2019 年

一、某线性时不变系统的状态空间方程描述为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 0 & -a\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u, x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

其中a为常数。试

1、当$a=2$时,确定该系统的传递函数$g(s)$;

2、当$a=1$时，求系统的状态转移矩阵,并求系统的零输入响应;

3、化为能控标准型，并确定a满足什么条件能使系统完全能控;

4、用 Lyapunov 稳定性判据判断$a=-3$时自治系统是否稳定。

解：1、$a=2$时，A=$\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$,$b=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$;

$$g(s)=c(sI-A)^{-1}b$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{-1}{(s+3)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{-1}{(s+3)(s+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2s+3}{(s+3)(s+2)}$$

2、$a=1$时，A=$\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,$b=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$;

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=L^{-1}((sI-A)^{-1})$$

$$=L^{-1}((\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix})^{-1})$$

$$=L^{-1}(\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{-1}{(s+3)(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix})$$

$$=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{2(s+3)}-\frac{1}{2(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)x(0)=\begin{bmatrix}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$$

3、利用秩判据

令

$$rankQ_c = rank[b \quad Ab] = rank\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -a \end{bmatrix} = 2$$

要使Q_c满秩，则

$$a \neq \frac{7}{2}$$

4、$a = -3$时，A=$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = [1 \quad 0]$;

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}$$

令

$$D(s) = (s+3)(s-3) = 0$$
$$s_1 = -3, s_2 = 3$$

则有极点在正实部，系统不稳定。

二、给定连续时间线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0]x \end{cases}$$

试设计一个基于降维状态观测器的状态反馈系统,满足

1、状态反馈阵 **K** 使闭环系统极点为-1，$-2 \pm j$;

2、观测阵 **L** 使观测器特征值为-4，-5。

解：

$$rankQ_c = rank[b \quad Ab \quad A^2b] = rank\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix} = 3$$

$$rankQ_o = rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

所以系统完全可观可控，由分离原理，系统的状态反馈和观测器的设计可以分开设计。

下面设计状态反馈：

$$D(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & 1 \\ -2 & 0 & s+3 \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 8$$

$$\alpha_0 = 8, \alpha_1 = 11, \alpha_2 = 6$$

$$D^*(s) = (s+1)(s+2+j)(s+2-j) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5$$

$$\alpha_0^* = 5, \alpha_1^* = 9, \alpha_2^* = 5$$

$$\bar{k} = [\alpha_0^* - \alpha_0 \; \alpha_1^* - \alpha_1 \; \alpha_2^* - \alpha_2] = [-3 \quad -2 \quad -1]$$

$$P = [A^2b \quad Ab \quad b]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 2 \\ -5 & -1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 2 \\ -5 & -1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -5 & 9 & 10 \\ 25 & 23 & -39 \end{bmatrix}$$

$$k = \bar{k}Q = \frac{1}{11}[-3 \quad -2 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -5 & 9 & 10 \\ 25 & 23 & -39 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}[-18 \quad -29 \quad 25]$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{11}[-18 \quad -29 \quad 25]$$

下面设计观测器:

构造二维状态观测器。对给定被观测系统，系统维数为 3，$\gamma = rankc = rank[1\ 0\ 0] = 1$，可知能构造维数“$m = n - \gamma = 3 - 1 = 2$”的降维状态观测器。

取

$$P = \begin{bmatrix} c \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \left[\begin{array}{c:cc} -1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后导出的降维观测器维数是 2，

基于状态反馈极点配置法

$$T$$

$$\tilde{A} = \bar{A}_{22}{}^{T} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \bar{A}_{12}{}^{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以看出，$(\tilde{A}, \tilde{B})$完全能控。

设$\bar{K} = [\bar{k}_1\ \bar{k}_2]$,

$$\bar{D}(s) = \det\left(\left(s - \tilde{A} + \tilde{B}\bar{K}\right)\right) = s^2 + \left(5 + \bar{k}_1\right)s + 6 + 3\bar{k}_1 - \bar{k}_2$$

$$\bar{D}^*(s) = (s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20$$

得

$$\begin{cases} 5 + \bar{k}_1 = 9 \\ 6 + 3\bar{k}_1 - \bar{k}_2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{k}_1 = 4 \\ \bar{k}_2 = -2 \end{cases}$$

基于此

取$\bar{L} = \bar{K}^T$,

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} = \begin{bmatrix} -22 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

综合得到的将维状态观测器为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -18 \\ 14 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = z + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} y$$

$$\hat{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{C^{T}} y + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{T}} \left(z + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}}_{L} y\right)$$

三、设某受控系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s}{s+2} \\ 1 & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

1、试给出该系统的一个不可简约右 MFD($G(s) = N(s)D^{-1}(s)$)，并分析该系统是否完全能观；

2、试通过状态反馈使闭环系统极点配置为：$-1 \pm j2$，-2。

解：1、

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s}{s+2} \\ 1 & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s(s+2)}{(s+2)^2} \\ \dfrac{s+1}{s+1} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s(s+2) \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= N(s)D^{-1}(s)$$

上式即为 G(s)的一个右 MFD。

其中

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 & s(s+2) \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}$$

下面验证该右 MFD 的不可简约性：

由$N(s)$、$D(s)$组成列分块阵，即

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s(s+2) \\ s+1 & s+1 \\ s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}$$

导出所有2×2矩阵的行列式方程及其根：

$$det\begin{bmatrix} 1 & s(s+2) \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(1-s^2-2s) = 0$$

$$s_1 = -1\ s_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$det\begin{bmatrix} 1 & s(s+2) \\ s+1 & 0 \end{bmatrix} = s(s+1)(s+2) = 0$$

$$s_1 = -1\ s_2 = -2\ s_3 = 0$$

$$det\begin{bmatrix} 1 & s(s+2) \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix} = (s+2)^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -2$$

$$det\begin{bmatrix} s+1 & s+1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix} = -(s+1)^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -1$$

$$det\begin{bmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix} = (s+1)(s+2)^2 = 0$$

$$s_1 = -1\ s_{2,3} = -2$$

$$det\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix} = (s+1)(s+2)^2 = 0$$

$$s_1 = -1\ s_{2,3} = -2$$

表明所有2×2矩阵的行列式方程没有共同根，说明$\{N(s)\ \ D(s)\}$右互质，从而该右 MFD 不可简约。

该系统完全能观。

2、由

$$D(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}$$

可以得出$D(s)$的列次数为$k_{c1} = 1, k_{c2} = 2$,且由

$$\deg detD(s) = k_{c1} + k_{c2} = 3$$

得出$D(s)$列既约。

由给定的期望闭环极点，$\lambda_{1,2}^* = -1 \pm j2$，$\lambda_3^* = -2$,得出期望闭环特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)$$
$$= s^3 + 4s^2 + 9s + 10$$

基于$D(s)$的列次数为$k_{c1} = 1, k_{c2} = 2$,进而表$\alpha^*(s)$为标准形期望闭环特征方程式：

$$\alpha^*(s) = s^3 + \alpha_1(s)s^{3-k_{c1}} + \alpha_2(s)$$
$$= s^3 + 4s^2 + (9s + 10)$$

则$\alpha_1(s) = 4$，$\alpha_2(s) = 9s + 10$；

基于$D(s)$的列次数为$k_{c1} = 1, k_{c2} = 2$； 由$D(s)$的列次表达式

$$D(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & s\\0 & 1\end{bmatrix}$$

得

$$D_{hc}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},D_{lc}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

取

$$H=D_{hc}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D_{hc}^{-1}D_{lc}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 4\end{bmatrix}=[\bar{D}_1 \quad \bar{D}_2]$$

则

$$\bar{D}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\bar{D}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\4 & 4\end{bmatrix}$$

令$K=[K_1 \quad K_2]$，K_1,K_2分别为$2\times 1,2\times 2$待定矩阵，组成求解方程

$$K_1[1]=\begin{bmatrix}\alpha_1(s)\\-1\end{bmatrix}-\bar{D}_1[1]$$

$$K_2\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_2(s)\\-1\end{bmatrix}-\bar{D}_2\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}K_{11}\\K_{12}\end{bmatrix}[1]=\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1]$$

$$\begin{bmatrix}K_{21} & K_{22}\\K_{23} & K_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9s+10\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}$$

得

$$K_1=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},K_2=\begin{bmatrix}9 & 10\\-4 & -5\end{bmatrix},$$

$$K=\begin{bmatrix}3 & 9 & 10\\-1 & -4 & -5\end{bmatrix}$$

输入变换矩阵取为

$$H=D_{hc}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$