1、什么是系统：从系统控制理论的角度，定义为是由相互关联和相互制约的若干部分组成的特定功能的一个整体。三个基本特征：（1）整体性，结构上和功能上（2）抽象性（3）相对性，系统和部分的相对。动态系统：运动状态按确定规律和确定统计规律随时间演化的一类系统，其行为由各类变量间的关系表征。系统变量三形式：（1）反应外部对系统的影响或作用的输入变量组（2）表征系统状态行为的内部状态变量组（3）系统对外部作用的输出变量组。表征系统动态过程的数学描述形式：（1）系统的内部描述“白箱描述”（2）外部描述”黑箱描述”。动态系统分类：机制角度：连续和离散；特性角度：线性，非线性，集中参数，分布参数。时间角度：连续时间和离散时间

2、线性系统：一个基本特征是其模型方程具有线性属性，即满足叠加原理。叠加原理是指，若系统的数学描述为 L，则对任意的两个输入变量 u1 和 u2 以及任意两个非零有限常数 c1 和 c2，必成立关系：$L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1L(u_1)+c_2L(u_2)$。线性时不变系统即线性定常系统和线性时变系统

3、状态变量的最小性：较少其中的一个变量就会破坏他们对系统行为表征的完全性，而增加一个变量将不增加行为表征的信息量，从数学角度讲，变量组是一个线性无关的极大变量组

4、连续时间线性系统的框图

5、输入输出化状态空间：m=n，$y=[(b_0-b_ma_0),(b_1-b_ma_1),(b_2-b_ma_2)]x+[b_m]u$

6、是能控标准型 A 到 Jordan 型：$x=P^{-1}\overline{x},\overline{B}=P^{-1}B,\overline{C}=CP$，$P=\begin{bmatrix}1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n\\ \dots & & \dots\\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$

7、反馈连接：G1 为反馈阵 $G(s)=[1+G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)$

8、由状态空间到传递函数 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$

9、$\Lambda=P^{-1}AP$ $A^n=P\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n\text{-}1} & 0.5n(\mathrm{n}-1)^*\\ & \lambda^n & n\lambda^{n\text{-}1}\\ & & \lambda^n\end{bmatrix}P^{-1}$ $A=P\begin{bmatrix}\lambda^n & & \\ & \lambda^n & n\lambda^{n\text{-}1}\\ & & \lambda^n\end{bmatrix}P^{-1}$

10. $e^A=P[*]P^{-1}$ $e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t} & te^{\lambda_1t}\\ 0 & e^{\lambda_1t}\end{bmatrix}P^{-1}$ 或 $l^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

11、零输入响应 $\dot{x}=Ax,x(0)=x_0\Rightarrow x_{0u}(t)=e^{At}x_0$

零初态响应 $\Psi(t)=e^{At},t\geq t_0$

基本形式
$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,t\geq 0$$
$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,t\geq t_0\Rightarrow \text{ZTZY矩}e^{At}=\Phi(t)$$

12、连续时不变系统：$\dot{x} = Ax + Bu, x(\mathrm{t}_0) = x_0, t \ge t_0$

状态转移矩阵方程 $\dot{\Phi}(t - t_0) = A\Phi(t - t_0), \Phi(0) = \mathrm{I}$

基本解阵：$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t), \Psi(t_0) = H$（任意非奇异）$t \ge t_0$；$\Psi(t) = e^{At}, t \ge t_0$

状态转移矩阵的解：$\Phi(t - t_0) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0), t \ge t_0$

状态转移矩阵响应表达式 $$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, t \ge 0 \\ x(t) &= \Phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, t \ge t_0 \end{aligned}$$

13、时变系统 $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau, t \in [t_0, t]$

书 3.3 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, t_0 = 1, t \in [1, 10], \tau = 1,$ 作用单位阶跃函数 1

解：$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = tx_1 \end{cases} \xrightarrow{\int + 初} \begin{cases} x_1(\mathrm{t}) = x_1(\mathrm{t}_0) \\ x_2(\mathrm{t}) = 0.5x_1(\mathrm{t}_0)(c) + x_2(\mathrm{t}_0) \end{cases} \to x(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5(t^2 - t_0^2) & 1 \end{bmatrix} x(\mathrm{t}_0)$

任取两组线性无关向量：

$$x_{(1)}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{(2)}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to x_{(1)}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{(2)}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 2 \\ (t^2 - t_0^2) \end{bmatrix} \to \Psi(t) = [x(1), x(2)]$$

再，$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau, t \in [t_0, t]$

14、时不变能控：秩判据 $Q_c = [B, AB...A^{n-1}B] = n$； PBH 判据 $rank(\lambda_i I - A, B) = n$

约当块判据：属于相同特征值的约旦子块对应的 B_{ik} 最后一行线性无关（重根）；不同特征值，B_i 无零行

能控性指数：μ =使 $rankQ_c = n$（$Q_c = [B, AB...A^{k-1}B] = n$）成立的 k 最小正整数；对于单输入系统，$\mu = n$

14、时不变能观：秩判据 $Q_o = [C, CA...CA^{n-1}]^T = n$。PBH 判据 $rank \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = n$

约当块判据：属于相同特征值的约旦子块对应的 C_{ik} 首列线性无关（重根）；不同特征值，C_i 无零列；能观性指数同；

15、时变系统能控判据：$rank[M_0(t_1),M_1(t_1)...M_{n-1}(t_1)]=n$，$\forall t_1\in J$

$$M_0(t)=B(t),M_1(t)=-A(t)M_0(t)+M_{_0}^{'}(t),M_2(t)=-A(t)M_1(t)+M_{_1}^{'}(t)$$

时变系统能观性判据：$rank[N_0(t_1),N_1(t_1)...N_{n-1}(t_1)]^T=n,\forall t_1\in J$

$$N_0(t)=C(t),N_1(t)=N_0(t)A(t)+N_{_0}^{'}(t),N_2(t)=N_1(t)A(t)+N_{_1}^{'}(t)$$

16、能控规范形：$\overline{A}_c=P^{-1}AP,\overline{b}_c=P^{-1}b,\overline{c}_c=cP,P=[A^{n-1}b...Ab,b]\begin{bmatrix}1 & & \\ a_{n-1} & & \\ \cdots & & \\ a_1 & & 1\end{bmatrix}$

17、能观标准形：$\overline{A}_o=QAQ^{-1},\overline{b}_o=Qb,\overline{c}_o=cQ^{-1},Q=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1}...a_1\\ & ...\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cA^{n-1}\\ ....\\ c\end{bmatrix}$

18、能控性结构分解(书中例 4.24)：

对于线性不变系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u,y=[1\ \ 0\ \ 1]x$

解：$rankQ_c=rank[B,AB]=rank\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&0&1&0\\0&1&1&2\end{bmatrix}=2<n=3$，所以系统不完全能控，能控分状态为 2 维。选取线性无关状态组成非奇异变换阵 Q，选取 Q_c 中线性无关的两列 $q_1=[0\ \ 1\ \ 0]'$和$q_2=[1\ \ 0\ \ 1]'$，另取$q_3=[1\ \ 0\ \ 0]'$，最后通过计算得到 $\overline{A}=Q^{-1}AQ,\overline{B}=Q^{-1}B,\overline{c}=cQ$

对于能观，$rankQ_o=rank[C,CA...CA^{n-1}]^T=m<n$，Q 选取线性无关行向量组成

19、衰减系数：对渐进稳定的连续时间线性时不变自治系统，用以表征自由运动衰减性能的衰减系数定义为一个正实数：$\eta=-\dot{V}(x)/V(x)$

20、线性时不变系统的李雅普诺夫稳定判据

对于自治状态方程 $\dot{x}=Ax,x(0)=x_0,t\geq 0$，李雅普诺夫稳定判据为：对任意一个 $n*n$ 正定对称矩阵 Q，方程 $A^TP+PA=-Q$，有唯一的正定对称阵 P（计算时取 Q=I）

21、书中课后题 5.1 对于 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 250 & 0 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u, y=[-25\ \ 5\ \ 0]x$. (i)判断系统是否渐进稳定（ii）系统是否为 BIBO 稳定

解：(i）判断 A 的特征值是否均具有负实部,(ii)求出 $G(s)=c(sI-A)^{-1}b$，是否都是负实部

22、状态反馈不改变能控性；输出反馈不改变能控性和能观性

23、 单输入极点配置：$u=-kx+v$，$a_{[(sI-A+bk)^{-1}]}-a_{[(sI-A)^{-1}]}=\bar{k}, k=\bar{k}P^{-1}$，P 为能控规范形变换阵

24、判断系统完全能控 $\Leftrightarrow$ 判断极点可任意配置

25、单模矩阵多项式矩阵 $Q(s)$ 为单模矩阵，当且仅当其行列式为独立于 s 的非零常数

26、右公因子：称 $R(s)$ 为列数相同的两个多项式矩阵 $D(s)$和$N(s)$ 的一个右公因子，若存在多项式矩阵 $\bar{D}(s)$和$\bar{N}(s)$ 使成立：$D(s)=\bar{D}(s)R(s), N(s)=\bar{N}(s)R(s)$

（$\begin{bmatrix}D(s)\\ N(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R(s)\\ 0\end{bmatrix}$；gcrd最大右公因子；右互质：称列数相同的两个多项式矩阵 $D(s)$和$N(s)$ 右互质，如果其最大右公因子为单模阵；右互质秩判据：对列数相同的 $D(s)$和$N(s)$，其中 $D(s)$ 非奇异，则有 $rank\begin{bmatrix}D(s)\\ N(s)\end{bmatrix}=$列数（课后题 7.10，各（列数×列数）阶子式不同时降秩）

27、书中例 7.16（求列次多项式）$M(s)=\begin{bmatrix}s^2+4s+1 & 2s^2 & s+4\\ s+3 & 4s^3-2s & 3s+1\end{bmatrix}$，

$$\begin{bmatrix}4s+1 & 2s^2 & 4\\ s+3 & -2s & 1\end{bmatrix}$$

$k_{c1}=2, k_{c2}=3, k_{c3}=1$，

$$M(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2 & & \\ & s^3 & \\ & & s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & & \\ 1 & & \\ & s^2 & \\ & s & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

28、方阵列既约：非奇异多项式矩阵 $M(s)$，$\delta_{ci}M(s)$ 为列次数，则称 $M(s)$ 为列既约，

当且仅当 $\deg\det \mathrm{M}(s)=\sum\delta_{ci}M(s)$；列既约性秩判据：列次系数($\mathrm{M}_{hc}$)矩阵非奇异；

29、矩阵束：E和M 为$m*n$实常阵，则有：矩阵束=$(sE-A)$

30、矩阵分式描述（MFD）：把有理分式矩阵形式的传递函数$G(s)$表示为两个多项式矩阵之比；$G(s)$为$q\times p$有理分式矩阵，一定存在$q\times p$和 $p\times p$多项式矩阵$N(s)$和$D(s)$，以及存在$q\times p$和$p\times p$多项式矩阵$N_L(s)$和$D_L(s)$，使之成立：$G(s)=N(s)\mathrm{D}^{-1}(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$，称 $N(s)\mathrm{D}^{-1}(s)$为$G(s)$的右 MFD，左同。

MFD 次数：$G(s)$的次数=$\deg\det D(s)=\deg\det D_L(s)$

31、传递函数矩阵的矩阵分式描述的真性严真性是表征其物理意义可实现的一个基本特性。$G(s)$真性严真性定义：（i）次数比较（ii）$s\to\infty$的极限定义；

32、列既约真性严真性判别准则：对右 MFD $N(s)\mathrm{D}^{-1}(s)$，$D(s)$为$p\times p$列既约（列次系数矩阵判别或其定义），则$N(s)\mathrm{D}^{-1}(s)$为真，当且仅当$\delta_{cj}N(s)\le\delta_{cj}D(s)$；严<;

33、非列既约真性严真性判别准则：引入$p\times p$单模阵$V(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ * & 1\end{bmatrix}$，

$\bar{D}(s)=D(s)V(s),\quad \bar{N}(s)=N(s)V(s)$，使$\bar{D}(s)$为列既约，再判断$\bar{N}(s)$和$\bar{D}(s)$，下同。

34、从非真矩阵分式描述导出严真矩阵分式描述：右 MFD 除法定理 $N(s)D^{-1}(s)=Q(s)+R(s)D^{-1}(s)$

35、不可简约 MFD：称$G(s)$的一个右 MFD $N(s)\mathrm{D}^{-1}(s)$为不可简约或右不可简约，当且仅当$\mathrm{D}(s)$和$N(s)$为右互质（右互质判据见 26）

36、 右不可简约 MFD 和右可简约 MFD 的关系：对于传递函数$G(s)$的任一右可简约 MFD $N(s)\mathrm{D}^{-1}(s)$和任一右可简约 MFD $\tilde{N}(s)$和$\tilde{D}(s)$，必存在$p\times p$非奇异多项式$T(s)$，使成立：$\tilde{N}(s)=N(s)T(s),\tilde{D}(s)=D(s)T(s)$，其中，$T(s)=R^{-1}(s),\ R(s)$为$\tilde{N}(s)$和$\tilde{D}(s)$的最大右公因子

37、史密斯麦克米伦形：实质上是有理分式矩阵的一种规范性。称秩为 r 的 q*p 有理分式矩阵为史密斯麦克米伦形，当且仅当：$M(\mathrm{s})=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(\mathrm{s})}{\psi_1(\mathrm{s})} & \cdots & 0 \\ & \frac{\varepsilon_r(\mathrm{s})}{\psi_r(\mathrm{s})} & \\ & 0 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$ 其中

(i): $\{\varepsilon_i(\mathrm{s}),\psi_i(\mathrm{s})\}$右互质；（ii）：满足$\varepsilon_{i+1}(\mathrm{s})\,|\,\psi_{i+1}(\mathrm{s})$和$\varepsilon_i(\mathrm{s})\,|\,\psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{s})$整除性

38、有限极点和零点罗森布罗克定义：对传递函数矩阵$G(s)$，基于史密斯麦克米伦形 $M(s)$，$G(s)$有限极点=$M(s)$中$\psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{s})$=0 的根；$G(s)$有限零点=$M(s)$中$\varepsilon_i(\mathrm{s})$=0 的

39、有限极点和零点推论性定义：$N(\mathrm{s})\mathrm{D}^{-1}(\mathrm{s})$和$D_L^{-1}(s)N_L(s)$为$G(s)$ 的任一不可简约右 MFD 和左 MFD，则$G(s)$有限极点=$\det\mathrm{D}(\mathrm{s})=0$或$\det\mathrm{D_L}(\mathrm{s})=0$的根；

40、结构指数：P480；评价值：P485；零空间：P493；最小多项式基：称传递函数$G(s)$的零空间Ω的一个多项式基为最小多项式，当且仅当组成基的各个多项式具有最小次数；零空间的阶：Ω为传递函数$G(s)$的一个零空间，则Ω的阶= $\sum\Omega$多项式基组成多项式向量的次数。亏数：$G(s)$的亏数=$\mathrm{def}G(\mathrm{s})=-\sum G(s)$在复平面的有限处和无穷远处的第 r 阶评价值

Yong_Q