第 44 卷 第 3 期
2020 年 5 月

燕山大学学报
Journal of Yanshan University

Vol. 44 No. 3
May 2020

文章编号: 1007 －791X(2020) 03 －0274 －07

基于线性算子不等式的时滞电力系统稳定性分析

华长春*，王毅博

(燕山大学 电气工程学院，河北 秦皇岛 066004)

摘　要: 针对电力系统存在的时延现象，本文讨论了时滞多区域负载频率控制系统的稳定性问题。考虑大规模电力系统的时滞特性，首次使用偏积分方程表示时滞多区域负载频率控制系统，然后构造完全型 L-K 泛函，提出一种保守性较低的稳定判据，以线性算子不等式的形式表示。最后，通过数值算例和仿真结果表明了本文所提方法的有效性。

关键词: 电力系统; 时滞; 负载频率控制; 稳定性

中图分类号: TP13　　**文献标识码:** A　　DOI: 10.3969/j.issn.1007 －791X.2020.03.009

0　引言

频率是衡量电力系统稳定运行的重要指标。电网频率的波动可能会降低系统的机械功率，甚至影响整个电网系统的稳定运行[1-2]。负载频率控制系统(Load Frequency Control，LFC) 通过调节电网的电力供需，将频率维持在某个固定值。LFC 系统中信息传输大多依靠开放式通讯网络，这种方式能够以较低功耗实现双向通讯。然而，开放式通讯网络会导致信号在监测和传输过程中出现等待、阻塞和丢包等情况，称为时滞现象。时滞会直接影响电网的性能，甚至造成电网系统的不稳定。因此，准确估计电力系统的时滞稳定裕度能够为 LFC 系统的控制器设计提供指导，具有重要的现实意义。

具有开放式通信网络的 LFC 系统是一个典型的时滞系统[3-5]。时滞微分方程(Delay Differential Equation，DDE) 是表示时滞 LFC 系统最常用的方法之一。使用 DDE 表示的时滞 LFC 系统的稳定性问题已得到广泛研究。文献 [6] 讨论了具有 PI 控制器的单区域和多区域 LFC 系统的稳定性问题，获得了时滞稳定裕度和控制器参数之间的关系。文献 [7] 通过构建新型 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函，进一步研究了控制器增益与时滞之间的联系以及不同区域之间的相互作用。文献 [8] 针对单区域 LFC 系统，利用逆凸不等式方法，得出一种鲁棒稳定判据。通过构建增广型 L-K 泛函，文献 [9] 利用 Bessel-Legendre 积分不等式处理交叉项，研究了时滞单区域 LFC 系统稳定性问题，提出一种保守性较低的稳定判据。文献 [10] 研究了具有时滞和非线性干扰的 LFC 系统稳定性问题，通过 Bessel-Legendre 积分不等式建立了新型稳定判据。文献 [11] 提出一种模型重建的方法，结合 Wirtinger 积分不等式，得出一种计算复杂度较低的稳定判据。综上所述，针对时滞 LFC 系统的稳定性问题，现有文献普遍采用基于 DDE 的时域方法，并取得了许多成果。由于构造 L-K 泛函没有普遍规律，分析过程需要处理积分项，不可避免地增加了稳定判据的保守性。因此，针对时滞多区域 LFC 系统的稳定性问题还有很大的研究空间。

偏微分方程和常微分方程(PDE-ODE) 的耦合形式也可用于表示系统的时滞现象[12-13]。但尚未成为时滞系统分析和综合的主流。最近，基于半群理论和线性算子理论，文献 [14] 提出了一类线性偏积分算子(Partial Integral，PI) ，基于 PI 算子可

收稿日期: 2020-01-17　　**责任编辑:** 孙峰

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2018YFB1308304) ; 国家杰出青年科学基金资助项目(61825304)

作者简介: * 华长春(1979-) ，男，江苏泰州人，博士，教授，博士生导师，主要研究方向为非线性动力系统的控制及应用、网络化控制系统的分析与设计，Email: cch@ysu.edu.cn。

将 PDE-ODE 表示的时滞系统直接转化为偏积分方程(Partial Integral Equation,PIE)的形式。文献[5]利用 MATLAB 工具箱 PIETOOLS 能够高效地构造和求解 PI 算子不等式。通过构建完全型 L-K 泛函来分析系统的稳定性,分析过程不涉及积分不等式技术的使用,因此所得结果几乎不包含保守性。线性算子理论为时滞多区域 LFC 系统的稳定性分析提供了新思路。

本文进一步研究了时滞多区域 LFC 系统的稳定性分析问题。首先,构建 PIE 表示的时滞多区域 LFC 系统模型,构建完全型 L-K 泛函并以 PI 算子内积的形式表示,避免在稳定性分析中使用积分不等式技术。然后,基于李雅普诺夫方法得出一种保守性较低的稳定判据,结合 PIETOOLS 工具箱获得系统的时滞稳定裕度,进一步分析时滞稳定裕度对控制器参数设计的影响。最后,数值算例和仿真试验表明了所提方法的有效性。

文中标号: $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间; $L_2^n[X]$ 表示从 X 到 $\mathbf{R}^n$ 上的平方可积的向量函数; 定义空间 $W_2^n[X]:=\{x: x\in L_2^n[X], \dot{x}\in L_2^n[X]\}$ 和 $Z_{m,n,K}:=\{\mathbf{R}^m\times L_2^n[-\tau_1,0]\times\cdots\times L_2^n[-\tau_K,0]\}$, $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_Z$ 表示空间 $Z_{m,n,K}$ 上的内积,对任意 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 有 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_Z=\int_X \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\mathrm{d}s$;对于算子 A,A^* 为 A 的共轭算子; $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 表示合适维数的单位矩阵和零矩阵; 对于矩阵 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 的转置,$\boldsymbol{P}>0$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 为正定矩阵。diag{ } 表示对角矩阵。

1　时滞多区域 LFC 系统模型

1.1　传统系统模型

本节回顾了传统时滞多区域 LFC 系统模型,其结构如图 1。其中,ΔP_{vi}、ΔP_{di}、ΔP_{mi} 和 Δf_i 分别代表 i 区域的气门阀位置变化量、负载扰动、机械输出功率和系统频率偏差。M_i 和 D_i 分别是 i 区域发电机的转动惯量和阻尼系数。T_{ti} 和 T_{gi} 分别表示 i 区域汽轮机和机组调速器的惯性时间常数,T_{ij} 代表区域 i 和区域 j 间联络线的同步系数,ΔP_{tie-i} 和 $ACE_i(t)$ 表示区域 i 联络线上的净交换功率偏差和区域控制误差。为方便分析,使用静态输出反馈控制策略代替 PID 控制策略,可得传统 LFC 系统模型如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)+\boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{P}_d(t), \tag{1}$$

式中

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}=[\Delta f_i,\Delta P_{tie-i},\Delta P_{mi},\Delta P_{vi},\int ACE_i(t)\,\mathrm{d}t],$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1N}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{N1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{NN}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{di1}\cdots\boldsymbol{A}_{diN}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_N\}$, $\Delta\boldsymbol{P}_d(t)=[\Delta P_{d1},\Delta P_{d2},\cdots,\Delta P_{dN}]^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}_{ii}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_i&\boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{C}}_i&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{ij}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{M_i}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{dii}=-\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{A}_{dij}=-\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{C}_{ij},$$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\dfrac{1}{T_{gi}}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{C}_i=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}_i&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\ \hat{\boldsymbol{C}}_i\hat{\boldsymbol{A}}_i&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}_{ij}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{C}}_i\hat{\boldsymbol{A}}_{ij}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\hat{\boldsymbol{C}}_i=[\beta_i,1,0,0],$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}_i=\begin{bmatrix}-\dfrac{D_i}{M_i}&-\dfrac{1}{M_i}&\dfrac{1}{M_i}&0\\ 2\pi\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}T_{ij}&0&0&0\\ 0&0&-\dfrac{1}{T_{ti}}&\dfrac{1}{T_{ti}}\\ -\dfrac{1}{T_{gi}R_i}&0&0&-\dfrac{1}{T_{gi}}\end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}_{ij}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 2\pi T_{ij}&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix},T_{ij}=T_{ji}。$$

需要注意的是区域间联络线上净交换功率偏差和为零,即

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta P_{tie-i}=0。$$

根据文献[1]可得,扰动并不会影响 LFC 系统的内部稳定性。因此,传统多区域 LFC 系统可转换为如下多重时滞系统的形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i), \tag{2}$$

其中,时滞满足 $0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\cdots\leqslant\tau_N$。

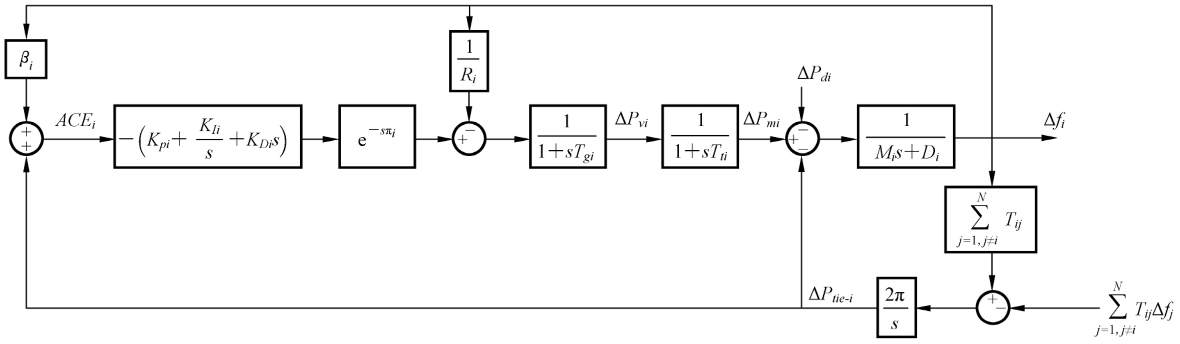


图 1 时滞多区域 LFC 系统框图

Fig. 1 Scheme diagram of delayed multiarea LFC system

1.2 基于 PIE 系统模型

本节根据 DDE 表示的传统多区域 LFC 系统模型，推导得出基于 PIE 的系统模型。首先引入 PI 算子的定义。

定义 1 对于线性算子 $H\begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix}: \mathbf{R}^m \times L_2^n[-1,0] \to \mathbf{R}^p \times L_2^q[-1,0]$ 满足如下形式：

$$\left(H\begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}\right)(s) := \begin{bmatrix} Px+\int_{-1}^{0} Q_1(s)\psi(s)\,ds \\ Q_2(s)x+\Xi(R_i,\psi) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中，

$$\Xi(R_i,\psi) = R_0(s)\psi(s) + \int_{-1}^{s} R_1(s,\eta)\psi(\eta)\,d\eta + \int_{s}^{0} R_2(s,\eta)\psi(\eta)\,d\eta,$$

矩阵函数 Q_1: $[-1,0] \to W_2^{p\times n}$，$Q_2$: $[-1,0] \to W_2^{q\times m}$，$R_0$: $[-1,0] \to W_2^{q\times n}$ R_1，R_2: $[-1,0] \times [-1,0] \to W_2^{q\times n}$，矩阵 $P \in \mathbf{R}^{p\times m}$，则称算子 H 为 PI 算子，且满足正定性。

证明 对于任意矩阵函数 G_1: $[-1,0] \times [-1,0] \to \mathbf{R}^{m_1\times n}$，$G_2$: $[-1,0] \times [-1,0] \to \mathbf{R}^{m_2\times n}$ 和函数 $f(s) \geqslant 0$，$s \in [-1,0]$，如下条件成立

$$P = S_{11}\int_{-1}^{0} f(s)\,ds,$$

$$Q = f(s)S_{12}G_1(s) + \int_{s}^{0} f(\eta)S_{13}G_2(\eta,s)\,ds + \int_{-1}^{s} f(\eta)S_{14}G_2(\eta,s)\,ds,$$

$$R_0(s) = f(s)G_1^{\mathrm{T}}(s)S_{22}G_1(s),$$

$$\begin{aligned} R_1(s,\eta) = {} & f(s)G_1^{\mathrm{T}}(s)S_{23}G_2(s,\eta) + f(\eta)G_2^{\mathrm{T}}(\eta,s)S_{42}G_1(\eta) + \\ & \int_{s}^{0} f(\theta)G_2^{\mathrm{T}}(\theta,s)S_{33}G_2(\theta,\eta)\,d\theta + \int_{\eta}^{s} f(\theta)G_2^{\mathrm{T}}(\theta,s)S_{43}G_2(\theta,\eta)\,d\theta + \\ & \int_{-1}^{\eta} f(\theta)G_2^{\mathrm{T}}(\theta,s)S_{44}G_2(\theta,\eta)\,d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(s,\eta) = {} & f(s)G_1^{\mathrm{T}}(s)S_{32}G_2(s,\eta) + f(\eta)G_2^{\mathrm{T}}(\eta,s)S_{24}G_1(\eta) + \\ & \int_{\eta}^{0} f(\theta)G_2^{\mathrm{T}}(\theta,s)S_{33}G_2(\theta,\eta)\,d\theta + \int_{s}^{\eta} f(\theta)G_2^{\mathrm{T}}(\theta,s)S_{34}G_2(\theta,\eta)\,d\theta + \\ & \int_{-1}^{s} f(\theta)G_2^{\mathrm{T}}(\theta,s)S_{44}G_2(\theta,\eta)\,d\theta, \end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

则 PI 算子 H 满足

$$H\begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix} \geqslant 0。\tag{4}$$

我们定义如下函数

$$\psi_i(t,s) = x(t+s\tau_i), s \in [-1,0], \tag{5}$$

显然，$\psi_i(t,s)$ 可以表示系统时滞信道的历史状态，其边界条件如下：

$$\psi_i(t,0) = x(t), \psi_{it}(t,s) = \frac{1}{\tau_i}\psi_{is}(t,s), \tag{6}$$

根据微积分基本定理，可得

$$\psi_i(t,s) = \psi_i(t,0) - \int_{s}^{0} \psi_{is}(t,\eta)\,d\eta, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\psi}_i(t,-1)=x(t-\tau) \tag{8}$$

定义

$$\boldsymbol{\psi}(t,s)=[\boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}(t,s),\boldsymbol{\psi}_2^{\mathrm{T}}(t,s),\cdots,\boldsymbol{\psi}_N^{\mathrm{T}}(t,s)]^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

结合(5)~(9),可得

$$\bar{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_s^0\dot{\boldsymbol{\psi}}_s(t,\eta)\,\mathrm{d}\eta=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\psi}_s(t,s), \tag{10}$$

式中

$\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\tau_1}\boldsymbol{I},\cdots,\frac{1}{\tau_N}\boldsymbol{I}\right\},\bar{\boldsymbol{I}}=[\boldsymbol{I},\cdots,\boldsymbol{I}]^{\mathrm{T}}$。

将(7)~(8)代入系统(2),可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^N\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)=\\&\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^N\boldsymbol{A}_i\left(\boldsymbol{x}(t)-\int_{-1}^0\boldsymbol{\psi}_{is}(t,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)=\\&\bar{\boldsymbol{A}}_0\boldsymbol{x}(t)-\int_{-1}^0\bar{\boldsymbol{A}}_i(s)\,\boldsymbol{\psi}_s(t,s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{11}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{A}}_0=\boldsymbol{A}_0+\sum_{i=1}^N\boldsymbol{A}_i,\bar{\boldsymbol{A}}_i=[\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_N]$。

根据文献[14],引入基础状态变量 $\boldsymbol{x}_f=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\psi}_s^{\mathrm{T}}(t,s)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{Z}_{m,n,K}$。系统(2)能够写成如下 PDE-ODE 耦合的形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \boldsymbol{\Xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_0\boldsymbol{x}(t)-\int_{-1}^0\bar{\boldsymbol{A}}_1(s)\,\boldsymbol{\psi}_s(t,s)\,\mathrm{d}s\\ \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{\psi}_s(t,s)\end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中,$\boldsymbol{\Xi}=\bar{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_s^0\dot{\boldsymbol{\psi}}_s(t,\eta)\,\mathrm{d}\eta$。

综合(11)~(12),定义 PI 算子 $T:\mathbf{Z}_{n,nN}\to\mathbf{Z}_{n,nN}$ 和 $A:\mathbf{Z}_{n,nN}\to\mathbf{Z}_{n,nN}$,将系统(2)转换为 PIE 的形式:

$$T\dot{\boldsymbol{x}}_f(t)=A\boldsymbol{x}_f(t), \tag{13}$$

式中

$A=H\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_0 & -\bar{\boldsymbol{A}}_1\\ \boldsymbol{0} & \{\mathrm{H},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\}\end{bmatrix},T=H\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{I}} & \{\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},-\boldsymbol{I}_{nK}\}\end{bmatrix}$。

DDE 表示的 LFC 系统(2)中包含了隐式动态 $x(t-\tau_i)$,加大了系统稳定性分析的难度。而基于 PIE 的 LFC 系统(13)通过边界条件(6)和状态 $\boldsymbol{\psi}(t,s)$ 定义系统隐式动态,使得系统形式更接近于线性系统,简化了系统的稳定性分析过程。

当 $\boldsymbol{\psi}(t,s)$ 满足边界条件(6)时,系统(13)的状态完全等价于系统(2),即两个系统具有相同的解 $x(t)$。所以,针对系统(2)的稳定性分析问题可以通过研究系统(13)得到。

2　稳定判据

本节给出了时滞多区域 LFC 系统的稳定判据。根据 PIE 表示的 LFC 系统模型,构建完全型 L-K 泛函,以算子不等式的形式给出了系统的稳定判据。最后利用 PIETOOLS 工具箱对判据进行求解,计算系统的时滞稳定裕度。

完全型 L-K 泛函具有如下形式:

$$\begin{aligned}V(t)=&\\&\int_{-1}^0\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t+s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}(s)\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(s) & \boldsymbol{S}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t+s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s+\\&\int_{-1}^0\int_{-1}^0\boldsymbol{x}(t+s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(s,\theta)\,\boldsymbol{x}(t+\theta)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{14}$$

将(14)表示为 PI 算子内积的形式,如下

$$V(t)=\langle\nu,H\nu\rangle_Z, \tag{15}$$

式中

$\nu:=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t,s)]^{\mathrm{T}},H:=H\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{Q} & \{\boldsymbol{S},\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\}\end{bmatrix}$。

完全型 L-K 泛函相比传统 L-K 泛函更具一般性。完全型 L-K 泛函(15)中的待定参数均为矩阵函数,而传统 L-K 函数中的待定参数均为矩阵。因此完全型 L-K 泛函具有较大的求解域,更具一般性,有利于降低所得判据的保守性。对于系统(13),得到如下稳定判据。

定理 1　如果存在 PI 算子: $H:=H\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}, & \boldsymbol{Q}_1\\ \boldsymbol{Q}_2, & \{\boldsymbol{R}_i\}\end{bmatrix}$,对于给定的时滞 $\tau_i,i=0,1,\cdots,N$,有以下不等式成立,则系统(13)是渐进稳定的。

$$T^*HA+A^*HT<0 \tag{16}$$

证明　基于 PI 算子理论,建立完全型 L-K 泛函如下:

$$V(\boldsymbol{x}_f)=\langle T\boldsymbol{x}_f,HT\boldsymbol{x}_f\rangle_Z, \tag{17}$$

由于 PI 算子是正定算子,所以对于任意 ε,$V(\boldsymbol{x}_f)\geqslant\varepsilon\|\boldsymbol{x}_f\|^2$ 成立。对 $V(\boldsymbol{x}_f)$ 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}_f)=&\langle T\boldsymbol{x}_f,HA\boldsymbol{x}_f\rangle_Z+\langle A\boldsymbol{x}_f,HT\boldsymbol{x}_f\rangle_Z=\\&\langle\boldsymbol{x}_f,(T^*HA+A^*HT)\boldsymbol{x}_f\rangle_Z,\end{aligned} \tag{18}$$

由(16)可得,$\dot{V}(x_f)\leqslant 0$。所以,系统(13)是渐进稳定的,证明完毕。

传统的时域方法在求解 L-K 泛函导数时,需要引入积分不等式技术处理交叉项,而积分不等式技术的本质是对泛函导数的近似求解,不可避

免地在稳定判据中引入保守性。本文提出的方法不涉及积分不等式技术的使用。因此，所提出的稳定判据具有较低的保守性。

对于定理 1 的求解可以基于 PIETOOLS 工具箱。首先根据相应系统参数，构建系统 PIE 表示的系统方程，然后设定时滞 h 的初始值，通过 PIETOOLS迭代求解算子不等式(15)是否存在可行解，进而判断系统是否为渐进稳定。求解时滞稳定裕度的计算流程如图 2 所示。

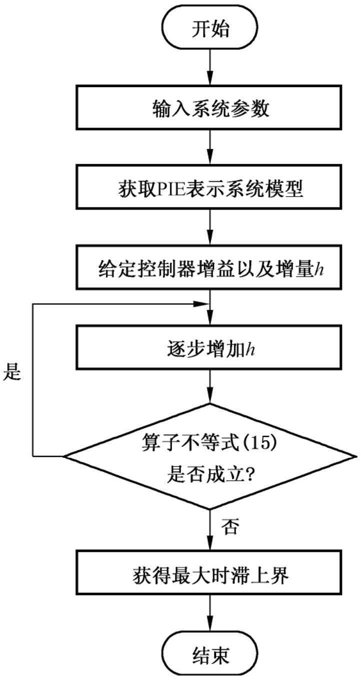


图 2 时滞稳定裕度的计算流程图

Fig. 2 Calculation flow chart of the maximum delay boundary

3 仿真结果

在本节中，以单区域和多区域 LFC 系统为例进行仿真研究，根据文献[1]给出的系统参数(如表 1 所示)。计算 LFC 系统在不同控制增益下的时滞稳定裕度，并将仿真结果与现有文献进行比较，表明本文所提方法的有效性与优越性。

表 1 系统参数表

Tab. 1 Table of system parameters

	T_t	T_g	R	D	β	M	T_{12}
区域 1	0.30	0.10	0.05	1.00	21.00	10.00	0.198 6
区域 2	0.40	0.17	0.05	1.50	21.50	12.00	0.198 6

3.1 时滞单区域 LFC 系统

针对时滞单区域 LFC 系统，将定理 1 所获得的时滞稳定裕度与文献[6]给出的结果进行比较，如表 2 所示。可以得出，在相同控制器增益下，定理 1 所得的时滞稳定裕度远大于文献[6]的结果。表明本文所提出稳定判据具有较低的保守性。

表 2 时滞单区域 LFC 系统时滞稳定裕度表

Tab. 2 Table of maximum delay boundary for delayed one-region LFC system s

K_P	K_I	文献[6]	本文方法	K_P	K_I	文献[6]	本文方法
0.20	0.05	30.39	34.22	0.60	0.10	12.30	17.19
0.40	0.05	26.38	35.83	0.60	0.15	8.94	11.27
0.60	0.05	20.69	34.92	0.60	0.20	7.05	8.31
0.10	0.10	16.06	16.11	0.80	0.10	8.92	14.29
0.20	0.10	16.43	16.85	0.80	0.15	6.57	9.39
0.40	0.10	15.09	17.65	0.80	0.20	5.18	6.86

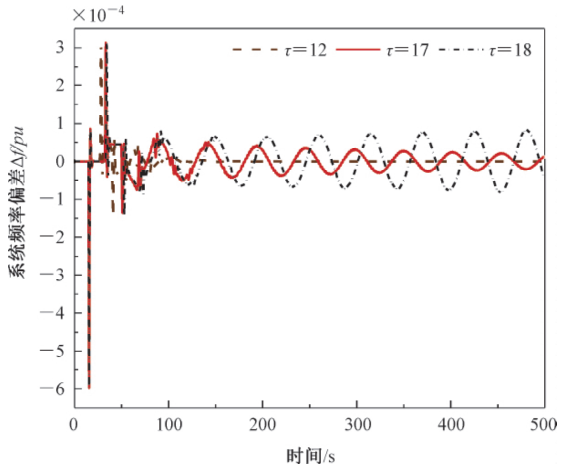
根据定理 1，通过设置不同的控制器增益($K_P \in [0,1]$，$K_I \in [0,1]$)获得相应的时滞稳定裕度，如表 3 所示。不同的控制器参数对时滞稳定裕度的影响也不同。当比例增益 K_P 固定时，时滞稳定裕度随着 K_I 的增加而减小。而 K_P 对时滞稳定裕度的影响可分为两个阶段。当控制器积分增益 K_I 恒定时，当 $K_P < 0.4$ 时，时滞稳定裕度的变化与 K_P 成正比；当 $K_P > 0.4$ 时，时滞稳定裕度的变化与 K_P 成反比。当 K_I 固定时，例如 $K_I = 0.05$，时滞稳定裕度的最大值出现在 $K_P = 0.4$ 处，而当 $K_P > 0.6$时，时滞稳定裕度会迅速衰减。

表 3 不同控制器增益下时滞单区域 LFC 的时滞稳定裕度表

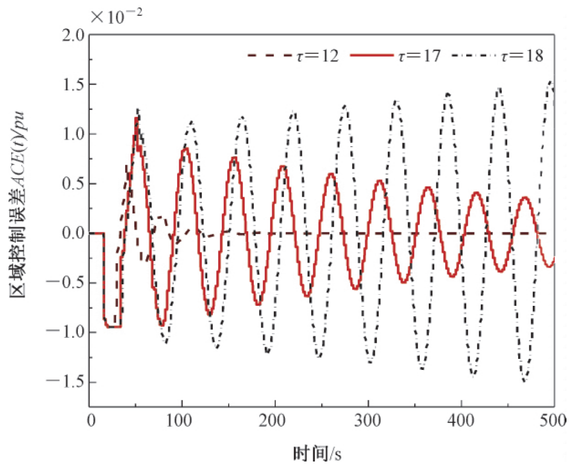
Tab. 3 Table of maximum delay boundary for delayed two-region LFC system at different controller gains s

K_p	K_I						
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.40	0.60	1.00
0	30.91	15.20	9.95	7.33	3.38	2.04	0.92
0.05	31.87	15.68	10.27	7.57	3.50	2.12	0.97
0.10	32.75	16.11	10.57	7.79	3.61	2.19	1.01
0.20	34.22	16.85	11.06	8.16	3.79	2.31	1.07
0.40	35.83	17.65	11.59	8.55	3.98	2.42	1.11
0.60	34.92	17.19	11.27	8.31	3.82	2.28	0.94
0.80	29.44	14.29	9.39	6.86	2.91	1.24	0.55
1.00	0.59	0.58	0.57	0.56	0.51	0.46	0.36

针对具有 PI 控制器的单区域 LFC 系统进行仿真。根据文献[17]，区域控制误差 $ACE(t)$ 的信号更新周期被设置为两秒，扰动发生在 15 s 处。根据表 2 可得，当 $K_P=0.6$，$K_I=0.1$ 时，文献[16]和定理 1 得到的时滞稳定裕度分别为 12.30 s 和 17.19 s。设置不同的时滞上界（$\tau=12$，$\tau=17$ 和 $\tau=18$），得到系统状态 $ACE(t)$ 和 Δf 在不同时滞条件下的响应曲线，如图 3 所示。当时滞最大上界为 12 s 和 17 s 时，系统是渐进稳定的，时滞最大上界为 18 s 时，系统是不稳定的。仿真结果表明了本文提出方法的有效性。



（a）系统频率偏差



（b）区域控制误差

图 3　不同时滞上界系统的状态响应

Fig. 3　State response of systems with different time-delay upper bounds

3.2　时滞多区域 LFC 系统

在时滞多区域 LFC 系统中，每个控制区域具有不同的时滞参数。本小节以时滞双区域 LFC 系统为例，假设各区域的控制器参数相同，设置 $K_P=0.4$，$K_I=0.2$。基于定理 1 计算时滞双区域 LFC 系统的时滞稳定裕度，并与文献[14]、文献[17]和文献[1]中的结果进行比较，如表 4 所示。为了便于分析，使用极坐标表示两个区域的时滞大小其中 $\theta=\arctan(\tau_1/\tau_2)$ 表示角度，$\tau=\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}$ 表示幅值。根据表 4 可得，本文方法所得的结果明显优于其他文献的结果，表明了其有效性和优越性。

针对时滞双区域 LFC 系统进行仿真，由表 4 可得，控制器参数为 $K_P=0.4$，$K_I=0.2$，时滞参数为 $\tau=9.00$，$\theta=70°$，两个区域的时滞上界分别为 8.45 s 和 3.07 s。系统的状态响应曲线如图 4 所示，系统是渐近稳定的。

表 4　时滞双区域 LFC 系统时滞稳定裕度表

Tab. 4　Table of maximum delay boundary for delayed two-region LFC system　　s

θ/(°)	文献[14]	文献[17]	文献[1]	本文方法
0	4.86	5.36	7.59	8.43
20	4.78	5.97	8.65	8.95
40	5.71	7.19	10.97	11.00
45	6.17	7.54	11.87	11.92
50	5.97	7.17	11.11	11.14
70	4.93	5.96	8.73	9.00
90	4.89	5.35	7.53	8.54

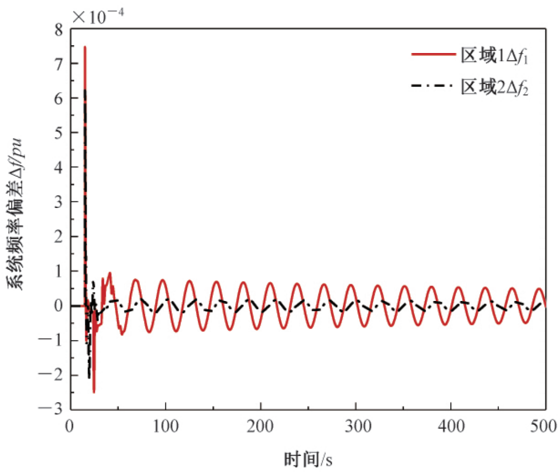


图 4　多区域 LFC 系统的状态响应

Fig. 4　State response of multi-area LFC system with time-delays

4　结论

本文讨论了时滞多区域 LFC 系统的稳定性分析问题。通过 PIE 表示具有 PID 控制器和通信延迟的多区域 LFC 系统。结合线性算子理论，采用

完全型 L-K 泛函，获得保守性较低时滞相关稳定判据。通过数值算例分析了时滞稳定裕度与控制器参数的关系，对实际电网系统的控制器参数设计具有指导意义。

参考文献

[1] 曾红兵，刘晓桂，肖会芹，等. 基于 PID 负荷频率控制的电力系统时滞相关鲁棒稳定性分析[J]. 电测与仪表，2018，56(23)：112-118.
ZENG H B，LIU X G，XIAO H Q，et al. Delay-dependent robust stability of power system with PID load frequency control[J]. Electrical Measurement & Instrumentation，2018，56(23)：112-118.

[2] 聂瀚，杨文荣，马晓燕，等. 基于改进鸟群算法的离网微电网优化调度[J]. 燕山大学学报，2019，43(3)：228-237.
NIE H，YANG W R，MA X Y，et al. Optimal scheduling of islanded microgrid based on improved bird swarm optimization algorithm[J]. Journal of Yanshan University，2019，43(3)：228-237.

[3] 张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制[D]. 长沙：中南大学，2013.
ZHANG C K. Small signal stability analysis and load frequency control for delayed power systems[D]. Changsha：Central South University，2013.

[4] YU X D，JIA H J，WANG C S. CTDAE & CTODE models and their applications to power system stability analysis with time delays[J]. Science China Technological Sciences，2013，56(5)：1213-1223.

[5] 钱伟，吴嘉欣，费树岷. 基于时滞依赖矩阵泛函的变时滞电力系统稳定性分析[J]. 电力系统自动化，2020，44(1)：53-58.
QIAN W，WU J X，FEI S M. Analysis on power systems stability with time-varying delay based on delay-dependent matrix functional[J]. Automation of Electric Power Systems，2020，44(1)：53-58.

[6] JIANG L. Delay-dependent stability for load frequency control with constant and time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2012，27(2)：932-941.

[7] ZHANG C K，JIANG L，WU Q H，et al. Further results on delay-dependent stability of multi-area load frequency control[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2013，28(4)：4465-4474.

[8] 袁楠，曾红兵，刘晓桂. 时滞相关稳定性分析在电力系统中的应用[J]. 湖南工业大学学报，2018，32(5)：45-49.
YUAN N，ZENG H B，LIU X G. Application of delay-dependent stability analysis in the power system[J]. Journal of Hunan University of Technology，2018，32(5)：45-49.

[9] 肖伸平，张天，唐军，等. 基于 PI 控制的时滞电力系统稳定性分析[J/OL]. 电网技术. (2020-01-02)[2020-01-17]. https://doi.org/10.13335/j.1000-3673.pst.2019.1817.
XIAO S P，ZHANG T，TANG J，et al. Stability analysis for power systems with time-delay based on PI Control[J/OL]. Power System Technology. (2020-01-02)[2020-01-17]. https://doi.org/10.13335/j.1000-3673.pst.2019.1817.

[10] YANG F，HE J，PAN Q. Further improvement on delay-dependent load frequency control of power systems via truncated B-L inequality[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2018，33(5)：5062-5071.

[11] JIN L，ZHANG C K，HE Y，et al. Delay-dependent stability analysis of multi-area load frequency control with enhanced accuracy and computation efficiency[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2019，34(5)：3687-3696.

[12] WU S S，PEET M M，SHIVAKUMAR S，et al. H_∞-optimal estimation in the PIE framework for systems with multiple delays and sensor noise[C]//Proceedings of the American Control Conference，Denver，2020.

[13] 杨洪玖，李鹏. 带有时延和丢包的变增益网络化预测控制[J]. 燕山大学学报，2019，43(4)：313-318.
YANG H J，LI P. Variable gain networked predictive control with time delays and packets loss[J]. Journal of Yanshan University，2019，43(4)：313-318.

[14] PEET M M. A dual to Lyapunov's second method for linear systems with multiple delays and implementation using SOS[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2018，64(3)：944-959.

[15] PEET M M，GU K. SOS for systems with multiple delays：Part 1. H_∞-optimal control[C]//Proceedings of the American Control Conference，Philadelphia，2019：3849-3856.

[16] YANG F S，HE J，WANG D H. New stability criteria of delayed load frequency control systems via infinite-series-based inequality[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics，2017，14(1)：231-240.

Stability analysis of delayed power system based on linear operator inequality

HUA Changchun，WANG Yibo

(School of Electrical Engineering，Yanshan University，Qinhuangdao，Hebei 066004，China)

Abstract: Focusing on the problem of time delay in power systems，the stability of multi-area load frequency control system with time delay is studied in this paper. Based on the time-delay characteristics of large-scale interconnected power systems，partial integral equation is used for the first time to represent delayed multi-area load frequency control systems. Then the complete L-K functional is constructed，a less conservative stability criterion is proposed in the form of a linear operator inequality. Finally，numerical examples and simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: power system; time delay; load frequency control; stability