燕山大学 2021 年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：线性系统理论　考试时间：2021 年 12 月 5 日

学院：电气工程学院　专业：＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五						总分
得分											

一、某线性时不变系统描述如下

$$\dot{x}_1 = \mathrm{a}x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u$$
$$y = x_1$$

其中 a 为常数。试

1. 当 a=2 时，确定该系统的传递函数 g(s)；
2. 当 a=1 时，求系统的状态转移矩阵；
3. 用 Lyapunov 稳定性判据判断 a=-3 时自治系统是否稳定。（20 分）

二、给定单输入单输出连续时间线性时不变受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

再指定系统期望闭环特征值为 $\lambda_1^* = -1$，$\lambda_{2,3}^* = -1 \pm j, \lambda_4^* = -2$，状态观测器特征值为 $s_1 = -3$，$s_{2,3} = -3 \pm 2j$，试求具有观测器的状态反馈控制系统综合状态反馈阵和状态观测器。（20 分）

三、给定连续时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1）判断系统能否由输入变换和状态反馈实现动态解耦；

2）若能，定出使系统实现积分型解耦的输入变换阵和状态反馈阵。（20）

1）计算系统的结构特征指数与结构特征向量

$$c_1'B = [1 \quad 2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

得到$d_1 = 0$，$E_1 = c_1'B = [1 \quad 2]$

$$c_2'B = [0 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$c_2'AB = [0 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

得到$d_2 = 1$，$E_2 = c_2'AB = [1 \quad 0]$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

易知矩阵 E 为非奇异，故系统能由输入变换和状态反馈实现动态解耦。

2）

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}，F = \begin{bmatrix} c_1'A \\ c_2'A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L = E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$K = E^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

四、设某受控系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s}{(s+2)^2} \\ 1 & \dfrac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

1）试给出该系统的一个不可简约右 MFD，并分析该系统是否完全能观；

2）试通过状态反馈使闭环系统极点配置为：-5±j3，-1。（20 分）

1）

$$\mathrm{G(s)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ 0+1 & 1-\frac{s+2}{S+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ 0 & \frac{-1}{S+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{sp}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ 0 & \frac{-1}{S+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & -(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathrm{N(s)}\, D^{-1}\mathrm{(s)}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = 2$$

所以$\{N(s)\ D(s)\}$为右互质，也即该有 MFD 不可简约，系统完全能观。

2）

系统的列次数$d_1 = 1$，$d_2 = 2$，deg det(D(s)) = 3 = $d_1 + d_2$，故系统为列既约。

$$D_{hc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D_{lc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},\ \psi(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$D_{hc}^{-1} D_{lc} \psi(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4s+4 \end{bmatrix}$$

期望多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+5-j3)(s+5+j3)(s+1) = s^3 + 11s^2 + 44s + 34$$

得

$$\alpha_1(s)=11，\alpha_2(s)=44s+34$$

得

$$\begin{bmatrix}\alpha_1(s) & \alpha_2(s) =\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 44s+34\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

设

$$K=[k_1 \quad k_2]$$

则

$$k_1[1]=\begin{bmatrix}11\\ -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ -1\end{bmatrix}$$

$$k_2\begin{bmatrix}s\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44s+34\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 4s+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44s+34\\ -4s-4\end{bmatrix}$$

解得

$$k_1=\begin{bmatrix}10\\ -1\end{bmatrix}，k_2=\begin{bmatrix}44 & 34\\ -4 & -4\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}10 & 44 & 34\\ -1 & -4 & -4\end{bmatrix}.$$