



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 **复杂**非线性多智能体系统的领导跟随
一致性控制研究

作者姓名 游秀

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2017 年 10 月

中图分类号：TP13

学校代码：10216

UDC：007.5

密级：公开

工学博士学位论文

复杂非线性多智能体系统的领导跟随 一致性控制研究

博士研究生：游秀

导师：华长春 教授

申请学位：工学博士

学科专业：控制科学与工程

所在单位：电气工程学院

答辩日期：2017年10月

授予学位单位：燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**LEADER-FOLLOWING CONSENSUS
CONTROL FOR COMPLICATED NONLINEAR
MULTI-AGENT SYSTEMS**

by You Xiu

Supervisor: Prof. Hua Changchun

Yanshan University

2017.10

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《暂稳态性能约束下网络化遥操作系统的有限时间控制研究》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字：

日期：

年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《暂稳态性能约束下网络化遥操作系统的有限时间控制研究》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密☒。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：

日期：

年 月 日

导师签名：

日期：

年 月 日

摘 要

近年来,受生物学和人类社会学研究的启发,对多智能体系统领域的研究越来越受到人们的关注。与单个系统相比,多智能体系统能够通过相互间传递与分享状态信息来共同合作完成单个系统无法完成的复杂任务,因而具有广泛的应用价值。目前,针对多智能体系统一致性控制的研究大多集中在被控对象的动力学特性由一阶或高阶积分器描述的线性系统和简单非线性系统上。事实上,大量实际系统的动力学模型是由复杂的非线性方程刻画的,如柔性机械臂以及航天器等。然而目前对于具有复杂结构的非线性多智能体系统的研究尚不成熟,尤其是综合考虑复杂网络环境,执行器及通信能量受限,系统快速收敛性能等问题时,其研究就变得更加困难。鉴于这些不足,本文研究了一类具有非匹配非线性结构的复杂非线性多智能体系统的分布式一致性控制问题。主要研究工作如下:

(1) 针对具有非匹配非线性结构的二阶多智能体系统,考虑系统中存在模型参数未知情形,研究了分布式一致性控制器的设计问题。通过引入自适应控制,设计了控制参数不依赖于通信拓扑矩阵特征值的完全分布式一致性控制器,使得非线性多智能体系统达到领导跟随一致性。基于 Lyapunov 稳定性理论和自适应控制理论分析了所设计控制器的有效性。

(2) 针对具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统,考虑实际中对多智能体系统快速实现一致性的要求,设计了有限时间一致性控制器,使得高阶非线性多智能体系统能在有限时间内达到领导跟随一致性。基于反步控制,设计每一步的虚拟变量和虚拟控制器,保证逐步处理系统中的非匹配非线性,并利用拓扑矩阵特性设计了 Lyapunov 函数,保证了所设计控制器的分布式。

(3) 针对具有下三角结构的高阶随机非线性多智能体系统,考虑系统中状态不可测情形,研究了分布式一致性控制器的设计。基于动态输出控制方法设计了仅依赖系统输出信息的一致性控制器,使得多智能体系统达到 1th 随机领导跟随一致性。提出的控制器设计方法不仅能够有效的减少高阶智能体间的信息传输量,节约通信带宽,而且比传统的反步控制方法更简单实用。

(4) 考虑实际应用中,每个系统仅配备资源有限的微处理器和传感器情形,针对具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统,设计了基于事件触发机制的一致性控

制器和事件触发策略。通过将动态输出控制和事件触发控制相结合，保证了系统控制信号的更新只在某个重要事件发生时进行，并且设计的控制器仅依赖于邻居智能体在触发时刻的输出信息，最大限度的节约了系统的通信能量和控制能量。

(5) 针对更一般的具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统，研究了其在执行器能量受限情形下的领导跟随一致性控制问题。基于动态输出控制，保证了设计的控制器仅依赖于邻居智能体的输出信息。基于时间触发控制，保证了系统控制信号的更新只在某个重要事件发生时进行。最后，基于 Lyapunov 稳定性理论和饱和控制理论，给出了系统达到指数领导跟随一致性的充分条件及其条件下的最大吸引域求解方法。

关键词：多智能体系统；复杂非线性；领导跟随一致性；参数未知；有限时间收敛；随机非线性；事件触发控制；动态输出控制

Abstract

In recent years, inspired by the human sociological and the biology study, researches on multi-agent systems have been attracted much attentions. Compared with the single system, by transferring and sharing information, multi-agent systems can cooperate with each other to complete a complicated task which can not be completed by single system, and thus it has extensive applications in reality. Currently, the studies on consensus control for complicated nonlinear multi-agent systems are difficult and not yet mature, especially for the cases with complex network environment, limited control and communications energy and rapid convergence rate for system. Motivate by this, we consider the distributed consensus problem for a class of complicated nonlinear multi-agent systems with unmatched nonlinearities. The main works of this paper include:

(1) The leader-following consensus problem is investigated for second order multi-agent systems with unmatched nonlinearities and unknown model parameters. By introducing adaptive control, a fully distributed controller which is independent of eigenvalues of communication graph is designed. It guarantees all followers' state variables to consensus with that of leader asymptotically. Based on the Lyapunov stability theory and nonlinear adaptive control theory, the effectiveness of the proposed controller is proved.

(2) The finite-time leader-following consensus problem is addressed for a class of high-order multi-agent systems with lower-triangular nonlinear dynamics. By using backstepping control method, we develop the finite-time consensus control design scheme which can deal with the unmatched nonlinearities step by step and further enable the followers' state variables to consensus with that of leader in finite-time. The topology matrix is introduced for the design of Lyapunov function, which guarantee the distributedness of designed controller.

(3) The leader-following consensus problem is investigated for high-order stochastic nonlinear multi-agent systems with immeasurable states. Each agent is modeled by lower-triangular system. By using dynamic output feedback control method, a novel

distributed observer-type consensus protocol is proposed based only on the relative output measurements. It not only ensures that all the agents in network reach 1th moment exponential leader-following consensus, but also reduces the amounts of information exchanging among agents. In addition, the controller is constructed without using the traditional backstepping method, which makes the design procedure simple and convenient for use.

(4) In practice, agents are often equipped with a small embedded digital micro-processor which usually has limited computing, communicating and actuating capabilities. Thus, the event-based leader-following consensus problem is investigated for high-order nonlinear multi-agent systems whose dynamics are in lower-triangle form. By using event-triggered control scheme and dynamic output feedback control method in combination, a new class of distributed event-triggered consensus protocols are proposed. It is noted that the proposed controller only requires the output information of neighboring agents to be shared and it only updates when a certain important events occur, thus the communication cost is reduced significantly.

(5) The distributed event-triggered consensus problem is investigated for a class of nonlinear multi-agent systems subject to actuator saturation. A new distributed event-based dynamic output feedback controller is put forward via only the relative output measurements of neighbouring agents. By introducing event-triggered control method, the controllers for agents only update when a certain important events occur. Based on the Lyapunov stability theory and saturated control theory, sufficient conditions are derived to guarantee the exponential leader-following consensus. Furthermore, the problem of designing distributed event-triggered controller such that the domain of attraction (DOA) for consensus errors is enlarged is formulated and solved as an optimization problem with matrix inequality constraints.

Keywords: mulit-agent systems (MASs); complicated nonlinearity; leader-following consensus; unknown parameters; finite-time convergence; stochastic nonlinearity; event-triggered control; dynamic output control;

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	III
第 1 章 绪 论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 MAS 一致性控制.....	5
1.2.1 一致性问题概述.....	5
1.2.2 MAS 一致性控制研究现状.....	6
1.3 现有工作存在的不足.....	11
1.4 MAS 的通信网络.....	12
1.4.1 基本概念.....	12
1.4.2 重要矩阵及引理.....	13
1.5 本文的工作.....	15
1.5.1 研究思路.....	15
1.5.2 研究内容.....	16
第 2 章 带有未知参数的非线性时变 MAS 的完全分布式一致性控制.....	19
2.1 引言.....	19
2.2 问题描述.....	20
2.2.1 预备知识.....	20
2.2.2 带有未知参数的非线性时变多智能体系统模型简介.....	21
2.3 自适应一致性控制器设计及其有效性证明.....	22
2.4 仿真结果及分析.....	29
2.5 本章小结.....	34
第 3 章 具有下三角结构的高阶非线性 MAS 的有限时间一致性控制.....	35
3.1 引言.....	35
3.2 问题描述.....	36
3.2.1 预备知识.....	36
3.2.2 具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统模型简介.....	37
3.3 有限时间一致性控制器设计及其有效性证明.....	39
3.4 仿真结果及分析.....	49
3.5 本章小结.....	50
第 4 章 具有下三角结构的高阶随机非线性时变 MAS 的一致性控制.....	51
4.1 引言.....	51

4.2 问题描述.....	52
4.2.1 预备知识.....	52
4.2.2 具有下三角结构的高阶随机非线性时变多智能体系统模型简介.....	53
4.3 1TH 一致性控制器设计及其有效性证明.....	55
4.4 仿真结果及分析.....	61
4.5 本章小结.....	64
第 5 章 具有下三角结构的高阶非线性 MAS 的事件触发一致性控制.....	65
5.1 引言.....	65
5.2 问题描述.....	66
5.2.1 预备知识.....	66
5.2.2 具有下三角结构的高阶非线性 MAS 模型简介.....	67
5.3 基于输出反馈的事件触发一致性控制器设计及其有效性证明.....	68
5.4 仿真结果及分析.....	77
5.5 本章小结.....	79
第 6 章 带有执行器饱和的一般非线性 MAS 的事件触发一致性控制.....	81
6.1 引言.....	81
6.2 问题描述.....	82
6.2.1 预备知识.....	82
6.2.2 更具一般特性的高阶非线性多智能体系统模型简介.....	83
6.3 抗饱和事件触发一致性控制器设计及其有效性证明.....	84
6.4 仿真结果及分析.....	92
6.5 本章小结.....	97
结 论.....	98
参考文献.....	100
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果.....	110
致 谢.....	112
作者简介.....	113

第1章 绪 论

1.1 研究背景及意义

自上世纪八十年代以来,受自然界生物群体行为的启发,如狼群合作捕食、鸟类集体迁徙、鱼类群集等,如图 1-1 至图 1-3 所示,多智能体系统作为一个新的研究领域开始受到人们的普遍关注。类似于动物群体的组织性优势,即每个个体基于其邻居个体的信息互相合作产生协同行为,多智能体之间能够通过互相协调与合作来提高个体行为的智能化程度,完成许多单个系统无法完成的复杂任务。因此,多智能体系统的协同合作具有高容错、高效率和高并行性等单个系统没有的优点^[1-4]。其在实际中的典型应用包括无线传感器网络^[5]、多飞行器深空探测^[6]、机器人编队^[7]、无人机编队^[8]以及多机械臂协同装配^[9]等。此外,随着现代通信技术以及控制技术的飞速发展,融合了这些技术的多智能体系统的研究已经成为人工智能、通讯和控制等多学科交叉研究领域的前沿,具有广阔的应用前景。

多智能体系统是由多个能够感知周围环境、相互通信并且执行指令能力的单个个体通过相互间的信息共享与合作组成的网络化系统,其网络结构如图 1-4 所示。在一个多智能体系统中,每个智能体可以独立测量和感知其周围环境和邻居智能体,并基于网络中相互分享的状态信息或数据,通过一定的计算指导自身在空间中自主运动,最终达到协作目的。建立多智能体系统的目标是希望将结构大而复杂的系统



图 1-1 狼群合作捕食

Fig 1-1 Cooperative predation of wolves



图 1-2 鸟类集体迁徙

Fig 1-2 Mass migration of birds



图 1-3 鱼类群集

Fig 1-3 Schooling of fish

简化为规模小的，便于管理的系统。因此，多智能体系统能否紧密合作，实现对庞大而复杂系统的替代，很大程度上取决于能否对多智能体各个子系统进行有效的协同控制。近年来，多智能体协同控制作为多智能体系统技术的核心，已经成为人工智能领域和控制领域的热点研究方向。那么，什么是多智能体协同控制。其是指多智能体系统中的个体利用有限的局部信息传输和交换来设计分布式控制协议，最终使所有智能体系统达到一个全局目标。从控制体系角度来分，多智能体协同控制有三种控制构架，分别是集中式、分散式、和分布式构架^[10]。分布式构架是指对整个多智能体系统设置一个控制中心，通过这个控制中心来控制所有的智能体，因此它

具有分层的控制结构。该构架的优点是协调性好，缺点是对环境变化感应不敏感，动态性差。分散式构架是指多智能体系统中的每个子系统能够高度自治，也就是说它们能独立的进行信息处理、行为规划、决策计算和指令处理，并同时与其他智能体进行信息传输进而调整自身行为。该构架的优点是具有高容错性和可扩展性，但是其没有集中的控制中心，因而对网络通信的精确度和有效性要求较高。分布式构架结构是指多智能体系统的各个子系统在全局上等同但又局部集中式控制的一种分层结构。它介于集中式构架和分散式构架之间，通过将这两种构架的优点相结合，在不影响系统实时性、容错性和动态性的前提下，提高了协同控制效率。综上所述，分布式构架能够更好的反映多智能体之间的信息交互，更适用于对多智能体的本质属性进行刻画。因此在本文中，我们主要针对多智能体系统的分布式控制问题进行研究。

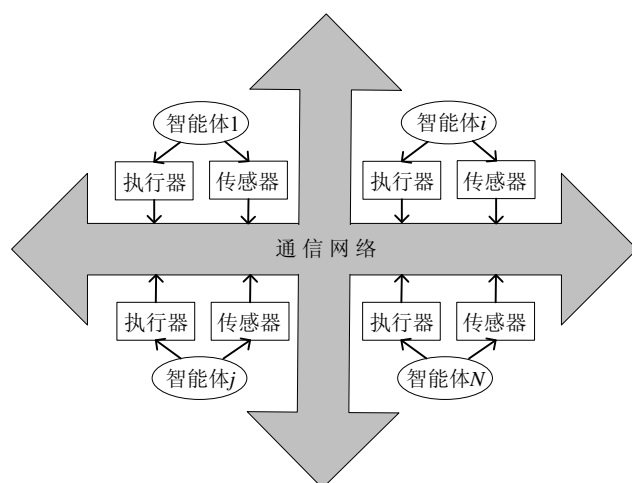


图 1-4 多智能体系统网络结构

Fig 1-4 Multi-agent system network structure

从控制目标角度来讲，多智能体协同控制的研究包括一致性^[11-13]、会合^[14-16]、聚结^[17-19]和编队^[20-22]这四个基本问题。一致性是指多智能体系统中所有个体系统的状态随着时间的推移趋于一致。会合是指多智能体系统中的所有子系统速度逐渐趋于零，且静止于某一位置。聚结是指多智能体系统的每个子系统遵循中心聚结、防撞、以及速度匹配这三个规则。其中中心聚结是指多智能体系统中的所有个体趋于靠近邻近的个体；防撞是指多智能体系统中的所有个体与邻居智能体保持适当距离，防止碰撞；速度匹配是指多智能体系统中的所有个体与邻居智能体的速度保持一致。编队是指多智能体系统中的所有个体通过调整自身行为从而保持一定的几何构型。当

对多智能体系统进行协同控制时，控制策略的有效性表现为多智能体系统能够有效应对其周围各种未知环境变化，进而通过状态的协同来完成预定的协作任务。所以，智能体协同控制的一个首要条件是其各个子系统状态达到一致性。因此本质上，会合，聚结和编队可以视为一致性问题的特例^[23]。在本文中，我们主要研究多智能体系统的领导跟随一致性控制问题。

对于多智能体系统分布式一致性控制，从各个子系统本身的动态特性来讲，包括线性多智能体系统的一致性控制和非线性系统的一致性控制。近年来，针对线性多智能体系统一致性控制的研究已经取得了丰硕的研究成果^[24-25]。然而，在实际当中，大量的实际系统如水下柔性机械臂、机器人、航天器等的动力学特性是由复杂非线性方程刻画的，而且这些系统的动力学方程及其参数由于实际环境的复杂是不能精确获得的。因此，在研究这类多智能体系统的协同控制时，关于线性多智能体系统的结论不再适用。此外，针对单个非线性系统的控制提出的结论也不能直接推广至非线性多智能体系统的分布式一致性控制中，主要原因如下：首先，单个的非线性系统往往是单输入单输出的系统，而所有多智能体系统组成的增广系统是一个和通信拓扑矩阵相关的多输入多输出系统。因此，我们需要提出一种能够处理系统拓扑矩阵以及它带来的非线性耦合项的控制方法。其次，由于智能体间的分布式通信，每个智能体的控制器设计不能基于增广系统的全部状态信息。因此，我们需要提出一种针对此增广系统的分布式控制算法。这些都使得针对非线性多智能体系统，尤其是具有复杂非匹配非线性结构的多智能体系统的一致性控制问题的研究更具挑战性。

就系统的属性而言，多智能体系统区别于单个个体系统最本质的因素在于其通过网络来进行状态信息的传递与共享。因此，网络信息传输的质量对于多智能体系统的控制性能具有重要的影响。然而在实际中，通信网络环境往往并不理想，有许多诸如通信带宽约束、资源受限、通信拓扑切换、通信时延等的制约和不确定因素。这些因素会导致多智能体系统被控性能下降，甚至会造成系统的不稳定。因此，需要在多智能体系统一致性控制中充分考虑并解决网络化引入的如采样、量化、通信能力有限等问题^[26-28]。同时，随着硬件技术的飞速发展，智能体系统中往往会嵌入微型数字处理器，它往往具有有限的在线能量，有限的计算、通信及执行能力^[29]。这些都使得控制器的执行会受制于能量的有限。此外，微型处理器的应用使得控制器需要在数字平台上被实现，并且只能在离散时刻进行触发。为了解决这些问题，

基于事件触发机制的控制协议被应用到了多智能体系统的一致性控制当中。通过引入事件触发控制方法,智能体之间的通信量和控制器的更新次数能够大大减少。因此,研究基于事件触发机制的复杂非线性多智能体系统的协同控制具有重要的理论意义和应用价值。

综上所述,本文将主要研究具有非匹配非线性结构的复杂非线性多智能体系统的一致性控制及其在事件触发机制下的一致性控制问题。本文将以多个具有下三角结构的二阶和高阶复杂非线性系统组成的多智能体系统为研究对象,综合考虑实际系统中存在的系统参数未知、状态信息不可测、随机非线性、通信带宽受限,控制能量受限等问题,研究如何设计合适有效的控制算法,使得整个多智能体系统的状态最终趋于一致。

1.2 MAS 一致性控制

1960年,在管理学和统计学领域最早出现了对一致性问题的研究^[30]。自上世纪八十年代以来,随着网络技术和控制技术的迅猛发展,人们开始在控制领域对一致性问题进行研究和探索^[31]。近年来,分布式一致性控制问题作为多智能体系统协同控制研究的基本问题,吸引了越来越多的专家学者的关注,主要原因在于多智能体系统协同控制具有重要的现实意义以及广泛的应用前景。

1.2.1 一致性问题概述

一致性控制问题作为多智能系统协同控制的基础,其主要包括一致性和一致性算法这两个方面的研究内容。其中一致性是指多智能体系统中的各个子系统的状态在设计好的控制协议的指导下,随着时间的推移达到一致。而一致性算法是指多智能体系统中的每个子系统互相之间进行通信以及相互影响的局部性规则。对于处于不同环境中的不同的智能体系统,只有在合适的分布式一致性控制算法下,其才能通过互相合作与协调达到共同的任务。

一致性用数学表达式描述为:假设在多智能体系统中有 N 个智能体,第 j 个智能体的状态用 $\mathbf{x}_j, (j = 1, \dots, N)$ 表示。如果当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \rightarrow 0, \forall i \neq j$, 则称系统达到了一致。

一致性控制算法的基本思想是每个智能体系统基于其邻居智能体的状态信息,设计合适的分布式控制算法使得通过网络互相耦合的复杂系统最终达到状态的一

致。这种状态可以是动物群体的行动方向^[32]、数据融合或分布式传感滤波值^[34]、或者卫星的姿态^[33]。

1.2.2 MAS 一致性控制研究现状

上世纪 60 年代,在管理科学与统计科学领域最早的提出了一致性问题。1987 年,Reynold 提出了著名的 Boid 模型,即一个如何用计算机在三维空间上模拟群集行为的模型^[35]。在此模型中,所有智能体系统基于其邻居智能体的状态信息来调节自己行为,并且其满足聚集性;队列性;分离性这三个规则。1992 年 Benediktsson 等提出了将一致性用于解决多传感器网络中的信息融合问题^[36],开创性的揭开了一致性研究的序幕。1995 年,在生物学领域,Vicsek 等人提出了一个模拟大量粒子涌现出一致性行为现象的离散模型,表示为

$$\theta_i(t+1) = \arctan \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \sin \theta_j(t)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \cos \theta_j(t)} + \Delta \theta_i(t)$$

其中, $\theta_i(t)$ 和 $\mathcal{N}_i(t)$ 分别表示智能体的速度方向和邻域, $\Delta \theta_i(t)$ 为表示智能体的噪声,并基于邻近原则进行数值仿真,使粒子群最终向相同的方向移动。进一步的,Jadbabaie 对 Vicsek 提出的模型进行了简化^[38],将其简化为

$$\theta_i(t+1) = \frac{1}{1 + |\mathcal{N}_i(t)|} \left(\theta_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \theta_j(t) \right)$$

并通过利用图论和稳定性理论,给出了所有个体运动方向达到一致的充分条件,即网络为连通。紧接着,Olfati-Saber 和 Murray 研究了多智能体系统在网络拓扑为固定和切换、有向和无向条件下的一致性控制问题,并构建了多智能体系统一致性控制分析的理论框架,得出多智能体系统达到一致性的充分条件为系统的网络拓扑为平衡有向图^[39]。在这些工作的基础上,对于多智能体系统一致性控制控制问题的研究已经并取得了大量的成果,下面将分别从多智能体系统模型为线性或非线性的角度出发,对一致性控制的研究现状进行简单的介绍:

(一) 线性多智能体一致性控制

针对一阶线性多智能体系统的一致性控制是从一阶积分器系统开始的。对于一阶积分器型多智能体系统,第 i 个智能体的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, N$$

其中 x_i 和 u_i 分别为第 i 个智能体的状态和输入。在邻近原则下，设计的一致性控制器为^[40]

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t))$$

其中， $j \in \mathcal{N}_i$ 表示第 i 个智能体的相邻个体的集合。因此，邻近原则的基本思想是：在设计分布式控制器时，仅利用其邻居智能体与自身的状态差，而无需知道非邻居智能体的任何信息。Ren^[40]等人基于 Saber 和 Jadbabaie^[39]等的研究，初步研究了一阶多智能体一致性控制问题，发现多智能体系统达到一致性的条件为要固定/切换拓扑中包含有生成树，放松了文献[39]中网络拓扑为平衡有向图的条件。在文献[41]中研究了一阶积分器型离散多智能体系统的一致性控制问题，其考虑第 i 个智能体的动力学模型为

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k), i = 1, \dots, N$$

给出了如下控制器

$$u_i(k) = \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k))$$

并得到了一阶多智能体系统状态在任意初始值以及通信拓扑为有向强连条件下达到一致性的充分必要条件。我们知道在多智能体系统中，各个智能体通过网络来进行信息的共享和交互，并且每个智能体利用自身及邻居的状态信息对自身进行相应的控制，从而以分布式协同的形式实现全局的控制目标。在上述控制器中，参数 a_{ij} 则是用来反映智能体 i 和智能体 j 之间的通信关系的，有通信则 $a_{ij} = 1$ ，无通信则 $a_{ij} = 0$ 。考虑由于传输速度问题和传输通道拥堵导致的通信时延问题，文献[42]研究了时延影响下一阶积分器型多智能体系统的一致性控制问题，给出了带有时延的一致性控制器

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t) (x_j(t - \tau(t)) - x_i(t - \tau(t)))$$

并以线性矩阵不等式的形式给出了系统达到平均一致性的充分条件。值得注意的是，给出的线性矩阵不等式还决定了所允许的时变时延 $\tau(t)$ 的最大上界值。此外，考虑由于通信链路的断开和连接导致的网络通信拓扑切换问题，文献[42]还给出了一阶积分器型多智能体系统在拓扑切换条件下达到平均一致性的充分条件。进一步的，针对通信网络中存在通信噪声的情形，文献[43]基于分布式估计器给出了如下一致性控

制器

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -k\alpha(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} z_{ij}(t) + \alpha(t) v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= \alpha_0(t) - \gamma k \alpha(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} z_{ij}(t) \end{aligned}$$

其中 $z_{ij}(t)$ 为带有噪声的可测量的邻居智能体的状态, $v_i(t)$ 为第 i 个智能体的估计器的状态。并给出了有向连通拓扑条件下, 系统达到均方一致性的充分条件。文献[44]进一步将工作推广至通信噪声为随机情形, 并给出了系统达到均方一致性的充要条件。所提出的控制器增益设计方法不依赖于系统通信拓扑矩阵, 仅仅与系统的个数以及噪声系数相关。

在一阶系统研究结果的基础上, 人们开始研究二阶积分器型多智能体系统^[45-47]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= u_i, \quad i=1, \dots, N \end{aligned}$$

其中 x_i, v_i 和 u_i 分别为第 i 个智能体的位移、速度和控制输入, 高阶积分器型多智能体系统^[48-50]

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{i,n-1} &= x_{i,n} \\ \dot{x}_{i,n} &= u_i, \quad i=1, \dots, N \end{aligned}$$

以及一般线性多智能体系统^[51-53]

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}u_i(t), \quad i=1, \dots, N$$

的一致性控制问题。以二阶积分器系统为例, 设计其一致性控制器为^[47]

$$u_i = \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i) + \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (v_j - v_i)$$

从经典控制的角度来看, 该控制器本质上是一个 PD 控制器, 它既同时包含了系统的位置信息和速度信息。区别于单个系统的是, 对于多智能体系统而言, 其利用的是群体位置和速度误差信息。这一特性使得针对多智能体系统的一致性控制分析更为复杂。事实上, 相较于一阶多智能体系统, 二阶多智能体的一致性条件要更加复杂和严苛。通信网络中包含有向生成树相比于一阶多智能体系统只是一个必要而非充分条件, 而且控制参数 α 和 β 要满足一定的条件。值得注意的是, 当考虑高阶积分

器型和一般线性多智能体系统时，其满足一致性的条件则更为复杂^[48-53]。此外，文献[54]考虑了二阶积分器型多智能体系统的速度不可测问题，提出了一种仅依赖于位置测量的一致性控制器。文献[55-57]则基于不同的控制方法研究了非理想通信网络环境下二阶及高阶多智能体系统的一致性控制问题，如具有时变拓扑、通信时滞、外界干扰等情形下的一致性控制问题。

(二) 非线性多智能体系统一致性控制

考虑到在现实中，大部分实际系统都是由非线性方程刻画的。文献[58]研究了存在外部干扰条件下的一阶非线性多智能体系统的一致性控制问题，其第 i 个智能体的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + u_i(t) + \Delta_i, \quad i = 1, \dots, N$$

其中 $f_i(x_i)$ 为包含不确定参数的连续非线性函数， Δ_i 为包含未建模动态和噪声的外部干扰。利用神经网络的逼近能力，在控制器中构造自适应神经网络来补偿系统的不确定非线性，并给出了多智能体系统在通信拓扑连通条件下达到一致性的充分条件。所提出的控制方法能够推广到预定编队控制和高阶多智能体系统一致性控制情形。在文献[59]中，作者采用类似的技术研究了一阶非线性多智能体系统的一致性控制问题。在假设领导者动力学特性未知的情形下，设计了基于神经网络控制的分布式一致性控制器。文献[60]研究了一阶非线性多智能体系统的 H_∞ 一致性控制问题。提出了一个新颖的 Takagi-Sukeno (T-S) 模糊建模方法来描述多智能体系统的一致性，并基于此提出了一致性控制器设计方法，最终使得所有跟随者的状态能够与领导者达到一致。

对于二阶非线性多智能体系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= f_i(x_i(t), v_i(t)) + u_i(t), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

文献[61]引入了一个虚拟领导者，在假设系统中只有一小部分智能体能够获得领导者的速度和位置信息的条件下提出了一个既能保持连通性还能避免碰撞的一致性控制算法，并在该算法中引入了自适应参数。文献[62]则提出了一个新的概念-代数连通度来描述系统的一致性可达性，并给出了有向通信拓扑条件下系统实现一致性的充分条件。然而文献[61][62]都假设系统的速度信息可以精确获得。在实际中，由于速

度传感器价格昂贵，速度往往信息难于获取。基于此，文献[63]针对二阶非线性多智能体系统，提出了一种仅依赖于位置测量的一致性控制器，使得系统的位置信息和速度信息都最终达到半全局一致性。文献[64]针对具有非线性动态的二阶多智能体系统，利用速度估计器提出了不依赖于速度测量的一致性控制器，并利用 Lyapunov 稳定性理论、图论和矩阵论的相关知识给出了系统达到一致性的充分条件。为了更实用考虑，文献[65]-[67]研究了由 Euler-Lagrange 方程描述的机器人系统、独轮车系统等实际系统的一致性控制问题，并在通信拓扑连通条件给出了所有系统状态达到一致性的充分条件。

基于临近原则，文献[68]研究了一类更具一般性的非线性多智能体系统的一致性控制问题，其第 i 个智能体的动力学模型为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{u}_i(t), i = 1, \dots, N$$

其中控制输入 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$ 。在假设通信拓扑切换切关联连通的条件下给出了分布式一致性控制器的设计方法。进一步的，文献[69]基于自适应控制，针对带有 Lipschitz 非线性特性的多智能体系统，提出了不依赖于系统通信拓扑矩阵特征值的完全分布式一致性控制器。尽管这些工作考虑了非线性多智能体系统的一致性控制，但是所提出的控制方法只能处理与控制输入相匹配的非线性项。也就是说，所提出的控制方法不能应用于带有非匹配非线性的系统。一般的，非匹配非线性多智能体系统的第 i 个智能体的动力学模型可表示为^[70]

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,m} &= x_{i,m+1} + f_{i,m}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t), \quad m = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i,n} &= u_i + f_{i,n}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t) \\ y_i &= x_{i,1}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}$ 和 $y_i \in \mathbb{R}$ 分别代表系统的状态，输入和输出， $f_{i,m}(\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, n$ 为非线性函数。针对这类系统的分布式一致性控制器设计的最大难点在于如何只基于邻居智能体的状态信息来处理系统本身的非线性项，并使多智能体系统的状态达到一致性。通过借鉴单个非匹配非线性系统的控制方法，文献[70]和[71]基于反步控制研究了非匹配非线性多智能体系统的一致性控制问题。进一步的，文献[72]通过引入新颖的状态变换，研究了具有非匹配非线性结构的时变多智能体系统的一致性问题，并将多智能体系统的一致性问题转换为单个系统的镇定问题。最后通过选取合适的时变参数，基于观

测器给出了能使系统所有状态达到一致性的控制器设计方法。目前，针对具有非匹配非线性结构的多智能体系统的一致性控制研究虽然已经取得了一些成果^[70-72]，但是面向该系统的一致性控制研究尚不成熟，尤其是综合考虑复杂网络通信环境、控制器执行能力有限、系统参数未知，状态不可测、有限时间收敛等问题时，问题就变得更具挑战性。由此可见，在具有非匹配非线性结构的多智能体系统领域的研究任重而道远。

1.3 现有工作存在的不足

通过对当前多智能体系统一致性控制研究成果的介绍可以看出，对于动力学特性由一阶线性/非线性，二阶线性/非线性或是一般线性/非线性方程描述的多智能体系统的一致性控制已经取得了丰硕的研究成果。但是，现有的工作并没有充分考虑到实际多智能体系统中的非匹配非线性特性、硬件设备的带来的能量有限性以及通信环境的复杂性等问题，因此还存在许多需要解决的理论问题。

首先，自然界群本质固有的非匹配非线性特质是多智能体系统在实际应用中不得不面临的问题。然而，现有的研究成果大都只考虑了线性或者具有匹配非线性结构的多智能体系统的一致性控制问题，即所考虑的系统要么为线性系统，要么系统中的非线性可以直接通过控制输入来抵消处理。这种理想化模型往往无法应用于实际工程系统的研究。虽然目前对于具有非匹配非线性结构的多智能体系统的研究已经进行了初步的研究，但是所提出的控制方法大都基于反步控制^[70-71]，需要的计算量大，且由于迭代过程每一步不等式的放缩导致所求得的控制数值大，从而需要的力矩大，对硬件设备的要求高。此外在实际中，系统还可能受到来自外界的、无法测量的、随机扰动的影响，并模型参数不能精确获得。这些均导致系统的性能指标下降，从而使得对于被控系统的稳定性分析更加复杂。因此，如何针对具有非匹配非线性结构的多智能体系统设计具有实用价值和满足期望性能指标的一致性控制器至关重要。

其次，多智能体系统区别于单体系统最本质的原因在于其通过网络来进行信息的传递与分享。因此，在多智能体一致性控制中，考虑系统网络化带来的信息采样且离散传输、通信带宽约束以及通信能力有限等问题具有重要的实际意义。然而近年来，针对采样机制下具有非匹配非线性结构的多智能体系统的一致性控制研究结果少之又少，尤其是综合考虑能节约通信带宽以及信息通信量的一致性结果几乎没

有。文献[72]虽然针对具有非匹配非线性结构的多智能体系统提出了基于观测器的一致性控制器，即控制器设计只基于系统的输出信息，并且所构造的控制器设计方法能避免反步控制带来的计算量大的问题，但是其仍然需要观测器的全部状态进行传输，并没有减少网络中信息的传输量。因此，如何针对由具有非匹配非线性结构的多智能体系统设计基于采样机制并同时能克服通信资源有限问题的一致性控制器具有重要的理论和实际意义。

最后，在实际的网络化多智能体系统中，每个智能体仅配备资源有限的微处理器和传感器，并且电源的能量有限。因此在多智能体系统中不仅要考虑网络化采样、通信带宽受限和单位时间通信量有限等问题，还需要考虑控制器实际物理执行器执行能力有限且能量有限的问题。然而现有的针对具有非匹配非线性结构的多智能体系统的研究由于受制于被控对象的复杂性与研究方法的局限性，都是在假设系统执行器不受限的条件下进行的，并且所设计的控制器都是基于连续状态信息全部有效传输。而对于综合考虑网络化采样、通信资源有限和执行器能量有限等问题的具有非匹配非线性结构的多智能体系统的一致性控制问题的研究结果寥寥无几。因此，如何综合考虑以上因素，针对由具有非匹配非线性结构的多智能体系统设计能最大限度节约通信及执行能量的一致性控制器对于工程实际具有重要的指导意义。

1.4 MAS 的通信网络

1.4.1 基本概念

在多智能体系统中，智能体间通过网络来进行信息传递，这种网络可以是电力网络、基于数据包的通信网络或者基于测量的通讯网络。在多智能体控制中，这种网络可以抽象成信息流的拓扑形式。因此在本文中，我们将用图来描述多智能体系统的网络拓扑结构。

我们用一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 来表示通信拓扑，图中的节点集 $\mathcal{V} = \{v_i\}$, $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ 为有限非空集，其中 $\mathcal{V} = \{v_i\}$ 中有 N 个元素。用有限非空集 $\mathcal{E} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 来表示边集。图中的每一条边可以用一对节点 (v_i, v_j) 来表示，其中 v_i 代表起点， v_j 代表终点。如果 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ ，那么 v_j 就称为 v_i 的一个邻接节点，表示节点 i 可以向节点 j 传递信息。如果 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ ，则称图为无向的或对称的，反之该图为有向的。如果图 \mathcal{G} 中任意两个不同的节点都形成边，就称图 \mathcal{G} 是完全图。在有 N 个节点的有向图 \mathcal{G} 中，从节点 v_i 出发的边的个数叫做 v_i 的出度，指向节点 v_i 的

边的个数叫做 v_i 的入度。节点 v_i 的邻接成员用集合 $\mathcal{N}_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 表示。对于任意节点 v_i ，如果其出度等于入度，则称该图为平衡图。

如果有向图 \mathcal{G} 存在一条 v_i 到 v_j 的路径时，我们称是 v_i 父节点， v_j 是子节点。当有向图中除去唯一一个节点（根节点），其余所有的节点都有一个父节点时，则称该有向图具有一个有向树。当存在一个有向树包含有向图 \mathcal{G} 中所有节点时，则称该有向图 \mathcal{G} 有一个生成树。一个有向图 \mathcal{G} 中的强路径指的是：存在一个有序的节点序列 $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ ，其中 $(v_{i-1}, v_i) \in \mathcal{E}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ， r 为该有向路径的长度数。如果一个有向图中任意两个有序节点可以通过强路径连通，就称其为强连通图。如果强连通有向图是对称的，就称其为连通图且对称。对于无向图来说，任意节点对之间有路径连接，则该无向图为连通图。当且仅当图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 中所有节点的入度和出度相等时，称该图为平衡图。任意一个无向图都是平衡图。

1.4.2 重要矩阵及引理

（一）重要矩阵

一个维数为 N 的有向图的邻接矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ 是一个 $N \times N$ 维矩阵，定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_j, v_i) \in \mathcal{E} \\ 0, & (v_j, v_i) \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

所以，当 \mathcal{G} 为对称图时， \mathbf{A} 为对称矩阵。维数为 N 的有向图的出度矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_{ij}\}$ 是一个 $N \times N$ 维的对角矩阵，其对角线上的元素定义为

$$d_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i)$$

显然的，矩阵 \mathbf{D} 中的每个对角线元素是对应顶点的出度。当 \mathcal{G} 为对称图时，每个节点的出度与入度相等， \mathbf{D} 也称其为度矩阵。维数为 N 的有向图的 Laplacian 矩阵是一个 $N \times N$ 维的矩阵，定义为： $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ 。

以上矩阵通常用于描述跟随者之间或无领导者多智能体系统的各个个体之间的通信关系。领导智能体作为一个特别的角色，它能影响跟随者智能体的动态变化，而不被跟随智能体影响。在本文中，我们用矩阵 \mathbf{B} 来描述维数为 N 的图 \mathcal{G} 中可以直接接收到领导者状态信息的跟随者的情况，其定义为 $\mathbf{B} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_N\}$ ，称其为领导跟随连通矩阵。当且仅当领导者与第 i 个跟随者有通信关系时，有 $b_i > 0$ 。显然的，在一个有领导者的多智能体系统中，应该至少有一个跟随者与领导者有通信关

系，即至少有一个 $b_i > 0$ 。假设领导智能体由节点 0 来表示，那么，我们可以得到一个由图 \mathcal{G} ，节点 0 和领导智能体与跟随智能体之间的边组成的增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 。它反映了一个通信网络中，所有智能体间的通信关系。如果在一个通信网络中，存在至少一个跟随智能体能够获得领导智能体的信息，那么增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 是连通的。对应于增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ ，我们定义矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{B}$ 。

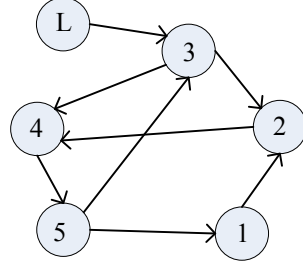


图 1-5 有向图例子

Fig 1-5 An example of directed graph

下面，我们以一个实例来说明这些矩阵。参考文献[73]中提供的一个有向图实例，如图 1-5 所示。由图可知，该图包含有一个有向生成树。其相应的邻接矩阵 \mathbf{A} ，入度矩阵 \mathbf{D} ，Laplacian 矩阵 \mathbf{L} 和领导跟随连通矩阵 \mathbf{B} 分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(二) 重要引理

关于增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ ，我们给出如下引理，它将在后边的控制器有效性分析中具有重要作用。

引理 1-1^[73]：如果增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 是连通的，那么其对应的矩阵 \mathbf{H} 为正定矩阵。

由于在多智能体系统的一致性控制研究中，经常需要用到矩阵的 Kronecker 积，

因此我们给出如下关于矩阵的 Kronecker 积的引理

引理 1-2^[74]：对于邻接矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ 与领导跟随连通矩阵 $\mathbf{B} = \{b_1, \dots, b_N\}$ ，其 Kronecker 积定义为：

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1N}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{B} & \cdots & a_{NN}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

并且对于任意矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 和 $\bar{\mathbf{D}}$ 及任意的常数 λ ，Kronecker 积有如下性质

- 1) $(\lambda \bar{\mathbf{A}}) \otimes \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \otimes (\lambda \bar{\mathbf{B}})$
- 2) $(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \otimes \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{C}}$
- 3) $(\bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{B}})(\bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{D}}) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{D}}$

注 1-1：如果矩阵 \mathbf{H} 的所有特征根都具有严格的正实部，则称 \mathbf{H} 为正定矩阵；如果矩阵 \mathbf{H} 的所有特征根都具有严格的负实部，则称 \mathbf{H} 为负定矩阵，也称作稳定矩阵或 Hurwitz 稳定矩阵。

在本文中，如果没有特别说明，我们假设给出的矩阵和向量具有合适的维数； \Re 表示实数向量积； \Re^n 表示 n 维实数向量积； $\Re^{n \times n}$ 表示 n 行 n 列实数矩阵积； \mathbf{I}_n 表示 n 行 n 列单位阵； $\mathbf{1}$ 表示元素全为 1 的具有合适维数的列向量； $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最大特征值； $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最小特征值； $\bar{\sigma}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最大奇异值； $\underline{\sigma}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最小奇异值； $\|\mathbf{x}\|$ 表示向量 \mathbf{x} 的欧拉范数，对于 $\mathbf{x} \in \Re^n$ ，有 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ ； $\|\mathbf{A}\|$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的欧拉范数，对于 $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$ ，有 $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ ；对于向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ ，定义 $|\mathbf{x}|_r = (|x_1|, \dots, |x_N|)^T$ ；对于矩阵 \mathbf{A} ，定义 $[\mathbf{A}]$ 为矩阵 \mathbf{A} 中对应元素取绝对值； $\text{diag}(b_1, \dots, b_N)$ 表示以 b_1, \dots, b_N 为对角线元素的对角阵；对于 $y \in \Re$ ， $\underline{\mathbf{y}}$ 表示元素均为 y 的 n 维列向量； $\max\{x_1, \dots, x_N\}$ 表示取 x_1, \dots, x_N 的最大值；类似的， $\min\{x_1, \dots, x_N\}$ 表示取 x_1, \dots, x_N 的最小值。

1.5 本文的工作

1.5.1 研究思路

本文将深入研究复杂非线性多智能体系统的领导跟随一致性控制问题。针对动力学特性由具有非匹配非线性结构的二阶及高阶非线性方程描述的多智能体系统，融合现有的针对单个非线性系统的基本控制思想和先进成果，建立基于反步控制、

自适应控制、动态输出反馈控制、事件触发机制的分布式一致性控制器设计的新方法，设计针对系统参数未知、状态不可测、通信带宽约束及执行器能量有限的一致性控制算法，全文的思路和组织结构如图 1-4 所示。第 2-5 章针对具有下三角结构的非线性多智能体系统，考虑了其一致性控制中的参数未知、有限时间收敛、状态不可测、随机非线性、通信带宽受限、控制器离散触发等问题。第 6 章进一步考虑了更具一般性的能将下三角结构视为特例的非匹配非线性多智能体系统在执行器饱和条件下的一致性控制问题。值得注意的是，非匹配非线性结构是贯穿全文所考虑的问题。

1.5.2 研究内容

本文的具体研究内容详细叙述如下：

第 2 章主要研究了带有未知参数的非线性时变 MAS 的完全分布式一致性控制问题。考虑系统中存在模型参数未知情况，基于多智能体系统一致性误差，建立了能够综合逼近系统未知模型参数及拓扑矩阵特征值的自适应律；基于反步控制，设计了每一步的虚拟变量和虚拟控制器，以处理系统中的非匹配非线性，进而提出了不依赖于全局拓扑矩阵信息的完全分布式一致性控制器，使得所考虑的多智能体系统能够达到渐进领导跟随一致性。

第 3 章主要研究了具有下三角结构的高阶非线性 MAS 的有限时间一致性控制问题。考虑实际中对多智能体系统快速达到一致性的要求，针对具有下三角结构的高阶 MAS，提出了既能消除系统本身非线性带来的消极耦合影响，又能使系统在有限时间内达到一致性的分布式控制器。基于反步控制，设计每一步的虚拟变量和虚拟控制器，保证逐步处理系统中的非匹配非线性；在 Lyapunov 函数设计中引入分数次项和积分项，保证了系统的有限时间一致性；利用拓扑矩阵特性设计 Lyapunov 函数，保证了控制器的分布式。

第 4 章主要研究了具有下三角结构的高阶随机非线性 MAS 的一致性控制问题。通过引入动态参数 F ，处理了系统的非匹配非线性项和随机项，并基于系统输出和动态参数 F 构造了被控系统的虚拟系统，且该虚拟系统的状态不需要在智能体间传输。进一步的，利用该虚拟状态设计了仅依赖于系统输出信息的分布式控制器，使得多智能体系统达到 1th 指数收敛一致性。所设计的控制方法能够有效的减少智能体间的信息传输量，节约通信带宽。

第5章主要研究了具有下三角结构的高阶非线性 MAS 的事件触发一致性控制问题。考虑在实际应用中，每个系统仅配备资源有限的微处理器和传感器，并且微型处理器的应用使得控制器需要在数字平台上被实现，提出了基于事件触发机制的

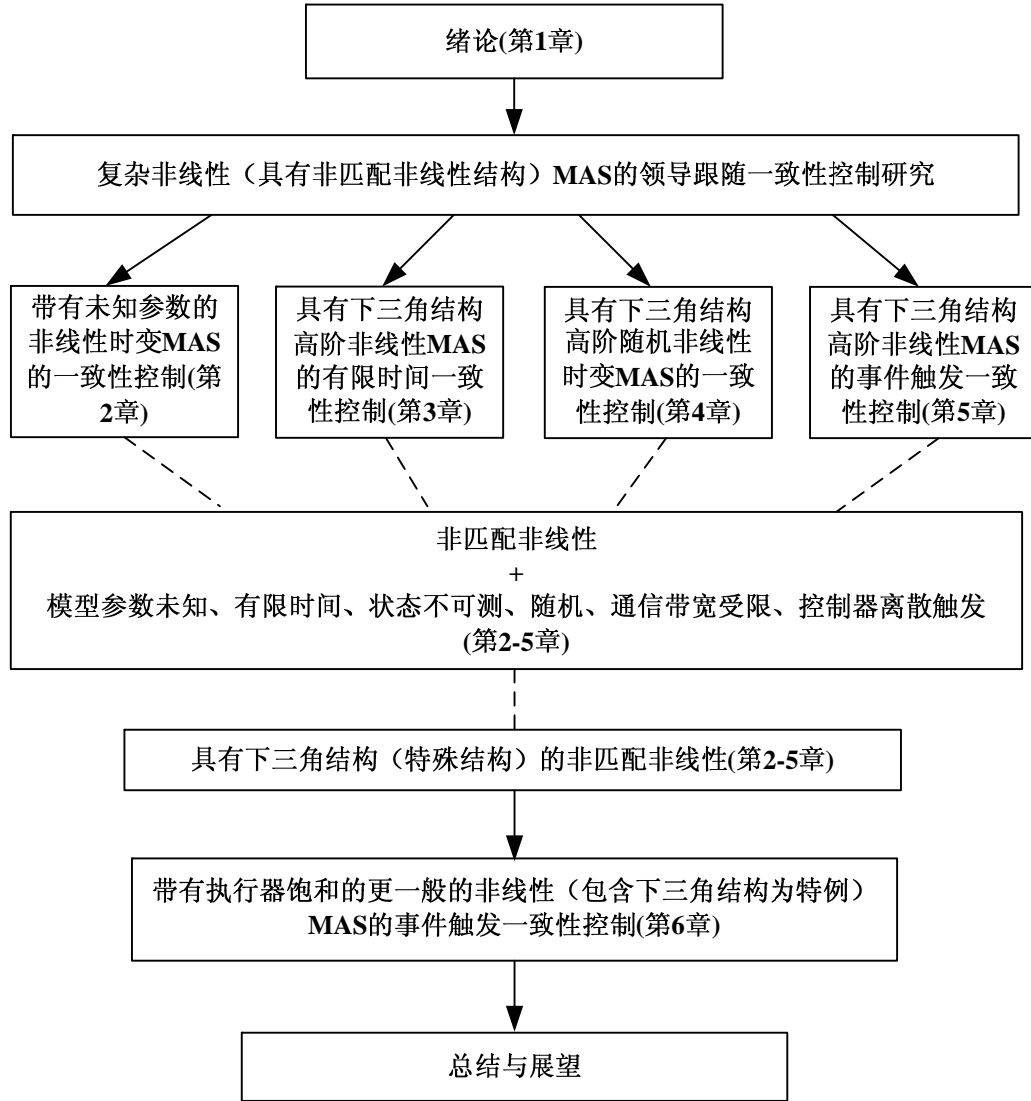


图 1-4 论文的组织结构

Fig 1-4 The organization structure of this dissertation

一致性控制器及其相应的事件触发策略。考虑实际网络往往具有有限的通信能力，引入动态输出控制，保证通信网络中仅需传输系统的输出信息。通过将事件触发控制和动态输出控制相结合，最大限度减少了信息传输量和控制器触发次数，同时保证了系统达到领导跟随一致性。

第6章主要研究了带有执行器饱和的一般非线性 MAS 的事件触发一致性控制问题。前几章都考虑了具有下三角结构的多智能体系统模型，本章则考虑了更一般

的非线性多智能体系统模型。该模型可将具有非匹配非线性结构下三角结构模型视为特例，具有更广泛的适用性。通过将事件触发控制和动态输出控制相结合，提出了能够抗饱和的分布式一致性控制器及其相应的事件触发策略。以矩阵不等式的形式给出了选取控制器参数的充分条件，并给出了能保证系统达到领导跟随一致性的最大吸引域求解方法。

本文的最后对全文进行了总结，并讨论了今后进一步的研究工作。

第2章 带有未知参数的非线性时变 MAS 的完全分布式 一致性控制

2.1 引言

多智能体系统以其能够提升单个系统的工作性能和扩展性能、增强系统的可靠性和灵活性、降低系统的制造成本和维修成本而在实际中得到广泛应用。对于二阶以及高阶线性/非线性多智能体系统一致性控制的研究已经取得了丰硕的成果^[75-78]。然而,在这些研究中,所设计的控制器为使得闭环系统达到一致性,其控制增益必须与对应通信拓扑的 Laplacian 矩阵特征值满足一定的函数关系。由于计算 Laplacian 矩阵的特征值需要知道相应的整个通信拓扑的信息,也就是多智能体系统的全局通信信息,因而对于需要设计分布式控制器的每个智能体系统而言,这些特征值本质上都是未知的。所以,文献[75]-[78]所设计的控制器并非严格意义上的分布式控制器。为了解决这个问题,文献[79]-[80]在假设系统状态矩阵稳定的条件下针对、对一般线性多智能体系统设计了不依赖于任何全局信息的分布式控制器。文献[69]首次提出了基于自适应控制的分布式状态反馈控制器,用时变的控制增益去处理系统通信拓扑的特征值,并证明了在无向连通图条件下,系统能够可达到一致性。随后,文献[52]、[81]针对一般线性多智能体系统,分别研究了无向图条件下分布式动态输出反馈一致性控制问题以及有向图条件下分布式动态状态反馈一致性控制问题,给出的控制器不依赖于任何全局通信拓扑信息。进一步的,考虑到系统的未建模动态特性,文献[51]基于输出控制设计了既能处理系统未建模动态,又不需要知道系统全局信息的完全分布式一致性控制器。文献[82]则研究了非线性满足全局 Lipschitz 条件下二阶非线性多智能体系统的一致性控制问题,提出了一种有效的分布式自适应增益策略,并在此基础上提出了完全分布式一致性控制器,保证了系统的全状态一致性。

上述文献考虑的均是动态特性完全已知的线性或者具有匹配非线性的多智能体系统。然而,大量的实际机械系统(如机器人,柔性机械臂、地面车辆、航天器)的动力学特性都是由非线性方程刻画的,而且在很多情况下,由于所处环境的复杂,还会存在系统模型参数不能精确获得,系统具有未建模动态及非匹配的非线性特性等情形。因此本章基于现有的工作,研究了二阶非匹配非线性多智能体系统的一致

性控制问题，并将所得的结论推广至了高阶非匹配非线性系统。与现有的文献相比，本章工作的创新点主要包括以下三点：1) 本章考虑的系统非线性满足全局时变 Lipschitz 条件，即 Lipschitz 条件中的参数为时变的，并且考虑了系统的未建模动态及模型参数不可获得等情形。现有文献^[79-82]考虑的系统可以视为本章所考虑系统的一个特例。2) 本章仅假设系统的通信拓扑图为有向图并且包含有一个生成树。这是多智能体一致性控制中最基本的一个假设条件。3) 通过将反步控制和自适应控制相结合，提出了一个不依赖于系统模型参数和通信拓扑矩阵特征值的完全分布式一致性控制器。

2.2 问题描述

2.2.1 预备知识

基于 1.4 中给出的多智能体系统的通信拓扑知识，在本章中，我们假设系统的通信拓扑满足以下假设

假设 2-1: 增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 变为有向的且包含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

为了更好的解释假设 2-1，我们给出如图 2-1 所示的一个拓扑图例子，其中节点 0 是领导者，节点 1-4 是跟随者。显然的，当有向图 2-1 中除去唯一一个节点 0（根节点），其余所有的节点都有一个父节点 0。因此，图 2-1 具有一个有向生成树，满足假设 2-1。此外，在数值仿真中，我们仍选取通信拓扑图为图 2-1。

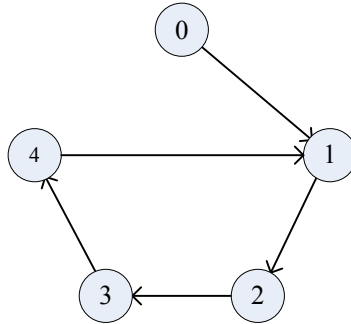


图 2-1 通信拓扑图

Fig 2-1 Topology of augmented graph $\bar{\mathcal{G}}$

在假设 2-1 条件下，拓扑矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{B}$ 满足如下引理

引理 2-1: 存在一个对角阵 $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_N)$ 使得 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{QH} + \mathbf{H}^T \mathbf{Q}$ 为正定矩阵。并且，存在一个常数 μ 使得 $\mathbf{\Lambda} \geq \mu \mathbf{I}_N$ 。

注 2-1: 对于多智能体系统一致性控制来说，假设 2-1 是通信拓扑应满足的最基

本的且必须的条件。它既保证了智能体系统间的连通性，又不包含通信冗余。并且假设2-1包含现有文献普遍考虑的无向连通图和强连通图^{[69],[82]}为特例。对于引理2-1，满足条件的矩阵 \mathbf{Q} 的一个解为 $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_N) = \text{diag}(\tilde{\rho}_1/\rho_1, \dots, \tilde{\rho}_N/\rho_N)$ ，其中 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{1}$ ， $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N)^T = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{1}$ ^[83]。

2.2.2 带有未知参数的非线性时变多智能体系统模型简介

我们考虑由 $N+1$ ($N \geq 1$) 个二阶非线性时变智能体组成的多智能体系统，其中包括 N 个跟随者和一个虚拟领导者。第 i ($i = 0, 1, \dots, N$) 个智能体系统的动力学模型为

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,1} &= px_{i,2} + r_1 g_{i,1}(\mathbf{z}_i, x_{i,1}, t) \\ \dot{x}_{i,2} &= su_i + r_2 g_{i,2}(\mathbf{z}_i, x_{i,1}, x_{i,2}, t) \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{C}\mathbf{z}_i + \mathbf{l}x_{i,1}\end{aligned}\quad (2-1)$$

其中 $x_{i,1}, x_{i,2} \in \mathbb{R}$ 和 $u_i \in \mathbb{R}$ 分别代表系统的状态和输入， $p, r_1, r_2, s \in \mathbb{R}$ 为未知的系统参数，并且存在一个已知正常数 ς 使得 $r_1/p \leq \varsigma$ ， $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m$ 表示第 i 个智能体的未建模动态，他的状态在控制器设计中不可获得； $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ 分别为未知的常数矩阵和常数向量， $g_{i,1}(\cdot), g_{i,2}(\cdot) \in \mathbb{R}$ 为不确定时变非线性函数并且满足以下假设

假设 2-2: 对于 $i = 0, 1, \dots, N$ ，

$$\begin{aligned}\left|g_{i,1}(\mathbf{z}_i, x_{i,1}, t) - g_{j,1}(\mathbf{z}_j, x_{j,1}, t)\right| &\leq \eta_1(t) \left(\left|x_{i,1} - x_{j,1}\right| - \mathbf{h}_1^T \left|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\right|_{\Gamma}\right) \\ \left|g_{i,2}(\mathbf{z}_i, x_{i,1}, x_{i,2}, t) - g_{j,2}(\mathbf{z}_j, x_{j,1}, x_{j,2}, t)\right| &\leq \eta_2(t) \left(\left|x_{i,1} - x_{j,1}\right| - \left|x_{i,2} - x_{j,2}\right| - \mathbf{h}_2^T \left|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\right|_{\Gamma}\right)\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^m$ 为未知常数向量， $\eta_1(t), \eta_2(t)$ 为已知的时变函数。

注 2-2: 在实际中，很多情形下的多智能体系统的动态特性是由包含未建模动态和未知模型参数的方程(2-1)描述的。比如，在容错控制中，控制输入 u 前会存在一个未知参数 $0 < s \leq 1$ 来描述系统的故障^[84-85]。在含有未知非线性情形中，非线性项中也可能存在未知的参数，其在系统(2-1)中由 r_1, r_2 来描述。此外，本章考虑的系统(2-1)包含一阶积分器系统^[41]、二阶积分器系统^[45]、带有非线性项 $g_{i,1}(\cdot) = 0, g_{i,2}(\cdot) \neq 0$ 的系统^[62]。因此，研究由方程(2-1)描述的带有未建模动态和未知模型参数的多智能体系统具有很大的意义。值得注意的是，由于一致性控制问题的特殊性，对于非线性多智能体系统假设其非线性项满足 Lipschitz 条件是一个非

常普遍的假设^[62-63]。

2.3 自适应一致性控制器设计及其有效性证明

对于多智能体系统，我们知道每个智能体仅能获得其邻居智能体的状态信息。更准确的讲，对于第 i 个智能体，它能用于控制器设计的信息为其邻居智能体状态信息组成的局部邻接一致性误差，定义这个误差为

$$\begin{aligned} e_{i,1} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_{i,1} - x_{j,1}) + b_i (x_{i,1} - x_{0,1}) \\ e_{i,2} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_{i,2} - x_{j,2}) + b_i (x_{i,2} - x_{0,2}) \\ \xi_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (z_i - z_j) + b_i (z_i - z_0) \end{aligned} \quad (2-2)$$

进一步的，定义多智能体系统全局误差为 $\mathbf{e}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{N,1})^T$ ， $\mathbf{e}_2 = (e_{1,2}, \dots, e_{N,2})^T$ ，和 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1^T, \dots, \xi_N^T)^T$ 。那么，利用 (2-1) 和 (2-2)，我们可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= p\mathbf{e}_2 + r_1 \mathbf{H} (\mathbf{g}_1(\cdot) - \underline{\mathbf{g}}_{0,1}(\cdot)) \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= s\mathbf{H}\mathbf{u} + r_2 \mathbf{H} (\mathbf{g}_2(\cdot) - \underline{\mathbf{g}}_{0,2}(\cdot)) - s\mathbf{B}\mathbf{u}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C})\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{l})\mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (2-3)$$

其中矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{B}$ 为通信拓扑矩阵， $\mathbf{u}_0 = \mathbf{I}u_0 \in \mathbb{R}^N$ ， $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$ ，函数向量

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{g}}_{0,1}(\cdot) &= \mathbf{I}g_{0,1}(z_0, x_{0,1}, t) \in \mathbb{R}^N \\ \underline{\mathbf{g}}_{0,2}(\cdot) &= \mathbf{I}g_{0,2}(z_0, x_{0,1}, x_{0,2}, t) \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{g}_1(\cdot) &= (g_{1,1}(z_1, x_{1,1}, t), \dots, g_{N,1}(z_N, x_{N,1}, t))^T \\ \mathbf{g}_2(\cdot) &= (g_{1,2}(z_1, x_{1,1}, x_{1,2}, t), \dots, g_{N,2}(z_N, x_{N,1}, x_{N,2}, t))^T \end{aligned}$$

为了使证明过程看起来更清晰，在之后的分析过程中，我们用简化的符号 $\underline{\mathbf{g}}_{0,1}$, $\underline{\mathbf{g}}_{0,2}$, \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 来分别表示函数向量 $\underline{\mathbf{g}}_{0,1}(\cdot)$, $\underline{\mathbf{g}}_{0,2}(\cdot)$, $\mathbf{g}_1(\cdot)$, $\mathbf{g}_2(\cdot)$ 。

在下面，基于反步控制方法，我们提出了系统(2-1)的一个完全分布式自适应一致性控制器。具体的分析过程如下：

第 1 步：基于式(2-3)，我们构造 Lyapunov 函数为

$$V_1(\mathbf{e}_1) = \frac{l}{2p} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 \quad (2-4)$$

其中 $\iota = (4\varpi r_2^2 + 10p^2 + 4\varpi r_1^2 + 11)\bar{q}^2 / \mu s$, $\bar{q} = \max\{q_i\}$, p, r_1, r_2, s 为(2-1)中给出的系统参数, ϖ 为满足不等式 $\|\mathbf{x}\|_{\Gamma}^T [\mathbf{H}] [\mathbf{H}^{-1}] \|\mathbf{y}\|_{\Gamma} \leq \theta \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \varpi \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ 的常数, μ 为引理 2-1 中给出的常数。值得注意的是, q_i 为引理 2-1 中给出的矩阵 \mathbf{Q} 的元素。利用式(2-3), 通过简单的计算可得

$$\dot{V}_1 = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^*) + \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2^* + (\iota r_1 / p) \mathbf{e}_1^T \mathbf{H} (\mathbf{g}_1 - \underline{\mathbf{g}}_{0,1}) \quad (2-5)$$

基于假设 2-2, 并且对于任意的向量 \mathbf{x} , \mathbf{y} 和矩阵 \mathbf{H} , 总存在常数 θ 和 ϖ 使得不等式 $\|\mathbf{x}\|_{\Gamma}^T [\mathbf{H}] [\mathbf{H}^{-1}] \|\mathbf{y}\|_{\Gamma} \leq \theta \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \varpi \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ 成立, 我们可得

$$\begin{aligned} & (\iota r_1 / p) \mathbf{e}_1^T \mathbf{H} (\mathbf{g}_1 - \underline{\mathbf{g}}_{0,1}) \\ & \leq \iota \zeta \eta_1(t) \|\mathbf{e}_1\|_{\Gamma}^T [\mathbf{H}] [\mathbf{H}^{-1}] \|\mathbf{e}_1\|_{\Gamma} + (\iota r_1 / p) \eta_1(t) \|\mathbf{e}_1\|_{\Gamma}^T [\mathbf{H}] [(I_N \otimes \mathbf{h}_1^T)] [(H \otimes I_m)^{-1}] \|\boldsymbol{\xi}\|_{\Gamma} \quad (2-6) \\ & \leq \iota (\eta_1^2(t) + \zeta(\theta + \varpi) \eta_1(t)) \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + \kappa_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

其中

$$\kappa_1 = \frac{\iota r_1^2}{4p^2} \left\| [\mathbf{H}] [(I_N \otimes \mathbf{h}_1^T)] [(H \otimes I_m)^{-1}] \right\|^2$$

其将式(2-6)代入式(2-5)可得

$$\dot{V}_1 \leq \mathbf{e}_1^T (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^*) + \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2^* + \iota (\eta_1^2(t) + \zeta(\theta + \varpi) \eta_1(t)) \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + \kappa_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}$$

令 $\zeta_{i,1} = e_{i,1}$, $\zeta_{i,2} = e_{i,2} - e_{i,2}^*$, 那么存在一个一阶连续虚拟控制器

$$e_{i,2}^* = -(\eta_1^2(t) + \zeta(\theta + \varpi) \eta_1(t) + 3) e_{i,1} = -\phi(t) e_{i,1} \quad (2-7)$$

使得

$$\dot{V}_1 \leq -2\iota \zeta_1^T \zeta_1 + \frac{\iota}{4} \zeta_2^T \zeta_2 + \kappa_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \quad (2-8)$$

第 2 步: 在这部分, 我们构造系统(2-1)的分布式自适应控制器为

$$u_i = -\alpha(t)(k_i + \varphi_i) \zeta_{i,2} + u_0 \quad (2-9)$$

其中 $\varphi_i = \zeta_{i,2}^2$, 控制增益 k_i 满足自适应律

$$\dot{k}_i = \gamma \zeta_{i,2}^2, \quad \gamma > 0, \quad k_i(0) > 0 \quad (2-10)$$

选取当前步的 Lyapunov 函数为

$$V_2 = 2 \sum_{i=1}^N \int_{e_{i,2}^*}^{e_{i,2}} q_i \left(k_i (s - e_{i,2}^*) + (s - e_{i,2}^*)^3 \right) ds \quad (2-11)$$

根据文献[86]的结论，它满足不等式

$$0 \leq V_2 \leq 2 \sum_{i=1}^N q_i \left(k_i \zeta_{i,2}^2 + \zeta_{i,2}^4 \right)$$

根据式(2-2)和(2-3)，Lyapunov 函数 V_2 关于系统(2-1)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq 2 \sum_{i=1}^N \left(q_i \dot{k}_i \zeta_{i,2}^2 + q_i \left(k_i \zeta_{i,2} + \zeta_{i,2}^3 \right) \dot{e}_{i,2} \right) - 2 \sum_{i=1}^N \left(q_i k_i \zeta_{i,2} + 3 q_i \int_{e_{i,2}^*}^{e_{i,2}} q_i (s - e_{i,2}^*)^2 ds \right) \dot{e}_{i,2}^* \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^N \left(\gamma q_i \varphi_i \zeta_{i,2}^2 + q_i (k_i + \varphi_i) \zeta_{i,2} \dot{e}_{i,2} \right) + 2 \sum_{i=1}^N \left(q_i k_i |\zeta_{i,2}| + 3 q_i \varphi_i |\zeta_{i,2}| \right) |\dot{e}_{i,2}^*| \\ &\leq 2 \gamma \zeta_2^T \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{Q} \zeta_2 + 2 \zeta_2^T (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{Q} \dot{\boldsymbol{e}}_2 + 2 |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{Q} |\dot{\boldsymbol{e}}_2^*|_\Gamma + 6 |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{Q} |\dot{\boldsymbol{e}}_2^*|_\Gamma \end{aligned} \quad (2-12)$$

在下面，我们将对不等式(2-12)右边的每一项进行估计。根据式(2-7)可得

$$e_{i,2}^* = - \left(2\eta_1(t) + \varsigma(\theta + \varpi) \right) \dot{\eta}_1(t) e_{i,1} - \phi(t) \dot{e}_{i,1} = -\tilde{\phi}(t) e_{i,1} - \phi(t) \dot{e}_{i,1} \quad (2-13)$$

从 $\zeta_{i,2} = e_{i,2} - e_{i,2}^*$ 可得 $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\zeta}_2 + \boldsymbol{e}_2^* = \boldsymbol{\zeta}_2 - \phi(t) \boldsymbol{e}_1$ 。那么，式(2-13)可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_2^* &= -\tilde{\phi}(t) \boldsymbol{e}_1 - \phi(t) \left(p \boldsymbol{e}_2 + r_1 \boldsymbol{H} (\boldsymbol{g}_1 - \underline{\boldsymbol{g}}_{0,1}) \right) \\ &= -\tilde{\phi}(t) \boldsymbol{\zeta}_1 + p \phi^2(t) \boldsymbol{\zeta}_1 - p \phi(t) \boldsymbol{\zeta}_2 - r_1 \phi(t) \boldsymbol{H} (\boldsymbol{g}_1 - \underline{\boldsymbol{g}}_{0,1}) \end{aligned}$$

结合不等式 $|\boldsymbol{x}|_\Gamma^T [\boldsymbol{H}] [\boldsymbol{H}^{-1}] |\boldsymbol{y}|_\Gamma \leq \theta \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} + \varpi \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}$ 和假设 2-2，我们可得

$$\begin{aligned} &2 |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{Q} |\dot{\boldsymbol{e}}_2^*|_\Gamma \\ &\leq 2 p \bar{q} \phi^2(t) |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} |\zeta_1|_\Gamma + 2 r_1 \bar{q} \phi(t) \eta_1(t) |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} [\boldsymbol{H}] [\boldsymbol{H}^{-1}] |\boldsymbol{e}_1|_\Gamma \\ &\quad + 2 r_1 \bar{q} \phi(t) \eta_1(t) |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} [\boldsymbol{H}] \left[(\boldsymbol{I}_N \otimes \boldsymbol{h}_1^T) \right] \left[(\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{I}_m)^{-1} \right] |\boldsymbol{\xi}|_\Gamma \\ &\quad + 2 p \bar{q} \phi(t) |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} |\zeta_2|_\Gamma + 2 \bar{q} \tilde{\phi}(t) |\zeta_2|_\Gamma^T \boldsymbol{K} |\zeta_1|_\Gamma \\ &\leq \mu s \phi^4(t) \zeta_2^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K} \zeta_2 + \frac{p^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + \frac{\bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + \mu s \tilde{\phi}^2(t) \zeta_2^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K} \zeta_2 \\ &\quad + \mu s \theta \phi^2(t) \eta_1^2(t) \zeta_2^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K} \zeta_2 + \frac{4 \varpi r_1^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + \kappa_3 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} + \frac{p^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 \\ &\quad + \mu s \phi^2(t) \eta_1^2(t) \zeta_2^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K} \zeta_2 + \mu s \phi^2(t) \zeta_2^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K} \zeta_2 \\ &\leq \mu s \tilde{\eta}(t) \zeta_2^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K} \zeta_2 + \frac{(p^2 + 1 + 4 \varpi r_1^2) \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + \frac{p^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 + \kappa_3 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (2-14)$$

其中 $\tilde{\eta}(t) = \phi^4(t) + \tilde{\phi}^2(t) + \phi^2(t) + \theta \phi^2(t) \eta_1^2(t) + \phi^2(t) \eta_1^2(t)$ 和

$$\kappa_3 = \frac{r_1^2 \bar{q}^2}{\mu s} \left\| [H] \left[(I_N \otimes h_1^T) \right] \left[(H \otimes I_m)^{-1} \right] \right\|^2$$

进一步的, 采取类似于式(2-14)的证明可得

$$\begin{aligned} 6|\zeta_2|_\Gamma^T \varphi Q \dot{e}_2|_\Gamma| &\leq \mu s \bar{\eta}(t) \zeta_2^T \varphi \varphi \zeta_2 + \frac{(9p^2 + 9 + 36\varpi r_1^2) \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 \\ &\quad + \frac{9p^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 + 9\kappa_3 \xi^T \xi \end{aligned} \quad (2-15)$$

此外, 利用假设 2-2 和式(2-3)可得

$$\begin{aligned} &2r_2 \zeta_2^T (K + \varphi) Q H (g_2 - \underline{g}_{0,2}) \left[(H \otimes I_m)^{-1} \right] |\xi|_\Gamma \\ &\leq 2r_2 \bar{q} \eta_2(t) |\zeta_2|_\Gamma^T (K + \varphi) [H] \left[(I_N \otimes h_2^T) \right] \left[(H \otimes I_m)^{-1} \right] |\xi|_\Gamma \\ &\quad + 2r_2 \bar{q} \eta_2(t) |\zeta_2|_\Gamma^T (K + \varphi) [H] [H^{-1}] (1 + \phi(t)) |\zeta_1|_\Gamma \\ &\quad + 2r_2 \bar{q} \eta_2(t) |\zeta_2|_\Gamma^T (K + \varphi) [H] [H^{-1}] |\zeta_2|_\Gamma \\ &\leq \mu s \theta(\eta_2(t)(1 + \phi(t)))^2 \zeta_2^T (K + \varphi) (K + \varphi) \zeta_2 + \frac{4\varpi r_1^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 \\ &\quad + \frac{4\varpi r_1^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 + \eta_2^2(t) \zeta_2^T (K + \varphi) (K + \varphi) \zeta_2 \\ &\quad + \kappa_2 \xi^T \xi + \mu s \theta \eta_2^2(t) \zeta_2^T (K + \varphi) (K + \varphi) \zeta_2 \\ &\leq \mu s \bar{\eta}(t) \zeta_2^T (K + \varphi) (K + \varphi) \zeta_2 + \frac{4\varpi r_1^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + \frac{4\varpi r_1^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 + \kappa_2 \xi^T \xi \end{aligned}$$

其中 $\bar{\eta}(t) = \theta(\eta_2(t)(1 + \phi(t)))^2 + \theta \eta_2^2(t) + \eta_2^2(t)$ 和

$$\kappa_2 = r_2^2 \bar{q}^2 \left\| [H] \left[(I_N \otimes h_2^T) \right] \left[(H \otimes I_m)^{-1} \right] \right\|^2$$

将其结合式(2-9)可得

$$\begin{aligned} &2\zeta_2^T (K + \varphi) Q \dot{e}_2 \\ &= 2\zeta_2^T (K + \varphi) Q \left(sHu + r_2 H (g_2 - \underline{g}_{0,2}) - sBu_0 \right) \\ &= 2s\zeta_2^T (K + \varphi) Q H u_0 - 2s\alpha(t) \zeta_2^T (K + \varphi) Q H (K + \varphi) \zeta_2 \\ &\quad + 2r_2 \zeta_2^T (K + \varphi) Q H (g_2 - \underline{g}_{0,2}) - 2s\zeta_2^T (K + \varphi) Q B u_0 \\ &\leq \frac{4\varpi r_2^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 - \mu s \alpha(t) \zeta_2^T (K + \varphi) (K + \varphi) \zeta_2 + \kappa_2 \xi^T \xi \\ &\quad + \frac{4\varpi r_2^2 \bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 + \mu s \bar{\eta}(t) \zeta_2^T (K + \varphi) (K + \varphi) \zeta_2 \end{aligned} \quad (2-16)$$

进一步的, 将式(2-14)-(2-16)代入(2-12)可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 \leq & -\mu s \alpha(t) \zeta_2^T (K + \varphi)(K + \varphi) \zeta_2 + \mu s \bar{\eta}(t) \zeta_2^T (K + \varphi)(K + \varphi) \zeta_2 \\
 & + \frac{(4\varpi r_2^2 + 10p^2 + 4\varpi r_1^2 + 10)\bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + (\kappa_2 + 10\kappa_3) \xi^T \xi \\
 & + \frac{(4\gamma^2 + 10p^2 + 4\varpi r_2^2)\bar{q}^2}{\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 + \mu s \tilde{\eta}(t) \zeta_2^T K K \zeta_2 \\
 & + \mu s (1 + \tilde{\eta}(t)) \zeta_2^T \varphi \varphi \zeta_2
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

至此, 我们完成了基于反步控制的两步归纳式分析。基于此, 我们给出如下结论:

定理 2-1 考虑由式(2-1)描述的多智能体系统, 并且其满足假设条件 2-1 和 2-2。如果设计分布式控制器为式(2-9), 其中控制增益 k_i 满足自适应律(2-10), 时变函数

$$\alpha(t) = \bar{\eta}(t) + \tilde{\eta}(t) + 1 \tag{2-18}$$

那么, 所有智能体的状态能够达到渐进领导跟随一致性。并且控制增益 k_i 将会收敛到某一稳定的值。

证明: 基于上述的讨论, 我们构造系统的 Lyapunov 函数为

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \tag{2-19}$$

其中 V_1 和 V_2 的定义分别如式(2-4)和(2-11)所示。我们选取 V_3 和 V_4 为

$$V_3 = \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^N (k_i - k^*)^2, \quad V_4 = \xi^T (I_N \otimes P) \xi$$

其中 k^* 是一个常数, 它的值将在后边的推导过程中给出; P 是一个正定矩阵且满足不等式 $C^T P + P C \leq -(\lambda + 1) I_m$, 其中 C 是一个 Hurwitz 矩阵。利用式(2-10), 我们可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N (k_i - k^*) \gamma_{\zeta_{i,2}}^2 = \zeta_2^T K \zeta_2 - k^* \zeta_2^T \zeta_2 \\
 &\leq \mu s \zeta_2^T K K \zeta_2 + \frac{1}{4\mu s} \zeta_2^T \zeta_2 - k^* \zeta_2^T \zeta_2
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

此外, Lyapunov 函数 V_4 关于系统(2-3)的导数为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &= 2\xi^T (I_N \otimes P) ((I_N \otimes C) \xi + (I_N \otimes l) e_1) \\
 &\leq -(\lambda + 1) \xi^T \xi + 2\xi^T (I_N \otimes P) (I_N \otimes l) \zeta_1 \\
 &\leq -(\lambda + 1) \xi^T \xi + \frac{\bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 + \kappa_4 \xi^T \xi
 \end{aligned} \tag{2-21}$$

其中 $\kappa_4 = (\bar{q}^2 / \mu s) \|(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P})(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I})\|^2$ 。选取 $\lambda = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$ 和

$$k^* = \frac{(\gamma^2 + 10p^2 + 4\varpi r_2^2)\bar{q}^2}{\mu s} + \frac{1}{4\mu s} + \frac{l}{4} + \beta$$

其中 β 是一个正常数。那么结合等式(2-18)和不等式(2-8)、(2-17)、(2-20)、(2-21)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu s (\alpha(t) - \bar{\eta}(t)) \zeta_2^T (\mathbf{K} + \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{K} + \boldsymbol{\varphi}) \zeta_2 - 2l \zeta_1^T \zeta_1 - k^* \zeta_2^T \zeta_2 \\ &\quad + \left(\frac{(\gamma^2 + 10p^2 + 4\varpi r_2^2)\bar{q}^2}{\mu s} + \frac{1}{4\mu s} + \frac{l}{4} \right) \zeta_2^T \zeta_2 - (1 + \lambda) \xi^T \xi \\ &\quad + (\kappa_1 + \kappa_2 + 10\kappa_3 + \kappa_4) \xi^T \xi + \mu s (1 + \tilde{\eta}(t)) \zeta_2^T (\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{K}\mathbf{K}) \zeta_2 \\ &\quad + \frac{(4\varpi r_2^2 + 10p^2 + 40\varpi r_1^2 + 11)\bar{q}^2}{\mu s} \zeta_1^T \zeta_1 \\ &\leq -l \zeta_1^T \zeta_1 - \beta \zeta_2^T \zeta_2 - \xi^T \xi \end{aligned} \quad (2-22)$$

根据式(2-9)明显可知 Lyapunov 函数 V 是一个关于变量 $\zeta_{i,1}, \zeta_{i,2}, \xi_i$ 和 $k_i - k^*$ 的正定函数。由于 $\dot{V} \leq 0$ ，我们可得满足自适应律(2-10)的控制增益 $k_i, i = 1, \dots, N$ 是单调递增的且最终收敛至某一个有限的值 k^* 。从式(2-22)可得 $\dot{V} \equiv 0$ 表明 $\zeta_{i,1} = 0$ 和 $\zeta_{i,2} = 0$ 。因此，根据 LaSalle's 不变集可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_{i,1}(t) = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_{i,2}(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) = 0$ 。因为 $\zeta_{i,1} = e_{i,1}$ ， $e_{i,2} = \zeta_{i,2} - \phi(t)e_{i,1}$ ，由此得出 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{i,1}(t) = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{i,2}(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) = 0$ 。进一步的，令向量 $\boldsymbol{\delta}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{N,1})^T$ ， $\boldsymbol{\delta}_2 = (\delta_{1,2}, \dots, \delta_{N,2})^T$ 和 $\boldsymbol{\delta}_3 = (\delta_{1,3}, \dots, \delta_{N,3})^T$ ，其中 $\delta_{i,1} = x_{i,1} - x_{0,1}$ ， $\delta_{i,2} = x_{i,2} - x_{0,2}$ 和 $\delta_{i,3} = \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_0$ 。那么等式(2-2)可以重新写为 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}_1$ ， $\mathbf{e}_2 = \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}_2$ 和 $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_m) \boldsymbol{\delta}_3$ 。值得注意的是由于 $\mathbf{z}_i \in \mathfrak{R}^m$ 所以 $\boldsymbol{\delta}_{i,3} = (\delta_{i,3,1}, \dots, \delta_{i,3,m})^T \in \mathfrak{R}^m$ 是一个向量。根据文献[78]中的引理 2，由 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{i,1}(t) = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{i,2}(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) = 0$ 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{i,1}(t) = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{i,2}(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\delta}_3(t) = 0$ 。至此，我们完成了定理 2-1 的证明。

在定理 2-1 中，所设计的一致性控制器只用到了相关邻居智能体的状态信息，并且所给出的控制增益不依赖于全局通信拓扑的 Laplacian 矩阵的特征值。因此控制器(2-9)及其相应的控制增益自适应律(2-10)为完全分布式的。在下面，我们将证明定理 2-1 的结论可以推广至具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统。

考虑第 $i (i = 0, 1, \dots, N)$ 个高阶智能体系统的动力学模型为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i,f} &= p_{i,f} x_{i,f+1} + r_{i,f} g_{i,f}(z_i, \bar{x}_{i,f}, t), f=1, \dots, n-1 \\
 \dot{x}_{i,n} &= s u_i + r_{i,n} g_{i,n}(z_i, x_i, t) \\
 \dot{z}_i &= C z_i + l x_{i,1}
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

其中 $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})^T \in \mathfrak{R}^n$ 和 $u_i \in \mathfrak{R}$ 分别代表系统的状态和输入, $\bar{x}_{i,f} = (x_{i,1}, \dots, x_{i,f})^T \in \mathfrak{R}^f$, $p_{i,f}$, $r_{i,f}$, $r_{i,n}$, $s \in \mathfrak{R}$ 为未知的系统参数, 并且存在一个已知正常数 $\varsigma_{i,f}$, $f=1, \dots, n-1$ 使得 $r_{i,f}/p_{i,f} \leq \varsigma_{i,f}$, $z_i \in \mathfrak{R}^m$ 表示第 i 个智能体的未建模动态; $C \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ 和 $l \in \mathfrak{R}^m$ 分别为未知的常数矩阵和常数向量, $g_{i,f}(\cdot)$, $f=1, \dots, n-1$ 为不确定时变非线性函数并且满足以下假设

假设 2-2: 对于 $i=0, 1, \dots, N$ 和 $f=1, \dots, n-1$

$$\left| g_{i,f}(z_i, \bar{x}_{i,f}, t) - g_{j,f}(z_j, \bar{x}_{j,f}, t) \right| \leq \eta_f(t) \left(\sum_{\pi=1}^f |x_{i,\pi} - x_{j,\pi}| - \mathbf{h}_f^T |z_i - z_j|_{\Gamma} \right)$$

其中, $\mathbf{h}_f \in \mathfrak{R}^m$ 为未知常数向量, $\eta_f(t)$ 为已知的时变函数。

那么, 我们可以得出以下推论

推论 2-1: 考虑由式(2-23)描述的多智能体系统, 并且其满足假设条件 1 和 3。定理 2-1 中的控制器设计可以推广至此情形, 并使得所有智能体的状态能够达到渐进领导跟随一致性。

证明: 推论 2-1 的证明过程类似于定理 2-1 的证明。将上述迭代步数推广至 n 步即可实现推论 2-1 的证明。此处我们将不再赘述。

注 2-3: 在对不等式 (2-6) 的证明过程中, 由不等式放缩 $\|x\|_{\Gamma}^T [H] [H^{-1}] \|y\|_{\Gamma} \leq \theta x^T x + \varpi y^T y$ 引入的 θ 和 ϖ 为两个已知的常数, 并且我们可以不基于矩阵 H 来获得这两个常数。也就是说, θ 和 ϖ 的计算可以不依赖于系统的全局通信拓扑信息。当一个网络中, 智能体的个数已知时, 我们可以获得 θ 和 ϖ 的一个解, 它能包含所有的通信拓扑情形但是又不依赖于系统的全局通信拓扑。举个例子, 如果 $N=3$, 则系统所有通信拓扑情形对应的矩阵和相应的 θ 和 ϖ 的解为

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & H_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & H_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & H_4 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \theta_1 &= 1.5, \varpi_1 = 1.5 & \theta_2 &= 1.5, \varpi_2 = 1.5 & \theta_3 &= 1, \varpi_3 = 1.25 & \theta_4 &= 1, \varpi_4 = 1
 \end{aligned}$$

因此, θ 和 ϖ 的一个解可以选择为 $\theta = \varpi = 2$ 来包含 $N=3$ 时所有的通信拓扑情形。

注 2-4: 在之前的相关文献[51]和[52]中, 提出了不依赖于全局通信拓扑信息的自适应控制器, 使得多智能体系统达到一致性。区别于文献[51]和[52]研究的积分器

型线性多智能体系统，我们在本章针对带有未建模动态和未知模型参数的二阶非匹配非线性多智能体系统，提出了完全分布式自适应一致性控制器。并将结果推广至具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统。

注 2-5: 在文献[62]和[75]中，所考虑的智能体系统的动态特性完全已知，并且其非线性项有与控制输入相匹配。在本章中，我们考虑了带有未知模型参数和非匹配非线性项的二阶多智能体系统。因此，文献[62]和[75]中的结果不能用来处理与控制输入不在同一通道上的非线性项 $g_{i,1}$ 。在本章中，基于反步控制方法，我们利用虚拟控制器来补偿非线性项 $g_{i,1}$ ，并将补偿项用于最终的控制器设计。此外，相比于文献[62]和[75]要求系统的动态特性完全已知，我们提出了不依赖于系统模型参数的自适应一致性控制器。

注 2-6: 在本章中，我们考虑了二阶非线性多智能体系统的一致性控制问题，并且系统的非线性项满足假设 2-1 中的时变 Lipschitz 条件。值得注意的是，由于一致性控制问题的特殊性，在多智能体系统中常常假设其非线性满足 Lipschitz 条件^[76]。因此，我们在本章中考虑系统的未建模动态具有线性特性并且只与系统的输出有关。本质上，系统的未建模动态可以看做系统的一个只受系统输出影响的外部干扰系统。并且如果系统的非线性项满足某些合适的条件的话，系统的未建模动态特性可以由只具有线性特性扩展至具有非线性特性情形。

注 2-7: 在本章中，我们设计的控制器如式(2-9)所示，它是完全分布式的，也就是说，它只依赖于智能体系统的邻居状态信息。控制器(2-9)的特别之处在于它包含自适应控制增益 k_i 以保证(2-9)不依赖于系统参数。此外， φ_i 项是为了增加控制器的灵活性，它对于保证控制器(2-9)适用于有向通信拓扑图非常重要。对于无向图情形，控制器(2-9)略去 φ_i 项能够解决其一致性控制问题。它的证明过程和定理 2-1 的证明过程类似，我们在这就不再赘述。

注 2-8: 控制器(2-9)中的时变参数 $\alpha(t)$ 与 $\eta_1(t)$ ， $\eta_2(t)$ 有关，而 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 的获得需要知道系统的非线性结构函数 $g_{i,1}$ 和 $g_{i,2}$ 。一般的，所有的智能体系统的非线性结构函数是已知的，只是系统不能获得其它所有智能体的实时状态信息。因此，基于 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 的参数 $\alpha(t)$ 是可通过已知的非线性结构函数 $g_{i,1}$ 和 $g_{i,2}$ 获得。

2.4 仿真结果及分析

在这一小节，我们将给出两个仿真例子以证明本章所提结论的有效性。在两个

例子中，我们用节点 1,2,3,4 来表示跟随智能体，用节点 0 来表示领导智能体。智能体系统的通信图拓扑图如图 2-1 所示。由于在图 2-1 中，智能体的个数为 5，我们可获得 θ 和 ϖ 的一组解为 $\theta = \varpi = 7.5$ 。

例 1: 在这个例子中，考虑由式(2-1)描述的多智能体系统，对于 $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ，选取系统的非线性为

$$\begin{aligned} g_{i,1}(z_i, x_{i,1}, t) &= (e^{0.02t} - 1)(x_{i,1} + h_1^T z_i) \\ g_{i,2}(z_i, x_{i,1}, x_{i,2}, t) &= 2 \sin(0.5t)(x_{i,1} + x_{i,2} + h_1^T z_i) \end{aligned}$$

系统参数选取为 $p = 1, s = 2, r_1 = 2, r_2 = 1$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

明显的，非线性函数 $g_{i,1}(z_i, x_{i,1}, t)$ 和 $g_{i,2}(z_i, x_{i,1}, x_{i,2}, t)$ 满足假设 2-1，且其中的时变参数 $\eta_1(t) = e^{0.02t} - 1$ 和 $\eta_2(t) = 2$ 。根据定理 2-1 的证明过程可得第 i 个智能体的控制器为 $u_i = \alpha(t)(k_i + \zeta_{i,2}^2)\zeta_{i,2} + u_0$ ，其中 $\alpha(t) = \bar{\eta}(t) + \tilde{\eta}(t) + 1$ ， $\dot{k}_i = 3\zeta_{i,2}^2$ 和 $u_0 = 10 \cos(0.1t)$ 。值得注意的是 $\bar{\eta}(t)$ 和 $\tilde{\eta}(t)$ 可在两步归纳式分析过程中获得。

选取系统的初始值为 $x_{0,1}(0) = 0.1$ ， $x_{0,2}(0) = 0$ ， $z_0(0) = (0.2, 0.1)^T$ ， $x_{1,1}(0) = 0.5$ ， $x_{1,2}(0) = 0.1$ ， $z_1(0) = (0, 0)^T$ ， $x_{2,1}(0) = 0.2$ ， $x_{2,2}(0) = -0.1$ ， $z_2(0) = (0, 0)^T$ ， $x_{3,1}(0) = -0.2$ ， $x_{3,2}(0) = 0.3$ ， $z_3(0) = (0, 0)^T$ ， $x_{4,1}(0) = 0.1$ ，

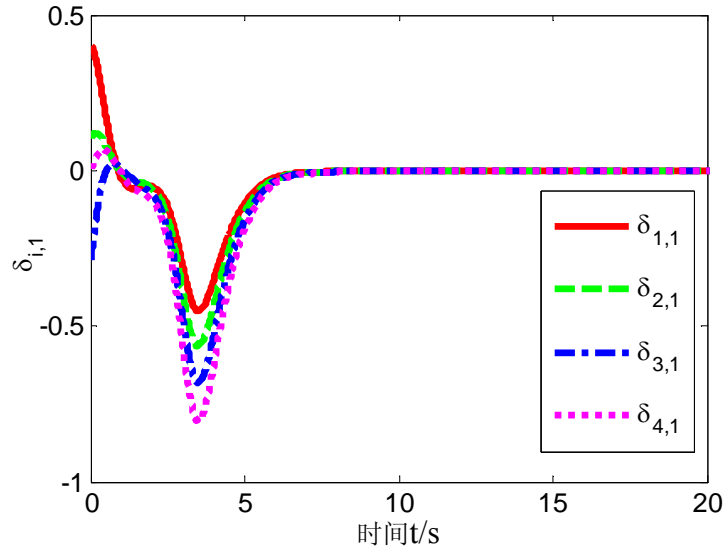


图 2-2 非线性多智能体系统一致性误差 $\delta_{i,1}$

Fig 2-2 Leader-following consensus errors $\delta_{i,1}$ of nonlinear multi-agent systems

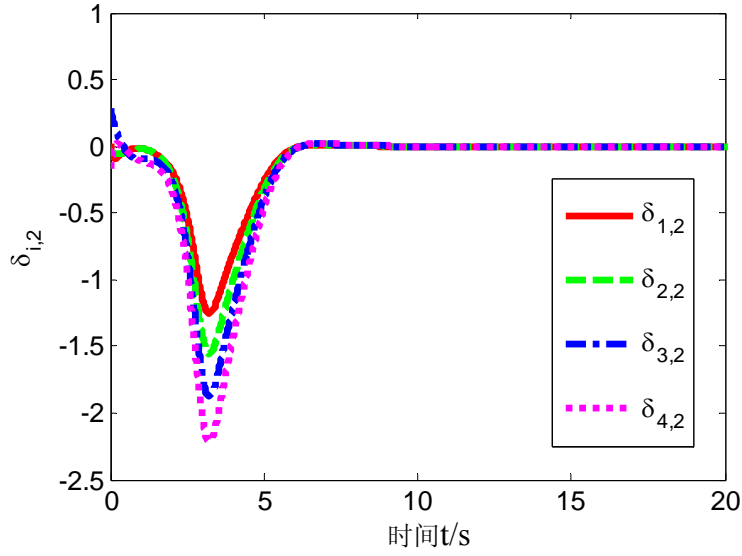

 图 2-3 非线性多智能体系统一致性误差 $\delta_{i,2}$

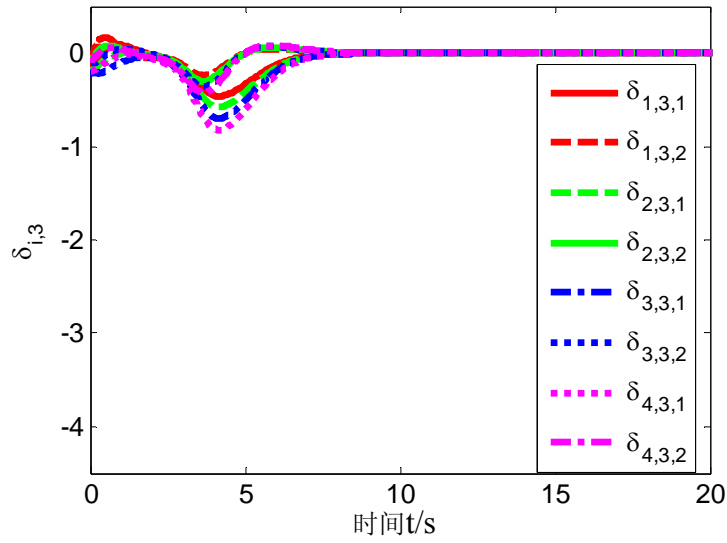
 Fig 2-3 Leader-following consensus errors $\delta_{i,2}$ of nonlinear multi-agent systems

 图 2-4 非线性多智能体系统的一致性误差 $\delta_{i,3}$

 Fig 2-4 Leader-following consensus errors $\delta_{i,3}$ of nonlinear multi-agent systems

$x_{4,2}(0) = -0.2$, $z_4(0) = (0, 0)^T$ 。系统一致性误差 $\delta_{i,1}$, $\delta_{i,2}$ 和 $\delta_{i,3}$ 的仿真曲线分别如图 2-2 至图 2-4 所示。从图 2-2 至图 2-4 可以明显的看出所考虑的多智能体系统在如图 2-1 所示的通信拓扑条件下能达到渐进领导跟随一致性。此外, 自适应控制增益 $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ 的轨迹曲线如图 2-5 所示, 其初始值选取为 $k_0 = 0.1$ 。从图 2-5 可以看出 k_i 最终收敛至某一稳定的值。

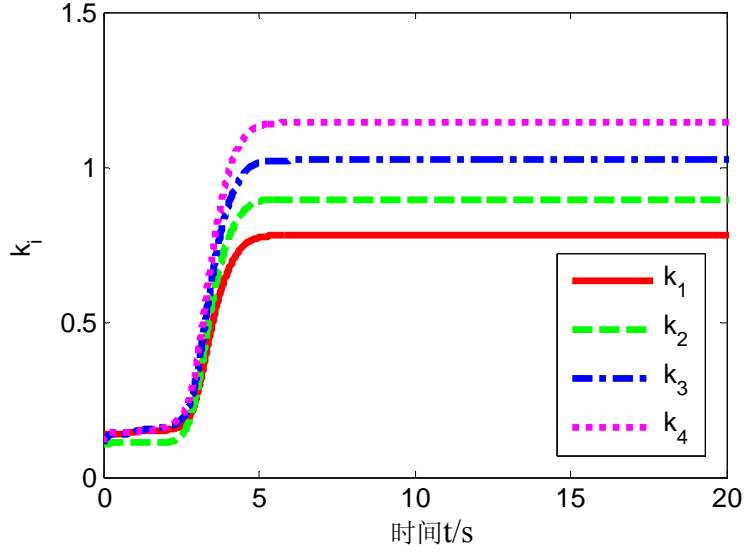


图 2-5 非线性多智能体系统的自适应增益 $k_i, i = 1, 2, 3, 4$

Fig 2-5 Adaptive gains $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ of nonlinear systems

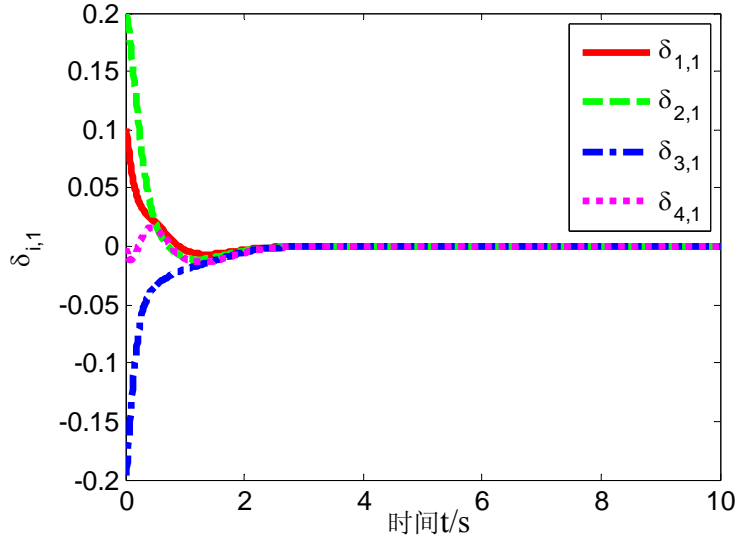


图 2-6 倒立摆系统的一致性误差 $\delta_{i,1}$

Fig 2-6 Leader-following consensus errors $\delta_{i,1}$ of pendulum systems

例 2: 在这个例子中, 我们考虑了能由式(2-1)描述五个带有执行器故障的倒立摆系统。因此, 对于 $i = 0, 1, 2, 3, 4$, 系统的非线性为

$$\begin{aligned} g_{i,1}(z_i, x_{i,1}, t) &= 0 \\ g_{i,2}(z_i, x_{i,1}, x_{i,2}, t) &= -\sin(x_{i,1})/l(t) - q(t)x_{i,2} \end{aligned}$$

系统参数为 $p = 1, s = 0.5, r_1 = 1, r_2 = 1$ [72]

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

值得注意的是由于执行器故障的存在我们选择 $s = 0.5 < 1$ 。对于倒立摆系统，它的长度 $l(t)$ 是一个未知的时变参数满足 $l(t) \geq 5, t \geq 0$ ，并且它主要的空气阻力取决于 $q(t) := t$ [72]。明显的，非线性函数 $g_{i,1}(z_i, x_{i,1}, t)$ 和 $g_{i,2}(z_i, x_{i,1}, x_{i,2}, t)$ 满足假设 2-1,

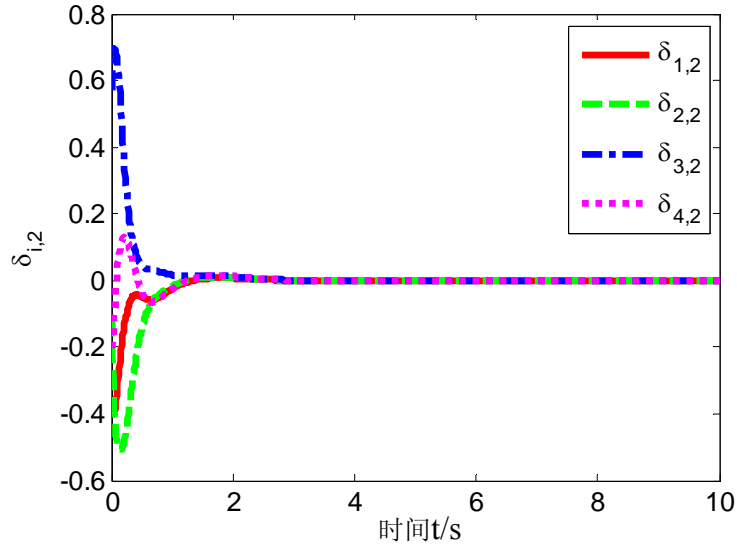


图 2-7 倒立摆系统的一致性误差 $\delta_{i,2}$

Fig 2-7 Leader-following consensus errors $\delta_{i,2}$ of pendulum systems

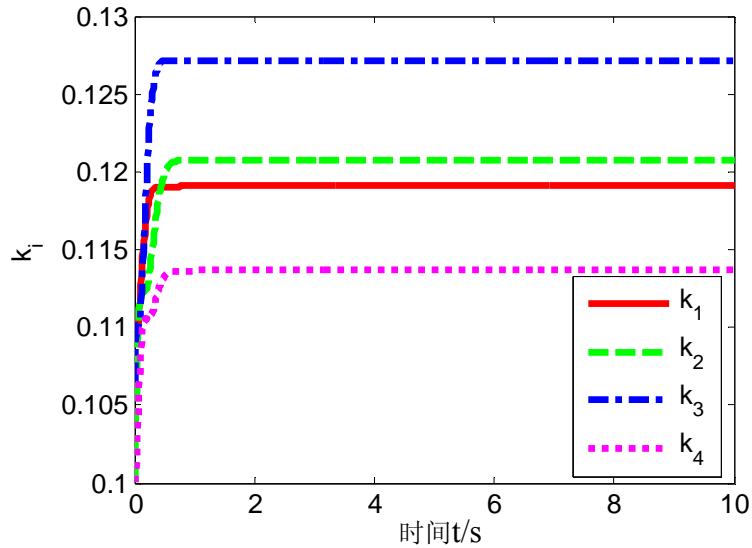


图 2-8 倒立摆系统的自适应增益 $k_i, i = 1, 2, 3, 4$

Fig 2-8 Adaptive gains $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ of pendulum systems

且其中的时变参数 $\eta_1(t) = 0$ 和 $\eta_2(t) = t + 0.2$ 。根据定理 2-1 的证明过程可得第 i 个智能体的控制器为 $u_i = \alpha(t)(k_i + \zeta_{i,2}^2)\zeta_{i,2} + u_0$ ，其中 $\alpha(t) = \bar{\eta}(t) + \tilde{\eta}(t) + 1$ ， $\dot{k}_i = 3\zeta_{i,2}^2$ 和 $u_0 = 0$ 。值得注意的是 $\bar{\eta}(t)$ 和 $\tilde{\eta}(t)$ 可在两步归纳式分析过程中获得。

选取系统的初始值为 $x_{0,1}(0) = 0$ ， $x_{0,2}(0) = 0$ ， $x_{1,1}(0) = 0.1$ ， $x_{1,2}(0) = 0.1$ ， $x_{2,1}(0) = 0.2$ ， $x_{2,2}(0) = -0.1$ ， $x_{3,1}(0) = -0.2$ ， $x_{3,2}(0) = 0.3$ ， $x_{4,1}(0) = 0.0$ ， $x_{4,2}(0) = -0.2$ 。系统一致性误差 $\delta_{i,1}, \delta_{i,2}$ 的仿真曲线分别如图 2-6 和 2-7 所示。从图 2-6 和 2-7 可以明显的看出倒立摆系统在如图 2-1 所示的通信拓扑条件下能达到渐进领导跟随一致性。此外，自适应控制增益 $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ 的轨迹曲线如图 2-8 所示，其初始值选取为 $k_0 = 0.1$ 。从图 2-8 可以看出 k_i 最终收敛至某一稳定的值。

2.5 本章小结

本章主要针对带有未建模动态和未知模型参数二阶时变非匹配非线性多智能体系统，研究了其领导跟随一致性控制问题。提出了一个新颖的自适应控制器，并且其控制增益不依赖于系统的模型参数和系统通信拓扑矩阵特征值，保证了所设计的控制器是完全分布式的，即它只依赖于系统邻居智能体的状态信息。通过利用反步控制，证明了提出的完全分布式控制器能使多智能体系统能达到渐进领导跟随一致性。最后的仿真结果证明了所提结论的有效性。

第3章 具有下三角结构的高阶非线性 MAS 的有限时间一致性控制

3.1 引言

在多智能体系统一致性控制中,收敛速度是评价所设计的一致性控制算法的一个关键的性能指标。然而,由于所研究的系统大都满足 Lipschitz 连续性质,这导致设计的控制算法只能使系统实现最快的收敛速度为指数形式,从而无法得到更好的收敛性能。本质上,这些控制和分析方法都属于无限时间内的稳定与控制问题。从控制系统时间优化的角度来看,使得多智能体系统在有限时间内实现一致性的控制方法才是时间最优的控制方法。由于有限时间一致性算法中会引入分数幂项,所以相比于非有限时间的闭环控制系统,有限时间的闭环控制系统除了具有收敛速度更快的优点外,还具有更好的鲁棒性能和抗干扰性能^[87-88]。因此,针对多智能体系统有限时间一致性控制的研究具有重要的理论与实际意义。

在有限时间控制中,讨论的均是闭环系统满足非 Lipschitz 连续性质的情况,而非有限时间下的闭环系统均满足 Lipschitz 连续性质,因此,一些非有限时间控制里得到的结论不能直接推广至有限时间控制,这些都使得多智能体系统的有限时间一致性控制问题变得更有挑战性。20 世纪 90 年代以来,随着有限时间 Lyapunov 稳定性理论^[89]和有限时间齐次理论^[90]的提出和完善,针对多智能体系统的有限时间一致性控制的研究也取得了一定的成果。文献[91]针对一阶积分器型多智能体系统,提出了非 Lipschitz 连续有限时间一致性控制律。为了消除非 Lipschitz 连续动态特性引起的抖震现象,文献[92]引入了一个饱和函数来代替文献[71]控制器设计中的符号函数项,给出了通信拓扑包含生成树下的一阶积分器型多智能体系统有限时间一致性控制器。进一步的,文献[93]利用有限时间 Lyapunov 稳定性理论,分别在有向拓扑和无向拓扑条件下,针对一阶积分器型多智能体系统设计了基于连续状态反馈的有限时间一致性控制器。基于此,文献[94]提出了一类非线性连续状态反馈的有限时间一致性控制器,使得一阶积分器型多智能体系统能在通信链路故障条件下达到有限时间一致性。通过可调整项的引入,所设计的控制器能应用于系统带有控制输入饱和或收敛速度限制等多种情形。在一阶积分器型多智能体系统有限时间控制结果的基

基础上,人们开始研究二阶积分器型系统^[99-96]、二阶非线性系统^[97-98]以及一些实际非线性系统^[99-100]如飞行器和机器人等组成的多智能体系统的有限时间一致性控制问题。相比于针对一阶积分器系统的有限时间控制,二阶线性/非线性系统的有限时间的控制要求更严格,它不仅要使系统的位置信息达到有限时间一致,而且要使系统的速度信息达到有限时间一致。当考虑高阶多智能体系统的有限时间一致性控制时,这种控制器设计的分析就变得更为复杂。目前,关于高阶多智能体系统有限时间一致性控制的文章还比较少。文献[49]研究了高阶积分器多智能体系统的有限时间一致性控制问题。通过引入加幂积分项,设计了分布式有限时间一致性控制器,并利用迭代方法证明了所得结果的有效性。进一步的,文献[101]考虑了干扰情形下的高阶积分器多智能体系统的有限时间一致性控制问题,并基于滑模控制设计了分布式有限时间一致性控制器。考虑到在这些结果中,所提出的控制方法不能处理系统非线性或者只能处理与控制输入相匹配的非线性,文献[70]研究了具有严格反馈结构的非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题。通过引入自适应动态面,保证了所有跟随者的状态能在有限时间内收敛到由领导者决定的一个凸包中。尽管文献[70]研究了更具普遍性的严格反馈非线性系统,但是只给出了有限时间有界一致性的结论。

总体上来说,针对高阶非线性多智能体系统有限时间一致性的研究成果相对较少,尤其系统具有非匹配非线性结构时的成果更是寥寥无几。因此,本章主要针对这些方面展开研究,并获得一些较具创新性的成果。以期对具有非匹配非线性结构的多智能体系统有限时间一致性控制提供一种新的研究思路。本章工作的创新点主要体现在以下三个方面:1)将有限时间一致性的控制结果推广至具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统。并且所考虑的非线性不满足 Lipschitz 条件。2)所考虑的多智能体系统的子系统可以是异构的,也就是说每个智能体的非线性特性可以不相同。3)基于反步控制,提出了一个分布式的有限时间一致性控制器。

3.2 问题描述

3.2.1 预备知识

基于 1.4 中给出的多智能体系统的通信拓扑知识,在本章中,我们假设系统的通信拓扑满足以下假设

假设 3-1: 图 \mathcal{G} 为固定的无向的,且其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

下面，我们将给出两个引理，其在本章的理论分析过程中具有重要作用。在给出引理前在，我们先定义向量 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$ ，且 $|\mathbf{z}|_\Gamma = (|z_1|, \dots, |z_N|)^T$ ， $|\mathbf{z}|_\Gamma^q = (|z_1|^q, \dots, |z_N|^q)^T$ ，其中 $q > 0$ 。

引理 3-1: 对于一个矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，使存在常数 $\mu_i, \bar{\mu}_i > 0$ 使得

$$\left(|\mathbf{x}|_\Gamma^{c_1}\right)^T [\mathbf{R}] |\mathbf{y}|_\Gamma^{c_2} \leq \sum_{i=1}^N (\mu_i x_i^{c_1} + \bar{\mu}_i y_i^{c_2})$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ ， $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$ 为向量，常数 $c = c_1 + c_2$ 且 $c_1, c_2 > 0$ ， $[\mathbf{R}]$ 为矩阵 \mathbf{R} 中对应元素取绝对值。

证明: 定义 r 为矩阵 $[\mathbf{R}]$ 中的一个元素，我们知道存在正实数 r_1, r_2 使得不等式 $r x_i^{c_1} y_j^{c_2} \leq r_1 x_i^{c_1} + r_2 y_j^{c_2}$ 。因此，上述不等式很容易的就能成立。

引理 3-2^{[95],[102]}: 定义 $x, y, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ 和 $0 < c < 1, r, s$ 为正的实数，那么有

$$|x|^r |y|^s \leq \frac{r}{r+s} |x|^{r+s} + \frac{s}{r+s} |y|^{r+s}$$

$$\left(|z_1| + \dots + |z_n|\right)^c \leq |z_1|^c + \dots + |z_n|^c$$

当 $c = p/q \leq 1$ 时，其中 p, q 为正的奇整数，那么 $|x^c - y^c| \leq 2^{1-c} |x - y|^c$ 。

引理 3-2^[102]: 对于一个非 Lipschitz 连续的自治系统，

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

其中 $\mathbf{f}(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。如果存在一个定义在原点附近区域 $\hat{U} \in \mathbb{R}^n$ 的一阶可导函数 $V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 和实数 $c > 0, 0 < \alpha < 1$ 使得以下条件成立 1) $V(\mathbf{x})$ 在 \hat{U} 为正定函数；2) $\dot{V}(\mathbf{x}) + c V^\alpha(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \hat{U}$ 。那么，系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 关于原点局部有限时间稳定。它的稳定时间依赖于状态的初始值 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ，且满足

$$T_x(\mathbf{x}_0) \leq \frac{V^{1-\alpha}(\mathbf{x}_0)}{c(1-\alpha)}$$

3.2.2 具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统模型简介

在本章，我们研究了具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统的一致性控制问题。考虑由 $N+1$ 个智能体组成的多智能体系统，其中第 i 个智能体的系统动力学模型为

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,m} &= x_{i,m+1} + f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t), \quad m=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i,n} &= u_i + f_{i,n}(\mathbf{x}_i, u_i, t) \\ y_i &= x_{i,1}\end{aligned}\tag{3-1}$$

其中 $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})^T \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}$ 和 $y_i \in \mathbb{R}$ 分别代表系统的状态, 输入和输出, $f_{i,m}(\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, N$, $m=1, \dots, n$, 为一阶可导的非线性函数并且满足以下假设

假设 3-2: 对于 $i=1, \dots, N$, 和 $m=1, \dots, n$

$$|f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t)| \leq \gamma_{i,m}(\bar{\mathbf{x}}_{i,m}) \left(|x_{i,1}|^{q_{m+1}} + |x_{i,2}| + \dots + |x_{i,m}| \right)$$

其中 $\gamma_{i,m}(\cdot)$ 为已知的一阶可导函数, $\bar{\mathbf{x}}_{i,m} = (x_{i,1}, \dots, x_{i,m})^T$ 和 $1 = q_1 > q_2 > \dots > q_m := (2n+3-2m)/(2n+1) > 0$ 。值得注意的是, 对于 $m=1$, 存在一个已知常数 $\hat{\gamma}$ 的使得 $\gamma_{i,1}(x_{i,1}) \leq \hat{\gamma}$ 。

我们用节点 0 来表示虚拟领导者, 本质上它是一个命令生成器并且其只向网络中的一部分智能体发布指令。我们假设其输出 $y_0(t)$ 和满足如下条件

假设 3-3: $|y_0(t)| \leq h_1$ 和 $|\dot{y}_0(t)| \leq h_2$, 其中 h_1 和 h_2 为非负常数。

注 3-1: 假设 3-2 是一个一般的假设条件。它要求当 $\mathbf{x}_i = 0$ 时, $f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t) = 0$ 。显然的 $f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t) = 0$ 是一个关于变量 \mathbf{x}_i, u_i 和时间 t 的非线性函数, 但是它的界是一个只和 \mathbf{x}_i 有关的非负函数。举个例子, $f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i \sin(u_i) \cos(t)$ 。显然的, 这个假设条件放松了现有文献[96]、[97]和[101]工作中的 Lipschitz 条件和函数有界条件。

注 3-2: 在实际中, 有很多系统的动态特性能由式(3-1)来描述, 且满足假设条件 3-2。比如倒立摆系统的模型可以由二阶的式(3-1)描述, 且其对应假设条件里的非线性函数^[103] $\gamma_{i,1}(\cdot) = 0$ 以及

$$\gamma_{i,2}(\cdot) = \frac{g|x_{i,1}| + g + 0.5m_i L_i |x_{i,2} \sin(2x_{i,1})| (M_i + m_i)^{-1}}{L_i (4/3 - (M_i + m_i)^{-1} m_i)}$$

此外, 蒸汽阀门和发电机的励磁系统可以由三阶的式(3-1)描述, 且其对应假设条件里的非线性函数 $\gamma_{i,1}(\cdot) = 0$, $\gamma_{i,2}(\cdot) = (1/H)(D + (\omega_0 b_1 + 2\omega_0 b_1)(|x_{i,1}| + 1))$ 和 $\gamma_{i,3}(\cdot) = 1/T_{H\Sigma}$ ^[104] 够。因此, 本章的研究结果可以应用于许多实际系统。

注 3-3: 相比于文献[102]研究的单个非线性系统的镇定问题, 本章研究的非线性

多智能体系统的一致性控制问题更具挑战性。首先，文献[102]研究的系统是一个高阶但是一维的单输入系统。通过引入迭代方法，解决了系统的有限时间镇定问题。比较起来，本章考虑的多个智能体系统的增广系统是一个与通信拓扑矩阵相关的多输入多输出系统。我们需要提出一种新的控制方法来处理通信拓扑矩阵以及系统非线性带来的智能体间的复杂耦合。其次，由于智能体间的分布式通讯，并不是系统的所有状态信息都能用于控制器的设计。因此我们需要针对增广系统提出一个分布式控制器。最后，由于分布式控制器的设计只基于系统的邻居智能体的信息，并且通信拓扑矩阵 \mathbf{L} 和 \mathbf{B} 对于增广系统的分析具有重要作用，因此，我们需要在证明过程中处理掉拓扑矩阵带来的复杂耦合，以实现系统的有限时间一致性。

3.3 有限时间一致性控制器设计及其有效性证明

在本小节中，我们设计了分布式控制使得跟随智能体的输出能在有限时间内有界给跟踪领导者的输出。受启发于文献[49]、[102]和[105]中的反步控制方法，我们将其推广至了具有下三角结构的非线性多智能体系统的一致性控制中。首先，定义第 i 智能体的邻居一致性误差为

$$e_{i,1} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (y_j - y_i) + b_i (y_0 - y_i) \quad (3-2)$$

在下面，为了简化证明过程，我们用简化的符号 \mathbf{f}_m 和 $\gamma_{i,m}(\cdot)$ 来分别表示函数向量 $(f_{1,m}(\mathbf{x}_1, u_1, t), \dots, f_{N,m}(\mathbf{x}_N, u_N, t))^T$ 和函数 $\gamma_{i,m}(\cdot)$ 。结合式(3-1)和(3-2)可得全局一致性误差的导数为

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 - (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{f}_1 \quad (3-3)$$

其中 $\mathbf{e}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{N,1})^T$ ， $\mathbf{e}_{i,2} = \sum a_{ij} (x_{j,2} - x_{i,2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i,2})$ 和 $\mathbf{e}_2 = (e_{1,2}, \dots, e_{N,2})^T$ 。值得注意的是一致性误差(3-2)可写成如下全局的形式

$$\mathbf{e}_1 = -(\mathbf{L} + \mathbf{B})(\mathbf{y} - \underline{\mathbf{y}}_0) = -(\mathbf{L} + \mathbf{B})\boldsymbol{\delta} \quad (3-4)$$

其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$ ， $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_N)^T$ ， $\underline{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ 。如果存在一个界 ν 使得 $\lim_{t \rightarrow T_0} \|\mathbf{e}_1\| \leq \nu$ ，那么全局一致性误差 $\mathbf{e}_1(t)$ 有限时间有界。

第1步：令 $d = 4n/(2n+1)$ ，根据假设 3-2 显然可得 $q_k = q_{k-1} - 2/(2n+1)$ 。在假设 3-1 条件下，根据引理 1-1 可得 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 为正定矩阵。显然的， $(\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1}$ 也为正定矩阵。因此，我们构造 Lyapunov 函数为

$$V_1(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e}_1$$

假设参数 λ_q 使得 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \leq \text{diag}\{\lambda_q, \dots, \lambda_q\}$, 那么, 我们可得

$$V_1(\mathbf{e}_1) \leq \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \text{diag}\{\lambda_q, \dots, \lambda_q\} \mathbf{e}_1 \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \lambda_q e_{i,1}^2 \quad (3-5)$$

利用式(3-3)和等式 $\mathbf{e}_2 = -(\mathbf{L} + \mathbf{B})(\mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{y}}_0)$, 我们可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{e}_1^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{e}_2 - (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{f}_1) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(-e_{i,1} (x_{i,2} - x_{i,2}^*) - e_{i,1} x_{i,2}^* + |\dot{y}_0| |e_{i,1}| \right) + |\mathbf{e}_1|_\Gamma^T |\mathbf{f}_1|_\Gamma \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中 $\mathbf{x}_2 = (x_{1,2}, \dots, x_{N,2})^T$ 。下面, 我们将对不等式(3-6)右边的每一项进行估计。根据假设 3-3 可得

$$|\dot{y}_0| |e_{i,1}| \leq h_2 |e_{i,1}| \leq (2F)^{d-1} h_2^d e_{i,1}^d + 1/(2F)$$

进一步的, 根据假设 3-2 和 3-3, 且利用式(3-4)和引理 3-2 和 3-2, 可得存在一个常数其中 $\theta_i \geq 0$ 使得

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_1|_\Gamma^T |\mathbf{f}_1|_\Gamma &\leq |\mathbf{e}_1|_\Gamma^T \text{diag}\{\gamma_{i,1}(\cdot)\} \left[\left[(\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \right] |\mathbf{e}_1|_\Gamma + |\dot{\mathbf{y}}_0|_\Gamma \right]^{q_2} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\left(\theta_i + (2F)^{d-1} (\hat{\gamma} h_1^{q_2})^d \right) e_{i,1}^d + \frac{1}{2F} \right) \end{aligned}$$

其中 F 是一个可调节的常数。因此式(3-6)可重写为

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left(-e_{i,1} (x_{i,2} - x_{i,2}^*) - e_{i,1} x_{i,2}^* + \left(\theta_i + (2F)^{d-1} (\hat{\gamma} h_1^{q_2})^d + (2F)^{d-1} h_2^d \right) e_{i,1}^d + \frac{1}{F} \right)$$

令 $\zeta_{i,1} = e_{i,1}$, 那么很容易得出一个虚拟控制器 $x_{i,2}^* = \zeta_{i,1}^{q_2} \beta_{i,1}$, 其中

$$\beta_{i,1} = 2n - 1 + \theta_i + (2F)^{d-1} (\hat{\gamma} h_1^{q_2})^d + (2F)^{d-1} h_2^d$$

使得

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left(-\zeta_{i,1} (x_{i,2} - x_{i,2}^*) - (2n - 1) \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{F} \right)$$

归纳步: 假设在第 $k - 1 > 1$ 步, 存在一个合适的正定的一阶可导 Lyapunov 函数 $V_{k-1}(\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,k-1})$ 满足

$$V_{k-1}(\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,k-1}) \leq \sum_{i=1}^N \lambda (\zeta_{i,1}^2 + \dots + \zeta_{i,k-1}^2) \quad (3-7)$$

并且存在不可微虚拟控制器 $x_{i,1}^*, \dots, x_{i,k}^*$ ，其定义为

$$\begin{aligned} x_{i,1}^* &= 0, & \zeta_{i,1} &= e_{i,1}, \\ x_{i,2}^* &= \zeta_{i,1}^{q_2} \beta_{i,1}(\cdot), & \zeta_{i,2} &= x_{i,2}^{1/q_2} - x_{i,2}^{*/q_2}, \\ x_{i,3}^* &= -\zeta_{i,2}^{q_3} \beta_{i,2}(\cdot), & \zeta_{i,3} &= x_{i,3}^{1/q_3} - x_{i,3}^{*/q_3}, \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{i,k}^* &= -\zeta_{i,k-1}^{q_k} \beta_{i,k-1}(\cdot), & \zeta_{i,k} &= x_{i,k}^{1/q_k} - x_{i,k}^{*/q_k} \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中 $\beta_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) > 0$ 一阶连续可导，使得

$$\dot{V}_{k-1} \leq \sum_{i=1}^N \left(-(n-k+2) \left(\sum_{s=1}^{k-1} \zeta_{i,s}^d \right) + \zeta_{i,k-1}^{2-q_{k-1}} (x_{i,k} - x_{i,k}^*) - (n-k+1) \zeta_{i,1}^d + \frac{k-1}{F} \right) \quad (3-9)$$

利用迭代方法，我们想证明式(3-7)和(3-9)在第 k 步依然成立。为了得到这个结论，考虑

$$V_k = V_{k-1} + \sum_{i=1}^N \Pi_{i,k} \quad (3-10)$$

其中 $\Pi_{i,k} = \int_{x_{i,k}^*}^{x_{i,k}} (s^{1/q_k} - x_{i,k}^{*/q_k})^{2-q_k} ds$ 。需要指出的是，设计的 Lyapunov 函数 V_k 满足以下命题

命题 3-1: V_k 为一阶可导的，正定的，合适的函数，且满足

$$V_k \leq \sum_{i=1}^N \lambda (\zeta_{i,1}^2 + \dots + \zeta_{i,k}^2)$$

其中 $\lambda = \max \{(1/2) \lambda_q, 2\}$ 。

证明： 根据引理 3-2 和式 (3-8)，我们可得 $\Pi_{i,k} \leq \sum_{i=1}^N 2 \zeta_{i,k}^2$ 。由于 $\lambda = \max \{(1/2) \lambda_q, 2\}$ ，结合式(3-5)、(3-7)和(3-10)可得 $V_k \leq \sum_{i=1}^N \lambda (\zeta_{i,1}^2 + \dots + \zeta_{i,k}^2)$ 。至此我们完成了命题 3-1 的证明。

利用式(3-1)、(3-9)和(3-10)可以推导出

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq \sum_{i=1}^N \left(-(n-k+2) \left(\sum_{s=1}^{k-1} \zeta_{i,s}^d \right) - (n-k+1) \zeta_{i,1}^d + \zeta_{i,k-1}^{2-q_{k-1}} (x_{i,k} - x_{i,k}^*) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{l=1}^{k-1} 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial x_{i,l}} \dot{x}_{i,l} \right| + 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial e_{i,1}} \dot{e}_{i,1} \right| \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left(\zeta_{i,k}^{2-q_k} (x_{i,k+1} - x_{i,k+1}^*) + \zeta_{i,k-1}^{2-q_k} f_{i,k} + \frac{k-1}{F} + \zeta_{i,k}^{2-q_k} x_{i,k+1}^* \right) \end{aligned} \quad (3-11)$$

在下面，我们将对不等式(3-11)右边的每一项进行估计。根据式(3-8)和引理 3-2 可得

$|x_{i,k} - x_{i,k}^*| \leq 2|\zeta_{i,k}|^{q_k}$ 。利用引理 3-2, 我们可得

$$\sum_{i=1}^N \zeta_{i,k-1}^{2-q_{k-1}} (x_{i,k} - x_{i,k}^*) \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{4} \zeta_{i,k-1}^d + c_{i,k} \zeta_{i,k}^d \right) \quad (3-12)$$

其中 $c_{i,k} \geq 0$ 是一个常数。为了进一步的推导, 我们给出以下几个有用的命题, 这对于随后结论的获得具有重要作用。

命题 3-2: 对于任意向量 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$ 和 $i = 1, \dots, N$, 存在常数 $\bar{\theta}_i \geq 0$ 使得

$$\left(|\mathbf{z}|_{\Gamma}^{2-q_k} \right)^T |\mathbf{x}_1|_{\Gamma}^{q_{k+1}} \leq \sum_{i=1}^N \left(\left(\bar{\theta}_i + (3Fh_1^d)^{\frac{q_{k+1}}{2-q_k}} \right) z_i^d + \frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{3F} \right)$$

证明: 根据式(3-4)、式(3-8)和引理 3-1 可得存在常数 $\bar{\theta}_i \geq 0$ 使得对于 $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \left(|\mathbf{z}|_{\Gamma}^{2-q_k} \right)^T |\mathbf{x}_1|_{\Gamma}^{q_{k+1}} &\leq \left(|\mathbf{z}|_{\Gamma}^{2-q_k} \right)^T \left(\left[(L+B)^{-1} \right] |\mathbf{e}_1|_{\Gamma} \right)^{q_{k+1}} + \left(|\mathbf{z}|_{\Gamma}^{2-q_k} \right)^T |\mathbf{y}_0|_{\Gamma}^{q_{k+1}} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\left(\bar{\theta}_i + (3Fh_1^d)^{\frac{q_{k+1}}{2-q_k}} \right) z_i^d + \frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{3F} \right) \end{aligned}$$

至此我们完成了命题 3-2 的证明。

命题 3-3: 对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $k = 1, \dots, n$, 存在一个一阶连续的函数 $\tilde{\gamma}_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 使得

$$|f_{i,k}| \leq |x_{i,1}|^{q_{k+1}} \gamma_{i,k}(\cdot) + \left(\sum_{s=1}^k |\zeta_{i,s}|^{q_{k+1}} \right) \tilde{\gamma}_{i,k}(\cdot)$$

证明: 对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $s = 2, \dots, l$, 利用式(3-8)和引理 3-2 我们可得

$$|x_{i,s}| \leq |\zeta_{i,s}|^{q_s} + |\zeta_{i,s-1}|^{q_s} \beta_{i,s-1}(\cdot)$$

根据假设 3-1, 由于 $0 < q_{k+1} < q_k < \dots < q_1 = 1$, 我们可得

$$\begin{aligned} |f_{i,k}| &\leq \left(|x_{i,1}|^{q_{k+1}} + \sum_{s=2}^k \left(|\zeta_{i,s}|^{q_s} + |\zeta_{i,s-1}|^{q_s} \beta_{i,s-1}(\cdot) \right) \right) \gamma_{i,k}(\cdot) \\ &\leq |x_{i,1}|^{q_{k+1}} \gamma_{i,k}(\cdot) + \left(\sum_{s=1}^k |\zeta_{i,s}|^{q_{k+1}} \right) \tilde{\gamma}_{i,k}(\cdot) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\gamma}_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 为一阶可导函数。至此我们完成了命题 3-3 的证明。

命题 3-4: 对于 $i = 1, \dots, N$, 存在一个一阶连续的函数 $Q_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 使得

$$\sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial e_{i,1}} \dot{e}_{i,1} \right| \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{4} (\zeta_{i,1}^d + \zeta_{i,2}^d) + Q_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d + \frac{1}{3F} \right) \quad (3-13)$$

证明：显然的我们知道存在一个一阶可导函数 $\tilde{Q}_{i,k,l}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k-1}) \geq 0$ 使得以下不等式成立

$$\left| \frac{\partial(x_{i,k}^{*/q_k}(\cdot))}{\partial e_{i,1}} \right| \leq \left| \frac{\partial(\zeta_{i,k-1} \beta_{i,k-1}^{1/q_k}(\cdot))}{\partial e_{i,1}} \right| \leq \tilde{Q}_{i,k,l}(\cdot)$$

那么，根据式(3-1)和式(3-2)，我们可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial e_{i,1}} \dot{e}_{i,1} \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \tilde{Q}_{i,k,1}(\cdot) \left(\left| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} x_{j,2} - c_i x_{i,2} \right| + \left| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} f_{j,1} - c_i f_{i,1} \right| + |b_i \dot{y}_0| \right) \end{aligned}$$

其中 $c_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} + b_i$ 。在下面，我们将对上述不等式右边的每一项进行估计。首先，根据引理 3-2 和 $|x_{i,s}| \leq |\zeta_{i,s}|^{q_s} + |\zeta_{i,s-1}|^{q_s} \beta_{i,s-1}(\cdot)$ 理我们可得存在一阶可导函数 $\bar{Q}_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 使得

$$\sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \tilde{Q}_{i,k,1}(\cdot) \left| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} x_{j,2} - c_i x_{i,2} \right| \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{4} (\zeta_{i,1}^d + \zeta_{i,2}^d) + \bar{Q}_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d \right)$$

其次，根据假设 3-1，类似于命题 3-2 的证明过程，我们可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \tilde{Q}_{i,k,1}(\cdot) \left| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} f_{j,1} - c_i f_{i,1} \right| = 2(2-q_k) |\zeta_k|_{\Gamma}^T \text{diag}(\tilde{Q}_{i,k,l}(\cdot)) |-(L+B)f_1|_{\Gamma} \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left(\tilde{Q}_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d + \frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{6F} \right) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{Q}_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 为一阶可导函数。最后，利用 $x^a \leq F^{b-a/a} x^b + 1/F$ ($0 < a < b$)，我们可得

$$\sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \tilde{Q}_{i,k,1}(\cdot) |b_i \dot{y}_0| \leq \sum_{i=1}^N \left(\hat{Q}_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d + \frac{1}{6F} \right)$$

其中 $\hat{Q}_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 为一阶可导函数。因此，上述不等式可重写为

$$\sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial e_{i,1}} \dot{e}_{i,1} \right| \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{4} (\zeta_{i,1}^d + \zeta_{i,2}^d) + Q_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d + \frac{1}{3F} \right)$$

其中 $Q_{i,k}(\cdot) = \bar{Q}_{i,k}(\cdot) + \tilde{Q}_{i,k}(\cdot) + \hat{Q}_{i,k}(\cdot)$ 为一阶可导函数。至此我们完成了命题 3-4 的证明。

命题 3-5： 对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $l = 1, \dots, k-1$ ，存在一阶连续的函数 $\tilde{\varphi}_{i,k,l}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}) \geq 0$ 和 $\bar{\varphi}_{i,k,l}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}) \geq 0$ 使得

$$\left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial x_{i,l}} \dot{x}_{i,l} \right| \leq \left(\sum_{s=1}^k |\zeta_{i,s}|^{\frac{2n-1}{2n+1}} \right) \bar{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) + \tilde{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) |x_{i,1}|^{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

证明： 根据文献[102]中的命题 4 我们可得对于 $l = 1, \dots, k-1$

$$\left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial x_{i,l}} \right| \leq \left(\sum_{s=1}^{k-1} |\zeta_{i,s}|^{1-q_l} \right) \varphi_{i,k,l}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k-1})$$

其中 $\varphi_{i,k,l}(\cdot) \geq 0$ 使是一个一阶可导函数。进一步的根据命题 3-3 和式(3-1)可得

$$|\dot{x}_{i,l}| \leq |x_{i,1}|^{q_{l+1}} \gamma_{i,l}(\cdot) + \left(\sum_{s=1}^{l+1} |\zeta_{i,s}|^{q_l - \frac{2}{2n+1}} \right) \bar{\gamma}_{i,l}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k-1})$$

其中 $\bar{\gamma}_{i,l}(\cdot) \geq 0$ 使是一个一阶可导函数且 $q_{l+1} = q_l - 2/2n+1$ 。因此，结合上述两个不等式可得对于 $1 \leq l \leq k-1$,

$$\left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial x_{i,l}} \dot{x}_{i,l} \right| \leq \left(\sum_{s=1}^k |\zeta_{i,s}|^{\frac{2n-1}{2n+1}} \right) \bar{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) + \tilde{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) |x_{i,1}|^{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

其中 $\bar{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) \geq 0$ 和 $\tilde{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) \geq 0$ 为与变量 $e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}$ 相关的一阶可导函数。至此我们完成了命题 3-5 的证明。

因此，利用命题 3-2、3-3 和引理 3-2，我们可得

$$\sum_{i=1}^N \zeta_{i,k}^{2-q_k} f_{i,k} \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{4} \left(\sum_{s=1}^{k-1} \zeta_{i,s}^d \right) + \rho_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d + \frac{1}{3F} \right) \quad (3-14)$$

其中 $\rho_{i,k}(\cdot)$ 和 $\tilde{\rho}_{i,k}(\cdot)$ 为与变量 $e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}$ 有关的一阶可导函数。进一步的，根据引理 3-2 和命题 3-2、3-5，我们可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial x_{i,l}} \dot{x}_{i,l} \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^N 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left(\sum_{s=1}^k |\zeta_{i,s}|^{\frac{2n-1}{2n+1}} \right) \left(\sum_{l=1}^{k-1} \bar{\varphi}_{i,k,l}(\cdot) \right) \\ & \quad + \sum_{l=1}^{k-1} 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}|_{\Gamma}^T \text{diag}\{\tilde{\varphi}_{i,k,l}(\cdot)\} |x_{i,1}|_{\Gamma}^{\frac{2n-1}{2n+1}} \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \zeta_{i,1}^d + \frac{1}{4} \left(\sum_{s=1}^{k-1} \zeta_{i,s}^d \right) + \alpha_{i,k}(\cdot) \zeta_{i,k}^d + \frac{1}{3F} \right) \end{aligned} \quad (3-15)$$

其中 $\alpha_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \geq 0$ 是一个一阶可导函数。最后，将式(3-12)至(3-15)代入式(3-11)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & \sum_{i=1}^N \left(-(n-k+1) \left(\sum_{s=1}^{k-1} \zeta_{i,s}^d \right) - (n-k) \zeta_{i,1}^d + \zeta_{i,k}^{2-q_k} (x_{i,k+1} - x_{i,k+1}^*) + \zeta_{i,k}^{2-q_k} x_{i,k+1}^* \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \left((c_{i,k} + \rho_{i,k}(\cdot) + \mathcal{Q}_{i,k}(\cdot) + \alpha_{i,k}(\cdot)) \zeta_{i,k}^d + c_{i,k} + \frac{k}{F} \right) \end{aligned}$$

显然的，第 $k+1$ 步的虚拟控制器

$$x_{i,k+1}^* = -\zeta_{i,k}^{q_{k+1}} \beta_{i,k}(\cdot)$$

其中 $\beta_{i,k}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) = (n-k+1) + c_{i,k} + \rho_{i,k}(\cdot) + \mathcal{Q}_{i,k}(\cdot) + \alpha_{i,k}(\cdot) > 0$ 是一个一阶可导函数，和 $0 < q_{k+1} := q_k - 2/(2n+1) < q_k$ 使得

$$\dot{V}_k \leq \sum_{i=1}^N \left(-(n-k+1) \left(\sum_{s=1}^{k-1} \zeta_{i,s}^d \right) - (n-k) \zeta_{i,1}^d + \zeta_{i,k}^{2-q_k} (x_{i,k+1} - x_{i,k+1}^*) + \frac{k}{F} \right) \quad (3-16)$$

此外，当 $k=2$ 时，根据式(3-10)可得 $V_2 = V_1 + \sum_{i=1}^N \Pi_{i,2}$ ，那么对 V_2 的求导可通过令式(3-11)中的 $k=2$ 以及用 $\sum_{i=1}^N -\zeta_{i,1}(x_{i,2} - x_{i,2}^*)$ 代替 $\sum_{i=1}^N \zeta_{i,1}(x_{i,2} - x_{i,2}^*)$ 来获得。类似于式(3-12)的证明过程，我们可得

$$\sum_{i=1}^N -\zeta_{i,1}(x_{i,2} - x_{i,2}^*) \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{4} \zeta_{i,1}^d + c_{i,2} \zeta_{i,2}^d \right)$$

它和式(3-12)具有相同的形式。因此，对 V_2 的求导仍然满足式(3-16)，其中 $k=2$ 。

至此，我们完成了迭代过程的证明。基于此，我们给出如下结论

定理 3-1 考虑由式(3-1)及一个虚拟领导者描述的多智能体系统，并且其满足假设条件 3-1 至 3-3。如果设计分布式控制器为

$$u_i = x_{i,n+1}^* = -\zeta_{i,n}^{1/(2n+1)} \beta_{i,n}(e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \quad (3-17)$$

其中 $\beta_{i,n}(\cdot) > 0$ ，那么，所有智能体的输出能够在有限时间内有界跟踪领导者。

证明：基于上述的归纳式论证，我们可得在第 n 步，存在非 Lipschitz 连续控制器 $u_i = -\zeta_{i,n}^{1/(2n+1)} \beta_{i,n}(\cdot)$ 使得 $V_n \leq \sum_{i=1}^N \lambda(\zeta_{i,1}^2 + \dots + \zeta_{i,n}^2)$ 并且

$$\dot{V}_n \leq -\sum_{i=1}^N \lambda \left(\zeta_{i,1}^{4n/(2n+1)} + \dots + \zeta_{i,n}^{4n/(2n+1)} \right) + \frac{nN}{F}$$

令 $\alpha = 2n/(2n+1) \in (0,1)$ 。利用引理 3-2，我们可得

$$V_n^\alpha \leq \lambda^\alpha \sum_{i=1}^N \lambda \left(\zeta_{i,1}^{4n/(2n+1)} + \dots + \zeta_{i,n}^{4n/(2n+1)} \right)$$

令由此可得

$$\dot{V}_n \leq -\frac{1}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha + \frac{nN}{F}$$

令 $t_1 + t_2 = 1$ ，其中 t_1 和 t_2 其为正常数。那么，上述不等式可以重写为

$$\dot{V}_n + \frac{t_1}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha \leq -\frac{t_2}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha + \frac{nN}{F}$$

因此可得 $\dot{V}_n + \frac{t_1}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha \leq 0$ 如果 $\frac{t_2}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha \geq \frac{nN}{F}$ 。根据 V_n 的定义可得

$$V_n \geq \frac{1}{2} \zeta_1^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \zeta_1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^n \Pi_{i,j} \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \lambda_p \zeta_{i,1}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^n \Pi_{i,j}$$

其中 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \geq \text{diag} \{ \lambda_p, \dots, \lambda_p \}$ 。因此不等式 $\frac{t_2}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha \geq \frac{nN}{F}$ 成立的充分条件是

$$\frac{t_2}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha \geq \frac{t_2}{\lambda^\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \lambda_p \zeta_{i,1}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^n \Pi_{i,j} \right)^\alpha \geq \frac{nN}{F}$$

此外，我们可得 $\zeta_{i,1}$ 和 $\Pi_{i,j}$ 的收敛域分别为

$$\mathcal{G}_1 := \left\{ \zeta_{i,1} \left| \left| \zeta_{i,1} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_p}} \left(\frac{nN\lambda^\alpha}{F t_2} \right)^{1/(2\alpha)} \right\}$$

和

$$\mathcal{G}_j := \left\{ \Pi_{i,j} \left| \left| \Pi_{i,j} \right| \leq \left(\frac{nN\lambda^\alpha}{F t_2} \right)^{1/(2\alpha)} \right\}$$

值得注意的是， F 是一个可调参数，并且通过适当的调整 F 的可使得收敛域 $\mathcal{G}_j, j = 1, \dots, N$ 足够小。因此，根据引理 3-3 给出的有限时间稳定结论可得对于 $i = 1, \dots, N$ ， $\zeta_{i,1}$ 将会在有限时间内收敛到区域 \mathcal{G}_1 ，即 $\zeta_{i,1}$ 为有限时间最终有界。由式(3-8)可得 $e_{i,1} = \zeta_{i,1}$ 。因此 $e_{i,1}$ 关于收敛区域 \mathcal{G}_1 为有限时间最终有界。进一步的，根据 $\Pi_{i,j}$ 的定义及式(3-8)可得智能体的状态变量 $x_{i,j}, i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, n$ 将会收敛到与 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_j$ 相关的某一区域。此外，根据文献[98]中的引理 2 可得 $\|\delta\| \leq \|e_1\| / \underline{\sigma}(\mathbf{L} + \mathbf{B})$ ，其中 $\underline{\sigma}(\mathbf{L} + \mathbf{B})$ 为矩阵 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 的最小奇异值。因此，一致性误差 $\delta_i(t)$ 将会在有限时间内收敛至区域 $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 / \underline{\sigma}(\mathbf{L} + \mathbf{B})$ ，即对于 $i = 1, \dots, N$ ， $\delta_i(t)$ 为有限时间最终有界。这表明所有智能体的输出能够在有限时间内有界跟踪领导者。至此，我们完成了定理 3-1 的证明。

注 3-4: $\delta_i(t)$ 的收敛区域可重写为

$$\mathcal{G} := \left\{ \delta_i \left| \left| \delta_i \right| \leq \frac{N^{\frac{2n+1}{4n}}}{\underline{\sigma}(\mathbf{L} + \mathbf{B})} \sqrt{\frac{2}{\lambda_p}} \left(\frac{n\lambda^\alpha}{F l_2} \right)^{\frac{2n+1}{4n}} \right\}$$

其中 $\alpha = 2n/(2n+1)$ 。显然的参数 F 的影响可由其幂次数 $(2n+1)/4n$ 部分抵消并且参数 F 为可调的。因此，可通过调节参数 F 使得收敛区域 \mathcal{G} 足够小。对于收敛区域 $\mathcal{G}_j, j = 2, \dots, N$ ，也可得到类似的结论。

注 3-5: 在控制器(3-17)中，非线性函数 $\beta_{i,n}(\cdot)$ 不需要为一阶可导的。因为 $\beta_{i,n}(\cdot)$ 只出现在迭代过程的最后一步，并且整个迭代证明过程的完成不需要对 $\beta_{i,n}(\cdot)$ 进行求导。进一步的，根据上述的迭代分析过程，我们可得对于 $k = 1, \dots, n-1$ ， $\beta_{i,k}(\cdot)$ 为一阶可导的函数。

注 3-6: 在假设 3-2 中，我们假设函数 $\gamma_{i,m}(\cdot)$ 为已知的。值得注意的是，函数 $\gamma_{i,m}(\cdot)$ 为未知情形是一个有趣的问题。我们可以利用神经网络去逼近这个函数，并将逼近值用于控制器设计。这将是我们的下一步的工作。

定理 3-1 考虑的多智能体系统具有不同的非线性动态特性，并且得到了一致性误差有限时间有界收敛的结论。在下面，我们可得当系统的非线性特性满足某一特定条件时，智能体可在有限时间内达到渐进一致性。

推论 3-1: 考虑由式(3-1)及一个虚拟领导者 $\dot{y}_0 = f_{0,1}(y_0, u_0, t)$ 描述的多智能体系统，并且其满足假设条件 3-1。如果下面的条件成立，那么分布式控制器为(3-17)解决了所考虑多智能体系统的有限时间一致性控制问题。

1) 对于 $i = 1, \dots, N$ ，跟随智能体的非线性特性 $f_{i,1}(x_{i,1}, u_0, t)$ 与领导者的相匹配，即存在已知的正常数 κ 使得非线性函数 $f_{i,1}(x_{i,1}, u_0, t)$ 满足

$$\left| f_{i,1}(x_{i,1}, u_i, t) - f_{0,1}(y_0, u_0, t) \right| \leq \kappa |x_{i,1} - y_0|^{q_2} \quad (3-18)$$

2) 对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $m = 2, \dots, n$ ，非线性函数 $f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t)$ 满足 $|f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t)| \leq \gamma_{i,m}(\cdot)(|x_{i,2}| + \dots + |x_{i,m}|)$ ，其中 $\gamma_{i,m}(\bar{\mathbf{x}}_{i,m})$ 为已知的一阶可导函数。

证明: 为了简单起见，我们基于定理 3-1 的证明给出此情形的证明过程。基于推论 3-1 中给出的条件，系统(3-3)可重写为

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -(\mathbf{L} + \mathbf{B})\mathbf{x}_2 - (\mathbf{L} + \mathbf{B})(\mathbf{f}_1 - \underline{\mathbf{f}}_{0,1})$$

其中 $\underline{\mathbf{f}}_{0,1} = \mathbf{1}f_{0,1}(y_0, t) \in \mathbb{R}^N$ 。利用不等式(3-18)和引理 3-1，在上述迭代过程中的不等式(3-6)可重写为

$$\dot{V}_1 = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{L} + \mathbf{B})^{-1} \left(-(\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x}_2 + \mathbf{f}_1 - \underline{\mathbf{f}}_{0,1}) \right) \leq \sum_{i=1}^N \left(-e_{i,1} (x_{i,2} - x_{i,2}^*) - e_{i,1} x_{i,2}^* + \kappa \mu_i e_{i,1}^d \right)$$

其中 $\mu_i > 0$ 为常数。由于 $\zeta_{i,1} = e_{i,1}$ ，我们可得虚拟控制器 $x_{i,2}^* = \zeta_{i,1}^{q_2} \beta_{i,1}$ ，其中 $\beta_{i,1} = 2n - 1 + \kappa \mu_i$ ，可使得

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left(-\zeta_{i,1} (x_{i,2} - x_{i,2}^*) - (2n - 1) \zeta_{i,1}^d \right)$$

在其余的迭代步中，常数项 $\sum_{i=1}^N 1/F$ 的存在是由于 $x_{i,1}$ 向 $e_{i,1}$ 的转换引出的。在此，对于 $i = 1, \dots, N$ ，由于跟随智能体的非线性特性 $f_{i,1}(x_{i,1}, u_0, t)$ 与领导者的相匹配，所以在相应于命题 3-2 和 3-4 中的不等式中不会出现常数项 $\sum_{i=1}^N 1/(3F)$ 。进一步的，由于非线性函数 $f_{i,m}(\mathbf{x}_i, u_i, t)$, $m = 2, \dots, n$ 与变量 $x_{i,1}$ 无关，所以当放缩

$$\sum_{i=1}^N \zeta_{i,k}^{2-q_k} f_{i,k} \text{ 和 } \sum_{i=1}^N \sum_{l=2}^{k-1} 2(2-q_k) |\zeta_{i,k}| \left| \frac{\partial x_{i,k}^{*/q_k}}{\partial x_{i,l}} \dot{x}_{i,l} \right|$$

时，不会出现常数项。因此，类似于定理 3-1 的证明过程，在此情形下我们可得 $\dot{V}_n \leq -\frac{1}{\lambda^\alpha} V_n^\alpha$ 。因此，根据引理 3-3 给出的有限时间稳定结论可得对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $j = 1, \dots, n$ ， $\zeta_{i,j}$ 将会在有限时间内收敛到 0。由式(3-8)中的定义可得 $e_{i,1}$ ， $x_{i,j}$ 也会在有限时间内收敛到 0。由于 $\|\delta\| \leq \|\mathbf{e}_1\|/\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B})$ ，我们可得一致性误差 $\delta_i(t)$ 有限时间内收敛至 0。这表明所考虑的多智能体系统能够在有限时间内达到一致性。

注 3-7: 根据定理 3-1 和推论 3-1，我们知道如果系统非线性项满足某些特殊的条件时，所考虑的多智能体系统能够达到有限时间一致性。否则，如果当系统具有非匹配高阶非线性时，所考虑的多智能体系统。值得注意的是，本章研究的多智能体系统能够包含文献[93]、[95]、[49]考虑的一阶、二阶、高阶多智能体系统模型。

注 3-8: 在定理 3-1 和推论 3-1 中，如果 $n = 2$ ，我们可得到一个动态特性带有非线性项 $f_{i,1}(\mathbf{x}_i, u_i, t)$ 和 $f_{i,2}(\mathbf{x}_i, u_i, t)$ 的二阶多智能体系统。其动态特性方程可表示为 $\dot{x}_{i,1} = x_{i,2} + f_{i,1}(\mathbf{x}_i, u_i, t)$ 和 $\dot{x}_{i,2} = u_i + f_{i,2}(\mathbf{x}_i, u_i, t)$ 。到目前为止，已经有许多文献研究了二阶多智能体系统的一致性控制问题，如[95]-[96]、[106]-[107]。其中[95]和[107]如考虑了非线性特性为 $f_{i,1}(\mathbf{x}_i, u_i, t) = 0$ 和 $f_{i,2}(\mathbf{x}_i, u_i, t) = 0$ 情形，[96]和[106]考虑了非线性特性为 $f_{i,1}(\mathbf{x}_i, u_i, t) = 0$ 和 $f_{i,2}(\mathbf{x}_i, u_i, t) \neq 0$ 情形。然而，本章所提出的结论能够解决具有非匹配非线性特性的二阶多智能体系统系统的一致性问题。因此本章的结论能够推广至文献[95]-[96]和[106]-[107]。

注 3-9: 根据定理 3-1 的证明过程可知，我们不需要知道领导者输出 y_0 三阶及高

阶导数的界值。只要领导者输出 y_0 以及其一阶导数 \dot{y}_0 分别满足 $|y_0(t)| \leq h_1$ 和 $|\dot{y}_0(t)| \leq h_2$ ，那么本章所提控制器的目的是为了使所有跟随智能体的输出能够与领导者达到一致。因此，在本章中对于领导者输出 y_0 的三阶及高阶导数的界没有数学上的限制。

3.4 仿真结果及分析

在这一小节，我们将给出一个仿真例子以证明本章所提理论结果的有效性。考虑由五个跟随智能体(用节点 1-5 来表示)和一个虚拟领导者(用节点 0 来表示)组成的多智能体系统，且智能体系统的通信图拓扑图如图 3-1 所示。假设虚拟领导者的动态特性为 $y_0 = 2 \sin(t)$ 。因此我们可得 $h_1 = 2, h_2 = 0.2$ 。跟随智能体的动态特性由阶数为 2 的式(3-1)描述，其中

$$\begin{aligned} f_{1,1}(\cdot) &= 0.5 \sin(x_{1,1}^{0.6}) + 0.5 x_{1,1}^{0.6}, f_{2,1}(\cdot) = x_{2,1}^{0.6} \\ f_{3,1}(\cdot) &= \sin(x_{3,1}^{0.6}), f_{4,1}(\cdot) = 0.5 \sin(x_{4,1}^{0.6}) + 0.5 x_{4,1}^{0.6} \\ f_{1,2}(\cdot) &= (x_{1,1} + 1)(x_{1,1} + x_{1,2}), f_{2,2}(\cdot) = \sin(x_{2,2})(x_{2,1} + x_{2,2}) \\ f_{3,2}(\cdot) &= \exp(x_{3,1})(x_{3,1} + x_{3,2}), f_{4,2}(\cdot) = (x_{4,1} + x_{4,2})^2 \end{aligned}$$

这些非线性函数满足假设 3-2。显然的，对于 $i = 1, 2, 3, 4$ ， $\gamma_{i,1}(\cdot) = 1$ 和

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}(\cdot) &= (|x_{1,1}| + 1)(|x_{1,1}| + 2), \gamma_{2,2}(\cdot) = |x_{2,1}| + 2 \\ \gamma_{3,2}(\cdot) &= \exp(x_{3,1})(|x_{3,1}| + 2), \gamma_{4,2}(\cdot) = (x_{4,1}^2 + |x_{4,2}|)(|x_{4,1}| + 2) \end{aligned}$$

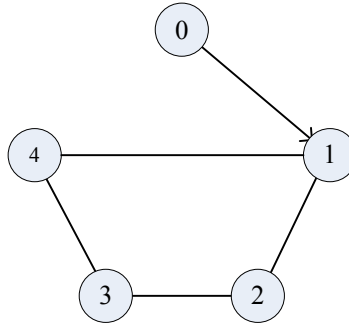


图 3-1 通信拓扑图

Fig 3-1 Topology of augmented graph $\bar{\mathcal{G}}$

选取系统的初始值为 $x_{1,1}(0) = -0.1$ ， $x_{2,1}(0) = 0.3$ ， $x_{3,1}(0) = 0.1$ ， $x_{4,1}(0) = -0.3$ ， $x_{i,2}(0) = 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。根据定理 3-1 的证明过程，我们可得到第 i 个智能体的控制器，其中我们选取 $F = 8$ 。多智能体系统的领导跟随一致性仿真

结果如图 3-2 所示。从图 3-2 可以看出所考虑的由式(3-1)描述的具有下三角结构的高阶多智能体系统在如图 3-1 所示的通信拓扑条件下能达到有限时间有界领导跟随一致性。

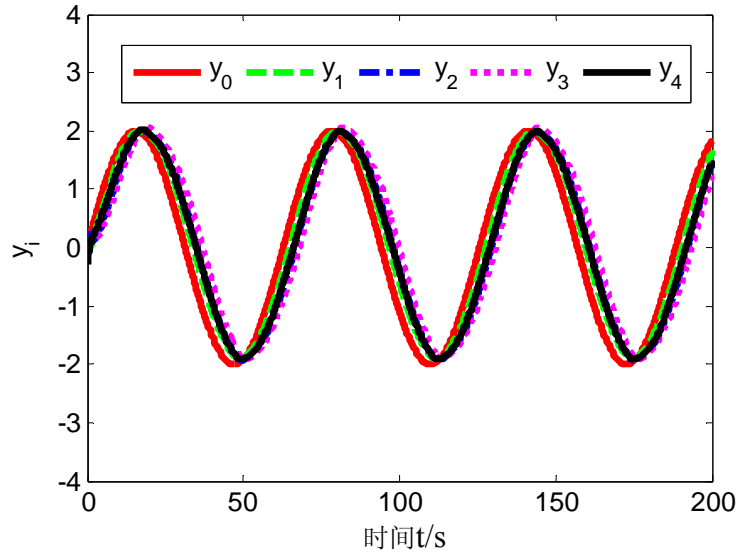


图 3-2 领导跟随一致性结果

Fig 3-2 Leader-following consensus results

3.5 本章小结

本章研究了高阶非线性多智能体系统的有限时间领导跟随一致性控制问题。在考虑的多智能体系统中，每个跟随智能体的非线性满足下三角结构特性，并且虚拟领导者本质上是一个命令生成器。基于有限时间 Lyapunov 稳定性理论和矩阵理论，我们给出了一个能使多智能体系统达到有限时间一致性的控制器设计方法。首先基于反步控制，设计每一步的虚拟变量和虚拟控制器，保证逐步处理系统中的非匹配非线性；其次在 Lyapunov 函数设计中引入分数次项和积分项，保证系统的有限时间一致性；最后，利用拓扑矩阵特性设计 Lyapunov 函数，保证控制器的分布式。给出的仿真结果验证了本章所提结论的有效性。

第4章 具有下三角结构的高阶随机非线性时变 MAS 的一致性控制

4.1 引言

在过去的几十年里,学者对各种如一阶、二阶、高阶线性多智能体系统的一致性控制已经进行了广泛的研究,而且对于能更好的刻画实际系统的非线性多智能体系统的研究也取得了一定的进展。但是众所周知,在实际中,系统的动态特性不只会受到非线性特性的影响,还会受到各种随机扰动和不确定性的影响,比如来自不可预测的环境条件的噪声^[108-109]。因此,随机非线性系统在实际中是普遍存在的并且研究随机非线性多智能体系统的一致性控制具有重要的实际意义。在一些针对单个实际系统如神经网络系统^[110]、拉格朗日系统^[111]以及飞行器姿态系统^[112]的控制研究中,已经考虑了随机干扰对系统控制性能的影响。在多智能体系统一致性控制方面,文献[113]和[43]分别研究了随机干扰条件下一阶离散和连续线性多智能体系统的一致性控制问题,给出了系统达到均方一致性的充分条件。文献[114]研究了带有非线性动态的一阶多智能体系统的随机一致性控制问题,并讨论了依赖于状态的噪声扰动对控制器性能的影响。考虑到系统的一致性收敛速度问题,文献[115]和[102]分别研究了一阶积分器型和二阶非线性多智能体系统的有限时间随机一致性。进一步的,文献[71]研究了具有非匹配非线性结构的高阶随机非线性多智能体系统的输出一致性问题。基于反步控制方法,构造了系统的一致性控制器,保证了系统所有状态的输出跟踪误差依概率趋于一个任意小的界。虽然目前针对随机多智能体系统的研究已经取得了一定的进展,但是现有的工作仍然要求系统的所有状态都可获得,这在实际系统中往往并不容易实现。

在实际系统中,虽然系统的所有状态不容易获得,但是系统的输出是可以得到的。因此对于多智能体系统,尤其是对于高阶多智能体系统,研究基于输出信息的一致性控制比基于状态的一致性控制更具有实用性。目前,已经有文献如[116]-[118]针对高阶线性/非线性多智能体系统,提出了只依赖于系统输出的一致性控制器。但是在这些工作中没有考虑系统的随机干扰,并且所设计的观测器的所有状态都需要在网络中进行传输。我们知道观测器的状态个数和控制器的状态个数是一样的,因

此文献[116]-[118]的工作虽然保证了控制器的设计只基于系统的输出信息，但是并没有减少网络中信息的传输量。为了克服这个问题，文献[119]-[121]提出了一种新颖的动态输出控制方法，在这种控制方法中是需要系统的输出信息而不是观测器的全状态信息进行传输。然而，文献[119]-[121]只考虑了线性多智能体系统动态输出一致性控制，其结果不能直接推广至随机非线性多智能体系统。

在本章，我们主要研究了具有非匹配非线性结构的高阶随机多智能系统的一致性控制问题。相较于之前的研究工作[71]和[115]-[121]，本章工作的创新点主要包括以下三点：1) 相比于文献[115]和[119]-[121]在一致性控制中没有考虑随机干扰，并且所考虑的系统为低阶，本章所考虑的高阶随机非线性系统更具一般性。2) 构造了一个分布式动态输出一致性控制器，节约了系统的通信能量。相比于文献[116]-[118]，本章所提的控制方法只需要通信网络传输系统的输出信息，而不是观测器的全状态信息。3) 本章所提的控制器的构造方法更简单和实用。相比于[71]所用的反步控制，本章的方法简化的控制器的设计过程。

4.2 问题描述

4.2.1 预备知识

基于 1.4 中给出的多智能体系统的通信拓扑知识，在本章中，我们假设系统的通信拓扑满足以下假设

假设 4-1: 图 \mathcal{G} 为固定的无向的，且其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

下面，我们将给出一个有用的引理，其对本章的理论分析具有重要作用。

引理 4-1: 令 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\Xi \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 分别为定义如下的向量和矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Xi &= \text{diag} \{ \tilde{\Xi}, \tilde{\Xi} \} \\ \mathcal{B}_1 &= (0, \dots, 0, 1)^T \\ \mathcal{B}_2 &= (1, 0, \dots, 0)^T \\ \tilde{\Xi} &= \text{diag} \{ 0, \dots, n-1 \} \end{aligned}$$

那么存在 $\mathbf{k}_g = (g_1, \dots, g_n)^T$ ， $\bar{\mathbf{k}}_g = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)^T$ 使得

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{M}}) - ((\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes (\bar{\mathbf{k}} \mathcal{B}_3^T))$$

为 Hurwitz 矩阵, 其中 \mathbf{I}_N 为 N 维单位矩阵, \mathbf{L} 和 \mathbf{B} 为拓扑矩阵, 以及

$$\mathbf{B}_3 = (\mathbf{B}_2^T, \mathbf{B}_2^T)^T, \quad \bar{\mathbf{k}} = (\bar{\mathbf{k}}_g^T, -\bar{\mathbf{k}}_g^T)^T, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{k}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

进一步的, 存在正定矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N\}$ ($\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, i = 1, \dots, N$) 和正常数 $\tilde{\lambda}_{i,1}, \tilde{\lambda}_{i,2}, \beta, h$ 满足以下不等式

$$\tilde{\lambda}_{i,1} \mathbf{I}_{2N} \leq \mathbf{P}_i \leq \tilde{\lambda}_{i,2} \mathbf{I}_{2N}, \quad \mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M} \leq -\beta \mathbf{P}, \quad -h \mathbf{P}_i \leq \Xi \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \Xi \leq h \mathbf{P}$$

证明: 定义 $\hat{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T$ 我们可得

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{k}^T - \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T & -\bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T + \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix}$$

根据文献[73]中的引理 2 和引理 3 可得, 存在列向量 $\bar{\mathbf{k}}_g$ 和 \mathbf{k} 使得矩阵

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{k}^T & -\bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix}$$

为 Hurwitz。选择 $\bar{\mathbf{k}}_g = \mathbf{k}_g$ 我们可得 $\hat{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}$ 也为 Hurwitz 矩阵。基于假设 4-1, 我们知道 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 是一个正定矩阵^[73], 并且其特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, N$ 。因此, 基于文献[11]中引理 3 的证明过程可得, 通过适当的选择 $\bar{\mathbf{k}}, (\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T), i = 1, \dots, N$ 为 Hurwitz 矩阵。进一步的可得 \mathbf{M} 为 Hurwitz 矩阵^[73]。此外, 我们可以容易的获得引理 4-1 中的不等式, 其证明过程在此不再赘述。

进一步的, 基于文献[122]中的 p th 指数稳定概念, 我们给出了如下的关于随机多智能体系统一致性的定义

定义 4-1: 对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $m = 1, \dots, n$, 如果存在正的常数 $\underline{\rho}$ 和 ν 使得

$$E|x_{i,m} - x_{0,m}| \leq \underline{\rho} e^{-\nu t}$$

那么称所有的智能体系统达到 1th 指数收敛领导跟随一致性。

4.2.2 具有下三角结构的高阶随机非线性时变多智能体系统模型简介

考虑由 $N+1$ 个智能体组成的多智能体系统, 且每个智能体具有 n 阶非线性和随机特性。因此, 第 i ($i = 0, 1, \dots, N$) 个智能体的系统动力学模型为

$$\begin{aligned}
dx_{i,m} &= (x_{i,m+1} + f_m(\bar{x}_{i,m}, t))dt + h_m^T(\bar{x}_{i,m}, t)d\omega \\
dx_{i,n} &= (u_i + f_n(x_i, t))dt + h_n^T(x_i, t)d\omega \\
y_i &= x_{i,1}, \quad m=1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{4-1}$$

其中 $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})^T \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}$ 和 $y_i \in \mathbb{R}$ 分别代表系统的状态, 输入和输出, ω 为 ρ 维的独立标准维纳过程(或布朗运动)。注 $\bar{x}_{i,m} = (x_{i,1}, \dots, x_{i,m})^T \in \mathbb{R}^m$ 。在本章中, 我们用节点 0 来表示领导者, 节点 $i=1, \dots, N$ 数来表示跟随者, 且与领导者相邻的跟随者能获得领导者的状态信息。对于 $m=1, \dots, n$, 不确定非线性函数 $f_m(\cdot): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $h_m(\cdot): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\rho$ 满足以下假设条件

假设 4-2: 对于 $i=0, 1, \dots, N$, $m=1, \dots, n$ 和

$$\begin{aligned}
|f_m(\bar{x}_{i,m}, t) - f_m(\bar{x}_{0,m}, t)| &\leq \alpha_1(t) \sum_{l=1}^m |x_{i,l} - x_{0,l}| \\
\|h_m(\bar{x}_{i,m}, t) - h_m(\bar{x}_{0,m}, t)\| &\leq \alpha_2(t) \sum_{l=1}^m |x_{i,l} - x_{0,l}|
\end{aligned}$$

其中 $(\bar{x}_{i,m}, t), (\bar{x}_{0,m}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$, 时变函数 $\alpha_1(t) \leq c_1 e^{c_2 t}$ 和 $\alpha_2(t) \leq \tilde{c}_1 e^{\tilde{c}_2 t}$, 式中 c_1, c_2, \tilde{c}_1 和 \tilde{c}_2 为已知的非负常数。

注 4-1: 根据文献[123]中的结论可得, 对于带有与不可测状态相关的增长非线性特性的系统, 状态反馈镇定问题为不可解决的。因此, 假设一些非线性的增长条件来处理与不可测状态相关的非线性特性是十分有必要的。在现有的一些工作中, 如文献[72]和文献[124]及其参考文献等, 假设非线性的增量速度取决于系统的输出或者时间 t 。因此, 在本文中我们假设 $f_m(\bar{x}_{i,m}, t)$ 和 $h_m(\bar{x}_{i,m}, t)$ 的增量速度与时间 t 相关。也就是说系统的非线性项和随机项满足假设 4-2 中与时变函数 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 相关的不等式。

注 4-2: 在假设 4-2 中, 对于一般的时变非线性项和随机项, 条件 $\alpha_1(t) \leq c_1 e^{c_2 t}$ 和 $\alpha_2(t) \leq \tilde{c}_1 e^{\tilde{c}_2 t}$ 很容易就能满足。我们很容易知道常数和一些时变函数(不依赖于状态的)满足上述条件, 比如只与时间 t 相关的线性函数、二次函数、三角函数、对数函数以及其组合。因此, 考虑的满足假设 4-2 的系统(4-1)包含许多线性的和非线性的系统为特例。文献[48]和[50]考虑的线性系统满足(4-1)其中 $c_1 = c_2 = \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ 。文献[68]-[69]和[73]考虑的非线性系统满足(4-1)其中 $c_2 = \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ 。文献[72]考虑的时变系统满足(4-1)其中 $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ 。文献[98]考虑的二阶随机系统满足(4-1)其中 \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 为非负常数。

注 4-3: 在实际当中,有许多系统能由满足假设 4-2 的式(4-1)来描述。比如带有随机干扰的倒立摆系统模型可写为式(4-1),其中 $\alpha_1(t) = t + 0.2$ 和 $\alpha_2(t) = 0.1(e^{0.1t} + 0.1t)$ [72]。此外,蔡式电路系统的模型可写为式(4-1),其中 $\alpha_1(t) = 4.3871$ 和 $\alpha_2(t) = 0.1$ [98]。因此,所得的研究结果能够应用到一类实际系统中。

注 4-4: 对于网络多智能体系统,为了达到一致性,每个跟随智能体需要直接或者间接的知道领导者的状态信息,这就要求系统的通信拓扑至少包含一个以领导者为根节点的生成树。进一步的,为了保证引理 4-1 的成立,拓扑矩阵 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 需满足正定。它要求图 \mathcal{G} 为固定的无向的,且其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含有一个以领导者为根节点的有向生成树。它要求图 \mathcal{G} 为固定的无向的,且其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含生成树 [73]。因此,假设 4-1 对于本章所考虑的一致性问题的来讲是一个必要的条件。

注 4-5: 在引理 4-1 中,列向量 \mathbf{k}_g , $\bar{\mathbf{k}}_g$, $\boldsymbol{\kappa}$ 和正定矩阵 $\mathbf{P}_i, i = 1, \dots, N$ 以及正常数 $\tilde{\lambda}_{i,1}, \tilde{\lambda}_{i,2}, \beta, h$ 能够通过以下过程获得。首先,求得矩阵 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 的特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, N$ 。其次,求得列向量 \mathbf{k}_g , $\bar{\mathbf{k}}_g$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 使得 $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T)$ 为 Hurwitz 矩阵。最后,通过求解引理 4-1 中的不等式,我们可获得正定矩 \mathbf{P}_i 以及正常数 $\tilde{\lambda}_{i,1}, \tilde{\lambda}_{i,2}, \beta, h$ 。

4.3 1th 一致性控制器设计及其有效性证明

在本小节,我们将提出一个分布式控制器,使得考虑的随机多智能体系统能够达到如定义 4-1 所示的 1th 指数收敛领导跟随一致性。对于第 i 个智能体来说,由于其只能获得其邻居智能体的信息,因此我们定义其局部输出一致性误差为

$$e_{i,1} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (y_j - y_i) + b_i (y_0 - y_i)$$

基于此,我们设计第 i 个智能体的控制器为

$$\begin{aligned} dz_{i,m} &= (z_{i,m+1} + g_m F^m z_{i,1} + \bar{g}_m F^m e_{i,1}) dt \\ dz_{i,n} &= \left(\sum_{m=1}^n \kappa_m F^{n-m+1} z_{i,m} + g_n F^n z_{i,1} + \bar{g}_n F^n e_{i,1} \right) dt \\ dF &= \nu(F, t) dt, \quad u_i = \sum_{m=1}^n \kappa_m F^{n-m+1} z_{i,m} + u_0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中 $z_{i,m} \in \mathbb{R}, m = 1, \dots, n$ 为虚构的 z_i 系统的状态变量。 g_m, \bar{g}_m, κ_m 为由引理 4-1 提供的系数。 $F(t)$ 是一个额外的状态且满足 $F(0) \geq 1$ 。函数 $\nu(F, t)$ 将在以下给

出。那么，我们可得到如下结论

定理 4-1: 考虑由式(4-1)描述的多智能体系统，并且其满足假设条件 4-1 和 4-2。如果设计分布式控制器为式(4-2)，其中

$$v(F, t) = -\frac{1}{h} F \left(\frac{\beta}{3} (F-1) - \gamma - 4n\alpha_1(t) - 4\bar{\lambda} n^2 \alpha_2^2(t) \right) \quad (4-3)$$

其中 h 和 β 如引理 4-1 所示， n 表示系统的阶数，参数 $\gamma = 2c(n+h)$ ，其中 $c = \max\{c_2, 2\tilde{c}_2\}$ ， $\bar{\lambda} = \max\{\|P_i\|/\tilde{\lambda}_{i,1}, i=1, \dots, N\}$ ，参数 $\tilde{\lambda}_{i,1}$ 和矩阵 P_i 如引理 4-1 所示，那么，所有考虑的高阶随机智能体系统能够达到 1th 指数收敛领导跟随一致性。

证明: 对于 $m=1, \dots, n$ ，定义第 i 个智能体的一致性误差为 $\tilde{x}_{i,m} = x_{i,m} - x_{0,m}$ ，并且令 $r_{i,m} = \tilde{x}_{i,m} - z_{i,m}$ 。那么，由式(4-1)和(4-2)可得对于 $i=1, \dots, N$

$$\begin{aligned} dr_{i,m} &= (r_{i,m+1} + \phi_{i,m} - g_m F^m z_{i,1} - \bar{g}_m F^m e_{i,1}) dt + \zeta_{i,m}^T d\omega \\ dr_{i,n} &= (\phi_{i,n} - g_n F^n z_{i,1} - \bar{g}_n F^n e_{i,1}) dt + \zeta_{i,n}^T d\omega \end{aligned} \quad (4-4)$$

其中 $\phi_{i,m} = f_m(\bar{x}_{i,m}, t) - f_m(\bar{x}_{0,m}, t)$ 和 $\zeta_{i,m} = h_m(\bar{x}_{i,m}, t) - h_m(\bar{x}_{0,m}, t)$ 。

为了给出下面的证明过程，我们首先确保式(4-2)中的参数 $F(t)$ 大于 1。根据式(4-3)，我们可知对于所有的 $t \geq 0$ 有 $v(1, t) > 0$ 。因此我们可选择 F 的初始值大于 1 来保证 $F(t) \geq 1$ 。然后，类似于针对单个非线性系统的稳定分析(见文献[124])，我们将引入以下状态转换

$$\eta_{i,m} = z_{i,m} / F^{m-1+h}, \quad \zeta_{i,m} = r_{i,m} / F^{m-1+h} \quad (4-5)$$

那么，式(4-2)中的 z_i 系统和式(4-4)可重写为：

$$\begin{aligned} d\eta_{i,m} &= \left(F\eta_{i,m+1} + g_m F\eta_{i,1} + \bar{g}_m F^{1-h} e_{i,1} - (m-1+h) \frac{dF/dt}{F} \eta_{i,m} \right) dt \\ d\eta_{i,n} &= \left(F \sum_{m=1}^n \kappa_m \eta_{i,m} + g_n F\eta_{i,1} + \bar{g}_n F^{1-h} e_{i,1} - (n-1+h) \frac{dF/dt}{F} \eta_{i,n} \right) dt \\ d\zeta_{i,m} &= \left(F\zeta_{i,m+1} + \phi_{i,m} - g_m F\eta_{i,1} - \bar{g}_m F^{1-h} e_{i,1} - (m-1+h) \frac{dF/dt}{F} \zeta_{i,m} \right) dt + \psi_{i,m}^T d\omega \\ d\zeta_{i,n} &= \left(\phi_{i,n} - g_n F\eta_{i,1} - \bar{g}_n F^{1-h} e_{i,1} - (n-1+h) \frac{dF/dt}{F} \zeta_{i,n} \right) dt + \psi_{i,n}^T d\omega \end{aligned} \quad (4-6)$$

其中 $\phi_{i,m} = \phi_{i,m} / F^{m-1+h}$ ， $\psi_{i,m} = \zeta_{i,m} / F^{m-1+h}$ ， $m=1, \dots, N$ 。令 $\eta_i = (\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,n})^T$ 和 $\zeta_i = (\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,n})^T$ ，那么式(4-6)可重写为

$$\begin{aligned} d\eta_i &= \left(F(\mathcal{A} + k_g \mathcal{B}_2^T + \mathcal{B}_1 \kappa^T) \eta_i + F^{1-h} \bar{k}_g e_{i,1} - \frac{dF/dt}{F} \tilde{\Pi} \eta_i \right) dt \\ d\zeta_i &= \left(F \mathcal{A} \zeta_i + \varphi_i - F k_g \mathcal{B}_2^T \eta_i - F^{1-h} \bar{k}_g e_{i,1} - \frac{dF/dt}{F} \tilde{\Pi} \zeta_i \right) dt + \psi_i^T d\omega \end{aligned}$$

其中 $\varphi_i = (\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,n})^T$, $\psi_i = (\psi_{i,1}, \dots, \psi_{i,n})^T$, $\tilde{\Pi} = \text{diag}\{h, 1+h, \dots, n-1+h\}$ 和矩阵 \mathcal{A} 向量 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, k_g, \bar{k}_g, \kappa$ 如引理 4-1 所示。

定义 $\delta_i = (\eta_i^T, \zeta_i^T)^T$, 我们可得

$$d\delta_i = \left(F \tilde{M} \delta_i + \tilde{\varphi}_i + F^{1-h} \bar{k}_g e_{i,1} - \frac{dF/dt}{F} \Pi \delta_i \right) dt + \tilde{\psi}_i^T d\omega$$

其中 $\tilde{\varphi}_i = (\mathbf{0}_{n \times 1}^T, \varphi_i^T)^T$, $\tilde{\psi}_i = (\mathbf{0}_{\rho \times n}, \psi_i)^T$, $\Pi = \text{diag}\{\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}\}$ 和 \bar{k}, \tilde{M} 如引理 4-1 所示。利用式(4-4)和(4-5), 我们可得 $F^{-h} \tilde{x}_{i,1} = \eta_{i,1} + \zeta_{i,1}$ 。结合 $y_{i,1} = x_{i,1}$ 可得

$$F^{-h} e_{i,1} = F^{-h} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\tilde{x}_{j,1} - \tilde{x}_{i,1}) - b_i \tilde{x}_{i,1} \right) = \mathcal{B}_3^T \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\delta_j - \delta_i) - b_i \delta_i \right)$$

其中 \mathcal{B}_3 的定义如引理 4-1 所示。因此, δ_i 系统的全局形式可写为

$$d\delta = \left(F M \delta - \frac{dF/dt}{F} (I_N \otimes \Pi) \delta + \tilde{\varphi} \right) dt + \tilde{\psi}^T d\omega \quad (4-7)$$

其中 $\delta = (\delta_1^T, \dots, \delta_N^T)^T$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1^T, \dots, \tilde{\varphi}_N^T)^T$, $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_N)^T$ 和矩阵 $M = (I_N \otimes \tilde{M}) - ((L + B) \otimes (\bar{k} \mathcal{B}_3^T))$ 。

基于上述的讨论, 我们构造 Lyapunov 函数为

$$V = \delta^T P \delta = \sum_{i=1}^N \delta_i^T P_i \delta_i$$

其中 $P = \text{diag}\{P_1, \dots, P_N\}$ 的定义在引理 4-1 中给出。利用 $\Pi = \Xi + h I_{2n}$, Ξ 如引理 4-1 所示, 那么取函数 V 的微分算子可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= 2F \delta^T P M \delta + \sum_{i=1}^N 2\delta_i^T P_i \tilde{\varphi}_i + \sum_{i=1}^N \text{Tr}\{\tilde{\psi}_i P_i \tilde{\psi}_i^T\} - \sum_{i=1}^N 2 \frac{dF/dt}{F} \delta_i^T P_i \Xi \delta_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^N 2h \frac{dF/dt}{F} \delta_i^T P_i \delta_i \end{aligned} \quad (4-8)$$

在下面, 我们将给出式(4-8)右边每一项的估计。通过利用引理 4-1, 我们可得

$$2F \delta^T P M \delta \leq - \sum_{i=1}^N \beta F \delta_i^T P_i \delta_i \quad (4-9)$$

利用假设 4-2、式(4-5)、 $F > 1$ 以及 $\delta_i = (\eta_i^T, \zeta_i^T)^T$ 和 $\delta_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,2n})^T$, 我们有

$$\phi_{i,m}/F^{m-1+h} = (f_m(\bar{x}_{i,m}, t) - f_m(\bar{x}_{0,m}, t))/F^{m-1+h} \leq \alpha_1(t) \sum_{l=1}^m |\delta_{i,l} + \delta_{i,n+l}|$$

由于 $\tilde{\varphi}_i = (\mathbf{0}_{n \times 1}^T, \boldsymbol{\varphi}_i^T)^T$ ，其中 $\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,n})^T$ 和 $\varphi_{i,m} = \phi_{i,m}/F^{m-1+h}$ ，通过计算可得

$$2\boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i \leq 2\alpha_1(t) \sum_{j=n+1}^{2n} |\boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_{i,j}| \left| \sum_{l=1}^{j-n} \delta_{i,l} + \delta_{i,n+l} \right| \leq 4n\alpha_1(t) \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \quad (4-10)$$

其 $\mathbf{P}_{i,j}$ 表示矩阵 \mathbf{P}_i 的第 j 列。类似的，根据假设 4-2 和 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_i = (\mathbf{0}_{\rho \times n}, \boldsymbol{\psi}_i)^T$ ，其中 $\boldsymbol{\psi}_i = (\psi_{i,1}, \dots, \psi_{i,n})^T$ 以及 $\psi_{i,m} = \varsigma_{i,m}/F^{m-1+h}$ ，我们可得

$$\text{Tr}\{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i \mathbf{P}_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T\} \leq 4\bar{\lambda} n^2 \alpha_2^2(t) \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \quad (4-11)$$

其中 $\bar{\lambda} = \max \{\|\mathbf{P}_i\|/\tilde{\lambda}_{i,1}, i = 1, \dots, N\}$ 。进一步的，利用引理 4-1 可得

$$-\sum_{i=1}^N 2 \frac{dF/dt}{F} \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \leq \sum_{i=1}^N h \frac{|dF/dt|}{F} \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \quad (4-12)$$

最后，将式(4-9)-(4-12)代入式(4-8)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{LV} &\leq -\sum_{i=1}^N \left(\beta F + h \left(2 \frac{dF/dt}{F} - \frac{|dF/dt|}{F} \right) - 4n\alpha_1(t) - 4\bar{\lambda} n^2 \alpha_2^2(t) \right) \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \\ &\leq -\sum_{i=1}^N \chi_i \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \end{aligned} \quad (4-13)$$

其中

$$\chi_i = \beta F + h \left(2 \frac{dF/dt}{F} - \frac{|dF/dt|}{F} \right) - 4n\alpha_1(t) - 4\bar{\lambda} n^2 \alpha_2^2(t)$$

那么，根据式(4-3)，如果 $dF/dt \geq 0$ ($F > 1$)，我们有 $\chi_i = \frac{\beta}{3}(2F+1) + \gamma \geq \beta + \gamma$ 。

如果 $dF/dt \leq 0$ ($F > 1$)，我们有 $\chi_i = \beta + 8n\alpha_1(t) + 8\bar{\lambda} n^2 \alpha_2^2(t) + 3\gamma \geq \beta + \gamma$ 。

将此与不等式(4-13)结合可得

$$\mathcal{LV} \leq -\sum_{i=1}^N (\beta + \gamma) \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i \leq -\sum_{i=1}^N (\beta + \gamma) V \quad (4-14)$$

因此，利用文献[122]中的引理 1 和文献[125]中的引理 1，我们可得系统(4-7)存在唯一解并且系统(4-7)依概率满足指数稳定。进一步的，根据文献[126]中的定理 4-1 和式(4-14)可得以下不等式

$$\frac{dE[V(t)]}{dt} \leq -(\beta + \gamma) E[V(t)]$$

进一步可得

$$E[V(t)] \leq e^{-(\beta+\gamma)t} [V(0)]$$

即

$$E\left[\sum_{i=1}^N \delta_i^T(t) P_i \delta_i(t)\right] \leq \left[\sum_{i=1}^N \delta_i^T(0) P_i \delta_i(0)\right] e^{-(\beta+\gamma)t}$$

这结合引理 4-1 中的不等式 $\tilde{\lambda}_{i,1} \mathbf{I}_{2n} \leq P_i \leq \tilde{\lambda}_{i,2} \mathbf{I}_{2n}$ 和式(4-5)可得

$$E|z_{i,m}(t)| \leq c_\delta F^{m-1+h} e^{\frac{(\beta+\gamma)t}{2}}$$

其中 $c_\delta = \sqrt{\left(\tilde{\lambda}_{i,1}/\tilde{\lambda}_{i,2}\right) \sum_{i=1}^N \delta_i^T(0) \delta_i(0)}$ 。根据式(4-3)，我们可知动态参数 F 以函数 $\tilde{\alpha}(t) = (12n\alpha_1(t) + 12\bar{\lambda}n^2\alpha_2^2(t) + 3\gamma + \beta)/\beta$ 为上界(4-3)。那么基于假设 4-2，我们可得

$$E|z_{i,m}(t)| \leq c_\delta (\tilde{\alpha}(t))^{m-1+h} e^{\frac{(\beta+\gamma)t}{2}} \leq c_\delta \theta^{m-1+h} e^{\frac{\beta t}{2}} \quad (4-15)$$

其中 $m=1, \dots, n$ 以及 $\theta = (12\bar{\lambda}n^2\tilde{c}_1^2 + 12nc_1 + 3\gamma + \beta)/\beta$ 。类似的，我们可得

$$E|r_{i,m}(t)| \leq c_\delta \theta^{m-1+h} e^{\frac{\beta t}{2}}$$

由于 $\tilde{x}_{i,m}(t) = z_{i,m}(t) + r_{i,m}(t)$ ，我们可得

$$E|x_{i,m}(t) - x_{0,m}(t)| \leq E|z_{i,m}(t)| + E|r_{i,m}(t)| \leq 2c_\delta \theta^{m-1+h} e^{\frac{\beta t}{2}}$$

因此，根据定义 4-1 可得所有考虑的随机多智能体系统(4-1)能够达到 1th 指数收敛领导跟随一致性。至此，我们完成了定理 4-1 的证明。

注 4-6: 类似于不等式(4-15)的证明，由于 $\gamma = 2c(n+h)$ 和 $c = \max\{c_2, 2\tilde{c}_2\}$ ，我们可得

$$E|F^{n-m+1}z_{i,m}(t)| \leq c_\delta (\tilde{\alpha}(t))^{n+h} e^{\frac{(\beta+\gamma)t}{2}} \leq c_\delta \theta^{n+h} e^{\frac{\beta t}{2}}$$

它表明控制器(4-2)中的项 $F^{n-m+1}z_{i,m}(t)$ 将达到 1th 指数收敛。因此，控制器(4-2)中的项 $F(t)$ 和不会因此内部不稳定性。

注 4-7: 在设计控制器(4-2)中， u_0 作为领导者的输入只与时间 t 有关。因此，可将它视为不需要通信传输的对于跟随者已知的局部信息。那么 u_0 将不会影响所设计控制器(4-2)的分布式性，并且假设所有跟随者都能获得 u_0 是合理的。目前，已有

许多结果是在这个假设条件下获得的。文献[72]和[73]假设所有跟随跟随者都能获得领导者的输入信息。文献[53]和[68]假设领导者的输入信息为零，即 $u_0 = 0$ 。

注 4-8: 对于设计的控制器(4-2)，由于网络中的智能体个数是已知的，那么我们可以获得能包含所有的通信拓扑情形但是又不依赖于系统全局通信拓扑的一组 g_m, κ_m, h 和 β 的解。举个例子，如果 $N = 3$ (一个领导者，两个跟随者)，在假设 4-1 条件下，所有情形的拓扑矩阵及其相应的特征值可分别表示为 $(L + B)_s$ 和 $\lambda_{s,i}$ ，其中 $s = 1, 2, 3, 4, i = 1, 2$ 。基于注 4-5 的计算过程，我们可获得一组解 g_m, \bar{g}_m, κ_m 使得矩阵 $(\tilde{M} - \lambda_{s,i} \bar{k} \mathcal{B}_3^T)$ 为 Hurwitz。接着，基于已知的 g_m, \bar{g}_m, κ_m ，我们可通过求解引理 4-1 中的不等式获得参数 h 和 β 。至此，我们得到了一组可包含 $N = 3$ 所有情形下的 g_m, κ_m, h 和 β 的解。因此，控制器参数的计算可以不依赖于系统的全局通信拓扑，从而使得所设计的控制器是分布式的。

注 4-9: 在自适应律(4-3)中，参数 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 是分别基于系统结构函数 $f_m(\bar{x}_{i,m}, t)$ 和 $h_m(\bar{x}_{i,m}, t)$ 获得的。因此，当系统的类型已知时， $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 就为已知，且其的获得不需要系统的通信和传输。因此， $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 可视为多智能体系统的局部信息。所以，设计的控制器(4-2)带有适应律(4-3)满足分布式。

注 4-10: 控制器(4-2)中，时变参数 $F(t)$ 的提出是为了处理系统(4-1)中的非线性项和随机项，从而提高系统的一致性性能。通过合适的选择自适应律 $v(F, t)$ ，函数 V 关于系统(4-1)的微分算子为负。基于此我们可得所有考虑的随机多智能体系统(4-1)能够达到 1th 指数收敛领导跟随一致性。值得注意的是，自适应律 $v(F, t)$ 依赖于非线性项的增长率而不是非线性项本身。此外， $F(t)$ 的增长率小于 $\delta_{i,m}(t)$ 的减小律，从而使得多智能体系统(4-1)能够达到 1th 指数收敛领导跟随一致性。

注 4-11: 文献[72]针对时变非线性多智能体系统提出了一个新颖的基于观测器的分布式控制协议。在本章中，我们考虑的带有随机非线性的多智能体系统更具一般性，并且可以包含文献[72]考虑的系统。此外，文献[72]提出的基于观测器的输出反馈一致性协议需要的信息传输量本质上与状态反馈情形相同。然而，本章提出的动态输出反馈控制方法仅需要系统的输出信息(而不是全部的观测信息)进行传输，从而能够节约通信消耗。

注 4-12: 文献[127]研究了一般高阶线性系统的包含控制问题，并提出了动态输出反馈控制方法。然而，文献文献[127]所提的控制方法不能直接应用于高阶随机非线性系统。因此，我们提出了一个新颖的带有自适应调节参数的动态输出控制方法，

以处理智能体间随机非线性项间的复杂耦合。最终使得所有考虑的随机多智能体系统(4-1)能够达到 1th 指数收敛领导跟随一致性。

4.4 仿真结果及分析

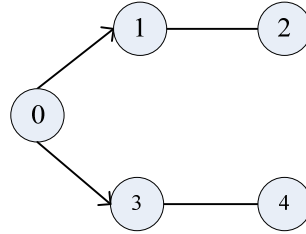


图 4-1 通信拓扑图

Fig 4-1 Topology of augmented graph $\bar{\mathcal{G}}$

在这一小节，我们将给出一个实际例子来证明本章所提结论的有效性。为了从实际出发更好的验证本章所提结论的有效性，我们考虑了由五个带有随机干扰的倒立摆系统组成的多智能体系统，其中节点 1,2,3,4 表示跟随智能体，节点 0 表示领导智能体。智能体系统间的通信关系如拓扑图 4-1 所示。那么，第 i 个智能体的系统模型可由非线性项表达如下的式(4-1)来描述

$$\begin{aligned} f_1(x_{i,1}, t) &= 0, \quad f_2(x_i, t) = -\sin(x_{i,1})/l(t) - q(t)x_{i,2} \\ h_1(x_{i,1}, t) &= 0.01tx_{i,1}, \quad h_2(x_i, t) = 0.1e^{0.1t}x_{i,1} + 0.01tx_{i,1} \end{aligned}$$

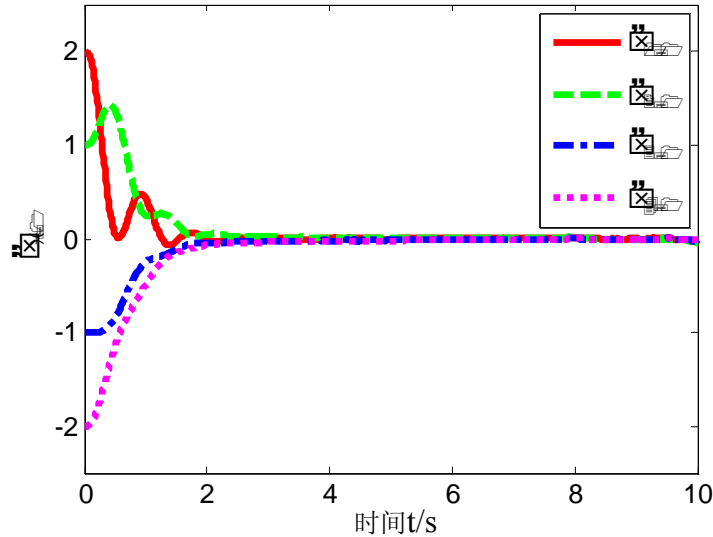
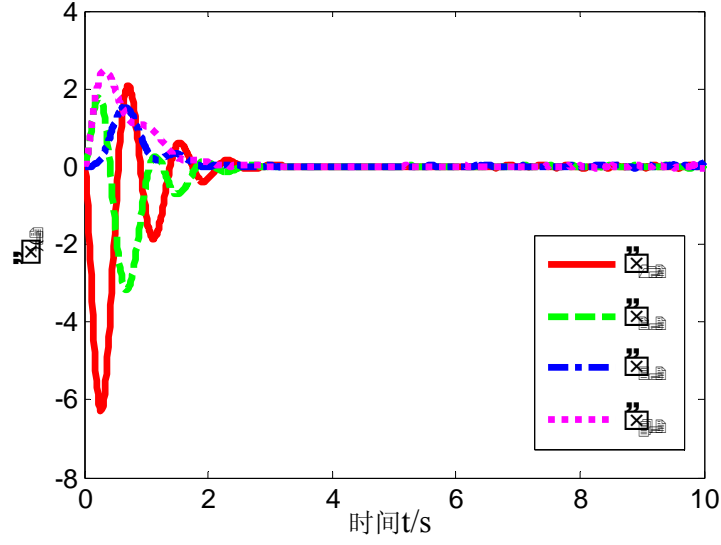
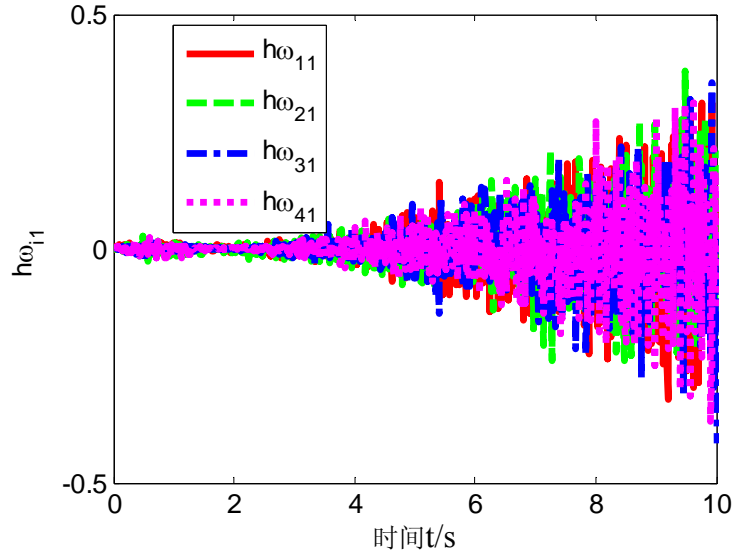


图 4-2 领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,1}$

Fig 4-2 Leader-following consensus errors $\tilde{x}_{i,1}$

图 4-3 领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,2}$ Fig 4-3 Leader-following consensus errors $\tilde{x}_{i,2}$ 图 4-4 智能体系统的随机噪声 $h\omega_{i,1}$ Fig 4-4 Comprehensive stochastic noises $h\omega_{i,1}$ imposed on agents

值得注意的是在本仿真中， ω 表示期望为 0 方差为 2 的高斯白噪声。此外，对于倒立摆系统，它的长度 $l(t)$ 是一个未知的时变参数并且满足不等式 $l(t) \geq 5, t \geq 0$ ，而且它主要的空气阻力取决于 $q(t) := t$ [72]。明显的，非线性函数 $f_m(\cdot)$ 和 $h_m(\cdot)$ 满足假设 4-2，且其中的时变参数为 $\alpha_1(t) = t + 0.2$ 和 $\alpha_2(t) = 0.1(e^{0.1t} + 0.1t)$ 。因此，根据定理 4-1 的证明过程可将第 i 个智能体的控制器可构造为

$$\begin{aligned}
 dz_{i,1} &= (z_{i,2} - 2Fz_{i,1} - 2Fe_{i,1})dt \\
 dz_{i,2} &= (-F^2z_{i,1} - 3Fz_{i,2} - F^2z_{i,1} - F^2e_{i,1})dt \\
 dF &= v(F, t)dt, \quad u_i = -F^2z_{i,1} - 3Fz_{i,2} + u_0, \quad u_0 = \sin(0.1t) \\
 v(F, t) &= -(1/200)F((0.01/3)(F-1) - 404 - 8\alpha_1(t) - 48\alpha_2^2(t))
 \end{aligned}$$

选取系统的初始值为 $x_{0,1} = 0$, $x_{1,1} = 1$, $x_{2,1} = 2$, $x_{3,1} = -1$, $x_{4,1} = -2$ 以及

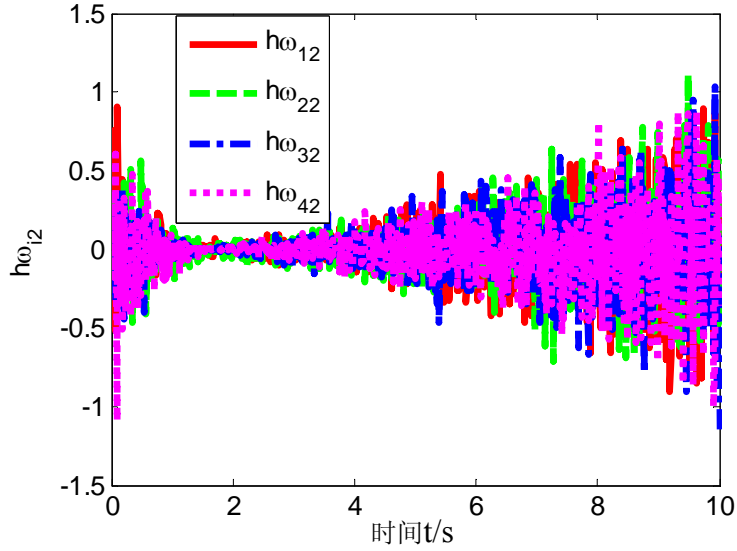


图 4-5 智能体系统的随机噪声 $h\omega_{i,2}$

Fig 4-5 Comprehensive stochastic noises $h\omega_{i,2}$ imposed on agents

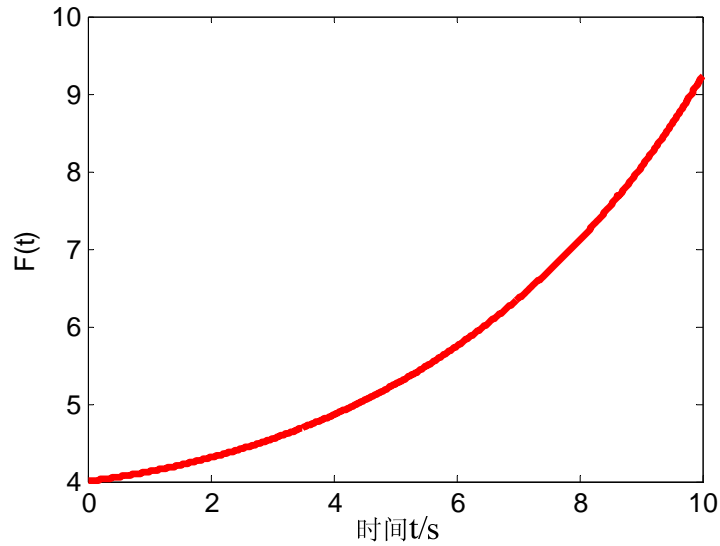


图 4-6 时变参数 $F(t)$

Fig 4-6 Time varying parameter $F(t)$

$x_{i,2} = z_{i,1} = z_{i,2} = 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。系统的 1th 指数收敛领导跟随一致性结果如图 4-2 和图 4-3 所示，其验证了本章所设计分布式控制器的有效性。此外，令 $h\omega_{i,1} = h_1(x_{i,1}, t)(d\omega/dt)$ 和 $h\omega_{i,2} = h_2(x_i, t)(d\omega/dt)$ 。那么，图 4-4 和图 4-5 给出了施加于多智能体系统上的随机干扰 $h\omega_{i,1}$ 和 $h\omega_{i,2}$ 的仿真曲线。进一步的，图 4-6 给出了初始值 $F(0) = 4$ 情形下的时变参数 $F(t)$ 的仿真曲线。

4.5 本章小结

本章针对具有下三角结构的时变随机非线性多智能体系统，即每个智能体的非线性满足 Lipschitz 参数为时变的 Lipschitz 条件，研究了其领导跟随一致性控制问题。通过引入动态输出控制方法和自适应参数，提出了一个新颖的分布式控制器。所提的控制器只需要邻居智能体的输出信息进行网络传输，因此能减少系统的通信负担，并且其构造方法不基于以往下三角结构系统控制中经常用到的反步控制方法，因而减少了控制器的计算复杂度，更适用于实际应用。最后基于合适的状态变换，证明了网络中所有的智能体系统能达到 1th 领导跟随一致性，并通过数值仿真验证了所提结果的有效性。

第5章 具有下三角结构的高阶非线性 MAS 的事件触发一致性控制

5.1 引言

由于多智能体系统相对于单个系统的潜在合作优势,其一致性控制问题越来越受到人们的关注。相较于单个系统,多智能体系统最大的特色在于它包含通信网络来用于数据的传递和共享,然后利用获得的信息设计控制器最终使系统最终达到一致性目的。然而在实际中,一些网络资源如通信带宽、通信能力往往为有限的^[128]。此外,随着硬件技术的迅速发展,在实际应用中,每个智能体系统都会装备一个小型的嵌入式数字微处理器来负责智能体间的通讯和控制器的状态更新。然而,这个微处理器往往具有有限的能量、计算能力、通信能力以及执行能力^[129],如果某个智能体的能量消耗殆尽,那么它将失去自主功能,甚至会导致整个系统的崩溃。这些都使得一致性控制器需要通过数字平台来实现,并且只在离散的时刻更新。因此,在多智能体系统控制中,考虑如何尽可能地减少能量消耗,减少通讯量和控制器更新频率问题无论从理论上还是实际应用上都至关重要。

为了解决这个问题,事件触发控制被引入到了多智能体系统的一致性控制中。在基于事件触发的控制策略中,控制信号的更新只在某个重要事件发生时进行,比如当某个被测信号超出某个确定的阈值或者限制时。因此,事件触发控制能够有效的减少系统控制器更新频率,而且可以有效地实现控制性能和通讯能耗间的权衡转换^[130]。目前,已经有很多文献考虑了各种多智能体系统,如一阶积分器系统^[131-132]、二阶积分器系统^[133-134]、一般线性系统^[135-136]以及非线性系统^[137-138]的时间触发一致性问题。尽管上述文献中提出的事件触发机制相对于时间触发机制减少了控制器的更新次数,但是它仍然需要智能体间连续传输状态信息。为了进一步的减少通信负担,一种新的自触发控制策略被提出^[139-141]。在自触发控制策略中,每个智能体的下一个触发时刻取决于其接收到的邻接智能体在出发时刻的状态信息。因此,信息的测量和传输只需要在出发时刻进行,从而避免了信息的连续传输,减少了网络通信负担。

值得注意的是,在这些文献中,大多数的事件触发控制器是在一个较强的假设条件下获得的,即假设系统的所有状态信息都可测量。由于在实际系统中,系统的

所有状态并不容易获得，因此研究基于输出信息的一致性控制比基于状态的一致性控制更具有实用性。文献[142]基于状态观测器，研究了一般线性多智能体系统的事件触发一致性控制问题。然而，在文献[142]中，所有观测器的信息都需要在网络中进行传输。因此其相对于状态控制方法并没有减少通信网络的信息传输量。为了节约高阶多智能体系统的通信消耗，文献[127]和[143]提出了一种只需要系统的输出信息而不是观测器的全状态信息进行传输的动态输出控制方法。然而，在文献[127]和[143]中，考虑的多智能体系统模型为线性，并且系统的控制器需要连续触发。因此，为了最大限度的减少计算和通信消耗，通过将事件触发控制和动态输出控制相结合来研究高阶多智能体系统的一致性控制是非常有意义的。

因此，在本章中我们基于事件触发控制和动态输出控制，研究了具有下三角结构的非线性多智能体系统的一致性控制问题。相对于现有的文献，本章工作的创新点主要包括一下三个方面：1) 本章考虑的智能体系统相较于现有的关于事件触发控制的文献中的一阶积分器型系统、二阶积分器型系统、一般线性系统更具一般性。2) 提出了一个新颖的基于邻居智能体输出信息的分布式事件触发控制器，其能够减少系统的能量消耗和通信消耗。3) 提出了对应与所设计触发控制器的事件触发策略，它能避免智能体间信息的连续传输，从而进一步的减少了系统的通信消耗。

5.2 问题描述

5.2.1 预备知识

基于 1.4 中给出的多智能体系统的通信拓扑知识，在本章中，我们假设系统的通信拓扑满足以下假设

假设 5-1: 图 \mathcal{G} 为固定的无向的，且其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

此外，我们将给出一个有用的引理，其对本章的理论分析具有重要作用。

引理 5-1: 令 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为定义如下的向量和矩阵

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

那么存在向量 $\mathbf{k}_g = (g_1, \dots, g_n)^T$, $\bar{\mathbf{k}}_g = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)^T$ 使得

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{M}}) - ((\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes (\bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T))$$

为 Hurwitz 矩阵, 其中 \mathbf{I}_N 为 N 维单位矩阵, \mathbf{L} 和 \mathbf{B} 为拓扑矩阵, 以及

$$\mathbf{B}_3 = (\mathbf{B}_2^T, \mathbf{B}_2^T)^T, \quad \bar{\mathbf{k}} = (\bar{\mathbf{k}}_g^T, -\bar{\mathbf{k}}_g^T)^T, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\kappa}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T & \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

证明: 定义 $\hat{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T$ 我们可得

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\kappa}^T - \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T & -\bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{k}_g \mathbf{B}_2^T + \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T & \mathcal{A} + \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix}$$

根据文献[73]中的引理 2 和引理 3 可得, 存在列向量 $\bar{\mathbf{k}}_g$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 使得矩阵

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\kappa}^T & -\bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathcal{A} + \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix}$$

为 Hurwitz。那么, 选择 $\bar{\mathbf{k}}_g = \mathbf{k}_g$ 我们可得 $\hat{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}$ 也为 Hurwitz 矩阵。基于假设 5-1, 我们知道 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 是一个正定矩阵^[73], 并且其特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, N$ 。因此, 基于文献[11]中引理 3 的证明过程可得, 通过适当的选择 $\bar{\mathbf{k}}$, $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T), i = 1, \dots, N$ 为 Hurwitz 矩阵。进一步的可得 \mathbf{M} 为 Hurwitz 矩阵^[73]。

5.2.2 具有下三角结构的高阶非线性 MAS 模型简介

在本章中, 我们将考虑由 $N+1$ 个具有 n 阶非线性动态特性的智能体组成的多智能体系统。考虑第 i 个智能体的系统动力学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,m}(t) &= x_{i,m+1}(t) + f_m(\bar{\mathbf{x}}_{i,m}, t), \quad m=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i,n}(t) &= u_i(t) + f_n(\bar{\mathbf{x}}_{i,n}, u_i, t) \\ y_i &= x_{i,1}(t) \end{aligned} \tag{5-1}$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}_{i,m} = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})^T \in \mathfrak{R}^m$, $u_i \in \mathfrak{R}$ 和 $y_i \in \mathfrak{R}$ 分别代表系统的状态, 输入和输出。我们用节点 0 来表示虚拟领导者, 用节点 $1, \dots, N$ 来表示跟随者。值得注意的是 $u_0 = 0$ 。对于 $m = 1, \dots, n$, $f_m(\cdot)$ 为非线性函数并且满足以下假设

假设 5-2: 对于 $(\bar{\mathbf{x}}_{i,m}, t), (\bar{\mathbf{x}}_{0,m}, t) \in \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^+$, $i = 1, \dots, N$ 和 $m = 1, \dots, n$, 存在一个常数 α 使得

$$\left| f_m(\bar{x}_{i,m}, t) - f_m(\bar{x}_{0,m}, t) \right| \leq \alpha \|\bar{x}_{i,m}(t) - \bar{x}_{0,m}(t)\|$$

5.3 基于输出反馈的事件触发一致性控制器设计及其有效性证明

在本章中，通过动态输出反馈控制方法和事件触发控制方法相结合，我们提出了一类新颖的分布式自触发一致性控制器使得所有跟随智能体的状态能够与领导者相应的状态达到一致。值得注意的是，在自触发控制框架中，所提出的控制器只在离散的触发时刻才进行更新，并且避免了对于邻居智能体状态信息的连续测量。因此，我们假设第 i 个智能体系统的触发时间序列为 $\{t_k^i\}, k = 0, 1, \dots$ 。此外，定义第 i 个智能体系统的实时局部输出一致性误差为

$$e_{i,1}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (y_j(t) - y_i(t)) + b_i (y_0(t) - y_i(t))$$

那么，在 t_k^i 时刻，智能体 i 对 $e_{i,1}(t)$ 进行测量并获得测量值 $e_{i,1}(t_k^i)$ ，它将在 t_{k+1}^i 时刻来临前保持不变。因此，智能体 i 在时间间隔 $[t_k^i, t_{k+1}^i)$ 内获得的测量值为 $e_{i,1}(t_k^i)$ ，并且测量误差可获得为 $s_{i,1}(t_k^i) = e_{i,1}(t_k^i) - e_{i,1}(t)$ 。基于此，我们设计智能体 i 的分布式动态输出控制器为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,m}(t) &= z_{i,m+1}(t) + g_m F^m z_{i,1}(t) + \bar{g}_m F^m e_{i,1}(t_k^i) \\ \dot{z}_{i,n}(t) &= \sum_{m=1}^n \kappa_m F^{n-m+1} z_{i,m}(t) + g_n F^n z_{i,1}(t) + \bar{g}_n F^n e_{i,1}(t_k^i) \\ u_i(t) &= \sum_{m=1}^n \kappa_m F^{n-m+1} z_{i,m}(t_k^i) \end{aligned} \quad (5-2)$$

其中 $z_{i,m}(t) \in \mathfrak{R}$ 和为所设计的 z_i 系统的状态， $z_{i,m}(t_k^i)$ 为 $z_{i,m}(t)$ 在时间间隔 $[t_k^i, t_{k+1}^i)$ 内的测量值。 g_m, \bar{g}_m, κ_m 为由引理 5-1 提供的正系数。 $F \geq 1$ 是一个常数，并且其具体数值将在下面给出。此外，对于式(5-2)中的 z_i 系统， $z_{i,m}(t)$ 的测量误差为 $s_{i,m}(t) = z_{i,m}(t_k^i) - z_{i,m}(t)$ 那么，我们可得到如下结论

定理 5-1: 考虑由式(5-1)描述的多智能体系统，并且其满足假设条件 4-1 和 4-2。如果存在正常数 $\mu_1, \mu_2, \beta, F \geq 1$ 以及正定矩阵 \mathbf{P} 使得以下的矩阵不等式成立

$$\begin{pmatrix} -(\mu_1 \mathbf{I}_{2nN} + \mu_2 \mathbf{R})^{-1} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{M}_F \end{pmatrix} < 0 \quad (5-3)$$

其中 $\mathbf{M}_F = F(\mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M}) + \left(\frac{4n^2 \alpha^2}{\mu_1} + \beta \right) \mathbf{I}_{2nN}$ ， $\mathbf{R} = (\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}})(\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}})^T$ ，

其中矩阵 \mathbf{M} 如引理 5-1 所示, $\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{K}^T & -\bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix}$, 并且定义智能体 i 的下一个

触发时刻为

$$t_{k+1}^i = t_k^i + \max \left\{ \tau_k^i = \frac{\gamma}{(1+\gamma)\theta} \|\mathbf{X}_i(t_k^i)\|, c_i \right\} \quad (5-4)$$

其中 $\mathbf{X}_i(t_k^i) = (z_{i,1}(t_k^i), \dots, z_{i,n}(t_k^i), e_{i,1}(t_k^i))$ 以及常数

$$\begin{aligned} 0 < \gamma < \iota \sqrt{\hat{\gamma}_1 \beta \mu_2} / (F \|\Lambda_I\|) \\ \theta &\geq (F \|\mathbf{M}\| + 2n\alpha + F\gamma \|\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}}\| \|\Lambda_I\|) \|\Lambda_{\Xi}\| \sqrt{p_2 V(0)} \\ 0 < c_i &< \iota \sqrt{\hat{\gamma}_2 \beta \mu_2} / \left(\chi (F \sqrt{N} \|\Lambda_I\| + \iota \sqrt{\hat{\gamma}_2 \beta \mu_2}) \right) \\ \chi &= \max \left\{ \|\Lambda_{\Xi}\| \|\Lambda_I^{-1}\| \|\mathbf{I}_{2N} \otimes \Lambda_F\| (F \|\mathbf{M}\| + 2n\alpha), F \|\Lambda_{\Xi}\| \|\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}}\| \|\mathbf{I}_{2N} \otimes \Lambda_H\| \right\} \end{aligned}$$

ι 和 $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ 为分别满足 $0 < \iota < 1$ 和 $\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 = 1$ 的正实数, $p_2 = 1/\sigma(\mathbf{P})$, $V(0)$ 为之后能获得的常数以及矩阵

$$\begin{aligned} \Lambda_I &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{nN} & \mathbf{0}_{nN} \\ \Xi & \Xi \end{pmatrix} & \Lambda_{\Xi} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \Lambda_F^{-1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{F^n} \Xi & \frac{1}{F^n} \Xi \end{pmatrix} \\ \Lambda_H &= \text{diag} \{ \Lambda_F, F^n \} \end{aligned}$$

其中 $\Lambda_F = \text{diag} \{ F^n, F^{n-1}, \dots, F \}$, $\Xi = -(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T)$, 那么所设计的分布式控制器(5-2)在触发条件(5-4)情形下能解决所考虑多智能体系统的指数一致性问题。此外, 每个智能体的相邻触发时刻间的触发间隔为严格正的, 即智能体不会表现出奇诺行为。

证明: 在下面, 对于定理 5-1 的证明将分为两个部分。第一部分给出了所设计控制器的有效性分析, 第二部分给出了所设计触发条件的有效性分析。

第一部分: 对于 $m = 1, \dots, n$, 定义第 i 个智能体的一致性误差为 $\tilde{x}_{i,m}(t) = x_{i,m}(t) - x_{0,m}(t)$, 并且令 $r_{i,m}(t) = \tilde{x}_{i,m}(t) - z_{i,m}(t)$ 。那么, 由式(5-1)和(5-2)可得对于 $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{i,m}(t) &= r_{i,m+1}(t) + \phi_{i,m} - g_m F^m z_{i,1}(t) - \bar{g}_m F^m e_{i,1}(t_k^i) \\ \dot{r}_{i,n}(t) &= \sum_{m=1}^n \kappa_m \nu_{i,m}(t) + \phi_{i,n} - g_n F^n z_{i,1}(t) - \bar{g}_n F^n e_{i,1}(t_k^i) \end{aligned} \quad (5-5)$$

其中 $\phi_{i,m} = f_m(\bar{\mathbf{x}}_{i,m}, t) - f_m(\bar{\mathbf{x}}_{0,m}, t)$ 和 $\nu_{i,m}(t) = F^{n-m+1} g_{i,m}(t)$ 。那么, 在状态变换

$$\eta_{i,m}(t) = F^{n-m+1} z_{i,m}(t), \quad \zeta_{i,m}(t) = F^{n-m+1} r_{i,m}(t) \quad (5-6)$$

下式(5-2)中的 z_i 系统和式(5-5)可重写为

$$\begin{aligned} \eta_{i,m}(t) &= F\eta_{i,m+1}(t) + g_m F\eta_{i,1}(t) + \bar{g}_m F^{n+1} e_{i,1}(t_k^i) \\ \eta_{i,n}(t) &= F \sum_{m=1}^n \kappa_m \eta_{i,m}(t) + g_n F\eta_{i,1} + \bar{g}_n F^{n+1} e_{i,1}(t_k^i) \\ \zeta_{i,m}(t) &= F\zeta_{i,m+1}(t) + \varphi_{i,m} - g_m F\eta_{i,1}(t) - \bar{g}_m F^{n+1} e_{i,1}(t_k^i) \\ \zeta_{i,n}(t) &= F \sum_{m=1}^n \kappa_m \nu_{i,m}(t) + \varphi_{i,n} - g_n F\eta_{i,1}(t) - \bar{g}_n F^{n+1} e_{i,1}(t_k^i) \end{aligned} \quad (5-7)$$

其中 $\varphi_{i,m} = F^{n-m+1} \phi_{i,m}$ 。令向量 $\eta_i(t) = (\eta_{i,1}(t), \dots, \eta_{i,n}(t))^T$ 以及 $\zeta_i(t) = (\zeta_{i,1}(t), \dots, \zeta_{i,n}(t))^T$ ，那么式(5-7)可重写为

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i(t) &= F(\mathcal{A} + k_g \mathcal{B}_2^T + \mathcal{B}_1 \kappa^T) \eta_i(t) + F^{n+1} \bar{k}_g e_{i,1}(t) + F \bar{k}_g \mathcal{B}_2^T \zeta_i(t) \\ \dot{\zeta}_i(t) &= F \mathcal{A} \zeta_i(t) + \varphi_i - F k_g \mathcal{B}_2^T \eta_i(t) + F \mathcal{B}_1 \kappa^T \nu_i(t) - F^{n+1} \bar{k}_g e_{i,1}(t) - F \bar{k}_g \mathcal{B}_2^T \zeta_i(t) \end{aligned}$$

其中向量 $\varsigma_i(t) = (\varsigma_{i,1}(t), 0, \dots, 0)^T = (F^n s_{i,1}(t), 0, \dots, 0)^T \in \mathfrak{R}^n$ ， $\nu_i(t) = (\nu_{i,1}(t), \dots, \nu_{i,n}(t))^T$ ， $\varphi_i = (\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,n})^T$ 和矩阵 \mathcal{A} 向量 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, k_g, \bar{k}_g, \kappa$ 如引理 5-1 所示。

定义 $\delta_i(t) = (\eta_i^T(t), \zeta_i^T(t))^T$ ， $\tilde{\delta}_i(t) = (\nu_i^T(t), \varsigma_i^T(t))^T$ 和 $\tilde{\varphi}_i = (0, \varphi_i^T)^T$ ，

我们可得

$$\dot{\delta}_i(t) = F \tilde{M} \delta_i(t) + \tilde{\varphi}_i + F^{n+1} \bar{k}_g e_{i,1}(t) + F \tilde{R} \tilde{\delta}_i(t) \quad (5-8)$$

其中 \tilde{M} ， \bar{k} 和 \tilde{R} 如引理 5-1 和定理 5-1 所示。利用式(5-5)和(5-6)，我们可得

$F^n \tilde{x}_{i,1} = F^n z_{i,1} + F^n r_{i,1} = \eta_{i,1} + \zeta_{i,1}$ 。结合 $y_{i,1} = x_{i,1}$ 可得

$$\begin{aligned} F^n e_{i,1}(t) &= F^n \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\tilde{x}_{j,1}(t) - \tilde{x}_{i,1}(t)) - b_i \tilde{x}_{i,1}(t) \right) \\ &= \mathcal{B}_3^T \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) - b_i \delta_i(t) \right) \end{aligned}$$

其中 \mathcal{B}_3 的定义如引理 5-1 所示。因此，系统(5-8)可重写为

$$\dot{\delta}(t) = F M \delta(t) + \tilde{\varphi} + F(I_N \otimes \tilde{R}) \tilde{\delta}(t) \quad (5-9)$$

其中向量 $\delta(t) = (\delta_1^T(t), \dots, \delta_N^T(t))^T$ ， $\tilde{\delta}(t) = (\tilde{\delta}_1^T(t), \dots, \tilde{\delta}_N^T(t))^T$ ，

$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1^T, \dots, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_N^T)^T$ 和矩阵 \mathbf{M} 如引理 5-1 所示。

基于上述的讨论, 我们对于闭环系统(5-9)构造 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\delta}(t) \Pi = \Xi + h \mathbf{I}_{2n} \quad (5-10)$$

其中 \mathbf{P} 是一个满足式(5-3)的正定矩阵。那么对函数 $V(t)$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} (F\mathbf{M}\boldsymbol{\delta}(t) + F(\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &\leq 2F\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{M} \boldsymbol{\delta}(t) + \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{F^2}{\mu_2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \\ &\quad + \mu_2 \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} \boldsymbol{\delta}(t) + \mu_1 \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{P} \boldsymbol{\delta}(t) \end{aligned} \quad (5-11)$$

其中 \mathbf{R} 如定理 5-1 所示。在下面, 我们将给出式(5-11)右边每一项的估计。由于 $F > 1$, 对于 $l = 1, \dots, m$ 我们可得

$$\begin{aligned} F^{n-m+1} |\tilde{x}_{i,l}(t)| &= F^{n-m+1} |r_{i,l}(t) + z_{i,l}(t)| = |\eta_{i,l}(t) + \zeta_{i,l}(t)| / F^{m-l} \\ &\leq |\eta_{i,l}(t) + \zeta_{i,l}(t)| = |\delta_{i,l}(t) + \delta_{i,n+l}(t)| \end{aligned}$$

因此, 通过利用假设 5-2, 我们可得

$$\begin{aligned} F^{n-m+1} |f_m(\bar{\mathbf{x}}_{i,m}, t) - f_m(\bar{\mathbf{x}}_{0,m}, t)| &\leq F^{n-m+1} \alpha \sum_{l=1}^m |\tilde{x}_{i,l}(t)| \\ &\leq F^{n-m+1} \alpha \sum_{l=1}^m |\delta_{i,l} + \delta_{i,n+l}| \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}_{i,m} = F^{n-m+1} (f_m(\bar{\mathbf{x}}_{i,m}, t) - f_m(\bar{\mathbf{x}}_{0,m}, t))$, $\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,n})^T$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i = (\mathbf{0}^T, \boldsymbol{\varphi}_i^T)^T$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1^T, \dots, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_N^T)^T$, 通过计算可得 $\|\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\| = 2n\alpha \|\boldsymbol{\delta}(t)\|$ 。进一步的, 我们可得

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \leq 4n^2 \alpha^2 \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \quad (5-12)$$

此外, 如果我们能保证

$$\frac{F^2}{\mu_2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \leq \iota^2 \beta \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \quad (5-13)$$

其中 $0 < \iota < 1$, 那么将式(5-12)和式(5-13)代入式(5-11)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \boldsymbol{\delta}^T(t) \left(F(\mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M}) + \mu_1 \mathbf{P} \mathbf{P} + \mu_2 \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} + \frac{4n^2 \alpha^2}{\mu_1} \mathbf{I}_{2nN} \right) \boldsymbol{\delta}(t) \\ &\quad + \iota^2 \beta \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \end{aligned}$$

利用 Shur 补不等式，矩阵不等式(5-3)与不等式

$$F(\mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M}) + \mu_1 \mathbf{P} \mathbf{P} + \mu_2 \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} + \left(\frac{4n^2 \alpha^2}{\mu_1} + \beta \right) \mathbf{I}_{2nN} < 0$$

等价。那么，我们可得

$$\dot{V}(t) \leq -\beta(1-t^2) \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \leq 0 \quad (5-14)$$

及在下面我们将证明触发条件(5-4)是不等式(5-13)成立的充分条件。

第二部分：根据触发条件(5-4)可得在时刻 t ，智能体 i 两个相邻触发时刻间的触发间隔为 τ_k^i 或 c_i 。令 $\mathfrak{R}_1(t)$ 和 $\mathfrak{R}_2(t)$ 分别为在时刻 t 触发间隔由 τ_k^i 和 c_i 决定的智能体组成的集合。那么可得 $\mathfrak{R}_1(t) \cup \mathfrak{R}_2(t) = \{1, \dots, N\}$ 且 $\mathfrak{R}_1(t) \cap \mathfrak{R}_2(t) = \emptyset$ 。因此，为了保证不等式(5-13)成立，我们可选择

$$\sum_{i \in \mathfrak{R}_1(t)} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\|^2 \leq \frac{\hat{\gamma}_1 \mu_2 t^2 \beta}{F^2} \|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \quad (5-15)$$

$$\sum_{i \in \mathfrak{R}_2(t)} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\|^2 \leq \frac{\hat{\gamma}_2 \mu_2 t^2 \beta}{F^2} \|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \quad (5-16)$$

其中 $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ 为满足 $\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 = 1$ 的正实数。令 $\boldsymbol{\vartheta}_i(t) = (\vartheta_{i,1}(t), \dots, \vartheta_{i,n}(t), s_{i,1}(t))^T$ ， $\mathbf{X}_i(t) = (z_{i,1}(t), \dots, z_{i,n}(t), e_{i,1}(t))^T$ 。由于 $\varsigma_{i,1}(t) = F^n s_{i,1}(t)$ ， $v_{i,m}(t) = F^{n-m+1} \vartheta_{i,m}(t)$ 和 $\eta_{i,m}(t) = F^{n-m+1} z_{i,m}(t)$ ，不等式 $\|\boldsymbol{\vartheta}_i(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{X}_i(t)\|$ 等价于

$$\left\| \begin{array}{c} v_{i,1}(t) \\ \vdots \\ v_{i,n}(t) \\ \varsigma_{i,1}(t) \end{array} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{array}{c} \eta_{i,1}(t) \\ \vdots \\ \eta_{i,n}(t) \\ F^n e_{i,1}(t) \end{array} \right\|$$

利用

$$F^n \mathbf{e}_1(t) = -(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) (\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)) = \boldsymbol{\Xi} (\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t))$$

其中 $\mathbf{e}_1(t) = (e_{1,1}(t), \dots, e_{N,1}(t))^T$ ，并令 $\mathbf{v}(t) = (v_1^T(t), \dots, v_N^T(t))^T$ ， $\boldsymbol{\zeta}(t) = (\varsigma_1^T(t), \dots, \varsigma_N^T(t))^T$ 和 $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1^T(t), \dots, \eta_N^T(t))^T$ ，那么由上述不等式我们可得

$$\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) \end{array} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\eta}(t) \\ F^n \mathbf{e}_1(t) \end{array} \right\| \leq \gamma \|\boldsymbol{\Lambda}_I\| \|\boldsymbol{\delta}(t)\| \quad (5-17)$$

其中矩阵 Λ_I 如定理 5-1 所示。因此，式(5-15)的一个充分条件为对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体，有 $\|\mathcal{G}_i(t)\| \leq \gamma \|X_i(t)\|$ ，其中 $\gamma \leq \iota \sqrt{\hat{\gamma}_1 \beta \mu_2} / (F \|\Lambda_I\|)$ 。类似的，式(5-16)的一个充分条件为对于集合 $\mathfrak{R}_2(t)$ 中的智能体，有 $\|\mathcal{G}_i(t)\| \leq \tilde{\gamma} \|X(t)\|$ ，其中 $X(t) = (X_1^T(t), \dots, X_N^T(t))^T$ 和 $\tilde{\gamma} \leq \iota \sqrt{\hat{\gamma}_2 \beta \mu_2} / (F \sqrt{N} \|\Lambda_I\|)$ 。如果我们能获得一个时间间隔 τ_k^i 保证不等式 $\|\mathcal{G}_i(t)\| \leq \gamma \|X_i(t)\|$ 在时间 $(t_k^i, t_k^i + \tau_k^i)$ 内成立，那么对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的所有智能体，令下一个触发时刻为 $t_{k+1}^i = t_k^i + \tau_k^i$ 是保证不等式(5-15)成立的一个充分条件。进一步的，如果我们能获得 $\|\mathcal{G}_i(t)\|/\|X(t)\|$ 由 0 增长到 $\tilde{\gamma}$ 所需时间的一个下界 c_i ，那么对于集合 $\mathfrak{R}_2(t)$ 中的所有智能体，令下一个触发时刻为 $t_{k+1}^i = t_k^i + c_i$ 是保证不等式(5-16)成立的一个充分条件。在下面，我们将给出求得 τ_k^i 和 c_i 的计算方法。

计算 τ_k^i ：根据式(5-6)，我们可得

$$\|\dot{\mathcal{G}}_i(t)\| = \begin{Bmatrix} \dot{\mathcal{G}}_{i,1}(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{G}}_{i,n}(t) \\ \dot{s}_{i,1}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{z}_{i,1}(t) \\ \vdots \\ -\dot{z}_{i,n}(t) \\ -\dot{e}_{i,1}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(1/F^n) \dot{\eta}_{i,1}(t) \\ \vdots \\ -(1/F^n) \dot{\eta}_{i,n}(t) \\ -\dot{e}_{i,1}(t) \end{Bmatrix}$$

令 $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{G}_1^T(t), \dots, \mathcal{G}_N^T(t))^T$ ，由 $F^n e_1(t) = \Xi(\eta(t) + \zeta(t))$ 可得

$$\|\dot{\mathcal{G}}_i(t)\| = \left\| \begin{Bmatrix} (I_N \otimes \Lambda_F^{-1}) \dot{\eta}(t) \\ \frac{1}{F^n} \Xi(\dot{\eta}(t) + \dot{\zeta}(t)) \end{Bmatrix} \right\| \leq \|\Lambda_{\Xi}\| \|\dot{\delta}(t)\| \quad (5-18)$$

其中矩阵 Ξ ， Λ_F 和 Λ_{Ξ} 如定理 5-1 所示。进一步的，利用式(5-10)我们可得

$$\underline{\sigma}(P) \|\delta(t)\|^2 \leq V(t) \leq \bar{\sigma}(P) \|\delta(t)\|^2 \quad (5-19)$$

其中 $\underline{\sigma}(P)$ 和 $\bar{\sigma}(P)$ 分别为矩阵 P 的最小和最大奇异值。结合式(5-14)可得 $\dot{V}(t) \leq -p_1 V(t)$ ，其中 $p_1 = \beta(1-t^2)/\bar{\sigma}(P)$ 。进一步的我们可得

$$V(t) \leq V(0) e^{-p_1 t} \quad (5-20)$$

因此，当 $t \rightarrow \infty$ 时，Lyapunov 函数 $V(t)$ 是一个减函数。利用式(5-19)并令 $p_2 = 1/\underline{\sigma}(P)$ ，我们可得不等式 $\|\delta(t)\|^2 \leq p_2 V(t) \leq p_2 V(0)$ 。结合式(5-9)、(5-12)和(5-17)可得

$$\|\dot{\delta}(t)\| \leq (F\|M\| + 2n\alpha + F\gamma\|I_N \otimes \tilde{R}\|\|\Lambda_I\|) \sqrt{p_2 V(0)}$$

进一步的, 结合式(5-18)可得

$$\|\dot{\mathcal{G}}_i(t)\| \leq \|\dot{\mathcal{G}}(t)\| \leq \|\Lambda_{\Xi}\| \|\dot{\delta}(t)\| \leq \theta$$

其中 θ 在式(5-4)中给出。由此可得

$$\|\mathcal{G}_i(t)\| \leq \theta t \quad (5-21)$$

令 t_{k+1}^{i*} 为由不等式 $\|\mathcal{G}_i(t)\| \geq \gamma \|\mathbf{X}_i(t)\|$ 决定的下一个触发时刻。根据 $\mathcal{G}_i(t)$ 和 $\mathbf{X}_i(t)$ 的连续性可得 t_{k+1}^{i*} 是在 t_k^i 之后 $\|\mathcal{G}_i(t)\| = \gamma \|\mathbf{X}_i(t)\|$ 的第一个时刻。因此, 对于任意的 $T \in (t_k^i, t_{k+1}^{i*})$, 在时间 t_k^i 到 T 内, $\|\mathcal{G}_i(t)\|$ 只能达到一个比 $\gamma \|\mathbf{X}_i(t)\|$ 小的值, 并且其保证了式(5-15)的成立。这表明对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体, 可选择 T 为其下一个触发时刻。值得注意的是根据式(5-15), 为了获得时刻 T , 智能体 i 需要知道 $V(0)$ 的值。由于 $\mathcal{G}_i(t) = \mathbf{X}_i(t_k^i) - \mathbf{X}_i(t)$, 保证不等式 $\|\mathcal{G}_i(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{X}_i(t)\|$ 成立的一个充分条件为

$$\|\mathcal{G}_i(t)\| \leq \frac{\gamma}{1+\gamma} \|\mathbf{X}_i(t_k^i)\| \quad (5-22)$$

因此, 令 T' 为 $\mathcal{G}_i(t)$ 由 0 增大到 $(\gamma/(1+\gamma))\|\mathbf{X}_i(t_k^i)\|$ 所需的精确时间。根据式(5-21), 我们定义 $T_0 = (\gamma/((1+\gamma)\theta))\|\mathbf{X}_i(t_k^i)\|$, 并令 $\tilde{T} = t_k^i + T_0 < T' < t_{k+1}^{i*}$ 。那么, \tilde{T} 为保证不等式(5-15)成立条件下 $T = t_{k+1}^i$ 的一个可行解。因此, 对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体, 触发间隔 τ_k^i 可选为 $\tau_k^i = T_0 = (\gamma/((1+\gamma)\theta))\|\mathbf{X}_i(t_k^i)\|$ 来保证不等式(5-15)的成立。值得注意的是为了获得 τ_k^i , 不需要已知 $e_{i,1}(t)$, $z_{i,m}(t)$, $m = 1, \dots, n$ 的连续测量值。

计算 c_i : 根据上述 $\mathcal{G}(t)$ 和 $\tilde{\delta}(t)$ 的定义, 我们可得

$$\|\tilde{\delta}(t)\| \leq \|\mathbf{I}_N \otimes \Lambda_H\| \|\mathcal{G}(t)\| \quad (5-23)$$

其中 Λ_H 如定理 5-1 所示。进一步的, 定义向量 $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{z}_1^T(t), \dots, \mathbf{z}_N^T(t))^T$ 和 $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1^T(t), \dots, \mathbf{r}_N^T(t))^T$, 其中 $i = 1, \dots, N$, $\mathbf{z}_i(t) = (z_{i,1}(t), \dots, z_{i,n}(t))^T$ 和 $\mathbf{r}_i(t) = (r_{i,1}(t), \dots, r_{i,n}(t))^T$ 。那么利用 $\mathbf{e}_1(t) = \Xi(\mathbf{z}(t) + \mathbf{r}(t))$, 并根据 $\mathbf{X}(t)$ 的定义, 我们可得

$$\begin{aligned} \|\delta(t)\| &\leq \|\mathbf{I}_{2N} \otimes \Lambda_F\| \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} \right\| \leq \|\mathbf{I}_{2N} \otimes \Lambda_F\| \|\Lambda_I^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}_1(t) \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \|\mathbf{I}_{2N} \otimes \Lambda_F\| \|\Lambda_I^{-1}\| \|\mathbf{X}(t)\| \end{aligned} \quad (5-24)$$

其中矩阵 Λ_F 和 Λ_I 如定理 5-1 所示。

为了获得 c_i ，利用 $\|\dot{\mathbf{X}}(t)\| = \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|$ 以及式(5-9)、(5-18)、(5-23)和(5-24)，我们可得 $\|\mathbf{g}_i(t)\|/\|\mathbf{X}(t)\|$ 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{d\|\mathbf{g}_i(t)\|}{dt\|\mathbf{X}(t)\|} &\leq \frac{\|\dot{\mathbf{g}}_i(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|} + \frac{\|\mathbf{g}_i(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|} \frac{\|\dot{\mathbf{X}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|} \leq \left(1 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|}\right) \frac{\|\dot{\mathbf{X}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|} \\ &\leq \chi \left(1 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|}\right)^2 \end{aligned}$$

其中常数 χ 如式(5-4)所示。类似于上述求导过程，我们可得

$$\frac{d\|\mathbf{g}(t)\|}{dt\|\mathbf{X}(t)\|} \leq \chi \left(1 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|}\right)^2$$

值得注意的是 $\|\mathbf{g}_i(t)\|/\|\mathbf{X}(t)\|$ 永远以 $\|\mathbf{g}(t)\|/\|\mathbf{X}(t)\|$ 为上界。因此，我们可得 $\|\mathbf{g}_i(t)\|/\|\mathbf{X}(t)\|$ 满足界函数 $\|\mathbf{g}_i(t)\|/\|\mathbf{X}(t)\| \leq y(t, y_0)$ ，其中 $y(t, y_0)$ 是 $\dot{y}(t) = \chi(1 + y(t))^2$ ， $y_0 = 0$ 的解。因此， $\|\mathbf{g}_i(t)\|/\|\mathbf{X}(t)\|$ 由 0 增加到 $\tilde{\gamma}$ 所需的时间以

$$\frac{\tilde{\gamma}}{\chi(1 + \tilde{\gamma})} = \frac{\iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2}}{\chi(F\sqrt{N}\|\Lambda_I\| + \iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2})}$$

为下界。所以，对于集合 $\mathfrak{R}_2(t)$ 中的智能体，触发间隔可选为满足不等式 $0 < c_i < \iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2}/(\chi(F\sqrt{N}\|\Lambda_I\| + \iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2}))$ 的严格正实数 c_i 来保证不等式(5-16)的成立。

由于式(5-15)和(5-16)为不等式(5-13)成立的充分条件，因此触发条件(5-4)带有触发间隔 τ_k^i 和 c_i 能够保证不等式(5-13)成立。

综上所述，我们可得控制器(5-2)以及触发条件(5-4)保证了 $\dot{V}(t) \leq 0$ 。那么，利用式(5-19)和(5-20)，我们可得 $\|\delta(t)\|^2 \leq p_2 V(0)e^{-p_1 t}$ ，其中 $p_2 = 1/\sigma(\mathbf{P})$ 。结合式(5-6)可得

$$|z_{i,m}(t)| \leq \sqrt{p_2 V(0)} e^{-\frac{p_1}{2}t} / F^{n-m+1} \text{ 和 } |r_{i,m}(t)| \leq \sqrt{p_2 V(0)} e^{-\frac{p_1}{2}t} / F^{n-m+1}$$

即 $z_{i,m}(t)$ 和 $r_{i,m}(t)$ 分别指数稳定于 $z_{i,m}(t)=0$ 和 $r_{i,m}(t)=0$ 。由于 $r_{i,m}(t) = \tilde{x}_{i,m}(t) - z_{i,m}(t)$ ，我们可得 $\tilde{x}_{i,m}(t) = x_{i,m}(t) - x_{0,m}(t)$ 也指数稳定于 $\tilde{x}_{i,m}(t)=0$ 。因此，由式(5-1)描述的多智能体系统能够达到指数领导跟随一致性。此外，显然的

在触发条件(5-4)下, 智能体 i 的触发间隔以正实数 c_i 为下界。这表明系统不存在奇诺行为。至此, 我们完成了定理 5-1 的证明。

注 5-1: 在本章中, 我们的主要贡献是基于动态输出反馈提出了一致性控制器, 它只在某些特殊时刻进行触发, 并且不需要智能体间的状态信息进行连续传输, 因而能够很大程度的减少网络的通信负担。因此, 在控制器(5-2)中, 我们只用了采样信息 $e_{i,1}(t_k^i)$ 而不是连续信息 $e_{i,1}(t)$ 。此外, 当系统的状态接近于收敛点时, 所设计的事件触发条件(5-4)本质上最终是一个时间触发条件。因此, 触发条件(5-4)可看作是一个事件/时间混合触发条件。在其条件下, 智能体触发间隔的下界至少为正实数 c_i 。这表明多智能体系统在达到一致性过程中不会存在奇诺行为。因此称触发条件(5-4)为非奇诺触发。

注 5-2: 对于矩阵不等式(5-3), 很容易的可得参数 μ_1 和 μ_2 使得不等式 $-(\mu_1 \mathbf{I}_{2nN} + \mu_2 \mathbf{R})^{-1} < 0$ 成立。进一步的, 利用引理 5-1 我们可得通过合理的选择控制器参数 g_m, \bar{g}_m, κ_m 可使矩阵 \mathbf{M} 为 Hurwitz。因此, 存在矩阵 \mathbf{P} 使得不等式 $\mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M} < 0$ 成立。由于 F 是一个可调的正参数, 我们可得矩阵不等式 $F(\mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M}) + (4n^2 \alpha^2 / \mu_1 + \beta) \mathbf{I}_{2nN} < 0$ 。所有这些表明存在一组解 μ_1, μ_2, β, F 以及矩阵 \mathbf{P} 使得矩阵不等式(5-3)成立。

注 5-3: 本章所设计的控制器(5-2)仅依赖于其邻居智能体输出信息。分布式控制器(5-2)的特色在于其引入了可调参数 F 以增加矩阵不等式(5-3)的可解性。这对于保证控制器(5-2)能够有效处理满足假设 5-2 的任意非线性具有重要作用。值得注意的是对于 $F = 1$ 情形, 所设计的控制器(5-2)是一个一般的线性动态输出反馈控制器, 并且其作用下的矩阵不等式(5-3)的解很难获得甚至不存在。

注 5-4: 在控制器(5-2)以及触发条件(5-4)中, 我们可通过以下过程获得参数 $g_m, \bar{g}_m, \kappa_m, F, \gamma, \theta$ 和 c_i 的解。第一, 求得拓扑矩阵 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 的特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, N$ 。第二, 求得参数 g_m, \bar{g}_m, κ_m 使得所有矩阵 $\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T$ 为 Hurwitz。第三, 通过求解矩阵不等式(5-3)我们可获得正定矩阵 \mathbf{P} 和正参数 μ_1, μ_2, β, F 。最后, 根据定理 5-1 中的计算过程, 我们可获得正参数 γ, θ 和 c_i 。

注 5-5: 对于所设计的控制器(5-2)以及触发条件(5-4), 由于网络中的智能体个数是已知的, 那么我们可以获得能包含所有的通信拓扑情形但是又不依赖于系统全局通信拓扑的一组 $g_m, \bar{g}_m, \kappa_m, F, \gamma, \theta$ 和 c_i 的解。举个例子, 如果 $N = 3$ (一个领导者, 两个跟随者), 在假设 5-1 条件下, 所有情形的拓扑矩阵及其相应的特征值可分别表

示为 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})_s$ 和 $\lambda_{s,i}$ ，其中 $s = 1, 2, 3, 4, i = 1, 2$ 。基于注 5-4 的计算过程，我们可获得一组解 g_m, \bar{g}_m, κ_m 使得所有矩阵 $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_{s,i} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{B}_3^T)$ 为 Hurwitz。接着，基于已知的参数 g_m, \bar{g}_m, κ_m ，我们可通过求解矩阵不等式(5-3)获得矩阵 \mathbf{P} 和参数 μ_1, μ_2, β, F 。基于此，我们可进一步获得满足定理 5-1 中对应于拓扑矩阵 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})_s$ ， $s = 1, 2, 3, 4$ 情形下的所有矩阵不等式的事件触发参数 γ, θ 和 c_i ，其的事件触发参数 γ, θ 和 c_i 。至此，我们得到了一组可包含 $N = 3$ 所有情形下的 $g_m, \bar{g}_m, \kappa_m, F, \gamma, \theta$ 和 c_i 的解。因此，控制器参数的计算可以不依赖于系统的全局通信拓扑，从而使得所设计的控制器及事件触发条件是分布式的。

注 5-6：文献在对定理 5-1 的证明过程中(第二部分)，我们旨在获得不等式 $\|\mathbf{g}_i(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}_i(t)\|$ 成立条件下的事件触发间隔。值得注意的是，在不等式(5-22)条件下，触发间隔的下界可获得为 $\tau_k^i = (\gamma / ((1 + \gamma)\theta)) \|\mathbf{x}_i(t_k^i)\|$ 。由于式(5-22)是保证 $\|\mathbf{g}_i(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}_i(t)\|$ 的一个充分条件，那么 τ_k^i 可选为事件触发间隔以保证 $\|\mathbf{g}_i(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}_i(t)\|$ 。因此，在式(5-22)之后的推导过程中，我们将式(5-22)看做是一个前提条件。

5.4 仿真结果及分析

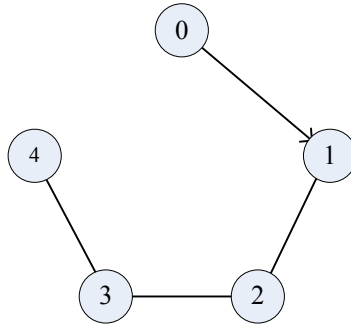


图 5-1 通信拓扑图

Fig 5-1 Topology of augmented graph $\bar{\mathcal{G}}$

在本小节，我们将给出一个仿真例子来证明本章所提结论的有效性。考虑由五个跟随智能体(用节点 1-5 来表示)和一个虚拟领导者(用节点 0 来表示)组成的多智能体系统，且智能体系统的通信图拓扑图如图 5-1 所示。智能体的动态特性由阶数为 2 的式(5-1)描述，其中 $f_1(x_{i,1}, t) = x_{i,1}(t)$ ， $f_2(x_i, t) = x_{i,1}(t) + x_{i,2}(t)$ 。显然的，这些非线性函数满足假设 5-2，其中 $\alpha = 1$ 。每个智能体由控制器(5-2)控制，其更新与否取决于触发条件(5-4)。根据定理 5-1 的证明过程，我们可选取控制参数为 $\kappa_1 = -2$ ，

$\kappa_2 = -5$, $g_1 = g_2 = \bar{g}_1 = \bar{g}_2 = -3$, $F = 3$, $\gamma = 0.0066$, $t = 0.8$, $c_i = 0.001$, $\theta = 15.7$ 。

选取系统的初始值为 $x_{0,1} = 0.1$, $x_{1,1} = 1$, $x_{2,1} = 0.5$, $x_{3,1} = -1$, $x_{4,1} = -0.5$ 以及 $x_{0,2} = x_{i,2} = z_{i,1} = z_{i,2} = 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。那么, 多智能体系统的领导跟随一致性结果如图 5-2 和图 5-3 所示。从图 5-2 和图 5-3 可以看出, 在定理 5-1 中给出的控制器及触发条件下, 所考虑的由式(5-1)描述的多智能体系统能达到指数领导跟随一致性。

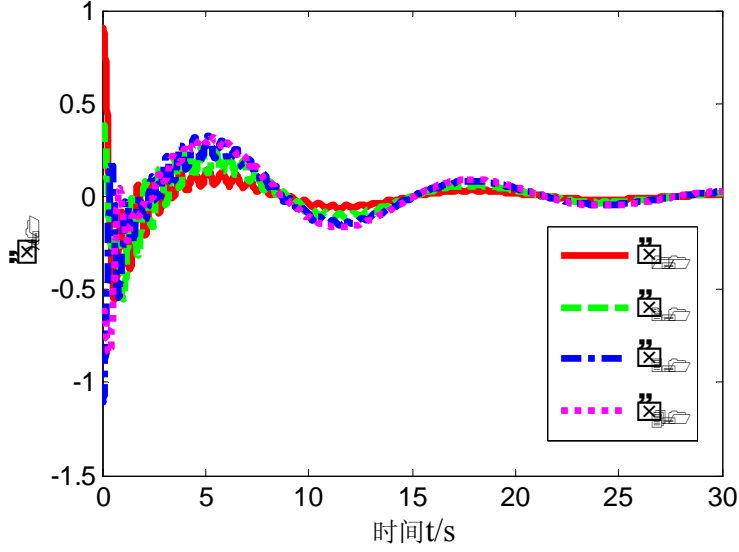


图 5-2 领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,1}$

Fig 5-2 Leader-following consensus errors $\tilde{x}_{i,1}$

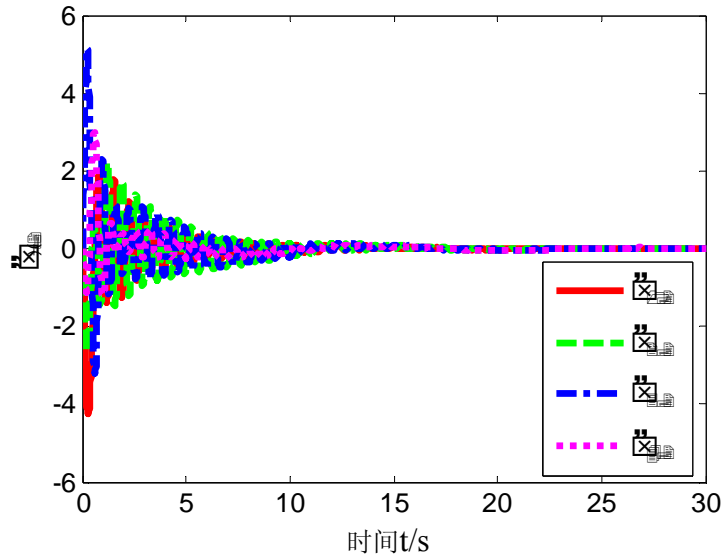


图 5-3 领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,2}$

Fig 5-3 Leader-following consensus errors $\tilde{x}_{i,2}$

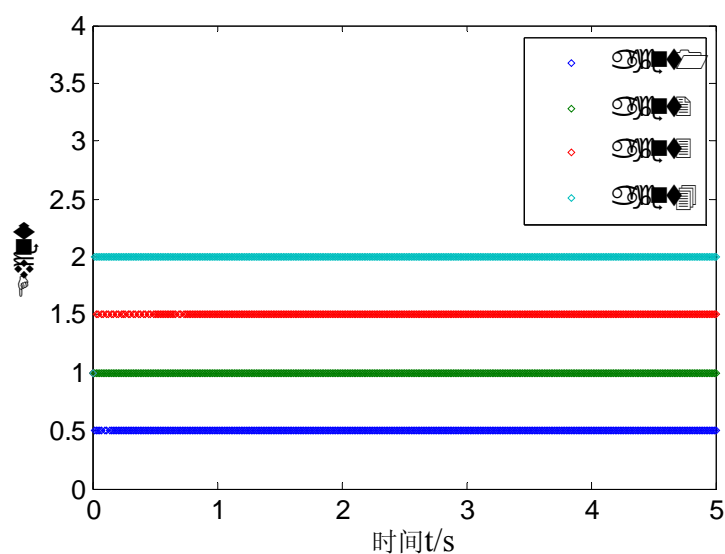


图 5-4 智能体系统触发时刻

Fig 5-4 Event times for agents

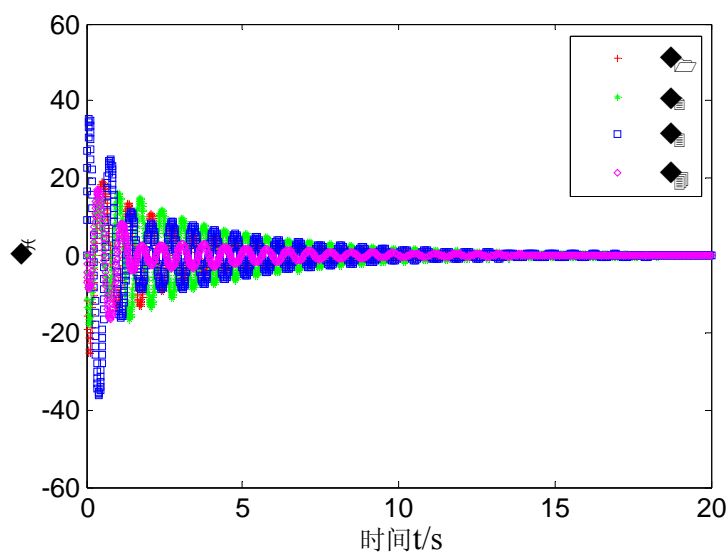


图 5-5 智能体系统的控制输入

Fig 5-5 Control inputs of agents

进一步的，每个智能体的触发时刻及其控制器曲线分别如图 5-4 和图 5-5 所示。从图上可知，相较于连续控制器，在系统同样达到一致性条件下，事件触发控制能够明显的减少控制器的更新次数。

5.5 本章小结

本章研究了具有下三角结构的非线性多智能体系统的临到跟随一致性控制问

题。为了避免系统控制器的频繁触发和节约通信消耗，基于动态输出控制方法提出了分布式事件触发一致性控制器，并给出了其相应的决定出发时刻的自触发策略。在这个触发策略中，只用得到了系统邻居智能体在触发时刻的输出信息，从而避免了系统间的连续信息传输，节约了通信资源。以矩阵不等式的形式给出了系统达到指数领导跟随一致性的充分条件，并通过数值仿真验证了所提结果的有效性。

第 6 章 带有执行器饱和的一般非线性 MAS 的事件触发一致性控制

6.1 引言

多智能体系统的一致性控制由于其具有广泛的工程应用价值而越来越受到人们的关注。在实际中，单个的智能体用于控制器更新和信息通信的能量是有限的，并且系统的通信网络资源往往具有有限的通信带宽和计算能力^[144]。因此，在多智能体系统控制中，考虑实际系统的通信、计算能力以及能量的限制对控制性能的影响具有重要的理论和实际意义。

为了克服上述问题，时间触发控制策略由于其能减少信息通信量和控制器更新次数而受到了人们的广泛关注。目前，针对积分器型系统、一般线性系统和非线性系统的事件触发一致性控制已经取得了丰硕的研究成果^[145-148]。但是在这些工作中，时间触发策略的获得仍然需要智能体间状态信息的连续传输。为了克服这个限制，基于自触发控制的多智能体系统的一致性控制也已经取得了一定的进展^[149-150]。自触发控制通过利用当前时刻的测量值来预测系统的下一个触发时刻，从而避免了系统间的信息连续传输。但是在这些文献中，考虑的系统大都具有线性或者匹配非线性的动态特性，并且假设系统的所有状态信息都可测量，因此所提出的结果并不适用于实际应用。

此外，在工程应用中，物理器件执行器的工作范围是有限的并且控制信号在物理器件上的消耗还会使得系统的有效性输入有限。例如，电力传输过程中电子器件及线路的损耗使得有效性输入受限、遥操作系统中执行结构的控制力矩有限等等。因此，研究饱和条件下的多智能体系统的事件触发控制具有重要的实际意义。文献^[151-154]针对带有执行器饱和的一般线性多智能体系统研究了其事件触发一致性控制问题，并给出了系统达到一致性的充分条件。进一步的，文献^[155]研究了执行器饱和条件下一般非线性系统的事件触发一致性控制问题，并以现行矩阵不等式的形式给出了系统达到一致性的充分条件。但是在文献^[151-155]中，并没有解决吸引域的估计和优化问题，并且假设系统的所有状态全部为已知，这在将结果推广到实际应用时具有很大的局限性。

综合考虑上述问题，在本章中我们针对更具一般性的且具有非匹配非线性结构的多智能体系统，研究了其在执行器饱和条件下的事件触发一致性控制问题。相对于现有的文献，本章工作的创新之处主要包括以下三点：1) 将多智能体事件触发控制中的系统模型扩展到更具一般性的系统模型，并且考虑了执行器饱和约束。它能够将现有文献中普遍考虑的积分器型系统、一般线性系统、上/下三角结构系统视为特例。2) 针对所考虑的系统，提出了分布式动态输出事件触发控制器，其能够很大限度的减少控制器的更新频率和通信的数量。分别提出了需要和不需要智能体间信息连续传输的两种事件触发策略 3) 研究了多智能体系统事件触发控制的吸引域估计问题，并首次给出了系统一致性达到条件下基于控制参数和饱和上界的最大吸引域求解方法。

6.2 问题描述

6.2.1 预备知识

基于 1.4 中给出的多智能体系统的通信拓扑知识，在本章中，我们假设系统的通信拓扑满足以下假设

假设 6-1: 图 \mathcal{G} 为固定的无向的，且其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

令 \mathcal{D} 为由 $p \times p$ 维且对角线元素为 0 或 1 的对角矩阵 \mathcal{D}_s 组成的集合，即 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_s : s = 1, \dots, 2^p\}$ 。令 $\mathcal{D}_s^- = \mathbf{I}_p - \mathcal{D}_s$ ，那么我们将给出如下引理，其可将饱和函数 $\psi_\Delta(\cdot)$ 转化为由实际反馈和相应辅助部分组成的凸集。

引理 6-1^[156]: 令 $\kappa, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为给定的矩阵， \mathbf{h}_m 表示矩阵 \mathbf{H} 的第 m 行。对于任意的向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，如果 $|\mathbf{h}_m \mathbf{x}| \leq \Delta$, $m = 1, \dots, p$ ，那么

$$\psi_\Delta(\kappa \mathbf{x}) \in co\{\mathcal{D}_s \kappa \mathbf{x} + \mathcal{D}_s^- \mathbf{H} \mathbf{x}, s = 1, \dots, 2^p\}$$

其中 $co\{\cdot\}$ 表示凸包的集合。

此外，我们将给出一个有用的引理，其对本章的理论分析具有重要作用。

引理 6-2: 如果矩阵 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 和 $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 分别可控和可观，那么我们可以找到矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 和 $\kappa \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 使得对于 $s = 1, \dots, 2^p$ ，矩阵

$$\mathbf{M}_s = (\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{M}}_s) - (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes \left[(\mathbf{l}_1 \otimes \bar{\mathbf{G}})(\mathcal{C}(\mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{I}_n)) \right]$$

为 Hurwitz, 其中 $l_1 = (1, -1)^T$, $l_2 = (1, 1)^T$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 为系统矩阵, \mathbf{L}, \mathbf{B} 为拓扑矩阵和

$$\tilde{\mathbf{M}}_s = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathbf{G} + \mathcal{B}(\mathcal{D}_s \kappa + \mathcal{D}_s^- \mathbf{H}) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G} & \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

证明: 定义 $\hat{\mathbf{M}}_s = \tilde{\mathbf{M}}_s - (l_1 \otimes \bar{\mathbf{G}})(\mathcal{C}(l_2 \otimes \mathbf{I}_n))$, 我们可得

$$\hat{\mathbf{M}}_s = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathbf{G} + \mathcal{B}(\mathcal{D}_s \kappa + \mathcal{D}_s^- \mathbf{H}) - \bar{\mathbf{G}}\mathcal{C} & -\bar{\mathbf{G}}\mathcal{C} \\ \mathbf{0} & \mathcal{A} + \bar{\mathbf{G}}\mathcal{C} \end{pmatrix}$$

根据文献[73]中的引理 2 和引理 3 可得, 显然的存在矩阵 κ , \mathbf{H} 和 $\bar{\mathbf{G}}$ 使得矩阵

$$\bar{\mathbf{M}}_s = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}(\mathcal{D}_s \kappa + \mathcal{D}_s^- \mathbf{H}) & -\bar{\mathbf{G}}\mathcal{C} \\ \mathbf{0} & \mathcal{A} + \bar{\mathbf{G}}\mathcal{C} \end{pmatrix}$$

为 Hurwitz。那么, 选取 $\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}\mathcal{C}$, 我们可得 $\hat{\mathbf{M}}_s = \bar{\mathbf{M}}_s$ 也为 Hurwitz 矩阵。基于假设 6-1, 我们知道 $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ 是一个正定矩阵^[73], 并且其特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, N$ 。因此, 基于文献[11]中引理 3 的证明过程可得, 通过适当的选择矩阵 κ , \mathbf{H} , \mathbf{G} 和 $\bar{\mathbf{G}}$, 可使得 $(\tilde{\mathbf{M}}_s - \lambda_i(l_1 \otimes \bar{\mathbf{G}})(\mathcal{C}(l_2 \otimes \mathbf{I}_n)))$, $i = 1, \dots, N$ 为 Hurwitz 矩阵。进一步的可得对于 $s = 1, \dots, 2^p$, \mathbf{M}_s 为 Hurwitz 矩阵^[73]。

6.2.2 更具一般特性的高阶非线性多智能体系统模型简介

考虑由 $N+1$ ($N \geq 1$) 个带有执行器饱和的智能体组成的多智能体系统。第 i 个智能体的系统动力学模型表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathcal{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t), t) + \mathcal{B}\psi_\Delta(\mathbf{u}_i(t)) \\ \mathbf{y}_i(t) &= \mathcal{C}\mathbf{x}_i(t), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6-1)$$

其中 $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^p$ 和 $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbb{R}^q$ 分别代表系统的状态, 输入和输出; $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 为已知的系统矩阵; $\mathbf{f}(\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为不确定非线性函数。 $\psi_\Delta(\cdot): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ 为标准的饱和函数。在以上系统中, $\psi_\Delta(\mathbf{u}_i(t)) = (\psi_\Delta(u_{i,1}(t)), \dots, \psi_\Delta(u_{i,p}(t)))^T$, 并且对于 $j = 1, \dots, p$

$$\psi_\Delta(u_{i,j}(t)) = \begin{cases} \Delta \text{sign}(u_{i,j}(t)), & |u_{i,j}(t)| \geq \Delta \\ u_{i,j}(t), & |u_{i,j}(t)| < \Delta \end{cases}$$

其中, $\Delta > 0$ 为已知的常数, 其代表了控制输入的上界。进一步的领导者的动态特性方程可表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_0(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), t) \\ \mathbf{y}_0(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0(t)\end{aligned}\quad (6-2)$$

在本章中非线性函数 $\mathbf{f}(\cdot)$ 以及系统矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 满足以下假设

假设 6-2: 对于 $i, j = 0, 1, \dots, N$, 存在一个非负常数 α 使得

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_j(t), t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|$$

其中 $(\mathbf{x}_i(t), t), (\mathbf{x}_j(t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ 。

假设 6-3: 系统矩阵对 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 和 (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 分别可控和可观。

6.3 抗饱和事件触发一致性控制器设计及其有效性证明

在本章我们研究了由式(6-1)和式(6-2)描述的多智能体系统的事件触发领导跟随一致性控制问题。在事件触发结构下, 所提出的控制器只在特殊时刻进行更新。因此, 我们假设。因此, 我们假设第 i 个智能体系统的触发时间序列为 $\{t_k^i\}, k = 0, 1, \dots$ 。并且每个智能体能获得其邻居智能体的输出信息。此外, 定义第 i 个智能体系统的实时局部输出一致性误差为

$$\mathbf{e}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t)) + b_i (\mathbf{y}_0(t) - \mathbf{y}_i(t))$$

那么, 在 t_k^i 时刻, 智能体 i 对 $\mathbf{e}_i(t)$ 进行测量并获得其测量值 $\mathbf{e}_i(t_k^i)$, 它将在 t_{k+1}^i 时刻来临前保持不变。因此, 智能体 i 在时间间隔 $[t_k^i, t_{k+1}^i)$ 内获得的测量值为 $\mathbf{e}_i(t_k^i)$, 并且测量误差可获得为 $\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{e}_i(t_k^i) - \mathbf{e}_i(t)$ 。基于此, 我们设计智能体 i 的分布式动态输出控制器为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i(t) &= \mathbf{\kappa} \mathbf{z}_i(t_k^i) \\ \dot{\mathbf{z}}_i(t) &= \mathbf{A} \mathbf{z}_i(t) + \mathbf{G} \mathbf{z}_i(t) + \bar{\mathbf{G}} \mathbf{e}_i(t_k^i) + \mathbf{B} \psi_\Delta(\mathbf{\kappa} \mathbf{z}_i(t_k^i))\end{aligned}\quad (6-3)$$

其中 $\mathbf{z}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 和为 $\mathbf{z}_i(t)$ 系统的状态变量。 $\mathbf{z}_i(t_k^i)$ 为 $\mathbf{z}_i(t)$ 在时间间隔 $[t_k^i, t_{k+1}^i)$ 内的测量值。 $\mathbf{G}, \bar{\mathbf{G}}, \mathbf{\kappa}$ 为引理 6-2 中给出的矩阵。值得注意的是, 我们定义 $\mathbf{z}_i(t)$ 的测量误差为 $\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{z}_i(t_k^i) - \mathbf{z}_i(t)$ 。此外, 定义智能体 i 的领导跟随一致性误差为

$\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$ ，并令 $\mathbf{r}_i(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{z}_i(t)$ 。那么，基于式(6-1)-(6-3)我们可得

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathcal{A}\mathbf{r}_i(t) + \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbf{G}\mathbf{z}_i(t) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{e}_i(t_k^i)$$

其中， $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_j(t), t)$ 。定义向量 $\boldsymbol{\delta}_i(t) = (\mathbf{z}_i^T(t), \mathbf{r}_i^T(t))^T$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t) = (\mathbf{s}_i^T(t), \mathbf{v}_i^T(t))^T$ ，利用引理 6-1 可得

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_i(t) = \tilde{\mathbf{M}}_s \boldsymbol{\delta}_i(t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i + (\mathbf{l}_1 \otimes \bar{\mathbf{G}}) \mathbf{e}_i(t) + \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t) \quad (6-4)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i = (\mathbf{0}^T, \boldsymbol{\varphi}_i^T)^T$ ，矩阵 $\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{G}} & \mathcal{B}(\mathcal{D}_s \boldsymbol{\kappa} + \mathcal{D}_s^- \mathbf{H}) \\ -\bar{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ，向量 \mathbf{l}_1 和矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}_s$ 如定理 6-2 所示。由 $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{z}_i(t)$ 和 $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_i(t)$ ，我们可得

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{C}(\mathbf{l}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\boldsymbol{\delta}_j(t) - \boldsymbol{\delta}_i(t)) - b_i \boldsymbol{\delta}_i(t) \right)$$

其中向量 \mathbf{l}_2 如引理 6-2 所示。进一步的，我们可得其全局形式为

$$\mathbf{e}(t) = -(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C}(\mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{I}_n)) \boldsymbol{\delta}(t)$$

其中 $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}_1^T(t), \dots, \mathbf{e}_N^T(t))^T$ 。因此，系统(6-4)可重写为

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \mathbf{M}_s \boldsymbol{\delta}(t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + (\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \quad (6-5)$$

其中矩阵 \mathbf{M}_s 如引理 6-2 所示， $\boldsymbol{\delta}(t) = (\boldsymbol{\delta}_1^T(t), \dots, \boldsymbol{\delta}_N^T(t))^T$ ， $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1^T, \dots, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_N^T)^T$ ， $\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = (\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^T(t), \dots, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_N^T(t))^T$ 。

对于第 i 个智能体，设计其控制器(6-3)的触发时刻为

$$\begin{aligned} t_{k+1}^i &= t_k^i + \max\{\tau_k^i, c_i\} \\ \tau_k^i &= \min_t \left\{ t - t_k^i \mid \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| \geq \gamma \|\mathbf{X}_i(t)\| \right\} \end{aligned}$$

其中向量 $\mathbf{X}_i(t) = (\mathbf{e}_i^T(t), \mathbf{z}_i^T(t))^T$ ，正常数

$$0 < c_i < \frac{\iota \sqrt{\hat{\gamma}_2 \beta \mu_2}}{\chi(\sqrt{N} \|\boldsymbol{\Lambda}_I\| + \iota \sqrt{\hat{\gamma}_2 \beta \mu_2})}, 0 < \gamma < \frac{\iota \sqrt{\hat{\gamma}_1 \beta \mu_2}}{\|\boldsymbol{\Lambda}_I\|}$$

以及矩阵

$$\Lambda_I = \begin{pmatrix} \Xi & \Xi \\ I_{nN} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \Xi = -(L+B) \otimes C$$

参数 ι 和 $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ 为分别满足 $0 < \iota < 1$ 和 $\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 = 1$ 的正实数, $\chi = \max \left\{ \|\Lambda_I\| \|\Lambda_I^{-1}\| (M_s + 2\alpha), \|\Lambda_I\| \|I_N \otimes \tilde{R}\| \right\}, s = 1, \dots, 2^p$, 常数 $\beta, \mu_2 > 0$ 和将在下面的计算过程中给出。

定义向量 $\mathbf{l}_3 = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0) \in \mathbb{R}^{2N}$ 和集合

$$\mathcal{L}(\mathbf{H}) = \left\{ \delta(t) \in \mathbb{R}^{2nN} : \|(l_3 \otimes \mathbf{h}_m) \delta(t)\| \leq N\Delta, m = 1, \dots, p \right\}$$

选择 $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ 的一个子集为椭圆

$$\varepsilon(\mathbf{P}, \rho) = \left\{ \delta(t) \in \mathbb{R}^{2nN} : \delta^T(t) \mathbf{P} \delta(t) \leq \rho \right\}$$

并选取 $\varepsilon(\mathbf{P}, \rho)$ 的一个子集为 $\Omega(\mathbf{Q}, \chi) = \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{nN} : \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t) \leq \bar{\rho} \right\}$, 其中 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{\mathbf{x}}_1^T(t), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N^T(t))^T$ 。值得注意的是矩阵 \mathbf{H} 、 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 可在下边的计算过程中求得。进一步的, 定义多智能体系统一致性误差的轨迹函数为 $\phi(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))$, 那么其收敛点的吸引域为 $\Gamma = \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \tilde{\mathbf{x}}(0)) = 0 \right\}$ 。基于此, 我们可得如下定理

定理 6-1: 考虑由式(6-1)和式(6-2)描述的带有执行器饱和的多智能体系统。在假设 6-1 至 6-3 条件下, 我们设计其分布式控制器为(6-3)及触发条件为(6-6)。如果存在正常数 $\mu_1, \mu_2, \beta, \rho$ 以及正定矩阵 \mathbf{P}, \mathbf{H} 使得 $\varepsilon(\mathbf{P}, \rho) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ 以及对于 $s = 1, \dots, 2^p$, 以下的矩阵不等式成立

$$\begin{pmatrix} -(\mu_1 I_{2nN} + \mu_2 \mathbf{R})^{-1} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{M}_{P_s} \end{pmatrix} < 0 \quad (6-7)$$

其中 $\mathbf{M}_{P_s} = \mathbf{M}_s^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M}_s + (4\alpha^2 / \mu_1 + \beta) I_{2nN}$, $\mathbf{R} = (I_N \otimes \tilde{\mathbf{R}})(I_N \otimes \tilde{\mathbf{R}})^T$, 其中矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 和 \mathbf{M}_s 分别如式(6-4)和引理 6-2 所示, 那么, 所考虑多智能体系统能够达到指数领导跟随一致性。进一步的, 吸引域 Γ 的最大优化问题可通过求解以下不等式获得

$$\inf \varpi, \quad s.t.,$$

a) 对于 $s = 1, \dots, 2^p$, 矩阵不等式(6-3)成立。

$$\text{b) } \left(\frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\chi} \right)^{-1} \leq \varpi \left(\frac{\mathbf{P}}{\rho} \right)^{-1}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}_m \\ \mathbf{w}_m & (\mathbf{P}/\rho)^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (6-8)$$

其中 $\tilde{\mathbf{Q}} = \left(\mathbf{I}_N \otimes \left(\mathbf{l}_2^T \otimes \mathbf{I}_n \right) \right)^T \mathbf{Q} \left(\mathbf{I}_N \otimes \left(\mathbf{l}_2^T \otimes \mathbf{I}_n \right) \right)$, $\mathbf{w}_m, m = 1, \dots, p$ 表示矩阵

$$\mathbf{W} = \left(\frac{\mathbf{l}_3 \otimes \mathbf{H}}{N \Delta} \right) \left(\frac{\mathbf{P}}{\rho} \right)^{-1}$$

的第 m 行。此外，每个智能体的相邻触发时刻间的触发间隔为严格正的，即智能体不会表现出奇诺行为。

证明：对于闭环系统(6-5)，设计 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\delta}(t) \quad (6-9)$$

其中矩阵 \mathbf{P} 如式(6-7)所示。那么，对其求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \left(\mathbf{M}_s \boldsymbol{\delta}(t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \left(\mathbf{I}_N \otimes \tilde{\mathbf{R}} \right) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \right) \\ &\leq 2\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{M}_s \boldsymbol{\delta}(t) + \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\mu_2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \\ &\quad + \mu_2 \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} \boldsymbol{\delta}(t) + \mu_1 \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{P} \boldsymbol{\delta}(t) \end{aligned} \quad (6-10)$$

其中矩阵 \mathbf{R} 如式(6-7)所示。基于假设 6-2，我们可得 $\|\boldsymbol{\varphi}_i\| \leq \alpha \|\tilde{\mathbf{x}}_i(t)\| \leq 2\alpha \|\boldsymbol{\delta}_i(t)\|$ 。

由 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1^T, \dots, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_N^T)^T$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i = (\mathbf{0}^T, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T)^T$ 可得 $\|\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\| = \|\boldsymbol{\varphi}\| \leq 2\alpha \|\boldsymbol{\delta}(t)\|$ ，其等价于

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \leq 4\alpha^2 \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \quad (6-11)$$

此外，如果我们能保证

$$\frac{1}{\mu_2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \leq \iota^2 \beta \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \quad (6-12)$$

其中 $0 < \iota < 1$ ，那么将式(6-11)和式(6-12)代入式(6-10)可得

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\delta}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_s \boldsymbol{\delta}(t) + \beta \iota^2 \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t)$$

其中 $\tilde{\mathbf{M}}_s = (4\alpha^2/\mu_1 + \beta) \mathbf{I}_{2nN} + \mathbf{M}_s^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M}_s + \mu_1 \mathbf{P} \mathbf{P} + \mu_2 \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P}$ 。利用 Shur 补不等式，根据矩阵不等式(6-7)我们可得 $\tilde{\mathbf{M}}_s < 0$ 。因此，我们可得

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\delta}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_s \boldsymbol{\delta}(t) - \beta(1 - \iota^2) \boldsymbol{\delta}^T(t) \boldsymbol{\delta}(t) \quad (6-13)$$

根据触发条件(6-6)可得在时刻 t ，智能体 i 两个相邻触发时刻间的触发间隔为 τ_k^i 或 c_i 。令 $\mathfrak{R}_1(t)$ 和 $\mathfrak{R}_2(t)$ 分别为在时刻 t 触发间隔由 τ_k^i 和 c_i 决定的智能体组成的集合。那么我们可得 $\mathfrak{R}_1(t) \cup \mathfrak{R}_2(t) = \{1, \dots, N\}$ 且 $\mathfrak{R}_1(t) \cap \mathfrak{R}_2(t) = \emptyset$ 。令向量 $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1^T(t), \dots, \mathbf{X}_N^T(t))^T$ ， $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{z}_1^T(t), \dots, \mathbf{z}_N^T(t))^T$ 以及

$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1^T(t), \dots, \mathbf{r}_N^T(t))^T$ 。由 $\mathbf{e}(t) = -((\mathbf{L} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C})(\mathbf{r}(t) + \mathbf{z}(t)) = \mathbf{\Xi}(\mathbf{r}(t) + \mathbf{z}(t))$ ，我们可得

$$\|\mathbf{X}(t)\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{\Xi}(\mathbf{r}(t) + \mathbf{z}(t)) \\ \mathbf{z}(t) \end{matrix} \right\| \leq \|\mathbf{\Lambda}_I\| \|\boldsymbol{\delta}(t)\| \quad (6-14)$$

其中矩阵 $\mathbf{\Xi}$ 和 $\mathbf{\Lambda}_I$ 如式(6-6)所示。因此，为了保证不等式(6-12)成立，我们可选择

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathfrak{R}_1(t)} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\|^2 &\leq \frac{\hat{\gamma}_1 \mu_2 t^2 \beta}{\|\mathbf{\Lambda}_I\|^2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i(t)\|^2 \leq \hat{\gamma}_1 \mu_2 t^2 \beta \|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \\ \sum_{i \in \mathfrak{R}_2(t)} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\|^2 &\leq \frac{\hat{\gamma}_2 \mu_2 t^2 \beta}{\|\mathbf{\Lambda}_I\|^2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i(t)\|^2 \leq \hat{\gamma}_2 \mu_2 t^2 \beta \|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \end{aligned}$$

其中 $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ 为满足 $\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 = 1$ 的正实数。上述不等式成立的一个充分条件为对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体，有 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{X}_i(t)\|$ ，其中 $\gamma \leq t\sqrt{\hat{\gamma}_1 \beta \mu_2} / \|\mathbf{\Lambda}_I\|$ ，并且对于集合 $\mathfrak{R}_2(t)$ 中的智能体，有

$$\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\|^2 \leq \frac{\hat{\gamma}_2 \mu_2 t^2 \beta}{N \|\mathbf{\Lambda}_I\|^2} \sum_{j=1}^N \|\mathbf{X}_j(t)\|^2 \leq \hat{c} \|\mathbf{X}(t)\|^2$$

其中 $\hat{c} = (\hat{\gamma}_2 \mu_2 t^2 \beta) / N \|\mathbf{\Lambda}_I\|^2$ 。进一步的，如果我们能获得 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\|$ 由 0 增长到 $\sqrt{\hat{c}}$ 所需时间的一个下界 c_i ，那么对于集合 $\mathfrak{R}_2(t)$ 中的所有智能体，令下一个触发时刻为 $t_{k+1}^i = t_k^i + c_i$ 是保证不等式(6-12)成立的一个充分条件。

为了获得时间下界值 c_i ，利用式(6-5)、(6-6)、(6-11)和(6-14)，对 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\|$ 求导我们可得

$$\begin{aligned} \frac{d\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\|}{dt\|\mathbf{X}(t)\|} &\leq \frac{\|\dot{\tilde{\boldsymbol{\delta}}}_i(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|} + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| \|\dot{\mathbf{X}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|^2} \leq \left(1 + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|}\right) \frac{\|\dot{\mathbf{X}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|} \\ &\leq \chi \left(1 + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|}\right)^2 \end{aligned}$$

其中常数 χ 如式(6-6)所示。类似于上述求导过程，我们可得 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\|$ 求导函数满足

$$\frac{d\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\|}{dt\|\mathbf{X}(t)\|} \leq \chi \left(1 + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\|}{\|\mathbf{X}(t)\|}\right)^2$$

值得注意的是 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\|$ 永远以 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\|$ 为上界。因此，我们可得 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\|$ 满足界函数 $\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_i(t)\| / \|\mathbf{X}(t)\| \leq y(t, y_0)$ ，其中 $y(t, y_0)$ 是

$\dot{y}(t) = \chi(1+y(t))^2$, $y_0 = 0$ 的解。因此, $\|\tilde{\delta}_i(t)\|/\|X(t)\|$ 由 0 增加到 $\sqrt{\hat{c}}$ 所需的时间以

$$\frac{\sqrt{\hat{c}}}{\chi(1+\sqrt{\hat{c}})} = \frac{\iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2}}{\chi(\sqrt{N}\|\Lambda_I\| + \iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2})}$$

为下界。所以, 对于集合 $\mathfrak{R}_2(t)$ 中的智能体, 触发间隔可选为满足不等式 $0 < c_i < \iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2}/(\chi(\sqrt{N}\|\Lambda_I\| + \iota\sqrt{\hat{\gamma}_2\beta\mu_2}))$ 的严格正实数 c_i 来保证不等式 (6-12) 的成立。

综上所述, 我们可得控制器(6-3)以及触发条件(6-6)保证了 $\dot{V}(t) \leq 0$ 。那么, 根据引理 6-1, 我们可得上述所有分析和讨论都是基于前提条件 $|\mathbf{h}_m \mathbf{z}_i(t_k^i)| \leq \Delta$ 进行的。值得注意的是不等式 $|\mathbf{h}_m \mathbf{z}_i(t_k^i)| \leq \Delta$ 成立的充分条件是 $|\mathbf{h}_m \mathbf{z}_i(t)| \leq \Delta$ 。对于 $i = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, n$, $|\mathbf{h}_m \mathbf{z}_i(t)| \leq \Delta$ 可重写为 $|(l_3 \otimes \mathbf{h}_m) \boldsymbol{\delta}(t)| \leq N\Delta$ 。因此, 根据集合 $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ 的定义以及 $\varepsilon(\mathbf{P}, \rho) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, 我们可得对于 $\boldsymbol{\delta}(t) \in \varepsilon(\mathbf{P}, \rho) \setminus \{0\}$ 有 $\dot{V}(t) \leq 0$ 。利用式(6-15), 我们可得

$$\underline{\sigma}(\mathbf{P})\|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \leq V(t) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{P})\|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \quad (6-15)$$

其中 $\underline{\sigma}(\mathbf{P})$ 和 $\bar{\sigma}(\mathbf{P})$ 分别为矩阵 \mathbf{P} 的最小和最大奇异值。结合式(6-13)可得 $\dot{V}(t) \leq -p_1 V(t)$, 其中 $p_1 = \beta(1-\iota^2)/\bar{\sigma}(\mathbf{P})$ 。进一步的可得 $V(t) \leq V(0)e^{-p_1 t}$ 。根据式(6-15), 我们可得

$$\|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \leq p_2 V(t) \leq p_2 V(0)e^{-p_1 t}, \quad t > t_k^i \quad (6-16)$$

其中 $\boldsymbol{\delta}(t) \in \varepsilon(\mathbf{P}, \rho) \setminus \{0\}$ 且 $p_2 = 1/\underline{\sigma}(\mathbf{P})$ 。由 $\boldsymbol{\delta}_i(t) = (\mathbf{z}_i^T(t), \mathbf{r}_i^T(t))^T$, 我们可得 $\|\mathbf{z}_i(t)\|^2 \leq p_2 V(0)e^{-p_1 t}$ 和 $\|\mathbf{r}_i(t)\|^2 \leq p_2 V(0)e^{-p_1 t}$, 即 $\mathbf{z}_i(t)$ 和 $\mathbf{r}_i(t)$ 分别指数稳定于 $\mathbf{z}_i(t) = 0$ 和 $\mathbf{r}_i(t) = 0$ 。由于 $\mathbf{r}_i(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{z}_i(t)$, 我们可得 $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$ 也指数稳定于 $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = 0$ 。因此, 由式(6-1)和(6-2)描述的多智能体系统能够达到指数领导跟随一致性。此外, 由于 $\Omega(\mathbf{Q}, \chi) \subset \varepsilon(\mathbf{P}, \rho)$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = (l_2 \otimes \mathbf{I}_n) \boldsymbol{\delta}_i(t)$, 并利用文献[156]中的结论, 我们可得吸引域 Γ 的最大化问题可通过求解以下不等式(6-8)获得。

显然的在触发条件(6-6)下, 智能体 i 的触发间隔以正实数 c_i 为下界。这表明系统不存在奇诺行为。至此, 我们完成了定理 6-1 的证明。

值得注意的是为了获得由触发条件(6-6)决定的触发间隔, 智能体间的信息需要进行连续传输。因此, 在下面我们将给出一个更严格的触发条件, 其优点在于可避

免智能体间的连续信息传输，进而大大减少通信网络的通信负担。对于智能体 i ，我们设计控制器(6-3)的新的触发条件为

$$t_{k+1}^i = t_k^i + \max \left\{ \tau_k^i = \frac{\gamma}{(1+\gamma)\theta} \|X_i(t_k^i)\|, c_i \right\} \quad (6-17)$$

其中参数

$$\theta \geq \left(\|M_s\| + \gamma \|\Lambda_I\| \|I_N \otimes \tilde{R}\| + 2\alpha \right) \sqrt{p_2 V(0)}, s = 1, \dots, 2^p$$

向量 $X_i(t_k^i) = (e_i^T(t_k^i), z_i^T(t_k^i))^T$ ， γ 和 c_i 为如式(6-6)所示的正实数。基于此，我们可得如下定理

定理 6-2: 考虑由式(6-1)和式(6-2)描述的带有执行器饱和的多智能体系统。在假设 6-1 至 6-3 条件下，我们设计其分布式控制器为(6-3)及触发条件为(6-17)。如果存在正常数 $\mu_1, \mu_2, \beta, \rho$ 以及正定矩阵 P, H 使得 $\varepsilon(P, \rho) \in \mathcal{L}(H)$ 以及矩阵不等式(6-7)对于 $s = 1, \dots, 2^p$ 成立，那么，所考虑多智能体系统能够达到指数领导跟随一致性，并且吸引域 Γ 的最大化问题可通过求解不等式(6-8)获得。

证明: 根据定理 6-1 的证明过程可得，在此我们只需证明对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体系统，其触发间隔可选为

$$\tau_k^i = \frac{\gamma}{(1+\gamma)\theta} \|X_i(t_k^i)\|$$

来保证不等式 $\|\tilde{\delta}_i(t)\| \leq \gamma \|X_i(t)\|$ 的成立。利用式(6-5)、(6-6)和(6-14)可得

$$\|\dot{\tilde{\delta}}(t)\| = \|\dot{X}(t)\| \leq \|\Lambda_I\| \|\dot{\delta}(t)\| \leq \left(\|M_s\| + \gamma \|\Lambda_I\| \|I_N \otimes \tilde{R}\| + 2\alpha \right) \|\delta(t)\|$$

那么，根据式(6-16)我们最终可得 $\|\dot{\tilde{\delta}}(t)\| \leq \theta$ ，其中 θ 如式(6-17)所示。进一步的，我们有

$$\|\tilde{\delta}_i(t)\| \leq \|\tilde{\delta}(t)\| \leq \theta t \quad (6-17)$$

令 t_{k+1}^{i*} 为由不等式 $\|\tilde{\delta}_i(t)\| \leq \gamma \|X_i(t)\|$ 决定的下一个触发时刻。根据 $\tilde{\delta}_i(t)$ 和 $X_i(t)$ 的连续性可得 t_{k+1}^{i*} 是在 t_k^i 之后 $\|\tilde{\delta}_i(t)\| = \gamma \|X_i(t)\|$ 的第一个时刻。因此，对于任意的 $T \in (t_k^i, t_{k+1}^{i*})$ ，在时间 t_k^i 到 T ， $\|\tilde{\delta}_i(t)\|$ 只能达到一个比 $\gamma \|X_i(t)\|$ 小的值，并且其保证了 $\dot{V}(t) \leq 0, t \in (t_k^i, T]$ 的成立。这表明对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体，可选择 T 为其下一个触发时刻。根据这个思想以及式(6-18)， $\tilde{\delta}_i(t) = X_i(t_k^i) - X_i(t)$

为了获得时刻 T ，智能体 i 需要知道 $V(0)$ 的值。此外，由于，那么保证不等式 $\|\tilde{\delta}_i(t)\| \leq \gamma \|X_i(t)\|$ 成立的一个充分条件为

$$\|\tilde{\delta}_i(t)\| \leq \frac{\gamma}{1+\gamma} \|X_i(t_k^i)\|$$

因此，令 T' 为 $\tilde{\delta}_i(t)$ 由 0 增大到 $(\gamma/(1+\gamma))\|X_i(t_k^i)\|$ 所需的精确时间。根据式 (6-18)，我们定义 $T_0 = (\gamma/((1+\gamma)\theta))\|X_i(t_k^i)\|$ 。那么，令 $\tilde{T} = t_k^i + T_0 < T' < t_{k+1}^{i*}$ 为保证不等式 $\|\tilde{\delta}_i(t)\| \leq \gamma \|X_i(t)\|$ 成立条件下 $T = t_{k+1}^i$ 的一个可行解。因此，对于集合 $\mathfrak{R}_1(t)$ 中的智能体，触发间隔 τ_k^i 可选为 $\tau_k^i = (\gamma/((1+\gamma)\theta))\|X_i(t_k^i)\|$ 。值得注意的是为了获得 τ_k^i ，不需要已知 $e_i(t)$ ， $z_i(t)$ 的连续测量值。至此，我们完成定理 5-2 的证明。

注 6-1: 对于定理 6-1 中的矩阵不等式(6-17)，很容易的可得参数 μ_1 和 μ_2 使得不等式 $-(\mu_1 I_{nN} + \mu_2 R)^{-1} < 0$ 成立。进一步的，利用引理 6-2 我们可得通过合理的选择控制器参数 G, \bar{G}, κ, H 可使矩阵 $M_s, s = 1, \dots, 2^p$ 为 Hurwitz。因此，存在矩阵 P 以及参数 μ_1, β 使得不等式 $M_s^T P + P M_s + (4\alpha^2/\mu_1 + \beta) I_{2nN} < 0$ 成立。所以，我们可以容易的获得使不等式(6-7)成立的解。进一步的，通过观察引理 6-2 的证明过程我们可得在控制器(6-3)中引入矩阵 G 增加了矩阵 $M_s, s = 1, \dots, 2^p$ 为 Hurwitz 的可解性。正对于保证矩阵不等式(6-7)的成立具有重要作用。

注 6-2: 定理 6-2 中所设计的触发条件(6-17)具有两个优点。首先，仅在触发时刻 t_k^i ，智能体 i 需要获得输出一致性误差 $e_i(t)$ 和 $z_i(t)$ 来对控制器(6-3)进行更新。其次，下一个触发时刻 t_{k+1}^i 取决于由差 $e_i(t_k^i)$ 和 $z_i(t_k^i)$ 组成的向量 $X(t_k^i)$ 。因此，触发条件(6-17)的设计避免了智能体间的连续信息传输。

注 6-3: 在本章中，如果 $\varepsilon(P, \rho) \in \mathcal{L}(H)$ ，所考虑的多智能体系统能够达到指数收敛一致性。然而， $\varepsilon(P, \rho)$ 是关于变量 $\delta(t)$ 的集合，其不能直接导致一致性收敛。所以，我们给出了关于变量 $\tilde{x}(t)$ 的集合 $\Omega(Q, \chi)$ 的定义，以便于直接获得一致性收敛结果。值得注意的是在优化问题(6-8)中，条件(b)保证了集合 $\Omega(Q, \chi)$ 是集合 $\varepsilon(P, \rho)$ 的一个子集。因此，通过求解优化问题(6-8)，我们可获得 $\tilde{x}(t)$ 而不是的 $\delta(t)$ 最大吸引域。

注 6-4: 对于所设计的触发条件(6-6)和(6-17)，由于网络中的智能体个数是已知的，那么我们可以获得能包含所有的通信拓扑情形但是又不依赖于系统全局通信拓扑的一组 γ 和 θ 的解。举个例子，如果 $N = 3$ (一个领导者，两个跟随者)，在假设

6-1 条件下, 所有情形的拓扑矩阵为 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})_l$, $l = 1, 2, 3, 4$ 。因此, 我们可获得一组解 γ, θ, c_i 使得对于 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})_l$, $l = 1, 2, 3, 4$, 触发条件(6-6)和(6-17)中的所有不等式成立。也就是说我们可获得一组包含 $N = 3$ 时所有通信情形下的 γ, θ, c_i 的解。因此, 触发参数的计算可以不依赖于系统的全局通信拓扑, 从而使得所设计的触发条件(6-6)和(6-17)是分布式的。

注 6-5: 相较于考虑非线性多智能体系统事件触发一致性问题的文献[148], 本章给出的结论主要有两方面贡献。首先, 本章研究的系统考虑了执行器饱和的影响, 其比文献[148]考虑的系统更具一般性且包含文献[148]考虑的系统为特例。其次, 文献[148]所提的控制器要求系统的所有状态信息为已知, 而本章所提的动态输出反馈控制器仅需获得系统的输出信息, 可以很大程度上节约通信成本。

注 6-6: 文献[127]针对一般高阶线性系统的包含控制问题, 提出了动态输出反馈控制方法。本章考虑了带有执行器饱和的非线性多智能体系统的事件触发一致性控制问题。因此, 相较于文献[127]考虑的问题, 本章研究的问题更具挑战性。所以, 由于非线性项、执行器饱和以及控制器离散触发的存在, 文献[127]所提的控制方法不能直接用来解决本章所考虑的问题。综上所述, 我们提出了一种新颖的控制方法来处理上述挑战性问题。

6.4 仿真结果及分析

在本小节, 我们将给出一个仿真例子来证明本章所提结论的有效性。考虑由五个跟随智能体(用节点 1-5 来表示)和一个虚拟领导者(用节点 0 来表示)组成的多智能体系统, 且智能体系统的通信图拓扑图 $\bar{\mathcal{G}}$ 如图 6-1 所示。值得注意的是图 $\bar{\mathcal{G}}$ 满足假设 6-1。

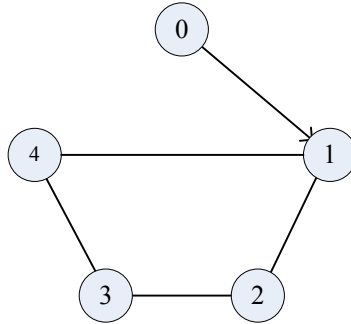


图 6-1 通信拓扑图

Fig 6-1 Topology of augmented graph $\bar{\mathcal{G}}$

我们选取智能体的系统矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \ 0)$$

以及非线性函数为 $f(\mathbf{x}_i, t) = (\sin(0.1x_{i,1}), 0.1(x_{i,1} - \sin(x_{i,2})))$ ，其中 $x_{i,j}$ ， $j = 1, 2$ 表示向量 \mathbf{x}_i 的第 j 个元素。显然的，矩阵 \mathbf{A} 为不稳定矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 且满足假设 6-3。此外，非线性函数满足假设 6-2，其中 $\alpha = 0.1$ 。根据所提出的结论，

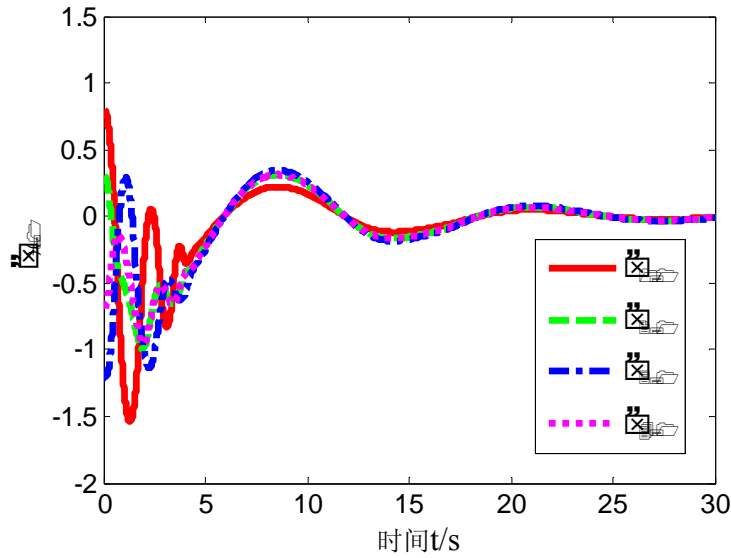


图 6-2 定理 6-1 结论下的领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,1}$

Fig 6-2 Consensus errors $\tilde{x}_{i,1}$ using Theorem 6-1

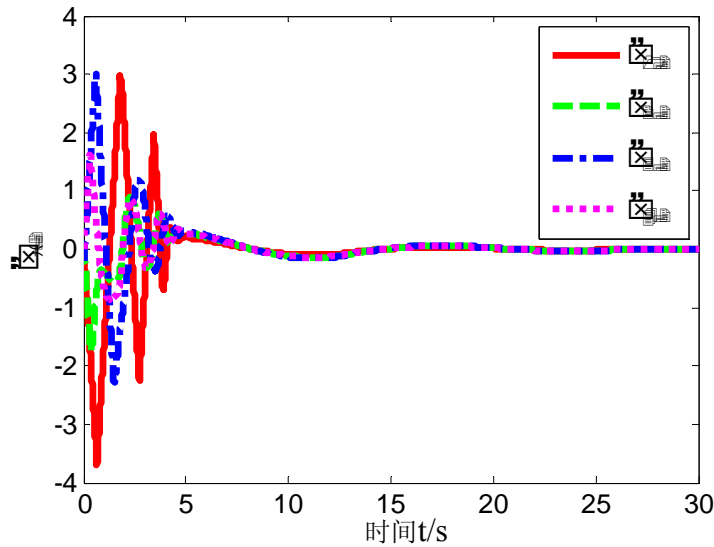


图 6-3 定理 6-1 结论下的领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,2}$

Fig 6-3 Consensus errors $\tilde{x}_{i,2}$ using Theorem 6-1

可得一组控制器参数的解为

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \bar{G} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \kappa = \begin{pmatrix} -80 \\ -20 \end{pmatrix}$$

取控制输入的上界为 $\Delta = 6$ ，且取 $t = 0.6$ ，并选取系统的初始值为

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

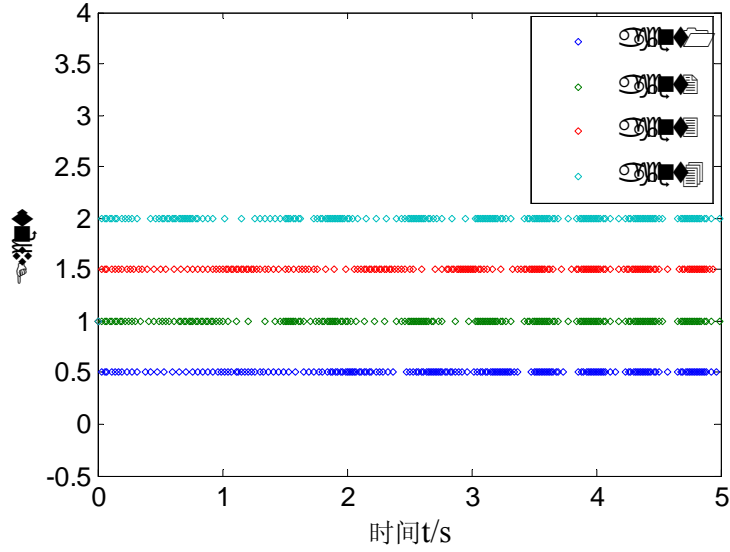


图 6-4 定理 6-1 结论下智能体系统的触发时刻

Fig 6-4 Event times for agents using Theorem 6-1

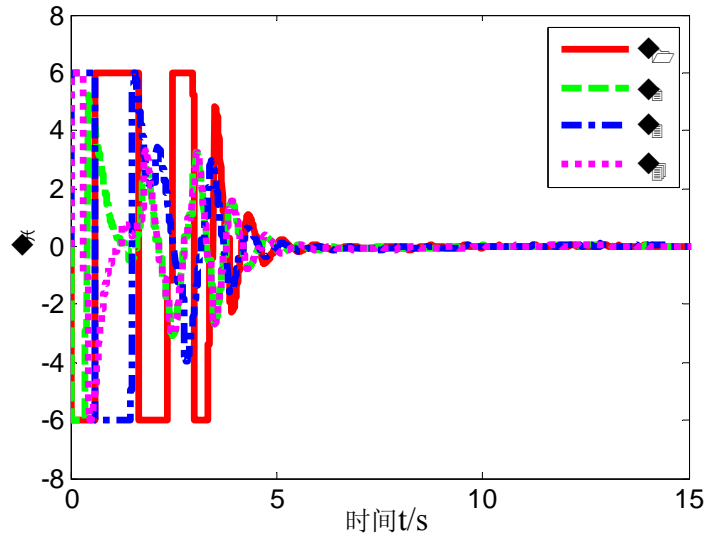


图 6-5 定理 6-1 结论下智能体系统的控制输入

Fig 6-5 Control inputs of agents using Theorem 6-1

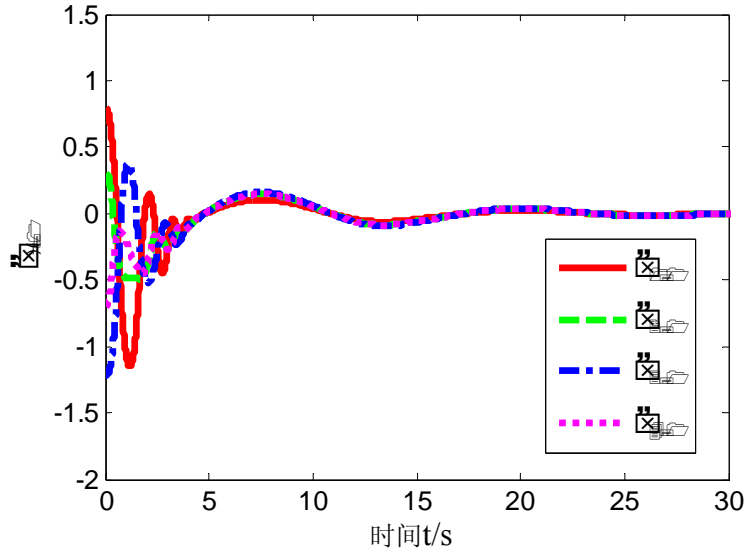

 图 6-6 定理 6-2 结论下的领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,1}$

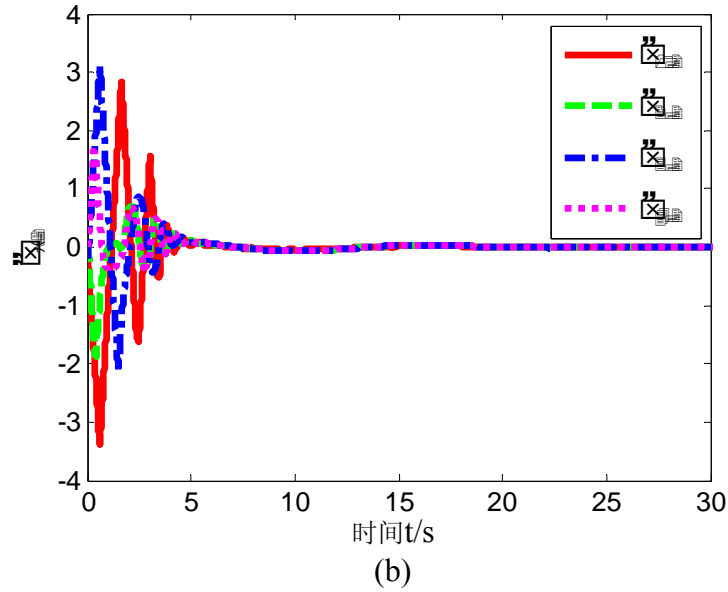
 Fig 6-6 Consensus errors $\tilde{x}_{i,1}$ using Theorem 6-2

 图 6-7 定理 6-2 结论下的领导跟随一致性误差 $\tilde{x}_{i,2}$

 Fig 6-7 Consensus errors $\tilde{x}_{i,2}$ using Theorem 6-2

多智能体系统的领导跟随一致性仿真结果如图 6-2 至图 6-5 所示。从图 6-2、图 6-3、图 6-6 和图 6-7 可以看出，尽管在定理 6-2 中给出的结论不需要智能体间的连续信息传输，所考虑的智能体系仍然能像定理 6-1 结论下的情形一样达到领导跟随一致性。多智能体系统在定理 6-1 和定理 6-2 结论下的触发时刻分别如图 6-4 和图 6-8 所示。从图 6-4 和图 6-8 可以看出，定理 6-2 中结论比定理 6-1 中结论所需的控制器

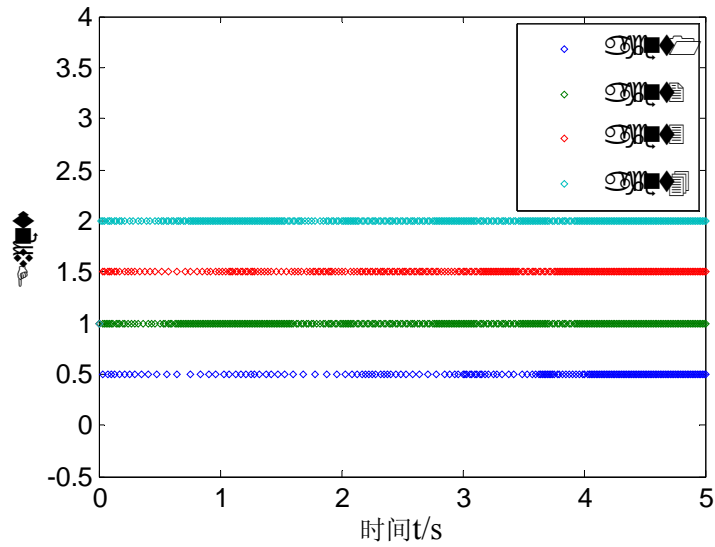


图 6-8 定理 6-1 结论下智能体系统的触发时刻

Fig 6-8 Event times for agents using Theorem 6-2

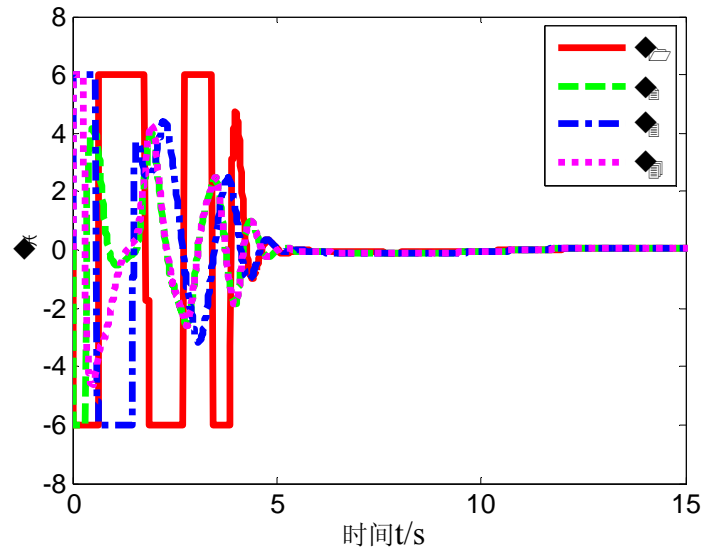


图 6-9 定理 6-2 结论下智能体系统的控制输入

Fig 6-9 Control inputs of agents using Theorem 6-2

更新次数多。进一步的，多智能体系统在定理 6-1 和定理 6-2 结论下的控制输入分别如别如图 6-4 和图 6-8 所示。

注 6-7: 在图 6-4 和图 6-8 中，不同颜色的点代表控制过程中各个智能体的触发时刻。点越多代表触发次数越多。值得注意的是纵坐标的值与控制器更新频率无关，图中取不同的值只是为了方便区分不同智能体的触发次数。从图 6-5 和图 6-9 我们可以看出在两个触发时刻之间，系统控制器的值保持不变。这表明控制器只在出发时

刻进行更新，并且在两个出发时刻之间保持上一个时刻的更新值。

6.5 本章小结

本章研究了执行器饱和条件下，更具一般性的非线性多智能体系统的一致性控制问题。提出了一个不依赖于系统观测器的动态输出事件触发一致性控制器。放松了以往输出控制中，每个智能体系统的观测信息需要连续传输且系统的控制器需要连续更新的假设条件。基于测量误差和设定的阈值提出了两种不同的事件触发策略，并且证明了在这两种触发策略下，有限时间内无限次触发情形时不存在的，即不存在奇诺行为，并以矩阵不等式的形式给出了保证多智能体系统指数领导跟随一致性的充分条件。此外，为了获得使得吸引域最大化的控制参数，给出了矩阵不等式约束条件下的系统最大吸引域的求解方法。给出的仿真结果验证了本章所提结论的有效性。

结 论

多智能体系统间通过相互通信和协调合作能够大大提高个体行为的智能化程度,进而完成很多单个个体无法完成的工作,具有高效率、高容错性和内在并行性等优点。在实际应用中,每个智能体往往具有复杂的动力学特性,且保证智能体间信息共享的通信网络往往具有有限的通信资源。因此,在多智能体系统协同控制中综合考虑单个系统本身的复杂非线性特性和网络通信中的资源受限特性具有重要的实际意义。基于此,本文以一类具有非匹配非线性结构的多智能体系统为研究对象,针对具有模型参数未知、随机非线性、状态信息不可测以及通信网络资源有限等情形,对该类系统的分布式一致性控制器设计及分析进行研究。本文主要的创新性结果如下:

(1)针对具有非匹配非线性结构的二阶时变多智能体系统,提出了完全分布式一致性控制设计方法,即控制增益无需依赖于系统的全局信息,如通信拓扑矩阵特征值和系统模型参数,放松了以往该类系统控制器设计中对模型参数和拓扑矩阵特征值为已知的要求。进一步的,针对具有下三角结构的高阶非线性多智能体系统,基于反步控制,提出了有限时间分布式一致性控制器设计方法。所研究的非线性系统可将一阶、二阶、高阶线性系统和简单非线性系统作为特例,拓展了现有工作。

(2)针对具有下三角结构的高阶随机非线性多智能体系统,提出了只依赖于邻居智能体输出信息的分布式一致性控制器设计方法。通过引入动态参数,有效的处理了系统的非匹配非线性项和随机干扰项。基于动态输出思想,构造了被控系统的新型虚拟系统,并基于虚拟系统状态,设计了动态输出一致性控制器。提出的控制器不仅在设计过程中不需在每一步设计虚拟控制器和求解其导数,设计方法简单,计算复杂度低,而且只需要系统的输出进行传输,减少了信息传输量,进而节约了通信带宽。

(3)考虑实际应用中,系统安装的数据微处理器,往往具有有限的能量和计算能力,并且通信网络中每个网络节点获取的资源有限和单位时间传递数据信息有限,分别针对具有下三角结构和更具一般性的高阶非线性多智能体系统,提出了分布式事件触发一致性控制器及其事件触发策略设计方法,并提出了能够避免智能体间信息连续传输的自触发策略。首次给出了执行器饱和下基于事件触发控制的高阶非线性

性多智能体系统的吸引域估计方法，给出了一致性条件下智能体各状态初值的取值范围。通过将动态输出控制和事件触发控制相结合，所设计的控制器能够最大限度的节约系统的通信能量和控制能量。

随着多智能体系统结构和任务的日趋复杂，对系统的控制器设计和性能分析也提出了更高的要求。本文在复杂非线性多智能体系统一致性控制的分析和控制器设计等方面给出了一些新的研究结果。无论是对于多智能体协同控制领域，还是就问题本身，本文的工作都仅仅是初步的探索。基于本文的研究结果，尚有如下的两方面问题需进一步研究：

(1)本文研究的多智能体系统大都具有相同的动力学特性。然而在实际中，个体往往具有异质动力学，即每个个体自身的动力学不尽相同。相比于同质系统，异质非线性多智能体系统的一致性控制问题更具一般性也更具挑战性。如何针对这些情况进行分布式控制器的设计成为一个非常有理论价值和实际意义的问题。

(2)在实际的通信网络中，不仅仅会存在本文研究的网络资源受限、通信能力有限的问题，往往还会存在通信拓扑切换、信息丢包、通信时延、通信噪声等问题。因此考虑恶劣通信环境下，复杂非线性多智能体系统的一致性控制是一个值得深入研究，且具有很大挑战性的问题。

参考文献

- [1] 1 刘金琨, 尔联洁. 多智能体技术应用综述[J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 133-140.
- [2] 2 王巍. 不确定非线性多智能体系统的协调控制[D]. 大连: 大连海事大学博士学位论文, 2015.
- [3] 3 Dou C X, Duan Z S, Jia X B. Delay-dependent H_∞ robust control for large power systems based on two-level hierarchical decentralized coordinated control structure[J]. International Journal of Systems Science, 2013, 44(2): 329-345.
- [4] 4 Yu J, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange[J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(2): 334-348.
- [5] 5 Wang X, Wang S, Bi D. Distributed visual-target-surveillance system in wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2009, 39(5): 1134-1146.
- [6] 6 Smith R S, Hadaegh F Y. Control of deep-space formation flying spacecraft: relative sensing and switched information[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2009, 28(1): 106-114.
- [7] 7 Wang X, Ni W, Wang X. Leader-following formation of switching multirobot systems via internal model[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2012, 42(3): 817-826.
- [8] 8 Wang X, Yadav V, Balakrishnan S N. Cooperative UAV formation flying with obstacle/collision avoidance[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2007, 15(4): 672-679.
- [9] 9 Li Z, Li J, Kang Y. Adaptive robust coordinated control of multiple mobile manipulators interacting with rigid environments[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2028-2034.
- [10] 10 黄捷. 高阶非线性多智能体系统一致性控制研究[D]. 北京: 北京理工大学博士学位论文, 2015.
- [11] 11 Wang J H, Cheng D Z, Hu X M. Consensus of multi-agent linear dynamics systems [J]. Asian Journal of Control, 2008, 10(2): 144-155.
- [12] 12 Tian Y P, Zhang Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1205-1212.
- [13] 13 Zhong W S, Liu G P, Rees D. Global bounded consensus of multi-agent systems with non-identical nodes and communication time-delay topology[J]. International Journal of Systems Science, 2013, 44(2): 346-357.
- [14] 14 Dong Y, Huang J. Leader-following connectivity preservation rendezvous of multiple double integrator systems based on position measurement only[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(9): 2598-2603.

- [15] 15Dimarogonas D V, Kyriakopoulos K J. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5): 916-922.
- [16] 16Yang X B, Gao H J. Robust reliable control for autonomous spacecraft rendezvous with limited-thrust[J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 24(1): 161-168.
- [17] 17Zhu J D, Lü J H, Yu X H. Flocking of multi-agent non-holonomic systems with proximity graphs[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2013, 60(1): 199-210.
- [18] 18Su H, Wang X, Lin Z. Flocking of multi-agents with a virtual leader[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(2): 293-307.
- [19] 19Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [20] 20Yang H J, You X, Hua C C. Attitude tracking control for spacecraft formation with time-varying delays and switching topology[J]. Acta Astronautica, 2016, 126: pp. 98-108.
- [21] 21Yang H J, You X, Xia Y Q, Liu Z X. Nonlinear attitude tracking control for spacecraft formation with multiple delays[J]. Advances in Space Research, 2014, 54(4): 759-789.
- [22] 22Yu C, Hendrickx J M, Fidan B, et al. Three and higher dimensional autonomous formations: rigidity, persistence and structural persistence[J]. Automatica, 2007, 43(3): 387-402.
- [23] 23 王寅秋. 非线性多智能体系统一致性分布式控制[D]. 北京: 北京理工大学博士学位论文, 2015.
- [24] 24 刘成林, 田玉平. 具有时延的多个体系统的一致性问题综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1601-1608.
- [25] 25Murray R M. Recent research in cooperative control of multivehicle systems[J]. Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, 2007, 129(5): 571-583.
- [26] 26 张协衍. 网络化多智能体系统的一致性控制研究[D]. 湖南: 湖南大学博士学位论文, 2014.
- [27] 27Zhang L X, Gao H J, Kaynak O. Network-induced constraints in networked control systems-a survey[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 403-416.
- [28] 28You K Y, Xie L H. Survey of recent progress in networked control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(2): 101-117.
- [29] 29Fan Y, Feng G, Wang Y, Song C. Distributed event-triggered control of multi-agent systems with combinational measurements[J]. Automatica, 2013, 49(2): 671-675.
- [30] 30Degroot M H. Reaching a consensus[J]. Journal of the American Statistical Association, 1974, 69(345): 118-121.
- [31] 31 闵海波. 一类 Euler-Lagrange 系统的分布式协调控制[D]. 西安: 第二炮兵工程学院, 2012.
- [32] 32Tanner H G, Jadbabaie A, Pappas G J. Flocking in fixed and switching networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5): 863-868.
- [33] 33Sarlette A, Sepulchre R, Leonard N E. Autonomous rigid body attitude synchronization[J]. Automatica, 2009, 45(2): 572-577.

-
-
- [34] 34Cortes J. Distributed algorithms for reaching consensus on general functions[J]. Automatica, 2008, 44(3): 726-737.
 - [35] 35Reynolds C. Flocks, birds, and schools: a distributed behavioral model[J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 25-34.
 - [36] 36Benediktsson J, Swain P. Consensus theoretic classification methods[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 1992, 22(4): 688-704.
 - [37] 37Vicsek T, Czirok A, Jacob E B, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letter, 1995, 75(6): 1226-1229.
 - [38] 38Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(9): 988-1001.
 - [39] 39Saber R, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
 - [40] 40Ren W, Beard R. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
 - [41] 41Saber R, Fax J, Murray R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
 - [42] 42Lin P, Jia Y. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 2008, 387(1): 303-313.
 - [43] 43Hu J, Feng G. Distributed tracking control of leader-follower multi-agent systems under noisy measurement[J]. Automatica, 2010, 46(8): 1382-1387 .
 - [44] 44Li T, Wu F, Zhang J. Multi-agent consensus with relative-state-dependent measurement noises[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(9): 2463-2468.
 - [45] 45Ferrari-Trecate G, Galbusera L, Marciandi M P E, Scattolini R. Model predictive control schemes for consensus in multi-agent systems with single- and double-integrator dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(11): 2560-2572.
 - [46] 46Ren W. On consensus algorithms for double-integrator dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(6): 1503-1509.
 - [47] 47Yu W, Chen G, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1089-1095.
 - [48] 48He W, Cao J. Consensus control for high-order multi-agent systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 5(1): 231-238.
 - [49] 49Du H, Li S, He Y, Cheng Y. Distributed high-order finite-time consensus algorithm for multi-agent systems[C]. In Proceedings of the 32th chinese control conference, 2013, 603-608.
 - [50] 50Rezaee H, Abdollahi F. Average consensus over high-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(11): 3047-3052.
 - [51] 51Li Z, Ding Z. Distributed adaptive consensus and output tracking of unknown linear systems

- on directed graphs[J]. Automatica, 2015, 55(C): 12-18.
- [52] 52Li Z, Wen G, Duan Z, Ren W. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1152-1157.
- [53] 53Zhao Z, Lin Z. Global leader-following consensus of a group of general linear systems using bounded controls[J]. Automatica, 2016, 68(1): 294-304.
- [54] 54Yu W, Zheng W, Chen G, Ren W, Cao J. Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data[J]. Automatica, 2011, 47(7).
- [55] 55Liu C L, Liu F. Consensus problem of second-order multi-agent systems with time-varying communication delay and switching topology[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2011, 22(4): 672-678.
- [56] 56Cheng L, Hou Z, Tan M, Wang X. Necessary and sufficient conditions for consensus of double-integrator multi-agent systems with measurement noises[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(8): 1958-1963.
- [57] 57Zhou B, Lin Z. Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays[J]. Automatica, 2014, 50(2): 452-464.
- [58] 58Hou Z, Cheng L, Tan M. Decentralized robust adaptive control for the multiagent system consensus problem using neural networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2009, 39(3): 636-647.
- [59] 59Abhijit D, Lewis F L. Distributed adaptive control for synchronization of unknown nonlinear networked systems[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2014-2021.
- [60] 60Zhao Y, Li B, Qin J, Gao H. H^∞ consensus and synchronization of nonlinear systems based on a novel fuzzy model[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6): 2157-2169.
- [61] 61Su H, Chen G, Wang X, Lin Z L. Adaptive second-order consensus of networked mobile agents with nonlinear dynamics[J]. Automatica, 2011, 47(2): 368-375.
- [62] 62Yu W, Chen G, Cao M, Kurths J. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2010, 40(3): 881-891.
- [63] 63Fan M, Chen Z, Zhang H. Semi-global consensus of nonlinear second-order multi-agent systems with measurement output feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2222-2227.
- [64] 64Mei J, Ren W, Ma G. Distributed coordination for second-order multi-agent systems with nonlinear dynamics using only relative position measurements[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1419-1427.
- [65] 65Chung S J, Slotine J E. Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(3): 686-700.
- [66] 66Cai H, Huang J. Leader-following attitude consensus of multiple rigid body systems by

- attitude feedback control[J]. Automatica, 2016, 69(C): 87-92.
- [67] 67Dimarogonas D V, Egerstedt M, Kyriakopoulos K J. A leader-based containment control strategy for multiple unicycles[C]. In Proceedings of the IEEE conference on decision control, San Diego, CA, 2006: 5968-5973.
- [68] 68Xu W, Cao J, Yu W, Lu J. Leader-following consensus of non-linear multi-agent systems with jointly connected topology[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(6): 432-440.
- [69] 69Li Z, Ren W, Liu X, Fu M. Consensus of multi-agent systems with general linear and Lipschitz nonlinear dynamics using distributed adaptive protocols[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1786-1791.
- [70] 70Yoo S J. Distributed adaptive containment control of uncertain nonlinear multi-agent systems in strict-feedback form[J]. Automatica, 2013, 49(7): 2145-2153.
- [71] 71Li W, Zhang J. Distributed practical output tracking of high-order stochastic multi-agent systems with inherent nonlinear drift and diffusion terms[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3231-3238.
- [72] 72Zhang X, Liu L, Feng G. Leader-follower consensus of time-varying nonlinear multi-agent systems[J]. Automatica, 2015, 52: 8-14.
- [73] 73Wang X, Ji H. Leader-follower consensus for a class of nonlinear multi-agent systems[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2012, 10(1): 27-35.
- [74] 74 杨明, 刘先忠. 矩阵论[M]. 湖北武汉: 华中科技大学出版社, 2003.
- [75] 75Zhu W. Consensus of multiagent systems with switching jointly reachable interconnection and time delays[J]. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 2012, 42(2): 348-358.
- [76] 76 Abdessameud A, Tayebi A. On consensus algorithms design for double integrator dynamics[J]. Automatica, 2013, 49(1): 253-260.
- [77] 77Valcher M, Misra P. On the consensus and bipartite consensus in high-order multi-agent dynamical systems with antagonistic interactions[J]. Systems & Control Letters, 2014, 66(1): 94-103.
- [78] 78Zhang H, Lewis F L. Adaptive cooperative tracking control of higher-order nonlinear systems with unknown dynamics[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1432 - 1439.
- [79] 79Tuna S. Conditions for synchronizability in arrays of coupled linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(10): 2416-2420.
- [80] 80Scardovi L, Sepulchre R. Synchronization in networks of identical linear systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2557-2562.
- [81] 82Li Z, Ren W, Liu X, Xie L. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols[J]. Automatica, 2013, 49(7): 1986-1995.
- [82] 85Yu W, Ren W, Zheng W X, Chen G, Lü J. Distributed control gains design for consensus in multi-agent systems with second-order nonlinear dynamics[J]. Automatica, 2013, 49(7):

- 2107-2115.
- [83] 86Zhang H, Li Z, Qu Z, Lewis F L. On constructing Lyapunov functions for multi-agent systems[J]. Automatica, 2015, 58(C): 39 – 42.
 - [84] 87Shen Y, Liu L, Dowell E H. Adaptive fault-tolerant robust control for a linear system with adaptive fault identification[J]. IET Control Theory Applications, 2013, 7(2): 246 – 252.
 - [85] 88Wang J, Pei H L, Wang N Z. Adaptive output feedback control using fault compensation and fault estimation for linear system with actuator failure[J]. International Journal of Automatic and Computation, 2013, 10(5): 463 – 471.
 - [86] 89Coron J M, Praly L. Adding an integrator for the stabilization problem[J]. Systems and Control Letters, 1991, 17: 89-104.
 - [87] 91Ding S H, Li S H, Li Q. Stability analysis for a second order continuous finite-time control system subject to a disturbance[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2009, 7(3): 271-176.
 - [88] 92Hong Y, Huang J, Xu Y. On an output feedback finite time stabilization problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(2): 305-309.
 - [89] 93Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(5): 678-682.
 - [90] 94Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 2005, 17(2): 101-127.
 - [91] 95Xiao F, Wang L, Chen J, Gao Y. . Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2606-2601.
 - [92] 96Lu X, Lu R, Chen S, Lu J. Finite-time distributed tracking control for multi-agent systems with a virtual leader[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2013, 60(2): 352-362.
 - [93] 97Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problem for networks of dynamic agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955.
 - [94] 98Xiao F, Wang L, Chen T. Finite-time consensus in networks of integrator-like dynamic agents with directional link failure[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 756-762.
 - [95] 99Li S, Du H, Lin X. Finite-time consensus algorithm for multiagent systems with double-integrator dynamics[J]. Automatica, 2011, 47(8), 1706-1712.
 - [96] 100He X, Wang Q, Yu W. Finite-time containment control for second-order multiagent systems under directed topology[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2014, 61(8): 619-623.
 - [97] 101Du H, He Y, Cheng Y. Finite-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems using output feedback control[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2014, 61(6): 1778-1788.
 - [98] 102Zhao L, Jia Y. Finite-time consensus for second-order stochastic multi-agent systems with

- nonlinear dynamics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270(1): 278-290.
- [99] 103Cai H, Huang J. The leader following consensus control of multiple rigid spacecraft systems[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1109-1115.
- [100] 104Khoo S, Xie L, Man Z. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems[J]. IEEE Transactions on Mechatronics, 2009, 14(2): 219-228.
- [101] 106Fu J, Wang J. Finite-time coordinated tracking for high-order uncertain nonlinear multi-agent systems with directed communication graphs[C]. In Proceedings of the 33th chinese control conference, 2014, 1081-1086.
- [102] 108Huang X Q, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 2005, 41(5): 881 – 888.
- [103] 109El-Ferika S, Qureshi A, Lewis F L. Neuro-adaptive cooperative tracking control of unknown higher-order affine nonlinear systems[J]. Automatica, 2014, 50(3): 798-808.
- [104] 110Wang B, Ji H, Chen H, Xi H. The coordinated passivity techniques for the excitation and steam-valving control of generator[C]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(5): 104-109.
- [105] 111Khoo S, Yin J, Man Z, Yu X. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1403-1410.
- [106] 112Yu S, Long X. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode[J]. Automatica, 2015, 54: 158-165.
- [107] 113Zuo Z. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multiagent networks[J]. Automatica, 2015, 54: 305-309.
- [108] 114Senthilkumar T, Balasubramaniam P. Delay-dependent robust stabilization and H^∞ control for nonlinear stochastic systems with Markovian jump parameters and interval time-varying delays[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 151(1): 100-120.
- [109] 115Kao Y, Xie J, Wang C, Karimi H. A sliding mode approach to H^∞ non-fragile observer-based control design for uncertain Markovian neutral-type stochastic systems[J]. Automatica 2015, 52: 218-226.
- [110] 116Rakkiyappan R, Zhu Q, Chandrasekar A. Stability of stochastic neural networks of neutral type with Markovian jumping parameters: a delay fractioning approach[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(3): 1553-1570.
- [111] 117Cui M, Wu Z, Xie X. Output feedback tracking control of stochastic Lagrangian systems and its application[J]. Automatica 2014, 50(5): 1424-1433.
- [112] 118Zhao L, Jia Y. Finite-time attitude stabilization for a class of stochastic spacecraft systems[J]. IET Control Theory & Applications. 2015, 9(8): 1320-1327.
- [113] 119Li T, Zhang J. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(9): 2043-2057.
- [114] 121Wen G, Duan Z, Z. Li, G. Chen, Stochastic consensus in directed networks of agents with

- nonlinear dynamics and repairable actuator failures[J]. IET Control Theory & Applications. 2012, 6(11) 1583-1593.
- [115] 122Zheng Y, Chen W, Wang L. Finite-time consensus for stochastic multi-agent systems[J]. International Journal of Control, 2011, 84(10): 1644-1652.
- [116] 125Gao L, Cui Y, Xu X, Zhao Y. Distributed consensus protocol for leader-following multi-agent systems with functional observers[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(11): 5173-5190.
- [117] 126Zhou B, Xu C, Duan G. Distributed and truncated reduced-order observer based output feedback consensus of multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2264-2270.
- [118] 127Liu T, Jiang Z. Distributed output-feedback control of nonlinear multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(11): 2912-2917.
- [119] 128Zhao Y, Wen G, Duan Z, Xu X. A new observer-type consensus protocol for linear multi-agent dynamical systems[C]. in Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, pp. 5975-5980, 2011.
- [120] 129Xu J, Xie L, Li T, Lum K Y. Consensus of multi-agent systems with general linear dynamics via dynamic output feedback control[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(1): 108-115.
- [121] 130Seo J H, Shim H, Back J. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2659-2664.
- [122] 131Cui M, Wu Z, Xie X, Shi P. Modeling and adaptive tracking for a class of stochastic Lagrangian control systems[J]. Automatica, 2013, 49(3): 770-779.
- [123] 134Mazenc F, Praly L, Dayawansa W P. Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples[J]. Systems & Control Letters, 1994, 23(2): 119-125.
- [124] 135Praly L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 1103-1108.
- [125] 136Wang H, Chen B, Liu X, Liu K, Lin C. Adaptive neural tracking control for stochastic nonlinear strict-feedback systems with unknown input saturation[J]. Information Sciences, 2014, 269(7): 300-315.
- [126] 137Deng H, Krstic M, Williams R. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(8): 1237-1253.
- [127] 138Wen G, Zhao Y, Duan Z, Yu W, Chen G. Containment of higher-order multi-leader multi-agent systems: a dynamic output approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(4): 1135-1140.
- [128] 139Guo G, Ding L, Han, Q. A distributed event-triggered transmission strategy for sampled data consensus of multi-agent systems[J]. Automatica, 2014, 50(5): 1489-1496.

-
-
- [129] 141Hu W, Liu L, Feng G. Consensus of linear multi-agent systems by distributed event-triggered strategy[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(1): 148-157.
 - [130] 142Astrm K J. Event based control[M]. Analysis and Design of Nonlinear Control Systems. Springer Berlin Heidelberg, 2008, 127-147.
 - [131] 143Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(5): 1291-1297.
 - [132] 144Meng X, Chen T. Event based agreement protocols for multi-agent networks[J]. Automatica, 2013, 49(7): 2125-2132.
 - [133] 145Cao M, Xiao F, Wang L. Event-based second-order consensus control for multi-agent systems via synchronous periodic event detection[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2452-2457.
 - [134] 146Mu N, Liao X, Huang T. Leader-following consensus in second-order multiagent systems via event-triggered control with nonperiodic sampled data[J]. IEEE Transactions on Circuits and systems-II: Express Briefs, 2015, 62(10): 1007-1011.
 - [135] 147Cheng Y, Ugrinovskii V. Event-triggered leader-following tracking control for multivariable multi-agent systems[J]. Automatica, 2016, 70(C): 204-210.
 - [136] 148Yang D, Ren W, Liu X, Chen W. Decentralized event-triggered consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs[J]. Automatica, 2016, 69(C): 242-249.
 - [137] 149Liuzza D, Dimarogonasa D V, Bernardo M, Johansson K H. Distributed model based event-triggered control for synchronization of multi-agent systems[J]. Automatica, 2016, 73(C): 1-7.
 - [138] 150Yue D, Yin X. Adaptive event-triggered consensus for multi-agent systems with stochastic switching topologies and delays[C]. in IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2013, 1-6.
 - [139] 151Fan Y, Liu L, Feng G, Wang Y. Self-triggered consensus for multi-agent systems with Zeno-free triggers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2779-2784,.
 - [140] 152Zhan J, Li X. Self-triggered consensus of multi-agent systems via model predictive control[C]. In 14th IFAC Symposium on Large Scale Complex Systems: Theory and Applications, 2016, 49(4): 19-24.
 - [141] 153Wu M, Zhang H, Yan H, Ren H. Self-triggered output feedback control for consensus of multi-agent systems[J]. Neurocomputing, 2016, 190: 179-187.
 - [142] 154Zhang H, Feng G, Yan H, Chen Q. Observer-based output feedback event-triggered control for consensus of multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(9): 4885-4894.
 - [143] 155Ma Q, Miao G. Output consensus for heterogeneous multi-agent systems with linear dynamics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271(C): 548-555.
 - [144] 156Xing L, Wen C, Liu Z, Su H, Cai J. Event-triggered adaptive control for a class of uncertain

- nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(4): 2071-2076.
- [145] 157Zhang H, Yue D, Yin X, Hu S, Dou C. Finite-time distributed event-triggered consensus control for multi-agent systems[J]. Information Sciences, 2016, 339: 132-142.
- [146] 158Shi X, Li L, Lu J, Liang J, Cao J. Event-triggered consensus for double-integrator multi-agent systems[J]. IEEE International Conference on Industrial Technology, 2016, 1396-1401.
- [147] 159Xu W, Ho D W C, Li L, Cao J. Event-triggered schemes on leader-following consensus of general linear multiagent systems under different topologies[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(1): 212-223.
- [148] 160Huang N, Duan Z, Wen G, Zhao Y. Event-triggered consensus tracking of multi-agent systems with Lure nonlinear dynamics[J]. International Journal of Control, 2016, 89(5): 1-23.
- [149] 161Yang D, Ren W, Liu X. Decentralized consensus for linear multiagent systems under general directed graphs based on event-triggered/selftriggered strategy[C]. in Proceedings of of 53th IEEE CDC, 2014, 1983-1988.
- [150] 162Zhang H, Feng G, Yan H, Chen Q. Distributed self-triggered control for consensus of multi-agent systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(9): 3476-3488.
- [151] 163Wu W, Reimann S, Liu S. Event-triggered control for linear systems subject to actuator saturation[J]. International Federation of Automatic Control, 2014, 47(3): 9492-9497.
- [152] 164Wang X L, Su H, Li J, Wang X F. Self-triggered based semi-global consensus tracking of multi-agent systems with input Saturation[C]. in Proceedings of 34th Chinese Control Conference, 2015, 7333-7338.
- [153] 165Wang X L, Su H, Wang X F, Chen G. Fully distributed event-triggered semi-global consensus of multi-agent systems with input saturation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(6): 5055-5064.
- [154] 166Zhou B, Liao X, Huang T, Li H, Chen G. Event-based semiglobal consensus of homogenous linear multi-agent systems subject to input saturation[J]. Asian Journal of Control, 2016, 19(2): 564-574.
- [155] 167Yin X, Yue D, Hu S. Adaptive periodic event-triggered consensus for multi-agent systems subject to input saturation[J]. International Journal of Control, 2016, 89(4): 653-667.
- [156] 168Hu T, Lin Z, Chen B. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. Automatica, 2002, 38(2): 351-359.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

(一) 参与的科研项目

- [1] 非理想通信网络环境下多飞行器高效优化协同编队控制, 河北省研究生创新资助项目(课题编号: 2016SJBS017), 资助期限: 2016.01 至 2017.01, 项目负责人。
- [2] 无线网络化非线性系统滤波研究, 国家自然科学基金青年科学基金(课题编号: 61403330), 资助期限: 2015.01 至 2017.12, 主要参与人。
- [3] 非最小相位高超声速飞行器多变量约束的预定性能控制研究, 国家自然科学基金(课题编号: 61503323), 资助期限: 2016.01 至 2018.12, 主要参与人。
- [4] 基于非完整信息的非线性系统滤波研究, 河北省高等学校自然科学研究青年基金项目(课题编号: QN201406), 资助期限: 2015.01 至 2017.12, 主要参与人。
- [5] 弹性高超声速飞行器非线性控制策略研究, 燕山大学青年教师自主研究计划(课题编号: 14LGB027), 资助期限: 2014.11 至 2017.11, 主要参与人。
- [6] 具有输入约束的遥操作康复机器人系统的鲁棒自适应控制研究, 秦皇岛市科技计划项目(课题编号: 201502A178), 资助期限: 2015.06 至 2017.05, 主要参与人。

(二) 已发表论文

- [1] **Xiu You**, Changchun Hua and Xinping Guan, Event-triggered leader-following consensus for nonlinear multi-agent systems subject to actuator saturation using dynamic output feedback method[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*, 2017. (SCI, 录用).
- [2] Changchun Hua, **Xiu You** and Xinping Guan, Leader-following consensus for a class of high-order multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2016, 73: 138-144. (SCI).
- [3] Changchun Hua, **Xiu You** and Xinping Guan, Adaptive leader-following consensus for second-order time-varying nonlinear multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(6): 1532-1539. (SCI).
- [4] **Xiu You**, Changchun Hua and Xinping Guan, Distributed adaptive event-triggered control for leader-following consensus of multi-agent systems[J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 11. (SCI).
- [5] **Xiu You**, Changchun Hua, Dan Peng and Xinping Guan, Leader-following consensus for multi-agent systems subject to actuator saturation with switching topologies and time-varying delays[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 10(2): 14-150. (SCI).

- [6] Hongjiu Yang, **Xiu You**, Changchun Hua, Attitude tracking control for spacecraft formation with time-varying delays and switching topology[J]. *Acta Astronautica*, 2016, 126: 98-108. (SCI).
- [7] Changchun Hua, Xinglong Sun, **Xiu You** and Xinping Guan, Finite-time consensus control for second-order multi-agent systems without velocity measurements[J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 48(2): 1-10. (SCI).
- [8] **Xiu You**, Changchun Hua and Xinping Guan, Event-triggered leader-following consensus for high-order nonlinear multi-agent systems via dynamic output feedback control[J]. *Automatica*. (二审).
- [9] Changchun Hua, **Xiu You**, Hongnian Yu and Xinping Guan, Leader-following consensus for high-order stochastic multi-agent systems via dynamic output feedback control[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*. (二审).

致 谢

时光如梭，岁月如流，三年半的博士生活转瞬即逝。值此论文封笔之际，首先衷心的感谢我的导师华长春教授对我的悉心指导与帮助。能够在做人、做事、做学问等诸多方面得到恩师的指导与帮助，是我一生的荣幸。

首先，感谢我的指导老师华长春教授。在这三年半的读博期间里，华老师不仅教会了我如何在做研究中开阔自己的研究思路，提高自己的科研水平，还教会了我如何积极的面对困难，完善自己。回顾这三年半的时光，每当我对科研感到迷茫，想逃离至自己的科研“舒适区”时，华老师都在百忙之中抽出时间我进行耐心的教诲，其广阔的学术视野、敏锐的洞察力和深邃的思想总让我在迷茫之时如拨云见日、豁然开朗。一四年到如今毕业之际，短短三年半，承蒙华老师对我不断的鼓励，让我不仅在学术上获得了很大的成长，还在生活上从一个刚读博时自卑的我变成如今能自信面对各种生活难题的我。华老师对我的栽培和器重，我将铭记终身。

衷心的感谢英国Bournemouth大学于洪年教授提供的学习和交流机会。在英国Bournemouth大学进行学术交流的短短三个月中，我深深感受到了于老师持久的科研热情、活跃的科研思维和严谨的科研态度。其淡泊名利、静心做事之人生态度永远值得我认真学习。

感谢我的硕士导师刘志新教授和杨洪玖副教授。他们对我硕士期间科研工作的认真指导和帮助，为我读博期间的科研拔高打下了坚实的基础。感谢“网络控制与信息处理研究中心”的各位老师。感谢关新平老师、罗小元老师、唐英干老师、马锴老师、李丽老师、赵光磊老师、王芳老师的指导。

感谢杨晔、杨亚娜师姐和李军朋师兄一直以来对我方方面面的照顾和帮助。他们勤勉的工作态度和积极地生活态度亦为我树立了榜样。感谢课题组的各位师兄姐妹们在我读博期间对我的帮助。在他们营造的欢乐的学习气氛中，我快乐的度过了三年半的博士生生活。

深深的感谢我的父母和弟弟妹妹。感谢他们这么多年来为我做出的牺牲和奉献。感谢我的公公婆婆，感谢他们在我求学期间对家里默默的付出。感谢我的爱人刘启东，感谢他对我包容和照顾。感谢我所有亲人们的理解和支持。他们对我无私的爱和支持一直是我求学路上勇敢前行的动力。“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索”。

作者简介



游秀，女，汉族，1991年2月出生，籍贯山西省晋中市。

2008.09-2012.07（本科）：燕山大学自动化专业，获工学学士学位。

2012.09-2014.07（硕士）：燕山大学控制理论与控制工程专业，获工学硕士学位。

2014.09-至今（博士）：燕山大学控制科学与工程专业，研究方向为多智能体系统协同控制，非线性作系统控制。

2016.04-2016-07：英国 Bournemouth 大学交流学习。

获奖情况：2012 年度硕士研究生国家奖学金；

2014 年度博士研究生国家三等学业奖学金；

2015 年度博士研究生国家奖学金；

2015 年度博士研究生国家一等学业奖学金；

2016 年度博士研究生国家一等学业奖学金。