



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 基于时间约束切换信号的切换系统
稳定性分析与控制

作者姓名 刘国聘

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2019 年 12 月

中图分类号: xxx

UDC: xxx

学校代码: 10216

密级: 公开

工学博士学位论文

基于时间约束切换信号的切换系统 稳定性分析与控制

博 士 研 究 生: 刘国聘

导 师: 华长春 教授

申 请 学 位: 工学博士

学 科 专 业: 控制科学与工程

所 属 学 院: 电气工程学院

答 辩 日 期: 2019 年 12 月

授 予 学 位 单 位: 燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**STABILITY ANALYSIS AND CONTROL FOR
SWITCHED SYSTEMS WITH TIME CONSTRAINED
SWITCHING SIGNAL**

by Liu Guopin

Supervisor: Professor Hua Changchun

Yanshan University

December, 2019

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《基于时间约束切换信号的切换系统稳定性分析与控制》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字： 日期： 年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《基于时间约束切换信号的切换系统稳定性分析与控制》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密☒。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘 要

现代工业控制过程日趋复杂，且对系统控制性能要求不断提高，传统单一系统往往难以满足日益复杂且严格的生产需求。针对这一问题，切换系统应运而生。切换系统由多个子系统(或模态)以及切换信号组成，切换信号根据实际控制需求选择相应工作的子系统。切换系统可以用多个简单子系统模型表征复杂的控制任务，因而具有重要的理论与应用研究意义。本文主要研究基于时间约束切换的切换系统的稳定性分析问题，并考虑实际系统常见的时延、非线性、未建模动态干扰等因素对切换系统稳定性的影响，提出了切换信号与控制器协同设计方法，保证系统的暂稳态性能。论文的主要研究内容如下：

首先，研究了连续时间线性切换系统在异步切换情况下的系统镇定问题。提出了基于时间约束切换信号的切换控制方法。考虑了异步切换过程，子系统与控制器不匹配对系统稳定性造成的影响，建立了不稳定子系统与稳定子系统运行时间的切换标准，并给出了基于线性矩阵不等式(LMI)的系统反馈控制增益求解方法。进一步，研究了系统中存在的中立时滞下系统的镇定控制。基于 Lyapunov-Krasovskii 函数分析方法，构建单重积分与双重积分不等式分析时延对系统稳定性影响，提出了时滞切换系统镇定控制器设计方法。同时，在分析过程中引入自由权矩阵，大大简化了系统稳定性分析过程。通过控制器与切换信号协同设计，保证了切换系统存在不稳定且不可控切换子系统情况下系统的全局渐近稳定性。

然后，研究了离散时间 2-D 切换线性系统镇定控制问题。考虑系统中存在不稳定子系统，设计切换调节的切换信号限定系统的切换次数以及不稳定模态与稳定模态运行时间比率，基于所提切换调节信号，给出了系统同步切换下稳定性条件，并通过求解线性矩阵不等式得到镇定反馈控制器增益。所提方法保证了离散 2-D 切换系统在同步切换条件下的指数稳定性。进一步，将该方法推广到异步切换下系统镇定控制问题，给出了相应的推论结果。

最后，研究了带有未建模动态的非线性切换系统预定性能跟踪问题。通过自适应模糊控制及自适应神经网络控制方法估计系统中未知的非线性函数。分别考虑了平均驻留时间切换信号以及更通用的镇定切换信号，提出了切换信号与控制器协同设计方法，放松了传统控制方法中系统未建模动态必须满足的输入到状态稳定的假

设条件。在控制器设计过程中，结合动态面控制方法，大大降低了控制器设计过程计算复杂度。基于预定性能控制方法，提出了非线性切换系统预定性能跟踪控制策略，保证系统跟踪误差满足预定的暂稳态性能要求，同时抑制了切换过程中存在的系统状态波动现象。

关键词：切换系统；时间约束切换；稳定性分析；切换控制协同；同步切换；异步切换；不稳定子系统

Abstract

Owing to the growing enhancement on complexity and performance demand of modern industry control process, it is getting much more difficult to satisfy the strict process requirement by traditional single control system. This problem led to significant growth of switched systems. A switched system consists of several subsystems (or modes), and a switching signal governing the switching, according to practical demand, among these subsystems. Switched systems can provide a unified framework for modeling of numerous systems and thus can describe complicated control task by several subsystems, which has resulted in growing interest towards the research on switched systems. In this dissertation, based on time-constrained switching scheme, we mainly focus on the controller design and stability analysis problem for several classes of switched systems. Taking the effects, which are caused by frequently encountered factors such as time delay, nonlinearity, unmodeled dynamics, on stability performance into consideration, we propose corresponding cooperative switching and controller design scheme for the considered switched systems. The main contributions of this dissertation are summarized as follows:

Firstly, stabilization control is investigated for continuous-time linear switched systems under asynchronous switching. Switching control methods are proposed based on time-constrained switching signals. The effects to the system stability are analyzed with unmatched controllers under asynchronous switching, and running time criterion is proposed for unstable subsystems and stable subsystems. Based on linear matrix inequality (LMI) toolbox, the feedback control matrix can be obtained. In addition, stabilization control is investigated in the presence of neutral time delay. Based on Lyapunov-Krasovskii functional approach, integral inequalities are utilized in both single and double form to analyze the stability with time-delay. In the controller design procedure, free weighting matrices are introduced, which reduces the complexity of stability analysis significantly. The designed scheme can guarantee the stability of the closed-loop system in the presence of unstable subsystems.

Then, it considers the stabilizing problem for discrete-time 2-D switched system. Unstable subsystems are allowed in the switched system, and the stability condition is derived by restricting the switching numbers and the running time ratio between stable and unstable subsystems. The stabilizing controller gains can be obtained by solving the proposed stabilization results in LMI form. The proposed results can also be extended to the stabilization problem for the 2-D switched systems under asynchronous switching.

Finally, the prescribed performance tracking control problem is investigated for nonlinear switched systems in the presence of unmodeled dynamics. The problems caused by unknown nonlinear functions are addressed by adaptive fuzzy logic systems and radial basis function neural networks, respectively. Both average dwell time and a more general stabilizing switching signal are concerned to stabilize the switching systems with adaptive controllers. The proposed scheme relaxes the assumptions that the unmodeled dynamics should be input-to-state stable. Dynamic surface control scheme is incorporated in the controller design procedure, which reduces the complexity of computation significantly. With the aid of prescribed performance control, the tracking performances are guaranteed to satisfied prescribed transient and steady-state requirement, and the fluctuation caused by switching can be constrained as well.

Keywords: switched systems; time-constrained switching; stability analysis; synchronous switching; asynchronous switching; unstable subsystems

目 录

摘 要	I
Abstract	III
目 录	V
符 号	VII
第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究意义	1
1.2 研究现状分析	3
1.2.1 切换系统 基础研究问题	3
1.2.2 切换系统控制研究现状分析	4
1.2.3 现有工作不足	8
1.3 本文的主要工作	9
1.3.1 研究框架	9
1.3.2 具体研究内容	10
第 2 章 基于切换调节的 线性异步切换系统 镇定控制	12
2.1 引言	12
2.2 系统描述及预备知识	13
2.2.1 系统模型描述	13
2.2.2 预备知识	14
2.3 主要结果	16
2.4 仿真算例	20
2.5 本章小结	22
第 3 章 基于切换调节的 2-D 离散 切换 系统镇定控制	23
3.1 引言	23
3.2 系统描述与预备知识	24
3.3 主要结果	26
3.3.1 同步切换下 2-D 系统镇定	26
3.3.2 异步切换下 2-D 系统镇定	29
3.4 仿真算例	33
3.5 本章小结	37
第 4 章 基于切换调节的时滞 异步切换 中立系统镇定控制	38
4.1 引言	38
4.2 系统描述与预备知识	39

4.3 主要结果	41
4.4 仿真算例	51
4.5 本章小结	53
第 5 章 基于 ADT 的同步切换非线性系统跟踪控制	55
5.1 引言	55
5.2 问题描述及预备知识	56
5.2.1 系统模型描述	56
5.2.2 模糊逻辑系统简介	58
5.2.3 切换信号与预定性能控制	59
5.3 切换 K 滤波器状态估计	61
5.4 自适应输出反馈预定性能控制设计	62
5.5 仿真算例	72
5.6 本章小结	76
第 6 章 基于切换调节的异步切换非线性关联系统预定性能控制	77
6.1 引言	77
6.2 系统描述与预备知识	78
6.2.1 系统描述	78
6.2.2 非线性系统假设条件	79
6.2.3 神经网络估计	80
6.2.4 切换信号描述	80
6.3 主要结果	81
6.3.1 预定性能控制简述	81
6.3.2 分散自适应控制设计	82
6.4 仿真算例	91
6.5 本章小结	96
结 论	97
参考文献	99
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果	109
致 谢	111

符 号

R	实数集.
R_+	非负实数集, 即 $R_+ = [0, +\infty)$.
R^n	n 维欧几里得空间.
$R^{m \times n}$	$m \times n$ 实矩阵集合
Z	整数集
Z_+	非负整数集
N	自然数集
X^T	矩阵 X 的转置.
X^{-1}	矩阵 X 的逆
$X > 0 (X \geq 0)$	矩阵 X 为(半)正定矩阵
$X < 0 (X \leq 0)$	矩阵 X 为(半)负定矩阵
I	具有适当维数的单位矩阵
$\lambda_{\max}(X)$	矩阵 X 的最大特征值
$\lambda_{\min}(X)$	矩阵 X 的最小特征值
$\text{diag}\{T_1, \dots, T_n\}$	对角元素为 $T_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 的对角矩阵
$\text{trace}\{X\}$	表示方阵 X 的迹, 简写为 “ $\text{tr}\{X\}$ ”.
$\ v\ $	表示向量 v 的欧几里得范数.
C^i	具有连续 i 阶偏导数的函数集
\sup	一个集合的最小上界
\inf	一个集合的最大下界

第1章 绪论

1.1 课题背景及研究意义

经典控制理论按照输入信号和输出信号的时间特性将自动控制系统划分为连续时间控制系统和离散时间控制系统^[1]。通过分析微分方程或差分方程系统模型特性，针对这两大类控制系统的研究进展与经典控制理论研究同步而行。然而，随着科技进步，现代工程控制系统日益复杂，很多实际复杂系统的动态行为同时包含连续时间系统动力学行为和离散时间系统动力学行为，例如电压电流根据基尔霍夫定律连续变化的电子电路受到切换开关影响发生离散化行为，构成切换电子电路系统^{[2][3]}。研究学者将这类同时具备连续和离散动态特性的动力系统称为混杂动力系统。除了上述提到的切换电子电路系统外，混杂动力系统广泛分布于现实中各类工程应用系统中，如存在碰撞行为的机械物理运动系统^[4]，多齿轮转换的齿轮传动系统，网络传输控制系统^[5]，混合动力汽车^[6]等。

考虑到连续动态和离散动态的特性，易知离散状态只能通过离散的“跳跃”产生状态变化，而连续状态一般根据连续状态微分方程的“流”变化值的大小。因而，混杂动力系统同时涉及到两类动态特性：离散“跳跃”以及连续“流”。离散动态会影响连续方程的解，反之亦然。此外，系统中的其他因素，如，状态传输时延，外部扰动等等，都将对混杂动态产生不同于单纯离散时间系统或连续时间系统的影响，因此针对混杂系统的分析与设计通常比单纯的离散动态或单纯的连续动态更加困难。由于混杂动态系统的广泛应用及分析综合方面存在较多挑战，近几十年来针对混杂系统的研究越来越受到人们的关注^{[7]-[12]}。

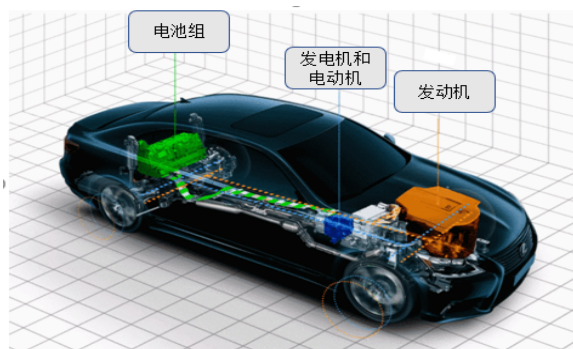


图 1-1 混杂系统在实际中应用（混合动力汽车）

Fig. 1-1 The application example of Hybrid systems (Hybrid Electric Vehicle)

特别地，在众多混杂动态系统中，有一类特殊的系统更加受到国内外研究学者的关注：切换系统^{[7],[13]-[18]}。切换系统由有限连续或离散的子系统以及按照某一规则选择特定子系统处于激活工作状态的切换信号或切换律组成。在任意的时间区间内，有且仅有一个子系统处于激活工作状态。数学上，这些子系统通常描述成为微分或差分方程形式。对比常规混杂系统，在切换系统中，离散的“跳跃”靠切换信号（切换律）实现。由于切换信号的作用是激活某一特定的子系统，因而一般情况下，切换信号是分段连续的常数映射，将时间区间映射到子系统个数构成的有限正整数集合中。目前，针对切换系统的分类，通常所依据的是其子系统的类别特性，如连续切换系统或离散切换系统，线性切换系统或非线性切换系统等。

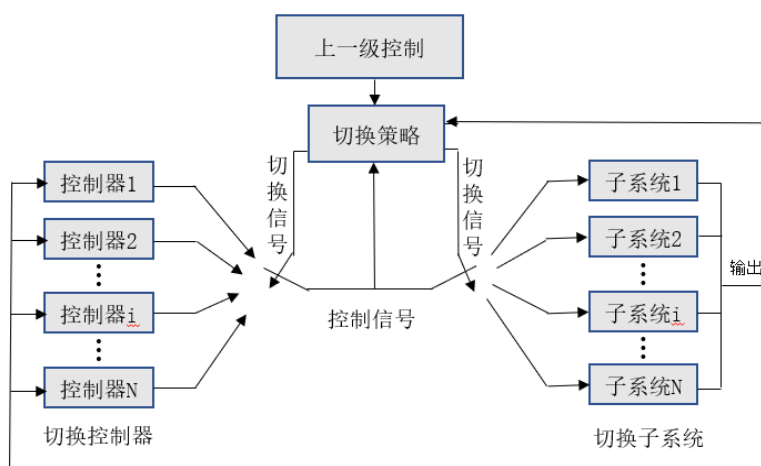


图 1-2 切换系统结构框图

Fig. 1-2 Diagram of switched systems

作为一类重要的混杂动态系统，切换系统控制在理论和实际系统中的应用极其广泛，例如手动驾驶汽车换挡调速系统^[6]，网络拓扑切换下多智能体系统^[19]，机器人控制系统^[20]等。

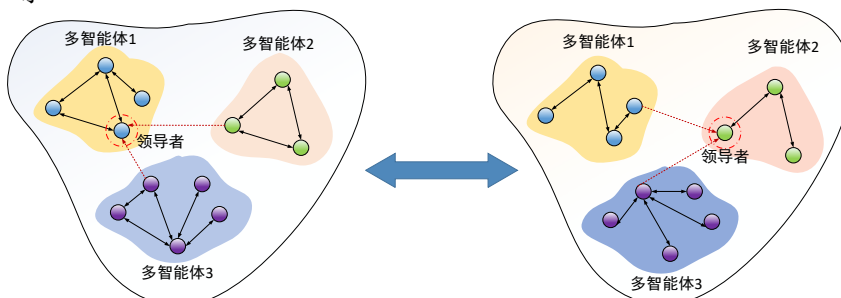


图 1-3 切换系统多智能体中的应用（网络拓扑切换）

Fig. 1-3 The application of switched systems in multi-agent (topology switching)

另外，控制领域一些经典的控制方法，同样涉及到切换思想。例如上个世纪 50 年代，最优控制等问题在化工、航空航天等领域被提出，并由此发展出了工程领域中最常见的一种控制形式：Bang-Bang 控制^[21]。而 Bang-Bang 控制的基本原理便是通过控制变量在正最大值与负最大值之间切换，实现最优控制。之所以切换系统在控制工程领域具有广泛的应用背景，吸引了越来越多的学者注意，总结其原因，主要可归纳为以下几点：

1、受控对象动力学模型存在模态切换特性。例如汽车调速控制系统^[6]，无人机飞行器控制系统等。

2、传统单一控制器难以满足系统性能指标，通过切换控制方法，设计多控制器切换改善系统性能。

3、控制领域中的其他方法涉及到切换控制的思想。例如 Bang-Bang 控制^[21]，变结构控制等。

综上所述，由于切换系统具有广泛的应用背景，且切换信号的存在使得系统的动态行为复杂多变，近年来切换系统一直是控制领域研究的热点之一。针对切换系统中涉及到的一系列问题展开研究，具有重要的理论与应用意义。

1.2 研究现状分析

1.2.1 切换系统基本研究问题

一个连续时间切换系统可以描述为如下模型：

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)) \quad (1-1)$$

其中， $x(t) \in R^n$ ， $u(t) \in R^m$ 分别为系统的状态和控制输入， $\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{P} = \{1, \dots, p\}$ 是分段右连续切换信号函数， $\mathcal{P} = \{1, \dots, p\}$ 代表一个自然数集合， p 表示切换子系统的个数。对于任意 $\sigma(t) = i \in \mathcal{P}$ ， $f_i(x(t), u(t)): R^n \rightarrow R^n$ 为光滑向量函数，其中， $i = \sigma(t)$ 表示在 t 时刻运行的子系统，或称在 t 时刻激活的模态，即若 $\sigma(t) = i$ ，则表示系统状态轨迹将沿着模态 $\dot{x}(t) = f_i(x(t), u(t))$ ， $i \in \mathcal{P}$ 的动态方程运动。与之类似，对于非线性离散切换系统，可用如下差分方程表示：

$$x(k+1) = f_{\sigma(k)}(x(k), u(k)), \quad k \in Z_+ \quad (1-2)$$

尽管上式中切换信号函数的自变量是时间 t ，然而在时刻 t 激活的模态可能不仅与当下时刻 t 相关，同样还可能与此刻状态值 $x(t)$ 或者上一个运行模态有关。在各类

理论分析与工程应用系统中，一般来讲，切换规则通常分为基于时间切换，基于状态切换或基于记忆切换(基于曾经激活的模态)三类。本文主要考虑基于时间切换的切换信号。

系统稳定性是系统控制与设计的基本问题。如何保证各系统存在切换条件下整个切换系统的稳定性仍是当前针对切换系统研究的重点。然而，切换信号的存在，使得切换系统稳定性分析与设计更加复杂。这体现在如下两方面：

第一，即使所有子系统都是稳定的，按照某些切换信号进行切换，最终切换系统状态仍可能是发散的^[128]；

第二，切换系统的子系统不稳定，但是通过设计适当的切换信号，最终该切换系统的状态稳定收敛^[56]。

由上述分析可知，对于切换系统而言，系统的运动轨迹和稳定性不仅与各子系统状态方程有关，同样会受到切换信号所产生的时间序列的影响。

考虑到切换系统稳定性在不同切换信号下具有不同特性，国内外研究学者针对这一问题相继展开研究。1999 年，D. Liberzon 与 A.Morse 教授基于 Lyapunov 稳定性理论，将切换系统的稳定性分析与设计问题总结概括为以下三类^[22]：1) 任意切换下信号下切换系统稳定性；2) 受限切换信号下切换系统稳定性；3) 稳定切换信号设计。更一般地，上述第二、三类问题又可统一为约束切换信号下系统稳定性分析与设计问题。

1.2.2 切换系统控制研究现状分析

下面我们分别从任意切换和约束切换两方面介绍切换系统的研究现状。

1、任意切换下系统稳定性研究现状分析

针对切换系统的稳定性问题研究，早期聚焦于考虑对于切换信号没有任何限制的情况下，即任意切换，系统是否稳定^{[23][24]}。为了保证在任意切换的条件下系统的稳定性，一个必要条件便是所有的子系统是渐近稳定的。然而，应当强调的是上述条件仅为必要条件，为了保证整个切换系统在任意切换信号下的稳定性，仍需满足一些其他附加条件，例如，针对连续时间线性切换系统

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (1-3)$$

在各子系统均渐近稳定的条件下，如果各子系统的系统矩阵 $A_i, i \in \mathcal{P}$ 仍满足其他某些

附加条件, 如 $A_i A_j = A_j A_i, \forall i, j \in \mathcal{P}$ [25]; $A_i = A_i^T, \forall i \in \mathcal{P}$ [26]; $A_i A_i^T = A_i^T A_i, \forall i \in \mathcal{P}$ [27]等, 则可得出该线性系统在任意切换信号下系统渐近稳定的结论。

相较上述成果, 目前关于切换系统在任意切换信号下稳定性分析方法, 则是聚焦于寻找对所有子系统都适用的 Lyapunov 函数, 即共同 Lyapunov 函数(Common Lyapunov Function, CLF)法。共同 Lyapunov 函数定义可概括如下:

定义 1.1[29]: 对于一阶连续可微函数 $V: R^n \rightarrow R$, 如果存在一个正定连续函数 $W: R^n \rightarrow R$, 使得

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f_i(x) \leq -W(x), i \in \mathcal{P}$$

则称函数 $V(x)$ 是切换系统(1-1)的共同 Lyapunov 函数。

文献[28],[29]指出, 存在 CLF 是保证切换系统在任意切换下稳定性的充分条件。此后, 大量学者将切换系统在任意切换下的稳定性问题转向分析 CLF 的存在条件问题, 或致力于构造适当的控制器使得闭环系统满足存在 CLF 的条件。其中, 针对线性切换系统, 文献[30]考虑了针对该类系统 CLF 存在的条件并给出了相应构造方法。针对包含两个模态的线性时不变切换系统, 基于两个子系统状态矩阵所组成的矩阵束(Matrix pencil)稳定性, 文献[31],[32]提出了共同二次型 Lyapunov 函数存在的充要条件, 然而所提方法难以拓展到高维系统。针对由两个子系统构成的三阶线性时不变切换系统, 文献[33]提出了该切换系统 CLF 函数存在的充要条件, 并且证明了该条件可推广到两个子系统构成的任意阶线性时不变切换系统。

然而, 尽管针对 CLF 的存在性条件已有一定的成果, 应当指出的是, 对于多数切换系统, 通常情况很难找到对所有子系统均适用的共同 Lyapunov 函数, 尤其是随着切换子系统个数增加, 该条件愈发严苛甚至不存在。另一方面, 一些切换系统虽然无法在任意切换条件下维持系统稳定, 却可以在某些特定的切换规则下保证系统稳定性能。因而, 针对切换系统稳定性的研究, 人们更多地开始关注在某些给定的切换信号下系统的稳定性问题, 或者如何构造适当的切换信号保证切换系统的稳定性等问题。

2、约束切换下系统稳定性研究现状分析

在实际切换系统中, 切换信号往往具有一定的约束条件, 因而切换系统在约束切换信号下的稳定性分析更具研究意义。通常来讲, 切换信号的约束性主要可以归结为以下两方面的原因:

首先，实际应用中，切换系统受物理条件等限制，难以实现任意切换，例如，汽车挡位切换调速过程中，难以实现从最低挡位到最高挡位的直接切换，否则极易发生发动机熄火等问题。

其次，很多过程控制系统需要按照特定规则进行切换控制以实现相应的控制目标，例如，Bang-Bang 最优控制过程中，将状态空间分为两个区域，两个区域的分界面为控制量取正最大或负最大的开关面。因而只有在系统状态处于两个区域的开关面的情况下才应当触发对控制变量的切换，实现最优控制。

相应地，系统切换信号的约束条件主要可以分为两类：一类是时间上的约束条件，例如各子系统的运行时间需要满足一定的驻留时间或平均驻留时间等；另一方面是状态空间上的约束条件，例如系统状态轨迹需要位于某些状态空间的分区内等。针对切换系统在约束切换信号下的稳定性分析与控制器设计研究，目前的方法主要集中在驻留时间(Dwell time)分析方法和多 Lyapunov 函数 (Multiple Lyapunov Functions MLFs) 方法。

1、基于驻留时间分析方法的切换系统研究现状

对于子系统全都稳定的切换系统，在任意切换下闭环系统状态可能发散变得不稳定^{[34][35]}。因此在切换的过程中可能会产生一定的由于切换而产生的能量被系统吸收，如果切换的过于频繁，则有可能造成系统吸收能量过多从而无法维持稳定。另外，若系统中含有不稳定的子系统，则在系统切换过于频繁或该不稳定子系统驻留时间过长，整个系统也会变得不稳定。受此启发，研究者自然地联想到，如果限制切换的频率，或者限制切换信号尽可能选择稳定的子系统并在这一模态驻留足够长的时间，则可以补偿由于子系统切换或不稳定子系统驻留时间过长造成的系统状态发散。

基于这一思想，Morse 教授提出了驻留时间方法^[36]，指出在系统的所有子系统都稳定的条件下，如果切换信号的驻留时间足够长，则可保证系统的稳定性。Hespanha 教授等人^{[37][38]}进一步放松了驻留时间的保守性，提出了切换系统平均驻留时间切换约束条件，指出各子系统的驻留时间可以偶尔非常小，只要整个区间内各子系统的平均驻留时间不小于一定的常数，系统仍可以保持稳定。

围绕上述思想，针对切换系统在时间约束切换信号下的研究取得了可观的进展，国内外学者结合鲁棒控制、自适应控制、输出反馈控制等控制方法，综合考虑时延、干扰、系统不确定性等情况，提出了一系列研究成果^{[39]-[46]}。例如，文献[41][42]中，

作者研究了不确定非线性切换系统自适应控制问题。通过自适应神经网络或自适应模糊估计方法处理了系统未知非线性函数问题。基于经典 **backstepping** 控制器迭代设计方法，提出了非线性切换系统自适应跟踪控制策略，在系统切换信号满足一定的平均驻留时间条件下，所提方法保证了系统的跟踪误差的半全局有界稳定。文献[45]将所有子系统需满足的平均驻留时间条件细化至每个子系统单独需要满足的平均驻留时间，提出了基于模态的平均驻留时间方法，在一定程度上得到了保守性更小的结果。文献[47][48]研究了线性切换系统异步切换下系统镇定问题，即切换过程中切换信号与控制信号之间存在异步时延，针对有界的异步时延造成的 Lyapunov 函数有界发散情况，基于线性矩阵不等式方法给出了反馈增益求解方法，并提出了异步切换下的平均驻留时间条件。事实上，异步切换系统镇定思想与切换系统中存在不稳定的子系统极其相似。系统中存在不稳定的子系统时，仅仅限制切换信号的驻留时间或平均驻留时间还不足以保证整个系统的稳定性，还需要限制不稳定的子系统的运行时间占整个系统运行时间比例上界。关于存在不稳定子系统情况下切换系统的研究问题，可参考[49]-[56]及相关研究等文献。

以上成果均是针对连续时间切换系统，应当指出的是，若将（平均）驻留时间条件变换成离散系统采样周期的个数，上述成果同样可推广到离散切换系统^[57]。

2、基于多 Lyapunov 函数方法的切换系统研究现状

对于约束切换信号下的切换系统，可能不存在传统的 Lyapunov 函数。因此人们开始考虑一些非传统的 Lyapunov 函数，其中，最受到人们关注的是多 Lyapunov 函数方法。

多 Lyapunov 函数方法的基本思想是，对应于每一个子系统或状态空间的特定区域，构造多个 Lyapunov 函数或类 Lyapunov 函数，从而构成一个非传统的 Lyapunov 函数。这里的“非传统”特性指的是构造的多 Lyapunov 函数可能不会沿着系统状态轨迹单调递减，可能不连续或者分段可微。

关于多 Lyapunov 函数方法研究存在众多成果。例如，文献[58]指出，如果每个子系统在某区间激活时，与之对应的 Lyapunov 函数在该区间内单调递减，同时在切换时刻非增，则切换系统是稳定的。文献[59]进一步放松了子系统激活区间内 Lyapunov 函数单调递减的限制条件，指出在一定的切换信号下，如果该系统的每个子系统结束运行的时刻对应的 Lyapunov 函数的值小于上一次该子系统结束运行时刻对应的值，则整个切换系统是稳定的。同样，若每个子系统在激活的时刻，相应的

Lyapunov 函数的值小于上次该子系统激活时刻的值, 结论依然成立。上述多 Lyapunov 函数方法研究成果如图 1-4(a)和图 1-4(b)所示。

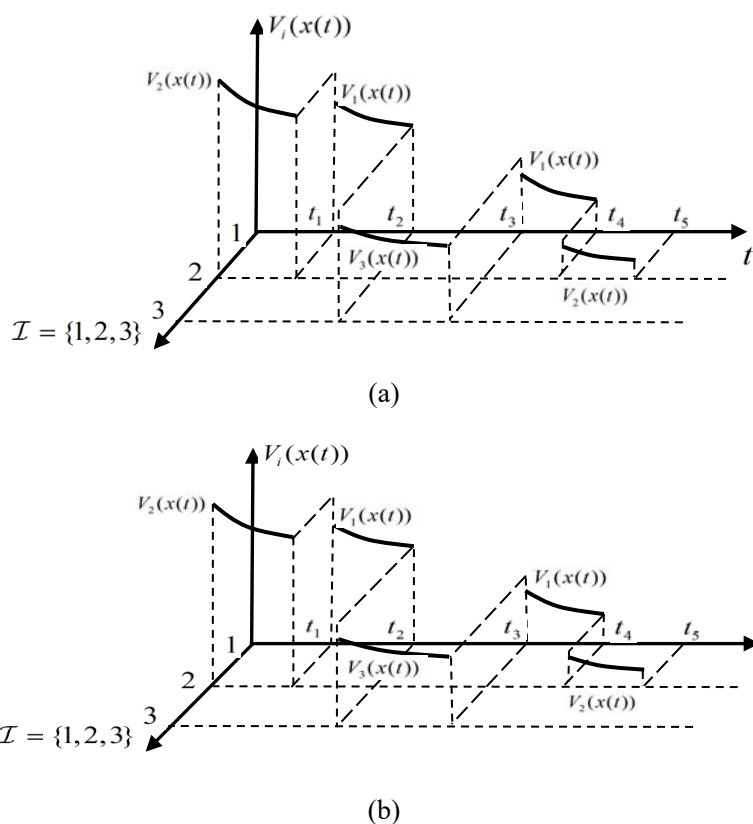


图 1-4 多 Lyapunov 函数示意图

Fig. 1-4 Curves for Multiple Lyapunov functions

1.2.3 现有工作不足

尽管针对切换系统稳定性分析问题研究已存在一系列研究成果, 然而考虑到切换系统在当今日益复杂的工业过程控制系统中的广泛应用, 现有成果无论从理论研究层面还是实际应用层面都并非完善, 围绕这一研究方向, 还有较多亟待研究的开放性问题。

首先, 现有结果大多聚焦于线性切换系统, 然而切换系统的应用环境复杂, 线性切换系统难以刻画实际系统涉及到的干扰、系统不确定性、未建模动态等因素。

其次, 现有基于时间约束条件的切换系统稳定性分析多基于平均驻留时间方法。然而, 依据平均驻留时间定义, 系统切换频率为固定常数。然而现实中往往需要更灵活的切换规则。

最后, 现有文献大多旨在保证系统的稳定性, 对系统的暂稳态性能约束较少考

虑。而随着实际系统对系统暂稳态性能的要求不断提高，这一问题的研究意义日益明显，然而相关方面研究成果却较为稀缺。

1.3 本文的主要工作

1.3.1 研究框架

考虑到现有研究成果中仍存在的不足，本文进一步针对切换系统展开研究。基于时间约束的切换信号切换条件，分别对线性切换系统 and 非线性切换系统的稳定性分析与控制器设计等问题展开研究。具体研究框架如图 1-5 所示。

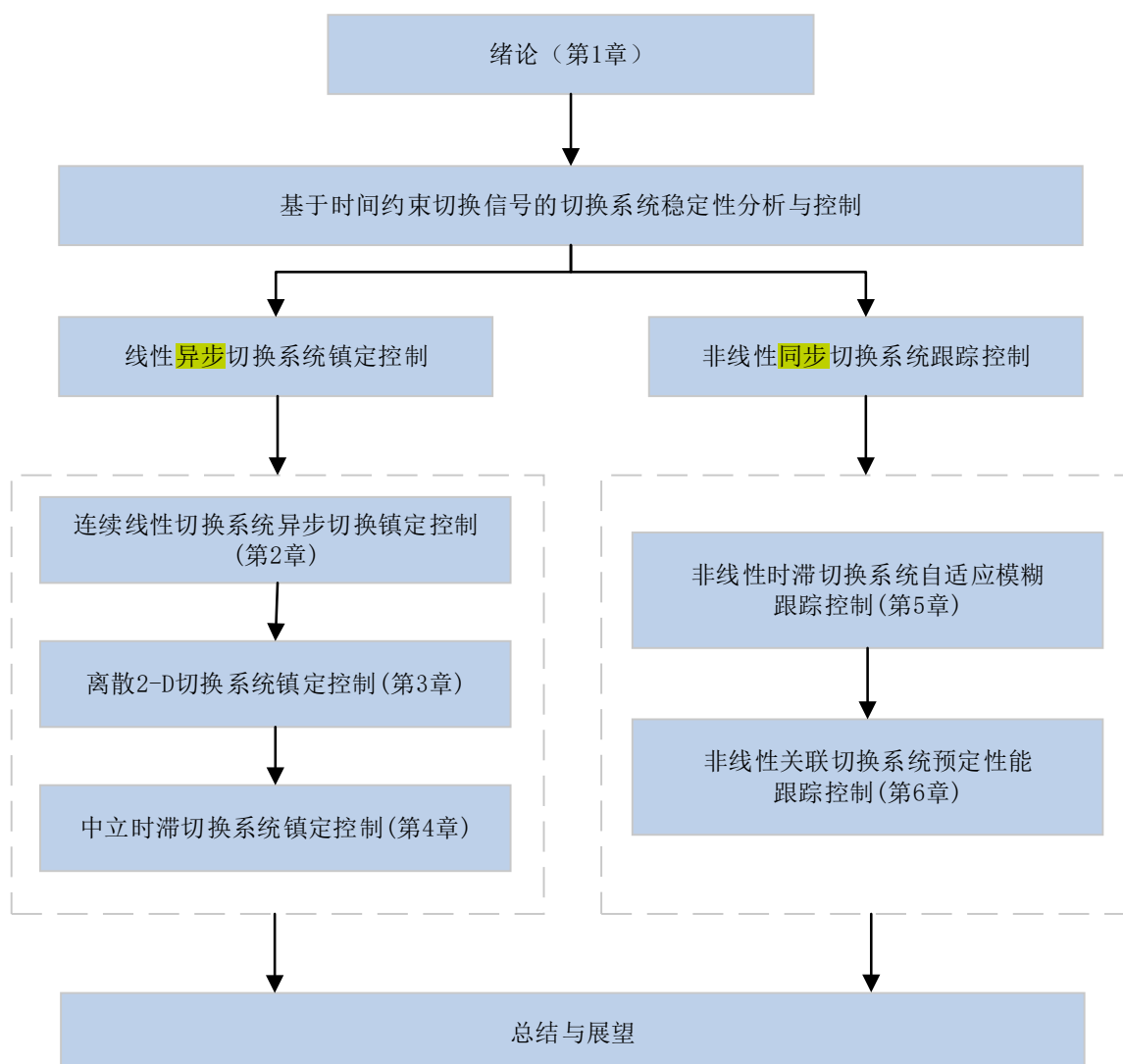


图 1-5 论文研究框架

Fig. 1-5 The architecture of this dissertation

本文共包括 6 章内容。首先,第 1 章阐述了切换系统的研究背景及意义,并针对切换系统的研究现状进行了简要的回顾与总结分析。然后,第 2、3、4 章分别针对线性切换系统在异步切换条件下系统镇定控制问题展开研究。其中,第 2 章考虑了含有不稳定模态的连续时间线性切换系统在异步切换下的系统镇定问题;第 3 章研究了离散 2-D 切换系统同步及异步切换下的系统镇定问题;第 4 章研究了含有中立时延的线性异步切换系统镇定控制问题。进一步,第 5、6 章分别针对非线性切换系统跟踪控制问题展开研究,并考虑了系统暂稳态性能约束。其中,第 5 章针对非线性切换时滞系统展开研究,基于平均驻留时间方法,给出了预定性能跟踪控制器设计方法;第 6 章研究了非线性关联切换系统跟踪控制问题,并考虑部分切换子系统未建模动态不满足输入到状态稳定假设条件,基于一类新颖的切换信号,提出了非线性关联切换系统预定性能跟踪控制策略。

1.3.2 具体研究内容

本文主要研究基于时间约束切换的切换系统的稳定性分析问题,并考虑实际系统常见的时延、非线性、未建模动态干扰等因素对切换系统稳定性的影响,提出了切换信号与控制器协同设计方法,保证系统的暂稳态性能。论文各章节内容概述如下:

第 2 章研究了切换系统异步切换下系统镇定问题。提出了保证系统全局渐近稳定的充分条件,所提方法同时允许 Lyapunov 函数在异步切换过程和正常工作模态的有限时间区间内增长,建立了系统发散运行时间与收敛运行时间切换标准,并给出了求解控制器增益的可解性条件。同时,所设计切换信号允许切换频率随运行时间区间递增,放松了传统平均驻留时间方法切换频率不变的保守性。

第 3 章研究了一类 2-D 离散切换系统镇定问题。针对 Roesser 模型下的离散 2-D 系统,设计切换调节信号限定切换次数以及不稳定模态与稳定模态运行时间比率,基于所提切换调节信号,给出了系统同步切换下稳定性条件,并给出了基于求解线性矩阵不等式的镇定控制器增益设计方法。同时,将所提结果进一步推广到异步切换下 2-D 系统镇定问题,给出了相应推论结果。

第 4 章考虑了时滞对系统稳定性的影响,针对一类中立切换时滞系统,研究了系统异步切换下的镇定问题。基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析方法分析了时延对系统稳定性的影响,结合求解线性矩阵不等式,完成了时延及异步切换条件下镇

定控制器设计。通过控制器与切换信号协同设计，保证了切换系统存在不稳定切换子系统情况下系统的全局渐近稳定性。

第 5 章针对一类带有时延和未建模动态的不确定非线性切换系统，考虑自适应模糊输出反馈跟踪控制。针对系统未知非线性函数，采用模糊逻辑系统进行估计；通过设计切换 K 滤波器重构系统不可测状态，基于平均驻留时间稳定性分析方法，提出了预定性能跟踪控制方案。在切换信号满足一定的平均驻留时间情况下，该控制方法可保证系统的跟踪误差满足预定暂稳态性能指标。同时结合动态面控制方法，避免了控制器迭代设计过程中常见的计算爆炸问题。

第 6 章进一步研究了一类带有未建模动态的关联切换系统自适应跟踪控制问题。通过切换信号与控制器协同设计方法，在控制器设计方面，给出了可控关联切换子系统自适应跟踪控制方法，在切换信号设计方面，给出了未建模动态不满足输入到状态稳定的子系统运行时间切换条件。从而保证闭环系统有界稳定，且系统跟踪误差满足预定暂稳态性能指标。放松了传统控制方法中系统未建模动态必须满足的输入到状态稳定的假设条件。

最后，对本文的工作进行了总结，并结合本文方法中的存在的不足和问题，概述了切换系统领域仍存在的研究问题，给出了今后的研究工作方向展望。

第 2 章 基于切换调节的线性异步切换系统镇定控制

2.1 引言

切换系统是一类由若干连续或离散的子系统以及一个切换信号组成的混杂系统。切换信号根据一定的规则控制各子系统之间如何进行切换。近几十年来,随着科技的进步发展,一方面,各类控制系统日益复杂,许多实际的物理系统自身具有不同的工作模态,且各模态根据实际需求进行相应的切换;另一方面,系统性能指标要求不断提高,单一的控制策略难以满足日益严苛的系统性能指标。因此,目前各类控制系统广泛存在系统模态切换或多控制器切换现象,构成了典型的切换系统。针对切换系统的研究受到了人们的广泛关注,见[60]及相关参考文献。

系统稳定性是系统控制与设计的基本问题。而切换系统多个子系统在互相切换过程中,切换时刻以及切换后的系统初值使得切换系统的稳定性分析与系统镇定变得异常复杂和困难。因此,如何设计控制策略并确定切换条件保证系统的稳定性能仍是当前切换系统研究领域的重点和难点。众多研究学者针对切换系统稳定性分析与设计展开研究,给出了相关研究成果。例如 Long 等人在文献[41]、[42]中研究了不确定非线性切换系统自适应控制问题。通过自适应神经网络或自适应模糊估计方法处理了系统未知非线性函数问题。基于经典 backstepping 控制器迭代设计方法,提出了非线性切换系统自适应跟踪控制策略,在系统切换信号满足一定的平均驻留时间条件下,所提方法保证了系统的跟踪误差的半全局有界稳定。应当指出的是,尽管针对切换系统稳定性分析与设计的研究已取得了一系列研究成果,但仍存在较多亟待解决的问题。

首先,现有文献针对切换系统的研究往往假设系统模态与控制器同步切换。然而,在实际的切换系统中,例如 PWM 升压电路^[57],网络化控制系统^[61],当不同的子系统之间发生切换后,由于被控对象与控制器信号传输过程中存在时延,通常需要一定的时间确定切换到哪个子系统进而完成相应控制器的切换,即切换过程中系统模态和控制器存在异步切换现象。异步切换造成系统模态与控制非匹配现象,因而在这段时间内,所设计的控制器难以镇定子系统,造成系统性能下降甚至不稳定。部分研究者已针对这一问题陆续展开研究^{[47][48][57][61]}。然而,目前研究中普遍要求子

系统所有子系统可镇定，当系统中存在不稳定且不可控的子系统时，则难以应用上述文献所提方法。

其次，现有文献的切换信号分析方法普遍基于平均驻留时间切换信号方法。自平均驻留时间方法提出以来^[37]，在分析切换系统“慢切换”下的稳定性中得到了广泛应用。部分研究学者在此基础上进行了一定的改进，例如文献[45]将所有子系统需满足的平均驻留时间条件细化至每个子系统单独需要满足的平均驻留时间，提出了基于模态的平均驻留时间方法，在一定程度上得到了保守性更小的结果。然而无论是平均驻留时间还是基于模态的平均驻留时间方法，在任意时间区间内，系统的切换次数要求为该区间的仿射函数形式，因而只能得到时不变的切换频率。如何得到例如时变切换频率等更灵活的切换信号条件引起了一些学者的关注^{*}。

基于上述研究背景，本章考虑切换系统异步切换下系统镇定问题。提出了保证系统全局渐近稳定的充分条件，所提方法同时允许 Lyapunov 函数在异步切换过程和正常工作模态有限时间区间增长，建立了系统发散运行时间与收敛运行时间切换标准，并给出了求解控制器增益的可解性条件。与现有文献相比，本章所提方法放松了在正常工作阶段所有子系统必须稳定的条件，给出了更为宽松的镇定控制器可解条件；提出了不同于传统平均驻留时间方法切换信号条件，放松了切换次数为运行区间的仿射函数限制。

2.2 系统描述及预备知识

2.2.1 系统模型描述

考虑如下线性切换系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \quad (2-1)$$

其中 $x(t) \in R^r$ 为系统状态向量， $u(t) \in R^q$ 为系统控制输入。针对有限的自然数集合 $\mathcal{P} := \{1, 2, \dots, p\}$ ，其中 p 为切换子系统的个数，分段右连续函数 $\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{P}$ 为切换信号。

在切换信号作用下，系统(2-1)的切换序列可表示为

$$\aleph_p := \{(\xi_0, t_0), \dots, (\xi_i, t_i), \dots \mid \xi_i \in \mathcal{P}, i = 0, 1, \dots\} \quad (2-2)$$

其中 t_i 为第 i 次的切换时刻。由切换序列 \aleph_p 可知，当时间位于区间 $[t_i, t_{i+1})$ 时，第 ξ_i 个子系统处于运行状态。对 $\forall \xi_i \in \mathcal{P}$ ， A_{ξ_i}, B_{ξ_i} 为具有适当维数的常数矩阵。本章中不考

考虑 Zeno 行为以及脉冲情况，即在任意有限的时间区间内，切换次数有限，且子系统切换过程中，系统状态不发生跳变。

本章设计系统控制输入信号为

$$u(t) = K_{\sigma_c(t)} x(t) \quad (2-3)$$

其中 K_i , $i = \sigma_c(t) \in \mathcal{P}$ 为待设计的控制器增益。 $\sigma_c(t) = \sigma(t - \tau(t))$ 为控制器的切换信号， $\tau(t)$ 为切换时延。本章中，假设 $0 \leq \tau(t) \leq \tau_d$ ，其中 τ_d 为已知的非负常数，并且对 $\forall i \in N$, 存在 $\tau_d \leq t_{i+1} - t_i$ 。根据 $\sigma_c(t)$ 的定义，控制器的切换切换序列可表述为以下形式

$$\aleph_c := \{(\xi_0, T_0), \dots, (\xi_i, T_i), \dots \mid \xi_i \in \mathcal{P}, i = 0, 1, \dots\} \quad (2-4)$$

其中 $T_i = t_i + \tau(t_i)$, $\forall i \in N$ 表示子系统与控制器相匹配的初始时刻。由 \aleph_p 及 \aleph_c 定义，对 $\forall i \in N$ ，本章将区间 $[t_i, t_{i+1})$ 分为两部分，第一部分为子系统与控制器不匹配的异步切换阶段 $\mathcal{M}_1 := [t_i, t_i + \tau(t_i))$ ，又称模态识别阶段，在这一阶段 $\sigma(t) \neq \sigma_c(t)$ ；第二部分为子系统与控制器匹配后的正常运行阶段 $\mathcal{M}_2 := [t_i + \tau(t_i), t_{i+1})$ ，即在这一阶段 $\sigma(t) = \sigma_c(t)$ 。

将控制输入(2-3)代入系统模型(2-1)，可得闭环系统动态方程

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t-\tau(t))}) x(t) \quad (2-5)$$

易知，闭环系统在 \mathcal{M}_1 阶段，虽然当前子系统已切换为工作运行状态，然而控制器却是上一个运行子系统所对应的控制器，由此构成典型的异步切换现象。由于子系统与控制器存在异步错位，在这一阶段，闭环系统性能往往变得恶化，甚至不再稳定。

2.2.2 预备知识

为完成后续切换调节与控制器设计，首先介绍以下定义与引理等预备知识。

定义 2.1^[62]: 考虑系统(2-1)。对于给定的切换信号 $\sigma(t)$ ，如果对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^r$ ，存在 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ，则称系统(2-1)全局渐进稳定。

定义 2.2^[63]: 给定函数 $\Psi(r, s): [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ ，如果 $\Psi(r, s)$ 为连续函数，且对任意固定变量 r ， $\Psi(r, s)$ 是关于变量 s 的 \mathcal{K}_∞ 函数，则称函数 $\Psi(r, s)$ 为 \mathcal{FK}_∞ 函数。

注释 2.1: 不同于传统基于平均驻留时间切换分析方法，本章基于一种新颖的切换信号来分析系统的稳定性。由于分析过程中涉及到不同的时间区间，因此定义含有两个自变量的 \mathcal{FK}_∞ 函数。下面分析过程中可以发现，该函数的第一个自变量对应

于区间的初始时刻，第二个自变量对应于区间长度。

给出本章的主要结果之前，通过以下引理回顾现有文献在切换系统异步切换情况下，基于平均驻留时间方法的研究成果。

引理 2.1^[48]: 针对非线性切换系统 $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 和 $\mu > 1$ 为给定常数。如果存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\kappa_1(\cdot)$, $\kappa_2(\cdot)$ 以及 $V_{\sigma(t)} \in C^1: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\kappa_1(\|\zeta\|) \leq V_{\sigma(t)}(\zeta(t)) \leq \kappa_2(\|\zeta\|) \quad (2-6)$$

$$\dot{V}_{\sigma(t)}(\zeta(t)) \leq \begin{cases} -\alpha V_{\sigma(t)}(\zeta(t)) & t \in [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}) \\ \beta V_{\sigma(t)}(\zeta(t)) & t \in [t_i, t_i + \tau(t_i)) \end{cases} \quad (2-7)$$

其中 t_i 和 t_{i+1} , $i \in N$, 表示 ξ_i 子系统开始运行和结束运行(或 ξ_{i+1} 子系统开始运行)的时刻, $\tau(t_i)$ 为相应的模式识别时间。同时, 对 $\forall (\sigma(t_i) = m, \sigma(t_i^-) = n) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, m \neq n$, 存在

$$V_m(x(t_i)) \leq \mu V_n(x(t_i)) \quad (2-8)$$

则当切换信号满足平均驻留时间

$$\tau_a > \tau_a^* = (\ln \mu + \tau_d(\alpha + \beta)) / \alpha \quad (2-9)$$

时, 其中 $\tau_d = \max_i \tau(t_i)$, 所考虑的切换系统全局渐进稳定。

注释 2.2: 从以上引理可知, 现有文献关于异步切换镇定的研究, 允许子系统在切换的时刻以及异步区间内 Lyapunov 函数增加, 即系统有界发散。当切换系统异步阶段过后, 所有子系统必须指数收敛, 并且满足一定的平均驻留时间条件。本章考虑一种切换信号设计方法, 允许一部分子系统在异步切换阶段过后仍可有界发散, 且切换次数不再限制为运行区间的仿射函数。

下面给出切换信号的预备知识与假设条件。

对任意给定的时间区间 $[s, t]$, 令 $N_\sigma(s, t)$ 表示这段时间的切换次数。 $E(\mathcal{P})$ 为有序对 (m, n) 构成的集合, 其中有序对 (m, n) 表示在该切换系统中, 可以从子系统 m 切换到子系统 n 。令 \mathcal{P}_{m1} 表示系统处于异步切换阶段的集合, 另外, 令 $\mathcal{P}_{m2}^s, \mathcal{P}_{m2}^u \in \mathcal{P}_{m2}$ 分别表示正常工作模式下稳定子系统和不稳定子系统的集合。因此

$$\mathcal{P}_{m1} = \{\xi \in \mathcal{P} \mid \sigma(t) = \xi, \forall t \in [t_i, t_i + \tau(t_i)), i = 0, 1, \dots\}$$

$$\mathcal{P}_{m2} = \{\xi \in \mathcal{P} \mid \sigma(t) = \xi, \forall t \in [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}), i = 0, 1, \dots\}$$

由此易知, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{m1} = \mathcal{P}_{m2} = \mathcal{P}_{m2}^s \cup \mathcal{P}_{m2}^u$ 。

对于 $t > 0$, 第 i 次切换后切换信号的持续时间为

$$S_{i+1} = t_{i+1} - (t_i + \tau(t_i)) = t_{i+1} - T_i \quad (2-10)$$

令

$$T_n(s, t) := \left| [s, t] \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(t_i)=n}}^{N_\sigma(0, t)} [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}) \right) \right| \quad (2-11)$$

表示子系统 n 处于正常运行阶段的总时长，即 $n \in \mathcal{P}_{m2}$ 的总时长。同理，令

$$\hat{T}_n(s, t) := \left| [s, t] \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(t_i)=n}}^{N_\sigma(0, t)} [t_i, t_i + \tau(t_i)) \right) \right| \quad (2-12)$$

表示子系统 n 处于模态识别阶段的总时长，即 $n \in \mathcal{P}_{m1}$ 的总时长。

根据 $T_n(s, t)$ 以及 $\hat{T}_n(s, t)$ 的定义，可知 $t - s = \sum_{n \in \mathcal{P}} T_n(s, t) + \sum_{n \in \mathcal{P}} \hat{T}_n(s, t)$ 。针对有序对

$(m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，定义

$$N_{mn}(s, t) = \sharp \{m \rightarrow n\}_s^t \quad (2-13)$$

为在区间 $[s, t]$ 内，从子系统 m 到子系统 n 的切换次数。

假设 2.1: 对任意 $j \in \mathcal{P}_{m2}^s, k \in \mathcal{P}_{m2}^u, l \in \mathcal{P}_{m1}, (m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，存在 \mathcal{FK}_∞ 函数 $\rho_{j,s}, \rho_{k,u}, \rho_{l,m}, \rho_{mn}$ 以及大于零的常数 $\bar{T}_{j,s}, \bar{T}_{k,u}, \bar{T}_{l,m}, \bar{N}_{mn}$ 使得在区间 $[s, t]$ 内，函数 $T_j(s, t), T_k(s, t), \hat{T}_l(s, t), N_{mn}(s, t)$ 满足

$$\begin{aligned} T_j(s, t) &\geq -\bar{T}_{j,s} + \rho_{j,s}(s, t-s) \\ T_k(s, t) &\leq \bar{T}_{k,u} + \rho_{k,u}(s, t-s) \\ \hat{T}_l(s, t) &\leq \bar{T}_{l,m} + \rho_{l,m}(s, t-s) \\ N_{mn}(s, t) &\leq \bar{N}_{mn} + \rho_{mn}(s, t-s) \end{aligned} \quad (2-14)$$

2.3 主要结果

基于上一节中系统模型和预备知识，本节直接给出本章的主要结果。以下给出本章的主要定理及证明。

定理 2.1: 考虑现行切换系统(2-1)。对任意时间区间 $[t_i, t_{i+1}]$ ，给定常数 μ, β_l, λ_n ，其中 $\mu > 0, \beta_l > 0, l \in \mathcal{P}_{m1}$ ； $n \in \mathcal{P}_{m2}^s$ 时， $\lambda_n > 0$ ， $n \in \mathcal{P}_{m2}^u$ 时， $\lambda_n < 0$ 。如果对 $\forall n \in \mathcal{P}, (m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，存在矩阵 $S_n > 0$ 以及 U_n 使得

$$A_n S_n + B_n U_n + S_n A_n^T + U_n^T B_n^T + \lambda_n S_n \leq 0 \quad (2-15)$$

$$A_n S_m + B_n U_m + S_m A_n^T + U_m^T B_n^T - \beta_l S_m \leq 0 \quad (2-16)$$

$$S_m \leq \mu S_n \quad (2-17)$$

同时，在任意区间 $[r, r+s]$ 内，切换信号满足假设条件 2.1 以及如下条件

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\lambda_j| \rho_{j,s}(r, s) + \sum_{k \in \mathcal{P}_{m_2}^u} |\lambda_k| \rho_{k,u}(r, s) + \sum_{l \in \mathcal{P}_{m_1}} |\beta_l| \rho_{l,m}(r, s) \\
 & + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu) \rho_{mn}(r, s) \leq c_1 - \rho(r, s)
 \end{aligned} \tag{2-18}$$

其中 c_1 为常数， $\rho: [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, +\infty)$ 为 \mathcal{FK}_∞ 类函数，则状态反馈控制器(2-3)可以保证闭环系统(2-5)全局渐进稳定。并且，控制器增益可通过下式获得

$$K_n = U_n S_n^{-1} \tag{2-19}$$

证明：由于存在异步切换时延，对 $(m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，当系统已经切换到子系统 n 工作时，子系统 m 的控制器 K_m 仍在运行，因此，对 $\forall \sigma(t_i) = n \in \mathcal{P}, m \neq n$ ，存在

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} (A_n + B_n K_m)x(t) & \forall t \in [t_i, t_i + \tau(t_i)) \\ (A_n + B_n K_n)x(t) & \forall t \in [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}) \end{cases} \tag{2-20}$$

选择如下形式的 Lyapunov 函数

$$V_n(x(t)) = x^T(t) P_n x(t) \quad \sigma(t_i) = n \in \mathcal{P} \tag{2-21}$$

其中 P_n 为正定矩阵且 $P_n^{-1} = S_n$ 。

根据(2-20)以及(2-21)，对 $\forall (m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，存在如下结果

$$\dot{V}_n(t) + \lambda_n V_n(t) = x^T(t) [(A_n + B_n K_n)^T P_n + P_n (A_n + B_n K_n) + \lambda_n P_n] x(t)$$

$$\dot{V}_n(t) - \beta_l V_n(t) = x^T(t) [(A_n + B_n K_m)^T P_n + P_n (A_n + B_n K_m) - \beta_l P_n] x(t)$$

$$V_n(x(t)) - \mu V_m(x(t)) = x^T(t) [P_n - \mu P_m] x(t)$$

由 $S_n = P_n^{-1}$ ，以及 $U_n = K_n S_n$ ， $n \in \mathcal{P}$ 之间的关系，根据式(2-15)和(2-16)，可得下列不等式关系

$$(A_n + B_n K_n)^T P_n + P_n (A_n + B_n K_n) + \lambda_n P_n \leq 0 \tag{2-22}$$

$$(A_n + B_n K_m)^T P_n + P_n (A_n + B_n K_m) - \beta_l P_n \leq 0 \tag{2-23}$$

另外，当(2-17)成立时，可得 $S_m - \mu S_n \leq 0$ 与下式等价

$$\phi = \begin{bmatrix} -\mu S_n & I \\ I & -S_m^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{2-24}$$

根据 Schur 补引理，可得 $\phi \leq 0$ 等价于 $-S_m^{-1} - I^T (-\mu S_n)^{-1} I \leq 0$ ，即等价于 $-S_m^{-1} + \mu^{-1} S_n^{-1} \leq 0$ 。进一步，根据 S_n 与 P_n 的关系，可得

$$P_n - \mu P_m \leq 0 \tag{2-25}$$

即

$$V_n(x) \leq \mu V_m(x) \quad \forall x \in R^r, m, n \in \mathcal{P} \tag{2-26}$$

因此

$$\dot{V}_{\sigma(t)}(x) \leq -\lambda_{\sigma(t)} V_{\sigma(t)}(x), t \in [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}) \quad (2-27)$$

$$\dot{V}_{\sigma(t)}(x) \leq \beta_{\sigma(t)} V_{\sigma(t)}(x), t \in [t_i, t_i + \tau(t_i)) \quad (2-28)$$

其中, $\sigma(t) \in \mathcal{P}_{m1}$ 时, 常数 $\beta_{\sigma(t)} > 0$; $\lambda_{\sigma(t)} \in R$, 当 $\sigma(t) \in \mathcal{P}_{m2}^s$ 时, $\lambda_{\sigma(t)} > 0$; 当 $\sigma(t) \in \mathcal{P}_{m2}^u$ 时, $\lambda_{\sigma(t)} < 0$ 。

由(2-27)及(2-28), 在 $t_{N_\sigma} < t$ 时, 下式成立

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x(t)) &\leq \exp(-\lambda_{\sigma(t_{N_\sigma})}(t - T_{N_\sigma})) V_{\sigma(t_{N_\sigma})}(x(T_{N_\sigma})) \\ &\leq \exp(-\lambda_{\sigma(t_{N_\sigma})}(t - T_{N_\sigma}) + \beta_{\sigma(t_{N_\sigma})} \tau(t_{N_\sigma})) V_{\sigma(t_{N_\sigma})}(x(t_{N_\sigma})) \end{aligned}$$

根据(2-10)和(2-26), 通过迭代计算, 可得

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \varphi(t) V_{\sigma(t_0)}(x(t_0)) \quad (2-29)$$

其中

$$\varphi(t) := \exp \left(N_\sigma \ln \mu - \sum_{\substack{i=0 \\ t_{N_\sigma}(0,i)+1 \leq t}}^{N_\sigma(0,t)} \lambda_{\sigma(t_i)} S_{i+1} + \sum_{\substack{i=0 \\ t_{N_\sigma}(0,i)+1 \leq t}}^{N_\sigma(0,t)} \beta_{\sigma(t_i)} \tau_d \right) \quad (2-30)$$

易知, 若证明闭环系统(2-5)全局渐进稳定, 仅需证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0 \quad (2-31)$$

由 $T_i = t_i + \tau(t_i), \forall i \in N$, 可得

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp \left(\sum_{j \in \mathcal{P}_{m2}^s} |\lambda_j| \left| [0, t] \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(t_i)=j}}^{N_\sigma(0,t)} [T_i, t_{i+1}) \right) \right| + \sum_{k \in \mathcal{P}_{m2}^u} |\lambda_k| \left| [0, t] \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(t_i)=k}}^{N_\sigma(0,t)} [T_i, t_{i+1}) \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathcal{P}_{m1}} |\beta_l| \left| [0, t] \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(t_i)=l}}^{N_\sigma(0,t)} [t_i, T_i) \right) \right| + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu) \sharp \{m \rightarrow n\}_0^{t_{N_\sigma-1}} \right) \quad (2-32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(- \sum_{j \in \mathcal{P}_{m2}^s} |\lambda_j| T_j(0, t) + \sum_{k \in \mathcal{P}_{m2}^u} |\lambda_k| T_k(0, t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathcal{P}_{m1}} |\beta_l| \hat{T}_l(0, t) + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu) N_{mn}(0, t_{N_\sigma-1}) \right) \end{aligned}$$

根据(2-14), 上式可写成如下形式

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq \exp \left(\sum_{j \in \mathcal{P}_{m1}^s} |\lambda_j| (\bar{T}_{j,s} - \rho_{j,s}(0, t)) + \sum_{k \in \mathcal{P}_{m1}^u} |\lambda_k| (\bar{T}_{k,u} + \rho_{k,u}(0, t)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathcal{P}_m} |\beta_l| (\bar{T}_{l,m} + \rho_{l,m}(0, t)) + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\bar{N}_{mn} + \rho_{mn}(0, t)) \ln \mu \right) \quad (2-33) \end{aligned}$$

令常数 c 满足

$$c \geq \sum_{j \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\lambda_j| \bar{T}_{j,s} + \sum_{k \in \mathcal{P}_{m_2}^u} |\lambda_k| \bar{T}_{k,u} + \sum_{l \in \mathcal{P}_{m_1}} |\beta_l| \bar{T}_{l,m} + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu) \bar{N}_{mn}$$

则根据(2-18), 可得

$$\varphi(t) \leq \exp(c + c_1 - \rho(0, t)) \quad (2-34)$$

即 $\varphi(t)$ 小于指数函数 $\exp(c + c_1 - \rho(0, t))$ 。

由于 $\rho(0, t)$ 为 \mathcal{FK}_∞ 类函数, 易知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = 0$, 因此(2-31)成立。

由所选取得 Lyapunov 函数(2-21)可知, 存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\kappa_1(\cdot)$, $\kappa_2(\cdot)$ 使得

$$\kappa_1(\|x(t)\|) \leq V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \kappa_2(\|x(t)\|)$$

所以, 对任意 $\sigma(t) = i \in \mathcal{P}$, 下式成立

$$\|x(t)\| \leq \kappa_1^{-1}(V_i(x(t))) \leq \kappa_1^{-1}(\varphi(t) \kappa_2(\|x(0)\|)) \quad (2-35)$$

由式(2-35)以及 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ 可知, 在所本章所提出的调节切换信号 $\sigma(t)$ 下, 对任

意初值 $x(0) \in R^r$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, 由此可得闭环系统(2-5)全局渐进稳定。同时, 通过

求解(2-15)-(2-17), 控制器(2-3)的增益可选择 $K_n = U_n S_n^{-1}$ 。至此, 证明完毕。

注释 2.3: 本章所提方法中, 条件(2-16)与(2-17)与文献[48]条件类似。然而, 文献[48]要求异步切换过后, 所有的子系统在正常运行阶段指数稳定, 即在所有的区间 $t \in [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}]$ 内, 要求常数 $\alpha > 0$ 以及 $\dot{V}_{\sigma(t)}(\cdot) \leq -\alpha V_{\sigma(t)}(\cdot)$ 。而在本章中, 从(2-15)和(2-27)可知, 允许存在子系统不稳定的情况。因此, 对于条件(2-15)而言, 不再要求所有 $\lambda_n > 0$, $n \in \mathcal{P}$, 从而在一定程度上放宽了控制器增益的求解条件。

当 $\tau(t) = 0$ 时, 其表示的意义为控制器与系统模态不存在切换时延, 即系统变为同步切换情况。因而将 $\tau(t) = 0$ 代入可得到同步切换镇定相关结果。这里将该结果总结为如下推论:

推论 2.1: 考虑切换系统(2-1)。给定常数 μ , λ_n , 其中 $\mu > 0$; $n \in \mathcal{P}_{m_2}^s$ 时, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathcal{P}_{m_2}^u$ 时, $\lambda_n < 0$ 。如果对 $(m, n) \in E(\mathcal{P})$, 存在矩阵 $S_n > 0$, U_n 使得

$$A_n S_n + B_n U_n + S_n A_n^T + U_n^T B_n^T + \lambda_n S_n \leq 0 \quad (2-36)$$

$$S_m \leq \mu S_n \quad (2-37)$$

同时, 在任意区间 $[r, r+s]$ 内, 系统切换信号满足假设条件 2.1 中第 1、2、4 项以及如下条件

$$-\sum_{j \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\lambda_j| \rho_{j,s}(r, s) + \sum_{k \in \mathcal{P}_{m_2}^u} |\lambda_k| \rho_{k,u}(r, s) + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu) \rho_{mn}(r, s) \leq c_1 - \rho(r, s) \quad (2-38)$$

其中 c_1 为常数, $\rho: [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, +\infty)$ 为 \mathcal{FK}_∞ 类函数, 则状态反馈控制器(2-3)可以保证闭环系统(2-5)全局渐进稳定。同时, 控制器增益可由下式获得

$$K_n = U_n S_n^{-1} \quad (2-39)$$

证明: 参考定理 2.1 证明过程, 可直接得此结果。

2.4 仿真算例

本小节给出一个仿真算例验证所提方法的有效性。

考虑由两个子系统的线性切换系统如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

观察 A_2 , B_2 可知, 第二个子系统为不稳定的子系统且 (A_2, B_2) 不可控。因此, 无法找到参数 $\lambda_2 > 0$ 使得条件(2-27)成立。这种情况下, 文献[47]、[48]所提方法难以应用到此类系统的控制中。

对 $\forall \xi_i \in \mathcal{P}$, 设异步切换过程最大时延为 $\tau_d = 0.15$ 。令 $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -0.8$, 则通过 Matlab 中 LMI 工具箱解(2-15)~(2-17), 可得如下控制器增益

$$K_1 = [0.1206, -0.4231], \quad K_2 = [0.0600, -1.2288]$$

以及

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.0335 & -0.0771 \\ -0.0771 & 2.6600 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 5.6788 & 0.2125 \\ 0.2125 & 6.2732 \end{bmatrix}$$

同时可得 $\beta_1 = -1.0000$, $\beta_2 = -1.0000$, $\mu = 2.5$ 。

针对切换信号 $\sigma(t)$, 令条件(2-14)具体如下: $\bar{T}_{j,s} = \bar{T}_{k,u} = \bar{T}_{l,m} = \bar{N}_{mn} = 0$;

$$\rho_{1,s}(r,s) = 0.048s^{\frac{3}{2}} + 0.36s \quad ; \quad \rho_{2,u}(r,s) = 0.32s \quad ; \quad \rho_{1,m}(r,s) = \rho_{2,m}(r,s) = 0.027s \quad ;$$

$$\rho_{mn}(r,s) = 0.03s^{\frac{3}{2}} + 0.21s \quad . \quad \text{选择 } \rho(r,s) = 0.041s^{\frac{3}{2}} + k_2, \text{ 易验证条件 (2-18)满足, 其中}$$

$k_2 = c_1$ 为大于零的常数。图 2-1 给出了满足条件的一组切换信号。

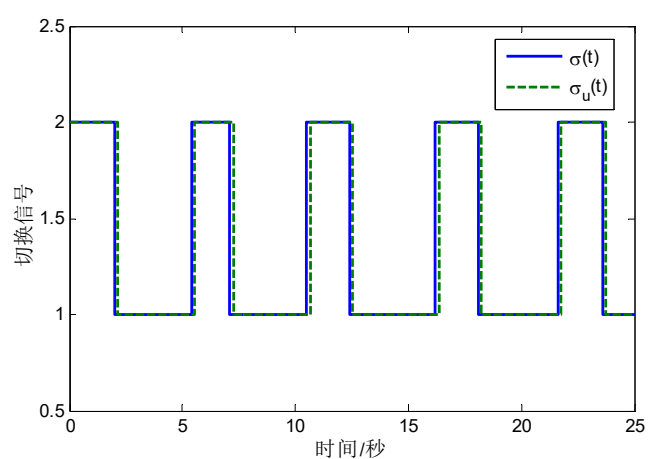


图 2-1 切换信号

Fig. 2-1 The switching signal

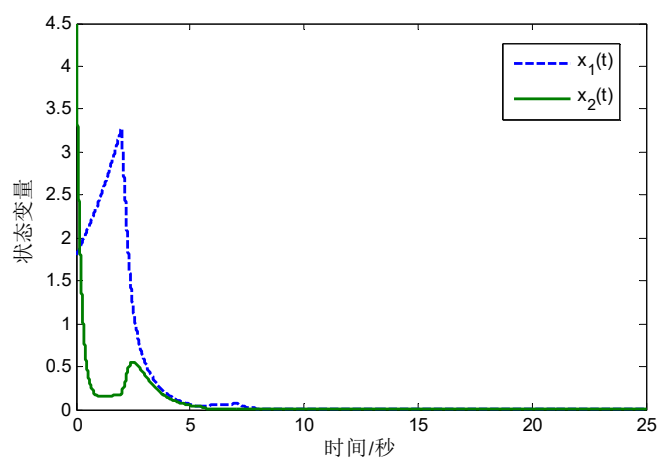


图 2-2 系统状态轨迹

Fig. 2-2 The trajectories of states

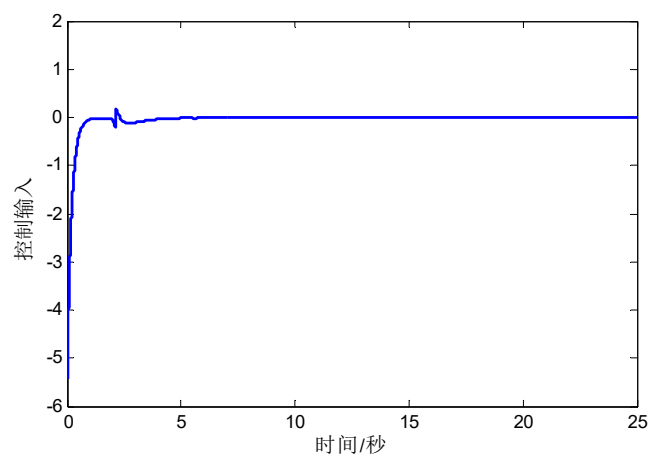


图 2-3 系统控制输入信号

Fig. 2-3 The control input signal

给定系统状态初值 $x_0 = [1.8, 4.5]^T$ ，仿真结果如图 2-2 和图 2-3 所示。从仿真结果中可看出，通过本章所提出的切换信号与控制器协同控制方法，在系统异步切换下，闭环系统状态渐进稳定。

2.5 本章小结

本章研究了一类连续时间线性切换系统在异步切换条件下系统镇定问题。首先通过限制各子系统的运行时间与切换次数，提出了一类切换信号设计方法。基于所提切换信号，给出了闭环系统全局渐进稳定的充分条件，同时给出了控制器增益求解方法。在本章所提切换信号与控制器下，放松了系统状态在正常运行阶段必须严格收敛的条件，因而可得到更加宽松的控制器求解条件。并通过数值仿真进一步证明了所提方法的有效性。

第3章 基于切换调节的 2-D 离散切换系统镇定控制

3.1 引言

上一章节考虑了一类连续时间线性切换系统的镇定控制问题，本章进一步考虑存在不稳定系统时，离散切换二维(2-Dimensional, 2-D)系统镇定问题。

2-D 系统是一类重要的多维系统，其系统动态包括两个独立的状态，即水平状态和竖直状态。2-D 系统理论在众多实际应用领域发挥着重要作用，例如信号处理，多维数字滤波，图像增强处理，卫星气象云图分析等^{[64]-[65][66]}。2-D 系统的状态空间模型主要有 Roesser 模型和 FM(Fornasini-Marchesini, FM)两种，分别由 R. Roesser 和 E. Fornasini, G. Marchesini 等人在上世纪七十年代提出^{[67]-[69]}。尽管上述模型的形式不同，其系统动态均依赖于两个独立的变量。自此以后，针对 2-D 系统的理论研究取得了丰硕的成果^{[70]-[77]}。例如文献[74]中，作者考虑了带有干扰的 2-D 时滞不确定系统鲁棒控制。基于经典的 Lyapunov 稳定性分析方法，以线性矩阵不等式(LMI)的形式给出了时滞相关的稳定性结果。

另一方面，对 2-D 系统而言，同样可能存在系统切换现象，例如具有多个传输通道的电能传输系统^[64]。关于 2-D 切换系统的控制问题，同样受到了国内外研究学者的广泛关注。Huang S.在文献[75]研究了切换 2-D 系统稳定性分析与镇定问题。基于平均驻留时间方法，给出了 2-D 非线性连续时间切换系统的稳定性判据。Shi S.等人在文献[77]中基于切换信号调节方法，考虑了 2-D 切换系统镇定问题，通过限制各子系统运行时间，保证了系统最终稳定性。应当指出的是，尽管关于 2-D 系统已存在较多的研究成果，然而，针对 2-D 切换系统的研究仍处于起步阶段，存在较多的开放性研究问题。特别地，当切换系统中存在不稳定的子系统时，传统基于平均驻留时间方法失效，另外，关于切换系统其他问题，如切换信号与控制器异步切换等问题，使得系统的稳定性分析问题更加困难。

针对上述研究现状，本章研究一类 2D 离散切换系统存在不稳定且不可控模态情况下的系统镇定问题。考虑 2D 离散 Roesser 模型，设计切换调节切换信号限定切换次数以及不稳定模态与稳定模态运行时间比率，基于所提切换调节信号，给出了系统同步切换下稳定性条件，并通过求解线性矩阵不等式得到镇定控制器增益。并进

一步将所提基于切换调节镇定方法推广到系统异步切换条件情况，给出了相应定理结果。

3.2 系统描述与预备知识

考虑如下离散时间 2-D 切换系统 Roesser 模型

$$x^+(i, j) = A_{\sigma(i, j)} x(i, j) + B_{\sigma(i, j)} u(i, j) \quad (3-1)$$

其中 $x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \in R^n$ 是具有两个维度的系统状态， $x^h(i, j) \in R^{n_1}$ ， $x^v(i, j) \in R^{n_2}$ ， $n = n_1 + n_2$ ，分别为水平方向和竖直方向的状态。 $u(i, j) \in R^m$ 表示系统的控制输入向量。 $\sigma(i, j) \rightarrow \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ 表示系统切换信号，其中 \mathcal{M} 是有限的自然数集合， M 是切换子系统的个数。 $x^+(i, j)$ ， $A_{\sigma(i, j)}$ ， $B_{\sigma(i, j)}$ 分别为具有适当维数的矩阵，且可分块成如下形式

$$A_{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} A_{11, \sigma(i, j)} & A_{12, \sigma(i, j)} \\ A_{21, \sigma(i, j)} & A_{22, \sigma(i, j)} \end{bmatrix}, B_{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} B_{1, \sigma(i, j)} \\ B_{2, \sigma(i, j)} \end{bmatrix}$$

其中，对任意 $\sigma(i, j) = k, k \in \mathcal{M}$ ， $A_{11, k} \in R^{n_1 \times n_1}$ ， $A_{12, k} \in R^{n_1 \times n_2}$ ， $A_{21, k} \in R^{n_2 \times n_1}$ ， $A_{22, k} \in R^{n_2 \times n_2}$ ， $B_{1, k} \in R^{n_1 \times m}$ ， $B_{2, k} \in R^{n_2 \times m}$ 分别为已知的常数矩阵。 $x^+(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix}$ 为水平方向和竖

直方向下一时刻的状态值。系统的边界条件为

$$x^h(0, j) = \begin{cases} v_j, & 0 \leq j \leq r_1 \\ 0, & j \geq r_1 \end{cases}, x^v(i, 0) = \begin{cases} \omega_i, & 0 \leq i \leq r_2 \\ 0, & i \geq r_2 \end{cases} \quad (3-2)$$

r_1 ， r_2 分别为大于零的整数， v_j ， ω_i 为给定的初始向量。这里所说的边界条件指的是沿着系统模型边界的状态，即边界条件由 $x^h(0, j)$ ， $j \geq 0$ 和 $x^v(i, 0)$ ， $i \geq 0$ 组成。在 Roesser 模型描述的 2-D 系统中，边界条件 $x^h(0, j)$ 和 $x^v(i, 0)$ 需要具体给定，通过给定的边界条件(例如全为零)以及系统控制输入，可唯一确定系统水平方向和竖直方向系统状态[67]。对比 1-D 系统而言，边界条件可理解为 2-D 系统状态的初值。

针对 2-D 切换系统，切换信号 $\sigma(i, j)$ 选择需要激活的子系统。与 1-D 系统不同的是，切换信号 $\sigma(i, j)$ 的取值并非依赖 i 或 j 的值，而是基于两个方向时刻值之和，即 $\sigma(i, j)$ 的取值依赖于 $i + j$ 。

另外，我们假设系统模态仅仅在系统采样时刻进行切换。为了表述方便，定义 $d = i + j$ 。由此，系统的切换时间序列可表示为

$$(d_0, \sigma(d_0)), (d_1, \sigma(d_1)), \dots, (d_l, \sigma(d_l)), \dots \quad (3-3)$$

其中, $d_l = i_l + j_l$ 表示第 l 次切换时刻。不失一般性, 令 $d_0 = 0$ 。由切换序列可知, 当 $\sigma(d_l) = k \in \mathcal{M}$ 时, 系统的第 k 个子系统在区间 $[d_l, d_{l+1})$ 内处于工作状态。

针对 2-D 切换系统(3-1), 本章的控制目标是考虑系统存在不稳定子系统时, 通过状态反馈与切换信号调节方法, 给出切换信号约束条件以及状态反馈控制器设计方法, 保证闭环系统信号的稳定性。

首先将系统各子系统分为可镇定子系统 \mathcal{M}_s 和不可镇定且不稳定(以下简称不稳定)子系统 \mathcal{M}_u 。在区间 $d \in [d_0, D)$ 内, 定义子系统 $j \in \mathcal{M}$ 的持续运行总时间为

$$T_j(d_0, D) := \left| [d_0, D) \cap \bigcup_{\substack{l=0 \\ \sigma(d_l)=j}}^{N_\sigma(0,D)} [d_l, d_{l+1}) \right|$$

则稳定子系统和不稳定子系统的运行时间可分别表示为 $T_{\downarrow(d_0, D)} = \sum_{s \in \mathcal{M}_s} T_s(d_0, D)$ 和

$$T_{\uparrow(d_0, D)} = \sum_{u \in \mathcal{M}_u} T_u(d_0, D)。$$

下面给出与本章相关的定义与引理。

定义 3.1^[75]: 对于 2-D 切换系统(3-1), 在切换信号 $\sigma(i, j)$ 作用下, 如果存在大于零的常数 c 以及 ξ 使得

$$\sum_{i+j=D} |x(i, j)|^2 \leq \xi e^{-c(D-d_0)} \sum_{i+j=d_0} |x(i, j)|^2 \quad (3-4)$$

对所有 $D \geq d_0$ 成立, 则称系统(3-1)是指数稳定的。

定义 3.2^[78]: 在任意区间 $[d_0, D)$ 内, 如果存在大于零的常数 γ 使得不稳定子系统运行时间 $T_{\uparrow(d_0, D)}$ 与稳定子系统运行时间 $T_{\downarrow(d_0, D)}$ 满足

$$\frac{T_{\uparrow(d_0, D)}}{T_{\downarrow(d_0, D)}} \leq \gamma \quad (3-5)$$

则称切换信号 $\sigma(i, j)$ 具有不稳定子系统与稳定子系统最大运行时间时间比 γ 。下文简称运行时间比 γ 。

定义 3.3^[78]: 在任意区间 $[d_0, D)$ 内, 对于具有运行时间比 γ 的切换信号 $\sigma(i, j)$, 如果存在大于零的常数 N^* 使得当 $N_\sigma(d_0, D) < N^*$ 时, 切换系统(3-1)指数稳定, 则称 N^* 为切换信号 $\sigma(i, j)$ 的最大切换次数, 其中 $N_\sigma(d_0, D)$ 为系统在区间 $[d_0, D)$ 内的切换次数。

引理 3.1^[47]: 对于一个给定的矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $S_{11} = S_{11}^T$, $S_{22} = S_{22}^T$, 则下列三种情况等价

- (a) $S < 0$;
- (b) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- (c) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

3.3 主要结果

3.3.1 同步切换下 2-D 系统镇定

本节设计状态反馈控制器如下

$$u_{i,j} = K_{\sigma(i,j)} x(i, j) \quad (3-6)$$

其中, $K_{\sigma(i,j)} = [K_{h,\sigma(i,j)}, K_{v,\sigma(i,j)}]$ 为待设计的控制器增益。将(3-6)代入(3-1), 闭环系统可表示为

$$x^+(i, j) = (A_{\sigma(i,j)} + B_{\sigma(i,j)} K_{\sigma(i,j)}) x(i, j) \quad (3-7)$$

下面, 给出同步切换下 2-D 系统镇定的主要结果。

定理 3.1: 考虑 2-D 切换系统(3-1), 设计状态反馈控制器(3-6)。在区间 $[d_0, D)$ 内, 对任意 $k \in \mathcal{M}$, 给定常数 $\alpha_k < 1$, 如果存在正定对称矩阵 X_k , Y_k 以及矩阵 M_k , N_k 使得

$$\begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_k X_k & 0 & \Phi_{13}^T & \Phi_{14}^T \\ * & -\bar{\alpha}_k Y_k & \Phi_{23}^T & \Phi_{24}^T \\ * & * & -X_k & 0 \\ * & * & * & -Y_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3-8)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{13} &= A_{11,k} X_k + B_{1,k} M_k, & \Phi_{14} &= A_{21,k} X_k + B_{2,k} M_k, \\ \Phi_{23} &= A_{12,k} Y_k + B_{1,k} N_k, & \Phi_{24} &= A_{22,k} Y_k + B_{2,k} N_k. \end{aligned}$$

则当切换信号的运行时间比为 γ , 且切换次数满足

$$N_{\sigma} \leq N^* = \frac{(-\ln \bar{\alpha}_{\downarrow} - \gamma \ln \bar{\alpha}_{\uparrow} - c(1+\gamma))}{\ln \mu(1+\gamma)} (D - d_0) \quad (3-9)$$

时, 在状态反馈控制器(3-6)下, 闭环系统(3-7)指数稳定。其中 $\bar{\alpha}_k = 1 - \alpha_k$,

$$\bar{\alpha}_{\downarrow} = \max_{k \in \mathcal{M}_s} (\bar{\alpha}_k), \quad \bar{\alpha}_{\uparrow} = \max_{k \in \mathcal{M}_l} (\bar{\alpha}_k), \quad \mu = \max_{\substack{k, l \in \mathcal{M} \\ k \neq l}} \left(\frac{\max(X_k)}{\min(X_l)}, \frac{\max(Y_k)}{\min(Y_l)} \right), \quad c \text{ 是大于零的常数。}$$

同时, 控制器增益可通过下式得出

$$K_{h,k} = M_k X_k^{-1}, K_{v,k} = N_k Y_k^{-1} \quad (3-10)$$

证明：选择如下形式的 Lyapunov 函数

$$V_{\sigma(d)}(x(i, j)) = V_{\sigma(d)}^h(x(i, j)) + V_{\sigma(d)}^v(x(i, j)) \quad (3-11)$$

其中

$$V_{\sigma(d)}^h(x(i, j)) = x^h(i, j)^T P_{\sigma(d)} x^h(i, j)$$

$$V_{\sigma(d)}^v(x(i, j)) = x^v(i, j)^T Q_{\sigma(d)} x^v(i, j)$$

$P_{\sigma(d)} = X_{\sigma(d)}^{-1}$, $Q_{\sigma(d)} = Y_{\sigma(d)}^{-1}$ 表示具有适当维数的正定对称矩阵。

下文中，为简便起见，将 $V_{\sigma(d)}(x(i, j))$ 简写为 $V_{\sigma(d)}(i, j)$ ，同理， $V_{\sigma(d)}^h(x(i, j))$ 和 $V_{\sigma(d)}^v(x(i, j))$ 分别简写为 $V_{\sigma(d)}^h(i, j)$, $V_{\sigma(d)}^v(i, j)$ 。

不失一般性，假设在区间 $[k_l, k_{l+1})$ 内，第 k 个子系统处于运行状态，即 $\sigma(d_l) = k$, $d_l \in [k_l, k_{l+1})$ 。针对这一子系统，定义

$$\Delta V_k(i, j) = V_k^h(i+1, j) + V_k^v(i, j+1) - V_k^h(i, j) - V_k^v(i, j) \quad (3-12)$$

根据上述定义，通过推导可得

$$\begin{aligned} & \Delta V_k(i, j) + \alpha_k V_k(i, j) \\ &= x^h(i+1, j)^T P_k x^h(i+1, j) - \bar{\alpha}_k x^h(i, j)^T P_k x^h(i, j) \\ & \quad + x^v(i, j+1)^T Q_k x^v(i, j+1) - \bar{\alpha}_k x^v(i, j)^T Q_k x^v(i, j) \\ &= x(i, j)^T \left[\begin{bmatrix} \bar{A}_{11,k}^T \\ \bar{A}_{12,k}^T \end{bmatrix} P_k \begin{bmatrix} \bar{A}_{11,k} & \bar{A}_{12,k} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,k}^T \\ \bar{A}_{22,k}^T \end{bmatrix} Q_k \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,k} & \bar{A}_{22,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_k P_k & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_k Q_k \end{bmatrix} \right] x(i, j) \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11,k} &= A_{11,k} + B_{1,k} K_{h,k}, & \bar{A}_{12,k} &= A_{12,k} + B_{1,k} K_{v,k}, \\ \bar{A}_{21,k} &= A_{21,k} + B_{2,k} K_{h,k}, & \bar{A}_{22,k} &= A_{22,k} + B_{2,k} K_{v,k}. \end{aligned}$$

由(3-13)可知，如果下式成立，则可得 $\Delta V_k(i, j) + \alpha_k V_k(i, j) < 0$ 。

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11,k}^T \\ \bar{A}_{12,k}^T \end{bmatrix} P_k \begin{bmatrix} \bar{A}_{11,k} & \bar{A}_{12,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,k}^T \\ \bar{A}_{22,k}^T \end{bmatrix} Q_k \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,k} & \bar{A}_{22,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_k P_k & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_k Q_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3-14)$$

由引理 3.1 可得，不等式(3-14)等价于

$$\begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_k P_k & 0 & \bar{A}_{11,k}^T & \bar{A}_{21,k}^T \\ * & -\bar{\alpha}_k Q_k & \bar{A}_{12,k}^T & \bar{A}_{22,k}^T \\ * & * & -X_k & 0 \\ * & * & * & -Y_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3-15)$$

分析(3-15)中矩阵可知，待解矩阵 P_k , X_k 以及 Q_k , Y_k 同时为主对角线上，因而该矩阵为非线性矩阵，无法直接利用 LMI 工具箱求解。进一步，在(3-15)中矩阵前后

分别乘对角矩阵 $\text{diag}\{X_k, Y_k, I, I\}$ 。由于 $K_{h,k}X_k = M_k$, $K_{v,k}Y_k = N_k$, 相乘后(3-15)转变成(3-8)。因此可通过 LMI 求解(3-8), 从而可求得 X_k , Y_k , M_k , N_k , 进一步可得控制器增益 $K_{h,k}$ 与 $K_{v,k}$ 。

由式(3-15), 可得 $\Delta V_k(i, j) < -\alpha_k V_k(i, j)$, 因此, 下式成立

$$V_k^h(i+1, j) + V_k^v(i, j+1) < \bar{\alpha}_k (V_k^h(i, j) + V_k^v(i, j)) \quad (3-16)$$

根据(3-16), 可得以下不等式组

$$\begin{cases} V_k(1, D-1) < \bar{\alpha}_k (V_k^h(0, D-1) + V_k^v(1, D-2)) \\ V_k(2, D-2) < \bar{\alpha}_k (V_k^h(1, D-2) + V_k^v(2, D-3)) \\ \dots \\ V_k(D-1, 1) < \bar{\alpha}_k (V_k^h(D-2, 1) + V_k^v(D-1, 0)) \end{cases} \quad (3-17)$$

在区间 $d \in [d_l, d_{l+1})$ 内, 将(3-17)中各式相加, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=D} V_k(i, j) &< \bar{\alpha}_k \sum_{i+j=D-1} V_k(i, j) \\ &< \dots \\ &< \bar{\alpha}_k^{D-d_l} \sum_{i+j=d_l} V_k(i, j) \end{aligned} \quad (3-18)$$

另外, 由定理 3.1 中参数 μ 的定义, 对任意 $(\sigma(d_l) = k, \sigma(d_{l-1}) = q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}, k \neq q$, 各模态的 Lyapunov 函数存在如下关系

$$\sum_{i+j=d_l} V_{\sigma(d_l)}(i, j) < \mu \sum_{i+j=d_l} V_{\sigma(d_{l-1})}(i, j) \quad (3-19)$$

根据式(3-18)及(3-19), 通过迭代计算可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i+j=D} V_{\sigma(d)}(i, j) \\ &< \mu \bar{\alpha}_{\sigma(d_l)}^{D-d_l} \sum_{i+j=d_l} V_{\sigma(d_{l-1})}(i, j) \\ &< \dots \\ &< \mu^{N_\sigma} \prod_{k=1}^M \bar{\alpha}_k^{T_k(d_0, D)} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j) \\ &= \exp \left\{ N_\sigma \ln \mu + \sum_{k \in \mathcal{M}_s} T_k(d_0, D) \ln \bar{\alpha}_k + \sum_{k \in \mathcal{M}_u} T_k(d_0, D) \ln \bar{\alpha}_k \right\} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j) \\ &< \exp \left\{ N_\sigma \ln \mu + T_{\downarrow(d_0, D)} \ln \bar{\alpha}_{\downarrow} + T_{\uparrow(d_0, D)} \ln \bar{\alpha}_{\uparrow} \right\} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j) \end{aligned} \quad (3-20)$$

其中 $T_k(d_0, D)$ 为第 k 个子系统在区间 (d_0, D) 内的运行时间。

根据 $D - d_0 = T_{\uparrow(d_0, D)} + T_{\downarrow(d_0, D)}$ 且 $T_{\uparrow(d_0, D)} / T_{\downarrow(d_0, D)} \leq \gamma$, 则下式成立

$$\begin{aligned}
 & \exp\{N_\sigma \ln \mu + T_\downarrow \ln \bar{\alpha}_\downarrow + T_\uparrow \ln \bar{\alpha}_\uparrow\} \\
 & < \exp\left\{N_\sigma \ln \mu + \frac{1}{1+\gamma}(D-d_0) \ln \bar{\alpha}_\downarrow + \frac{\gamma}{1+\gamma}(D-d_0) \ln \bar{\alpha}_\uparrow\right\} \\
 & = \exp\left\{N_\sigma \ln \mu + \frac{(\ln \bar{\alpha}_\downarrow + \gamma \ln \bar{\alpha}_\uparrow)}{1+\gamma}(D-d_0)\right\}
 \end{aligned} \tag{3-21}$$

将(3-9)代入(3-21)、(3-20)，可得

$$\sum_{i+j=D} V_{\sigma(d)}(i, j) < e^{-c(D-d_0)} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j) \tag{3-22}$$

由(3-11)，下式成立

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\min}(P_{\sigma(d)}) \|x^h(i, j)\|^2 & \leq V_{\sigma(d)}^h(i, j) \leq \lambda_{\max}(P_{\sigma(d)}) \|x^h(i, j)\|^2 \\
 \lambda_{\min}(Q_{\sigma(d)}) \|x^v(i, j)\|^2 & \leq V_{\sigma(d)}^v(i, j) \leq \lambda_{\max}(Q_{\sigma(d)}) \|x^v(i, j)\|^2
 \end{aligned}$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 与 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别为相应矩阵的最小与最大特征值。定义

$$\begin{aligned}
 \xi_1 & = \min\{\lambda_{\min}(P_{\sigma(d)}) + \lambda_{\min}(Q_{\sigma(d)})\} \\
 \xi_2 & = \max\{\lambda_{\max}(P_{\sigma(d)}) + \lambda_{\max}(Q_{\sigma(d)})\}
 \end{aligned}$$

则有

$$\xi_1 \sum_{i+j=D} \|x(i, j)\|^2 \leq \sum_{i+j=D} V_{\sigma(d)}(i, j) \leq \xi_2 e^{-c(D-d_0)} \sum_{i+j=d_0} \|x(i, j)\|^2$$

因此

$$\sum_{i+j=D} \|x(i, j)\|^2 \leq \xi e^{-c(D-d_0)} \sum_{i+j=d_0} \|x(i, j)\|^2 \tag{3-23}$$

其中 $\xi = \xi_2 / \xi_1$ 。

根据边界条件，对于任意给定的初值 d_0 ，系统初始状态 $\sum_{i+j=d_0} \|x(i, j)\|^2$ 有界。因

此，从(3-23)可知，随着 $D \rightarrow \infty$ ， $\sum_{i+j=D} \|x(i, j)\|^2$ 指数收敛到平衡点。根据定义 3.1，

得到闭环系统(3-7)指数稳定结论。至此，证明完毕。

3.3.2 异步切换下 2-D 系统镇定

上小节给出了 2-D 切换系统基于切换调节的系统镇定结论，其中假设系统控制器与切换信号同步切换。然而在实际系统中，由于被控对象与控制器信号传输过程中存在时延，当系统的某一子系统激活运行后，需要一定的时间识别激活的子系统并选择相应的控制器，从而造成系统模态和控制器切换过程存在异步现象。

这里我们将上一节 2-D 系统同步切换镇定的研究结论推广到异步切换情形。

这一情形下，假设反馈控制器存在一个切换时延，系统控制器变为如下形式

$$u_{i,j} = K_{\sigma(d-r(d))}x(i, j) \quad (3-24)$$

其中 $r(d)$ 为造成控制器与系统模态异步的切换时延。在初始时刻，由于系统之间不存在切换，因此可令 $r(d_0) = 0$ 。将(3-24)代入(3-1)，闭环系统变为如下形式

$$x^+(i, j) = (A_{\sigma(d)} + B_{\sigma(d)}K_{\sigma(d-r(d))})x(i, j) \quad (3-25)$$

通常，与每个子系统的每一次运行时间相比，子系统识别过程相对较短，因此假设其满足 $0 < r(d) < r_{\max}$ ，其中 r_{\max} 为已知常数。并且假设不存在整个子系统运行过程中子系统与控制器始终异步情况，即对 $\forall l \in N$ ， r_{\max} 满足 $r_{\max} < d_{l+1} - d_l$ 。在区间 $[d_0, D)$ 内，定义

$$T_j^1(d_0, D) := \left| [d_0, D) \cap \bigcup_{\substack{l=0 \\ \sigma(d_l)=j}}^{N_{\sigma}(0,D)} [d_l, r(d_l)) \right|$$

$$T_j^2(d_0, D) := \left| [d_0, D) \cap \bigcup_{\substack{l=0 \\ \sigma(d_l)=j}}^{N_{\sigma}(0,D)} [r(d_l), d_{l+1}) \right|$$

令 $T_{m(d_0, D)} = \sum_{j \in \mathcal{M}} T_j^1(d_0, D)$ 和 $T_{n(d_0, D)} = \sum_{j \in \mathcal{M}} T_j^2(d_0, D)$ 分别表示子系统识别时间和系

统正常运行时间。则稳定子系统运行时间和不稳定子系统运行时间将分别修改为如下形式

$$T_{\downarrow(d_0, D)} = \sum_{j \in \mathcal{M}_s} T_j^2(d_0, D), \quad T_{\uparrow(d_0, D)} = \sum_{j \in \mathcal{M}_u} T_j^2(d_0, D)$$

同样，给出异步切换下异步时间比的定义如下：

定义 3.4: 在任意区间 $[d_0, D)$ 内，如果存在大于零的常数 λ 使得子系统识别时间 $T_{m(d_0, D)}$ 和正常运行时间 $T_{n(d_0, D)}$ 满足

$$\frac{T_{m(d_0, D)}}{T_{n(d_0, D)}} \leq \lambda \quad (3-26)$$

则称切换信号 $\sigma(i, j)$ 具有异步识别与正常工作最大运行时间比 λ ，下文简称异步时间比 λ 。

下面给出异步切换下 2-D 系统镇定的主要结果。

定理 3.2: 考虑异步切换下 2-D 系统(3-1)。在区间 $[d_0, D)$ 内，对任意 $k \in \mathcal{M}$ ，给定常数 $\alpha_k < 1$ ，如果存在正定对称矩阵 X_k ， Y_k ， X_q ， Y_q 以及矩阵 M_k ， N_k ， M_q ， N_q 使得

$$\begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_k X_k & 0 & \Pi_{13}^T & \Pi_{14}^T \\ * & -\bar{\alpha}_k Y_k & \Pi_{23}^T & \Pi_{24}^T \\ * & * & -X_k & 0 \\ * & * & * & -Y_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3-27)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{\beta}_k (X_k - 2X_q) & 0 & \Psi_{13}^T & \Psi_{14}^T \\ * & -\bar{\beta}_k (Y_k - 2Y_q) & \Psi_{23}^T & \Psi_{24}^T \\ * & * & -X_k & 0 \\ * & * & * & -Y_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3-28)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_{13} &= A_{11,k} X_k + B_{1,k} M_k, & \Pi_{14} &= A_{21,k} X_k + B_{2,k} M_k, \\ \Pi_{23} &= A_{12,k} Y_k + B_{1,k} N_k, & \Pi_{24} &= A_{22,k} Y_k + B_{2,k} N_k, \\ \Psi_{13} &= A_{11,k} X_q + B_{1,k} M_q, & \Psi_{14} &= A_{21,k} X_q + B_{2,k} M_q, \\ \Psi_{23} &= A_{12,k} Y_q + B_{1,k} N_q, & \Psi_{24} &= A_{22,k} Y_q + B_{2,k} N_q. \end{aligned}$$

则在运行时间比为 γ ，异步时间比为 λ 的切换信号下，当切换次数满足

$$N_\sigma \leq N^* = \frac{(D-d_0)}{\ln \mu(1+\gamma)(1+\lambda)} (-\ln \bar{\alpha}_\downarrow - \gamma \ln \bar{\alpha}_\uparrow - (1+\gamma)\lambda \ln \varpi_{\max} - c(1+\gamma)(1+\lambda)) \quad (3-29)$$

时，其中 $\varpi_{\max} = \max_{k \in \mathcal{M}} \{\bar{\beta}_k / \bar{\alpha}_k\}$ ，状态反馈控制器(3-24)可使得闭环系统(3-25)指数稳定。

同时，控制器增益可通过下式获得

$$K_{h,k} = M_k X_k^{-1}, K_{v,k} = N_k Y_k^{-1} \quad (3-30)$$

证明：不失一般性， $\forall l \in N$ ，假设 $\sigma(d_{l-1}) = q$ ， $\sigma(d_l) = k$ ，即第 q 个和第 k 个子系统分别在两个连续的时间区间 $[k_{l-1}, k_l)$ 和 $[k_l, k_{l+1})$ 内处于工作状态。由于切换时延的影响，当第 k 个子系统刚切换到工作状态时，第 q 个子系统的控制器仍处于工作状态，这一过程持续的时间为 $r(d_l)$ 。

选择 Lyapunov 函数形如(3-11)，并定义 $\Delta V_{\sigma(d)}$ 如式(3-12)，即同于同步切换。对于 $d = i + j$ ，考虑下面两种情况：

第一种情况，当 $d \in [d_l + r(d_l), d_{l+1})$ 时，与同步切换情形类似，根据(3-27)，可直接得出如下结果

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=D} V_k(i, j) &< \bar{\alpha}_k \sum_{i+j=D-1} V_k(i, j) \\ &< \dots \\ &< \bar{\alpha}_k^{D-(d_l+r(d_l))} \sum_{i+j=d_l+r(d_l)} V_k(i, j) \end{aligned} \quad (3-28)$$

第二种情况，当 $d \in [d_l, d_l + r(d_l))$ 时，系统模态与控制器处于异步状态，可得

$$\begin{aligned}
 & \Delta V_k(i, j) - \beta_k V_k(i, j) \\
 &= x(i, j)^T \left(\begin{bmatrix} \bar{A}_{11,kq}^T \\ \bar{A}_{12,kq}^T \end{bmatrix} P_k \begin{bmatrix} \bar{A}_{11,kq} & \bar{A}_{12,kq} \end{bmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,kq}^T \\ \bar{A}_{22,kq}^T \end{bmatrix} Q_k \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,kq} & \bar{A}_{22,kq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\beta}_k P_k & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_k Q_k \end{bmatrix} \right) x(i, j)
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{11,kq} &= A_{11,k} + B_{1,k} K_{h,q}, \bar{A}_{12,kq} = A_{12,k} + B_{1,k} K_{v,q}, \\
 \bar{A}_{21,kq} &= A_{21,k} + B_{2,k} K_{h,q}, \bar{A}_{22,kq} = A_{22,k} + B_{2,k} K_{v,q}.
 \end{aligned}$$

易知，若下式成立

$$\begin{bmatrix} -\bar{\beta}_k P_k & 0 & \bar{A}_{11,k}^T & \bar{A}_{21,k}^T \\ * & -\bar{\beta}_k Q_k & \bar{A}_{12,k}^T & \bar{A}_{22,k}^T \\ * & * & -X_k & 0 \\ * & * & * & -Y_k \end{bmatrix} < 0 \tag{3-30}$$

则 $\Delta V_k(i, j) - \beta_k V_k(i, j) < 0$ 成立。

根据 Young 氏不等式，对任意正定对称矩阵 X, Y ， $-XYX \leq Y^{-1} - 2X$ 恒成立。由 $K_{h,q} X_q = M_q$ ， $K_{v,q} Y_q = N_q$ ，将式(3-30)中矩阵左右两侧同乘对角阵 $\text{diag}\{X_q, Y_q, I, I\}$ ，可得式(3-30)与定理 3.2 中(3-28)等价。因此，由(3-28)可得 $\Delta V_k(i, j) < \beta_k V_k(i, j)$ ，进而下式成立

$$V_k^h(i+1, j) + V_k^v(i, j+1) < \bar{\beta}_k (V_k^h(i, j) + V_k^v(i, j)) \tag{3-31}$$

类比推导(3-18)过程，可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=d_l+r(d_l)} V_k(i, j) &< \bar{\beta}_k \sum_{i+j=d_l+r(d_l)-1} V_k(i, j) \\
 &< \dots \\
 &< \bar{\beta}_k^{r(d_l)} \sum_{i+j=d_l} V_k(i, j)
 \end{aligned} \tag{3-32}$$

综合以上两种情况，根据式(3-29)及(3-32)，在区间 $D \in [d_l, d_{l+1})$ 内，可得

$$\sum_{i+j=D} V_k(i, j) < \bar{\alpha}_k^{D-d_l} \left(\frac{\bar{\beta}_k}{\bar{\alpha}_k} \right)^{r(d_l)} \sum_{i+j=d_l} V_k(i, j) \tag{3-33}$$

根据式(3-19)，下式成立

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i+j=D} V_{\sigma(d)}(i, j) \\
 & < \mu \bar{\alpha}_{\sigma(d_i)}^{D-d_i} (\varpi_k)^{r(d_i)} \sum_{i+j=d_i} V_{\sigma(d_{i-1})}(i, j) \\
 & < \dots \\
 & < \mu^{N_\sigma} \prod_{k=1}^M \bar{\alpha}_k^{T_k(d_0, D)} \varpi_k^{T_{m,k}(d_0, D)} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j) \\
 & = \exp \left\{ N_\sigma \ln \mu + \sum_{k \in \mathcal{M}} T_{m,k}(d_0, D) \ln \varpi_k + \sum_{k \in \mathcal{M}} T_k(d_0, D) \ln \bar{\alpha}_k \right\} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j) \\
 & < \exp \left\{ N_\sigma \ln \mu + T_{m(d_0, D)} \ln \varpi_{\max} + T_{\uparrow(d_0, D)} \ln \bar{\alpha}_{\uparrow} + T_{\downarrow(d_0, D)} \ln \bar{\alpha}_{\downarrow} \right\} \sum_{i+j=d_0} V_{\sigma(d_0)}(i, j)
 \end{aligned} \tag{3-34}$$

其中 $\varpi_k = (\bar{\beta}_k / \bar{\alpha}_k)$, $T_{m,k}(d_0, D)$ 为第 k 个子系统在区间 $[d_0, D)$ 内的异步持续时间, $T_{m(d_0, D)}$ 为区间 $[d_0, D)$ 内的异步持续时间总和。

由于 $D - d_0 = T_{m(d_0, D)} + T_{n(d_0, D)}$, $T_{n(d_0, D)} = T_{\uparrow(d_0, D)} + T_{\downarrow(d_0, D)}$, $T_{\uparrow(d_0, D)} / T_{\downarrow(d_0, D)} \leq \gamma$, 且 $T_{m(d_0, D)} / T_{n(d_0, D)} \leq \lambda$, 通过推导可得

$$\begin{aligned}
 & \exp \left\{ N_\sigma \ln \mu + T_{m(d_0, D)} \ln \varpi_{\max} + T_{\uparrow(d_0, D)} \ln \bar{\alpha}_{\uparrow} + T_{\downarrow(d_0, D)} \ln \bar{\alpha}_{\downarrow} \right\} \\
 & < \exp \left\{ N_\sigma \ln \mu + \frac{(D - d_0)}{(1 + \lambda)(1 + \gamma)} \left((1 + \gamma) \lambda \ln \varpi + \ln \bar{\alpha}_{\downarrow} + \gamma \ln \bar{\alpha}_{\uparrow} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3-35}$$

将式(3-29)代入(3-35)、(3-34), 按照同步切换情况的分析步骤, 可得出异步切换镇定结果。由于过程相似, 此处省去后续分析过程。至此证毕。

3.4 仿真算例

为证明所提方法的有效性, 本节给出相应的仿真算例。考虑由两个子系统构成的切换系统

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11,1} & A_{12,1} \\ \hline A_{21,1} & A_{22,1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ \hline 1 & 0.8 & 1.1 \end{array} \right], B_1 = \left[\begin{array}{c} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \\
 A_2 &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11,2} & A_{12,2} \\ \hline A_{21,2} & A_{22,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1.5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 0.5 & 0.9 & -1 \end{array} \right], B_2 = \left[\begin{array}{c} B_{1,2} \\ B_{2,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

其边界条件为

$$x^h(0, j) = \begin{cases} [6, 7]^T & 0 \leq j \leq 15 \\ 0, & j \geq 15 \end{cases}, \quad x^v(i, 0) = \begin{cases} 8 & 0 \leq i \leq 15 \\ 0, & i \geq 15 \end{cases}$$

从系统矩阵中可知, 第一个子系统不稳定且不可控。选择参数 $\bar{\alpha}_1 = 1.25$,

$\bar{\alpha}_2 = 0.75$ ，通过解 LMI(3-8)，可得相应矩阵和控制增益如下：

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} 30.3943 & -35.6589 \\ -35.6589 & 46.4408 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = 82.6261 \\ M_1 &= \begin{bmatrix} -203.4243 & 257.0811 \\ 142.6356 & -185.7633 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} -82.6261 \\ -82.6261 \end{bmatrix} \\ K_{h,1} &= \begin{bmatrix} -2.0000 & 4.0000 \\ -0.0000 & -4.0000 \end{bmatrix}, \quad K_{v,1} = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} \\ X_2 &= \begin{bmatrix} 81.2642 & 22.3315 \\ 22.3315 & 8.1746 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 41.9933 \\ M_2 &= \begin{bmatrix} -68.8438 & -17.6288 \\ -41.7563 & -16.9505 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 62.2909 \\ -48.8173 \end{bmatrix} \\ K_{h,2} &= \begin{bmatrix} -1.0210 & 0.6328 \\ 0.2246 & -2.6870 \end{bmatrix}, \quad K_{v,2} = \begin{bmatrix} 1.4834 \\ -1.1625 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同时可得 $\mu = 46.88$ 。选取 $\gamma = 0.25$ ， $D = 110$ ， $c = 0.0095$ ，可得 $N^* = 5.04$ 。令 $N_\sigma = 5$ 。一个符合条件的切换信号如图 3-1 所示。

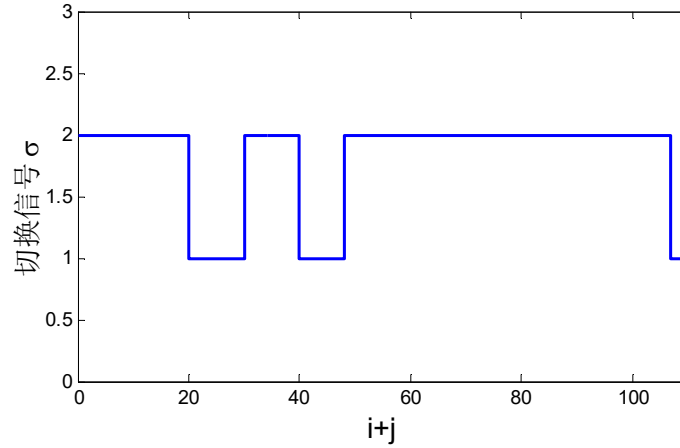


图 3-1 切换信号

Fig. 3-1 The trajectory of switching signal

水平方向状态 $x^h(i, j) \in R^2$ 仿真结果如图 3-2 和图 3-3 所示。竖直方向状态 $x^v(i, j) \in R^1$ 的仿真轨迹如图 3-4 所示。由仿真结果可以看出，当不稳定子系统处于工作模态时，闭环系统状态有发散的趋势。然而，在所设计的切换调节信号下，在稳定子系统的收敛情况下，系统发散最终得到补偿，闭环系统最终收敛到平衡点处。

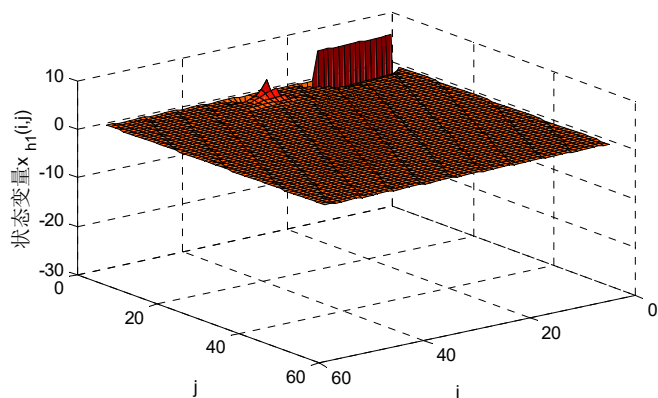


图 3-2 状态变量 $x_1^h(i, j)$ 轨迹

Fig. 3-2 The trajectory of $x_1^h(i, j)$

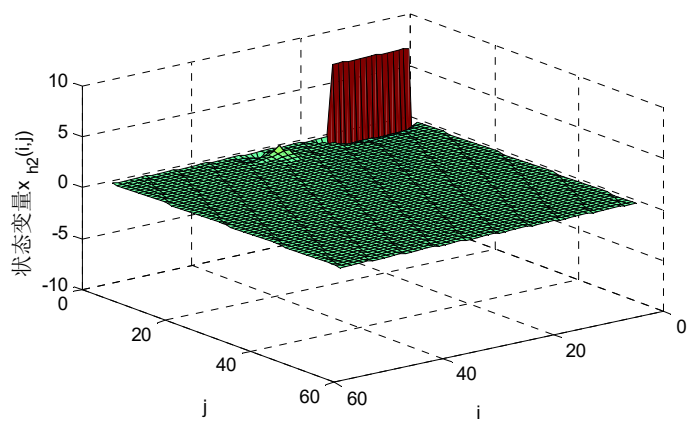


图 3-3 状态变量 $x_2^h(i, j)$ 轨迹

Fig. 3-3 The trajectory of $x_2^h(i, j)$

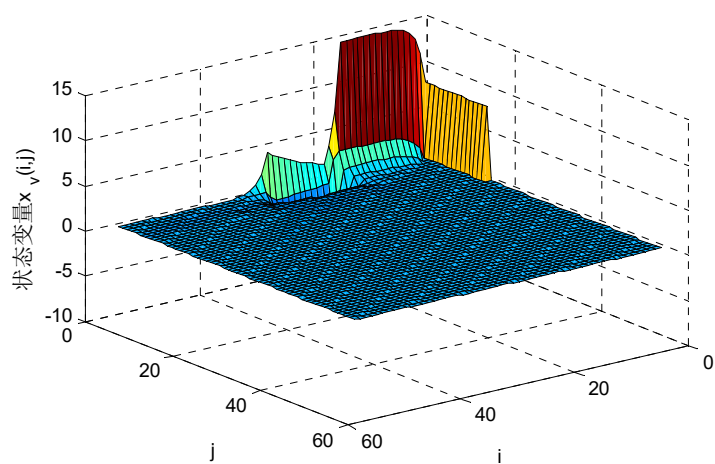


图 3-4 状态变量 $x^v(i, j)$ 轨迹

Fig. 3-4 The trajectory of $x^v(i, j)$

现有文献针对切换系统的研究方法，例如平均驻留时间方法，仅仅通过限制系统的切换频率来保证系统不会因为切换次数过多造成系统不稳定。然而，如果不限制不稳定子系统的运行时间，则难以保证整个切换系统的稳定性。本节同样考虑各子系统满足一定的驻留时间，限制单位时间内的切换次数，但未对不稳定子系统的运行时间加以限制，仿真结果见图 3-5~图 3-7。从图中可看出，系统状态在仿真时间段内出现较大发散情况。

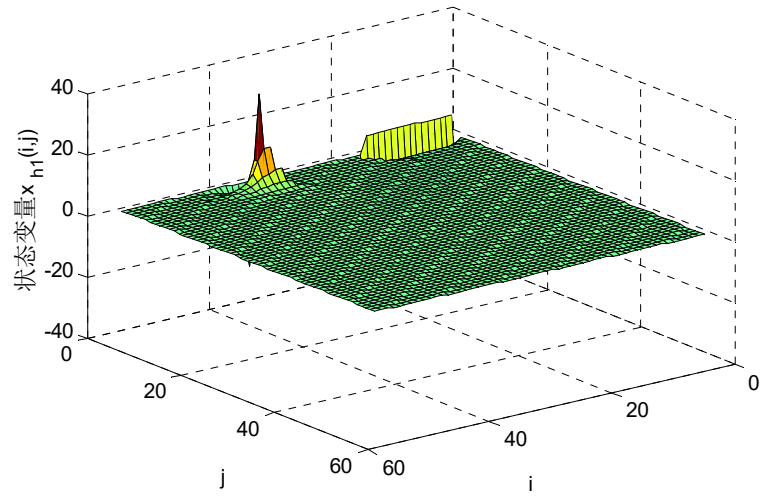


图 3-5 限制驻留时间的状态变量 $x_1^h(i, j)$ 轨迹

Fig. 3-5 The trajectory of $x_1^h(i, j)$ under dwell time condition

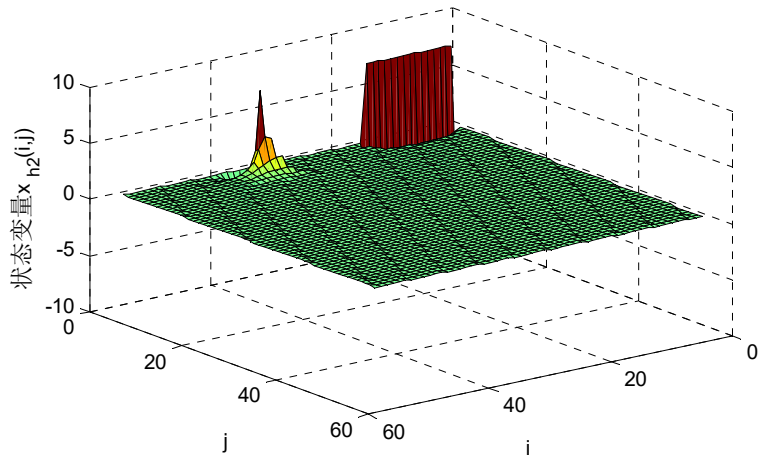
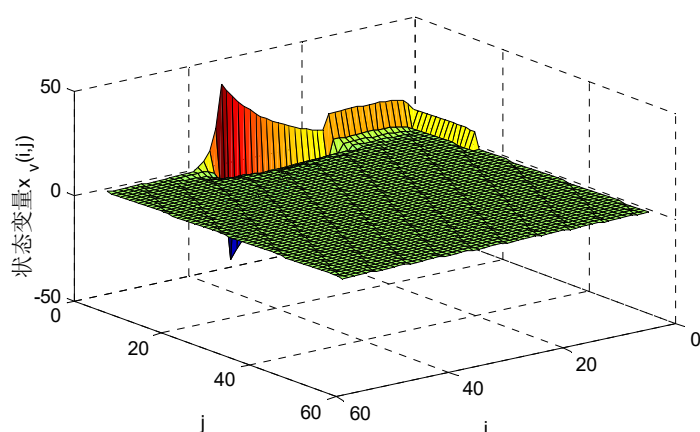


图 3-6 限制驻留时间的状态变量 $x_2^h(i, j)$ 轨迹

Fig. 3-6 The trajectory of $x_2^h(i, j)$ under dwell time condition

图 3-7 限制驻留时间的状态变量 $x^v(i, j)$ 轨迹Fig. 3-7 The trajectory of $x^v(i, j)$ under dwell time condition

3.5 本章小结

本章考虑了一类具有 Roesser 模型的 2D 离散切换系统稳定性分析问题。所考虑切换系统含有不稳定且不可控的子系统，因此，无法仅通过设计反馈控制器的常规方法保证系统稳定。通过调节切换次数以及不稳定模态与稳定模态运行时间比率，可利用稳定子系统的收敛特性补偿不稳定子系统的有界发散。结合以上切换调节方法，给出了系统同步切换下稳定性条件，并通过求解线性矩阵不等式得到镇定控制器增益。并进一步将所提基于切换调节镇定方法推广到系统异步切换条件情况，给出了相应结果推论。最后通过仿真算例验证了所提方法的正确性。

第4章 基于切换调节的时滞异步切换中立系统镇定控制

4.1 引言

在实际的物理系统中, 由于信息与物质传输过程需要一定的时间, 在这一过程中, 信息与物质的传输时间的差异常常造成时滞现象。时滞系统广泛存在于各类实际工程系统中, 例如板带轧制系统, 电力系统, 网络化控制系统等。在第二章、第三章所考虑的异步切换现象, 本质上就是系统模态与控制器在切换过程中存在时滞而形成的异步现象。时滞的存在往往使得系统性能下降, 甚至造成系统无法稳定运行, 引发一系列生产安全事故。例如 1986 年发生在乌克兰的切尔诺贝利核电站爆炸事故, 当工作人员启动紧急停机操作时, 由于控制棒插入燃料堆过程存在一定的时延, 短时间内无法降低燃料棒的飙升的功率, 加上核电站原本的设计缺陷, 最终造成了人类史上最严重的核事故。因此, 关于时滞系统的控制研究, 无论从理论基础还是工程应用层面, 都具有重要的研究意义。这也引起了研究学者的广泛关注。

在针对时滞系统的研究中, Lyapunov-Krasovskii 泛函和 Lyapunov-Razumikhin 引理等方法被广泛采用, 研究者通过结合线性矩阵不等式、自适应控制、动态增益等控制方法, 提出了一系列相应的研究成果^{[79]-[86]}。例如在文献[80]中, 作者针对具有下三角型结构的非线性时滞系统, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 给出了严格反馈结构非线性系统递归控制器设计方法。考虑到控制器递归设计中虚拟控制器设计的计算复杂度, 文献[83]、[84]提出基于动态增益的控制器设计方法, 不仅降低了递归设计的复杂度, 同时放松了系统非线性项的限制条件。

中立型时滞系统是一类重要的时滞系统。在中立时滞系统中, 时滞不仅仅存在于系统状态中, 同时还存在于状态的导数中, 其中状态导数中的时滞称为中立时滞。该类型的系统常常出现在传输线振荡器^[87], 部分元等效电路^[88]等应用系统中。在这类系统中, 中立时滞的存在使得系统的控制较传统仅含有状态时滞的系统更为复杂, 因而吸引了众多研究学者, 并针对中立时滞系统中的各类问题给出了一系列研究成果^{[89]-[91]、[93]}。

当切换系统的子系统为中立时滞系统时, 称这类系统为中立时滞切换系统。对切换系统而言, 由于切换信号在系统稳定性等方面具有重要的影响作用, 因而, 现

有文献提出了众多基于切换信号的切换控制方法。其中,平均驻留时间(Average dwell time, ADT)方法是一种被广泛应用的慢切换条件。例如,基于平均驻留时间方法,文献[92]考虑了带有混合时延的中立切换系统指数稳定分析问题。然而,从平均驻留时间定义可知,各子系统的切换次数为区间长度的仿射函数^{[62][63]}。以此来限制切换系统的切换频率,确保系统慢切换条件。另一方面,当前文献中采用这类方法时往往需要各子系统均渐进稳定^[47],且较少考虑异步切换情况。针对中立切换系统而言,考虑含有不稳定模态下切换信号的设计与系统镇定控制仍鲜有研究。

基于上述研究现状,本章研究了中立切换时滞系统异步切换下的镇定问题。基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析方法分析了时延对系统稳定性的影响,结合线性矩阵不等式求解方法,完成了时延及异步切换条件下镇定控制器设计。通过控制器与切换信号协同设计,保证了切换系统存在不稳定不可控切换子系统情况下系统的全局渐近稳定性。

4.2 系统描述与预备知识

考虑如下微分方程描述的中立时滞切换系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}x(t-r) + C_{\sigma(t)}\dot{x}(t-h) + D_{\sigma(t)}u(t) \\ x(\theta) &= \psi(\theta), \forall \theta \in [-H, 0], H = \max\{t, h\} \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$ 分别表示系统状态和系统控制输入。 $\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{P}$ 表示切换信号。切换信号从集合 $\mathcal{P} := \{1, 2, \dots, p\}$ 中选择激活的子系统, p 代表子系统的个数。 h 和 r 分别表示状态时滞和中立时滞。 $\psi(\theta)$ 是连续可微函数,表示系统在区间 $[-H, 0]$ 上的初始状态向量。对任意 $i \in \mathcal{P}$, A_i , B_i , C_i , D_i 为具有适当维数的常实数矩阵。

本章中,不考虑系统(4-1)中的 Zeno 行为以及脉冲情况。系统的切换序列表示为

$$\mathfrak{S}_p = \{(\sigma(t_0), t_0), \dots, (\sigma(t_k), t_k), \dots \mid \sigma(t_k) \in \mathcal{P}, k = 0, 1, \dots\} \quad (4-2)$$

其中 t_0 表示初始时间。当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,第 $\sigma(t_k)$ 个子系统处于工作状态, t_k 表示切换时刻。

由于异步切换的存在,系统控制器为

$$u(t) = K_{\sigma(t-\tau(t))}x(t) \quad (4-3)$$

其中 $\tau(t)$ 为切换时延,满足 $0 < \tau(t) < \tau_d < t_{k+1} - t_k, \forall k \in N$ 。因此,由系统(4-1)和控制输入(4-3)所组成的闭环系统可表述为

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} + D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t-\tau(t))})x(t) + B_{\sigma(t)}x(t-r) + C_{\sigma(t)}\dot{x}(t-h) \quad (4-4)$$

为完成切换信号以及控制器设计, 提出以下假设条件等预备知识

假设 4.1: 对任意 $i, j \in \mathcal{P}$, 存在常数 $\mu_{ij} > 0$ 使得当子系统 i 切换到子系统 j 时, 各子系统对应的 Lyapunov 函数满足如下关系:

$$V_j(x(t)) \leq \mu_{ij} V_i(x(t)) \quad \forall x(t) \in R^n \quad (4-5)$$

不同于传统平均驻留时间切换信号分析方法, 本章考虑另外一类切换信号设计方法。下面给出本章关于切换信号的相关预备知识。

定义 $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为一类 \mathcal{K}_∞ 函数, 即连续单调严格递增, 且满足 $h(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$ 。

令 $N_\sigma(0, t)$ 表示系统在时间区间 $(0, t)$ 内的切换次数, 则定义系统的 h -切换频率为

$$v_i(t) := \frac{N_{\sigma(t)}}{h(t)}, \quad t > 0 \quad (4-6)$$

与之前章节类似, 根据系统异步切换过程子系统与控制器是否匹配, 将区间分为异步切换阶段 \mathcal{M}_1 和正常运行阶段 \mathcal{M}_2 。在系统正常运行阶段, 定义切换信号第 k 次运行时间为

$$S_{k+1} = t_{k+1} - (t_k + \tau(t_k)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4-7)$$

对任意 $j \in \mathcal{P}$, 定义子系统 j 的异步切换阶段 h -持续频率为

$$\eta_1^h(j, t) := \sum_{i: \sigma(t_i)=j} \frac{\tau(t_i)}{h(t)}, \quad t > 0 \quad (4-8)$$

同时, 定义子系统 j 的正常运行阶段 h -持续频率为

$$\eta_2^h(j, t) := \sum_{i: \sigma(t_i)=j} \frac{S_{i+1}}{h(t)}, \quad t > 0 \quad (4-9)$$

同第 2 章, 令 $E(\mathcal{P})$ 表示有序对 (m, n) 构成的集合, 有序对 (m, n) 表示从子系统 m 到子系统 n 的切换。因此 $E(\mathcal{P})$ 表示系统所有可能的切换集合。对任意 $(m, n) \in E(\mathcal{P})$, 定义从子系统 m 到子系统 n 的转换频率为

$$\rho_{mn}(t) := \frac{\sharp\{m \rightarrow n\}_t}{N_\sigma}, \quad t > 0 \quad (4-10)$$

其中 $\sharp\{m \rightarrow n\}_t$ 表示在时间区间 $[0, t)$ 内, 从子系统 m 到子系统 n 的切换次数。

针对上述定义, 给出其相关渐进上界为

$$\hat{v}_h := \limsup_{t \rightarrow +\infty} v_h(t) \quad (4-11)$$

$$\hat{\rho}_{mn} := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho_{mn}(t) \quad (4-12)$$

$$\hat{\eta}_1^h(j) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \eta_1^h(j, t) \quad (4-13)$$

$$\hat{\eta}_2^h(j) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \eta_2^h(j, t) \quad (4-14)$$

另外, 给出 $\eta_2^h(j, t)$ 的渐进下界为

$$\tilde{\eta}_2^h(j) := \liminf_{t \rightarrow +\infty} \eta_2^h(j, t) \quad (4-15)$$

定义

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m1} &= \{i \in \mathcal{P} \mid \sigma(t) = i, \forall t \in [t_k, t_k + \tau(t_k)), k = 0, 1, \dots\} \\ \mathcal{P}_{m2} &= \{i \in \mathcal{P} \mid \sigma(t) = i, \forall t \in [t_k + \tau(t_k), t_{k+1}), k = 0, 1, \dots\} \end{aligned}$$

即 \mathcal{P}_{m1} 表示在异步切换阶段子系统的集合, \mathcal{P}_{m2} 表示在正常运行阶段子系统集合。另外, 令 \mathcal{P}_{m2}^s 和 \mathcal{P}_{m2}^u 分别表示在正常运行阶段稳定子系统和不稳定子系统所构成的集合。根据以上定义, 易知 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{m1} = \mathcal{P}_{m2} = \mathcal{P}_{m2}^s \cup \mathcal{P}_{m2}^u$ 。

下面给出与本章内容相关的两条引理。

引理 4.1^[94]: 对任意对称矩阵 $R > 0$ 以及向量函数 $x: [a, b] \rightarrow R^n$, 下式成立

$$(a-b) \int_a^b x^T(s) R x(s) ds \geq \left(\int_a^b x(s) ds \right)^T R \left(\int_a^b x(s) ds \right) \quad (4-16)$$

引理 4.2^[95]: 对任意对称矩阵 $R > 0$ 以及向量函数 $x: [a, b] \rightarrow R^n$, 下式成立

$$\int_a^b \int_\theta^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds du \geq \frac{1}{(b-a)^2} (2\varpi_1^T R \varpi_1 + 4\varpi_2^T R \varpi_2) \quad (4-17)$$

其中

$$\begin{aligned} \varpi_1^T &= (b-a)x^T(b) - \int_a^b x^T(s) ds \\ \varpi_2^T &= -\frac{(b-a)}{2} x^T(b) - \int_a^b x^T(s) ds + \frac{3}{(b-a)} \int_a^b \int_\theta^b x^T(s) ds d\theta \end{aligned}$$

4.3 主要结果

基于上一节中系统模型和预备知识, 本节直接给出本章的主要结果。以下给出本章的主要定理及证明。

定理 4.1: 对于中立时滞切换系统(4-1), 令 α_i, β_i 为给定常数, 其中 $i \in \mathcal{P}_{m1}$ 时, $\beta_i > 0$; $i \in \mathcal{P}_{m2}^s$ 时, $\alpha_i > 0$; $i \in \mathcal{P}_{m2}^u$ 时, $\alpha_i < 0$ 。对任意 $i, j \in \mathcal{P}, i \neq j$, 如果存在正定矩阵 $\bar{P}_i, \bar{Q}_i, \bar{R}_i, \bar{S}_i, \bar{M}_i, \bar{W}_i$ 以及矩阵 U_i , 使得

$$\bar{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{i,11} & \bar{\Pi}_{i,12} & C_i \bar{W}_i & \frac{1}{h} e^{\frac{-\alpha_i h}{2}} \bar{M}_i & \bar{\Pi}_{i,15} \\ * & \bar{\Pi}_{i,22} & 0 & 0 & \bar{W}_i^T B_i^T \\ * & * & -e^{-\alpha_i h} \bar{S}_i & 0 & \bar{W}_i^T C_i^T \\ * & * & * & -\frac{1}{h} e^{-\alpha_i h} \bar{M}_i & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Pi}_{i,55} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-18)$$

同时, 存在正定矩阵 \bar{P}_j 、 \bar{Q}_j 、 \bar{R}_j 、 \bar{S}_j 、 \bar{M}_j 和矩阵 U_j , 使得

$$\bar{\Psi}_j = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{j,11} & 0 & \frac{6(\alpha_j + \beta_j)}{r^2} e^{a_{r,j}} \bar{R}_j & 0 & \bar{\Psi}_{j,15} \\ * & \bar{\Psi}_{j,22} & \frac{12(\alpha_j + \beta_j)}{r^3} e^{a_{r,j}} \bar{R}_j & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Psi}_{j,33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Psi}_{j,44} & \bar{\Psi}_{j,45} \\ * & * & * & * & \bar{\Psi}_{j,55} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-19)$$

其中

$$\bar{\Pi}_{i,11} = \alpha_i \bar{P}_i + \bar{Q}_i - \frac{1}{r} \bar{R}_i - \frac{1}{h} \bar{M}_i + A_i \bar{W}_i + \bar{W}_i^T A_i^T + D_i U_i + U_i^T D_i^T$$

$$\bar{\Pi}_{i,12} = \frac{1}{r} e^{\frac{-\alpha_i r}{2}} \bar{R}_i + B_i \bar{W}_i$$

$$\bar{\Pi}_{i,15} = \bar{P}_i + \bar{W}_i^T A_i^T + U_i^T D_i^T - \bar{W}_i$$

$$\bar{\Pi}_{i,22} = e^{-\alpha_i r} \left(-\frac{1}{r} \bar{R}_i - \bar{Q}_i \right)$$

$$\bar{\Pi}_{i,55} = r \bar{R}_i + \bar{S}_i + h \bar{M}_i - \bar{W}_i^T - \bar{W}_i$$

$$\bar{\Psi}_{j,11} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{j,11} & \bar{\Omega}_{j,12} & C_j \bar{W}_j & \frac{1}{h} e^{\frac{-\alpha_j h}{2}} \bar{M}_j & \bar{\Omega}_{j,15} \\ * & \bar{\Omega}_{j,22} & 0 & 0 & \bar{W}_j^T B_j^T \\ * & * & -e^{-\alpha_j h} \bar{S}_j & 0 & \bar{W}_j^T C_j^T \\ * & * & * & -\frac{1}{h} e^{-\alpha_j h} \bar{M}_j & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Omega}_{j,55} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}_{j,11} &= -\beta_j \bar{P}_j + \bar{Q}_j - \frac{1}{r} \bar{R}_j - \frac{1}{h} \bar{M}_j - 3(\alpha_j + \beta_j) e^{a_{r,j}} \bar{R}_j - 3(\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} \bar{M}_j + A_j \bar{W}_i + \bar{W}_i^T A_j^T + D_j U_i + U_i^T D_j^T \\
 \bar{\Omega}_{j,12} &= \frac{1}{r} e^{\frac{-\alpha_j r}{2}} \bar{R}_j + B_j \bar{W}_i \\
 \bar{\Omega}_{j,15} &= \bar{P}_j + \bar{W}_i^T A_j^T + U_i^T D_j^T - \bar{W}_i \\
 \bar{\Omega}_{j,22} &= e^{-\alpha_j r} \left(-\frac{1}{r} \bar{R}_j - \bar{Q}_j \right) \\
 \bar{\Omega}_{j,55} &= r \bar{R}_j + \bar{S}_j + h \bar{M}_j - \bar{W}_i^T - \bar{W}_i \\
 \bar{\Psi}_{j,15} &= \frac{6}{h^2} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} \bar{M}_j \\
 \bar{\Psi}_{j,22} &= (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{r,j}} \left(-\frac{1}{r} \bar{Q}_j - \frac{6}{r^2} \bar{R}_j \right) \\
 \bar{\Psi}_{j,33} &= -\frac{36}{r^4} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{r,j}} \bar{R}_j \\
 \bar{\Psi}_{j,44} &= (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} \left(-\frac{1}{h} \bar{S}_j - \frac{6}{h^2} \bar{M}_j \right) \\
 \bar{\Psi}_{j,45} &= \frac{12}{h^3} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} \bar{M}_j \\
 \bar{\Psi}_{j,55} &= -\frac{36}{h^4} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} \bar{M}_j
 \end{aligned}$$

则当系统切换信号满足条件

$$\check{v}_h := \liminf_{t \rightarrow +\infty} v_h(t) > 0 \quad (4-20)$$

以及

$$\hat{v}_h \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \hat{\rho}_{mn} \ln \mu_{mn} + \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^h} |\alpha_i| \hat{\eta}_2^h(i) - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^h} |\alpha_i| \check{\eta}_2^h(i) + \sum_{i \in \mathcal{P}} |\beta_i| \hat{\eta}_1^h(i) < 0 \quad (4-21)$$

时，控制器(4-3)可使得闭环系统(4-4)全局渐进稳定，且控制器增益可通过下式获得

$$K_i = U_i \bar{W}_i^{-1} \quad (4-22)$$

证明：考虑 $\forall (i, j) \in E(\mathcal{P})$ 。由于异步切换现象存在，当系统切换到子系统 j 时，子系统 i 对应的控制器 $K_i x(t)$ 仍将工作 $\tau(t_{k+1})$ 的时间，其中 t_{k+1} 是任意使得 $\sigma(t_{k+1}) = j$ 的切换时刻。因此，对 $\forall i, j \in \mathcal{P}, i \neq j$ ，闭环系统可根据时间区间写成如下形式：

$$\dot{x} = \begin{cases} (A_0 + D_0 K_0)x(t) + B_0 x(t-r) + C_0 \dot{x}(t-h), & t \in [t_0, t_1) \\ (A_i + D_i K_i)x(t) + B_i x(t-r) + C_i \dot{x}(t-h), & t \in [t_k + \tau(t_k), t_{k+1}) \\ (A_j + D_j K_j)x(t) + B_j x(t-r) + C_j \dot{x}(t-h), & t \in [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau(t_{k+1})) \end{cases} \quad (4-23)$$

其中 $k \in N^+$ ， $\sigma(t_k) = i$ ， $\sigma(t_{k+1}) = j$ 。

考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$\begin{aligned}
 V_{\sigma(t)}(t) &= x^T(t)P_{\sigma(t)}x(t) + \int_{t-r}^t e^{\alpha_i(s-t)} x^T(s)Q_{\sigma(t)}x(s)ds \\
 &\quad + \int_{t-r}^t \int_{\theta}^t e^{\alpha_i(s-t)} \dot{x}^T(s)R_{\sigma(t)}\dot{x}(s)d\theta + \int_{t-h}^t e^{\alpha_i(s-t)} \dot{x}^T(s)S_{\sigma(t)}\dot{x}(s)ds \\
 &\quad + \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t e^{\alpha_i(s-t)} \dot{x}^T(s)M_{\sigma(t)}\dot{x}(s)d\theta
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

其中 $P_{\sigma(t)}$, $Q_{\sigma(t)}$, $R_{\sigma(t)}$, $S_{\sigma(t)}$ 以及 $M_{\sigma(t)}$ 为正定矩阵, 其具体形式将在下文给出。

根据系统状态轨迹(4-23), 考虑如下两种情况:

第一种情况, $t \in [t_k + \tau(t_k), t_{k+1})$, $\sigma(t) = i \in \mathcal{P}$, 即第 i 个子系统处于运行状态, 且控制器为该子系统相匹配。沿(4-23)对 Lyapunov 函数求导, 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i(t) &+ \alpha_i V_i \\
 &= 2x^T(t)P_i\dot{x}(t) + \alpha_i x^T(t)P_i x(t) + x^T(t)Q_i x(t) - e^{-\alpha_i r} x^T(t-r)Q_i x(t-r) \\
 &\quad + r\dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) - \int_{t-r}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\alpha_i(\theta-t)}R_i\dot{x}(\theta)d\theta + \dot{x}^T(t)S_i\dot{x}(t) \\
 &\quad - e^{-\alpha_i h} \dot{x}^T(t-h)S_i\dot{x}(t-h) + h\dot{x}^T(t)M_i\dot{x}(t) \\
 &\quad - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\alpha_i(\theta-t)}M_i\dot{x}(\theta)d\theta
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

根据引理 4.1, 下式成立

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-r}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\alpha_i(\theta-t)}R_i\dot{x}(\theta)d\theta \\
 & \leq -\frac{1}{r} \left(\int_{t-r}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\frac{\alpha_i(\theta-t)}{2}} d\theta \right) R_i \left(\int_{t-r}^t \dot{x}(\theta)e^{\frac{\alpha_i(\theta-t)}{2}} d\theta \right) \\
 & = -\frac{1}{r} (x^T(t) - e^{\frac{-\alpha_i r}{2}} x^T(t-r)) R_i (x(t) - e^{\frac{-\alpha_i r}{2}} x(t-r))
 \end{aligned} \tag{4-26}$$

类似可得

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\alpha_i(\theta-t)}M_i\dot{x}(\theta)d\theta \\
 & \leq -\frac{1}{h} (x^T(t) - e^{\frac{-\alpha_i h}{2}} x^T(t-h)) M_i (x(t) - e^{\frac{-\alpha_i h}{2}} x(t-h))
 \end{aligned} \tag{4-27}$$

除此之外, 对任意具有合适维数的矩阵 W_i , 根据(4-23), 可得

$$-2[x^T(t), \dot{x}^T(t)]W_i^T[\dot{x}(t) - (A_i + D_i K_i)x(t) - B_i x(t-r) - C_i \dot{x}(t-h)] = 0 \tag{4-28}$$

将(4-26)-(4-28)代入(4-25), 易得

$$\dot{V}_i(t) + \alpha_i V_i \leq \omega^T(t)\Pi_i\omega(t) \tag{4-29}$$

其中

$$\omega^T(t) = [x^T(t), x^T(t-r), \dot{x}^T(t-h), x^T(t-h), \dot{x}^T(t)]$$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Pi_{i,11} & \Pi_{i,12} & W_i^T C_i & \frac{1}{h} e^{\frac{-\alpha_i h}{2}} M_i & \Pi_{i,15} \\ * & \Pi_{i,22} & 0 & 0 & B_i^T W_i \\ * & * & -e^{-\alpha_i h} S_i & 0 & C_i^T W_i \\ * & * & * & -\frac{1}{h} e^{-\alpha_i h} M_i & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{i,55} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{i,11} = \alpha_i P_i + Q_i - \frac{1}{r} R_i - \frac{1}{h} M_i + W_i^T (A_i + D_i K_i) + (A_i + D_i K_i)^T W_i$$

$$\Pi_{i,12} = \frac{1}{r} e^{\frac{-\alpha_i r}{2}} R_i + W_i^T B_i$$

$$\Pi_{i,15} = P_i + (A_i + D_i K_i)^T W_i - W_i^T$$

$$\Pi_{i,22} = e^{-\alpha_i r} \left(-\frac{1}{r} R_i - Q_i \right)$$

$$\Pi_{i,55} = r R_i + S_i + h M_i - W_i^T - W_i$$

为了利用 LMI 方法解决本章所考虑问题, 定义 $\bar{W}_i = W_i^{-1}$, 同时在不等式 $\Pi_i < 0$ 左右两侧分别乘以对角阵 $\text{diag}\{\bar{W}_i^T, \dots, \bar{W}_i^T\}$ 和 $\text{diag}\{\bar{W}_i, \dots, \bar{W}_i\}$ 。令 $K_i = U_i \bar{W}_i^{-1}$, $\bar{P}_i = \bar{W}_i^T P_i \bar{W}_i$, $\bar{Q}_i = \bar{W}_i^T Q_i \bar{W}_i$, $\bar{R}_i = \bar{W}_i^T R_i \bar{W}_i$, $\bar{S}_i = \bar{W}_i^T S_i \bar{W}_i$, $\bar{M}_i = \bar{W}_i^T M_i \bar{W}_i$, 验证可得等式 $\Pi_i < 0$ 与定理 4.1 中不等式(4-18)等价。因此, 若(4-18)成立, 则

$$\dot{V}_i + \alpha_i V_i \leq 0 \quad (4-30)$$

第二种情况, $t \in [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau(t_{k+1}))$, $\sigma(t_{k+1}^-) = i, \sigma(t_{k+1}^+) = j, i, j \in \mathcal{P}, i \neq j$, 即第 j 个子系统已切换到运行状态, 但第 i 个子系统对应的控制器仍未进行切换, 系统模态与控制器处于异步阶段。沿(4-23)对 Lyapunov 函数求导, 可得

$$\begin{aligned} & \dot{V}_j - \beta_j V_j \\ & \leq 2x^T(t)P_j\dot{x}(t) - \beta_j x^T(t)P_jx(t) + x^T(t)Q_jx(t) \\ & \quad - e^{-\alpha_j r} x^T(t-r)Q_jx(t-r) + r\dot{x}^T(t)R_j\dot{x}(t) \\ & \quad - \int_{t-r}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\alpha_j(\theta-t)}R_j\dot{x}(\theta)d\theta + \dot{x}^T(t)S_j\dot{x}(t) \\ & \quad - e^{-\alpha_j h} \dot{x}^T(t-h)S_j\dot{x}(t-h) + h\dot{x}^T(t)M_j\dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(\theta)e^{\alpha_j(\theta-t)}M_j\dot{x}(\theta)d\theta \\ & \quad - (\alpha_j + \beta_j)e^{a_{r,j}} \left(\int_{t-r}^t x^T(s)Q_jx(s)ds + \int_{t-r}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)R_j\dot{x}(s)dsd\theta \right) \\ & \quad - (\alpha_j + \beta_j)e^{a_{h,j}} \left(\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)S_j\dot{x}(s)ds + \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)M_j\dot{x}(s)dsd\theta \right) \end{aligned} \quad (4-30)$$

其中当 $j \in \mathcal{P}_{m_2}^s$ 时, $a_{r,j} = -\alpha_j r$, $a_{h,j} = -\alpha_j h$; 当 $j \in \mathcal{P}_{m_2}^u$ 时, $a_{r,j} = a_{h,j} = 0$ 。根据引理 4.1, 可得

$$\begin{aligned}
 & -\int_{t-r}^t \dot{x}^T(\theta) e^{\alpha_j(\theta-t)} R_j \dot{x}(\theta) d\theta \\
 & \leq -\frac{1}{r} (x^T(t) - e^{\frac{-\alpha_j r}{2}} x^T(t-r)) R_j (x(t) - e^{\frac{-\alpha_j r}{2}} x(t-r))
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

$$\begin{aligned}
 & -\int_{t-h}^t \dot{x}^T(\theta) e^{\alpha_j(\theta-t)} M_j \dot{x}(\theta) d\theta \\
 & \leq -\frac{1}{h} (x^T(t) - e^{\frac{-\alpha_j h}{2}} x^T(t-h)) M_j (x(t) - e^{\frac{-\alpha_j h}{2}} x(t-h))
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

$$-\int_{t-r}^t x^T(s) Q_j x(s) ds \leq -\frac{1}{r} \int_{t-r}^t x^T(s) ds Q_j \int_{t-r}^t x(s) ds \tag{4-33}$$

$$-\int_{t-h}^t x^T(s) S_j x(s) ds \leq -\frac{1}{h} \int_{t-h}^t x^T(s) ds S_j \int_{t-h}^t x(s) ds \tag{4-34}$$

根据引理 4.2, 可得

$$\begin{aligned}
 & -\int_{t-r}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) R_j \dot{x}(s) ds d\theta \\
 & \leq -\frac{2}{r^2} (rx^T(t) - \int_{t-r}^t x^T(s) ds) R_j (rx(t) - \int_{t-r}^t x(s) ds) \\
 & \quad -\frac{4}{r^2} \left(-\frac{r}{2} x^T(t) - \int_{t-r}^t x^T(s) ds + \frac{3}{r} \int_{t-r}^t \int_{\theta}^t x^T(s) ds d\theta \right) R_j \\
 & \quad \times \left(-\frac{r}{2} x(t) - \int_{t-r}^t x(s) ds + \frac{3}{r} \int_{t-r}^t \int_{\theta}^t x(s) ds d\theta \right)
 \end{aligned} \tag{4-35}$$

以及

$$\begin{aligned}
 & -\int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) M_j \dot{x}(s) ds d\theta \\
 & \leq -\frac{2}{h^2} (hx^T(t) - \int_{t-h}^t x^T(s) ds) M_j (hx(t) - \int_{t-h}^t x(s) ds) \\
 & \quad -\frac{4}{h^2} \left(-\frac{h}{2} x^T(t) - \int_{t-h}^t x^T(s) ds + \frac{3}{h} \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t x^T(s) ds d\theta \right) M_j \\
 & \quad \times \left(-\frac{h}{2} x(t) - \int_{t-h}^t x(s) ds + \frac{3}{h} \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t x(s) ds d\theta \right)
 \end{aligned} \tag{4-36}$$

与第一种情况类似, 对任意具有合适维数的矩阵 W_i , 根据(4-23), 可得

$$-2[x^T(t), \dot{x}^T(t)] W_i (\dot{x}(t) - (A_j + D_j K_i)x(t) - B_j x(t-r) - C_j \dot{x}(t-h)) = 0 \tag{4-37}$$

将式(4-31)-(4-37)代入(4-30), 得到下式

$$\dot{V}_j - \beta_j V_j \leq \xi^T(t) \Psi_j \xi(t) \tag{4-38}$$

其中

$$\xi^T(t) = [\omega^T(t), \int_{t-r}^t x^T(s) ds, \int_{t-r}^t \int_{\theta}^t x^T(s) ds d\theta, \int_{t-h}^t x^T(s) ds, \int_{t-r}^t \int_{\theta}^t x^T(s) ds d\theta]$$

$$\Psi_j = \begin{bmatrix} \Psi_{j,11} & 0 & \frac{6(\alpha_j + \beta_j)}{r^2} e^{a_{r,j}} R_j & 0 & \Psi_{j,15} \\ * & \Psi_{j,22} & \frac{12(\alpha_j + \beta_j)}{r^3} e^{a_{r,j}} R_j & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{j,33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{j,44} & \Psi_{j,45} \\ * & * & * & * & \Psi_{j,55} \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{j,11} = \begin{bmatrix} \Omega_{j,11} & \Omega_{j,12} & W_i^T C_j & \frac{1}{h} e^{\frac{-\alpha_j h}{2}} M_j & \Omega_{j,15} \\ * & \Omega_{j,22} & 0 & 0 & B_j^T W_i \\ * & * & -e^{-\alpha_j h} S_i & 0 & C_j^T W_i \\ * & * & * & -\frac{1}{h} e^{-\alpha_j h} M_j & 0 \\ * & * & * & * & \Omega_{j,55} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{j,11} = & -\beta_j P_j + Q_j - \frac{1}{r} R_j - \frac{1}{h} M_j - 3(\alpha_j + \beta_j) e^{a_{r,j}} R_j - 3(\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} M_j \\ & + W_i^T (A_j + D_j K_i) + (A_j + D_j K_i)^T W_i; \end{aligned}$$

$$\Omega_{j,12} = \frac{1}{r} e^{\frac{-\alpha_j r}{2}} R_j + W_i^T B_j; \quad \Omega_{j,15} = P_j + A_j^T W_i + K_i^T D_j^T W_i - W_i^T;$$

$$\Omega_{j,22} = e^{-\alpha_j r} \left(-\frac{1}{r} R_j - Q_j \right); \quad \Omega_{j,55} = r R_j + S_j + h M_j - W_i^T - W_i$$

$$\Psi_{j,15} = \frac{6}{h^2} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} M_j$$

$$\Psi_{j,22} = \left(-\frac{1}{r} Q_j - \frac{6}{r^2} R_j \right) (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{r,j}}$$

$$\Psi_{j,33} = -\frac{36}{r^4} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{r,j}} R_j$$

$$\Psi_{j,44} = \left(-\frac{1}{h} S_j - \frac{6}{h^2} M_j \right) (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}}$$

$$\Psi_{j,45} = \frac{12}{h^3} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} M_j$$

$$\Psi_{j,55} = -\frac{36}{h^4} (\alpha_j + \beta_j) e^{a_{h,j}} M_j$$

在不等式 $\Psi_j < 0$ 左右两侧分别乘以对角阵 $\text{diag}\{\bar{W}_i^T, \dots, \bar{W}_i^T\}$ 和 $\text{diag}\{\bar{W}_i, \dots, \bar{W}_i\}$ 。同时, 令 $\bar{P}_j = \bar{W}_i^T P_j \bar{W}_i$, $\bar{Q}_j = \bar{W}_i^T Q_j \bar{W}_i$, $\bar{R}_j = \bar{W}_i^T R_j \bar{W}_i$, $\bar{S}_j = \bar{W}_i^T S_j \bar{W}_i$, $\bar{M}_j = \bar{W}_i^T M_j \bar{W}_i$, 容易验证不等式 $\Psi_j < 0$ 与定理 4.1 中不等式(4-19)等价。因此, 若(4-19)成立, 则

$$\dot{V}_j - \beta_j V_j \leq 0 \quad (4-39)$$

上述两种情况针分析 $[t_k + \tau(t_k), t_{k+1} + \tau(t_{k+1})]$ 区间内系统稳定性, 此区间内考虑了切换前后的两个模态。将上述两种情况综合, 并通过一定的简单变换, 可在区间 $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in N$ 上得到如下结果:

$$\dot{V}_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \begin{cases} -\alpha_{\sigma(t)} V_{\sigma(t)}(x(t)) & t \in [t_k + \tau(t_k), t_{k+1}) \\ \beta_{\sigma(t)} V_{\sigma(t)}(x(t)) & t \in [t_k, t_k + \tau(t_k)) \end{cases} \quad (4-40)$$

为表述简便, 令 $T_k = t_k + \tau(t_k)$ 。由(4-40), 可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x(t)) &\leq \exp\{-\alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})}(t - T_{N_\sigma})\} V_{\sigma(T_{N_\sigma})}(x(T_{N_\sigma})) \\ &\leq \exp\{-\alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})}(t - T_{N_\sigma}) + \beta_{\sigma(t_{N_\sigma})}\tau(t_{N_\sigma})\} V_{\sigma(t_{N_\sigma})}(x(t_{N_\sigma})) \end{aligned} \quad (4-41)$$

结合(4-5), 迭代式(4-41)可得

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \exp(\phi(t)) V_{\sigma(0)}(x(0)) \quad (4-42)$$

其中

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \ln \mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k+1})} - \alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})}(t - T_{N_\sigma}) - \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \alpha_{\sigma(T_k)}(t_{k+1} - T_k) + \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \beta_{\sigma(t_k)}\tau(t_k) \quad (4-43)$$

易知

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \ln \mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k+1})} &= \sum_{m \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \sum_{\substack{m \rightarrow n \\ n \in \mathcal{P} \\ m \neq n \\ \sigma(t_k)=m \\ \sigma(t_{k+1})=n}} \ln \mu_{mn} \\ &= N_\sigma \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \ln \mu_{mn} \frac{\#\{m \rightarrow n\}_t}{N_\sigma} \end{aligned} \quad (4-44)$$

根据式(4-7), 下式成立

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \alpha_{\sigma(T_k)}(t_{k+1} - T_k) &= \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \alpha_{\sigma(T_k)} S_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} 1_{(i)}(\sigma(T_k)) \alpha_i S_{k+1} \right) \\ &= - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^u} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} S_{k+1} + \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^s} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} S_{k+1} \end{aligned} \quad (4-45)$$

将(4-44)、(4-45)代入(4-43), 有如下结果

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= N_\sigma \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \ln \mu_{mn} \frac{\#\{m \rightarrow n\}_t}{N_\sigma} + \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^u} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} S_{k+1} \\
 &\quad - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} S_{k+1} - \alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})} (t - T_{N_\sigma}) + \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \beta_{\sigma(t_k)} \tau(t_k) \\
 &= h(t) \left(\frac{N_\sigma}{h(t)} \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \ln \mu_{mn} \frac{\#\{m \rightarrow n\}_t}{N_\sigma} - \alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})} \frac{(t - T_{N_\sigma})}{h(t)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^u} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} \frac{S_{k+1}}{h(t)} - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} \frac{S_{k+1}}{h(t)} + \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \beta_{\sigma(t_k)} \frac{\tau(t_k)}{h(t)} \right)
 \end{aligned} \tag{4-46}$$

其中 $h(t)$ 是上文中提到的函数。

定义

$$f(t) = \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \ln \mu_{mn} \frac{\#\{m \rightarrow n\}_t}{N_\sigma} \tag{4-47}$$

以及

$$\begin{aligned}
 g(t) &= -\alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})} \frac{(t - T_{N_\sigma})}{h(t)} + \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^u} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} \frac{S_{k+1}}{h(t)} \\
 &\quad - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\alpha_i| \sum_{k: \sigma(T_k)=i} \frac{S_{k+1}}{h(t)} + \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \beta_{\sigma(t_k)} \frac{\tau(t_k)}{h(t)}
 \end{aligned} \tag{4-48}$$

为了保证所考虑切换系统的全局渐进收敛特性，仅需证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \{h(t)(\nu_h(t)f(t) + g(t))\} = 0 \tag{4-49}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$ ，因此，若

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (\nu_h(t)f(t) + g(t)) < 0 \tag{4-50}$$

则(4-49)成立。

易知， $\limsup_{t \rightarrow \infty} (\nu_h(t)f(t) + g(t)) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \nu_h(t) \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} g(t)$ 。根据(4-10)

及(4-47)，有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \ln \mu_{mn} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho_{mn}(t) \tag{4-51}$$

由条件(4-20)可知，当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $g(t)$ 函数中 $-\alpha_{\sigma(T_{N_\sigma})}(t - T_{N_\sigma})$ 项为 $h(t)$ 函数的高阶无穷小。因此，当 $t \rightarrow +\infty$ 时，可知 $(t - T_{N_\sigma})/h(t) \rightarrow 0$ 。由式(4-48)中定义的 $g(t)$ 函数可得

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{t \rightarrow \infty} g(t) \\
 &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^u} |\alpha_i| \eta_2^h(i, t) + \sum_{i \in \mathcal{P}} \beta_i \eta_1^h(i, t) - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^s} |\alpha_i| \eta_2^h(i, t) \right) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^u} |\alpha_i| \limsup_{t \rightarrow \infty} \eta_2^h(i, t) + \sum_{i \in \mathcal{P}} |\beta_i| \limsup_{t \rightarrow \infty} \eta_1^h(i, t) - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^s} |\alpha_i| \liminf_{t \rightarrow \infty} \eta_2^h(i, t)
 \end{aligned} \tag{4-52}$$

易知, (4-50)成立的充分条件为

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{t \rightarrow \infty} v_h(t) \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \ln \mu_{mn} \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho_{mn}(t) + \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^u} |\alpha_i| \limsup_{t \rightarrow \infty} \eta_2^h(i, t) \\
 &+ \sum_{i \in \mathcal{P}} |\beta_i| \limsup_{t \rightarrow \infty} \eta_1^h(i, t) - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m2}^s} |\alpha_i| \liminf_{t \rightarrow \infty} \eta_2^h(i, t) < 0
 \end{aligned} \tag{4-53}$$

根据定义(4-11)~(4-15), 可知在定理 4.1 中条件(4-21)下, 式(4-53)成立。进一步可得(4-50)。

由于 $V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \exp(\phi(t))V_{\sigma(0)}(x(0))$ 以及 $\kappa_1(\|x\|) \leq V_{\sigma(t)}(x) \leq \kappa_2(\|x\|)$, 可得

$$\|x(t)\| \leq \kappa_1^{-1}(V_{\sigma(t)}(x(t))) \leq \kappa_1^{-1}(\exp(\phi(t))\kappa_2(\|x(0)\|)) \tag{4-54}$$

因而, 闭环系统状态渐进收敛。同时, 由于系统状态初值与函数 $\phi(t)$ 与切换信号 $\sigma(t)$ 无关。因此, 对系统任意初值 $x(0)$, 闭环系统全局渐进收敛, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。

至此, 证明完毕。

注释 4.1: 文献[47]在分析中立异步切换系统稳定性时, 要求在每个子系统在异步切换之后正常运行阶段必须指数稳定, 即对所有 $t \in [t_i + \tau(t_i), t_{i+1}]$, 系统 Lyapunov 函数需要满足 $\dot{V}_{\sigma(t)}(\cdot) \leq -\alpha V_{\sigma(t)}(\cdot)$, 其中 $\alpha > 0$ 。对比这一条件, 本章提出当 $\sigma(t) \in \mathcal{P}_{m2}^u$ 时, 允许 $\alpha_{\sigma(t)} < 0$, 相较于所有的 $\alpha_{\sigma(t)} > 0$ 而言, 本章所提方法使得式(4-18)中 LMI 的求解条件更加宽松。

注释 4.2: 本章提出了控制器与切换信号协同镇定方法。考虑到系统中存在不稳定的子系统, 仅靠传统控制器设计方法无法镇定该切换系统。通过切换信号限制不稳定系统的运行条件, 可保证整个系统最终的稳定性。另一方面, 通过设计合理的控制器, 可有效调节闭环系统参数, 例如 Lyapunov 函数衰减或发散速率 $\alpha_n, n \in \mathcal{P}$, 从而对切换信号条件(4-21)产生调节作用。

注释 4.3: 针对时滞系统, 许多学者基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析方法提出了一系列研究成果。例如文献[47]考虑了二次项的单重积分形式; 尽管文献[96]考虑了双重积分形式, 然而其结果基于双重积分不等式 $\int_a^b \int_\theta^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds du \geq 0$ 。相较而言, 本章引理 4.2 所采用的双重积分不等式所得结果放松了上述文献时滞结果保守性。

注释 4.4: 本章中关于切换信号的限制条件为不等式(4-21)。该不等式限制切换次数以及不稳定子系统和异步切换持续时间上限，同时稳定子系统的运行时间必须持续足够长的时间。该条件比较容易直观理解，即对于一个含有不稳定子系统的切换系统而言，系统切换瞬间以及不稳定子系统运行过程会造成系统发散。而稳定子系统运行过程会使得系统状态收敛。因而，通过系统足够长的收敛运行时间限制系统发散，最终保证系统指数收敛稳定。

4.4 仿真算例

本节给出一个仿真算例验证所提方法的有效性。考虑由两个子系统构成的线性中立切换系统，其中

子系统 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.8 & -0.3 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

子系统 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ -0.2 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ -0.15 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

观察以上两个子系统，易知 $\mathcal{P}_{m2}^s = \{1\}$, $\mathcal{P}_{m2}^u = \{2\}$ ，即第二个子系统为不可控的子系统。

给定 $\tau(t) = 0.308$ ， $r = 0.4$ ， $h = 0.3$ ， $\alpha_1 = 1$ ， $\alpha_2 = -2$ ， $\beta_1 = \beta_2 = 2$ 。对任意 $i, j \in \mathcal{P}, i \neq j$ ，取 $\mu_{ij} = 2$ 。通过求解定理 4.1 中 LMI，得到如下控制器增益：

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.3178 & 0.8389 \\ -1.3983 & -8.5772 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3.8051 & 0.8461 \\ -1.0301 & -8.2361 \end{bmatrix}$$

令 $h(t) = t$ ，关于切换信号的限制条件为

$$N_t^\sigma = 0.3t + t^{\frac{1}{3}}$$

$$\eta_2^h(1, t) = 0.855 - t^{\frac{1}{3}}$$

$$\eta_2^h(2, t) = 0.125 + t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{2}{3}}$$

$$\eta_1^h(1, t) = \eta_1^h(2, t) = \frac{1}{2}(0.02 + t^{\frac{2}{3}})$$

且对任意 $(m, n) \in E(\mathcal{P})$, 取 $\rho_{mn} = \frac{1}{2}$ 。仿真时间设定为 $t = 30$, 由上述条件可得 $N_t^\sigma = 12$,

$\eta_2^h(1, t) = 0.533$, $\eta_2^h(2, t) = 0.343$, $\eta_1^h(1, t) = \eta_1^h(2, t) = 0.062$, $\rho_{mn} = \frac{1}{2}$ 。同时, 可知

$\tilde{\eta}_2^h(1) = 0.855$, $\hat{\eta}_2^h(2) = 0.125$, $\hat{\eta}_1^h(1) = \hat{\eta}_1^h(2) = 0.01$, $\hat{v}_h = 0.3$, $\hat{\rho}_{mn} = \frac{1}{2}$, $(m, n) \in E(\mathcal{P})$ 。

因此, 通过下式验证(4-21)

$$\hat{v}_h \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} \hat{\rho}_{mn} \ln \mu_{mn} + \left(\sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^h} |\alpha_i| \hat{\eta}_2^h(i) - \sum_{i \in \mathcal{P}_{m_2}^s} |\alpha_i| \tilde{\eta}_2^h(i) + \sum_{i \in \mathcal{P}} |\beta_i| \hat{\eta}_1^h(i) \right) = 0.416 - 0.425 < 0$$

可知成立。

基于上述条件, 图 1 给出了符合条件的切换信号。

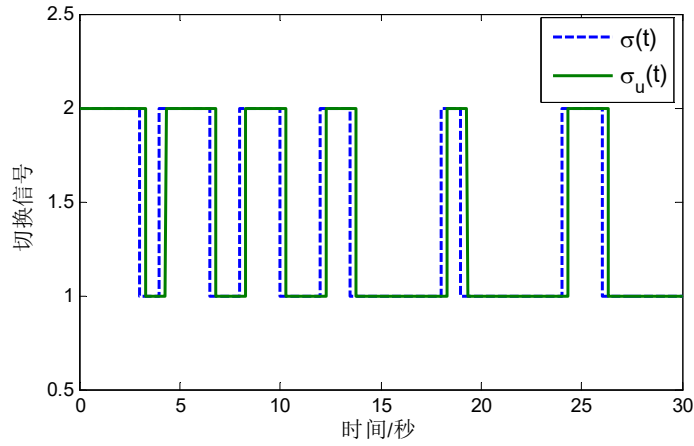


图 4-1 切换信号

Fig. 4-1 The trajectory of switching signal

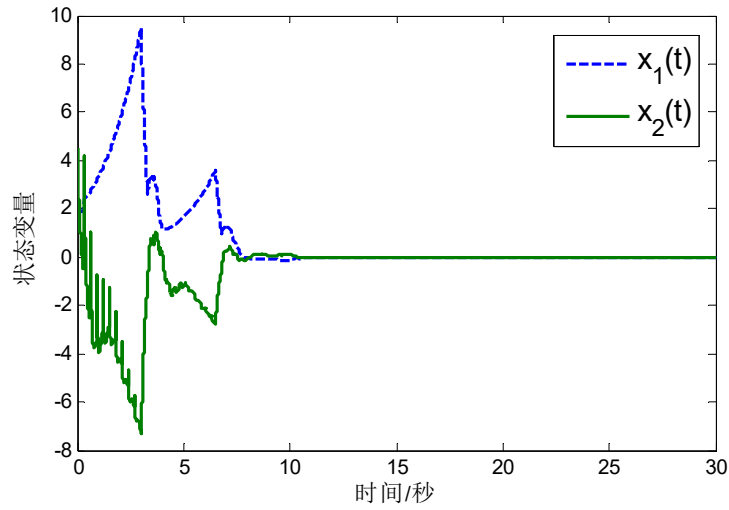


图 4-2 系统状态轨迹

Fig. 4-2 The trajectory of states

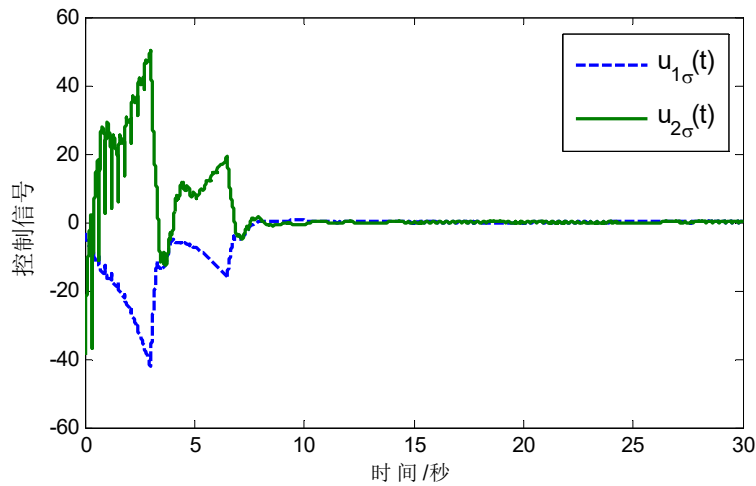


图 4-3 控制输入信号

Fig. 4-3 The trajectory of control input signal

选择系统初值 $x_0 = [1.8, 4.5]^T$ 。基于本章所提方法，系统状态仿真结果如图 4-2 所示。图 4-3 给出了控制输入信号仿真结果。从上述仿真图中易知，本章所提控制方法下可有效保证闭环系统稳定性。

4.5 本章小结

本章针对一类异步切换中立时滞系统，研究了该类系统的状态反馈镇定问题。通过设计一类新颖的切换信号，给出了系统全局渐进稳定的充分条件。在本章所提条件下，系统状态在异步模态识别过程和正常运行过程均允许有界增加。因此，所

提方法允许切换子系统中存在不稳定模态。同时，异步切换条件下，给出了系统控制器增益的 LMI 求解条件。最后给出了仿真算例验证所提方法的有效性正确性。

第 5 章 基于 ADT 的同步切换非线性系统跟踪控制

5.1 引言

第 2、3、4 章分别针对线性切换系统，提出了相应的系统镇定控制方法。这三章中，研究的重点主要聚焦于设计时间限制下的切换信号与控制器，以保证系统的稳定性。

然而，当前控制应用系统对系统的性能要求不断提高，不仅仅需要保证系统的稳定性，还对其他系统性能有一定的指标要求，例如对系统的超调量、收敛速度的要求等等。近年来，国内外学者针对系统性能约束的问题展开研究^{[97]-[102]}。针对这一方向的研究目前主要有基于预定性能控制(Prescribed Performance Control, PPC)和障碍 Lyapunov 函数(Barrier Lyapunov Function, BLF)两种方法。

预定性能控制方法由希腊学者 G. Rovithakis 等人首次提出^[97]，其基本思想是设计可调节的指数收敛函数作为约束系统性能的预定性能函数，通过一定的非线性状态变换，在被控变量初值位于预定性能函数界限内的前提下，使得系统被控变量（系统输出信号，跟踪误差等）接近预定界限时，系统控制器迅速调节控制变量，急剧增大的控制器输出使得被控变量迅速远离预定函数界限，从而保证被控变量无法逃逸到预定函数界限以外，实现预定性能控制的目的。由于指数收敛函数的收敛速率和稳态值均可调节，该方法可有效地约束被控变量的暂稳态性能，实现系统变量预定性能控制。

障碍 Lyapunov 函数方法^[101]则通过设计具有对数形式的 Lyapunov 函数，同理，当系统被控变量接近预定界限时，障碍 Lyapunov 函数急剧增大趋于发散，通过设计系统镇定或跟踪控制器并基于 Lyapunov 稳定性定理保证系统稳定，则可保证 Lyapunov 函数的有界性，实现系统变量的约束控制。尽管针对系统性能约束的研究已经取得了一定的成果，然而，对于切换系统性能约束问题的研究却几乎处于空白阶段。特别地，对切换系统而言，在系统各子系统进行切换的过程中，由于各模态的参数结构等不同，波动现象在所难免，使得系统的暂稳态性能受到影响，因而无论是从理论基础研究还是实际工程应用的角度，针对切换系统性能约束问题的研究均具有重要的研究意义。

除此之外,实际复杂过程控制系统往往难以建立精确系统模型,线性系统模型难以准确描述实际控制系统。近几十年来,针对具有下三角型结构系统的研究备受关注。究其原因,首先是因为众多的实际控制系统可建模成下三角型结构的非线性系统。此外,某些实际系统不能直接利用下三角型结构系统模型描述,然而,其模型通过一定形式的状态变换及转化,可转换成下具有三角型结构的非线性系统。因此,国内外研究学者针对此类系统的各类问题提出了相应研究成果。例如,基于backstepping 控制器迭代设计方法,文献[103]研究了非线性时滞系统的输出反馈跟踪问题,通过自适应神经网络估计方法,处理了非线性系统中未知非线性函数带来的问题。近年来,为了克服反步控制器设计过程中出现的虚拟控制器连续求导问题,Zhang X.等人提出了动态增益控制器设计方法^{[104]-[106]}。该方法避免了对虚拟控制器重复求导的步骤,因而有效地处理了传统方法中出现的计算爆炸问题。基于动态增益方法,Li Y.等人先后研究了非线性多智能体系统的若干控制问题,并提出了相应的控制方法,见[129][130]及相关参考文献。

同时,在非线性控制系统中,系统模型不确定性以及未建模动态干扰等因素广泛存在,且信号传输过程中往往存在时滞现象。这些使得系统控制器设计异常困难。因而,针对非线性切换系统,如何克服系统中未建模动态干扰及时滞等因素影响,保证系统性能满足特定的指标约束要求,具有重要的理论和实际意义。针对这一问题,现有文献却鲜有研究。

基于以上研究背景,本章考虑含有时延和未建模动态的非线性切换系统自适应预定性能控制。利用自适应模糊逻辑系统估计能力,处理系统未知非线性函数;通过设计切换 K 滤波器估计系统不可测状态,基于平均驻留时间稳定性分析方法,提出了预定性能跟踪控制方案。在切换信号满足一定的平均驻留时间情况下,该方案可保证系统的跟踪误差满足预定暂稳态性能指标。同时结合动态面控制方法,有效降低了控制器迭代设计过程中的计算爆炸问题。

5.2 问题描述及预备知识

5.2.1 系统模型描述

本章考虑系统模型如下:

$$\begin{cases} \dot{z} = Q^{\sigma(t)}(z(t), y(t), y(t-r(t))) \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + (\theta^{\sigma(t)})^T \phi_i(y(t)) + f_i^{\sigma(t)}(y(t), y(t-r_i(t)), z(t), z(t-d_i(t))), \quad i=1,2,\dots,\rho-1 \\ \dot{x}_\rho = b_m^{\sigma(t)} u_{\sigma(t)}(t) + x_{\rho+1} + (\theta^{\sigma(t)})^T \phi_\rho(y(t)) + f_\rho^{\sigma(t)}(y(t), y(t-r_\rho(t)), z(t), z(t-d_\rho(t))) \\ \dot{x}_{\rho+1} = b_{m-1}^{\sigma(t)} u_{\sigma(t)}(t) + x_{\rho+2} + (\theta^{\sigma(t)})^T \phi_{\rho+1}(y(t)) + f_{\rho+1}^{\sigma(t)}(y(t), y(t-r_{\rho+1}(t)), z(t), z(t-d_{\rho+1}(t))) \\ \dots \\ \dot{x}_n = b_0^{\sigma(t)} u_{\sigma(t)}(t) + (\theta^{\sigma(t)})^T \phi_n(y(t)) + f_n^{\sigma(t)}(y(t), y(t-r_n(t)), z(t), z(t-d_n(t))) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (5-1)$$

式中 $z(t) \in R$ 代表系统中的未建模动态变量, $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$, $u_{\sigma(t)}(t) \in R$, $y(t) \in R$ 分别表示系统状态变量, 控制输入以及系统输出。 $\sigma(t): [0, +\infty) \mapsto P = \{1, 2, \dots, p\}$ 表示切换信号, 其中 p 是子系统的个数。 $\rho = n - m$ 代表系统的相对阶, $\theta^{\sigma(t)} \in R^v$ 为未知有界的切换参数, $\phi_i(y(t)) \in R^v$ 是光滑已知的非线性函数。系统仅输出状态 $y(t) = x_1(t)$ 可测。定义 $y_d(t)$ 为连续有界的跟踪信号, 则跟踪误差可表示为 $\tilde{y}(t) = y(t) - y_d(t)$ 。

针对系统(5-1), 本章的控制目标是通过设计预定性能输出跟踪控制器, 保证系统切换信号在满足一定的平均驻留时间条件下, 系统输出可跟踪给定参考信号, 且跟踪误差满足预定的暂稳态性能指标。

为实现上述控制目标, 我们首先给出如下假设条件及引理:

假设 5.1: 对 $\forall k \in P$, 系统未建模动态 $z(t)$ 满足输入到状态稳定(input-to-state stability)条件, 即存在正定 Lyapunov 函数 $U(z(t))$ 和 \mathcal{K}_∞ 函数 $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$, $\bar{\gamma}(\cdot)$ 满足

$$\underline{\alpha}(\|z\|) \leq U(z) \leq \bar{\alpha}(\|z\|) \quad (5-2)$$

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z(t)} Q^k \leq -a_0 U(z) + a_{1,k} \gamma(\|y(t)\|) + a_{2,k} \bar{\gamma}(\|y(t-d(t))\|) \quad (5-3)$$

其中, a_0 , $a_{1,k}$, $a_{2,k}$ 为大于零的常数。

假设 5.2: 对 $\forall k \in P$, $i=1, 2, \dots, n$, 系统非线性函数 $f_i^k(\cdot)$ 满足:

$$|f_i^k(\cdot)|^2 \leq \alpha_{i1,k} \bar{f}_{i1}(y(t)) + \alpha_{i2,k} \bar{f}_{i2}(y(t-r_i(t))) + \beta_{i1,k} h_{i1}(z(t)) + \beta_{i2,k} h_{i2}(z(t-d_i(t))) \quad (5-4)$$

式中, $\alpha_{ij,k}$, $\beta_{ij,k}$ ($j=1, 2$) 为大于零的常数。 $h_{ij}(\cdot)$, $\bar{f}_{ij}(\cdot)$ 为不确定函数, $j=1, 2$, 且函数 $\bar{f}_{ij}(\cdot)$ 满足

$$\bar{f}_{ij}(\tilde{y}(t) + y_d(t)) \leq \tilde{y}(t) f_{ij}(\tilde{y}(t)) + h_{ij}(y_d(t)) \quad (5-5)$$

其中 $f_{ij}(\tilde{y}(t))$ 为不确定函数, 针对有界的自变量 $y_d(t)$, $h_{ij}(y_d(t))$ 为有界函数。

假设 5.3: 函数 $\gamma(\cdot)$, $\bar{\gamma}(\cdot)$, $h_{i1}(\cdot)$, $h_{i2}(\cdot)$ 满足如下局部特性

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t)}{t^2} < +\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\gamma}(t)}{t^2} < +\infty \\ \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_{i1}(t)}{U(z)} < +\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_{i2}(t)}{U(z)} < +\infty \end{aligned} \quad (5-6)$$

假设 5.4: 多项式 $B(s) = b_m^k s^m + \dots + b_1^k s + b_0^k$ 是 Hurwitz 多项式, 且常数 b_m^k 符号已知。不失一般性, 假设 $b_m^k > 0$ 。

引理 5.1^[107]: 对任意常数 $\epsilon > 0$, 以及任意变量 $x \in R$, 下式成立:

$$0 \leq |x| - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \epsilon^2}} \leq \epsilon \quad (5-7)$$

注释 5.1: 假设 5.1 是系统中存在未建模动态时常见的假设条件, 即未建模动态需要满足输入到状态稳定条件。假设 5.2 说明不确定函数 $f_i^k(\cdot)$ 的上界小于关于系统输出和未建模动态的函数之和。

由 $y(t) = \tilde{y}(t) + y_d(t)$, 假设 5.1 中的部分函数可表述成以下形式:

$$\gamma(|y(t)|) \leq \gamma(|\tilde{y}(t)| + |y_d(t)|) \leq \gamma(2|\tilde{y}(t)|) + \gamma(2|y_d(t)|) \quad (5-8)$$

$$\bar{\gamma}(|y(t-d(t))|) \leq \bar{\gamma}(2|\tilde{y}(t-d(t))|) + \bar{\gamma}(2|y_d(t-d(t))|) \quad (5-9)$$

定义 $\tilde{\gamma}(|X|) = \gamma(2|X|)$, $\tilde{\bar{\gamma}}(|X|) = \bar{\gamma}(2|X|)$, 将(5-8)、(5-9)带入(5-3), 可得

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z(t)} Q^k \leq -a_0 U(z) + a_{1,k} \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|) + a_{2,k} \tilde{\bar{\gamma}}(|\tilde{y}(t-d(t))|) + \underline{\varpi} \quad (5-10)$$

其中 $\underline{\varpi} \geq a_{1,k} \tilde{\gamma}(|y_d(t)|) + a_{2,k} \tilde{\bar{\gamma}}(|y_d(t)|)$ 。同理, 假设 5.2 可表述为

$$\begin{aligned} |f_i^k(\cdot)|^2 &\leq \alpha_{i1,k} \tilde{y}(t) f_{i1}(\tilde{y}(t)) + \alpha_{i2,k} \tilde{y}(t-r_i(t)) f_{i2}(\tilde{y}(t-r_i(t))) \\ &\quad + \beta_{i1,k} h_{i1}(z(t)) + \beta_{i2,k} h_{i2}(z(t-d_i(t))) + \varpi_i \end{aligned} \quad (5-11)$$

其中 $\varpi_i \geq \alpha_{i1,k} h_{i1}(y_d(t)) + \alpha_{i2,k} h_{i2}(y_d(t-r_i(t)))$ 。

5.2.2 模糊逻辑系统简介

模糊逻辑系统是一类估计方法, 由于其出色的在线估计能力, 因而在模型不确定动力系统的分析与设计中得到了广泛应用^{[108]-[112]}。一个模糊逻辑系统主要由模糊化, 知识库, 推理机, 解模糊化等几部分构成。模糊逻辑系统的知识库最常见是由一系列的模糊 IF-THEN 规则组成如下形式:

$$\begin{aligned} R^l: & \text{ IF } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^l \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \\ & \text{ THEN } y \text{ is } G^l \end{aligned}$$

其中 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $y \in R$ 分别是模糊逻辑系统的输入和输出。 $l = 1, 2, \dots, N$,

N 为规则的数量。模糊集合 F_i^l , G^l 分别与模糊隶属函数 $\mu_{F_i^l}$, μ_{G^l} 相关。

通过模糊化、模糊推理和中心平均解模糊等步骤, 模糊系统输出可表示为

$$y(x) = \frac{\sum_{l=1}^N \bar{y}_l \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^N \left[\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right]} \quad (5-12)$$

其中 $\bar{y}_l = \max_{y \in R} \mu_{G^l}(y)$ 。定义如下形式的模糊基函数

$$\varphi_l = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^N \left[\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right]}$$

引入向量 $W = [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N]^T$, $\varphi(x) = [\varphi_1, \dots, \varphi_N]^T$, 则模糊逻辑系统输出(5-12)可表述为

$$y(x) = W^T \varphi(x) \quad (5-13)$$

引理 5.2^[108]: 对于一个紧集 Ω 内的连续函数 $f(x)$, 对任意给定的常数 $\varepsilon > 0$, 存在模糊逻辑系统(5-13)使得

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - W^T \varphi(x)| \leq \varepsilon \quad (5-14)$$

引理 5.2 表明模糊逻辑系统可以估计一个紧集内的任意光滑函数。

5.2.3 切换信号与预定性能控制

本章考虑切换信号满足平均驻留时间条件下系统跟踪控制问题。首先介绍切换信号平均驻留时间定义。

定义 5.1^[37]: 对于切换信号 $\sigma(t)$ 及任意 $0 \leq t_1 < t_2$, 若存在大于零的常数 N_0 及 τ_a 使得

$$N_{\sigma(t)}(t_1, t_2) \leq N_0 + \frac{t_2 - t_1}{\tau_a} \quad (5-15)$$

则称切换信号 $\sigma(t)$ 具有平均驻留时间 τ_a 。其中 $N_{\sigma(t)}(t_1, t_2)$ 为切换信号在区间 $[t_1, t_2]$ 内的切换次数。

为了保证系统输出信号在跟踪参考信号过程的暂稳态性能满足特定的约束条件, 基于预定性能控制方法, 首先引入具有指数衰减函数形式的性能约束界限函数 $v(t) = (v_0 - v_\infty)e^{-at} + v_\infty$, 其中 v_0 , v_∞ , a 分别为调节性能约束的设计参数。给定任意正负界限调整参数 $\underline{\delta} > 0$, $\bar{\delta} > 0$, 若系统跟踪误差 $\tilde{y}(t)$ 满足

$$-\underline{\delta}v(t) \leq \tilde{y}(t) \leq \bar{\delta}v(t) \quad (5-15)$$

则可说明系统跟踪误差满足预定性能要求。上述结论如图 5-1 所示。

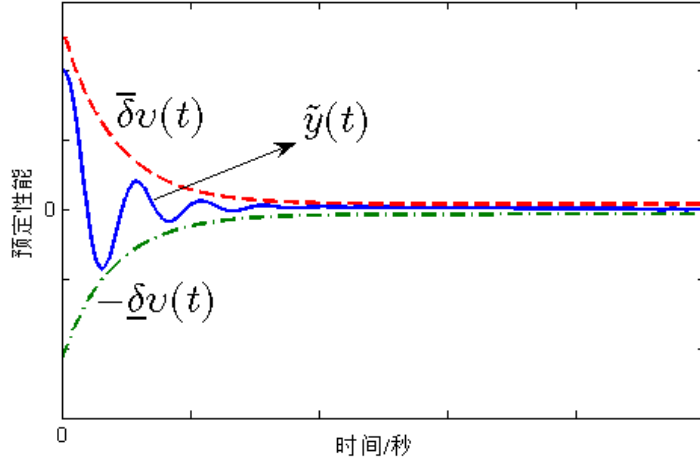


图 5-1 预定性能控制示意图

Fig. 5-1 Illustration of prescribed performance control

由图可知，通过调节 $v(t)$ 的衰减速率可限制跟踪误差 $\tilde{y}(t)$ 的收敛速率，且常数 $-\underline{\delta}v_\infty$ 及 $\bar{\delta}v_\infty$ 可约束 $\tilde{y}(t)$ 的稳态大小。因此，通过合理地调节 a ， $\underline{\delta}$ ， $\bar{\delta}$ ， v_0 以及 v_∞ 等参数，可实现跟踪误差的暂稳态性能约束。

为实现预定性能控制目的，定义状态变换

$$\Phi(\tilde{y}(t)) = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{\tilde{y}(t)}{v(t)} + \underline{\delta}\right) - \ln\left(\bar{\delta} - \frac{\tilde{y}(t)}{v(t)}\right) \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{\delta}}{\underline{\delta}} \quad (5-16)$$

易知， $\Phi(\tilde{y}(t))$ 是一个单调递增的光滑函数，且若选择系统状态初值使跟踪误差初值在预定界限内，即 $-\underline{\delta}v(0) < \tilde{y}(0) < \bar{\delta}v(0)$ ， $\Phi(\tilde{y}(t))$ 具有如下性质：

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{y}(t)) : (-v(t)\underline{\delta}, v(t)\bar{\delta}) &\rightarrow (-\infty, +\infty), & \Phi(0) &= 0 \\ \lim_{\tilde{y} \rightarrow -\underline{\delta}v(t)} \Phi(\tilde{y}(t)) &= -\infty, & \lim_{\tilde{y} \rightarrow \bar{\delta}v(t)} \Phi(\tilde{y}(t)) &= +\infty \end{aligned} \quad (5-17)$$

即 $\Phi(\tilde{y}(t))$ 是从 $(-v(t)\underline{\delta}, v(t)\bar{\delta})$ 到 $(-\infty, +\infty)$ 的映射函数，该函数在零点出的值为零，当自变量 $\tilde{y}(t)$ 趋近性能约束上下界限 $v(t)\bar{\delta}$ 与 $-v(t)\underline{\delta}$ 时，其值发散分别趋于正负无穷。另外，由于 $\Phi(\tilde{y}(t))$ 是严格单调递增的函数，因此存在反函数 $\tilde{y}(t) = \Phi^{-1}(\tilde{y}(t))$ 。

注释 5.2：由 $\Phi(\tilde{y}(t))$ 函数性质可知，若通过一定的控制设计方法保证 $\Phi(\tilde{y}(t))$ 有界性，则可保证系统跟踪误差 $\tilde{y}(t)$ 位于界限 $(-v(t)\underline{\delta}, v(t)\bar{\delta})$ 内，即实现如式(5-15)下的跟踪误差预定性能目的。因而，至此，预定性能控制问题转化为非线性变换后状态 $\Phi(\tilde{y}(t))$ 的镇定问题。

5.3 切换 K 滤波器状态估计

由于系统(5-1)仅输出状态 $y(t)$ 可测, 设计如下结构的切换 K 滤波器

$$\begin{cases} \dot{v}_l = A_0^{\sigma(t)} v_l + e_{n,n-l} u_{\sigma(t)} & l = 0, 1, \dots, m \\ \dot{\xi} = A_0^{\sigma(t)} \xi + K^{\sigma(t)} y(t) \\ \dot{\Xi} = A_0^{\sigma(t)} \Xi + \phi(y(t)) \end{cases} \quad (5-18)$$

其中 $e_{n,n-l} = [0, \dots, 1_{n-l}, \dots, 0]^T \in R^n$ 表示第 $n-l$ 个坐标向量, $K^{\sigma(t)} = [k_1^{\sigma(t)}, k_2^{\sigma(t)}, \dots, k_n^{\sigma(t)}]^T$, $k_i^{\sigma(t)}$ 是待设计增益参数, 使得切换矩阵

$$A_0^{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} -k_1^{\sigma(t)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2^{\sigma(t)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -k_{n-1}^{\sigma(t)} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n^{\sigma(t)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

满足条件(5-53)。 $\phi(y) = [\phi_1^T(y), \phi_2^T(y), \dots, \phi_n^T(y)]^T \in R^{n \times \nu}$ 。基于切换 K 滤波器(5-18), 系统状态估计可表述为

$$\hat{x} = \xi + \Xi \theta^{\sigma(t)} + \sum_{l=0}^m b_l^{\sigma(t)} v_l \quad (5-19)$$

定义状态估计误差 $e_i = x_i - \hat{x}_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。由式(5-1)、(5-18)及(5-19), 可得状态估计误差导数为

$$\dot{e} = A_0^{\sigma(t)} e + F^{\sigma(t)} \quad (5-20)$$

其中 $F^{\sigma(t)} = [f_1^{\sigma(t)}, f_2^{\sigma(t)}, \dots, f_n^{\sigma(t)}]$ 。

对误差系统(5-20), 考虑第 k 个切换子系统, $k \in P$, 选择如下形式的 Lyapunov 方程

$$V_{e,k} = e^T P_k e \quad (5-21)$$

其中 P_k 为正定对称的矩阵。结合 Young 式不等式, 即对任意参数 $\delta_0 > 0$,

$2e^T P_k F^k \leq \frac{1}{\delta_0} e^T P_k P_k e + \delta_0 \|F^k\|^2$ 成立。则可得 $V_{e,k}$ 沿(5-20)的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e,k} &\leq e^T (P_k A_0^k + (A_0^k)^T P_k) e + \frac{1}{\delta_0} e^T P_k P_k e + \delta_0 \|F^k\|^2 \\ &= e^T (P_k A_0^k + (A_0^k)^T P_k + \frac{1}{\delta_0} P_k P_k) e + \delta_0 \|F^k\|^2 \end{aligned} \quad (5-22)$$

误差系统的稳定性分析将与系统其他状态稳定性分析一同在下文具体给出。

5.4 自适应输出反馈预定性能控制设计

本节将利用 backstepping 迭代控制设计方法, 结合动态面控制方法, 给出低计算量下的控制器设计过程。首先, 针对第 k 个切换子系统, $k \in P$, 引入如下状态变换

$$\begin{cases} S_1 = \Phi(\tilde{y}(t)) \\ S_i = v_{mi} - \bar{\alpha}_i \\ Y_i = \bar{\alpha}_i - \alpha_i \end{cases} \quad (5-23)$$

其中 α_i 和 $\bar{\alpha}_i$ 分别为虚拟控制输入和利用动态面控制方法滤波后的虚拟控制输入。

引入由系统未知参数构成的未知参数向量 $\Theta^k = [b_m^k, b_{m-1}^k, \dots, b_0^k, (\theta^k)^T]^T \in R^{v+m+1}$, 并分别定义如下未知参数

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \sup_{k \in P} \|\Theta^k\| \\ b_{\max} &= \sup_{k \in P} (b_m^k)^2 \\ b_{\min} &= \inf_{k \in P} (b_m^k), \quad d = 1/b_{\min} \end{aligned} \quad (5-24)$$

及上述未知参数对应的估计参数 $\hat{\mathcal{G}}$, \hat{b}_{\max} , \hat{d} 。各参数的估计误差为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} &= \mathcal{G} - \hat{\mathcal{G}} \\ \tilde{b}_{\max} &= b_{\max} - \hat{b}_{\max} \\ \tilde{d} &= d - \hat{d} \end{aligned}$$

随着系统阶数的增大, 经典 backstepping 递归设计方法中对虚拟控制器的求导过程计算复杂度会急剧增加, 即存在“计算爆炸”问题。本章结合动态面控制方法, 可大大降低求导计算复杂度。应当指出的是, 该方法同时存在一定的保守性, 即只能得到半全局稳定性结果。定义如下紧集

$$\begin{aligned} \Pi_{1i} &= \left\{ \sum_{j=1}^i \frac{1}{2} S_j^2 + \sum_{j=2}^i \frac{1}{2} Y_j^2 + \frac{1}{2} \tilde{W}^T \tilde{W} + \frac{1}{2} \tilde{d}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} \tilde{b}_{\max}^2 \leq R_1 \right\} \\ \Pi_2 &= \{(y_d, \dot{y}_d) : y_d^2 + \dot{y}_d^2 \leq R_0\} \end{aligned}$$

其中 R_1 , R_0 为大于零的常数。

以下结合自适应及动态面控制等方法, 给出递归控制器设计过程。

第一步: 选取 Lyapunov 函数

$$V_{1,k} = \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{2} Y_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{W}^T \tilde{W} + \frac{b_{\min}}{2} \tilde{d}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} \tilde{b}_{\max}^2 \quad (5-25)$$

其中 $\tilde{W} = W - \hat{W}$ 是下文模糊逻辑系统估计过程对参数 W 的估计误差, \hat{W} 为参数估计值。

结合状态变换(5-16), $V_{1,k}$ 沿着(5-23)对时间 t 求导为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} = & S_1 r \left(\xi_2 + (\Theta^k)^T \Psi + b_m^k v_{m2} + e_2 + f_1^k - \dot{y}_d - \frac{\tilde{y}\dot{v}}{v} \right) + Y_2 \dot{Y}_2 \\ & + \tilde{W}^T \dot{\tilde{W}} + b_{\min} \dot{\tilde{d}} + \tilde{g} \dot{\tilde{g}} + \tilde{b}_{\max} \dot{\tilde{b}}_{\max} \end{aligned} \quad (5-26)$$

其中 $r = \frac{1}{2} (1/(\tilde{y} + v\delta) - 1/(\tilde{y} - v\bar{\delta}))$, $\Psi = [0, v_{m-1,2}, \dots, v_{0,2}, (\Xi_2 + \phi_1(y))]^T$ 。

由引理 5.1 及 Young 氏不等式, 可得

$$S_1 r (\Theta^k)^T \Psi \leq S_1 r \vartheta \eta + \vartheta \epsilon_1 \quad (5-27)$$

其中 $\eta = \frac{S_1 r \Psi^T \Psi}{\sqrt{(S_1 r)^2 \Psi^T \Psi + \epsilon_1^2}}$, ϵ_1 为大于零的常数。

将式(5-27)带入式(5-26), 结合 Young 氏不等式, 可得 $V_{1,k}$ 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & S_1 r (\xi_2 + \vartheta \eta_1 + b_m^k \alpha_2 + S_1 r b_{\max} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} S_1 r - \dot{y}_d - \frac{\tilde{y}\dot{v}}{v}) \\ & + S_1 \rho_k(\tilde{y}(t)) - S_1 \rho_k(\tilde{y}(t)) + \vartheta \epsilon_1 + \frac{1}{2\delta_1} e_2^2 + \frac{1}{2\delta_2} (f_1^k)^2 \\ & + \frac{1}{2} S_2^2 + \frac{1}{2} Y_2^2 + Y_2 \dot{Y}_2 + \tilde{W}^T \dot{\tilde{W}} + b_{\min} \dot{\tilde{d}} + \tilde{g} \dot{\tilde{g}} + \tilde{b}_{\max} \dot{\tilde{b}}_{\max} \end{aligned} \quad (5-28)$$

其中参数 δ_1, δ_2 是利用 Young 氏不等式放缩过程产生的参数, $\rho_k(\tilde{y}(t))$ 是未知非线性函数。

由上一节预备知识可知, 模糊逻辑系统对紧集内的光滑函数具有出色的估计能力。本节利用该方法估计未知非线性函数 $\rho_k(\tilde{y}(t))$ 。由引理 5.2, 对 $\rho_k(\tilde{y}(t))$ 的估计可表示为

$$\rho_k(\tilde{y}(t)|W) = W^T \varphi(\tilde{y}(t)) + \varepsilon_k$$

其中 W 为自适应估计参数, $\varphi(\tilde{y}(t))$ 为关于跟踪误差的模糊基函数, ε_k 为估计误差。

因此, 根据 W 参数估计误差定义与 Young 氏不等式, 非线性函数 $S_1 \rho_k(\tilde{y}(t))$ 满足

$$S_1 \rho_k(\tilde{y}(t)|W) \leq S_1 \tilde{W}^T \varphi(\tilde{y}(t)) + S_1 \hat{W}^T \varphi(\tilde{y}(t)) + \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_k^2$$

设计第一步虚拟控制输入 $\alpha_2(\cdot)$ 如下

$$\alpha_2 = -\text{sign}(b_m^k) \frac{S_1 r \hat{d}^2 \alpha_{20}^2}{\sqrt{(S_1 r \hat{d} \alpha_{20})^2 + \epsilon_1^2}} \quad (5-29)$$

其中

$$\alpha_{20} = \xi_2 + \hat{g}\eta + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} S_1 r - \dot{y}_d - \frac{\tilde{y}\dot{v}}{v} + \frac{c_1 S_1}{r} + \frac{S_1}{2r} - \frac{\hat{W}\varphi(\tilde{y}(t))}{r} + S_1 r \hat{b}_{\max}$$

由引理 5.1 可得

$$S_1 r b_m^k \alpha_2 = \frac{-|b_m^k| S_1^2 r^2 \hat{d}^2 \alpha_{20}^2}{\sqrt{(S_1 r \hat{d} \alpha_{20})^2 + \epsilon_1^2}} \leq -b_{\min} S_1 r \hat{d} \alpha_{20} + b_{\min} \epsilon_1$$

设计各参数自适应律如下

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}} &= S_1 \varphi_k(y) - \sigma_1 \hat{W}, \\ \dot{\hat{d}} &= S_1 r \alpha_{20} - \sigma_2 \hat{d}, \\ \dot{\hat{g}} &= S_1 r \eta_1 - \sigma_3 \hat{g}, \\ \dot{\hat{b}_{\max}} &= (S_1 r)^2 - \sigma_4 \hat{b}_{\max} \end{aligned} \quad (5-30)$$

将虚拟控制输入 $\alpha_2(\cdot)$ 通过如下一阶滤波器获得滤波后状态变量 $\bar{\alpha}_2(t)$

$$\tau_2 \dot{\bar{\alpha}}_2 + \bar{\alpha}_2 = \alpha_2, \quad \bar{\alpha}_2(0) = \alpha_2(0) \quad (5-31)$$

其中 τ_2 为滤波器时间常数。

由(5-23), (5-31)可知, $\dot{\bar{\alpha}}_2 = \frac{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2}{\tau_2} = -\frac{Y_2}{\tau_2}$ 。进一步可得

$$\dot{Y}_2 = -\frac{Y_2}{\tau_2} + B_2 \quad (5-32)$$

其中 B_2 为连续函数, 且在紧集 $\Pi_{11} \times \Pi_2$ 内有最大值 \bar{M}_2 。

将式(5-29), (5-30), (5-32)带入式(5-28), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} &\leq -c_1 S_1^2 - S_1 \rho_k(\tilde{y}(t)) + \frac{1}{2} S_2^2 + \epsilon_1 (\vartheta + b_{\min}) + \frac{1}{2\delta_1} e_2^2 + \frac{1}{2\delta_2} f_1^2 + \frac{1}{2} \epsilon_k^2 \\ &\quad + \sigma_1 \hat{W}^T \tilde{W} + \sigma_2 b_{\min} \hat{d} \bar{d} + \sigma_3 \hat{g} \tilde{g} + \sigma_4 \hat{b}_{\max} \tilde{b}_{\max} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_2}\right) Y_2^2 + Y_2 B_2 \end{aligned} \quad (5-33)$$

第 q 步: 选取如下 Lyapunov 函数

$$V_{q,k} = \frac{1}{2} S_q^2 + \frac{1}{2} Y_{q+1}^2$$

由(5-23)和(5-18), 当 $l = m$ 时, 第 q 个误差面 S_q 的导数为如下形式

$$\dot{S}_q = -k_q^k v_{m1} + S_{q+1} + Y_{q+1} + \alpha_{q+1} - \dot{\bar{\alpha}}_q$$

则 $V_{q,k}$ 的导数为

$$\dot{V}_{q,k} = S_q (-k_q^k v_{m1} + S_{q+1} + Y_{q+1} + \alpha_{q+1} - \dot{\bar{\alpha}}_q) + Y_{q+1} \dot{Y}_{q+1} \quad (5-34)$$

由引理 5.1 可知

$$-S_q k_q^k v_{m1} \leq \frac{S_q^2 k_{q,\max}^2 v_{m1}^2}{\sqrt{S_q^2 k_{q,\max}^2 v_{m1}^2 + \epsilon_q^2}} + \epsilon_q$$

其中 $k_{q,\max} = \max_{k \in P} \{k_q^k\}$ 。设计虚拟控制输入 $\alpha_{q+1}(\cdot)$ 如下

$$\alpha_{q+1} = -\frac{S_q k_{q,\max}^2 v_{m1}^2}{\sqrt{S_q^2 k_{q,\max}^2 v_{m1}^2 + \epsilon_q^2}} - c_q S_q - \frac{3}{2} S_q + \dot{\bar{\alpha}}_q \quad (5-35)$$

同样，将 $\alpha_{q+1}(\cdot)$ 通过如下一阶滤波器获得滤波状态 $\bar{\alpha}_{q+1}(t)$

$$\tau_{q+1} \dot{\bar{\alpha}}_{q+1} + \bar{\alpha}_{q+1} = \alpha_{q+1}, \quad \bar{\alpha}_{q+1}(0) = \alpha_{q+1}(0) \quad (5-36)$$

其中 τ_{q+1} 为滤波器时间常数。进一步可得

$$\dot{Y}_{q+1} = -\frac{Y_{q+1}}{\tau_{q+1}} + B_{q+1} \quad (5-37)$$

其中 B_{q+1} 在紧集 $\Pi_{1q} \times \Pi_2$ 内有最大值 \bar{M}_{q+1} 。

将式(5-35)、(5-37)代入(5-34)，可得 $V_{q,k}$ 的导数满足

$$\dot{V}_{q,k} \leq -c_q S_q^2 + \frac{1}{2} S_{q+1}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_{q+1}}\right) Y_{q+1}^2 + Y_{q+1} B_{q+1} - \frac{1}{2} S_q^2 + \epsilon_q \quad (5-38)$$

第 ρ 步：选取 Lyapunov 函数

$$V_{\rho,k} = \frac{1}{2} S_\rho^2$$

与上一步类似，由(5-23)和(5-18)，当 $l = m$ 时，第 ρ 个误差面 S_ρ 的导数为

$$\dot{S}_\rho = -k_\rho^k v_{m1} + v_{m,\rho+1} + u_k - \dot{\bar{\alpha}}_\rho$$

则 $V_{\rho,k}$ 的导数为

$$\dot{V}_{\rho,k} = S_\rho (-k_\rho^k v_{m1} + v_{m,\rho+1} + u_k - \dot{\bar{\alpha}}_\rho) \quad (5-39)$$

设计第 k 个子系统的控制器为

$$u_k = k_\rho^k v_{m1} - c_\rho S_\rho - \frac{1}{2} S_\rho - v_{m,\rho+1} + \dot{\bar{\alpha}}_\rho \quad (5-40)$$

将式(5-40)代入(5-39)，可得

$$\dot{V}_{\rho,k} = -c_\rho S_\rho^2 - \frac{1}{2} S_\rho^2 \quad (5-41)$$

由式(5-22)、(5-33)、(5-38)及(5-41)，可知下式成立

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{e,k} + \sum_{i=1}^{\rho} \dot{V}_{i,k} &\leq (P_k A_0^k + (A_0^k)^T P_k + \frac{1}{\delta_0} P_k P_k + \frac{1}{2\delta_1}) \|e\|^2 - \sum_{i=1}^{\rho} c_i S_i^2 \\
 &\quad - S_1 \rho_k(\tilde{y}(t)) + \sum_{i=1}^{\rho-1} ((\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_{i+1}}) Y_{i+1}^2 + |Y_{i+1} B_{i+1}|) + \delta_0 \sum_{i=2}^n (f_i^k)^2 \\
 &\quad + (\delta_0 + \frac{1}{2\delta_2}) (f_1^k)^2 + \epsilon_1 (\mathcal{G} + b_{\min}) + \sigma_1 \hat{W}^T \tilde{W} \\
 &\quad + \sigma_2 b_{\min} \hat{d} \tilde{d} + \sigma_3 \hat{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{G}} + \sigma_4 \hat{b}_{\max} \tilde{b}_{\max} + \frac{1}{2} \varepsilon_k^2 + \sum_{q=2}^{\rho-1} \epsilon_q
 \end{aligned} \tag{5-42}$$

针对上式中出现的非线性函数项 $(f_i^k)^2$, $i=1,2,\dots,n$, 令 $m_1 = \delta_0 + \frac{1}{2\delta_2}$, 由(5-11),

下式成立

$$\begin{aligned}
 &m_1 (f_1^k)^2 + \delta_0 \sum_{i=2}^n (f_i^k)^2 \\
 &\leq m_1 \alpha_{11,k} \tilde{y}(t) f_{11}(\tilde{y}(t)) + m_1 \alpha_{12,k} \tilde{y}(t-r_1(t)) f_{12}(\tilde{y}(t-r_1(t))) \\
 &\quad + m_1 \beta_{11,k} h_{11}(z(t)) + m_1 \beta_{12,k} h_{12}(z(t-d_1(t))) \\
 &\quad + \delta_0 \sum_{i=2}^n (\alpha_{i2,k} \tilde{y}(t-r_i(t)) f_{i2}(\tilde{y}(t-r_i(t))) + \alpha_{i1,k} \tilde{y}(t) f_{i1}(\tilde{y}(t))) \\
 &\quad + \delta_0 \sum_{i=2}^n (\beta_{i1,k} h_{i1}(z(t)) + \beta_{i2,k} h_{i2}(z(t-d_i(t)))) + \varpi
 \end{aligned} \tag{5-43}$$

其中, $\varpi = m_1 \varpi_1 + \delta_0 \sum_{i=2}^n \varpi_i$ 。为来处理上式中时滞问题, 利用 Lyapunov-Krasovskii 方

法, 引入如下形式的 L-K 泛函 $V_{\tau,k}$

$$\begin{aligned}
 V_{\tau,k} &= m_1 \alpha_{12,k} \frac{e^{\xi \bar{r}_1}}{1-r_1^*} \int_{t-\bar{r}_1(t)}^t e^{-\xi(t-s)} \tilde{y}(s) f_{12}(\tilde{y}(s)) ds \\
 &\quad + \sum_{i=2}^n \delta_0 \alpha_{i2,k} \frac{e^{\xi \bar{r}_i}}{1-r_i^*} \int_{t-\bar{r}_i(t)}^t e^{-\xi(t-s)} \tilde{y}(s) f_{i2}(\tilde{y}(s)) ds \\
 &\quad + m_1 \beta_{12,k} \frac{e^{\xi \bar{d}_1}}{1-d_1^*} \int_{t-\bar{d}_1(t)}^t e^{-\xi(t-s)} h_{12}(z(s)) ds \\
 &\quad + \sum_{i=2}^n \delta_0 \beta_{i2,k} \frac{e^{\xi \bar{d}_i}}{1-d_i^*} \int_{t-\bar{d}_i(t)}^t e^{-\xi(t-s)} h_{i2}(z(s)) ds
 \end{aligned} \tag{5-44}$$

对 $V_{\tau,k}$ 求导, 并通过不等式放缩可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{\tau,k} \leq & -\xi V_{\tau,k} + m_1 \beta_{12,k} \frac{e^{\xi \bar{d}_1}}{1-d_1^*} h_{12}(z(t)) - m_1 \beta_{12,k} h_{12}(z(t-d_1(t))) \\
 & + m_1 \alpha_{12,k} \frac{e^{\xi \bar{r}_1}}{1-r_1^*} \tilde{y}(t) f_{12}(\tilde{y}(t)) - m_1 \alpha_{12,k} \tilde{y}(t-r_1(t)) f_{12}(\tilde{y}(t-r_1(t))) \\
 & + \sum_{i=2}^n \delta_0 (\alpha_{i2,k} \frac{e^{\xi \bar{r}_i}}{1-r_i^*} \tilde{y}(t) f_{i2}(\tilde{y}(t)) - \alpha_{i2,k} \tilde{y}(t-r_i(t)) f_{i2}(\tilde{y}(t-r_i(t)))) \\
 & + \sum_{i=2}^n \delta_0 (\beta_{i2,k} \frac{e^{\xi \bar{d}_i}}{1-d_i^*} h_{i2}(z(t)) - \beta_{i2,k} h_{i2}(z(t-d_i(t))))
 \end{aligned} \tag{5-45}$$

为了处理系统模型中存在的未建模动态，定义如下 Lyapunov 函数

$$V_{z,k} = V_{z1,k} + V_{z2,k} \tag{5-46}$$

其中

$$\begin{aligned}
 V_{z1,k} &= \int_0^{U(z)} \psi(s) d(s) \\
 V_{z2,k} &= \frac{a_{2,k} e^{\xi \bar{d}}}{1-d^*} \int_{t-d(t)}^t e^{-\xi(t-s)} \psi\left(\frac{6a_{2,\max}}{a_0} \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(s)|)\right) \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(s)|) ds
 \end{aligned}$$

式中， $\psi(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为光滑非减函数且 $\psi(\cdot) \geq 0$ ， $\psi(0) = 0$ ， $a_{2,\max} = \max_{k \in P} \{a_{2,k}\}$ 。

根据假设 5.1 及(5-10)，并结合变能量函数方法，可求得 $V_{z,k}$ 的导数满足

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{z,k} \leq & -\frac{1}{2} \psi(U(z)) a_0 U(z) - \xi V_{z2,k} + a_{1,k} \psi\left(\frac{6a_{1,k} \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)}{a_0}\right) \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|) \\
 & + \psi\left(\frac{6\bar{\omega}}{a_0}\right) \bar{\omega} + a_{2,k} \frac{e^{\xi \bar{d}}}{1-d^*} \psi\left(\frac{6a_{2,\max}}{a_0} \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)\right) \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)
 \end{aligned} \tag{5-47}$$

由 $V_{z1,k} = \int_0^{U(z)} \psi(s) d(s) \leq U(z) \psi(U(z))$ ，易得 $-\frac{1}{4} \psi(U(z)) a_0 U(z) \leq -\frac{1}{4} a_0 V_{z1,k}$ 。定义

$a_1 = \min\{\frac{1}{4} a_0, \xi\}$ ，则 $V_{z,k}$ 的导数可写成如下形式

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{z,k} \leq & -a_1 V_{z,k} - \frac{1}{4} \psi(U(z)) a_0 U(z) + a_{1,k} \psi\left(\frac{6a_{1,k} \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)}{a_0}\right) \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|) \\
 & + a_{2,k} \frac{e^{\xi \bar{d}}}{1-d^*} \psi\left(\frac{6a_{2,\max}}{a_0} \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)\right) \tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|) + \psi\left(\frac{6\bar{\omega}}{a_0}\right) \bar{\omega}
 \end{aligned} \tag{5-48}$$

由假设 5.3，存在函数 $\psi(\cdot)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\psi(U(z))a_0U(z) &\geq m_1\beta_{12,k}\frac{e^{\xi\bar{d}_1}}{1-d_1^*}h_{12}(z(t)) + \sum_{i=2}^n\delta_0\beta_{i2,k}\frac{e^{\xi\bar{d}_i}}{1-d_i^*}h_{i2}(z(t)) \\ &+ m_1\beta_{11,k}h_{11}(z(t)) + \sum_{i=2}^n\delta_0\beta_{i1,k}h_{i1}(z(t)) \end{aligned} \quad (5-49)$$

下面给出模糊逻辑系统需要估计的函数形式

$$\begin{aligned} S_1\rho_k(\tilde{y}(t)) &= a_{1,k}\psi\left(\frac{6a_{1,k}\tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)}{a_0}\right)\tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|) \\ &+ a_{2,k}\frac{e^{\xi\bar{d}}}{1-d^*}\psi\left(\frac{6a_{2,\max}}{a_0}\tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|)\right)\tilde{\gamma}(|\tilde{y}(t)|) \\ &+ m_1\alpha_{12,k}\frac{e^{\xi\bar{r}_1}}{1-r_1^*}\tilde{y}(t)f_{12}(\tilde{y}(t)) + \sum_{i=2}^n\delta_0\alpha_{i2,k}\frac{e^{\xi\bar{r}_i}}{1-r_i^*}\tilde{y}(t)f_{i2}(\tilde{y}(t)) \\ &+ m_1\alpha_{11,k}\tilde{y}(t)f_{11}(\tilde{y}(t)) + \sum_{i=2}^n\delta_0\alpha_{i1,k}\tilde{y}(t)f_{i1}(\tilde{y}(t)) \end{aligned} \quad (5-50)$$

对于第 k 个切换子系统，选择最终的 Lyapunov 函数为

$$V_k = V_{e,k} + \sum_{i=1}^{\rho} V_{i,k} + V_{\tau,k} + V_{z,k} \quad (5-51)$$

基于上述分析，其导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq (P_k A_0^k + (A_0^k)^T P_k + \frac{1}{\delta_0} P_k P_k + \frac{1}{2\delta_1}) \|e\|^2 + \sum_{i=1}^{\rho-1} ((\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_{i+1}}) Y_{i+1}^2 + |Y_{i+1} B_{i+1}|) \\ &- \sum_{i=1}^{\rho} c_i S_i^2 + \epsilon_1(\mathcal{G} + b_{\min}) + \sigma_1 \hat{W}^T \tilde{W} + \sigma_2 b_{\min} \hat{d} \tilde{d} + \sigma_3 \hat{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{G}} + \sigma_4 \hat{b}_{\max} \tilde{b}_{\max} + \frac{1}{2} \epsilon_k^2 \\ &+ \psi\left(\frac{6\varpi}{a_0}\right) \underline{\varpi} - \xi V_{\tau,k} - a_1 V_{z,k} + \sum_{q=2}^{\rho-1} \epsilon_q \end{aligned} \quad (5-52)$$

由于 P_k 为正定对称矩阵，存在正定对称矩阵 Q_k （可利用 LMI 工具箱求解）使得

$$P_k A_0^k + (A_0^k)^T P_k + \frac{1}{\delta_0} P_k P_k + \frac{1}{2\delta_1} \leq -Q_k \quad (5-53)$$

根据 Young 氏不等式， $|B_{i+1}Y_{i+1}| \leq \frac{\beta_0}{2} + \frac{M_{i+1}^2 Y_{i+1}^2}{2\beta_0}$ 成立。针对控制器设计过程中每一

步涉及到的一阶滤波器，选择时间常数使得 $\frac{1}{\tau_{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{M_{i+1}^2}{2\beta_0} + \beta_{i+1}$ ，由此可得

$$\sum_{i=1}^{\rho-1} ((\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_{i+1}}) Y_{i+1}^2 + |Y_{i+1} B_{i+1}|) \leq \sum_{i=1}^{\rho-1} (-\beta_{i+1} Y_{i+1}^2) + \frac{\rho-1}{2} \beta_0 \quad (5-54)$$

另外，根据参数估计误差定义及 Young 氏不等式，可知

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 \hat{W}^T \tilde{W} &\leq -\frac{\sigma_1}{2} \tilde{W}^T \tilde{W} + \frac{\sigma_1}{2} W^T W \\
 \sigma_2 b_{\min} \hat{d} \tilde{d} &\leq -\frac{\sigma_2 b_{\min}}{2} \tilde{d}^2 + \frac{\sigma_2 b_{\min}}{2} d^2 \\
 \sigma_3 \hat{g} \tilde{g} &\leq -\frac{\sigma_3}{2} \tilde{g}^2 + \frac{\sigma_3}{2} g^2 \\
 \sigma_4 \hat{b}_{\max} \tilde{b}_{\max} &\leq -\frac{\sigma_4}{2} \tilde{b}_{\max}^2 + \frac{\sigma_4}{2} b_{\max}^2
 \end{aligned} \tag{5-55}$$

将式(5-53)、(5-54)和(5-55)带入式(5-52)，可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k &\leq -Q_k \|e\|^2 - \sum_{i=1}^{\rho} c_i S_i^2 + \sum_{i=1}^{\rho-1} (-\beta_{i+1} Y_{i+1}^2) - \xi V_{\tau,k} - a_1 V_{z,k} - \frac{\sigma_1}{2} \tilde{W}^T \tilde{W} \\
 &\quad - \frac{\sigma_2 b_{\min}}{2} \tilde{d}^2 - \frac{\sigma_3}{2} \tilde{g}^2 - \frac{\sigma_4}{2} \tilde{b}_{\max}^2 + \frac{\sigma_1}{2} W^T W + \frac{\sigma_2 b_{\min}}{2} d^2 + \frac{\sigma_3}{2} g^2 \\
 &\quad + \frac{\sigma_4}{2} b_{\max}^2 + \epsilon_1 (g + b_{\min}) + \frac{1}{2} \varepsilon_k^2 + \frac{\rho-1}{2} \beta_0 + \sum_{q=2}^{\rho-1} \epsilon_q \\
 &= -\zeta V_k + D
 \end{aligned} \tag{5-56}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \min_{\substack{k \in P \\ i=1,2,\dots,\rho}} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q_k)}{\lambda_{\min}(P_k)}, 2c_i, 2\beta_{i+1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, a_1 \right\} \\
 D &= \max_{k \in P} \left\{ \frac{\sigma_1}{2} W_k^T W_k + \frac{\sigma_2 b_{\min}}{2} d^2 + \frac{\sigma_3}{2} g^2 + \frac{\sigma_4}{2} b_{\max}^2 + \epsilon_1 (g + b_{\min}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_k^2 + \frac{\rho-1}{2} \beta_0 + \psi\left(\frac{6\varpi}{a_0}\right) \varpi + \sum_{q=2}^{\rho-1} \epsilon_q \right\}
 \end{aligned}$$

通过设计参数，当 $\zeta > \frac{D}{R_1}$ 时，有在 $V_k = R_1$ 上时， $\dot{V}_k < 0$ ，表明 $V_k \leq R_1$ 是不变集，

即选择初值使 $V_k(0) \leq R_1$ ，则对所有 $t > 0$ ，有 $V_k(t) \leq R_1$ 。

由式(5-56)，可得

$$0 \leq V_k(t) \leq e^{-\zeta t} V_k(0) + \frac{D}{\zeta}$$

由此可知， S_i, Y_{i+1}, e_i 以及自适应参数信号有界稳定。由 S_1 有界，根据(5-16)可得 $\tilde{y}(t)$ 有界稳定，从而 $y(t)$ 有界稳定，进一步，由(5-18)可得 ξ 以及 Ξ 均有界稳定。

下面分析 v_l, x 稳定性。由(5-1)可得

$$y^{(n)} - \sum_{i=1}^n ((\theta^k)^T \phi_i(y(t)) + f_i^k(\cdot))^{(n-i)} = \sum_{i=0}^m b_i^k u_k^{(i)} \tag{5-57}$$

定义 $G_\rho(s)$ 为相对阶不小于 ρ 的稳定传递函数。根据假设 5.4, $B(s) = \sum_{i=0}^m b_i^k s^i$ 为 Hurwitz 稳定多项式, $y(t)$ 有界且 $\phi_i(y(t)), f_i^k(\cdot)$ 为光滑函数, 将式(5-57)两边同时通过 $\frac{G_\rho(s)}{B(s)}$ 滤波, 可得 $G_\rho(s)u_k$ 有界。

当 $l = m$ 时, 根据式(5-18), 可得两个传递函数 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 满足 $v_{m,1} = G_1(s)u_k$, $v_{m,\rho+1} = G_2(s)u_k$ 。 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 的相对阶分别为 ρ 和 $\rho+1$ 。根据上述分析, 可得 $v_{m,1}$ 及 $v_{m,\rho+1}$ 有界。同时, 根据 $S_\rho, \dot{\bar{\alpha}}_{q,k}$ 的有界性可知 u_k 有界。从而, 根据(5-18), (5-19)以及估计误差 e_i 有界性可得信号 v_l 和 x 有界。同理可证 $\alpha_{i,k}, \bar{\alpha}_{i,k}$ 有界性。

综上, 第 k 个子系统的闭环系统所有信号一致有界。

对任意 $k, l \in P$, 定义

$$\mu = \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P_k)}{\lambda_{\min}(P_l)}, \frac{\alpha_{i2,k}}{\alpha_{i2,l}}, \frac{\beta_{i2,k}}{\beta_{i2,l}}, \frac{a_{2,k}}{a_{2,l}}, k, l \in P \right\} \quad (5-58)$$

则 $V_k(\cdot) \leq \mu V_l(\cdot)$ 成立。

下面给出本章的主要结果。

定理 5.1. 考虑满足假设条件 5.1-5.4 的非线性时滞切换系统(5-1)。给定任意大于零的常数 R_0 , R_1 , 使得对 $\forall k \in P, V_k(0) < R_1, y_d^2 + \dot{y}_d^2 \leq R_0$, 则当切换信号平均驻留时间满足 $\tau > \frac{\log \mu}{\zeta}$ 时, 由系统(5-1)、滤波器(5-18)、输出反馈控制器(5-40), 虚拟控制器(5-29)、(5-35)以及自适应率(5-30)所组成的闭环系统有界稳定。并且, 系统输出跟踪性能满足预定的暂稳态性能指标要求。

证明: 令时间序列 $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_{N_\sigma(T,0)}$ 表示在区间 $[0, T]$ 上的切换时刻, 不失一般性, 令 $t_0 = 0$ 。定义

$$\Phi(t) = e^{\zeta t} V_{\sigma(t)}(X(t)) \quad (5-59)$$

其中 $X = [e^T, \tilde{g}, \tilde{d}, \tilde{b}_m, W, S_1, \dots, S_\rho, Y_2, \dots, Y_\rho]^T$ 。则对任意 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 存在如下结果

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \zeta e^{\zeta t} V_{\sigma(t)}(X(t)) + e^{\zeta t} \dot{V}_{\sigma(t)}(X(t)) \\ &\leq D e^{\zeta t}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \end{aligned} \quad (5-60)$$

进而, 根据定义(5-58), 可知 $V_k(t) < \mu V_l(t), \forall k, l \in P$ 。由此, 求解(5-60)可得

$$\begin{aligned}
 \Phi(t_{i+1}) &= e^{\zeta t_{i+1}} V_{\sigma(t_{i+1})}(X(t_{i+1})) \\
 &= \mu \Phi(t_{i+1}^-) \\
 &\leq \mu(\Phi(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} D e^{\zeta t} dt)
 \end{aligned} \tag{5-61}$$

对任意 $T > 0$ ，从 $i = 0$ 到 $i = N_{\sigma}(T, 0) - 1$ ，重复上述求解过程可得

$$\begin{aligned}
 \Phi(T^-) &\leq \Phi(t_{N_{\sigma}(T, 0)}) + \int_{t_{N_{\sigma}(T, 0)}}^T D e^{\zeta t} dt \\
 &\leq \mu(\Phi(t_{N_{\sigma}(T, 0)-1}) + \int_{t_{N_{\sigma}(T, 0)-1}}^{t_{N_{\sigma}(T, 0)}} D e^{\zeta t} dt + \mu^{-1} \int_{t_{N_{\sigma}(T, 0)}}^T D e^{\zeta t} dt) \\
 &\leq \dots \\
 &\leq \mu^{N_{\sigma}(T, 0)} (\Phi(0) + \sum_{i=0}^{N_{\sigma}(T, 0)-1} \mu^{-i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D e^{\zeta t} dt + \mu^{-N_{\sigma}(T, 0)} \int_{t_{N_{\sigma}(T, 0)}}^T D e^{\zeta t} dt)
 \end{aligned} \tag{5-62}$$

当 $\tau_a > \frac{\log \mu}{\zeta}$ 时，可知对任意常数 $\delta \in (0, \zeta - \frac{\log \mu}{\tau_a})$ ，存在 $\tau_a > \frac{\log \mu}{\zeta - \delta}$ 。根据平均

驻留时间定义，可得

$$N_{\sigma}(T, t) \leq N_0 + \frac{(\zeta - \delta)(T - t)}{\log \mu}, \quad \forall T \geq t \geq 0 \tag{5-63}$$

子系统切换过程，切换次数满足 $N_{\sigma}(T, 0) - i \leq 1 + N_{\sigma}(T, t_{i+1})$ ， $i = 0, 1, \dots, N_{\sigma}(T, 0)$ 。

因此可知 $\mu^{N_{\sigma}(T, 0)-i} \leq \mu^{1+N_0} e^{(\zeta - \delta)(T - t_{i+1})}$ 。由于 $\delta \leq \zeta$ ，简单推导可得

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} D e^{\zeta t} dt \leq e^{(\zeta - \delta)t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D e^{\delta t} dt \tag{5-64}$$

将(5-64)代入(5-62)，得到如下结果

$$\Phi(T^-) \leq \mu^{N_{\sigma}(T, 0)} \Phi(0) + \mu^{1+N_0} e^{(\zeta - \delta)T} \int_0^T D e^{\delta t} dt \tag{5-65}$$

由 $\Phi(\cdot)$ 定义，两边同除 $e^{\zeta T}$ 可得

$$\begin{aligned}
 V_{\sigma(T^-)} &\leq e^{N_0 \log \mu} e^{(\frac{\log \mu}{\tau_a} - \zeta)T} \alpha_2(\|X(0)\|) + \mu^{1+N_0} \frac{D}{\delta} (1 - e^{-\delta T}) \\
 &\leq e^{N_0 \log \mu} e^{(\frac{\log \mu}{\tau_a} - \zeta)T} \alpha_2(\|X(0)\|) + \mu^{1+N_0} \frac{D}{\delta}
 \end{aligned} \tag{5-66}$$

对于所选的 Lyapunov 函数 $V_{\sigma}(X)$ ，存在 \mathcal{K}_{∞} 类函数 $\underline{\alpha}$ 及 $\bar{\alpha}$ ，使得 $\underline{\alpha}(\|X\|) \leq V_{\sigma(t)}(X) \leq \bar{\alpha}(\|X\|)$ 。因而，可得

$$\begin{aligned}
 \underline{\alpha}(X(t)) &\leq e^{N_0 \log \mu} e^{(\frac{\log \mu}{\tau_a} - \zeta)T} \bar{\alpha}(\|X(0)\|) + \mu^{1+N_0} \frac{D}{\delta} (1 - e^{-\delta T}) \\
 &\leq e^{N_0 \log \mu} e^{(\frac{\log \mu}{\tau_a} - \zeta)T} \bar{\alpha}(\|X(0)\|) + \mu^{1+N_0} \frac{D}{\delta}
 \end{aligned} \tag{5-67}$$

由式(5-56)，上文已证明，在所设计的控制器下，当第 k 个子系统运行时，该子

系统闭环系统所有状态有界稳定。由式(5-67)可知，当系统切换信号满足平均驻留时间条件 $\tau_a > \frac{\log \mu}{\zeta}$ 时，则对于有界的系统状态初值以及跟踪信号

$V_k(0) < R_1, y_d^2 + \dot{y}_d^2 \leq R_0$ ，真个切换闭环系统所有状态均有界稳定。至此，证明完毕。

注释 5.3: 由以上分析可知，在所设计的反馈控制器下，当切换信号满足定理中平均驻留条件时，闭环系统有界稳定。值得注意的是，系统稳定的切换信号平均驻留时间条件同样受系统控制器设计影响。其参数 μ ， ζ 均由系统参数以及控制器设计参数决定。因而，切换信号与控制器信号相互影响。例如，为了得到更加宽松的切换信号条件，则需要以控制设计为代价，保证各子系统更快的收敛速率。其设计标准应视具体控制对象以及控制指标要求而定。

5.5 仿真算例

为了证明所提方法的有效性，考虑如下数值算例：

$$\begin{cases} \dot{z} = Q^{\sigma(t)}(z(t), y(t), y(t-r(t))) \\ \dot{x}_1 = x_2 + \theta^{\sigma(t)} \phi_1(y) \\ \quad + f_1^{\sigma(t)}(y(t), y(t-r_1(t)), z(t), z(t-d_1(t))) \\ \dot{x}_2 = b_0^k u_k + \theta^{\sigma(t)} \phi_2(y) \\ \quad + f_2^{\sigma(t)}(y(t), y(t-r_2(t)), z(t), z(t-d_2(t))) \end{cases}$$

其中 $\sigma(t) \rightarrow \{1, 2\}$ ，即系统由两个子系统构成。系统相关方程和参数具体如下：

$$\begin{aligned} Q^1(\cdot) &= -z(t) + y(t-r(t)) \sin(x_1), \\ \phi_1(\cdot) &= x_1^2(t), \quad f_1^1(\cdot) = z(t) + \sin(x_1(t)), \\ f_2^1(\cdot) &= x_1(t-r_2(t)) \sin(x_1), \\ Q^2(\cdot) &= -2z(t) + 2y(t-r(t)), \\ \phi_2(\cdot) &= \sin(x_1(t)), \quad f_1^2(\cdot) = 0, \\ f_2^2(\cdot) &= z(t) + x_1(t-r_2(t)) \end{aligned}$$

其中 $r(t) = r_2(t) = 0.5(1 + \sin(t))$ ， $r_1(t) = 0$ 。令 $b_0^1 = 0.8, b_0^2 = 2, \theta^1 = 3, \theta^2 = 1$ ，跟踪信号为 $y_d = 0.5 \sin(0.6t) + 0.5 \sin(0.4t)$ 。

针对未建模动态，选择 Lyapunov 函数 $U(z(t)) = \frac{1}{2} z^2(t)$ ，则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(z(t))}{\partial z(t)} Q^1 &\leq -\frac{1}{2} z^2(t) + \tilde{y}^2(t-r(t)) + y_d^2(t-r(t)) \\ \frac{\partial U(z(t))}{\partial z(t)} Q^2 &\leq -\frac{1}{2} z^2(t) + \frac{4}{3} \tilde{y}^2(t-r(t)) + \frac{4}{3} y_d^2(t-r(t))\end{aligned}$$

选择参数 $a_{2,1}=1, a_{2,2}=\frac{4}{3}$ ，假设 5.1 满足条件。对于系统中 $f_i^k(\cdot)$ 函数，可知

$$\begin{aligned}|f_1^1(\cdot)|^2 &\leq 2z^2(t) + 2, \quad |f_1^2(\cdot)|^2 = 0 \\ |f_2^1(\cdot)|^2 &\leq 2\tilde{y}^2(t-r_2(t)) + 2y_d^2(t-r_2(t)) \\ |f_2^2(\cdot)|^2 &\leq 2z^2(t) + 4\tilde{y}^2(t-r_2(t)) + 4y_d^2(t-r_2(t))\end{aligned}$$

因此，可选择 $\alpha_{22,1}=2, \alpha_{22,2}=4$ ， $\alpha_{12,1}=\alpha_{12,2}=0$ 。

设计切换滤波器如下

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = k_1^\sigma \nu_1 + \nu_2 \\ \dot{\nu}_2 = k_2^\sigma \nu_1 + u_\sigma \\ \dot{\xi}_1 = k_1^\sigma \xi_1 + \xi_2 + k_1^\sigma y(t) \\ \dot{\xi}_2 = k_2^\sigma \xi_1 + k_2^\sigma y(t) \\ \dot{\Xi}_1 = k_1^\sigma \Xi_1 + \Xi_2 + \phi_1(y) \\ \dot{\Xi}_2 = k_2^\sigma \Xi_1 + \phi_2(y) \end{cases}$$

令 $Q_1=Q_2=5I$ ，基于 Matlab 的 LMI 工具箱，解得参数 $k^1=[1.7576, 1.7025]^T$ ， $k^2=[1.8249, 1.7619]^T$ ， $\delta_0=50$ ， $\delta_1=0.1692$ ，同时解得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 24.2164 & -9.1970 \\ -9.1790 & 18.6113 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 26.1093 & -10.0778 \\ -10.0778 & 19.5454 \end{bmatrix}$$

选择模糊隶属函数 $\mu_{F^l}(\tilde{y}) = \exp\left[\frac{-(\tilde{y}-3+l)^1}{4}\right]$ ， $l=1, \dots, 5$ 。则模糊基函数可定义为

$$\varphi_l(\tilde{y}) = \frac{\mu_{F^l}(\tilde{y})}{\sum_{l=1}^5 \mu_{F^l}(\tilde{y})}$$

预定跟踪性能参数设置为： $v(t)=0.95e^{-0.7t}+0.05$ 。另外，选择界限调整参数为 $\underline{\delta}=0.65$ ， $\bar{\delta}=0.8$ 。

设计虚拟控制器为如下形式

$$\alpha_2 = -\text{sign}(b_m^k) \frac{S_1 r \hat{d}^2 \alpha_{20}^2}{\sqrt{(S_1 r \hat{d} \alpha_{20})^2 + \epsilon_1^2}}$$

其中

$$\alpha_{20} = \xi_2 + \hat{g}\eta + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)S_1 r - \dot{y}_d + S_1 r \hat{b}_{\max} + \frac{c_1 S_1}{r} - \frac{\hat{W}\varphi(\tilde{y})}{r} - \frac{\tilde{y}\dot{v}}{v}$$

另外，设计参数调整自适应率为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{W}} &= S_1 \varphi(\tilde{y}) - \sigma_1 \hat{W}, \quad \dot{\hat{d}} = S_1 r \alpha_{20} - \sigma_2 \hat{d} \\ \dot{\hat{g}} &= S_1 r \eta_1 - \sigma_3 \hat{g}, \quad \dot{\hat{b}}_{\max} = (S_1 r)^2 - \sigma_4 \hat{b}_{\max}\end{aligned}$$

其中， $\hat{W} = [\hat{W}_1, \dots, \hat{W}_5]^T$, $\varphi(\tilde{y}) = [\varphi_1(\tilde{y}), \dots, \varphi_5(\tilde{y})]^T$ ，参数选择 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$ 。

最后，设计系统最终控制输入为

$$u_k = k_2^k v_1 - c_2 S_\rho - \frac{1}{2} S_2 + \frac{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2}{\tau_2}$$

其中，一阶滤波器参数 $\tau_2 = 0.05$ 。其他参数设置为 $c_1 = c_2 = 150$, $\epsilon_1 = 0.01$ 。

选择系统各状态的初值为

$$\begin{aligned}[z(0), x_1(0), x_2(0)]^T &= [0.5, 0.6, 0.2]^T, \quad [v^T(0), \xi^T(0), \Xi^T(0)]^T = [0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ \hat{W}(0) &= [0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 1]^T, \quad [\hat{d}(0), \hat{g}(0), \hat{b}_{\max}(0)]^T = [0, 0, 0]^T, \quad \bar{\alpha}_2(0) = 0.\end{aligned}$$

仿真结果如图 5-2~图 5-5 所示。其中，系统切换信号如图 5-2 所示，其平均驻留时间值为 $\tau_a = 7 > (\frac{\log 2.8290}{0.1496})$ 。图 5-3 和图 5-4 给出了系统输出信号以及跟踪误差曲线，从中可看出系统输出信号可有效跟踪上给定参考信号，且满足预定的暂稳态性能指标。

作为对比，考虑了不用预定性能控制方法下的系统跟踪控制，其跟踪误差如图 5-5 所示。从图中可看出，预定性能控制方法在保证系统暂稳态误差以及抑制切换波动等方面均有理想的控制结果。

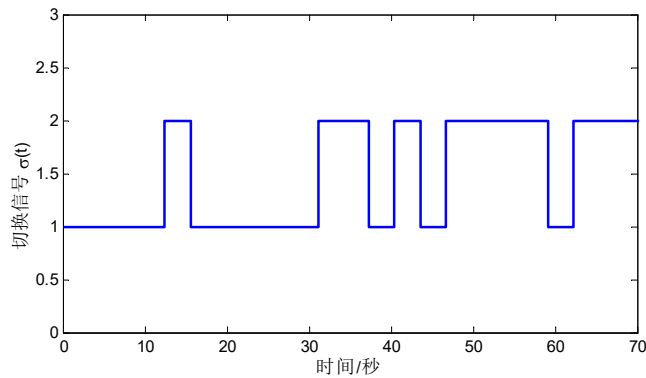


图 5-2 切换信号

Fig. 5-2 The trajectory of switching signal

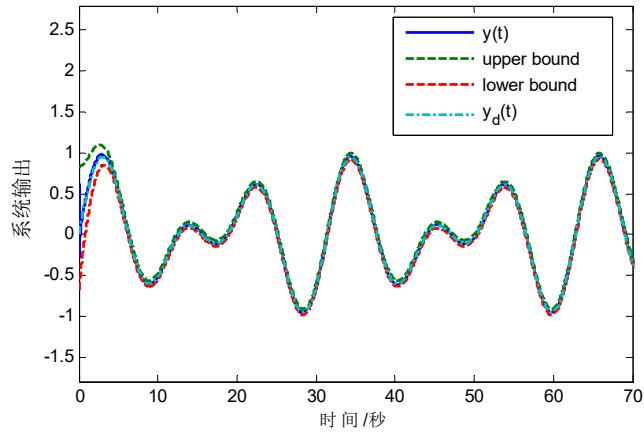


图 5-3 系统输出与跟踪信号

Fig. 5-3 The trajectory of output and reference signal

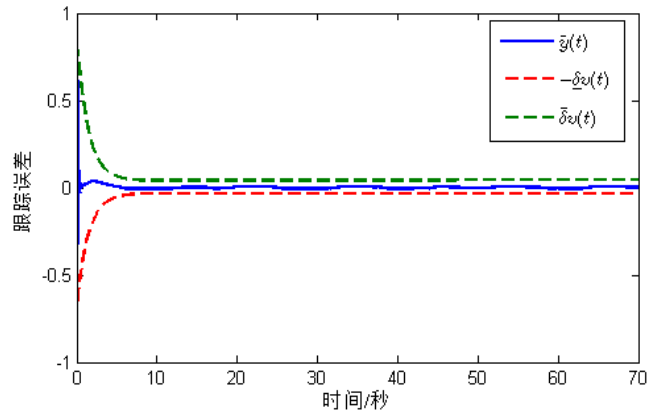


图 5-4 跟踪误差曲线

Fig. 5-4 The trajectory of tracking error

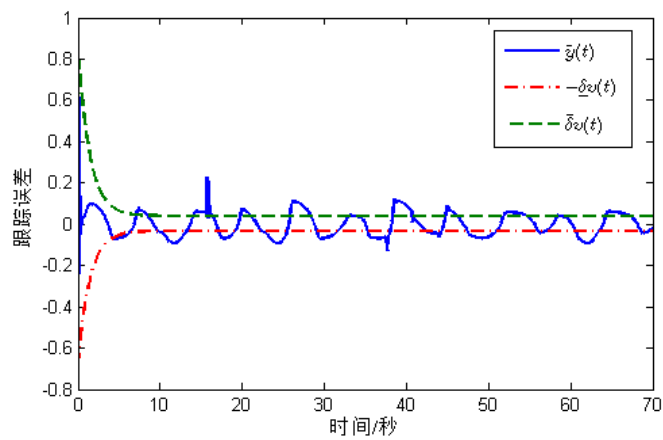


图 5-5 无预定性能控制下跟踪误差曲线

Fig. 5-4 The trajectory of tracking error without PPC

5.6 本章小结

本章考虑含有时延和未建模动态的非线性切换系统自适应预定性能控制。利用自适应模糊逻辑系统估计能力，处理系统未知非线性函数；通过设计切换 K 滤波器估计系统不可测状态，基于平均驻留时间稳定性分析方法，提出了预定性能跟踪控制方案，保证切换信号满足一定的平均驻留时间情况下，系统的跟踪误差满足预定暂稳态性能指标。同时结合动态面控制方法，降低了控制器迭代设计过程中计算复杂度爆炸问题。本章的控制方法前提是系统满足下三角型结构，且未建模动态满足输入到状态稳定条件，因而通过 **backstepping** 迭代方法可设计出系统镇定控制器。如果系统中存在不稳定不可镇定子系统，或未建模动态不满足 ISS 条件，本章方法难以应用。关于这一问题，将在下一章节继续展开。

第6章 基于切换调节的异步切换非线性关联系统预定性能控制

6.1 引言

第5章研究了基于平均驻留时间的非线性切换系统跟踪控制问题。所考虑子系统结构均为严格反馈下三角型系统,同时系统中存在的未建模动态满足输入到状态稳定条件,因而各子系统均是可镇定的,也就是说,最终可变为稳定的子系统。然而,当系统中存在不可镇定的不稳定子系统时,上一章节的方法将不再适用。同时,随着现代过程控制系统日益复杂,系统模型通常由单个非线性系统模型通过一定的耦合关联组成关联大系统。如何保证关联系统跟踪性能的控制问题仍未解决。针对上述问题,本章继续研究具有严格反馈结构(下三角型结构)非线性系统控制问题。

在工程控制领域,众多的复杂系统,如交通系统,电力系统等均可视为大规模(关联)系统。非线性关联系统由若干非线性单系统通过一定的耦合关联组成,各子系统间的关联影响使得系统控制难度急剧增加^[117]。针对关联系统的研究,早起集中于经典的集中控制方法,然而,随着系统模型的日益复杂,集中控制在系统分析以及控制器设计过程日益困难。文献[118]提出将整个系统的控制问题分为若干可处理的子问题。以此方式,整个控制系统的控制方法由单一控制器转换为若干分散独立的分散控制器。自此,由于分散控制方法的诸多优点,如控制器计算只应用局部单系统的状态或输出变量^[119],针对关联系统的控制方法逐渐由集中控制转变为分散控制,并相继出现了丰硕的研究成果,参见[120]-[122]及相关参考文献。

同时,在第5章中已经提到的,在非线性控制系统中,往往难以建立精确的系统模型,因此难以忽略系统模型不确定性以及未建模动态等因素^{[123]-[125]}。现有文献处理未建模动态干扰问题时,通常假设其满足输入到状态稳定等条件^{[82][126]}。当此类条件难以满足时,现有文献所提方法则难以适用。另外,针对非线性切换系统,现有文献所采用的基于时间约束切换信号方法多为平均驻留时间方法^{[41][42]}。如何利用更一般形式的时间约束切换信号调节各子系统的运行时间,进而与所设计的控制器保证系统稳定性与预定跟踪性能,现有文献却很少考虑这方面的内容。

基于上述研究背景并结合文献[63]中镇定切换信号设计思想,本章考虑非线性切

换系统自适应预定性能控制问题。所研究的系统模型中包含未建模动态干扰，且假设部分该动态系统不满足传统输入到输出稳定假设条件。另外，通过径向基神经网络估计方法处理系统未知的非线性函数困难。最终给出了预定性能控制方法，保证系统的跟踪误差满足预定的暂稳态性能要求。

6.2 系统描述与预备知识

6.2.1 系统描述

本章考虑了关联非线性切换系统，考虑到关联系统和切换系统均有若干子系统构成，为加以区分，本章特指关联系统的子系统为子系统，切换系统的子系统为模态。

考虑如下关联非线性切换系统

$$\begin{aligned}\dot{z}_i(t) &= Q_{i,\sigma(t)}(z_i(t), \bar{y}_N(t)) \\ \dot{x}_{ij}(t) &= x_{ij+1}(t) + f_{ij,\sigma(t)}(\bar{x}_{ij}(t)) + g_{ij,\sigma(t)}(\bar{y}_N(t), z_i(t)) \\ \dot{x}_{in_i}(t) &= u_{i,\sigma(t)}(t) + f_{in_i,\sigma(t)}(\bar{x}_{in_i}(t)) + g_{in_i,\sigma(t)}(\bar{y}_N(t), z_i(t)) \\ y_i(t) &= x_{i1}(t)\end{aligned}\quad (6-1)$$

其中 $i=1,2,\dots,N$ 表示第 i 个子系统， N 为关联子系统的个数， $j=1,2,\dots,n_i-1$ 。 $x_i=[x_{i1},\dots,x_{in_i}]^T \in R^{n_i}$ ， $u_{i,\sigma(t)} \in R$ ， $y_i \in R$ 分别表示第 i 个子系统的状态，控制输入及系统输出。 $z_i \in R^d$ 表示未建模动态系统的状态。 $\bar{x}_{ij}=[x_{i1},\dots,x_{ij}]^T$ ， $\bar{y}_N=[y_1,\dots,y_N]^T$ 表示系统状态和输出构成的向量。 $f_{ij,\sigma(t)}(\cdot), f_{in_i,\sigma(t)}(\cdot)$ 为未知的光滑非线性函数， $g_{ij,\sigma(t)}(\cdot)$ 和 $g_{in_i,\sigma(t)}(\cdot)$ 表示各子系统间以及各子系统与未建模动态之间的未知关联函数。切换信号 $\sigma(t):[0,+\infty] \rightarrow \mathcal{P}$ 为分段右连续函数，其中 $\mathcal{P}=\{1,2,\dots,m\}$ 为切换模态构成的集合。本章不考虑切换过程中系统状态跳变情况。

本章的目的是设计分散控制器以及切换信号，使得在控制器与切换信号共同作用下：

- 1) 当部分未建模动态不满足输入到状态稳定条件时，闭环系统仍然有界稳定；
- 2) 系统输出 $y_i(t)$ 可跟踪上参考信号(跟踪信号) $y_{ir}(t)$ ，且跟踪误差满足预定的暂稳态性能要求。

为完成上述控制目标，首先给出相关预备知识及假设条件。

6.2.2 非线性系统假设条件

假设 6.1: 对于系统(6-1)中未建模动态系统, 存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\underline{\alpha}_{zi}(\cdot)$ 及 $\bar{\alpha}_{zi}(\cdot)$ 以及连续可微函数 $V_{zi,k} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$, $k \in \mathcal{P}$, 使得对所有 $z_i \in \mathbb{R}^d$, 下式成立

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{zi}(\|z_i\|) &\leq V_{zi,k}(z_i) \leq \bar{\alpha}_{zi}(\|z_i\|) \\ \frac{\partial V_{zi,k}}{\partial z_i} \mathcal{Q}_{i,k} &\leq -\lambda_{zi,k} V_{zi,k}(z_i) + \sum_{l=1}^N \bar{\gamma}_{il,k}(\|y_l\|) \end{aligned} \quad (6-2)$$

其中常数 $\lambda_{zi,k} \in \mathbb{R}$, 且

$$\begin{cases} \lambda_{zi,k} > 0, & k \in \mathcal{P}_S \\ \lambda_{zi,k} \leq 0, & k \in \mathcal{P}_U \end{cases}$$

$\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_U \subset \mathcal{P}$ 分别表示满足输入到状态稳定和不能满足输入到状态稳定的未建模动态子

系统。函数 $\bar{\gamma}_{il,k}(\cdot)$ 满足局部特性, $\limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\gamma}_{il,k}(\xi)}{\xi^2} < +\infty$ 。

定义跟踪误差 $\tilde{y}_i(t) = y_i(t) - y_{ir}(t)$ 。则存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\gamma_{il,k}(\cdot)$ 使得 $\bar{\gamma}_{il,k}(\|y_l(t)\|) \leq \gamma_{il,k}(\|\tilde{y}_l(t)\|) + \gamma_{il,k}(\|y_{lr}(t)\|)$ 。例如, 可选 $\gamma_{il,k}(\|X\|) = \bar{\gamma}_{il,k}(2\|X\|)$ 。则(6-2)中不等式可写为

$$\frac{\partial V_{zi,k}}{\partial z_i} \mathcal{Q}_{i,k} \leq -\lambda_{zi,k} V_{zi,k}(z_i) + \sum_{l=1}^N \gamma_{il,k}(\|\tilde{y}_l\|) + \varsigma_{i,k} \quad (6-3)$$

其中, 标量 $\varsigma_{i,k}$ 满足 $\varsigma_{i,k} \geq \sum_{l=1}^N \gamma_{il,k}(\|y_{lr}\|)$ 。

注释 6.1: 未建模动态是系统控制中常见现象, 为了处理未建模动态, 现有文献[113][114]通常假设其满足输入到状态稳定条件, 或其他类似等价条件, 如输入到状态实用稳定(Input-to-state practically stable)。本章通过设计切换信号, 允许存在不满足输入到状态稳定的未建模动态, 即允许存在 $\lambda_{zi,k} < 0$ 情况。因此本章方法放松了现有文献假设条件的保守性。

假设 6.2: 对任意 $k \in \mathcal{P}$, 未知子系统间关联函数 $g_{ij}(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, 满足

$$g_{ij,k}^2(\cdot) \leq \sum_{l=1}^N \varrho_{ijl,k} \phi_{ijl}(y_l) + \varpi_{ij,k}(z_i(t)) \quad (6-4)$$

其中 $\varrho_{ijl,k} \geq 0$ 为未知函数。 $\phi_{ijl}(y_l) \geq 0$, $\varpi_{ij,k}(z_i(t))$ 为已知光滑函数, 且 $\varpi_{ij,k}(0) = 0$,

$\sum_{j=1}^{n_i} \varpi_{ij,k}(z_i(t)) \leq \underline{\lambda}_{zi,k} \underline{\alpha}_{zi}(z_i(t))$ 。 $\underline{\lambda}_{zi,k}$, $\underline{\alpha}_{zi}(\cdot)$ 定义见假设 6.1。

在实际的系统中, 人们通常可以知道关联项函数结构, 但是无法获得精确的函

数增益值，如假设 6.2 所述。这一问题通常可利用自适应控制方法解决。若删除假设条件中关于未建模动态函数项 $\varpi_{ij,k}(z_i(t))$ ，该条件变为其他现有文献[115]中常见假设。

假设 6.3: 对任意 $(m,n) \in E(\mathcal{P})$ ，存在常数 $\mu_{mn} > 0$ 使得相应模态下的 Lyapunov 函数满足

$$V_n(\xi) \leq \mu_{mn} V_m(\xi), \quad \xi \in R^d \quad (6-5)$$

切换系统稳定性分析中常用(平均)驻留时间方法，该方法中需假设对任意 $m,n \in \mathcal{P}$ ，存在 $V_n(\cdot) \leq \mu V_m(\cdot)$ ，其中 μ 为大于 1 的常数。本节假设 6.3 中，常数 μ_{mn} 与各模态相关，因此该值可更精确地估计不同模态在切换时刻 Lyapunov 函数大小关系。

6.2.3 神经网络估计

本章中，采用如下径向基神经网络(Radial basis function neural networks, RBF NN)估计系统未知的连续函数 $f(x): R^q \rightarrow R$ ：

$$f(x) = \theta^{*T} \varphi(x) + \varepsilon(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (6-6)$$

其中 $x \in \Omega \subset R^q$ 表示输入向量， $\theta^* = [\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_l^*]^T \in R^l$ 为理想的权值向量， $\varphi(\cdot) = [\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_l(\cdot)]^T$ 为径向基函数向量，其中 $l > 1$ 为神经网络节点个数。 $\varepsilon(x)$ 为函数估计误差。径向基函数 $\varphi_i(x)$ 通常选择如下形式的高斯函数

$$\varphi_i(x) = \exp \left[-\frac{(x - \mu_i)^T (x - \mu_i)}{\eta_i^2} \right], \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (6-7)$$

其中 $\mu_i = [\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{iq}]^T$ 为神经网络感受野中心， η_i 为高斯函数的宽度。最优权向量 θ^* 是在邻域 $x \in \Omega$ 内使得误差 $\varepsilon(x)$ 最小的 θ 值，即

$$\theta^* := \arg \min_{\theta \in R^l} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |f(x) - \theta^T \varphi(x)| \right\} \quad (6-8)$$

6.2.4 切换信号描述

在区间 $(0, t)$ 内，令切换时刻为 $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N_\sigma(0,t)}$ ，其中 $N_\sigma(0, t)$ 为此区间内的切换次数。

定义第 k 次的持续时间为

$$S_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k, k = 0, 1, \dots \quad (6-9)$$

在区间 (s, t) 内，令

$$T_j(s, t) := \left| (s, t) \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(\tau_i)=j}}^{N_\sigma(0,t)} (\tau_i, \tau_{i+1}) \right) \right| \quad (6-10)$$

表示模态 $j \in \mathcal{P}$ 的持续运行的时间。根据 $T_j(s, t)$ 的定义可知 $t - s = \sum_{j \in \mathcal{P}} T_j(s, t)$ 。考

虑 $(m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，定义

$$N_{mn}(s, t) := \#\{m \rightarrow n\}_s^t \quad (6-11)$$

为在区间 (s, t) 内从模态 m 到模态 n 的切换次数。

假设 6.4: 对 $j \in \mathcal{P}_S, k \in \mathcal{P}_U, (m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，存在 \mathcal{FK}_∞ 类函数 $\rho_{S,j}, \rho_{U,k}, \rho_{mn}$ 以及大于零的常数 $\bar{T}_{S,j}, \bar{T}_{U,k}, \bar{N}_{mn}$ 使得在任意区间 (s, t) 内，(6-10)和(6-11)中定义的函数 $T_j(s, t)$ ， $T_k(s, t)$ ， $N_{mn}(s, t)$ 满足

$$\begin{aligned} T_j(s, t) &\geq -\bar{T}_{S,j} + \rho_{S,j}(s, t - s) \\ T_k(s, t) &\leq \bar{T}_{U,k} + \rho_{U,k}(s, t - s) \\ N_{mn}(s, t) &\leq \bar{N}_{mn} + \rho_{mn}(s, t - s) \end{aligned} \quad (6-12)$$

注释 6.2: 条件(6-12)的三个不等式分别限制了稳定模态运行时间下界和不稳定模态运行时间上界，以及各模态间切换次数的上界。与传统平均驻留时间方法不同的是，各模态的运行时间和切换次数限制中，采用了具有关于时间区间非线性特性的 \mathcal{FK}_∞ 类函数，因而各模态的运行时间不仅仅局限于区间的仿射函数形式，且切换频率可随区间的改变而发生变化。例如当选取 $\rho_{mn}(s, t - s) = k_1(t - s)^{3/2} + k_2(t - s)$ 时，可发现系统的切换频率可随时间区间而增加。

6.3 主要结果

6.3.1 预定性能控制简述

关于预定性能控制在第二章已作相关介绍。由于第二章研究了单系统模型，所以，部分公式不便直接应用到本章，因而，本小节特此简洁介绍。

考虑第 i 个子系统， $\forall i = 1, 2, \dots, N$ ，本章预定性能控制的目的是使得系统跟踪误差满足预定的暂稳态性能要求。具体而言，令跟踪误差满足

$$-\bar{\delta}_i v_i(t) \leq \tilde{y}_i \leq \bar{\delta}_i v_i(t) \quad (6-13)$$

其中， $v_i(t)$ 为如下形式的指数衰减函数

$$v_i(t) = (v_{i0} - v_{i\infty}) \exp(-a_i t) + v_{i\infty} \quad (6-13)$$

v_{i0} , $v_{i\infty}$ 和 a_i 为大于零的常数。给定任意初始条件, 选择 $\underline{\delta}_i v_{i0}$, $\bar{\delta}_i v_{i0}$ 使得 $\tilde{y}_i(0)$ 在初始的预定界限内。 $(-\underline{\delta}_i v_{i\infty}, \bar{\delta}_i v_{i\infty})$ 限定了系统最大稳态误差界限。

定义相应误差状态变化 $\chi_i(\frac{\tilde{y}_i}{v_i}): (-\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, 具体如下

$$\chi_i(\frac{\tilde{y}_i}{v_i}) = \frac{1}{2} \left(\ln(\underline{\delta}_i + \frac{\tilde{y}_i}{v_i}) - \ln(\bar{\delta}_i - \frac{\tilde{y}_i}{v_i}) \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} \quad (6-14)$$

由第二章可知, 当状态 $\chi_i(\frac{\tilde{y}_i}{v_i})$ 稳定时, 跟踪误差满足(6-13), 即预定性能控制问题转化为状态镇定问题。

6.3.2 分散自适应控制设计

针对关联系统的第 i 个子系统, 本节提出分散自适应控制器设计方法。首先, 引入如下状态变换

$$\begin{cases} s_{i1} = \chi_i(\tilde{y}_i / v_i) \\ s_{ij} = x_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} \\ Y_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij} \end{cases} \quad (6-15)$$

其中 α_{ij} 和 $\bar{\alpha}_{ij}$ 分别为虚拟控制器和滤波后的虚拟控制器。定义紧集 $\Omega_{ir} = \{y_{ir}^2 + \dot{y}_{ir}^2 \leq R_0\}$, $\Omega_{ij,k} = \left\{ \sum_{m=1}^j \left(\frac{1}{2} s_{im}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{im}^T \Gamma_{im,k}^{-1} \tilde{\theta}_{im} \right) + \frac{\tilde{g}_i^2}{2\gamma_{gi,k}} + \sum_{m=2}^j \frac{1}{2} Y_{im}^2 \leq R_1 \right\}$, 其中 R_0 和 R_1 为大于零的常数。

本节通过径向基神经网络估计系统中存在未知光滑函数即关联项。定义神经网络基函数为 $\varphi_{ij}(\bar{x}_{ij})$, 理想权值 θ_{ij}^* 。对 $\forall k \in \mathcal{P}$, 定义 $\mathcal{G}_i = \max_{1 \leq l \leq N, 1 \leq q \leq n_l} \varrho_{lqi,k}$ 。令 $\hat{\theta}_{ij}$ 和 \hat{g}_i 分别为参数 θ_{ij}^* 和 \mathcal{G}_i 的估计值。定义相应的估计误差为 $\tilde{\theta}_{ij} = \theta_{ij}^* - \hat{\theta}_{ij}$, $\tilde{g}_i = \mathcal{G}_i - \hat{g}_i$ 。

下面通过 backstepping 递归方法完成控制器设计过程。

第一步: 针对状态变换后的第一个状态变量, 选择如下 Lyapunov 函数

$$V_{i1,k} = \frac{1}{2} s_{i1}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{i1}^T \Gamma_{i1,k}^{-1} \tilde{\theta}_{i1} + \frac{1}{2\gamma_{gi,k}} \tilde{g}_i^2 + \frac{1}{2} Y_{i2}^2 \quad (6-16)$$

其中 $\Gamma_{i1,k}^{-1}$ 和 $\gamma_{gi,k}$ 分别为大于零的常数。结合状态变换, $V_{i1,k}$ 沿(6-1)对时间求导为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{il,k} = & s_{il} r_i \left(s_{i2} + \alpha_{i2} + Y_{i2} + f_{il,k} + g_{il,k} - \dot{y}_{ir} - \frac{\tilde{y}_i \dot{v}_i}{v_i} \right) \\ & + \tilde{\theta}_{il}^T \Gamma_{il,k}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{il} + \frac{1}{\gamma_{gi,k}} \tilde{g}_i \dot{\tilde{g}}_i + Y_{i2} \dot{Y}_{i2} \end{aligned} \quad (6-17)$$

$$\text{其中 } r_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{y}_i + \underline{\delta}_i v_i} - \frac{1}{\tilde{y}_i - \bar{\delta}_i v_i} \right).$$

由于 RBF 神经网络对光滑非线性函数具有良好的估计能力, 因此未知函数 $f_{il,k}$ 可通过下式估计

$$f_{il,k} = \theta_{il}^{*T} \varphi_{il}(x_{il}) + \varepsilon_{il,k} \quad (6-18)$$

根据 Young 氏不等式, 并将(6-18)代入(6-17)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{il,k} \leq & s_{il} r_i \left(\alpha_{i2} + \frac{7}{4} s_{il} r_i + \hat{\theta}_{il}^T \varphi_{il}(x_{il}) - \dot{y}_{ir} - \frac{\tilde{y}_i \dot{v}_i}{v_i} \right) \\ & + \sum_{l=1}^N \varrho_{il,k} \phi_{il}(y_l) + \varpi_{il,k}(z_i) + \frac{1}{2} s_{i2}^2 + \frac{1}{2} Y_{i2}^2 \\ & + s_{il} r_i \tilde{\theta}_{il}^T \varphi_{il}(x_{il}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{il,k}^2 + \tilde{\theta}_{il}^T \Gamma_{il,k}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{il} + \frac{1}{\gamma_{gi,k}} \tilde{g}_i \dot{\tilde{g}}_i + Y_{i2} \dot{Y}_{i2} \end{aligned} \quad (6-19)$$

设计虚拟控制器和自适应律为

$$\alpha_{i2} = -\frac{c_{il} s_{il}}{r_i} - \frac{7}{4} s_{il} r_i - \hat{\theta}_{il}^T \varphi_{il}(x_{il}) + \dot{y}_{ir} + \frac{\tilde{y}_i \dot{v}_i}{v_i} - \frac{\hat{g}_i \bar{\varphi}_i}{r_i} - \frac{\bar{h}_i(\tilde{y}_i)}{r_i} \quad (6-20)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{il} = \Gamma_{il,k} s_{il} r_i \varphi_{il}(x_{il}) - \Gamma_{il,k} \hat{\theta}_{il} \quad (6-21)$$

$$\dot{\hat{g}}_i = \gamma_{gi,k} s_{il} \bar{\varphi}_i - \gamma_{gi,k} \hat{g}_i \quad (6-22)$$

其中, 虚拟控制器(6-20)中

$$\bar{\varphi}_i = \frac{2s_{il}}{s_{il}^2 + \epsilon_i} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^{n_l} \phi_{lji}(y_i)$$

是为了处理子系统间关联函数对该子系统的影响而引入的光滑函数。

为了避免 backstepping 方法在控制器设计过程中产生的“计算爆炸”问题, 将虚拟控制器通过如下一阶滤波器得到新的状态变量 $\bar{\alpha}_{i2}(\cdot)$

$$\tau_{i2} \dot{\bar{\alpha}}_{i2} + \bar{\alpha}_{i2} = \alpha_{i2}, \quad \bar{\alpha}_{i2}(0) = \alpha_{i2}(0) \quad (6-23)$$

由于

$$\dot{\bar{\alpha}}_{i2} = \frac{\alpha_{i2} - \bar{\alpha}_{i2}}{\tau_{i2}} = -\frac{Y_{i2}}{\tau_{i2}}$$

可得 $\dot{Y}_{i2} = -Y_{i2} / \tau_{i2} + B_{i2}$, 其中 B_{i2} 为连续函数, 并且在集合 $\Omega_{il,k} \times \Omega_{ir}$ 内, 具有最大值

M_{i2} 。因此, 根据 Young 氏不等式, 可得 $Y_{i2}B_{i2} \leq \frac{\beta_{i1}}{2} + \frac{Y_{i2}^2 M_{i2}^2}{2\beta_{i1}}$ 。设计参数 τ_{i2} 为

$$\frac{1}{\tau_{i2}} = \frac{1}{2} + \frac{M_{i2}^2}{2\beta_{i1}} + \bar{\tau}_{i2} \quad (6-24)$$

其中 β_{i1} 和 $\bar{\tau}_{i2}$ 为大于零的常数。

将式(6-20)-(6-24)代入(6-19), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{il,k} \leq & -c_{il}s_{il}^2 + \frac{1}{2}s_{i2}^2 - \bar{\tau}_{i2}Y_{i2}^2 - s_{il}\hat{h}_i(\tilde{y}_i) + \sum_{l=1}^N \varrho_{il,k}\phi_{il}(y_l) \\ & - s_{il}\mathcal{G}_i\bar{\varphi}_i + \varpi_{il,k}(z_i) - \frac{1}{2}\|\tilde{\theta}_{il}\|^2 - \frac{1}{2}\tilde{g}_i^2 + \pi_{il,k} \end{aligned} \quad (6-25)$$

其中 $\pi_{il,k} = \frac{1}{2}\|\theta_{il}^*\|^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G}_i^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{il,k}^2 + \frac{1}{2}\beta_{i1}^2$ 。

第 j 步 ($j = 2, 3, \dots, n_i - 1$): 选择如下形式的 Lyapunov 函数

$$V_{ij,k} = V_{ij-1,k} + \frac{1}{2}s_{ij}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{ij}^T \Gamma_{ij,k}^{-1} \tilde{\theta}_{ij} + \frac{1}{2}Y_{ij+1}^2 \quad (6-26)$$

对其求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij,k} = & \dot{V}_{ij-1,k} + s_{ij}(s_{ij+1} + \alpha_{ij+1} + Y_{ij+1} + f_{ij,k} + g_{ij,k} - \dot{\bar{\alpha}}_{ij}) \\ & + Y_{ij+1}\dot{Y}_{ij+1} + \tilde{\theta}_{ij}^T \Gamma_{ij,k}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ij} \end{aligned} \quad (6-27)$$

利用径向基神经网络估计上式中出现的未知非线性函数 $f_{ij,k}(\bar{x}_{ij})$, 即 $f_{ij,k}(\bar{x}_{ij}) = \theta_{ij}^{*T} \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) + \varepsilon_{ij,k}$ 。根据 Young 氏不等式及(6-4), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij,k} \leq & \dot{V}_{ij-1,k} + s_{ij}(\alpha_{ij+1} + \frac{7}{4}s_{ij} + \hat{\theta}_{ij}^T \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) - \dot{\bar{\alpha}}_{ij}) + \frac{1}{2}s_{ij+1}^2 \\ & + s_{ij}\tilde{\theta}_{ij}^T \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij,k}^2 + \sum_{l=1}^N \varrho_{ijl,k}\phi_{ijl}(y_l) \\ & + \varpi_{ij,k}(z_i) + \frac{1}{2}Y_{ij+1}^2 + Y_{ij+1}\dot{Y}_{ij+1} + \tilde{\theta}_{ij}^T \Gamma_{ij,k}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ij} \end{aligned} \quad (6-28)$$

设计虚拟控制输入以及自适应律如下

$$\alpha_{ij+1} = -(c_{ij} + \frac{1}{2} + \frac{7}{4})s_{ij} - \hat{\theta}_{ij}^T \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) + \dot{\bar{\alpha}}_{ij} \quad (6-29)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_{ij} = \Gamma_{ij,k}s_{ij}\varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) - \Gamma_{ij,k}\hat{\theta}_{ij} \quad (6-30)$$

同第一步, 令 α_{ij+1} 通过如下一阶滤波器

$$\tau_{ij+1}\dot{\bar{\alpha}}_{ij+1} + \bar{\alpha}_{ij+1} = \alpha_{ij+1}, \quad \bar{\alpha}_{ij+1}(0) = \alpha_{ij+1}(0) \quad (6-31)$$

其中, 参数 τ_{ij+1} 设计为

$$\frac{1}{\tau_{ij+1}} = \frac{1}{2} + \frac{M_{ij+1}^2}{2\beta_{ij}} + \bar{\tau}_{ij+1} \quad (6-32)$$

将式(6-29)-(6-32)代入(6-28), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij,k} \leq & -\sum_{q=1}^j c_{iq} s_{iq}^2 - \sum_{q=1}^j \bar{\tau}_{iq+1} Y_{iq+1}^2 + \sum_{q=1}^j \varpi_{iq,k}(z_i) + \sum_{q=1}^j \sum_{l=1}^N \varrho_{iq,l,k} \phi_{iq,l}(y_l) \\ & + \frac{1}{2} s_{ij+1}^2 - s_{i1} \mathcal{G}_i \bar{\varphi}_i - s_{i1} \bar{h}_i(\tilde{y}_i) - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^j \|\tilde{\theta}_{iq}\|^2 - \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_i^2 + \pi_{ij,k} \end{aligned} \quad (6-33)$$

其中 $\pi_{ij,k} = \pi_{ij-1,k} + \frac{1}{2} (\|\theta_{ij}^*\|^2 + \beta_{ij}^2 + \varepsilon_{ij,k}^2)$ 。

第 n 步: 选择 Lyapunov 函数如下

$$V_{in_i,k} = V_{in_i-1,k} + \frac{1}{2} s_{in_i}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{in_i}^T \Gamma_{in_i,k}^{-1} \tilde{\theta}_{in_i} \quad (6-34)$$

对其求导可得

$$\dot{V}_{in_i,k} = \dot{V}_{in_i-1,k} + s_{in_i} (u_{in_i,k} + f_{in_i,k} + g_{in_i,k} - \dot{\bar{\alpha}}_{in_i}) + \tilde{\theta}_{in_i}^T \Gamma_{in_i,k}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{in_i} \quad (6-35)$$

利用径向基神经网络估计上式中未知函数 $f_{in_i,k}(\bar{x}_{in_i}) = \theta_{in_i}^{*T} \varphi_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) + \varepsilon_{in_i,k}$, 同样,

根据 Young 氏不等式及(6-4), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{in_i,k} = & \dot{V}_{in_i-1,k} + s_{in_i} (u_{in_i,k} + \frac{3}{4} s_{in_i} + \hat{\theta}_{in_i}^T \varphi_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) - \dot{\bar{\alpha}}_{in_i}) \\ & + s_{in_i} \tilde{\theta}_{in_i}^T \varphi_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{in_i,k}^2 + \sum_{l=1}^N \varrho_{in_i,l,k} \phi_{in_i,l}(y_l) \\ & + \varpi_{in_i,k}(z_i) + \tilde{\theta}_{in_i}^T \Gamma_{in_i,k}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{in_i} \end{aligned} \quad (6-36)$$

设计控制输入以及自适应律如下

$$u_{in_i,k} = -(c_{in_i} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}) s_{in_i} - \hat{\theta}_{in_i}^T \varphi_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) + \dot{\bar{\alpha}}_{in_i} \quad (6-37)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_{in_i} = \Gamma_{in_i,k} s_{in_i} \varphi_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) - \Gamma_{in_i,k} \hat{\theta}_{in_i} \quad (6-38)$$

将(6-37), (6-38)代入(6-36), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{in_i,k} \leq & -\sum_{q=1}^{n_i} c_{iq} s_{iq}^2 - \sum_{q=1}^{n_i-1} \bar{\tau}_{iq+1} Y_{iq+1}^2 + \sum_{q=1}^{n_i} \varpi_{iq,k}(z_i) + \sum_{q=1}^{n_i} \sum_{l=1}^N \varrho_{iq,l,k} \phi_{iq,l}(y_l) \\ & - s_{i1} \mathcal{G}_i \bar{\varphi}_i - s_{i1} \bar{h}_i(\tilde{y}_i) - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n_i} \|\tilde{\theta}_{iq}\|^2 - \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_i^2 + \pi_{in_i,k} \end{aligned} \quad (6-39)$$

其中 $\pi_{in_i,k} = \pi_{in_i-1,k} + \frac{1}{2} (\|\theta_{in_i}^*\|^2 + \varepsilon_{in_i,k}^2)$ 。

对于 z_i 子系统，余项 $\sum_{q=1}^{n_i} \varpi_{iq,k}(z_i)$ 满足 $\sum_{q=1}^{n_i} \varpi_{iq,k}(z_i) \leq \underline{\lambda}_{zi,k} \underline{\alpha}_{zi}(z_i(t))$ ，因此可得 $\sum_{q=1}^{n_i} \varpi_{iq,k}(z_i) \leq \underline{\lambda}_{zi,k} V_{zi,k}(z_i(t))$ ，根据假设 6.1，函数 $V_{zi,k}(z_i)$ 沿(6-1)的时间导数满足

$$\frac{\partial V_{zi,k}}{\partial z_i} Q_{i,k} \leq -\lambda_{zi,k} V_{zi,k}(z_i) + \sum_{l=1}^N \gamma_{li,k}(|\tilde{y}_l|) + \varsigma_{i,k} \quad (6-40)$$

根据状态变换(6-14)，当 $\tilde{y}_i = 0$ 时， $s_{i1} = 0$ 。因此，可选择合适函数 $h_i(\tilde{y}_i)$ 使得对任意 $k \in \mathcal{P}$ ，下式成立

$$s_{i1} h_i(\tilde{y}_i) \geq \sum_{l=1}^N \gamma_{li,k}(|\tilde{y}_l|) \quad (6-41)$$

注释 6.3: 现有文献[82],[116]考虑系统中未建模动态时，通常假设其满足输入到状态稳定条件，进而集合改变能量函数(changing supply function)思想进行稳定性分析。本章中，在所设计的切换信号条件下，将不满足 ISS 条件的未建模动态视为不稳定切换系统模态，因而，通过限制其运行时间，保证最终的闭环系统有界稳定，简化了系统稳定性分析过程。

下面，针对第 k 个切换系统模态，选择 Lyapunov 函数如下：

$$V_k = \sum_{i=1}^N (V_{in_i,k} + V_{zi,k}) \quad (6-42)$$

令 $\bar{\lambda}_{zi,k} = (\lambda_{zi,k} - \underline{\lambda}_{zi,k})$ ，通过计算可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & \sum_{i=1}^N \left\{ -\sum_{q=1}^{n_i} c_{iq} s_{iq}^2 - \sum_{q=1}^{n_i-1} \bar{\tau}_{iq+1} Y_{iq+1}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_i^2 + \varsigma_{i,k} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n_i} \|\tilde{\theta}_{iq}\|^2 \right. \\ & \left. + \pi_{in_i,k} - \bar{\lambda}_{zi,k} V_{zi,k}(z_i) \right\} + \sum_{i=1}^N \Delta_{i,k} \end{aligned} \quad (6-43)$$

其中 $\Delta_{i,k} = \sum_{l=1}^N \sum_{q=1}^{n_l} \varrho_{lqi,k} \phi_{lqi}(y_i) - s_{i1} \mathcal{G}_i \bar{\varphi}_i$ 为各子系统关联产生的余项。

根据 \mathcal{G}_i 及 $\bar{\varphi}_i$ 定义，可得

$$\begin{aligned} \Delta_{i,k} & \leq \mathcal{G}_i \sum_{l=1}^N \sum_{q=1}^{n_l} \phi_{lqi}(y_i) - s_{i1} \mathcal{G}_i \bar{\varphi}_i \\ & = \mathcal{G}_i \frac{\epsilon_i - s_{i1}^2}{s_{i1}^2 + \epsilon_i} \sum_{l=1}^N \sum_{q=1}^{n_l} \phi_{lqi}(y_i) \end{aligned} \quad (6-44)$$

针对(6-44)，考虑可能出现的如下两种情况：

第一，如果 $|s_{i1}| > \sqrt{\epsilon_i}$ ，则根据(6-44)，可得 $\Delta_{i,k} < 0$ ；

第二, 如果 $|s_{i1}| \leq \sqrt{\epsilon_i}$, 则根据状态变换(6-14), 可得 y_i 有界。

由以上两种可能的情况可知, 总可以找到常数 $\bar{\Delta}_i \geq 0$, 使得 $\Delta_{i,k} \leq \bar{\Delta}_i$ 。因此, 针对第 k 个切换系统模态, 所选 Lyapunov 函数的导数满足

$$\dot{V}_k \leq -\lambda_k V_k + D \quad (6-45)$$

其中

$$\lambda_k = \min_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n_i}} \left\{ 2c_{ij}, 2\bar{\tau}_{ij+1,k}, \frac{1}{\lambda_{\max}(\Gamma_{ij}^{-1})}, \gamma_{\theta i,k}, \bar{\lambda}_{zi,k} \right\}$$

$$D = \max_{k \in \mathcal{P}} \left\{ \sum_{i=1}^N (\pi_{in_i,k} + \varsigma_{i,k} + \bar{\Delta}_i) \right\}$$

对于系统(6-1), 如果所有的未建模动态子系统均满足输入到状态稳定条件, 则通过上述控制器设计方法, 可使得对任意 $k \in \mathcal{P}$, $\lambda_k > 0$ 成立, 即 \mathcal{P}_U 为空集。这种情况下, 可通过控制器设计使得 $\lambda_k > \frac{D}{R_1}$, 进而可得当 $V_k = R_1$ 时, $\dot{V}_k < 0$ 。因此, 如果初值满足 $V_k(0) \leq R_1$, 则对任意 $t > 0$, $V_k(t) \leq R_1$ 恒成立。当系统未建模动态不满足 ISS 条件时, 由于 $\bar{\lambda}_{zi,k} < 0$, 上述结论不再成立, 因而现有文献无法分析这种情况下系统的稳定性。

为了保证最终闭环系统稳定性, 本章给出了一类限制稳定模态与不稳定模态运行条件的切换信号, 当两类模态运行情况满足该条件时, 可得出闭环系统稳定性结论。上述结果表述如下

定理 6.1: 考虑满足假设 6.1-6.4 的非线性关联切换系统(6-1)。如果存在常数 c_1 , c_2 以及 \mathcal{FK}_∞ 函数 $\rho: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, 使得在任意区间 $[r, r+s]$ 内, 存在

$$\begin{aligned} c_1 - \rho(r, s) &\geq - \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\lambda_j| \rho_{S,j}(r, s) + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\lambda_k| \rho_{U,k}(r, s) \\ &\quad + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) \rho_{mn}(r, s) \end{aligned} \quad (6-46)$$

且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N_\sigma(0,t)} \exp(-\rho(\tau_i, t - \tau_i)) \leq c_2 \quad (6-47)$$

则对任意有界的初值, 分散控制器(6-20), (6-29), (6-37)以及自适应率(6-21), (6-22), (6-30), (6-38)可保证闭环系统对任意满足条件的切换信号一致有界稳定。同时, 跟踪误差收敛于预先给定的性能指标界限内。

证明：对任意 $t > 0$ ，由式(6-45)，可得

$$V_{\sigma(t)} \leq \exp(-\lambda_{\sigma(\tau_{N_{\sigma}(0,t)})}(t - \tau_{N_{\sigma}(0,t)}))V_{\sigma(t)}(x(\tau_{N_{\sigma}(0,t)})) + D \int_{\tau_{N_{\sigma}(0,t)}}^t \exp(-\lambda_{\sigma(\tau_{N_{\sigma}(0,t)})}(t-s))ds \quad (6-48)$$

根据 $V_j(x) \leq \mu_{ij}V_i(x)$ ，将迭代计算上式可得

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \eta_1(t)V_{\sigma(t)}(x_0) + \eta_2(t)D \quad (6-49)$$

其中

$$\eta_1(t) = \exp \left(- \sum_{\substack{i=0 \\ \tau_{N_{\sigma}(0,t)+1}:=t}}^{N_{\sigma}(0,t)} \lambda_{\sigma(\tau_i)} S_{i+1} + \sum_{i=0}^{N_{\sigma}(0,t)-1} \ln \mu_{\sigma(\tau_i)\sigma(\tau_{i+1})} \right)$$

$$\eta_2(t) = \sum_{\substack{i=0 \\ \tau_{N_{\sigma}(0,t)+1}:=t}}^{N_{\sigma}(0,t)} \left(\exp \left(- \sum_{\substack{k=i+1 \\ \tau_{N_{\sigma}(0,t)+1}:=t}}^{N_{\sigma}(0,t)} \lambda_{\sigma(\tau_k)} S_{k+1} + \sum_{k=i+1}^{N_{\sigma}(0,t)-1} \ln \mu_{\sigma(\tau_k)\sigma(\tau_{k+1})} \right) \frac{(1 - \exp(-\lambda_{\sigma(\tau_i)} S_{i+1}))}{\lambda_{\sigma(\tau_i)}} \right)$$

对于所选的 Lyapunov 函数，存在 \mathcal{K}_{∞} 类函数 $\underline{\alpha}$ 及 $\bar{\alpha}$ ，使得 $\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V_k(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|)$ 。则根据式(6-49)可表述为

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq \eta_1(t)\bar{\alpha}(\|x_0\|) + \eta_2(t)D \quad (6-50)$$

为完成证明，需证明

- 1) $\eta_1(t)\bar{\alpha}(\|x_0\|)$ 小于一类 \mathcal{KL} 函数；
- 2) $\eta_2(t)D$ 小于非负的常数。

由式(6-9)-(6-11)可知

$$\eta_1(t) = \exp \left(- \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\lambda_j| \left| (0,t) \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(\tau_i)=j}}^{N_{\sigma}(0,t)} (\tau_i, \tau_{i+1}) \right) \right| \right. \\ \left. + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\lambda_k| \left| (0,t) \cap \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(\tau_i)=k}}^{N_{\sigma}(0,t)} (\tau_i, \tau_{i+1}) \right) \right| + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) \sharp \{m \rightarrow n\}_0^{\tau_{N_{\sigma}(0,t)}-1} \right) \quad (6-51)$$

$$= \exp \left(- \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\lambda_j| T_j(0,t) + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\lambda_k| T_k(0,t) \right. \\ \left. + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) N_{mn}(0, \tau_{N_{\sigma}(0,t)}-1) \right)$$

同理，可得

$$\begin{aligned}
 \eta_2(t) = & \sum_{j \in \mathcal{P}_S} \frac{1}{|\lambda_j|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=j \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \left(\exp \left(- \sum_{p \in \mathcal{P}_S} |\lambda_p| T_p(\tau_{i+1}, t) + \sum_{q \in \mathcal{P}_U} |\lambda_q| T_q(\tau_{i+1}, t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) N_{mn}(\tau_{i+1}, \tau_{N_\sigma(0,t)-1}) \right) (1 - \exp(-|\lambda_j| S_{i+1})) \right) \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{P}_U} \frac{1}{|\lambda_k|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=j \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \left(\exp \left(- \sum_{p \in \mathcal{P}_S} |\lambda_p| T_p(\tau_{i+1}, t) + \sum_{q \in \mathcal{P}_U} |\lambda_q| T_q(\tau_{i+1}, t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) N_{mn}(\tau_{i+1}, \tau_{N_\sigma(0,t)-1}) \right) \times (1 - \exp(|\lambda_k| S_{i+1})) \right) \\
 \leq & \sum_{j \in \mathcal{P}_S} \frac{1}{|\lambda_j|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=j \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \left(\exp \left(- \sum_{p \in \mathcal{P}_S} |\lambda_p| T_p(\tau_{i+1}, t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{q \in \mathcal{P}_U} |\lambda_q| T_q(\tau_{i+1}, t) + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) N_{mn}(\tau_{i+1}, \tau_{N_\sigma(0,t)-1}) \right) \right) \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{P}_U} \frac{1}{|\lambda_k|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=j \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \left(\exp \left(- \sum_{p \in \mathcal{P}_S} |\lambda_p| T_p(\tau_{i+1}, t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{q \in \mathcal{P}_U} |\lambda_q| T_q(\tau_{i+1}, t) + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) N_{mn}(\tau_{i+1}, \tau_{N_\sigma(0,t)-1}) \right) \right) \quad (6-52)
 \end{aligned}$$

由假设(6-12), 可知

$$\begin{aligned}
 \eta_1(t) \leq & \exp \left(\sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\lambda_j| (\bar{T}_{S,j} - \rho_{S,j}(0, t)) + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\lambda_k| (\bar{T}_{U,k} + \rho_{U,k}(0, t)) \right. \\
 & \left. + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) (\bar{N}_{mn} + \rho_{mn}(0, t)) \right) \quad (6-53)
 \end{aligned}$$

存在常数 c 使得 $c \geq \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\lambda_j| \bar{T}_{S,j} + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\lambda_k| \bar{T}_{U,k} + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) \bar{N}_{mn}$ 。由条件(6-46),

式(6-53)可写为如下形式

$$\eta_1(t) \leq \exp(c + c_1 - \rho(0, t)) \quad (6-54)$$

由函数 $\rho(0, t)$ 性质, 易知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta_1(t) = 0$ 。同时, 函数 $\bar{\alpha}(\|x_0\|)$ 为 \mathcal{K}_∞ 类函数, 因而可得 $\eta_1(t) \bar{\alpha}(\|x_0\|) \in \mathcal{KL}$ 。

下面证明 $\eta_2(t)$ 函数有界。

根据条件(6-12), $\eta_2(t)$ 满足如下形式

$$\begin{aligned}
\eta_2(t) \leq & \sum_{j \in \mathcal{P}_S} \frac{1}{|\lambda_j|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=j \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_S} |\lambda_p| (\bar{T}_{S,p} - \rho_{S,p}(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \right. \\
& + \sum_{q \in \mathcal{P}_U} |\lambda_q| (\bar{T}_{U,q} - \rho_{U,q}(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \\
& \left. + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn})(\bar{N}_{mn} + \rho_{mn}(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \right) \\
& + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} \frac{1}{|\lambda_k|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=k \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_S} |\lambda_p| (\bar{T}_{S,p} - \rho_{S,p}(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \right. \\
& + \sum_{q \in \mathcal{P}_U} |\lambda_q| (\bar{T}_{U,q} - \rho_{U,q}(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \\
& \left. + \sum_{(m,n) \in E(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn})(\bar{N}_{mn} + \rho_{mn}(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \right)
\end{aligned}$$

进一步, 根据(6-46), 上式可表述为

$$\begin{aligned}
\eta_2(t) \leq & \sum_{j \in \mathcal{P}_S} \frac{1}{|\lambda_j|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=j \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \exp(c + c_1 - \rho(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1})) \\
& + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} \frac{1}{|\lambda_k|} \sum_{\substack{i: \sigma(\tau_i)=k \\ i=0, \dots, N_\sigma(0,t) \\ \tau_{N_\sigma(0,t)+1}:=t}} \exp(c + c_1 - \rho(\tau_{i+1}, t - \tau_{i+1}))
\end{aligned} \tag{6-55}$$

由条件(6-47), 且对一个切换系统而言, 其切换子系统个数 \mathcal{P} 有界, 因而, 上述不等式有界, 即 $\eta_2(t)$ 为有界函数。

由上述分析可得整个闭环系统信号的有界稳定性。同时, 对于任意满足条件的切换信号而言, 系统收敛的界限与切换信号无关, 即系统对任意满足条件的切换信号一致有界稳定。至此, 证明完毕。

注释 6.4: 基于文献[63]镇定切换设计方法, 本章考虑了切换信号与控制器协同设计。由于所考虑系统中存在一部分子系统, 其未建模动态不满足输入到状态稳定条件, 传统控制方法难以实现该类系统的镇定或跟踪控制。通过设计切换信号, 限制该类子系统的运行时间, 可实现整个切换关联系统有界稳定。另一方面, 所设计控制器可调节某些子系统闭环系统性能参数, 例如子系统收敛速率等。以此方式, 控制器设计对切换信号的约束条件, 如特定时间内允许发生的切换次数以及各切换子系统的驻留时间等, 产生一定的调节作用, 从而一定程度上影响切换调节。

6.4 仿真算例

为验证本章所提方法，给出如下非线性关联切换系统数值仿真算例。

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = Q_{i,\sigma(t)}(z_i(t), \bar{y}_2(t)) \\ \dot{x}_{i1}(t) = x_{i2}(t) + f_{i1,\sigma(t)}(x_{i1}(t)) + g_{1j,\sigma(t)}(\bar{y}_2(t), z_i(t)) \\ \dot{x}_{i2}(t) = u_{i,\sigma(t)}(t) + f_{i2,\sigma(t)}(\bar{x}_{i2}(t)) + g_{i2,\sigma(t)}(\bar{y}_2(t), z_i(t)) \\ y_i(t) = x_{i1}(t) \end{cases}$$

其中关联子系统个数 $N = 2$ ，切换系统模态 $\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$ 。给子系统 and 相应模态对应的函数如下所示：

$$\begin{aligned} Q_{i,1} &= -z_i + y_i \sin(y_{3-i}) & Q_{i,2} &= -2z_i + y_i \cos(y_{3-i}) \\ Q_{i,3} &= \frac{1}{4}z_i + y_i \sin(2y_{3-i}) & g_{i1,1} &= \frac{1}{4}z_i + \sin(y_i) \\ g_{i1,2} &= \frac{1}{2}z_i + \cos(y_i) & g_{i1,3} &= \frac{1}{4}z_i + \cos(y_i^2) \\ g_{i2,1} &= y_i \sin(y_{3-i}) & g_{i2,2} &= y_i \cos(y_{3-i}) \\ g_{i2,3} &= y_i \sin(y_{3-i}^2) & f_{i1,1} &= \sin^2(x_{i1}) \\ f_{i1,2} &= \cos(2x_{i1}) & f_{i1,3} &= x_{i1} \exp(-x_{i1}) \\ f_{i2,1} &= x_{i1} \sin^2(x_{i2}) & f_{i2,2} &= x_{i1}x_{i2} \\ f_{i2,3} &= x_{i1} \exp(-x_{i2}) \end{aligned}$$

对于未建模动态系统，选择 $V_{zi,k} = \frac{1}{2}z_i^2$ ，则可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{zi,1}}{z_i} Q_{i,1} &\leq -\frac{1}{2}z_i^2 + \tilde{y}_i^2 + y_{ir}^2 \\ \frac{\partial V_{zi,2}}{z_i} Q_{i,2} &\leq -\frac{3}{2}z_i^2 + \tilde{y}_i^2 + y_{ir}^2 \\ \frac{\partial V_{zi,3}}{z_i} Q_{i,3} &\leq \frac{1}{2}z_i^2 + 2\tilde{y}_i^2 + 2y_{ir}^2 \end{aligned}$$

进而可知 $\lambda_{zi,1} = 1$ ， $\lambda_{zi,2} = 3$ ， $\lambda_{zi,3} = -1$ 。因而，第三个切换模态的未建模动态系统不

满足输入到状态稳定条件。由放缩可得 $g_{i1,1}^2 \leq \frac{1}{8}z_i^2 + 2\sin^2(y_i)$ ， $g_{i1,2}^2 \leq \frac{1}{2}z_i^2 + 2\cos^2(y_i)$ ，

$g_{i1,3}^2 \leq \frac{1}{8}z_i^2 + 2\cos^2(y_i^2)$ 以及 $g_{i2,k}^2 \leq y_i^2$ ， $k = 1, 2, 3$ 。因此， $\underline{\lambda}_{zi,1} = \frac{1}{4}$ ， $\underline{\lambda}_{zi,2} = 1$ ， $\underline{\lambda}_{zi,3} = \frac{1}{4}$ ，

以及 $\bar{\lambda}_{zi,1} = \frac{3}{4}$ ， $\bar{\lambda}_{zi,2} = 2$ ， $\bar{\lambda}_{zi,3} = -\frac{5}{4}$ 。在仿真中，对任意 $(m, n) \in E(\mathcal{P})$ ，令 $\mu_{mn} = 1.2$ 。

对于切换信号条件(6-12), 选择 $\bar{T}_{s,j} = 0.1000$, $j=1,2$, $\bar{T}_{u,k} = 3.0000$, $k=3$; $\bar{N}_{mn} = 1$, $(m,n) \in E(\mathcal{P})$ 。 $\rho_{s,1} = 0.0320s^{3/2} + 0.2530s$, $\rho_{s,2} = 0.0320s^{3/2} + 0.1265s$, $\rho_{u,3} = 0.0200s$ 以及 $\rho_{mn} = 0.0100s^{3/2} + 0.0100s$ 。选择 $\rho(r,s) = k_1s^{3/2} + k_2s$, 其中 $k_1 = 0.0317$, $k_2 = c_1$ 。图 6-1 给出了符合条件的一个切换信号。

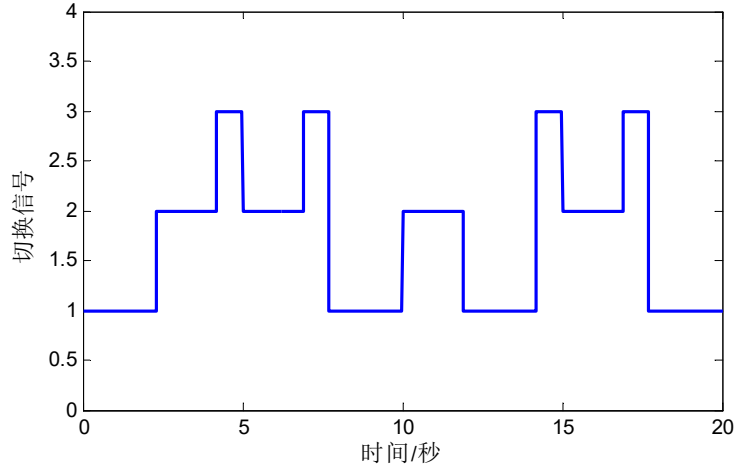


图 6-1 切换信号

Fig. 6-1 The trajectory of switching signal

为保证系统输出跟踪满足预定性能指标要求, 选择如下形式指数递减的性能界限函数:

$$v_1(t) = (2.0 - 0.1)\exp(-3t) + 0.1,$$

$$v_2(t) = (1.5 - 0.05)\exp(-1.5t) + 0.05,$$

界限调整参数选择为 $\bar{\delta}_i = 0.80$, $\underline{\delta}_i = 0.65$ 。

为处理各子系统间的关联项, 选择 $\bar{\varphi}_i = \frac{2S_{i1}}{S_{i1}^2 + \epsilon_i}(1 + y_i^2)$, $S_{i1}h_i(\tilde{y}_i) = 2y_i^2$ 。

虚拟控制器及最终控制器设计如下:

$$\begin{aligned} \alpha_{i2} &= -\frac{c_{i1}s_{i1}}{r_i} - \frac{7}{4}s_{i1}r_i - \hat{\theta}_{i1}\varphi_{i1}(x_{i1}) + \dot{y}_{ir} + \frac{\tilde{y}_i\dot{\varphi}_i}{v_i} \\ &\quad - \frac{\hat{\mathcal{G}}_i\bar{\varphi}_i}{r_i} - \frac{h_i(\tilde{y}_i)}{r_i} \\ u_{i,k} &= -c_{i2}s_{i2} - \frac{5}{4}s_{i2} - \hat{\theta}_{i2}\varphi_{i2}(\bar{x}_{i2}) + \dot{\alpha}_{i2} \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_{ij,k}(x) = \begin{bmatrix} \exp(-0.5(x-8)^T(x-8)) \\ \exp(-0.5(x-4)^T(x-4)) \\ \exp(-0.5x^Tx) \\ \exp(-0.5(x+4)^T(x+4)) \\ \exp(-0.5(x+8)^T(x+8)) \end{bmatrix}$$

设计参数自适应率如下：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{ij} &= \Gamma_{ij,k} s_{ij} \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) - \Gamma_{ij,k} \hat{\theta}_{ij} \\ \dot{\hat{\vartheta}}_i &= \gamma_{\vartheta_i,k} s_{i,1} \bar{\varphi}_i - \gamma_{\vartheta_i,k} \hat{\vartheta}_i \end{aligned}$$

为处理虚拟控制器求导产生的“计算爆炸”问题，通过动态面控制方法，设计如下形式的一阶滤波器

$$0.08\dot{\bar{\alpha}}_{i2} + \bar{\alpha}_{i2} = \alpha_{i2}$$

选择其他参数为： $c_{ij} = 50$ ， $\epsilon_i = 0.5$ ， $\Gamma_{ij,k} = I$ ， $\gamma_{\vartheta_i,k} = 1$ 。系统各状态初值设计为 $[z_1(0), x_{11}(0), x_{21}(0)]^T = [0.5, 1.2, 1.5]$ ， $[z_2(0), x_{21}(0), x_{22}(0)]^T = [0.5, 1.0, 1.5]$ ， $\hat{\theta}_{ij}(0) = 0$ 。系统输出跟踪信号为 $y_{1r} = 0.2 + \sin(t) + 0.5 \sin(0.5t)$ ， $y_{2r} = 0.5(\sin(t) + \sin(0.5t))$ 。

图 6-2~图 6-7 给出了仿真结果。图 6-2 和图 6-3 给出了两个子系统的系统输出以及跟踪信号，从图中可看出各子系统输出可跟踪上给定参考信号，且满足预定的界限要求。相应的跟踪误差以及预定性能界限曲线在图 6-4 和图 6-5 中给出。各子系统状态 $x_{i2}(t)$ 以及未建模动态曲线如图 6-6 和 6-7 所示。上述图中状态相应曲线验证了闭环系统稳定性。

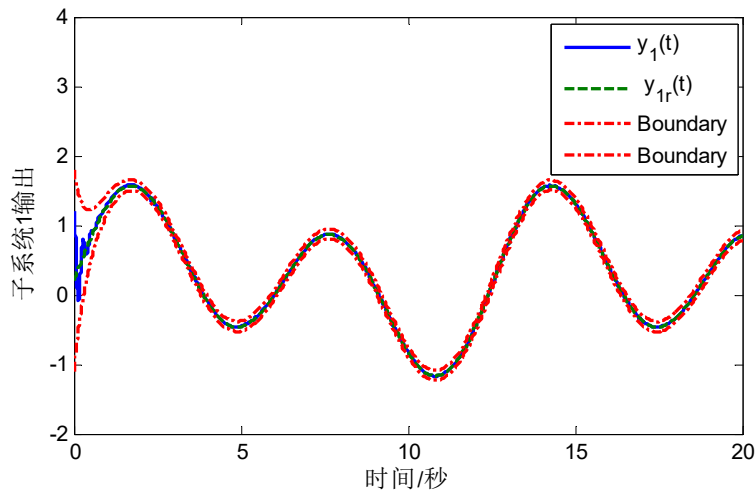


图 6-2 子系统 1 输出信号

Fig. 6-2 The output signal of subsystem 1

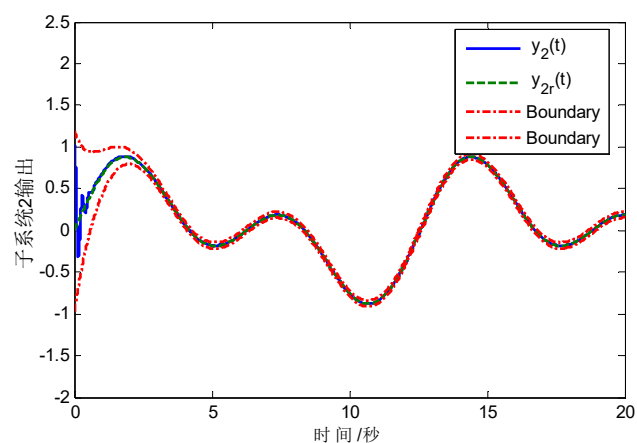


图 6-3 子系统 2 输出信号

Fig. 6-3 The output signal of subsystem 2

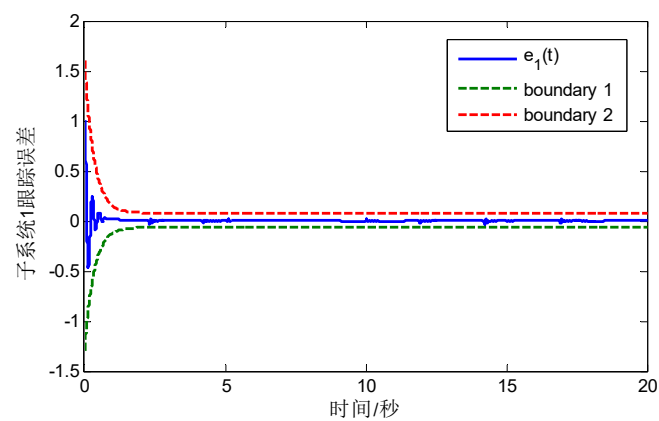


图 6-4 子系统 1 跟踪误差

Fig. 6-4 The tracking error of subsystem 1

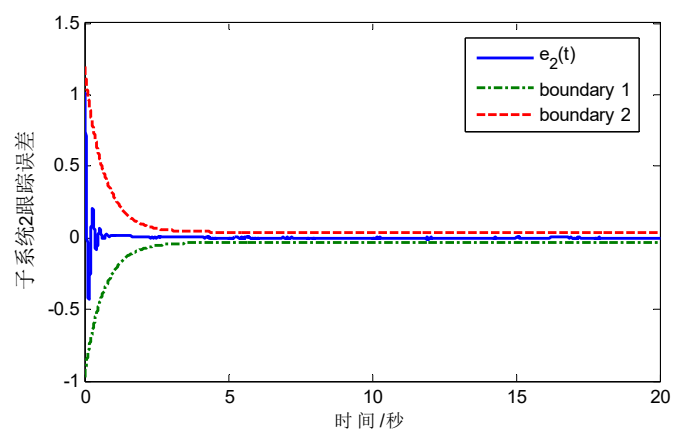


图 6-5 子系统 2 跟踪误差

Fig. 6-5 The tracking error of subsystem 2

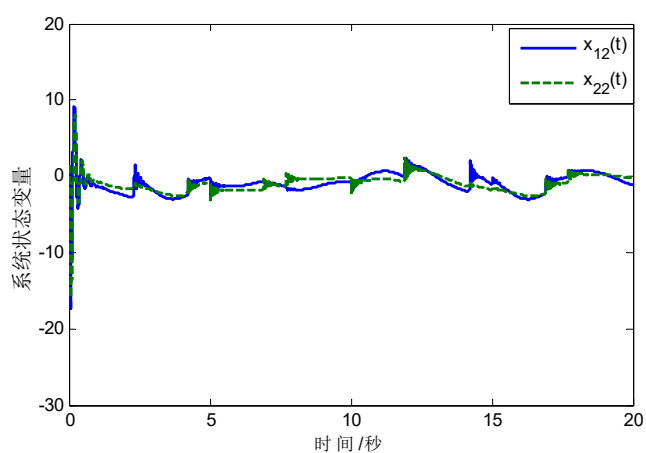


图 6-6 系统状态变量曲线

Fig. 6-6 The trajectories of states

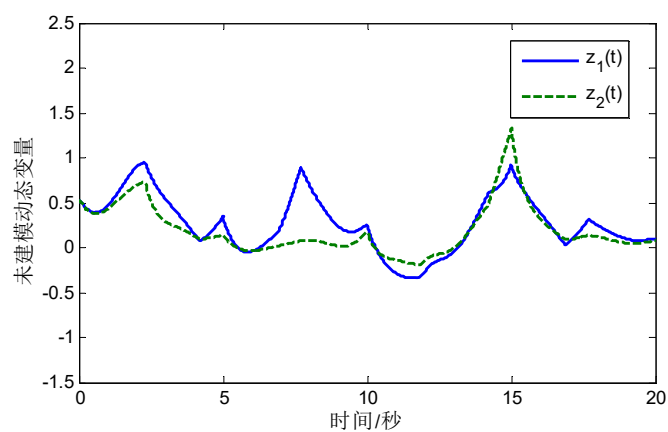


图 6-7 未建模动态变量轨迹

Fig. 6-7 The trajectories of unmodeled dynamics

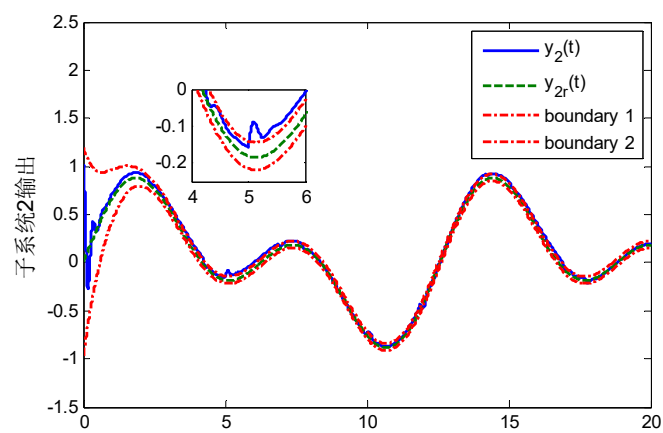


图 6-8 无预定性能控制下系统输出及参考信号轨迹

Fig. 6-8 The trajectories of output and reference signal without PPC

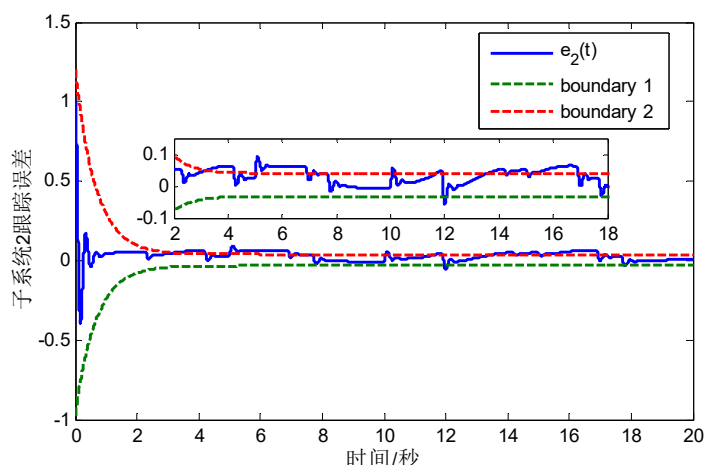


图 6-9 无预定性能控制下系统跟踪误差曲线

Fig. 6-9 The trajectories of tracking error without PPC

作为对比，考虑了不用预定性能控制方法下的系统跟踪控制，其系统输出以及跟踪误差曲线如图 6-8 和图 6-9 所示。从图中可看出，预定性能控制方法在保证系统暂稳态误差以及抑制切换波动等方面均有理想的控制结果。

6.5 本章小结

本章针对一类含有未建模动态的非线性相关联切换系统，考虑了该类系统的自适应预定性能控制问题。控制器迭代设计过程中，采用自适应神经网络估计方法估计系统中未知非线性函数。同时结合动态面控制，避免了虚拟控制器求导带来的“计算爆炸问题”。通过预定性能控制方法，保证了系统跟踪性能满足预定的暂稳态性能指标，同时可抑制因系统切换产生的波动问题。通过设计限制切换次数以及各子系统运行时间的切换信号，使得部分切换子系统的未建模动态不满足输入到状态稳定条件时，整个切换系统仍可有界稳定。最后通过数值仿真验证了所提方法的正确性。

结 论

本文针对切换系统，通过设计满足一定条件的时间约束切换信号，分别研究了线性连续时间切换系统，线性离散时间切换系统，非线性切换系统的稳定性分析与控制器设计问题。针对系统中可能出现的异步切换、状态时滞、未知函数、未建模动态干扰等问题，给出了相应的切换信号和控制器设计方法。本文所提出的研究方法，保证了系统在上述问题下闭环系统的稳定性，并满足预定的性能指标要求。研究成果在一定程度上丰富了切换控制领域理论。本文的创新性成果总结如下：

(1) 在连续时间线性切换系统镇定控制方面，针对含有不稳定子系统的切换系统，揭示了不稳定子系统与稳定子系统运行时间及各子系统动态参数与切换系统稳定性的关系，分析了中立时滞和状态时滞对系统稳定性造成的影响，提出了系统全局**渐进**稳定运行的切换信号条件与控制器增益求解方法。所提方法结果放松了传统平均驻留时间方法中不同时间段内平均切换频率保持不变的限制要求，克服了不稳定子系统以及异步切换过程对系统稳定性造成的影响。

(2) 在离散时间切换系统镇定控制方面，针对具有 Reosser 模型的二维离散切换系统，提出了基于不稳定子系统与稳定子系统运行时间比例以及切换次数的切换调节信号。在所提出的切换调节信号下，分别给出了系统同步切换与异步切换条件下系统的稳定性条件，以及基于 LMI 的控制器增益求解方法。所提方法放松了现有文献中要求所有的二维子系统必须稳定的假设条件。

(3) 在非线性切换系统跟踪控制方面，针对具有严格反馈形式的非线性单系统和非线性关联系统，综合分析了未建模动态、未知非线性函数、子系统关联耦合、系统状态未知、时延等因素对系统输出跟踪性能的影响，提出了平均驻留时间和更加一般化的时间约束切换信号设计方法，引入了自适应模糊和神经网络估计以及预定性能控制方法，并通过 backstepping 控制器设计给出了非线性切换系统输出跟踪预定性能控制结果。研究结果放松了现有结果中未建模动态必须满足输入到状态稳定的假设条件，保证了系统的跟踪误差满足预定暂稳态性能指标，同时抑制了系统在切换过程中发生的波动现象。

本文针对切换系统的研究工作，主要通过设计满足一定时间约束条件的切换信号，并结合对应系统的控制器设计方法，进而保证系统的特定性能。上述研究成果

在一定程度上丰富完善了现有切换系统控制理论方法。然而，随着当前切换系统的应用范围逐渐增加，控制任务日益复杂，关于切换系统的研究，无论从理论基础还是工程应用方面，仍存在较多尚未解决的问题。基于本文的研究内容，作者认为关于切换系统问题的进一步研究，可从以下几方面进行考虑：

1) 线性切换系统的理论研究方面，本文主要基于 LMI 方法给出系统稳定性条件。所提方法基于理想已知系统模型。当系统模型存在不确定干扰或系统模型过于复杂时，如何设计不确定系统切换控制策略，或如何简化系统模型同时保留原系统特性进而给出相应控制策略具有重要的理论研究意义。

2) 非线性切换系统理论研究方面，本文主要基于 backstepping 递归控制器设计方法。然而，该方法中不可避免地会引入虚拟控制求导等问题，大大增加了控制器设计过程计算量。尽管文中给出了动态增益方法改善此问题，然而，该方法只能得到局部稳定结果。针对这一问题，未来可进一步研究基于动态增益控制器设计方法的切换非线性系统控制。

3) 切换系统应用研究方面，本文考虑了含有不稳定子系统的切换系统控制问题，这一问题可刻画实际中实际应用系统，如含有网络攻击时的网络化控制系统等。然而，实际应用系统中，如何使得系统满足本文所提各子系统运行时间限制，同时，当满足该条件限制时，如何进一步优化系统性能，仍值得进一步深入研究。

参考文献

- [1] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 11-12.
- [2] Li T., Zhao J. Switched threshold-based fault detection for switched nonlinear systems with its application to chua's circuit system[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I:-Regular Papers, 2019, 66(2):733-741.
- [3] Gupta P., Patra A. Hybrid mode-switched control of DC-DC boost converter circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II:-Express Briefs, 2005, 52(11):734-738.
- [4] Fierro R., Lewis F.L., Lowe A. Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans, 1999, 29(6): 649 – 654.
- [5] Donkers M. Heemels W.P.M.H., van de Wouw N. Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(9): 2101-2115.
- [6] Liu J., Peng H. Modeling and Control of a Power-Split Hybrid Vehicle, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2008, 16(6): 1242-1251.
- [7] Branicky M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43:1679-1684.
- [8] Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A. R. Invariance principles for switching systems via hybrid systems techniques[J]. Systems Control Letters, 2008, 57:980-986.
- [9] Carnevale D., Teel A.R., Nešić D. A Lyapunov proof of an improved maximum allowable transfer interval for networked control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5):892-897.
- [10] Cai C., Teel A.R., Goebel R. Smooth Lyapunov functions for hybrid systems, Part II: (Pre-)asymptotically stable compact sets[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(3):734-748.
- [11] Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R. Hybrid dynamical systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2009, 29(2):28-93.
- [12] Gruntjens K., Heertjes M., et.al. Hybrid Integral Reset Control with Application to a Lens Motion

-
- System[C]. American Control Conference, 2019, 2408-2413
- [13] Daafouz, J., Riedinger, P., Iung, C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47:1883–1887.
- [14] Li, Z.G., Wen, C.Y., Soh, Y.C. Stabilization of a class of switched systems via designing switching laws[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46:665–670.
- [15] Margaliot, M. Stability analysis of switched systems using variational principles: an introduction[J]. Automatica, 2006, 42:2059–2077.
- [16] Sun, Z., Ge, S. Switched linear systems: control and design[M]. 2005, London, UK: Springer-Verlag.
- [17] Lin H., Antsaklis P.J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(2):308-322.
- [18] Xiang, W., Xiao, J. Stability analysis and control synthesis of switched impulsive systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22:1440–1459.
- [19] Savino H., dos Santos C.R.P., et.al. Conditions for consensus of multi-agent systems with time-delays and uncertain switching topology[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(2): 1258-1267.
- [20] 申铁龙. 机器人鲁邦控制基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 5-8.
- [21] Liu Y., Xiahou K., Wang L., Wu Q. Switching control of GSC of DFIGWTs for disturbance rejection based on Bang–Bang control[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2018, 33(6): 3256-3259.
- [22] D. Liberzon, A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5):59-70.
- [23] Ma R., Zhao J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchings[J]. Automatica, 2010, 46(11):1819-1823.
- [24] Fu J., Ma R., Chai T. Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers[J]. Automatica, 2015, 54:360-373.
- [25] K.S. Narendra, J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(12):2469-2471.
- [26] G. Zhai, H. Lin. Controller failure time analysis for symmetric H_∞ control systems[J].

- International Journal Control, 2004, 77(6):598-605.
- [27] G. Zhai, X. Xu, H. Lin, A. N. Michel. Analysis and design of switched normal systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2006, 65(12):2248-2259.
- [28] D. Liberzon, R. Tempo. Common Lyapunov functions and gradient algorithms[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(6):990-994.
- [29] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhauser, 2003.
- [30] Cheng D., Martin C., Xiang J.P. An algorithm for common quadratic Lyapunov function[C]. Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, Hefei, China, 2000, pp. 2965-2969.
- [31] Shorten R., Narendra K. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems[C]. Proceeding of the American Control Conference, 1999, pp.1410-1414.
- [32] Shorten R., Narendra K., Mason O. A result on common quadratic Lyapunov functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(1):110-113.
- [33] King C., Shorten R. A singularity test for the existence of common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems[C]. Proceeding of the American Control Conference, 2004, pp.3881-3884.
- [34] Decarlo R.A., Branicky M.S., Pettersson S., Lennartson B. Perspectives and results on stability and stabilizability of hybrid systems[C]. Proceeding of the IEEE, 2000, 80(7):1069-1082.
- [35] Liberzon D., Morse A.S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5):59-70.
- [36] Morse A.S. Supervisory control of families of linear set-point controllers, Part I: Exact matching[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(10):1413-1431.
- [37] Hespanha J.P., Morse A.S. Stability of switched systems with average dwell time[C]. in Proceeding of 38th IEEE Conference on Control Decision Control, 1999, pp.2655-2660.
- [38] Hespanha J.P. Uniform stability of switched linear systems: Extensions of Lasalle's invariance principle[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(4):470-482.
- [39] Zhao X., Yin S., Li H., Niu B. Switching stabilization for a class of slowly switched systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(1):221-226.
- [40] Zhao X., Zhang L., Shi P., Liu Meng. Stability and stabilization of switched linear systems with

- mode-dependent average dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7):1809-1815.
- [41] Long L., Zhao J. Adaptive output-feedback neural control of switched uncertain nonlinear systems with average dwell time[J]. IEEE Transactions on Neural Networks Learning Systems, 2015, 26(7):1350-1362.
- [42] Long L., Zhao J. Decentralized adaptive fuzzy output-feedback control of switched large-scale nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(5):1844-1860.
- [43] Tong S., Li Y. Adaptive fuzzy output feedback tracking backstepping control of strict-feedback nonlinear systems with unknown dead zones[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(1):168-180.
- [44] Hua C., Liu G., Li L., Guan X. Adaptive fuzzy prescribed performance control for nonlinear switched time-delay systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(4):1934-1945.
- [45] Zhao X., Zhang L., Shi P., Liu M. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7):1809-1815.
- [46] Zhao X., Liu X., Yin S. Li H. Improved results on stability of continuous-time switched positive linear systems[J]. Automatica, 2014, 50(2):614-621.
- [47] Wang Y., Zhao J., Jiang B. Stabilization of class of switched linear neutral systems under asynchronous switching[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(8):2114-2119.
- [48] Zhang L., Gao H. Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time[J]. Automatica, 2010, 46:953-958.
- [49] Lin H., Zhai G., Antsaklis P.J. Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems[C]. in Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision Control, 2003, pp. 1182-1187.
- [50] Xiang Z., Xiang W. Stability analysis of switched systems under dynamical dwell time control approach[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40:347-355.
- [51] Stability analysis and control synthesis of switched impulsive systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22:1440-1459.
- [52] Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A.N. Stability and analysis of switched systems with stable and

-
- unstable subsystems: an average dwell time approach[C]. In Proceedings of the American Control Conference, 2000, pp.200-204.
- [53] Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A.N. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2001, 338:765-779.
- [54] Zheng Q., Zhang H. H_∞ filtering for a class of nonlinear switched systems with stable and unstable subsystems[J]. Signal Processing, 2017, 141:240-248.
- [55] Sun Y., Zhao J., Dimirovski G.M. Adaptive control for a class of state-constrained high-order switched nonlinear systems with unstable subsystems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019, 32:91-105.
- [56] Xiang W., Xiao J. Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching[J]. Automatica, 2014, 50:940-945.
- [57] Zhang L., Shi P. Stability \mathcal{L}_2 gain and asynchronous H_∞ control of discrete time switched systems with average dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54:2193-2200.
- [58] Branicky M.S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(4):475-482.
- [59] Michel A.N. Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems, 1999, 46(1):120-134.
- [60] Wang Y., Sun X., Wang Z., Zhao J. Construction of Lyapunov-Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with input-delay[J]. Automatica, 2014, 50:1249-1253.
- [61] Antunes D., Hespanha J. Silvestre C. Stability of networked control systems with asynchronous renewal links: An impulsive systems approach[J]. Automatica, 2013, 49(2):402-413.
- [62] Kundu A., Chatterjee D. Stabilizing switching signals for switched systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3):882-888.
- [63] Kundu A., Chatterjee D., Liberzon D. Generalized switching signals for input-to-state stability of switched systems[J]. Automatica, 2016, 64:270-277.
- [64] 段朝霞. 离散 2-D 切换系统的稳定性分析和控制设计[D], 南京: 南京理工大学, 2016, 1-5.
- [65] Du C., Xie L. Control and filtering of two-dimensional systems[M]. Springer, Berlin, 2002.
- [66] Kaczorek T. Two-dimensional linear systems[M]. Springer, Berlin, 1985.
- [67] Roesser R. Discrete state-space model for linear image processing[J]. IEEE Transactions on

- Automatic Control, 1975, 20(1):1-10.
- [68] Fornasini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976, 20(4):484-492.
- [69] Fornasini E., Marchesini G. Doubly-indexed dynamical systems: state space models and structural properties[J]. Mathematical systems theory, 1978, 12:59-72.
- [70] Kurek J. Stability of positive 2-D system described by the Roesser model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(4):531-533.
- [71] Kar H., Singh V. Robust stability of 2-D discrete systems described by the Fornasini-Marchesini second model employing quantization/overflow nonlinearities[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2004, 51(11):598-602.
- [72] Li X., Chow T.W.S., Ho J.K.L. 2-D systems theory based iterative learning control for linear continuous systems with time delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2005, 52(7):1421-1430.
- [73] Chu B., Liu Y. On the Asymptotic Stability of Positive 2-D Systems Described by the Roesser Model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2007, 54(12):1102-1104.
- [74] Ye S., Li J., Yao J. Robust H_∞ control for a class of 2-D discrete delayed systems[J]. ISA Transactions, 2014, 53:1456-1462.
- [75] Huang S., Xiang Z. Stability analysis of two-dimensional switched nonlinear continuous-time systems[J]. IET Control Theory and Application, 2016, 10(6):724-729.
- [76] Luo Y., Wang Z., Wei G., Alsaadi F.E. H_∞ Fuzzy fault detection for uncertain 2-D systems under round-robin scheduling protocol[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(8):2172-2184.
- [77] Shi S., Fei Z., Sun W., Yang X. Stabilization of 2-D switched systems with all modes unstable via switching signal regulation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(3):857-863.
- [78] Zhang L., Wang S., Karimi H.R. Robust finite-time control of switched systems with unstable subsystems by mode-dependent average dwell time approach[J]. IEEE Transactions on Mecharonics, 2015, 20(5):2476-2485.
- [79] Gu K., Kharitonov L., Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Berlin, Germany: Birkhauser, 2003.
- [80] Hua C., Guan X., Shi P. Robust backstepping control for a class of time delayed systems[J]. IEEE

-
- Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6):894-899.
- [81] Lin C., Wang Q., Tong H., et.al. LMI approach to analysis and control of takagi-sugeno fuzzy systems with time delay[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [82] Hua C., Guan X. Output feedback stabilization for time-delay nonlinear interconnected systems using neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19(4):673-688.
- [83] Zhang X., Liu L., Feng G., Zhang C. Output feedback control of large-scale nonlinear time-delay systems in lower triangular form[J]. Automatica, 2013, 49:3476-3483.
- [84] Zhang X., Lin Y. Adaptive control of nonlinear time-delay systems with application to a two-stage chemical reactor[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4):1074-1079.
- [85] Hua C. Guan X. Smooth dynamic output feedback control for multiple time-delay systems with nonlinear uncertainties[J]. Automatica, 2016, 68:1-8.
- [86] Wu M., He Y., She J. Stability analysis and robust control of time-delay systems[M]. Springer-verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [87] Blakely J.N., Corron N.J., Experimental observation of delay-induced radio frequency chaos in a transmission line oscillator[J]. Chaos, 2004, 14:1035-1041.
- [88] Bellen A., Guglielmi N., Ruehli A.E. Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(1):212-215.
- [89] Magdi S.M. Robust control of linear neutral systems[J], Automatica, 2000, 36(5):757-764.
- [90] Karimi H. Robust delay-dependent control of uncertain time-delay systems with mixed neutral, discrete, and distributed time-delays and markovian switching parameters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(8):1910-1923.
- [91] Lian J., Ge Y., Han M. Stabilization for switched stochastic neutral systems under asynchronous switching[J], Information Science, 2013, 222:501-508.
- [92] Krishnasamy R., Balasubramaniam P. A descriptor system approach to the delay-dependent exponential stability analysis for switched neutral systems with nonlinear perturbations[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2015, 15:23-36.
- [93] Ghadiri H., Jahed-Motlagh M.R., Yazdi M.B. Robust stabilization for uncertain switched neutral systems with interval time-varying mixed delays[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2014, 13:2-21.

-
- [94] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. In Proceeding of 39th IEEE Conference on Decision and Control, Australia, 2000, 3:2805-2810.
 - [95] Hua C., Wu S., Yang X., Guan X. Stability analysis of time-delay systems via free-matrix-based double integral inequality[J]. International of Systems Science, 2017, 48(2):257-263.
 - [96] Fu J., Li T., Chai T., Su C. Sampled-data-based stabilization of switched linear neutral systems[J]. Automatica, 2016, 72:92-99.
 - [97] Bechlioulis C., Rovithakis G. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9):2090-2099.
 - [98] Bechlioulis C., Rovithakis G. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems[J] Automatica, 2009, 45(2):532-538.
 - [99] Hua C., Zhang L., Guan X. Output feedback control for interconnected time-delay systems with prescribed performance[J]. Neurocomputing, 2014, 129:208-215.
 - [100] Meng W., Yang Q., Sun Y. Adaptive neural control of nonlinear MIMO systems with time-varying output constraints[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(5):1074-1085.
 - [101] Tee K., Ren B., Ge S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints[J]. Automatica, 2011, 47(11):2511-2516.
 - [102] Theodorakopoulos A., Rovithakis G. Low-complexity prescribed performance control of uncertain MIMO feedback linearizable systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 61(7):1946-1952.
 - [103] Hua C., Guan X., Shi P. Robust output feedback tracking control for time-delay nonlinear systems using neural network[J]. IEEE Transactions on Neural Network, 2007, 18(2):495-505.
 - [104] Zhang X., Liu L., Feng G., Zhang C. Output feedback control of large-scale nonlinear time-delay systems in lower triangular form[J]. Automatica, 2013, 49(11):3476-3483.
 - [105] Zhang X., Baron L., Liu Q., Boukas E. Design of stabilizing controllers with a dynamic gain for feedforward nonlinear time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(3):692-697.
 - [106] Zhang X., Lin Y. A new approach to global asymptotic tracking for a class of low-triangular nonlinear systems via output feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012,

-
- 57(12):3192-3196.
- [107] Wang C., Lin Y. Decentralized adaptive tracking control for a class of interconnected nonlinear time-varying systems[J]. Automatica, 2015, 54:16-24.
 - [108] Tong S., Li Y. Adaptive fuzzy output feedback tracking backstepping control of strict-feedback nonlinear systems with unknown dead zones[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(1):168-180.
 - [109] Tong S, Li Y, Adaptive fuzzy output feedback control of MIMO nonlinear systems with unknown dead-zone inputs[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 21(1): 134-146.
 - [110] Shi P, Zhou Q, Xu S, Li H. Adaptive output feedback control for nonlinear time-delay systems by fuzzy approximation approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 21(2): 301-313.
 - [111] Liu Y J, Tong S C. Adaptive fuzzy control for a class of unknown nonlinear dynamical systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 263: 49-70.
 - [112] Zhou Q, Li H Y, Shi P. Decentralized adaptive fuzzy tracking control for robot finger dynamics[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(3): 501-510.
 - [113] Hua C., Guan X. Output feedback stabilization for time-delay nonlinear interconnected systems using neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19(4):673-688.
 - [114] Liu Y., Li X. Decentralized robust adaptive control of nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5):848-856.
 - [115] Wang C., Lin Y. Decentralized adaptive tracking control for a class of interconnected nonlinear time-varying systems[J]. Automatica, 2015, 54:16-24.
 - [116] Liu Y., Li X. Decentralized robust adaptive control of nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5):848-856.
 - [117] Liu D., Wang D., Li H. Decentralized stabilization for a class of continuous-time nonlinear interconnected systems using online learning optimal control approach, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2014, 25(2):418-428.
 - [118] Bakule L. Decentralized control: An overview[J]. Annual Reviews in Control, 2008, 32(1):87-98.
 - [119] Lavaei, J. Decentralized implementation of centralized controllers for interconnected systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7):1860-1865.
 - [120] Grip F., Saberi A., Johansen T. Observers for interconnected nonlinear and linear systems[J]. Automatica, 2012, 48(7):1339-1346.
 - [121] Kalsi K., Lian J. Zak S. Decentralized dynamic output feedback control of nonlinear

- interconnected systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(8):1964-1970.
- [122] Hou Z., Gupta M., Nikiforuk P., Tan M., Cheng L. A recurrent neural network for hierarchical control of interconnected dynamic systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, 18(2):466-481.
- [123] Liu Y., Tong S., Wang D., Li T., Chen C. Adaptive neural output feedback controller design with reduced-order observer for a class of uncertain nonlinear SISO systems[J]. IEEE Transactions on Neural Network Systems, 2011, 22(8):1328-1334.
- [124] Tong S., Sui S., Liu Y. Observer-based adaptive fuzzy tracking control for switched nonlinear systems with dead-zone[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(12):2816-2826.
- [125] Liu Y., Li X. Decentralized robust adaptive control of nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5):848-856.
- [126] Praly L., Jiang Z. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems[J]. Systems and Control Letters, 2004, 53(2):107-116.
- [127] Xiang, Z., Xiang, W. Stability analysis of switched systems under dynamical dwell time control approach[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40:347-355.
- [128] 王春艳. 任意和约束切换信号信号下不确定切换系统鲁棒自适应控制[D]. 燕山大学, 2015: 3-5.
- [129] Li Y., Hua C.C, Guan X.P. Distributed output feedback leader-following control for high-order nonlinear multiagent system using dynamic gain method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, DOI: 10.1109/TCYB.2018.2870543.
- [130] Hua C.C., Li Y., Zhang L., Guan X.P. Adaptive state feedback control for time-delay stochastic nonlinear systems based on dynamic gain method[J]. International Journal of Control, 2018. <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1459860>.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

（一）参与的科研项目

- [1] 非线性混杂系统切换信号与控制器协同设计方法研究，河北省研究生创新资助项目，项目编号：CXZZBS2018053，项目负责人。
- [2] 多变量多态性能约束下网络化关联非线性系统分散协同控制及应用，国家自然科学基金面上项目，批准号：61673335，项目主要参与人。
- [3] 融入冶炼机理、运行数据和领域知识的高炉冶炼过程智能建模，国家自然科学基金应急管理项目，批准号：61751309，项目主要参与人。
- [4] 弱网络通信环境下多柔性机器人要操作系统的间歇性协同控制研究，国家自然科学基金青年基金项目，批准号：61703361，项目主要参与人。
- [5] 全状态时变受限下关联非匹配非线性时滞系统的分散协同控制，国家自然科学基金青年基金项目，批准号：61803326，项目主要参与人。

（二）发表的学术论文

- [1] Changchun Hua, **Guopin Liu**, Liang Li and Xinping Guan, Adaptive fuzzy prescribed performance control for nonlinear switched time-delay systems with unmodeled dynamics, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(4):1934-1945.
- [2] Changchun Hua, **Guopin Liu** and Xinping Guan, Adaptive neural tracking control for interconnected switched systems with no-ISS unmodeled dynamics, IEEE Transactions on Cybernetics, 2019,49(5):1669-1679.
- [3] Changchun Hua, **Guopin Liu**, Lin Zhang and Xinping Guan, Cooperative Stabilization for Linear Switched Systems With Asynchronous Switching, IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(6):1081-1087.
- [4] **Guopin Liu**, Changchun Hua and Xinping Guan, Asynchronous stabilization of switched neutral systems: A cooperative stabilizing approach, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019,33:380-392.

- [5] Changchun Hua, **Guopin Liu** and Xinping Guan, Switching regulation based stabilization of discrete-time 2-D switched systems with stable and unstable modes, IET Control Theory & Applications, 2018, 12(7):953-960.
- [6] Changchun Hua, **Guopin Liu**, Liuliu Zhang and Xinping Guan, Output feedback tracking control for nonlinear time-delay systems with tracking errors and input constrains, Neurocomputing, 2016, 173:751-758.
- [7] Changchun Hua, **Guopin Liu** and Xinping Guan, Decentralized adaptive control for a class of stochastic switched interconnected nonlinear systems, International Journal of Systems Science, 2016, 47(16):3782-3791.
- [8] **Guopin Liu** and Changchun Hua, State feedback stabilization for a class of switched feedforward nonlinear systems with time-delay, Proceedings of the 34th Chinese Control Conference, 2015, 861-865
- [9] Yafeng Li, Changchun Hua, **Guopin Liu** and Xinping Guan. Adaptive state feedback control for switched stochastic high-order nonlinear systems under arbitrary switchings. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(6):2047-2063.
- [10] De Li, **Guopin Liu**, Changchun Hua and Xinping Guan, Modeling and Prescribed Performance control for cold rolling mill HAGC systems with measurement delay, Proceedings of the 34th Chinese Control Conference, 2017, 726-731.
- [11] Yafeng Li, Changchun Hua, **Guopin Liu** and Xinping Guan, Finite-time prescribed performance control for nonlinear systems with unmodeled dynamics, 31st Youth Academic Annual Conference of Chinese-Association- of-Automation. 175-180, 2016.
- [12] Guopin Liu, Changchun Hua, and Xinping Guan, Time-interval dependent data rate condition for stability of networked systems under denial-of-service attacks. Submitted.

致 谢

岁月不居，时节如流。博士研究生的时光悄悄走到了第五年尽头。最初盼着早日结束的念头还很清晰，真遂愿时，怀念又后知后觉。

庆幸于 13 年秋，忐忑敲开华长春老师办公室的门。初次交谈，印在心里的是华老师多次强调的“付出总有回报”以及“机会总是留给有准备的人”的话语，感受到华老师身上不断追求的精神。此后的日子里，这份感受日益深切。学术上，华老师渊博的专业知识，灵活的思维方式，严谨的治学态度让我在学术道路上获益匪浅。除了学习工作中的耐心教导，平时生活中华老师为人谦和，平易近人，即使细微之事，也同样给予了我亲切的关心。同时，华老师以身作则阐释做人应具有开阔的眼界，长远的目光以及持之以恒的坚毅品质，这些都让我终生受益。在此，谨向华老师致以最真诚的感谢！

同时，感谢师姐张柳柳的指导，消除了我最初阅读文献时期的迷茫。特别感谢师兄及挚友李亚峰，一路走来，感谢你在工作、学习、生活中给予的帮助和关心。感谢多年好友吴双双，陪同度过在燕山大学的九年时光。感谢课题组杨晔、杨亚娜、李军朋、游秀、刘丹、李静、赵励为等师兄师姐以及赵广磊、王芳、陈树宗等老师在学习生活中的指导和帮助。感谢李志杰、宁静华、陈健楠、李阔、柳世颖、王毅博等师弟师妹一起帮忙分担的工作。感谢课题组同届硕士生孙兴隆、张彤、李德等人，同届博士生张宇等人相伴。

然后，感谢国家留学基金委的资助。感谢荷兰格罗宁根大学 Claudio De Persis 教授让我反思自己的研究方式，同时感谢 SMS 课题组史明明，郭美忱以及 Alessandro, Monica, Mehran 等人一年的陪伴帮助。感谢余兰林等人对我受伤期间的照顾，以及张宏宇、杨晓菲等人在格罗宁根提供的帮助。

另外，感谢张先生及他带给我的鼓励、感动和坚持的信念。

最后，特别感谢我勤劳的父母和亲人。十多年来，没能陪在你们身边，我很愧疚。谢谢你们的理解和支持，祝愿你们永远健康，平安。