的稳定判据。-代表该文献中没有提供的算例结果。根据表 6-1 可得, 本文提出的稳定判据比现有结果保守性更低。设置初始条件 $x(0) = [0.2, 0.5]^T$, 时滞信号 $h(t) = 0.8 \sin(t) + 4.8384$, 激活函数 $f(x(t)) = [0.4 \tanh(x_1(t)), 0.8 \tanh(x_2(t))]^T$, 图 6-1 展示了给定初始条件下时滞神经网络系统的响应轨迹和时滞信号。通过计算可得系统的平衡点为 $y^* = [0.438 \quad 0.3]^T$ 。系统在其平衡点处是渐近稳定的, 表明了本文所提稳定条件的有效性。

表 6-1 时滞稳定上界(例 6-1)

Table 6-1 The maximum allowable delay (Example 6-1)

方法	$h_D = 0.8$	$h_D = 0.9$	未知或 $u \geq 1$
[150]	3.1409	1.6375	-
[148]	4.5940	3.4671	3.4504
[149]	4.8167	3.4245	3.4011
[63]	5.0945	3.4978	3.4506
[60]定理 1	5.1570	3.6157	3.5317
[60]定理 2	5.4428	3.6482	3.5478
定理 6-1	5.5098	3.7098	3.6399

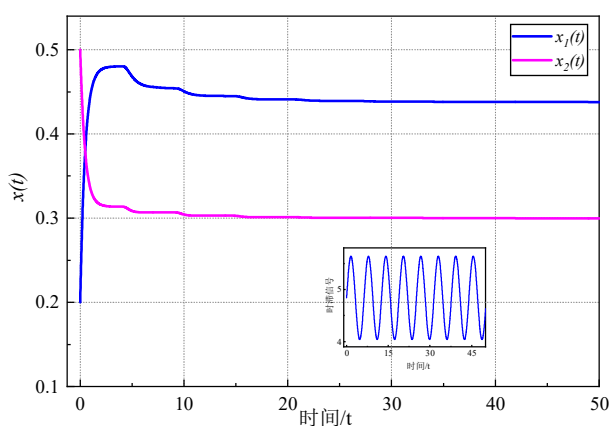


图 6-1 系统响应轨迹(例 6-1)

Fig. 6-1 State trajectories of the system of Example 6-1

例 6-2: 考虑如下系统参数:

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} 0.0503 & 0.0454 \\ 0.0987 & 0.2075 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0.2381 & 0.9320 \\ 0.0388 & 0.5062 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \text{diag}\{0.3, 0.8\}, \quad K_m = \text{diag}\{0, 0\}, \quad J = [0.4, 0.2]^T$$

为验证所提时滞乘积 L-K 泛函的低保守性, 针对不同的 \bar{u} 和 \underline{u} , 通过定理 6-2 计算得到系统的时滞稳定上界。表 6-2 总结归纳了定理 6-2 与现有文献的结果。时滞稳定上界是评价稳定判据保守性的关键指标之一。根据表 6-2 可得, 定理 6-2 得到的时滞稳定上界优于现有文献, 相比现有结果提高超过 17%。也就是说, 定理 6-2 得到的稳定性判据具有较少保守性。然后, 从 $[-2, 2]$ 中随机选择 100 组数据作为系统初始条件, 时滞信号 $d_1 = (14.448/2)(1 + \sin((1.1/14.448)t))$, 对系统进行仿真实验。图 6-2 和图 6-3 分别展示了系统状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在不同初始条件下的系统响应。从图

中可以看出，系统响应轨迹是渐近稳定的，表明了所得稳定性方法的有效性。

表 6-2 时滞稳定上界(例 6-2)

Table 6-2 The Maximum allowable delay (Example 6-2)

方法	$\bar{u} = 0.45$	$\bar{u} = 0.5$	$\bar{u} = 0.55$
定理 6-1	9.356	8.846	8.517
[152]	11.117	10.005	9.415
[54]	13.900	11.949	10.796
[78](m=3)	17.342	14.446	12.670
定理 6-2	23.290	17.524	14.448

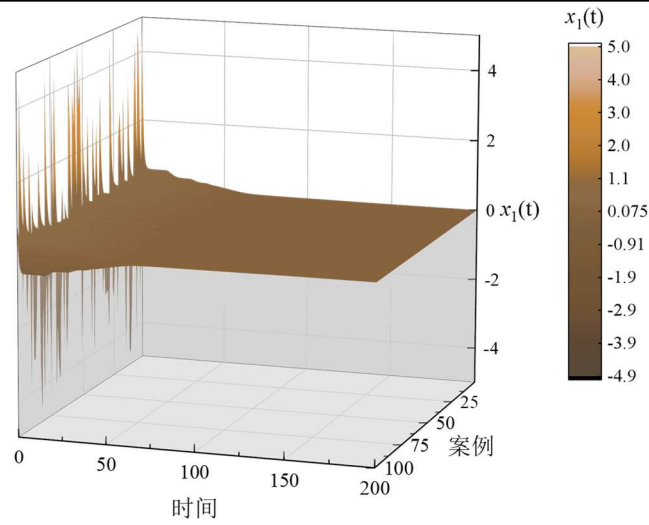


图 6-2 x_1 的状态响应(例 6-2)

Fig. 6-2 State responses of x_1 in Example 6-2

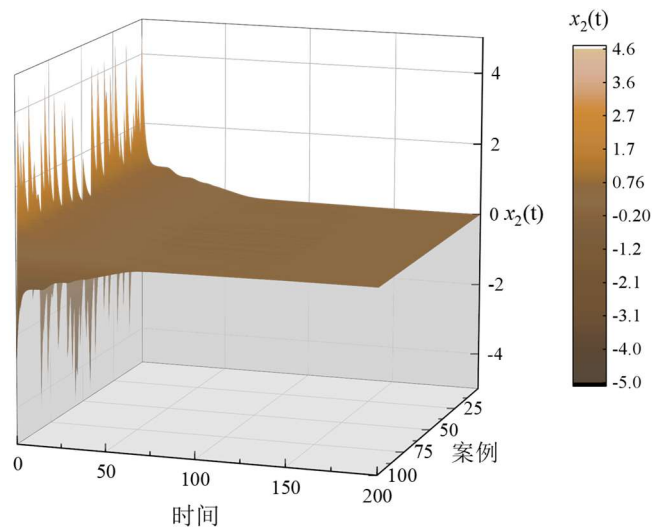


图 6-3 x_2 的状态响应(例 6-2)

Fig. 6-3 State responses of x_2 in Example 6-2

6.5 本章小结

本章基于新型 L-K 泛函研究了具有时变时滞的神经网络系统渐近稳定性问题。通过设计增广项, 提出新型增广 L-K 泛函, 配合基于正交多项式的积分不等式, 得到系统稳定条件。针对广义神经网络系统, 充分考虑时滞信息, 设计新型时滞乘积 L-K 泛函。利用广义互凸不等式, 放松所得稳定条件的保守性。最后, 通过数值算例表明所提 L-K 泛函的低保守性。

结 论

本文针对几类线性和非线性时滞系统，通过增广系统和时滞状态，设计新型时滞乘积项和积分项，改进 L-K 泛函设计方法，提出广义互凸不等式和参数可调多项式矩阵不等式，研究了系统的稳定性分析及应用问题。基于改进 L-K 泛函，提出保守性较低的稳定判据和控制器设计方案，能够有效放松系统的时滞稳定上界，保证系统在给定时滞区间内的稳定性。本文的研究内容和成果丰富了时滞系统领域的理论研究和工程应用，创新性总结如下：

(1) L-K 泛函的设计和优化方面。设计合适的 L-K 泛函是时滞系统分析领域的关键，也是本文研究的重点。首先，增广系统和时滞状态的交叉信息，优化泛函对系统能量的描述，针对微电网系统和时滞神经网络系统，降低所得判据的保守性。其次，引入新型时滞乘积和非对称矩阵项，提出时滞乘积 L-K 泛函和非对称 L-K 泛函。基于所提 L-K 泛函，优化系统的时滞稳定上界。

(2) 广义互凸不等式方面。针对时变时滞系统的稳定性分析问题，互凸不等式对于 L-K 泛函导数的估计发挥了关键作用。本文基于高阶矩阵多项式不等式技术，引入更多的松弛矩阵变量，提出广义互凸不等式，精确估计泛函的交叉项。部分研究成果可视为广义互凸不等式的特殊情况。结合增广 L-K 泛函，将广义互凸不等式应用到时滞非线性系统中，得到保守性较低的稳定判据和控制器设计策略。

(3) 多项式矩阵不等式方面。基于矩阵多项式的几何信息，通过可调参数优化时滞区间，建立新型多项式矩阵不等式。部分现有研究结果可以认为是所提矩阵不等式的特例。针对具有不确定性和传输延迟的网络化控制系统，依据所提参数可调多项式矩阵不等式，构建了新型稳定判据和控制器设计方法。

本文所提方法有效放松了时滞系统稳定判据的保守性，丰富了系统的稳定分析方法和技术。然而，时滞系统涵盖了很多理论和工程领域的难点。仍存在许多有待进一步研究的内容，作者认为主要有以下几个方面。

(1) 针对时变时滞系统，L-K 泛函方法具有结构简单和便于分析得优点，基于 LMI 的稳定条件能够有效分析系统稳定性。但是，现有方法大多集中于对系统第一稳定区间的探索，无法得到系统稳定的所有时滞区间，即系统的完全稳定性。因

此, 发展 L-K 泛函方法以获得时滞系统所有的稳定区间具有重要的研究意义。

(2) 为了放松系统时滞稳定上届, 现有研究不断优化 L-K 泛函和不等式技术。虽然保守性得到有效减少, 但随之而来的是判据决策变量的增加。针对这一问题, 如何在保守性和计算复杂度之间取得平衡, 得到面向工程系统的稳定性条件和控制器设计方案值得深入研究。

(3) 在理论分析层面, 时滞系统稳定性及控制研究已经得到了充分的发展。对于工程系统模型分析也存在丰富的成果。但是, 大多数文献仅通过数值算例和仿真实验验证方法的有效性, 缺乏实例验证。因此, 扩展时滞系统领域研究成果到工程系统是未来得研究方向之一。

参考文献

- [1] Harvill L R. Vito Volterra and viscoelasticity[J]. Journal of the Franklin Institute, 1966, 282(2): 85-91.
- [2] 赵军生. 一类二阶时滞方程振动性准则[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 1999(01): 14-19+24.
- [3] Anosov D V, Ginzburg V L, Zhizhchenko A B. Naum Natanovich Meiman[J]. Russian Mathematical Surveys, 2002, 57(2): 399.
- [4] Kolmanovskii V, Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]//Proceedings of the 39th IEEE conference on decision and control. IEEE, 2000, 3: 2805-2810.
- [6] Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control[M]. Springer, 2014.
- [7] Gu K, Niculescu S I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems[J]. J. Dyn. Sys., Meas., Control, 2003, 125(2): 158-165.
- [8] 李旭光. 时滞系统稳定性的若干研究[D]. 上海:上海交通大学, 2007.
- [9] Rasvan V. Absolute stability of time lag control systems[J]. Editura Academiei, RSR, Bucharest, 1975.
- [10] Walton K, Marshall J E. Direct method for TDS stability analysis[C]//IEEE Proceedings D-Control Theory and Applications. 1987, 2(134): 101-107.
- [11] Hu G D, Liu M. Stability criteria of linear neutral systems with multiple delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(4): 720-724.
- [12] Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5): 793-797.
- [13] Li X G, Niculescu S I, Cela A, et al. On computing Puiseux series for multiple imaginary characteristic roots of LTI systems with commensurate delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(5): 1338-1343.
- [14] Krasovskii N N. Stability of motion[J]. Stanford University Press, 1963.
- [15] Gu K. Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems[J].

- International Journal of Control, 1997, 68(4): 923-934.
- [16] Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(2): 253-270.
- [17] Park P G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 1999, 44(4): 876-877.
- [18] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. International Journal of control, 2001, 74(14): 1447-1455.
- [19] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.
- [20] Sun J, Liu G P, Chen J, et al. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2010, 46(2): 466-470.
- [21] Razumikhin B S. Application of Liapunov's method to problems in the stability of systems with a delay[J]. Automat. i Telemekh, 1960, 21: 740-749.
- [22] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 1048-1060.
- [23] Mohamad S, Gopalsamy K. Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135(1): 17-38.
- [24] Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems[J]. European Journal of Control, 2014, 20(6): 271-283.
- [25] 葛超. 基于改进型 Lyapunov 泛函的时滞系统稳定性新判据研究及应用[D]. 河北:燕山大学, 2014.
- [26] Repin I M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1965, 29(3): 669-672.
- [27] Seuret A, Gouaisbaut F, Baudouin L. D1. 1-Overview of Lyapunov methods for time-delay systems[J]. LAAS-CNRS, 2016, 1-46.
- [28] Gu K, Chen J, Kharitonov V L. Stability of time-delay systems[M]. Springer Science & Business Media, 2003.
- [29] Papachristodoulou A, Peet M M, Niculescu S I. Stability analysis of linear systems with time-varying delays: Delay uncertainty and quenching[C]//2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2007: 2117-2122.

-
- [30] Peet M M. LMI parametrization of Lyapunov functions for infinite-dimensional systems: A framework[C]//2014 American Control Conference. IEEE, 2014: 359-366.
- [31] Wu S, Peet M M, Sun F, et al. Robust Analysis of Linear Systems with Uncertain Delays using PIEs[J]. IFAC-PapersOnLine, 2021, 54(18): 163-168.
- [32] Peet M M. A dual to Lyapunov's second method for linear systems with multiple delays and implementation using SOS[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 64(3): 944-959.
- [33] Ivănescu D, Dion J M, Dugard L, et al. Dynamical compensation for time-delay systems: an LMI approach[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(8): 611-628.
- [34] Baser U. Output feedback H_∞ control problem for linear neutral systems: delay independent case[J]. J. Dyn. Sys., Meas., Control, 2003, 125(2): 177-185.
- [35] Lien C H. Delay-dependent and delay-independent guaranteed cost control for uncertain neutral systems with time-varying delays via LMI approach[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 33(3): 1017-1027.
- [36] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2005, 15(18): 923-933.
- [37] Zhang C K, Jiang L, Wu Q H, et al. Further results on delay-dependent stability of multi-area load frequency control[J]. IEEE transactions on power systems, 2013, 28(4): 4465-4474.
- [38] Yang F, He J, Wang D. New stability criteria of delayed load frequency control systems via infinite-series-based inequality[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 14(1): 231-240.
- [39] Muthukumar P, Arunagirinathan S, Lakshmanan S. Nonfragile sampled-data control for uncertain networked control systems with additive time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(4): 1512-1523.
- [40] Zhang X, Wang D, Ota K, et al. Delay-Dependent Switching Approaches for Stability Analysis of Two Additive Time-Varying Delay Neural Networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, doi: 10.1109/TNNLS.2021.3085555.
- [41] Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. Stability analysis for delayed neural networks considering both conservativeness and complexity[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 27(7): 1486-1501.
- [42] Li Z, Yan H, Zhang H, et al. Stability and stabilization with additive freedom for delayed Takagi-

- Sugeno fuzzy systems by intermediary-polynomial-based functions[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 28(4): 692-705.
- [43] Gouaisbaut F, Peaucelle D. Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2006, 39(10): 54-59.
- [44] Zhang X M, Han Q L. A delay decomposition approach to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 2009, 19(17): 1922-1930.
- [45] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. Complete delay-decomposing approach to asymptotic stability for neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(5): 806-812.
- [46] Feng Z, Lam J, Yang G H. Optimal partitioning method for stability analysis of continuous/discrete delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(4): 559-574.
- [47] Fang M, Park J H. A multiple integral approach to stability of neutral time-delay systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 224: 714-718.
- [48] Manivannan R, Samidurai R, Cao J, et al. Global exponential stability and dissipativity of generalized neural networks with time-varying delay signals[J]. Neural Networks, 2017, 87: 149-159.
- [49] Wang Z, Ding S, Zhang H. Hierarchy of stability criterion for time-delay systems based on multiple integral approach[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 314: 422-428.
- [50] Li Z, Bai Y, Huang C, et al. Improved stability analysis for delayed neural networks[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2017, 29(9): 4535-4541.
- [51] Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. Delay-variation-dependent stability of delayed discrete-time systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9): 2663-2669.
- [52] Cai X, Shi K, She K, et al. Voluntary defense strategy and quantized sample-data control for TS fuzzy networked control systems with stochastic cyber-attacks and its application[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 423: 126975.
- [53] Lian Z, He Y, Zhang C K, et al. Stability and stabilization of T-S fuzzy systems with time-varying delays via delay-product-type functional method[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2019, 50(6): 2580-2589.
- [54] Lee T H, Trinh H M, Park J H. Stability analysis of neural networks with time-varying delay by

- constructing novel Lyapunov functionals[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2017, 29(9): 4238-4247.
- [55] Long F, Zhang C K, He Y, et al. Stability analysis for delayed neural networks via a novel negative-definiteness determination method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(6): 5356-5366.
- [56] 吴双双. 基于 LOI/LMI 的时滞系统时滞相关稳定性研究[D]. 河北:燕山大学, 2019.
- [57] Kim J H. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems[J]. Automatica, 2016, 64: 121-125.
- [58] Briat C. Convergence and equivalence results for the Jensen's inequality-Application to time-delay and sampled-data systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(7): 1660-1665.
- [59] Sheng Z, Lin C, Chen B, et al. An asymmetric Lyapunov-Krasovskii functional method on stability and stabilization for TS fuzzy systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 30(6): 2135-2140.
- [60] Yang B, Wang J, Wang J. Stability analysis of delayed neural networks via a new integral inequality[J]. Neural Networks, 2017, 88: 49-57.
- [61] Seuret A, Gouaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [62] Jin L, Zhang C K, He Y, et al. Delay-dependent stability analysis of multi-area load frequency control with enhanced accuracy and computation efficiency[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(5): 3687-3696.
- [63] Lee T H, Park J H, Park M J, et al. On stability criteria for neural networks with time-varying delay using Wirtinger-based multiple integral inequality[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(12): 5627-5645.
- [64] Ji M D, He Y, Wu M, et al. Further results on exponential stability of neural networks with time-varying delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 256: 175-182.
- [65] Yang F, Zhang H, Wang Y. An enhanced input-delay approach to sampled-data stabilization of T-S fuzzy systems via mixed convex combination[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 75(3): 501-512.
- [66] Seuret A, Gouaisbaut F. Hierarchy of LMI conditions for the stability analysis of time-delay systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 81: 1-7.
- [67] Yang F, He J, Pan Q. Further improvement on delay-dependent load frequency control of power systems via truncated B-L inequality[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(5): 5062-

5071.

- [68] Zhang X M, Han Q L, Zeng Z. Hierarchical type stability criteria for delayed neural networks via canonical Bessel-Legendre inequalities[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2017, 48(5): 1660-1671.
- [69] Datta R, Dey R, Bhattacharya B, et al. Stability and stabilization of T-S fuzzy systems with variable delays via new Bessel-Legendre polynomial based relaxed integral inequality[J]. Information Sciences, 2020, 522: 99-123.
- [70] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.
- [71] Li J, Zhao Y, Feng Z, et al. Reachable set estimation and dissipativity for discrete-time T-S fuzzy singular systems with time-varying delays[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019, 31: 166-179.
- [72] Seuret A, Gouaisbaut F. Allowable delay sets for the stability analysis of linear time-varying delay systems using a delay-dependent reciprocally convex lemma[J]. IFAC-PapersOnLine, 2017, 50(1): 1275-1280.
- [73] Shao H, Li H, Shao L. Improved delay-dependent stability result for neural networks with time-varying delays[J]. ISA transactions, 2018, 80: 35-42.
- [74] Seuret A, Liu K, Gouaisbaut F. Generalized reciprocally convex combination lemmas and its application to time-delay systems[J]. Automatica, 2018, 95: 488-493.
- [75] Lian Z, He Y, Wu M. Stability and stabilization for delayed fuzzy systems via reciprocally convex matrix inequality[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 402: 124-141.
- [76] 李晶莹. T-S 模糊采样系统的稳定性分析与控制器设计[D]. 哈尔滨工业大学, 2014.
- [77] Zeng H B, Lin H C, He Y, et al. Hierarchical stability conditions for time-varying delay systems via an extended reciprocally convex quadratic inequality[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(14): 9930-9941.
- [78] Lin H C, Zeng H B, Zhang X M, et al. Stability Analysis for Delayed Neural Networks via a Generalized Reciprocally Convex Inequality[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, doi: 10.1109/TNNLS.2022.3144032.
- [79] Zhang X M, Han Q L, Seuret A, et al. An improved reciprocally convex inequality and an augmented Lyapunov-Krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay[J].

- Automatica, 2017, 84: 221-226.
- [80] Chen J, Park J H, Xu S, et al. A survey of inequality techniques for stability analysis of time-delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(11):6412-6440.
- [81] Kim J H. Note on stability of linear systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2011, 47(9): 2118-2121.
- [82] Long F, Lin W J, He Y, et al. Stability analysis of linear systems with time-varying delay via a quadratic function negative-definiteness determination method[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(11): 1478-1485.
- [83] Zhang C K, Long F, He Y, et al. A relaxed quadratic function negative-determination lemma and its application to time-delay systems[J]. Automatica, 2020, 113: 108764.
- [84] Lee T H. Geometry-based conditions for a quadratic function: application to stability of time-varying delay systems[J]. IEEE Access, 2020, 8: 92462-92468.
- [85] 张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制 [D]. 长沙: 中南大学, 2013.
- [86] Jiang L, Yao W, Wu Q H, et al. Delay-dependent stability for load frequency control with constant and time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Power systems, 2011, 27(2): 932-941.
- [87] 袁楠, 曾红兵, 刘晓桂. 时滞相关稳定性分析在电力系统中的应用 [J]. 湖南工业大学学报, 2018, 32(05): 45-49.
- [88] Shivakumar S, Das A, Peet M M. PIETOOLS: A MATLAB toolbox for manipulation and optimization of partial integral operators[C]//2020 American Control Conference (ACC). IEEE, 2020: 2667-2672.
- [89] Pham T N, Nahavandi S, Trinh H, et al. Static output feedback frequency stabilization of time-delay power systems with coordinated electric vehicles state of charge control[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 32(5): 3862-3874.
- [90] Tian E, Peng C. Memory-based event-triggering H_∞ load frequency control for power systems under deception attacks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(11): 4610-4618.
- [91] Saxena S, Fridman E. Event-triggered load frequency control via switching approach[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(6): 4484-4494.
- [92] Naveed A, Sönmez Ş, Ayasun S. Impact of electric vehicle aggregator with communication time delay on stability regions and stability delay margins in load frequency control system[J]. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 2020, 9(3): 595-601.

-
- [93] Shivakumar S, Peet M M. Computing input-output properties of coupled linear PDE systems[C]//2019 American Control Conference (ACC). IEEE, 2019: 606-613.
- [94] Peet M M. A new state-space representation for coupled PDEs and scalable Lyapunov stability analysis in the SOS framework[C]//2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2018: 545-550.
- [95] Yu X D, Jia H J, Wang C S. CTDAE & CTODE models and their applications to power system stability analysis with time delays[J]. Science China Technological Sciences, 2013, 56(5): 1213-1223.
- [96] Luo H, Hiskens I A, Hu Z. Stability analysis of load frequency control systems with sampling and transmission delay[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(5): 3603-3615.
- [97] Brearley B J, Prabu R R. A review on issues and approaches for microgrid protection[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2017, 67: 988-997.
- [98] Lu X, Chen N, Wang Y, et al. Distributed impulsive control for islanded microgrids with variable communication delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(14): 1732-1739.
- [99] Khalil A, Rajab Z, Alfergani A, et al. The impact of the time delay on the load frequency control system in microgrid with plug-in-electric vehicles[J]. Sustainable cities and society, 2017, 35: 365-377.
- [100] Yang F, He J, Wang J, et al. Auxiliary-function-based double integral inequality approach to stability analysis of load frequency control systems with interval time-varying delay[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(5): 601-612.
- [101] Liu F, Gao H, Qiu J, et al. Networked multirate output feedback control for setpoints compensation and its application to rougher flotation process[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 61(1): 460-468.
- [102] Zheng M, Li L, Peng H, et al. Finite-time stability and synchronization of memristor-based fractional-order fuzzy cellular neural networks[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 59: 272-291.
- [103] Sönmez Ş, Ayasun S, Nwankpa C O. An exact method for computing delay margin for stability of load frequency control systems with constant communication delays[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 31(1): 370-377.
- [104] Gündüz H, Sönmez Ş, Ayasun S. Comprehensive gain and phase margins based stability analysis

- of micro-grid frequency control system with constant communication time delays[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2017, 11(3): 719-729.
- [105] Ko K S, Sung D K. The effect of EV aggregators with time-varying delays on the stability of a load frequency control system[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 33(1): 669-680.
- [106] Ramakrishnan K, Vijeswaran D, Manikandan V. Stability analysis of networked micro-grid load frequency control system[J]. The Journal of Analysis, 2019, 27(2): 567-581.
- [107] Long F, Zhang C K, He Y, et al. Stability analysis of Lur'e systems with additive delay components via a relaxed matrix inequality[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 328: 224-242.
- [108] Han Y, Zhang K, Li H, et al. MAS-based distributed coordinated control and optimization in microgrid and microgrid clusters: A comprehensive overview[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2017, 33(8): 6488-6508.
- [109] Park P G, Lee W I, Lee S Y. Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [110] Ren C, Park J H, He S. Positiveness and Finite-Time Control of Dual-Switching Poisson Jump Networked Control Systems With Time-Varying Delays and Packet Drops[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 9(2): 575-587.
- [111] Zheng W, Wang H, Wang H, et al. Dynamic output feedback control based on descriptor redundancy approach for networked control systems with multiple mixed time-varying delays and unmatched disturbances[J]. IEEE Systems Journal, 2019, 13(3): 2942-2953.
- [112] Steinberger M, Horn M, Ferrara A. Adaptive control of multivariable networked systems with uncertain time delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(1): 489-496.
- [113] Liu X, Deng F, Wei W, et al. Formation tracking control of networked systems with time-varying delays and sampling under fixed and Markovian switching topology[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 9(2): 601-612.
- [114] Sun W, Li Q, Zhao C, et al. Mode-dependent dynamic output feedback H_∞ control of networked systems with Markovian jump delay via generalized integral inequalities[J]. Information Sciences, 2020, 520: 105-116.
- [115] Nonomura T, Fujii F. Design of Two DOF digital servo system with RNN-based dynamic state predictive control for network control systems with large delays[C]//2022 IEEE/SICE International

- Symposium on System Integration (SII). IEEE, 2022: 944-949.
- [116] Sun X, Mao W. H_∞ control of asynchronous networked control systems with Markov time delays[J]. International Journal of Automation and Control, 2019, 13(5): 548-568.
- [117] Liu D, Yang G H. Robust event-triggered control for networked control systems[J]. Information Sciences, 2018, 459: 186-197.
- [118] Wang K, Tian E, Liu J, et al. Resilient control of networked control systems under deception attacks: a memory-event-triggered communication scheme[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(4): 1534-1548.
- [119] Zheng W, Zhang Z, Sun F, et al. Robust stability analysis and feedback control for networked control systems with additive uncertainties and signal communication delay via matrices transformation information method[J]. Information Sciences, 2022, 582: 258-286.
- [120] Zhang X M, Han Q L, Ge X, et al. Networked control systems: A survey of trends and techniques[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2019, 7(1): 1-17.
- [121] Fang F, Ding H, Liu Y, et al. Fault tolerant sampled-data H_∞ control for networked control systems with probabilistic time-varying delay[J]. Information Sciences, 2021, 544: 395-414.
- [122] Wang C R, He Y, Lin W J. Stability analysis of generalized neural networks with fast-varying delay via a relaxed negative-determination quadratic function method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 391: 125631.
- [123] Zeng H B, Zhai Z L, Wang W. Hierarchical stability conditions of systems with time-varying delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 404: 126222.
- [124] Zeng H B, Lin H C, He Y, et al. Improved negativity condition for a quadratic function and its application to systems with time-varying delay[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(18): 2989-2993.
- [125] Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB[C]//2004 IEEE international conference on robotics and automation. IEEE, 2004: 284-289.
- [126] Chen J, Park J H, Xu S. Stability analysis of continuous-time systems with time-varying delay using new Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(13): 5957-5967.
- [127] Chen J, Park J H, Xu S. Stability analysis of systems with time-varying delay: a quadratic-partitioning method[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(18): 3184-3189.

-
- [128] Park J M, Park P G. Finite-interval quadratic polynomial inequalities and their application to time-delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(7): 4316-4327.
- [129] Qian W, Xing W, Wang L, et al. New optimal analysis method to stability and H_∞ performance of varying delayed systems[J]. ISA transactions, 2019, 93: 137-144.
- [130] Chun T Y, Park J B, Choi Y H. Reinforcement Q-learning based on multirate generalized policy iteration and its application to a 2-DOF helicopter[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(1): 377-386.
- [131] Wang L, Karimi H R, Gu J. Stability analysis for interval type-2 fuzzy systems by applying homogenous polynomially membership functions dependent matrices and switching technique[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29(2): 203-212.
- [132] Zhao G, Nešić D, Tan Y, et al. Overcoming overshoot performance limitations of linear systems with reset control[J]. Automatica, 2019, 101: 27-35.
- [133] Hua C, Wang Y, Wu S. Stability analysis of neural networks with time-varying delay using a new augmented Lyapunov-Krasovskii functional[J]. Neurocomputing, 2019, 332: 1-9.
- [134] Fekih A. Fault diagnosis and fault tolerant control design for aerospace systems: A bibliographical review[C]//2014 American Control Conference. IEEE, 2014: 1286-1291.
- [135] Long F, Zhang C K, Jiang L, et al. Stability analysis of systems with time-varying delay via improved Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 51(4): 2457-2466.
- [136] Zeng H B, He Y, Teo K L. Monotone-delay-interval-based Lyapunov functionals for stability analysis of systems with a periodically varying delay[J]. Automatica, 2022, 138: 110030.
- [137] Chen J, Park J H, Xu S. Improvement on reciprocally convex combination lemma and quadratic function negative-definiteness lemma[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(2): 1347-1360.
- [138] Tian Y, Wang Z. Stability analysis and generalised memory controller design for delayed TS fuzzy systems via flexible polynomial-based functions[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 30(3): 728-740.
- [139] Pan X J, Yang B, Cao J J, et al. Improved stability analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delays via an extended delay-dependent reciprocally convex inequality[J]. Information Sciences, 2021, 571: 24-37.
- [140] Mahmoudabadi P, Shasadeghi M, Zarei J. New stability and stabilization conditions for nonlinear

- systems with time-varying delay based on delay-partitioning approach[J]. ISA transactions, 2017, 70: 46-52.
- [141] Sheng Z, Wang L, Lin C, et al. A Novel Asymmetric Lyapunov-Krasovskii Functional Method to Stability for T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2022, 24(2): 949-956.
- [142] Zhang X M, Han Q L, Ge X. Novel stability criteria for linear time-delay systems using Lyapunov-Krasovskii functionals with a cubic polynomial on time-varying delay[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 8(1): 77-85.
- [143] Peng C, Ma S, Xie X. Observer-based non-PDC control for networked T-S fuzzy systems with an event-triggered communication[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2279-2287.
- [144] Tian E, Yue D, Zhang Y. Delay-dependent robust H_∞ control for T-S fuzzy system with interval time-varying delay[J]. Fuzzy sets and systems, 2009, 160(12): 1708-1719.
- [145] Souza F O, Campos V C S, Palhares R M. On delay-dependent stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(7): 3707-3718.
- [146] Lian Z, He Y, Zhang C K, et al. Stability analysis for TS fuzzy systems with time-varying delay via free-matrix-based integral inequality[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2016, 14(1): 21-28.
- [147] Li G, Peng C, Xie X, et al. On stability and stabilization of TS fuzzy systems with time-varying delays via quadratic fuzzy Lyapunov matrix[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(9): 3762-3773.
- [148] Kwon O M, Park J H, Lee S M, et al. New augmented Lyapunov-Krasovskii functional approach to stability analysis of neural networks with time-varying delays[J]. Nonlinear dynamics, 2014, 76(1): 221-236.
- [149] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. Stability analysis of generalized neural networks with time-varying delays via a new integral inequality[J]. Neurocomputing, 2015, 161: 148-154.
- [150] Zhang H, Yang F, Liu X, et al. Stability analysis for neural networks with time-varying delay based on quadratic convex combination[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2013, 24(4): 513-521.
- [151] Chen G, Xia J, Park J H, et al. Sampled-data synchronization of stochastic Markovian jump neural networks with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning

- Systems, 2022, 33(8): 3829-3841.
- [152] Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. Delay-dependent stability analysis of neural networks with time-varying delay: A generalized free-weighting-matrix approach[J]. Applied mathematics and computation, 2017, 294: 102-120.
- [153] Zhang X M, Lin W J, Han Q L, et al. Global asymptotic stability for delayed neural networks using an integral inequality based on nonorthogonal polynomials[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 29(9): 4487-4493.
- [154] Liu Y, Wang Z, Liu X. Global exponential stability of generalized recurrent neural networks with discrete and distributed delays[J]. Neural Networks, 2006, 19(5): 667-675.
- [155] Lee S Y, Lee W I, Park P G. Orthogonal-polynomials-based integral inequality and its applications to systems with additive time-varying delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(1): 421-435.
- [156] Kim S H, Park P, Jeong C. Robust H_∞ stabilisation of networked control systems with packet analyser[J]. IET control theory & applications, 2010, 4(9): 1828-1837.
- [157] Li T, Wang T, Song A, et al. Combined convex technique on delay-dependent stability for delayed neural networks[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2013, 24(9): 1459-1466.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

(一) 参与的科研项目

- [1] 王毅博. 国家建设高水平大学公派博士研究生联合培养项目, 国家留学基金委资助项目. 课题编号: 202108130135.
- [2] 王毅博. 时滞电网负载频率系统的分析与控制, 河北省研究生创新资助项目. 课题编号: CXZZBS2021138.
- [3] 华长春. 面向定制式木工家具制造的机器人自动化生产示范线, 国家科学技术部重点研发计划. 课题编号: 2018YFB1308300.
- [4] 华长春. 多变量多态性能约束下网络化关联非线性系统分散协同控制及应用, 国家自然科学基金面上项目. 课题编号: 61673335.

(二) 发表的学术论文

- [1] **Yibo Wang**, Changchun Hua, Poogyeon Park. Relaxed Stability Criteria for Delayed Generalized Neural Networks Systems, IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica (中科院 SCI 一区 TOP, 已录用).
- [2] **Yibo Wang**, Changchun Hua, Yunfei Qiu, Stability and Stabilization for Amplidyne Electrical Systems via A Novel Negative-Definiteness Lemma. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems (中科院 SCI 一区 TOP, 已录用).
- [3] **Yibo Wang**, Changchun Hua, Poogyeon Park, A Generalized Reciprocally Convex Inequality on Stability and Stabilization for T-S Fuzzy Systems with Time-varying Delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems (中科院 SCI 一区 TOP, 已录用).
- [4] Changchun Hua, **Yibo Wang**. Delay-dependent stability for load frequency control system via linear operator inequality [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(7): 6984-6992 (中科院 SCI 一区 TOP).
- [5] **Yibo Wang**, Changchun Hua, Poogyeon Park, Robust State and Disturbance Reconstruction of Multi-area Power Systems via Sliding Mode Observer[C]// 2022 13th Asian control conference (ASCC). IEEE, 2022: 2072-2077 (EI).
- [6] Changchun Hua, **Yibo Wang**, Liuliu Zhang, Weili Ding, Stability and stabilization for

- the coupling permanent magnet synchronous motors system with input delay[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 107(4): 3461-3471 (中科院 SCI 二区).
- [7] Changchun Hua, **Yibo Wang**, and Shuangshuang Wu. Stability analysis of micro-grid frequency control system with two additive time-varying delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(8):4949-4963 (中科院 SCI 二区).
- [8] Changchun Hua, **Yibo Wang**, and Shuangshuang Wu. Stability analysis of neural networks with time-varying delay using a new augmented Lyapunov-Krasovskii functional[J]. Neurocomputing, 2019, 332: 1-9 (中科院 SCI 二区).
- [9] 华长春, 王毅博.基于线性算子不等式的时滞电力系统稳定性分析[J]. 燕山大学学报, 2020, 44(03): 274-280 (中文核心期刊).
- [10] Yunfei Qiu, Changchun Hua, **Yibo Wang**. Nonfragile Sampled-data Control of TS Fuzzy Systems with Time Delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(8), 3202-3210 (中科院 SCI 一区 TOP).
- [11] Changchun Hua, Yunfei Qiu, **Yibo Wang**. An augmented delays-dependent region partitioning approach for recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2020, 423: 248-254 (中科院 SCI 二区).