科目：矩阵分析

姓名：____________

班级：____________

# 燕山大学 2019 年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析　　考试时间：2019 年 11 月 23 日

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

座位号　学号　姓名　专业　学院

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

一.（10 分）在线性空间 $R^{2\times 2}$ 中，求向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

下的坐标.

答案：$(-1,-3,2,3)^T$

密封线

二.（10 分）设 $A \in C^{m\times n}$，证明 $A$ 的伪逆矩阵是唯一的.

**证** 设 $X,Y$ 均为 $A$ 的伪逆矩阵，则

$$
\begin{aligned}
X &= XAX = XAYAX = X(AY)^H(AX)^H = XY^HA^HX^HA^H \\
&= XY^HA^H = X(AY)^H = XAY = (XA)^HY = A^HX^HY \\
&= A^HY^HA^HX^HY = (YA)^H(XA)^HY = YAXAY = YAY = Y
\end{aligned}
$$

即 $X = Y$ 证毕

三.（10 分）设 $$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求下列矩阵范数：$\|A\|_{m_1},\|A\|_{m_2},\|A\|_{m_\infty},\|A\|_1,\|A\|_\infty$

$\|A\|_{m_1}$=35，$\|A\|_{m_2}$=13，$\|A\|_{m_\infty}$=28，$\|A\|_1$=21，$\|A\|_\infty$=14

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

四.（10）求二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 对 $\boldsymbol{X}$ 的导数，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in C^n$，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵。

**解**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^T}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})+\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^T}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}$$

$$=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}^T}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)X$$

因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$，故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

五.（15 分）证明：任何一个复 $n\times n$ 矩阵都可以表示成一个埃尔米特矩阵和一个斜埃尔米特矩阵（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$）的和，且表示式唯一。

证　令 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^H}{2}$，$\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^H}{2}$

则 $\boldsymbol{B}^H=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}^H=-\boldsymbol{C}$ 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$

设另有 $\boldsymbol{B}_1^H=\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{C}_1^H=-\boldsymbol{C}_1$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1 \qquad (1)$$

则

$$\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{B}_1^H+\boldsymbol{C}_1^H=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{C}_1 \qquad (2)$$

（1）、（2）两式对应相加得

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^H}{2}=\boldsymbol{B}$$

对应相减得

$$\boldsymbol{C}_1=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^H}{2}=\boldsymbol{C}$$

所以分解式唯一

六.（15 分）求下列矩阵的 Smith 标准型、若尔当（Jordan）标准形、初等因子、不变因子和各阶行列式因子，设：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

解 $$\lambda I - A \to \begin{bmatrix}\lambda+2 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -(\lambda+1)^2 & 2(\lambda+2) & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & \lambda+2\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 2(\lambda+2) & \lambda^2+2\lambda+1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & -\frac{\lambda}{2}(\lambda+2)\\ 0 & 2(\lambda+2) & 1\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+2)(\lambda+1)^2 & -\frac{1}{2}(\lambda+2)\lambda\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda+2)\end{bmatrix}$$

$(\lambda I - A)$ 的标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda+2)\end{bmatrix}$$

若尔当标准型 $$J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

不变因子 1，1，$(\lambda+1)^2(\lambda+2)$

行列式因子 1，1，$(\lambda+1)^2(\lambda+2)$

初等因子 $(\lambda+1)^2$，$(\lambda+2)$

七．（15 分）设$\|X\|$为$C^n$ 上的向量范数，$A\in C^{n\times n}$，证明：

$$\|A\|_* = \max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

是与$\|X\|$相容的矩阵分数。　　　定理 4.5

**证**　先证$\|A\|$为矩阵范数

1）对于任何$A\neq O_{n\times n}$，都存在$0\neq X_0\in F^n$，使

$$AX_0\neq 0$$

于是
$$\|A\| = \max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}\geq \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}>0$$

2）$$\|\lambda A\| = \max_{X\neq 0}\frac{\|\lambda AX\|}{\|X\|} = |\lambda|\max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|} = |\lambda|\|A\|$$

3）$$\|A+B\| = \max_{X\neq 0}\frac{\|(A+B)X\|}{\|X\|}\leq \max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|+\|BX\|}{\|X\|}$$

$$\leq \max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}+\max_{X\neq 0}\frac{\|BX\|}{\|X\|} = \|A\|+\|B\|$$

4）$$\|AB\| = \max_{X\neq 0}\frac{\|ABX\|}{\|X\|} = \max_{\substack{X\neq 0\\ BX\neq 0}}\frac{\|A(BX)\|}{\|BX\|}\frac{\|BX\|}{\|X\|}$$

$$\leq \max_{BX\neq 0}\frac{\|A(BX)\|}{\|BX\|}\max_{X\neq 0}\frac{\|BX\|}{\|X\|} = \|A\|\|B\|$$

所以式（4-5）定义的$\|A\|$是矩阵范数。

又由于　$$\|A\| = \max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}\geq \frac{\|AX\|}{\|X\|}\quad X\neq 0$$

所以有当$X\neq 0$时，　$\|AX\|\leq\|A\|\|X\|$　　　(4-6)

当$X=0$时，式(4-6)显然成立，故式(4-5)定义的$\|A\|$是与$\|X\|$相容的矩阵范数。

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

八.（15 分）设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

求 $A$ 的伪逆矩阵。

**解** 首先对 $A$ 进行最大秩分解

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以 $A$ 的最大秩分解为 $A=BC=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

由定理 7.12 知 $A^+=C^+B^+$，故 $B^+=B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

又 $C^+=C^H(CC^H)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$$A^+=C^+B^+=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{12}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}&\frac{5}{12}&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

另外，直接利用 $A^+=A^H(AA^H)^{-1}$ 求更简单

# 燕山大学2018年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析 考试时间：2018 年 11 月 24 日

座位号 学号 姓名 专业 学院

密封线 燕山大学研究生课程考试试卷 密封线

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

一.（10 分）在线性空间 $R^{2\times 2}$ 中，求向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

下的坐标.

解 令 $\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{E}_1+x_2\boldsymbol{E}_2+x_3\boldsymbol{E}_3+x_4\boldsymbol{E}_4$

得 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}=(3, -3, 2, -1)^{\mathrm{T}}$

二.（10 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶实正交矩阵，并且已知 $\det\boldsymbol{A}\times\det\boldsymbol{B}<0$，证明：
$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=0$

证

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right|&=\left|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\\&=-\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right|\end{aligned}$$

所以 $$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right|=0$$

三.（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为斜 Hermite 矩阵（即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$），证明：$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$ 为酉矩阵。

证　因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}&=\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\right]^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\\&=\left[(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\right](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\\&=\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵

四．（10）求 $X^{\mathrm{T}}A$ 对 $X$ 的导数，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in C^n$，$A$ 为 $n\times n$ 常数矩阵。

将 $A$ 按列分块记成 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_m]$，则根据定义有

$$\frac{\mathrm{d}X^TA}{\mathrm{d}X}=\left[\frac{\mathrm{d}X^Ta_1}{\mathrm{d}X},\quad \frac{\mathrm{d}X^Ta_2}{\mathrm{d}X},\quad \cdots,\quad \frac{\mathrm{d}X^Ta_m}{\mathrm{d}X}\right]$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}X^T}{\mathrm{d}X}a_1+\frac{\mathrm{d}a_1^T}{\mathrm{d}X}X,\frac{\mathrm{d}X^T}{\mathrm{d}X}a_2+\frac{\mathrm{d}\,a_2^T}{\mathrm{d}X}X,\cdots,\frac{\mathrm{d}X^T}{\mathrm{d}X}a_m+\frac{\mathrm{d}\,a_m^T}{\mathrm{d}X}X\right]$$

$$=[a_1,a_2,\cdots,a_m]=A$$

见 109 页例 5.6

五．（15 分） 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

求下列矩阵范数：$\|A\|_{m_1},\|A\|_{m_2},\|A\|_{m_\infty},\|A\|_1,\|A\|_\infty$

$$\|A\|_{m_1}=28,\quad \|A\|_{m_2}=10,\quad \|A\|_{m_\infty}=24,$$

$$\|A\|_1=18,\quad \|A\|_\infty=10$$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

六.（15 分）求下列矩阵的 Smith 标准型、若尔当（Jordan）标准形、初等因子、不变因子和各阶行列式因子，设：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Smith 标准型：$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$

若尔当标准型：$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

不变因子：$d_1=d_2=1,\quad d_3=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

初等因子：$(\lambda-2),\quad (\lambda-1)^2$

行列式因子：$D_1=D_2=1,\quad D_3=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

七．（15 分) 设 $A\in C^{n\times n}, X\in C^{n}$，证明： $\| AX \|_1 \le \| A \|_{m_1} \| X \|_1$

见 90 页例 4.4

**证**

$$\|AX\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|$$

$$\le(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|)(\sum_{j=1}^{n}|x_j|)=\|A\|_{m_1}\|X\|_1$$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

八．（15 分）用广义逆矩阵求线性方程组的通解，设：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

**解**　写成矩阵形式 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left[ \boldsymbol{I}_3 - \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 19 \end{bmatrix} + \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -6 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 + 9\boldsymbol{c}_1 - 6\boldsymbol{c}_2 - 3\boldsymbol{c}_3 \\ 10 - 6\boldsymbol{c}_1 + 4\boldsymbol{c}_2 + 2\boldsymbol{c}_3 \\ 19 - 3\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c}_3 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{14}(13 + 9\boldsymbol{c}_1 - 6\boldsymbol{c}_2 - 3\boldsymbol{c}_3) \\ \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{14}(10 - 6\boldsymbol{c}_1 + 4\boldsymbol{c}_2 + 2\boldsymbol{c}_3) \\ \boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{14}(19 - 3\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c}_3) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)^{\boldsymbol{T}}$ 为任意向量。

见书上 156 页例 7.6

# 燕山大学 2017 年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析　　考试时间：2017 年 11 月 25 日

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

座位号　学号　姓名　专业　学院

密封线　燕山大学研究生课程考试试卷　密封线

一.（10 分）在线性空间 $R^{2\times2}$ 中，求向量

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$$

在基 $\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

下的坐标.

1,1,0,-1

解：设 $A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$

$$=\begin{bmatrix}k_1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&k_2\\k_2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&k_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&k_4\\-k_4&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k_1&k_2+k_4\\k_2-k_4&k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$$

解得：$\begin{cases}k_1=1\\k_2=1\\k_3=0\\k_4=-1\end{cases}$

二.（10 分）设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $n$ 维实内积空间 $V$ 的一个基，证明：

（1），如果 $(\alpha, e_i) = 0, i \in \underline{n}$，则 $\alpha = 0$；

（2）设 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$，如果 $\forall \beta \in V$，都有 $(\alpha_1, \beta) = (\alpha_2, \beta)$，则 $\alpha_1 = \alpha_2$

例 2.17

证：(1) ∵ $e_1 e_2 \cdots e_n$ 是 V 的一个基

∴ 令 $\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + \cdots + k_ne_n$

∴ $(\alpha, \alpha) = (\alpha, k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n)$

$= (\alpha, k_1e_1) + (\alpha, k_2e_2) + \cdots + (\alpha, k_ne_n)$

$= k_1(\alpha, e_1) + k_2(\alpha, e_2) + \cdots + k_n(\alpha, e_n)$

∵ $(\alpha, e_i) = 0$. ∴ 上式 $= 0$. 即 ∵ $(\alpha, \alpha) = 0$，当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$ 成立

∴ $\alpha = 0$

(2) ∵ $(\alpha_1, \beta) = (\alpha_2, \beta)$ ∴ $(\alpha_1, \beta) - (\alpha_2, \beta) = 0$

∴ $(\alpha_1 - \alpha_2, \beta) = 0$. ∵ 对于 $\beta \in V$. 上式成立

∴ $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ 即 $\alpha_1 = \alpha_2$

三.（10 分）求二次型 $\boxed{X^T A X}$ 对 $X$ 的导数，其中 $A$ 为 $n \times n$ 常数矩阵，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in F^n$

$1\times n \quad n\times n \quad n\times 1$

$$\frac{\partial(X^TAX)}{\partial X} = \frac{\partial X^T}{\partial X}AX + X^T\frac{\partial(AX)}{\partial X} = \frac{\partial X^T}{\partial X}AX + X^T\left(\frac{\partial A}{\partial X}X + A\frac{\partial X}{\partial X}\right)$$

例 5.7

$$= \frac{\partial X^T}{\partial X}AX + X^TA\frac{\partial X}{\partial X}$$

$$= \frac{\partial X^T}{\partial X}AX + \frac{\partial X^T}{\partial X}A^TX$$

$$= AX + A^TX$$

$$\underset{n\times 1}{\frac{dX^TAX}{dX}} = \frac{dX^T}{dX}AX + \frac{d(AX)^T}{dX}X$$

$n\times n$

$$= AX + \frac{dX^TA^T}{dX}X = AX + A^TX$$

$\forall\alpha\in$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

四．（10 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶的 Hermite 矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 是 Hermite 矩阵当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

$A^H=A \quad B^H=B$

$(AB)^H=B^HA^H=BA$

$(AB)^H=B^HA^H=BA=AB$

五．（15 分） 设 $\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

求下列矩阵范数：$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1},\|\boldsymbol{A}\|_{m_2},\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty},\|\boldsymbol{A}\|_1,\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ 习 4.4

解. $\|A\|_{m_1}=3+\cancel{1+1+4+1}+7+1+1+2+1+7+6+1=34$

$\|A\|_{m_2}=(9+1+16+1+49+1+1+4+1+49+36+1)^{1/2}=2\sqrt{42}$

$\|A\|_{m\infty}=4\times7=28$

$\|A\|_1=21 \quad ,\|A\|_\infty=14$

六.（15 分）证明：设$\|A\|_*$是矩阵范数，则存在向量范数$\|X\|$，使得

$$\|AX\|\le\|A\|_*\|X\|$$

$\|AX\|_2 \le \|A\|_{m_2}\|X\|_2$

$\|AX\|_\infty \le \|A\|_{m_\infty}\|X\|_\infty$

任给 $0\ne a\in F^n$

令 $\|X\|=\|Xa^H\|_*$ $\forall X\in F^n$

① ∵ $a\ne 0$，所以 $X\ne 0$ 时 $Xa^H\ne 0$，∴ $\|X\|>0$

② 对 $\cancel{\lambda\in F^{n\times n}}$ $\|\lambda X\|=\|\lambda Xa^H\|_*=|\lambda|\|Xa^H\|_*=|\lambda|\|X\|$

③ 对 $Y\in F^{n\times n}$ $\|X+Y\|=\|(X+Y)a^H\|_*=\|Xa^H+Ya^H\|_*\le\|Xa^H\|_*+\|Ya^H\|_*$

$=\|X\|+\|Y\|$.

又 ∵ $\|AX\|=\|AXa^H\|_*\le\|A\|_*\|Xa^H\|_*=\|A\|_*\|X\|$

所以 $\|A\|_*$ 和 $\|X\|$ 相容

解 $\lambda I-A\to\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+3 & -3\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda-1\\ -3 & \lambda+3 & 3\\ \lambda-2 & 2 & 2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda-1\\ 0 & \lambda & 3\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda(\lambda-3)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$

∴ 初等因子 $\lambda,\lambda^2$

$J=\begin{bmatrix}J_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & \\ & J_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $A=TJT^{-1}$

当 $\lambda=0$ 时，$AX=0\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$

$A-\lambda I$

$(\cancel{\lambda I-A})\,t_1=0$

$\cancel{(\lambda I-A)\,t_2=0}$ $(A-\lambda I)t_2=0$

$(A-\lambda I)$ $(\cancel{\lambda I-A})\,t_3=t_2$

$(A-\lambda I)\,t_3\ne 0$

解得：$t_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ $t_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

∴ $T=(X_1,X_2,X_3)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ & 2 & \end{bmatrix}$

取 $t_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ $t_2=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$

七.（15 分）求下列矩阵的若尔当（Jordan）标准形和相似变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，设：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

例 3.27

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+3 & -3\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & \lambda-2\\ 3 & \lambda+3 & -3\\ \lambda-1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{\lambda-2}{2}\\ 3 & \lambda+3 & -3\\ \lambda-1 & -1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{\lambda-2}{2}\\ 0 & \lambda & -\frac{3\lambda}{2}\\ 0 & -\lambda & 1-\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{2}\end{bmatrix}$$

$1, \lambda, \lambda^2$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{\lambda-2}{2}\\ 0 & \lambda & -\frac{3\lambda}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{2}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\frac{3\lambda}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{2}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{2}\end{bmatrix}$$

初等因子 $\lambda, -\frac{\lambda^2}{2}$

~~初~~ 特征值为 $\lambda=0$.（三重）

$\operatorname{rank}(0-A)=1=3-2$ $\therefore a=2$ 不变因子 $1, \lambda, \frac{\lambda^2}{2}$

各阶 $1, \lambda, \frac{\lambda^2}{2}$

$$\therefore J=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

当 $\lambda=0$ 时 $(-A)\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\\ t_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 即 $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\\ t_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-t_{11}-t_{21}+t_{31}=0\\ 3t_{11}+3t_{21}-3t_{31}=0\\ 2t_{11}+2t_{21}-2t_{31}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_{11}=1\\ t_{21}=-1\\ t_{31}=0\end{cases}$$ 或 $\begin{cases}t_1=1\\ t_2=0\\ t_3=1\end{cases}$

$$-A\begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\\ t_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\\ t_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $t_{12}=$

$t_{22}$

$t_{32}=0$

$AT=TJ$

八.（15 分）利用广义逆矩阵求下列方程组的通解　　例 7.14

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_1+\qquad x_3=0 \\ 2x_1\qquad +2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=2 \end{cases}$$

$A^-$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right] \to \cdots$$

$$\therefore P=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore I-A^-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^-=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & -\frac12 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & -\frac12 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac12 & -\frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^-b=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac12 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = A^-b+(I-A^-A)y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac12 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac12 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

# 燕山大学2016年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析　　考试时间：2016 年 11 月 26 日

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

座位号　学号　姓名　专业　学院

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

一．（10 分）在线性空间 $R^{2\times 2}$ 中，求向量

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$$

在基

$$A_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$$

下的坐标.

解：$A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$

$$=\begin{bmatrix}2k_1&k_1\\0&k_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&k_2\\2k_2&2k_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2k_3&k_3\\k_3&2k_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_4&3k_4\\k_4&2k_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2k_1-2k_3+k_4&k_1+k_2+k_3+3k_4\\2k_2+k_3+k_4&k_1+2k_2+2k_3+2k_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2k_1-2k_3+k_4=1\\k_1+k_2+k_3+3k_4=2\\2k_2+k_3+k_4=-1\\k_1+2k_2+2k_3+2k_4=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k_1=0\\k_2=-1\\k_3=0\\k_4=1\end{cases}$

$A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$

$$\therefore\begin{cases}1=2k_1-2k_3+k_4\\2=k_1+k_2+k_3+3k_4\\-1=2k_2+k_3+k_4\\0=k_1+2k_2+2k_3+2k_4\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}k_1=0\\k_2=-1\\k_3=0\\k_4=1\end{array}$$

$\therefore A$ 在基 $A_1A_2A_3A_4$ 下的坐标为 $(0,-1,0,1)^T$

$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-1$

$\lambda_1\to m_1=1,\ a_1=1$

$\lambda_2\to m_2=2,\ a_1=1$

$\because$ Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda+2)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore J=\begin{bmatrix}-2&&\\&-1&1\\&&-1\end{bmatrix}$$

不变因子为：$d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=1,\ d_3(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2$

14年

二.（10 分）设 $A \in C^{m\times n}$，证明 $A$ 的伪逆矩阵是惟一的.

~~解~~ 设 X, Y 都为 A 的伪逆矩阵.

则 ~~X= X=XAY~~

$X = XAX = XAYAX = X(AY)^H(AX)^H = XY^HA^HX^HA^H$

$= XY^HA^H = X(AY)^H = XAY = (XA)^HY = A^HX^HY$

$= A^HY^HA^HX^HY = (YA)^H(XA)^HY = YAXAY = YAY = Y$

∴ 唯一

设 X, Y 均为 A 的伪逆矩阵，则

$X = XAX = XAYAX = X(AY)^H(AX)^H = XY^HA^HX^HA^H = XY^HA^H = X(AY)^H = XAY$

$= (XA)^HY = A^HX^HY = A^HY^HA^HX^HY = \cancel{A^H(AY)^H} \cdot (YA)^H(XA)^HY$

$= YAXAY = YAY = Y$. 即证

三.（10 分）求实二次型 $X^TAX$ 对 $X$ 的导数，其中 $A = A^T$ 为 $n\times n$ 实常数矩阵，$X \in F^n$.

$$\frac{d(X^TAX)}{dX} = \frac{dX^T}{dX}AX + X^T\frac{d(AX)}{dX}$$

$$= \frac{dX^T}{dX}AX + X^T\left[\frac{dA}{dX}X + A\frac{dX}{dX}\right]$$

$$= \frac{dX^T}{dX}AX + X^TA\frac{dX}{dX}$$

$$\cancel{= AX + X^TA = AX + (A^TX)^T \cdot (AX)^T}$$

$$= \frac{dX^T}{dX}AX + \frac{dX^T}{dX}A^TX$$

$$= \frac{dX^T}{dX}AX + \frac{dX^T}{dX}AX = 2AX\frac{dX^T}{dX} = 2AX = 2AX$$

解：$\frac{dX^TAX}{dX}$

$= \frac{dX^T}{dX}(AX) + \frac{d(AX)^T}{dX}X$

$= AX + \frac{dX^TA^T}{dX}X$

$= AX + A^TX$

$= (A+A^T)X$

$$\frac{d(X^TAX)}{dX^T} = (AX)^T\frac{dX}{dX^T} + X^T\frac{dAX}{dX^T}$$

求 $X^TAX$ 对 $X^T$ 求导

$$= X^TA^T + X^TA = X^T(A^T+A) = 2X^TA$$

$$\frac{d(X^TAX)}{dX^T} = X^T\frac{d(X^TA)^T}{dX^T} + X^TA\frac{dX}{dX^T}$$

$$= X^T\frac{dA^TX}{dX^T} + X^TA =$$



20

$\|\alpha+Y\| \le \|\alpha\|+\|Y\|$

四．（15 分）若 $(X,Y)$ 为酉空间 $V_n(C,U)$ 上的内积，$\|X\|$ 为 $X$ 的模，证明：

$$|(X,Y)| \le \|X\|\|Y\| \qquad \forall X,Y \in V_n(C,U)$$

$\|\alpha+Y\|^2 = (\alpha+Y, \alpha+Y)$

$\le (\alpha,\alpha) + 2|(X,Y)| + (Y,Y)$

$\le \|X\|^2 + 2\|X\|\cdot\|Y\| + \|Y\|^2$

$(\|X\| + \|Y\|)^2$

即证

式中＝成立等价于 $X=\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y$，当 $Y=0$ 时，显然成立

＝成立等价于 $|(X,Y)|=\|X\|\|Y\|$

密封线

~~$0 \le \left(X - \frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right) - \left(X, \frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)$~~

~~$=(X,X)-($~~

$$0 \le \left(X-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y,\ X-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)$$

$$=(X,X)-\left(X,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)-\left(\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y,X\right)+\left(\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)$$

$$=(X,X)-\left(X,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}(Y,X)+\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}\frac{\overline{(X,Y)}}{(Y,Y)}(Y,Y)$$

$$=(X,X)-\left(X,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}(Y,X)+\frac{|(X,Y)|^2}{(Y,Y)}$$

$$=(X,X)-\left(X,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)-\frac{|(X,Y)|^2}{(Y,Y)}+\frac{|(X,Y)|^2}{(Y,Y)}$$

$$=(X,X)-\frac{\overline{(X,Y)}}{(Y,Y)}(X,Y)=(X,X)-\frac{(Y,X)}{(Y,Y)}(X,Y)$$

$$=(X,X)-\frac{|(X,Y)|^2}{(Y,Y)} \ge 0$$

燕山大学研究生课程考试试卷

$\therefore\ |(X,Y)|^2 \le (X,X)(Y,Y) = \|X\|^2\|Y\|^2$

$\therefore |(X,Y)| \le \|X\|\|Y\|.$

密封线

当 $Y\ne 0$ 时有 $0 \le \left(X-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y,\ X-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)$

$\because\ \|X\| = (X,X)^{\frac{1}{2}}$

$(X,X) = \|X\|^2$

$=(X,X)-\left(X,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)-\left(\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y,X\right)+\left(\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y,\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}Y\right)$

$=(X,X)-\frac{\overline{(X,Y)}}{(Y,Y)}(X,Y)-\frac{(X,Y)}{(Y,Y)}(Y,X)+\frac{(X,Y)\overline{(X,Y)}}{(Y,Y)}$

$\therefore |(X,Y)| \le \|X\|\|Y\|$



$=X^TA^T+X^TA=2X^TA$

$=(X,X)-\frac{|(X,Y)|^2}{(Y,Y)}$

即 $|(X,Y)|^2 \le (X,X)(Y,Y)$

五.（15 分）求下列矩阵的 Smith 标准型、若尔当（Jordan）标准形、初等因子、不变因子和各阶行列式因子，设：

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & \lambda+5\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ \lambda-3 & 0 & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\lambda+5}{2}\\ 0 & \lambda+1 & -6+\frac{3}{2}(\lambda+5)\\ 0 & 0 & -8-\frac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{2}\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\lambda+5}{2}\\ 0 & \lambda+1 & \frac{3}{2}(\lambda+1)\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+1) & \frac{3}{2}(\lambda+1)\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

∴ ~~$\lambda_1=\lambda_2=1$~~　　初等因子为 $(\lambda+1)$ $(\lambda+1)^2$，

∴ 当 $\lambda=-1$ 时 $(-E-A)=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -8\\ -3 & 0 & -6\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$　rank $=1=3-\underset{n}{2}$

$$\therefore\ J_{11}=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & 1\\ & & -1\end{bmatrix}$$

初等 $(\lambda+1)$，$(\lambda+1)^2$

不变因子为 1，$\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$．

各阶行列式因子 1，$(\lambda+1)$，$(\lambda+1)^2$

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & \lambda+5\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ \lambda-3 & 0 & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\lambda+5}{2}\\ 0 & \lambda+1 & \frac{3}{2}(\lambda+1)\\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda+1)^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

初等因子 $\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$，不变因子 1，$\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$，　特征值为 $\lambda=-1$

行列式因子 $D_1(\lambda)=1$　$D_2(\lambda)=\lambda+1$，$D_3(\lambda)=(\lambda+1)^3$　　则 $m_1=3$，$a_1=2$

$$J=[J_1]=\begin{bmatrix}J_{11} & \\ & J_{12}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & 1\\ & & -1\end{bmatrix}$$

六、(15 分) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{bmatrix}$

求矩阵 $A$ 的伪逆矩阵 $A^+$.

$A^+$ $A=BC.$，对A初等行变换 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\0&4&4&4\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore B=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}$

$(CC^H)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$C^H(CC^H)^{-1}=\cancel{\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$(B^HB)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2&-4\\-4&20\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}20&4\\4&2\end{bmatrix}$

$\cancel{B^H(B^HB)^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&4\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2&-4\\-4&20\end{bmatrix}=$ $(B^HB)^{-1}B^H=\cancel{\begin{bmatrix}-2&-6\\-4&20\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&4\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}20&8&-4\\4&4&6\end{bmatrix}=\cancel{\begin{bmatrix}-2&-8&-14\\-4&40&84\end{bmatrix}}$

$\therefore A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-8&-14\\-4&40&84\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{8}{3}&-\frac{14}{3}\\-\frac{4}{3}&\frac{40}{3}&\cancel{\frac{84}{3}}\,28\\-\frac{2}{3}&16&\frac{98}{3}\\-2&\frac{32}{3}&\frac{70}{3}\end{bmatrix}$

$\frac{1}{56}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20&8&-4\\4&4&6\end{bmatrix}=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}\frac{20}{3}&\frac{8}{3}&-\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{4}{3}&2\\-\frac{16}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}\\8&4&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

$\frac{4}{3}+\frac{6}{3}$

$-\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{6}{3}=-\frac{16}{3}$

$\frac{20}{3}+\frac{4}{3}$ $\quad\frac{8}{3}+$ $\quad-\frac{4}{3}+\frac{6}{3}=-$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

七.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

求下列矩阵范数：$\|A\|_{m_1}, \|A\|_{m_2}, \|A\|_{m_\infty}, \|A\|_1, \|A\|_\infty$

$\|A\|_{m1} = 2+4+1+1+2+1+2+2+7+6+1$

$\|A\|_{m2} = \sqrt{4+1+16+1+4+1+4+4+49+36+1}$

$\|A\|_{m\infty} = 4\times 7 = 28$

$\|A\|_1 = 2+4+2+7 = 15$

$\|A\|_\infty = 7+6+1 = 14$

$\|A\|_{m1} = 2+1+4+1+7+14 = 29$

$\|A\|_{m2} = (4+1+16+1+4+1+4+4+49+36+1)^{1/2} = 11$

$\|A\|_{m\infty} = 4\times 7 = 28$

$\|A\|_1 = 15$ $\|A\|_\infty = 14$

设 A 的特征值为 $\lambda_1$，B 的特征值为 $\lambda_2$，则 ~~$ABX = A(\lambda_2 X) = \lambda_2 AX = \lambda_1\lambda_2 X$~~

~~$BAX = B(\lambda_1 X) = \lambda_1 BX = \lambda_1\lambda_2 X$~~

~~故 AB 与 BA 的特征值相同~~

设 AB 特征值为 $\lambda$，特征向量为 X，$(X\neq 0)$

$ABX = \lambda X \longrightarrow BABX = \lambda BX$

则 $(ABX, X) = (\lambda X, X) = \lambda(X, X)$

$(ABX, X) = X^H ABX = X^H A^H B^H X = (BAX)^H X = (X, BAX) = (X, \lambda X) = \bar{\lambda}(X, X)$

八.（10 分）设 $A$、$B$ 均为埃尔米特矩阵，且 $A$ 正定，证明 $AB$ 的特征值都为实数

$\because A$ 正定 $\therefore A$

$A^H = A$ $B^H = B$ $AA^T = E$

$\therefore \lambda(X, X) = \bar{\lambda}(X, X)$

$\therefore \lambda = \bar{\lambda}$ 即 AB 特征值都为实数

设存在可逆矩阵 $P$ 使得 $PAP^H = I$

$\therefore PABP^{-1} = PAP^H (P^H)^{-1} BP^{-1} = (P^H)^{-1} BP^{-1} = (P^{-1})^H BP^{-1}$

$\therefore AB$ 与 $(P^{-1})^H BP^{-1}$ 相似

$\because B$ 为 Hermite 矩阵，所以 $(P^{-1})^H BP^{-1}$ 也是 Hermite 矩阵

$\therefore (P^{-1})^H BP^{-1}$ 的特征值为实数

# 燕山大学 2015 年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析　　考试时间：2015 年 11 月 28 日

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

座位号　学号　姓名　专业　学院

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

一．（10 分）在线性空间 $R^{2\times2}$ 中，求向量

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

在基

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

下的坐标.

$A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$

$\therefore \begin{cases}1=k_1+k_2+k_3+k_4\\ 2=k_1+k_2+k_3\\ 1=k_1+k_2+k_4\\ 0=k_1+k_3+k_4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k_1=1\\ k_2=1\\ k_3=0\\ k_4=-1\end{cases}$

$\therefore A$ 在 $A_1A_2A_3A_4$ 下的坐标为 $(1,1,0,-1)^T$

解．设 $A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$

$$=k_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k_1&k_1\\k_1&k_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_2&k_2\\k_2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_3&k_3\\0&k_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_4&0\\k_4&k_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4 & k_1+k_2+k_3\\ k_1+k_2+k_4 & k_1+k_3+k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=1\\ k_1+k_2+k_3=2\\ k_1+k_2+k_4=1\\ k_1+k_3+k_4=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=1\\ k_2=1\\ k_3=0\\ k_4=-1\end{cases}$

$\therefore A$ 在基 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 下的坐标为 $(1,1,0,-1)^T$

密封线

二.（10 分）证明：任意一个复矩阵都可以表示成一个 Hermite 矩阵（即 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$）和一个斜 Hermite 矩阵（即 $\mathbf{A}^H=-\mathbf{A}$）的和，且表示式唯一。.

$\forall A\in C^{n\times n}$ 设 $B=\frac{1}{2}(A+A^H)$ $C=\frac{1}{2}(A-A^H)$

$B^H=\frac{1}{2}(A^H+A)=B$ ∴B为 Hermite阵

$C^H=\frac{1}{2}(A^H-A)=-C$ ∴C为斜 Hermite阵

而 $B+C=A$ ∴ 复矩阵可表示成一个Hermite阵和斜Hermite阵

唯一性的证明：设存在 $B_1^H=B_1$ $C_1^H=-C_1$ 使得

① $A=B_1+C_1$，则

② $A^H=B_1^H+C_1^H$

①+②得 $A+A^H=B_1+B_1^H+C_1+C_1^H=B_1+B_1^H=2B_1$

所以 $B_1=\frac{1}{2}(A+A^H)=B$

①-②得 $A-A^H=B_1-B_1^H+C_1-C_1^H=2C_1$

所以 $C_1=\frac{1}{2}(A-A^H)=C$

∴表示方法唯一

三.（10 分）证明：$\|X\|_2\le\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$，其中 $X\in C^n$

$\|X\|_2=\sqrt{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}$

$\|X\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

可知 $\|X\|_1\geq\|X\|_2$

$\sqrt{n}\|X\|_2=\sqrt{n(|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+\cdots+|x_n|^2)}$

$(\sqrt{n}\|X\|_2)^2=n(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)$

$\|X\|_1^2=(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2+2|x_1||x_2|+2|x_1||x_3|+\cdots+2|x_1||x_n|+2|x_2||x_3|+2|x_2||x_4|+\cdots+2|x_2||x_n|+\cdots+2|x_{n-1}||x_n|\le|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2+$

$|x_1|^2+|x_2|^2+|x_1|^2+|x_3|^2+\cdots+|x_1|^2+|x_n|^2+\cdots+|x_2|^2+|x_3|^2+|x_2|^2+|x_4|^2+\cdots$

$+|x_2|^2+|x_n|^2+\cdots+|x_{n-1}|^2+|x_n|^2=n(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)=(\sqrt{n}\|X\|_2)^2$



故 $\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$ 综上所述，$\|X\|_2\le\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$

26

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

四．（10 分）求二次型 $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ 对 $t$ 的导数，其中 $\mathbf{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵，

$$\mathbf{X}=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)^T\in F^n$$

$$\cancel{\frac{\partial(X^TAX)}{\partial t}=\frac{\partial(X^TAX)}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial(X^T)}{\partial X}AX+\frac{\partial(AX)}{\partial X}}$$

$$\cancel{\text{又知}\ \frac{\partial(X^TAX)}{\partial X}=\frac{\partial X^T}{\partial X}AX+\frac{\partial(AX)}{\partial X}X^T=\frac{\partial X^T}{\partial X}AX+\left(\frac{\partial X}{\partial X}A+\frac{\partial A}{\partial X}X\right)X^T}$$

$$\cancel{=\frac{\partial X^T}{\partial X}AX+\frac{\partial X}{\partial X}AX^T}$$

$$\boxed{\frac{\partial(X^TAX)}{\partial t}=\frac{\partial(X^T)}{\partial t}AX+X^T\frac{\partial(AX)}{\partial t}=\frac{\partial X^T}{\partial t}AX+X^T\left(\frac{\partial A}{\partial t}X+A\frac{\partial X}{\partial t}\right)=\frac{\partial X^T}{\partial t}AX+X^TA\frac{\partial X}{\partial t}}$$

$\boxed{\because \frac{\partial X^T}{\partial t}AX \text{ 和 } X^TA\frac{\partial X}{\partial t} \text{ 均为数量函数，其值等于自身转置，故 } \frac{\partial X^T}{\partial t}AX=\left(\frac{\partial X^T}{\partial t}AX\right)^T=X^TA^T\frac{\partial X}{\partial t}}$

$=X^TA^T\frac{\partial X}{\partial t}$

$\therefore \frac{\partial(X^TAX)}{\partial t}=2X^TA^T\frac{\partial X}{\partial t}$

又∵A为实对称阵，故上式为

$2X^T\frac{\partial X}{\partial t}$

解：$\frac{d(X^TAX)}{dt}$

$=\frac{dX^T}{dt}AX+X^T\frac{d(AX)}{dt}$

$=\frac{dX^T}{dt}AX+X^T\left(\frac{dA}{dt}X+A\frac{dX}{dt}\right)$

$=\frac{dX^T}{dt}AX+X^TA\frac{dX}{dt}$

由于二者均为数量函数

则均等于它们自身的转置

即 $\left(\frac{dX^T}{dt}AX\right)^T=X^TA^T\frac{dX}{dt}=X^TA\frac{dX}{dt}$

$\therefore \frac{d(X^TAX)}{dt}=2\frac{dX^T}{dt}AX=2X^TA\frac{dX}{dt}$

五．（10 分）证明：酉矩阵的任意一行（列）用模为 1 的复数遍乘后，所得的矩阵仍为酉矩阵。

设酉矩阵为A，则 $A^HA=E$

设模为1的复数为 $\alpha$，

则 $|\alpha|=\sqrt{\alpha^H\alpha}=1$

取A中的某行

设 $A_i=(a_1, a_2, a_3\cdots a_n)$

用α遍乘后 $A_i'=(a_1, a_2\cdots a_i\alpha_i\cdots a_n)$

$$(A_i')^HA_i'=\begin{bmatrix}a_1^H\\ \vdots\\ a_i^H\alpha_i^H\\ \vdots\\ a_n^H\end{bmatrix}(a_1,a_2,\cdots a_i\alpha_i\cdots a_n)$$

$$=\begin{bmatrix}a_1^Ha_1 & a_1^Ha_2 & \cdots & a_1^Ha_i\alpha_i & \cdots & a_1^Ha_n\\ a_2^Ha_1 & a_2^Ha_2 & \cdots & a_2^Ha_i\alpha_i & \cdots & a_2^Ha_n\\ & & \ddots & & & \\ & & & a_i^H\alpha_i^Ha_i\alpha_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n^Ha_n\end{bmatrix}$$

∴上式 $=A^HA=E$

∴其中一行遍乘后仍为酉矩阵

六．（10分）设 $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

求矩阵 $\mathbf{A}$ 的伪逆矩阵 $\mathbf{A}^{+}$.

解：~~A=~~ 把A最大秩分解. $A=BC$.

初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1\\0&-1&1&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&1\\0&0&2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac12&-\frac12\\0&1&0&\frac12&\frac12\\0&0&2&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac12&-\frac12\\0&1&0&\frac12&\frac12\\0&0&1&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\quad \therefore B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac12&-\frac12\\0&1&0&\frac12&\frac12\\0&0&1&\frac12&\frac12\end{bmatrix}$$

$$A^{+}=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

$$(CC^H)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&0&0&\frac12&-\frac12\\0&1&0&\frac12&\frac12\\0&0&1&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\frac12&\frac12&\frac12\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac32&0&0\\0&\frac32&\frac12\\0&\frac12&\frac32\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac94&-\frac34\\0&-\frac34&\frac94\end{bmatrix}}{3}$$

$$C^H(CC^H)^{-1}=\frac13\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\frac12&\frac12&\frac12\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac94&-\frac34\\0&-\frac34&\frac94\end{bmatrix}=\frac13\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac94&-\frac34\\0&-\frac34&\frac94\\1&\frac34&\frac34\\-1&\frac34&\frac34\end{bmatrix}$$

$$(B^HB)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac14\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$(B^HB)^{-1}B^H=\frac14\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\frac14\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}=\frac12\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{+}=\frac16\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac94&-\frac34\\0&-\frac34&\frac94\\1&\frac34&\frac34\\-1&\frac34&\frac34\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\frac16\begin{bmatrix}2&-2&2\\3&\frac32&-3\\-3&\frac32&3\\1&\frac12&1\\-1&\frac52&-1\end{bmatrix}$$

七．(10分) 证明：$\mathbf{A}^{+}=(\mathbf{A}^{H}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}^{H}$

设 $A=BC$. $BC$为$A$的最大秩分解.

$A^HA=C^HB^HBC=C^H(B^HBC)$ 令$C^H$和$B^HBC$为$A^HA$的最大秩分解

$\therefore (A^HA)^+=(B^HBC)^H(B^HBC(B^HBC)^H)^{-1}(CC^H)^{-1}C$

$=C^HB^HB(B^HBCC^HB^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}C$

$=C^HB^HB(B^HB)^{-1}(B^HBCC^H)^{-1}(CC^H)^{-1}C$

$=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}C$

$\therefore (B^HA)^+A^H=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}CC^HB^H$

$=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=A^+$

八．(15分) 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2 & 1\\ -7 & -6 & -1 & 1\end{bmatrix}$

求下列矩阵范数：$\|\mathbf{A}\|_{m_1},\|\mathbf{A}\|_{m_2},\|\mathbf{A}\|_{m_\infty},\|\mathbf{A}\|_1,\|\mathbf{A}\|_\infty$

$\|A\|_{m_1}=3+1+4+1+7+1+2+1+7+6+1+1=35$

$\|A\|_{m_2}=\sqrt{9+1+16+1+49+1+4+1+49+36+1+1}=13$

$\|A\|_{m_\infty}=n\max_{i,j}|a_{ij}|=4\times7=28$

$\|A\|_1=3+4+7+7=21$

$\|A\|_\infty=7+6+1+1=15$

解：$\|A\|_{m_1}=\sum|a_{ij}|$

$=3+1+4+1+7+1+2+1+7+6+1+1=35$

$\|A\|_{m_2}=(\sum|a_{ij}|^2)^{1/2}$

$=(9+1+16+1+49+1+4+1+49+36+1+1)^{1/2}$

$=13$

$\|A\|_\infty=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|=4\times7=28$

$\|A\|_1=21$ $\|A\|_\infty=15$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

九．（15分）求下列矩阵的Smith标准型、若尔当（Jordan）标准形、初等因子、不变因子和各阶行列式因子，设：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

解：Smith: $A=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-2&0\\1&-4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&-2&0\\-2&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&-2&0\\0&-6&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda+2&-2&1\\0&\lambda+2&0\\-1&4&\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&4&\lambda\\0&\lambda+2&0\\\lambda+2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&-\lambda\\0&\lambda+2&0\\0&2(\lambda+3)&(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda+2&0\\0&2(\lambda+3)&(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2(\lambda+3)&(\lambda+1)^2\\0&\lambda+2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(\lambda+1)^2&2(\lambda+3)\\0&0&\lambda+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&4\lambda+6\\0&-\frac{(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda)}{4\lambda+6}&\lambda+2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{(\lambda+2)^2\lambda}{4\lambda+6}&(\lambda+2)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda+2)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

可见 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda=-2$ 时，$\cancel{2E-A}$ ~~rank~~ $(-2E-A)=\begin{bmatrix}0&-2&1\\0&0&0\\-1&4&-2\end{bmatrix}$ rank=2=3−1

当 $\lambda=-1$ 时 $(-E-A)=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\-1&4&1\end{bmatrix}$ rank=2=3−1.

∴ 当 $\lambda=-2$ 时 $J_2=[-2]$

当 $\lambda=-1$ 时 $J_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}$

∴ Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

解：$|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda+2&-2&1\\0&\lambda+2&0\\-1&4&\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&\lambda+2\\0&\lambda+2&0\\\lambda&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&\lambda+2\\0&\lambda+2&0\\0&2\lambda+4&-(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda+2&0\\0&2\lambda+4&-(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda+2&0\\0&0&(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

初等因子为 $\lambda+2$，$(\lambda+1)^2$

各阶行列式因子为 $D_1(\lambda)=1$

$D_2(\lambda)=1$，$D_3(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2$

# 燕山大学2014年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析　　考试时间：2014年12月14日

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

座位号　　学号　　姓名　　专业　　学院

密封线

一.（10分）在线性空间 $R^{2\times2}$ 中，求向量

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\end{bmatrix}$$

在基

$$E_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\quad E_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

下的坐标

燕山大学研究生课程考试试卷

2012

1. 设 $A=-A^T$，证明：A的特征值为0或纯虚

2. $A=\begin{pmatrix}0&2&i\\5&i&0\\2&i&-1\end{pmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$

(1) 计算 $\|A\|_1$ 和 $\|A\|_\infty$（行范数 $\|A\|_\infty$）

(2) 如果 $X=(2,0,i)^T$，计算 $\|AX\|_1$ 和 $\|AX\|_\infty$

3. 设 $V_1$ 和 $V_2$ 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明：$C^n=V_1\oplus V_2$

密封线

4. $A\in R^{m\times n}$ 则 $AGA=A$ 且 $(GA)^T=GA$ $\Leftrightarrow GAA^T=A^T$

(2,2)

二. (10 分) 设 $A$ 为斜 Hermite 矩阵 (即 $A^H=-A$), 证明: $U=(A+I)(A-I)^{-1}$ 为酉矩阵.

解: $U=(A+I)(A-I)^{-1}$ 则 $U^H=[(A+I)(A-I)^{-1}]^H=(A^H-I)^{-1}\cdot(A^H+I)$

又: $A^H=-A$

$\therefore U^H=(-A-I)^{-1}(-A+I)=-(A+I)^{-1}[-(A-I)]$

$\therefore U\cdot U^H=(A+I)(A-I)^{-1}\cdot(A+I)^{-1}(A-I)=I$

$\therefore U$ 为酉矩阵。

$[(A-I)^{-1}]^H\cdot(A+I)^H$

$=(A^H-I)^{-1}\cdot(A^H+I)$

$U^H=[(A-I)^{-1}]^H\cdot(A+I)^H$

$=(A^H-I)^{-1}(A^H+I)=(A+I)^{-1}\cdot(A-I)$

$U^HU=\cancel{(A^H-I)^{-1}(A^H+I)}(A+I)^{-1}(A-I)(A+I)\cdot(A-I)^{-1}=I$

$Q^HAQ$ 是正定

三. (10 分) 证明: 若 $A,B\in C^{n\times n}$, 且 $A^H=A$, $B^H=B$ 均为正定矩阵, 则 $ABA$ 也是正定矩阵

$ABA$

$\because A^H=A$ 且 $A$ 正定, $B^H=B$ 且正定

$x^HBx>0$

$(ABA)^H=A^HB^HA^H=ABA$

$\therefore\forall\ x\neq0$, 有 $Ax\neq0$ $x^HBx>0$

$x^HAx>0$

$x^HBx>0$

$\therefore$ 有 $(Ax)^HB(Ax)>0$

$(Ax)^HB(Ax)>0$

$(Ax)^HB(Ax)=x^HA^HBAx$ ~~$\geq0$~~

$=x^HABAx$

$x^HA^HBAx>0$

故: $ABA$ 也是正定矩阵。

$x^H(ABA)x>0$

$\therefore Ax\neq0$

$A^H=A$, $B^H=B$

$Ax\neq0$ $x^HBx>0$

$\therefore$ $(Ax)^HB(Ax)>0$

$x^H(ABA)x>0$

$(Ax)^HB(Ax)>0$

$=x^HA^HBAx$

$=x^H(ABA)x>0$

$(ABA)^H=A^HB^HA^H$

$=ABA$

, A

四. (10 分) 设 $A \in C^{m \times n}$，证明 $A$ 的伪逆矩阵 $A^{+}$ 是唯一的.

(7)

假设 $X, Y$ 都为矩阵 $A$ 的伪逆矩阵

$$X = XAX = XYAYX = XAYAX = X(AY)^H(AX)^H$$
$$= XY^H A^H X^H A^H = XY^H A^H$$
$$= X(AY)^H = XAY = (XA)^H Y = A^H X^H Y$$
$$= A^H Y^H A^H X^H Y = (YA)^H (XA)^H Y = YAXAY$$
$$= YAY = Y$$

$$X = XAX = XAYAX$$
$$= XY^H A^H X^H A^H$$
$$= XY^H A^H$$
$$= XAY$$
$$= A^H X^H Y$$
$$= A^H Y^H A^H X^H Y$$
$$= YAXAY$$
$$= YAY = Y$$

(7)

五. (15 分) 将矩阵 $A$ 分解成一个下三角阵 $L$ 和一个单位上三角阵 $U$ 的乘积，即：$A = LU$

设：
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L = [$

六.

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

(7)

六.（15 分）设

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}$$

求矩阵 $A$ 的伪逆矩阵 $A^+$.

① $A^+=C^+B^+$

② $A^+=U\Lambda^+U^HA^H$

$A^+=A^H(AA^H)^{-1}$

$A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}0&1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&1&0\\2&0&1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccc|ccc}2&0&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&0&0\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccc|ccc}2&0&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&-1&0\end{array}\right]$$

$=$

七. (15 分) 求下列矩阵的 Smith 标准型、若尔当 (Jordan) 标准形、初等因子、不变因子和各阶行列式因子，设：

(3)

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ -4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

① 所有1阶子式 $D_1(\lambda)=1$，2阶子式 $D_2(\lambda)=1$

所有3阶子式 $D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

Smith 标准型为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$

② $\lambda_1=1$ $m_1=2$ $\mathrm{rank}(\lambda-A)=2$ $a_1=1$

$\lambda_2=2$ $m_2=1$ $\mathrm{rank}(2\lambda-A)=2$ $a_2=1$

$J_1=J_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ $J_2=J_{21}=(2)$

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

初等子为 $(\lambda-2),(\lambda-1)^2$，不变因子 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$，~~$d_3(\lambda)=$~~

$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

16) 八.(15 分) 设 28 $\sqrt{118}$ $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ → $4\times7=28$ → 15 → 14

求下列矩阵范数：$\|A\|_{m_1}, \|A\|_{m_2}, \|A\|_{m_\infty}, \|A\|_1, \|A\|_\infty$

解：$\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = 2+1+4+1+2+2+1+1+7+6+1=28$

$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^2+1^2+4^2+1^2+2^2+1^2+2^2+1^2+7^2+6^2+1^2}=\sqrt{118}$

$\|A\|_{m_\infty}=n\max_{i,j}|a_{ij}|=4\times7=28$

$\|A\|_1=\max_{j}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=2+4+2+7=13$ 列 1

$\|A\|_\infty=\max_{i}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=7+6+1=14$ 行 1

# 燕山大学 2013 年秋季学期研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵分析　考试时间：2013 年 12 月 8 日

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

座位号　学号　姓名　专业　学院

密封线

一.(10 分)设 $A \in C^{m\times n}$，定义 $R(A)=\{Y|AX=Y, X\in C^n\}$，

证明：$R(A)$ 是线性空间 $C^n$ 的一个子空间，并写出 $R(A)$ 的维数。

解①非空：$A\cdot 0=0$　$0\in R(A)$　$\therefore R(A)$非空

②封闭性　$X_1 X_2 \in C^n$，　$AX_1=Y_1$，$AX_2=Y_2$

$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=Y_1+Y_2$　$\therefore R(A)$加法封闭

$A(\lambda X)=A\lambda X=\lambda AX=\lambda Y$　$\therefore R(A)$乘法封闭

$\therefore R(A)$是子空间

$\dim R(A)=m$

燕山大学研究生课程考试试卷

二.(15 分) 1）$A\in R^{n\times n}$ 是对称阵，证明：$(A^+)^2=(A^2)^+$　正交矩阵 $A\cdot A^T=E$　对称阵 $\therefore A=A^T$

2）设 $e_1,e_2,\cdots e_n$ 是 n 维内积空间 $V$ 的一组基，

证明：对 $\alpha\in V$，如果 $(\alpha,e_i)=0,\ i=1,2,\cdots n$，则 $\alpha=0$

1) A是对称阵 $A=A^H$

$A^+=(A^HA)^+A=A^H(A^HA)^+$

$A^+=(AA)^+A=A(AA)^+$

$(A^+)^2=(AA)^+A\cdot A(AA)^+$

$=(A^2)^+$

牛逼

2) 由于 $e_1 e_2\cdots e_n$ 为内积空间 V 的一组基

$\alpha\in V$，$\alpha$可表示为

$\alpha=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne^n$

$(\alpha,\alpha)=(\alpha,k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne^n)$

$=(\alpha,k_1e_1)+(\alpha,k_2e_2)+\cdots+(\alpha,k_ne^n)$

$=k_1(\alpha,e_1)+k_2(\alpha,e_2)+\cdots+k_n(e^n,\alpha)$

又$\because(\alpha,e_i)=0$

$\therefore(\alpha,\alpha)=0$　$\therefore\alpha=0$

密封线

$\because A0=0$, $0\in R(A)$ $\therefore R(A)$非空

任在$R(A)$中取$Y_1, Y_2$. 则有$X_1, X_2\in C^n$ 满足$AX_1=Y_1$, $AX_2=Y_2$,

则$Y_1+Y_2=AX_1+AX_2=A(X_1+X_2)$ $\because X_1+X_2\in C^n$ $\therefore A(X_1+X_2)\in R(A)$

$\lambda Y=\lambda AX=A(\lambda X)$ $\because \lambda X\in C^n$ $\therefore \lambda Y\in R(A)$

$\therefore R(A)$对加法和数乘封闭 $\therefore R(A)$是线性空间$C^n$的一个子空间

$\dim R(A)=n-\dim N(A)=n-(n-\operatorname{rank}A)=\operatorname{rank}A$

三.(10分)求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

的 smith(史密斯)标准型。

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda+2 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 4 & \lambda\end{pmatrix}$$

所有1阶子式 $D_1(\lambda)=1$，所有2阶子式 $D_2(\lambda)=\cancel{\lambda+2}$ $\lambda+2$

所有3阶子式 $D_3(\lambda)=\lambda+2$ $d_1(\lambda)=1$ $d_2(\lambda)=\cancel{\lambda+2}$ $d_3(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2$

$d_2(\lambda)=\lambda+2$

$\therefore$ Smith标准型为 $\begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda+2 & \\ & & (\lambda+2)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$

四.(10 分)求矩阵 $A$ 的 Jordan(约当)标准型，其中

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

~~若初等因子为 $(\lambda-1)^2,(\lambda-2)$  $r(A)=3$~~

$\therefore$ ~~$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$  $d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$~~

$\lambda_1=2 \quad m_1=1 \quad a_1=1 \quad J_1=J_{11}=[2]$

$\lambda_2=1 \quad m_2=2 \quad a_1=1 \quad J_2=J_{11}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

五.(15 分)

1) 证明：对于任意 $X\in C^n$，都有 $\|X\|_2\le\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$；

2) 证明：当 $\|A\|<1$ 时，级数 $I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots$ 收敛。

$\|A^n\|\le\|A\|^n$

$\|A\|<1$ 时，$\|I\|+\|A\|+\cdots+\|A\|^n$

解：(1) $\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$；$\|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

则 $\|X\|_1^2=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2+2|x_1x_2|+2|x_1x_3|+\cdots+2|x_1x_n|$

$+2|x_2x_3|+2|x_2x_4|+\cdots+2|x_2x_n|+\cdots+2|x_{n-1}x_n|$

$\le|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2+(|x_1|^2+|x_2|^2)+(|x_1|^2+|x_3|^2)+\cdots+(|x_{n-1}|^2+|x_n|^2)$

$=n\cdot(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)=n\|X\|_2$

$\therefore\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$



显然 $\|X\|_1^2\ge\|X\|_2^2$  即 $\|X\|_1\ge\|X\|_2$

即证 $\|X\|_2\le\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$

(2) 由矩阵范数的定义知 $\|A^n\| \le \|A\|^n$

又由于 $\|A\|<1$，所以数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \|I\|+\|A\|+\|A\|^2+\cdots+\|A\|^n+\cdots$

收敛，由正项级数的判别法知级数：

$$\|I\|+\|A\|+\|A^2\|+\cdots+\|A^n\|+\cdots \text{ 收敛}$$

故级数 $I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots$ 绝对收敛，即收敛

(5) 六 (10 分) 求 $f(A)=X^T AY$ 对 $A$ 的导数，其中 $X$ 为 n 维列常向量，$Y$ 为 m 维列常向量，$A$ 为 $n\times m$ 矩阵。

$X=(a_{11},a_{12}\cdots a_{1n})^T$

解 由于 $X^TAY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j$ 故

$$\frac{\partial(X^TAY)}{\partial a_{ij}}=x_iy_j$$

$$A=\begin{bmatrix} x_1a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ x_2a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_na_{n1} & x_na_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(X^TAY)}{dA}=\left(\frac{\partial(X^TAY)}{\partial a_{ij}}\right)_{n\times m}=(x_iy_j)_{n\times m}=XY^T$$

特别地当 $X=Y$ $\frac{d(X^TAX)}{dA}=XX^T$

$X^TAY=$

$\frac{dX^TAY}{dA}=$

$$\begin{bmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{21}+\cdots+x_na_{n1} \\ x_1a_{12}+x_2a_{22}+\cdots+x_na_{n2} \\ \vdots \\ x_1a_{1m}+x_2a_{2m}+\cdots+x_na_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

七.(10 分) 设

$B = TJT^{-1}$ 再求特征向量的方法证明

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求证：$B^n = B^{n-2} + B^2 - I \quad (n \geq 3)$。

$$f(\lambda) = |\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0$$

$\therefore (B^2 - I)(B + I) = 0$

设 $g(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-2} - \lambda^n + 1$

$$g(B) = B^n - B^{n-2} - B^2 + 1 = B^{n-2}(B^2-1) - (B^2-1) = (B^2-1)(B^{n-2}-1) = 0$$

$\therefore B^n - B^{n-2} - B^2 + 1 = 0 \quad B^n = B^{n-2} + B^2 - I$

八.(10 分) 求方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

$X = A^{-}b$

$A^{+}$

~~最小范数解~~

的极小最小二乘解。

$X = A^{+}b$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

九.(10 分)设

$$\alpha_1=(1,2,1,0)^T,\alpha_2=(-1,1,1,1)^T,$$
$$\beta_1=(2,-1,0,1)^T,\beta_2=(1,-1,3,7)^T$$

求$V_1=Span\{\alpha_1,\alpha_2\}$,与$V_2=Span\{\beta_1,\beta_2\}$的和及交的维数和它们的基。

牛逼

解 $V_1+V_2=Span\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{bmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 基

维数 3

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&2&-2&2\\0&1&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&7\\0&2&-2&2\\0&3&-5&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&7\\0&0&-4&-12\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$V_1\cap V_2=\{X\mid X\in V_1 且 X\in V_2\}$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2$

$\to k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_2=0$

$AX=0$

$r(A)=3$

$4-3=1$ 基础解系 1

$$\begin{bmatrix}1\\-4\\3\\0\end{bmatrix}$$

$\therefore (-1,4,-3,1)^T$

课程名称：　　　　　　　　　　　　考试时间：

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | | |

密封线

1. (10 分) 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为酉空间 $C^n$ 中的一个标准正交基，任意向量 $\alpha$ 在这个基下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，证明 $x_i = (\alpha, e_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

证明：$\because e_1, e_2 \cdots e_n$ 为酉空间 $C^n$ 中的一个标准正交基，那任意向量 $\alpha$ 在这个基下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\therefore \alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$

又因为 $e_1, e_2, \cdots e_n$ 为酉空间 $C^n$ 中的一个标准正交基，则

$(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j$. 因此有 $(e_i, e_i) = 1$. 则

$(\alpha, e_i) = x_1(e_1, e_i) + x_2(e_2, e_i) + \cdots + x_i(e_i, e_i) + \cdots + x_n(e_n, e_i)$

$= x_i(e_i, e_i) = x_i$

得证 $x_i = (\alpha, e_i)$.

燕山大学研究生课程考试试卷

2. (15 分) 设 $\alpha_1 = (1,2,1,0)^T, \alpha_2 = (-1,1,1,1)^T, \beta_1 = (2,-1,0,1)^T, \beta_2 = (1,-1,3,7)^T$ 求 $V_1 = Span\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 与 $V_2 = Span\{\beta_1, \beta_2\}$ 的和及交的维数以及它们的基。

解：记 $V_1 = Span\{\alpha_1, \alpha_2\}$. $V_2 = span\{\beta_1, \beta_2\}$. ~~[illegible]~~.

显然 $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$. 且

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = A. \quad rank A = 4. \text{ 所以 } \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \text{ 线性无关}$$

密封线

∴ $V_1$与$V_2$的和记为$V$，有. $V=V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$.

且$\dim V=\dim V_1+\dim V_2=4$.

根据维数定理 $\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$

可知 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$

$$=2+2-\dim V=0.$$

由于$V$为$V_1$与$V_2$的和空间是由$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$生成的. 且$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$线性无关. ∴ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$可作为和空间$V$的一组基.

$V_1\cap V_2$的基为$0$. 即 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$

$(\alpha,e_i)=(x_1e_1+\cdots+x_ne_n,e_i)$

$=x_1(e_1,e_i)+\cdots+x_n(e_n,e_i)$

$=x_i(e_i,e_i)=x_i$ 即证.

3. (10 分) 求矩阵$A$的约当标准型，其中$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

解. 由题意. 可矩阵$A$的特征多项式

$\det|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

可求得相应的特征根为$\lambda_1=1$ (二重), $\lambda_2=2$

密封线

燕山大学研究生课程考试试卷

密封线

对 $\lambda_1=1$, $m_1=2$ 时,

$$\text{rank}(I-A)=\text{rank}\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}=2=3-1, \text{所以 } a_1=1.$$

故 $J_1=[J_{11}]=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

对 $\lambda_2=2$, $m_2=1$ 时

$$\text{rank}(2I-A)=\text{rank}\begin{bmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}=2=3-1, \text{所以 } a_2=1$$

故 $J_2=[J_{21}]=[2]$

故A的约当标准型为 $J=\begin{bmatrix}J_1&\\&J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

4.（10分）设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，求证：$A^n=A^{n-2}+A^2-I$ $(n\geq 3)$.

矩阵函数

$I$ 为单位阵.

证明：记A的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}$

$\because f(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$ 显然 $f(A)=|AI-A|=0$

$\therefore f(A)=A^3-A^2-A+I=0$.

利用数学归纳法：① 当 $n=3$ 时，$A^3=A+A^2-I$ 可变形为.

$f(A)=A^3-A^2-A+I=0$ $\therefore$ 有 $A^3=A+A^2-I$ 成立.

② 假设当 $n=k-1$ 时 等式成立，即有 $A^{k-1}=A^{k-3}+A^2-I$ 成立.

③ 当 $n=k$ 时，$A^k=A\cdot A^{k-1}=A^{k-2}+A^3-A$

$\because A^3-A^2-A+I=0$ $\therefore A^3-A=A^2-I$

$\therefore A^k=A^{k-2}+A^2-I$ 成立.

可证：$A^n=A^{n-2}+A^2-I$ $(n\geq 3)$ 成立.

5. (10 分) 设 $A$ 为 $n$ 阶反对称矩阵，证明：$A$ 的特征值为 0 或纯虚数。

先设出 $\lambda$

$(x,y)=y^H Ax = y^H x$

$(Ax,x)=\lambda(x,x)$

$(Ax,x)=x^H Ax$

证明：∵ $A$ 为 $n$ 阶反对称矩阵 ∴ $A=-A^T$

设任意向量 $\xi=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，$A$ 的特征值为 $\lambda$，则 $A\xi=\lambda\xi$。

两边取共轭则 $\overline{A\xi}=\overline{\lambda\xi}$，$\bar{\xi}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n)^T$

$\bar{\xi}^T A\xi=\lambda\bar{\xi}^T\xi$

$=-\bar{\xi}^T A^T\xi=-(A\bar{\xi})^T\xi=-(\overline{A\xi})^T\xi=-\bar{\lambda}\bar{\xi}^T\xi$ ∵ $\bar{\xi}^T\xi\neq 0$，∴ $\lambda=-\bar{\lambda}$

∴ $\lambda$ 为纯虚数。又 ∵ $-A=A^T$ ∴ $(-1)^n|A|=|A|$ 当 $n$ 为奇数时 $2|A|=0$。

$|A|=\prod_i\lambda_i=0$ ∴ $A$ 的特征值为 0 或纯虚数。

6. (10 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&i\\5&i&0\\2&i&-1\end{bmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$

(1) 计算 $\|A\|_1$ 和 $\|A\|_\infty$；

(2) 如果 $x=(2,0,i)^T$，计算 $\|Ax\|_1$ 和 $\|Ax\|_\infty$

解：(1) $\|A\|_1=\max\limits_j\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|=\max\{5+2,2+1+1,1+1\}=7$

$\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|=\max\{2+1,5+1,2+1+1\}=6$.

(2) 当 $x=(2,0,i)^T$，$Ax=\begin{bmatrix}0&2&i\\5&i&0\\2&i&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\10\\4-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

$\|Ax\|_1=\sum\limits_{i=1}^n|b_i|=1+10+\sqrt{17}=11+\sqrt{17}$；

$\|Ax\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|b_i|=\max\{1,10,\sqrt{17}\}=10$.

0

7. (10 分) 求二次型 $X^TAX$ 对 $X$ 的导数.

解：由于 $\dfrac{d(A^TB)}{dX}=\dfrac{d(A^T)}{dX}B+\dfrac{d(B^T)}{dX}A$.

利用上式可知，$A$ 为二次型系数矩阵 ∴ $A=A^T$

$$\frac{dx^TAx}{dx} = \frac{dx^T}{dx}Ax + \frac{d(Ax)^T}{dx}x$$
$$= Ax + \frac{dx^TA^T}{dx}x$$
$$= Ax + \frac{dx^T}{dx}A^Tx + \frac{dA}{dx}x \cdot x$$
$$= Ax + A^Tx$$
$$= 2Ax.$$

8. (10 分) 设 $V_1$ 和 $V_2$ 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间，证明：$C^n = V_1 \oplus V_2$

证明：(1). 若对 $\forall\ \alpha \in V_1 \cap V_2$，有 $\alpha \in V_1$ 且 $\alpha \in V_2$. 设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$

则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 = n\alpha_i$ $(i \in 1, \ldots, n)$

由 $i$ 的任意性 可得 $\alpha_i = 0$. $\therefore \alpha = 0$. 由 $\alpha$ 的任意性，$\therefore V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

$\because V_1$ 为方程组 $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ 的解空间. 显然其系数矩阵秩为 1.

$\therefore \dim V_1 = n-1$

由 $V_2$ 为 $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ 的解空间. $V_2$ 中的任意向量 $\alpha$ 均为方程的解，均可由向量 $\xi = (1, 1 \ldots 1)^T$ 线性表示. $\therefore \xi$ 为 $V_2$ 的基.

$\therefore \dim V_2 = 1$. 若记 $C^n = V_1 + V_2$. 则 $\dim C^n = \dim V_1 + \dim V_2$.

$= \dim(V_1 + V_2) = n$. $\therefore C^n = V_1 \oplus V_2$

9. (10 分) 设 $A \in R^{m \times n}$，则 $AGA = A$，且 $(GA)^T = GA$ 的充分必要条件是 $GAA^T = A^T$

证明：充分性：设 $A \in R^{m \times n}$ 且 $GAA^T = A^T$

则 $A = (A^T)^T = (GAA^T)^T = AA^TG^T = A(GAA^T)G^T$

$= AG(AA^TG^T) = AGA$. 即 $AGA = A$.

且 $(GA)^T = A^TG^T = GAA^TG^T = G(GAA^T)^T = G(A^T)^T = GA$..





充分性

$A = (A^T)^T = (GAA^T)^T = AA^TG^T = A \cdot GAA^TG^T = AG(AA^TG^T)$
$= AG(GAA^T)^T$
$= AGA$

充要性：$A^T = (AGA)^T = (GA)^T A^T = GAA^T$

即 $(GA)^T = GA$. 得证.

必要性：对 $A \in R^{m\times n}$，有 $AGA=A$，且 $(GA)^T = GA$

则 $A^T = (AGA)^T = A^T G^T A^T = (GA)^T A^T = GAA^T$ $= A^T G^T A^T = (GA)^T A^T$

可 $GAA^T = A^T$ 得证.

$\therefore$ 对 $A \in R^{m\times n}$. $AGA=A$ 且 $(GA)^T = GA$ 的充分必要条件是 $GAA^T = A^T$

10.（5 分）广义逆矩阵 $A^+$ 产生的背景是什么（解决什么问题产生的）？并写出它所满足的 4 个性质。

对于一般线性方程组，$A_{m\times n} X = b$.

是否存在 $B_{n\times m}$ 使方程组的解为 $X = B_{n\times m} b$.

$$\begin{cases} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^H = AA^+ \\ (A^+A)^H = A^+A. \end{cases}$$

$x_1 + \cdots + x_n = 0$ 的解向量为 $(-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, (-1, 0, 1, 0 \cdots 0)^T,$
$(-1, 0, 0, 1, 0 \cdots 0)^T \cdots (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T$，$\dim V_1 = n-1$

$x_1 = x_2 = x_n$ 的解向量为 $(1, 1, \cdots 1)^T$，$\dim V_2 = 1$

$\therefore \dim V_1 + \dim V_2 = n$. 又：$V_1$ 和 $V_2$ 中解向量线性无关

$\therefore C^n = V_1 \oplus V_2$



$(GA)^T = A^T G^T = GAA^T G^T$
$= G (GAA^T)^T$
$= G \cdot (A^T)^T = GA$

设 $e_i = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + e_i + 0e^n$

$e_j = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + e_j + 0e^n$

$\therefore (e_i, e_j) = 0\cdot 0 + \cdots = 0$

即满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\ne j \end{cases}$ 时称 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为标准正交基

# 矩阵分析试卷

一、（10 分）设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 n 维复内积空间 V 的一组基，$\forall \alpha, \beta \in V$

$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$，　$\beta = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots y_ne_n$

的内积定义为　$(\alpha, \beta) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n$

证明：$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 n 维复内积空间 V 的一组标准正交基。

若 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \Rightarrow$ 正交基；若还满足 $(\alpha_i, \alpha_i) = 1 \Rightarrow$ 标准正交基

标准正交基的定义

二、下列两题中任选一题（10 分）

（1）设 $V_n$ 是 $n$ 维内积空间，$\alpha \neq 0$ 是 $V_n$ 的一固定向量，证明：

（i）$W = \{\beta \mid (\beta, \alpha) = 0, \beta \in V_n\}$ 是 $V_n$ 的一个子空间；

（ii）$\dim W = n-1$

证四个方面　非空子集成为子空间的充要条件是对于所规定的运算是封闭的

（2）设 $A \in C^{m\times n}$，写出 $A$ 的列空间 $R(A)$，并证明 $R(A)$ 是 $C^m$ 的一个子空间。

三、（10 分）设 $A \in C^{n\times n}$ 满足 $A^H = -A$，则称 $A$ 为反 Hermite 矩阵，证明：任一个复矩阵都可以表示成一个 Hermite 矩阵和一个反 Hermite 矩阵的和，且表示法唯一。

先证存在性　再证唯一性

四、（10 分）设

$$A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

求 $A$ 的 Smith 标准形。

设 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$，$\beta = (x_1, \cdots, x_n)$

$(\beta, \alpha) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$

$r(\alpha) = 1$

$\therefore \dim W = n-1$

五、（10 分）求矩阵 $A$ 的 Jordan 标准形，设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

什么时候写在上面？

$(\lambda-3)(\lambda+1)+4$

$\lambda I_4 - A =$

$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda I_2 - A_1$

$(\lambda-1)(3-\lambda)$

六、下列两题中任选一题（10分）

（1）设 $\|A\|$ 是矩阵范数，证明存在向量范数 $\|X\|$，使得

$$\|AX\| \le \|A\|\,\|X\|$$

P37. 相容性

（2）已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & 2\\ -i & 2 & 5\end{bmatrix}$，$i=\sqrt{-1}$，试写出 $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ 和 $\|A\|_F$。

$\max_i \sqrt{\lambda_i(A^H A)}$

1. 列范数

$\infty$ 行范数

2. 谱?

七、（10分）对于任意的算子范数 $\|\cdot\|$，证明：

（1）$\|I\|=1$ 其中 $I$ 为单位矩阵

P92, 3.

$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$

$\|E\| = \max_{\|X\|=1} \|EX\| = 1$

$\|I\| = \max_{X\ne 0} \frac{\|IX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$

（2）$\|A\|^{-1} \le \|A^{-1}\|$

八、（10分）利用矩阵的最大秩分解证明：$A^{+}=(A^H A)^{+} A^H$ P149. 定理6.1.(3)

九、（10分）利用广义逆矩阵求解线性方程组

P54. 例4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$Ax=b$

$A^{+} = C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H$

$X = A^{+}b + (I_n - A^{+}A)Y$

$A^{-} = A^H (AA^H)^{-1}$

$X = A^{-}b + (I_n - A^{-}A)Y$

十、下列两题中任选一题（10分）

（1）将矩阵

$l_{i1}=a_{i1}$, $i \in 1$

$u_{ij} = a_{ij}/l_{11}$, $j=2,3,\dots,n$

$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}$

$u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj})/l_{kk}$, $k=2,3,\dots,n-1$, $j=k+1,k+2,\dots,n$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -5\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

分解成一个下三角矩阵和一个单位上三角矩阵的乘积。

$A = LU$

P67.

求二阶矩阵时，需要注意

$A^H A$ 或 $AA^H$

（2）已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 $A$ 的奇异值，并给出 $A$ 的奇异值分解。

正奇异值

正特征值开方

$AA^H = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$(\lambda I - AA^H) = $

$\lambda = 1$, $\lambda = 3$

| 科目 | 矩阵分析 | 年级班级 | | 姓名 | | 学号 | | 时间 | 2008年 11月28日 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

燕山大学试卷 密 封 线 共6页第1页

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | | … | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 成绩 | | | | | | | | | |

一、（10分）

1、设 $A\in C^{m\times n}$，定义 $R(A)=\{Y|\ AX=Y,X\in C^n\}$

证明：$R(A)$ 是线性空间 $C^m$ 的一个子空间，并写出 $R(A)$ 的维数。

2、设 $W_1$ 是 $V_n(C,U)$ 的任一非平凡子空间，则存在唯一的子空间 $W_2\subset V_n(C,U)$ 使 $W_2=(W_1)_\perp$。 P34.

二、（10分）

P21 例1.18 证明：$\alpha_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$

$\alpha_3=(-1,\ 0,\ 0,\ 1)^T$，$\alpha_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)^T$ ⇒ 看求标准正交基

是线性空间 $R^4$ 的一组基，对任意 $X,Y\in R^4$，定义内积 $(X,Y)=Y^TX$，试从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 出发，利用 Schmidt 正交化法，求出 $R^4$ 的一组标准正交基。

三、（10分）

设 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 求证：$B^n=B^{n-2}+B^2-I\quad(n\geq 3)$ $I$ 为单位阵。 $B=TJT^{-1}$ 牛逼 先化为 $B=TJT^{-1}$

四、（10分）下列三题选择其一回答

1. 求列向量 $BX$ 对 $X^T$ 的导数。 推导
2. 求二次型 $X^TAX$ 对 $X$ 的导数
3. 设 $A\in C^{n\times m}$，$X\in C^{m\times n}$，则 $\dfrac{\partial trAX}{\partial X}=A^T$

$$\frac{dBX}{dX^T}=\begin{bmatrix}\frac{db_1^TX}{dX^T}\\ \vdots\\ \frac{db_n^TX}{dX^T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1^T\frac{dX}{dX^T}+X^T\frac{db_1}{dX^T}\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1^T\\ \vdots\\ b_n^T\end{bmatrix}=B$$

$$\frac{dX^TAX}{dX}=\frac{dX^T}{dX}AX+\frac{d(AX)^T}{dX}X$$

$$=AX+\frac{dX^TA^T}{dX}X=(A+A^T)X=2AX$$

五、（15分）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-2&0\\1&-4&0\end{bmatrix}$$

P46~P47

1. 求矩阵 $A$ 的约当标准形；
2. 例 ⇐ 求相似变换矩阵 $T$，使 $A=TJT^{-1}$ ⇒ 求T？

六、（10分）下列两题选择其一回答

1. 设在 $V_n(F)$ 上定义了 $\|x\|_a$，$\|x\|_b$ 两种向量范数，则存在两个正常数 $c_1$，$c_2$ 使得

$$c_1\|x\|_b\leq\|x\|_a\leq c_2\|x\|_b$$

~~$\varphi(x)=\|x\|_a/\|x\|_b$~~

$\varphi(x)=\|x\|_a/\|x\|_b$ 是 $S=\{x|\ \|x\|=1\}$ 上关于 $\|x\|_2$ 的连续函

$\varphi(x)\leq c_2$ 且

同

六、已知向量范数 $\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，定义 $\|A\|_1=\max\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，证明 $\|A\|_1$ 可作为与 $\|X\|_1$ 相容的矩阵范数。

七、（10分）下列三题选择其一回答

1. 设 $A^- \in C^{n\times m}$ 是 $A\in C^{m\times n}$ 的广义逆矩阵，则 $A^-$ 是 $A$ 的自反广义逆矩阵的充要条件是 $rankA^- = rankA$

充分：$rankA=rankA^-$　$AA^-A=A$　$R(A^-A)\subset R(A^-)$

$rankA\le rank\,AA^-A\le rank\,A^-A\le rankA^-$ ∴ $rankA^-$

∴ $R(A^-A)=R$

∴ ∃ X 使 $A^-AX=A^-$

且 $A^-=A^-AA^-=\ldots$

必要：$AA^-A=A$　$A^-AA^-=A^-$

∴ $rank\,A\le rankA^-$　$rankA^-\le rankA$

2. 设 $A\in C^{m\times n}$，则 $A^+=(A^HA)^+A^H$

3. 设 $A=A^H=A^2$，则 $A=A^+$

八、（10分）求线性方程组

$$\begin{cases}x_2-2x_3=-2\\-x_1-2x_2+x_3=-1\end{cases}$$

$X=A^+b+(I_n-A^+A)Y$　$\|Ax-b\|_2=\min$

的通解和最小范数解。（用广义逆矩阵方法）　LNLS → $A^+b$

九、（15分）若 $\|A\|_2<1$

1. 证明矩阵级数：$I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots$ 绝对收敛

2. 证明 $(I-A)$ 可逆

3. 证明 $\|(I-A)^{-1}\|_2\le\dfrac{1}{1-\|A\|_2}$

反证 $\|(I-A)X\|$

$\|X-AX\|\ge\|X\|-\|A\|\|X\|$

$>0$

$(I-A)X\ne 0$

1. 证明：由矩阵范数的定义有 $\|A^m\|_2\le\|A\|_2^m$，又 ∵ $\|A\|_2<1$

∴ $\|I\|_2+\|A\|_2+\|A^2\|_2+\cdots+\|A^m\|_2+\cdots$ 收敛

假设 $\|I\|_2+\|A\|_2+\|A^2\|_2+\cdots+\|A^m\|_2+\cdots$ 收敛，

则 $I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots$ 绝对收敛

2. ∵ $\|(I-A)X\|=\|X-AX\|\ge\|X\|-\|AX\|\ge\|X\|-\|A\|\cdot\|X\|$

当 $\|A\|<1$，$X\ne0$ 时有：$=(1-\|A\|)\|X\|>0$

可知 $(I-A)X\ne0$ ∴ $(I-A)X$ 只有零解 ∴ $I-A$ 可逆

3. ∵ ~~$(I-A)(I-A)^{-1}=I$~~

~~∴ $\|(I-A)(I-A)^{-1}\|_2\le\|(I-A)\|_2\|(I-A)^{-1}\|_2$~~

~~∴ $\|(I-A)\|_2\|(I-A)^{-1}\|_2\ge1$，且 $\|(I-A)\|_2>0$~~

~~∴ $\|(I-A)^{-1}\|_2\ge\frac{1}{\|(I-A)\|_2}$~~

~~又 $\|I-A\|_2\ge\|I\|_2-\|A\|_2=1-\|A\|_2$~~

$(I-A)(I-A)^{-1}=I$

$\|(I-A)^{-1}\|\le\|I\|+\|A(I-A)^{-1}\|$

$\le 1+\|A\|\,\|(I-A)^{-1}\|$

又 ∵ $\|(I-A)^{-1}\|_2\le\|(I-A)\|^{-1}=\dfrac{1}{\|I-A\|_2}$

∵ $\|I-A\|_2\ge\|I\|_2-\|A\|_2=1-\|A\|_2$

$(1-\|A\|)\|(I-A)^{-1}\|$

∴ $\dfrac{1}{\|I-A\|_2}\le\dfrac{1}{1-\|A\|_2}$

∴ $\|(I-A)^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|A\|_2}$

29

4

5

15

20

| 科目 | 矩阵分析 | 年级班级 | | 姓名 | | 学号 | | 时间 | 2010年11月14日 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

燕山大学试卷　　　　密　　封　　线　　　　共 8 页 第 1 页

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 成绩 | | | | | | | | | |

一 （12） 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ i & 1+i & 0\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ i\end{bmatrix}$，计算：1，$\|AX\|_1$；2，$\|A\|_{m_1}$

解：$Ax=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ i & 1+i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i\\ -i\end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned}\|AX\|_1 &= |1+i|+|i|=\sqrt{2}+1\\ \|A\|_{m_2} &= \sqrt{1+1+|i|^2+|1+i|^2}=\sqrt{5}\end{aligned}}$$

$i^2=-1$

$a+bi$　$\sqrt{a^2+b^2}$　$\sqrt{1+1+1+2}=5$

$\sqrt{1+i^2}$

$(x,y)=\overline{(y,x)}$

二 （12）下列各题选择其一回答

1．在 $R^2$ 中，定义 $(X,Y)=X^TAY$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

（1） 证明 $(X,Y)$ 是 $R^2$ 上的内积；

（2） 若 $X=(1\ \ 1)^T$，$Y=(3\ \ -2)^T$，问 $X$ 与 $Y$ 是否正交

2．设 $A\in C^{m\times n}$，定义 $N(A)=\{X\mid AX=0,X$

（1） 证明 $N(A)$ 是线性空间 $C^n$ 的子空间

（2） 若 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求 $N(A)$ 的维数 2

$A\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　$3-1=2$

$(X,Y)$

$X^TAY=(1,1)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$

$=6-6=0$

正交

1.(1) 证：① $(\overline{Y,X}) = \overline{Y^T A X} = \bar{Y}^T \bar{A} \bar{X} = (\bar{Y}^T \bar{A} \bar{X})^H = X^T A^T Y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　$A^T = A$　$(\overline{YX}) = X^T A Y = (X, Y)$

② $(\lambda X, Y) = (\lambda X)^T A Y = \lambda^T X^T A Y = \lambda (X^T A Y) = \lambda (X, Y)$

③ $(X+Y, Z) = (X+Y)^T A Z = (X^T + Y^T) A Z = X^T A Z + Y^T A Z$
$= (X, Z) + (Y, Z)$

则 $(X, Y)$ 是 $R^2$ 上的内积

(2) $(X, Y) = X^T Y = [1, 1] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ 故 X 与 Y 不正交

三 (12) 下列各题选择其一回答

1. 对任意 $X \in C^n$，证明 $\|X\|_\infty \le \|X\|_p \le n^{\frac{1}{p}} \|X\|_\infty$ 只分

2. 设 $\|X\|$ 是 $V_n(F)$ 上的向量范数，证明 $\|X - Y\| \ge \big| \|X\| - \|Y\| \big|$，$\forall X, Y \in V_n(F)$ → 本题

证明：1. $\|X_p\| = (\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p)^{\frac{1}{p}}$　$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |X_i|$

$(\|X\|_\infty)^p = (\max_i |X_i|)^p \le \sum_{i=1}^{n} |X_i|^p \le n (\max |X_i|)^p = n \|X\|_\infty^p$

从而得到 $\|X\|_\infty \le \|X\|_p \le n^{\frac{1}{p}} \|X\|_\infty$

$(\|X\|_\infty)^p = (\max_i |x_i|)^p \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (n \max_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \|X\|_p \qquad\qquad n^{\frac{1}{p}} \cdot \|X\|_\infty$

令 $X = Y + (X - Y)$

则 $\|Y + (X - Y)\| \le \|Y\| + \|X - Y\|$，即 $\|X - Y\| \ge \|X\| - \|Y\|$

令 $Y = X + (Y - X)$

则 $\|X + (Y - X)\| \le \|X\| + \|Y - X\|$，即 $\|Y - X\| \ge \|Y\| - \|X\|$

$\because \|X - Y\| = \|-(Y - X)\|$
$= \|Y - X\|$

$\therefore \|X - Y\| \ge \big| \|X\| - \|Y\| \big|$

2、证明: 对 $X=Y+(X-Y)$，有 $\|X-Y\| \geq \|X\|-\|Y\|$

同理有 $\|Y-X\| \geq \|Y\|-\|X\|$

又有 $\|X-Y\| = \|-(Y-X)\| = \|Y-X\|$

所以有 $\|X-Y\| \geq \big|\,\|X\|-\|Y\|\,\big|$

四 (15) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，1，求矩阵 $A$ 的约当标准形；2，求相似变换矩阵 $T$，使 $A=TJT^{-1}$。

要求T.

解: 1、$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ 0 & \lambda-1 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

求得特征根 $\lambda_1=1$ (二重) $\lambda_2=2$

对 $\lambda_1=1$，$m_1=2$ 由于

$\operatorname{rank}(I-A)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=2=3-1$

所以 $a_1=1$ 故 $J_1=[J_{11}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$，$m_2=1$

$$\operatorname{rank}(2I-A)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&-3\\0&0&0\end{bmatrix}=2=3-1$$

故 $a_2=1 \quad J_2=[J_{21}]=\lambda_2=2$

所以 A的约当标准形为 $J=\begin{bmatrix}J_1&\\&J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

设相似变换矩阵 $T=(t_1,t_2,t_3) \quad t_1=(t_{11},t_{21},t_{31})^T$

则 $$(I-A)t_1=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&0&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{21}\\t_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$t_{31}=0 \quad t_{21}=-2t_{31}$ 令 $t_1=(1,0,0)^T$

$(A-I)t_2=t_1$ 即当 $t_2=(t_{12},t_{22},t_{32})^T$ 时有

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{12}\\t_{22}\\t_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

解得 $t_{32}=0 \quad t_{22}+2t_{32}=1$ 令 $t_2=(0,1,0)^T$

对于特征值 $\lambda_2=2$，有 $(2I-A)t_3=0$，即当 $t_3=(t_{13},t_{23},t_{33})^T$ 时

有 $$\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{13}\\t_{23}\\t_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$t_{23}=3t_{33}$

$t_{13}=t_{23}+2t_{33}$ 令 $t_3=(5,3,$

所求相似变换矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&3\\ \end{bmatrix}$$

五（12）证明：若$\|A\|<1$，则$\lim\limits_{m\to\infty} A^m=0$。

证明：由矩阵范数的定义，应有 $\|A^m\|\le\|A\|^m$

由于 $\|A\|<1$，所以数项级数 $\|I\|+\|A\|+\|A\|^2+\cdots+\|A\|^m+\cdots$ 收敛，由正项级数的比较判别法知，级数 $\|I\|+\|A\|+\|A^2\|+\cdots+\|A^m\|+\cdots$ 收敛，故 $\|A\|<1$ 时级数 $I+A+A^2+\cdots+A^m$ 绝对收敛

由于级数 $I+A+A^2+\cdots+A^m+\cdots$ 绝对收敛 $\Rightarrow A^m\to 0$

即 $\lim\limits_{m\to\infty}A^m=0$

六（15）求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ \quad\ x_2+x_3=0\end{cases}$的通解和最小范数解（用广义逆矩阵方法）。

解 写成矩阵形式 $AX=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$A^-=A^H(AA^H)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

方程组的通解为 $X=A^-b+(I_3-A^-A)Y$

其中 $Y=(C_1,C_2,C_3)^T$ 为任意向量

$$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\left[I_3-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

由 $\|A^m\|+\cdots$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\c_2-c_3\\-c_2+c_3\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{1}{2}(c_2-c_3)\\x_3=\frac{1}{2}(-c_2+c_3)\end{cases}$ 其中 $Y=(c_1,c_2,c_3)$为任意向量

线性方程组的最小范数解:

$$\boxed{LNLS=A^{+}b}$$

$$=A^H(AA^H)^{-1}b$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

七（12）下列各题选择其一回答

1. 设 $X,Y\in C^{n\times m}, A\in C^{m\times n}$，且 $X,Y$ 均为 $A$ 的广义逆矩阵，即 $AXA=A$，$AYA=A$，则 $Z=XAY$ 为 $A$ 的自反广义逆矩阵。

2. 证明 $AA^{+}B=B$ 的充要条件是存在矩阵 $C$，使 $B=AC$。

1. 证明：$AZA=\cancel{AXAYA}=AXAYA=AYA=A$

$$ZAZ=XAYAXAY$$
$$=XAXAY$$
$$=XAY$$
$$=Z$$

即 $Z=XAY$ 是 $A$ 的自反广义逆矩阵.

$ZAZ=XAYAXAY=XAXAY=XAY=Z$

$AZA=AXAYA=AYA=A$

充分性：$B=AC$

$AA^{+}B=AA^{+}AC=AC=B$

必要性，取 $C=A^{+}B$

则 $AC=AA^{+}B=B$. 即证

八 (10) 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶正交矩阵，并且 $\det A+\det B=0$

P38 18　证明 $\det(A+B)=0$。

证明: $A^TA=AA^T=I \Rightarrow |A|=\pm 1$

$A+B=A(I+A^{-1}B)=A(A^{-1}+B^{-1})B$

$|A+B|=|A(A^{-1}+B^{-1})B|$

$=|A||B||A^T+B^T|$

$=-|(A+B)^T|$

$=-|A+B|$

$\Rightarrow \det(A+B)=0$

?

正交

$A^{-1}=A^T$

$A^TA=I$

$A^{-1}A=I$

$A^T=A^{-1}$

$|A|^2=1$

$|A^TA|=|I|$

$\Rightarrow |A^T||A|=1$

$|A||A|=1$

$|A|^2=1$

$|A|+|B|=0$

$|A|=-|B|$

$|A|\cdot|B|=-|A|^2$

$=-1$

$A^T+B^T$

正交矩阵

$A^{-1}=A^T$

$|A|^2=1$

方法 $\begin{cases}(A+B)^T=A^T+B^T\\ |A^T|=|A|\end{cases}$

方法 $\begin{cases}(A+B)^T=A^T+B^T\\ |A^T|=|A|\end{cases}$

$\because |A|\overset{=\pm1}{,}|B|=\pm 1$　$A^{-1}=A^T$，$B^{-1}=B^T$

$\because \det A+\det B=0 \therefore |A|\cdot|B|=-1$

$\therefore |A+B|=|A(I+A^{-1}B)|=|A(B^TB+A^{-1}B)|$

$=|A(B^T+A^{-1})B|$

$=|A|\cdot|B|\cdot|B+A^T|$

$=|A|\cdot|B|\cdot|(B+A)^T|$

$=|A|\cdot|B|\cdot|B+A|$

$=-|B+A|$

$\therefore |A+B|=0$

燕山大学试卷 密 封 线 共4页 第1页

考试科目：矩阵分析试卷 班级：13班 姓名：尹启骏 学号： 专业：计算机 考试时间：2003.11.16

| 题号 | | | | | | | | | | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | | | | | | 88 |

三.（10分

解：

解：

一、（10分）证明：酉矩阵的任意一行（列）用模为1的复数遍乘后，所得的矩阵仍为酉矩阵。

~~证明：设酉矩阵为A，有，$A^H A=E$~~

~~因为复数α的模为1，所以$|\alpha|=\sqrt{\bar\alpha\alpha}=1$~~

~~不妨设模为1的复数为~~

证明：设酉矩阵为A，$A^H A=E$，复数α的模为1，即$|\alpha|=\sqrt{\bar\alpha\alpha}=1$

$A=(a_1,a_2\cdots a_n)$.

用一复数遍乘后：$A'=(a_1,a_2,\cdots \alpha a_i\cdots a_n)$，i可由1取到n

$$(A')^H A'=\begin{pmatrix} a_1^H\\ a_2^H\\ \bar\alpha a_i^H\\ a_n^H\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots \alpha a_i\cdots a_n)=(a_1^H a_1,a_2^H a_2,\cdots \bar\alpha\alpha a_i^H a_i\cdots a_n^H a_n)$$

又$\bar\alpha\alpha=1$ $(A')^H A'=(a_1^H a_1,a_2^H a_2,\cdots a_i^H a_i\cdots a_n^H a_n)=A^H A=E$，即所得矩阵仍为酉矩阵

二、（10分）证明：如果$A=A^H$，（$A^H$为$A$的共轭转置），则属于$A$的不同特征值的特征向量必正交。

$AX_1=\lambda X_1$

$AX_2=\lambda_2 X_2$

证明：设$\lambda_i$、$\lambda_j$为属于A的相异特征值，$\lambda_i\ne\lambda_j$

~~由$AX=\lambda X$ 知：$AX_i=\lambda_i X_i$ $AX_j=\lambda_j X_j$ 且$\lambda_i\ne\lambda_j$~~

~~$A=A^H \Rightarrow X^H AX=0 \Rightarrow X^H A$~~

$A=A^H$，即A为埃尔米特矩阵，∵ $AX=\lambda_i X_i=\lambda_j X_j$

∴ $X^H AX=X^H\lambda_i X=X^H\lambda_j X$

即 $X^H\lambda_i X=\lambda_i X^H X=X^H\lambda_j X=\lambda_j X^H X$

$(\lambda_i-\lambda_j)X^H X=0$

又$\lambda_i\ne\lambda_j$ 所以$X^H X=0$

$AX_1=\lambda_1 X_1$

$AX_2=\lambda_2 X_2$

$A=A^H$

① $(AX,Y)=(X,AY)$

② A的特征值均为实数

$\lambda_1(X_1,X_2)=(\lambda_1 X_1,X_2)$
$=(AX_1,X_2)$
$=(X_1,AX_2)$
$=(X_1,\lambda_2 X_2)$
$=\bar\lambda_2(X_1,X_2)$

∵ $A=A^H$

∴ $(\lambda_1-\lambda_2)(X_1,X_2)=0$

∵ $\lambda_1\ne\lambda_2$ ∴ $(X_1,X_2)=0$

∴ 正交

三. (10 分)求矩阵 $A$ 的特征矩阵的 Smith 标准形和 Jordan 标准形，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

解：1) 化 Smith 标准形.

解 $\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+2 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 4 & \lambda\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & \lambda+2\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ \lambda & 4 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & \lambda+2\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

[illegible]

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -(\lambda+1)^2 & 2(\lambda+2)\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix}$$

仍为酉矩阵.

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2(\lambda+2)\\ 0 & \frac{\lambda(\lambda+2)}{2} & \lambda+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{\lambda(\lambda+2)}{2} & (\lambda+1)^2(\lambda+2)\end{bmatrix}$$

-1

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda+2)\end{bmatrix}.$$

2) 由 Smith 标准形知初等因子为：1，1，$(\lambda+1)^2$，$\lambda+2$.

特征值：$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$.

写出 Jordan 标准形：$J=\begin{bmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{bmatrix}$，$J_1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$J_2=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}$ 所以 $J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

2

四. (10分)设 $A, B$ 都是 $n$ 阶正交矩阵,并且已知 $|A|+|B|=0$,证明 $|A+B|=0$

证:$A, B$ 均为正交矩阵,$A^TA=B^TB=E$,~~所以 $A\cdot\det(A^TA)$~~

$\det|A^TA|=1$, $|A|=|A^T|$, 即 $|A|^2=1$. $\therefore |A|=\pm1$, 同理, $|B|=\pm1$

由 $|A|+|B|=0$ 知:$\begin{cases}|A|=1\\|B|=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|A|=-1\\|B|=1\end{cases}$

$|A+B|=|A^T(A+B)B^T|=|A^T||(A+B)^T||B^T|=|A|\cdot|A+B|\cdot|B|$

$=-|A+B|$.

即 $2|A+B|=0$, $|A+B|=0$.

10

五. (15分)设 $\|X\|$ 为 $F^n$ 上的向量范数, $A\in F^{n\times n}$ ($F$ 是数域), 则

$$\|A\|=\max_{X\neq\theta}\frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \max_{\|X\|=1}\|AX\| \text{ 等价}$$

是与向量范数 $\|X\|$ 相容的矩阵范数, 其中 $\theta$ 是零向量。

先证它是矩阵范数, 最后证相容

$\|AX\|\le\|A\|_m\|X\|$. 令 $0\neq\alpha\in F^n$ 令 $\|X\|=\|X\alpha^H\|_m$ 证它是向量范数, 最后证相容.

解:1) 正定性.

$\|A\|=\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$, $\|X\|\geq0$, $\|AX\|\geq0$

$\therefore \|A\|\geq0$

10

2) 齐次性: 设 $\lambda\in F$.

$\|\lambda A\|=\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|\lambda AX\|}{\|X\|}=\lambda\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}=\lambda\|A\|$

3) 三角不等式.

$\|A+B\|=\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|(A+B)X\|}{\|X\|}\leq\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|AX\|+\|BX\|}{\|X\|}$

$\leq\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}+\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|BX\|}{\|X\|}=\|A\|+\|B\|$.

4) $\|A\|=\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ 所以 $\|A\|\geq\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$

密封线

请在密封线右面答题

共4页 第2页

$\|AB\|=\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|ABX\|}{\|X\|}=\max\limits_{X\neq0}\dfrac{\|ABX\|}{\|BX\|}\cdot\dfrac{\|BX\|}{\|X\|}$ 3

$\leq\|A\|\cdot\|B\|$

即有 $\|AX\| \le \|A\|\,\|X\|$，满足相容性.

由上可知：$\|A\| = \max\limits_{X\neq 0}\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ 是与向量范数 $\|X\|$ 相容的矩阵范数.

六. (5 分)求矩阵 $A$ 的最大秩分解,设

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\2&0&2&4&6\\-1&1&-1&-1&0\\3&-1&3&3&7\end{bmatrix}$$

解：~~对A进行~~ 对A进行行初等变换：

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\2&0&2&4&6\\-1&1&-1&-1&0\\3&-1&3&3&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&2&0&6&4\\-1&1&-1&-1&0\\3&-1&3&3&7\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&2&0&6&4\\0&0&0&-2&1\\0&2&0&6&4\end{bmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&0&3&2\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \text{列}\ \ k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ k_4\ \ k_5\end{array}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&4\\0&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

若A的最大秩分解为 $A=BC$，观察上以上矩阵，选取A中对应 $k_1,k_2,k_5$ 列组成B：$B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&6\\-1&1&0\\3&-1&7\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&0&4\\-1&1&-1\\3&-1&3\end{pmatrix}$

取得的变换后矩阵中非零行为C，$C=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&0&3&2\\0&0&0&-2&1\end{bmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1&0&4\\0&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

得：$A=BC$

4

七．（10分）设$e_1$，$e_2$，…，$e_n$是内积空间$V_n$的一组基，证明：

1）对 $\alpha\in V$，如果 $(\alpha, e_i)=0 \quad i=1,2,\cdots,n$ 则$\alpha=0$

2）设$\alpha_1,\alpha_2\in V$，如果对于任一向量$\beta\in V$，都有 $(\alpha_1,\beta)=(\alpha_2,\beta)$

则 $\alpha_1=\alpha_2$

证明：1）由于$e_1,e_2\cdots e_n$为内积空间$V_n$的一组基

$\alpha\in V$，$\alpha$可表示为：$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n$．

$$(\alpha,\alpha)=(\alpha,k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)$$

$$=(\alpha,k_1e_1)+(\alpha,k_2e_2)+\cdots+(\alpha,k_ne_n)$$

$$=k_1(\alpha,e_1)+k_2(\alpha,e_2)+\cdots+k_n(\alpha,e_n)$$

由于$(\alpha,e_i)=0$．所以$k_i(\alpha,e_i)=0$．

$(\alpha,\alpha)=k_1(\alpha,e_1)+k_2(\alpha,e_2)+\cdots+k_n(\alpha,e_n)=0$ 当且仅当

$\alpha=0$

2）$(\alpha_1,\beta)=(\alpha_2,\beta)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\beta)-(\alpha_2,\beta)=0$ $\longleftrightarrow$ $(\alpha_1-\alpha_2,\beta)=0$

$\Rightarrow$ ~~$\alpha_1-\alpha_2$~~ $(\alpha_1-\alpha_2,\beta)=0$

$\alpha_1-\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2$

~~$\alpha_1-\alpha_2$为~~ 此式对任意向量$\beta$都成立

因此 $\alpha_1-\alpha_2=0$．

即有：$\alpha_1=\alpha_2$．

密封线

请在密封线右面答题

共4页 第3页

八、(10 分)求矩阵 $A$ 的三角分解（LU），即 $A = LU$，其中 L 为下三角矩阵，U 为单位上三角矩阵

$$\text{设}\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

解：$A=LU$.

~~设 L =~~ $\left(\cancel{l_{11}\ l_{12}\ l_{13}}\right.$

可得 $L=\begin{pmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

则 $A=LU=\begin{pmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$

计算得，

$l_{11}=2$　　$l_{11}u_{12}=-1 \Rightarrow u_{12}=-1/2$，$l_{11}u_{13}=3 \Rightarrow u_{13}=3/2$

$l_{21}=1$　　$l_{21}u_{12}+l_{22}=2 \Rightarrow l_{22}=5/2$，$l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=1 \Rightarrow u_{23}=-1/5$

$l_{31}=2$　　$l_{31}u_{12}+l_{32}=4 \Rightarrow l_{32}=5$　$l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l_{33}=\cancel{-2/5}$

即 $A=LU=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 5/2 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 3/2\\ 0 & 1 & -1/5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

6

密封线

请在密封线右面答题

共 4 页 第 4 页

九. (10 分) 用广义逆矩阵求方程组的通解, 设:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

解: 方程可表示为 $AX=b$ 形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; 通解为 $X = A^-b + (E - A^-A)y$.

若 $A$ 的最大秩分解为: $A = BC$.

由于 $\operatorname{rank} A = 2$, 可将 $A$ 分解为: $A = EA$.

$A^- = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$, 其中 $C = A$, $B = E$.

计算: ~~$CC^* = \begin{bmatrix} 3 & * \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, $(CC^*)^{-1} =$~~ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$C^*(CC^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(B^*B)^{-1}B^* = (E^*E)^{-1}E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^- = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^-b = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$A^-A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

方程通解为: $X = A^-b + (E - A^-A)y = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & +2 \\ -1 & 2 & +2 & +1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}y$, $y$ 为任意四维列向量

7



十. 证

十.（10分）设 $A\in C^{m\times n}$，证明：A的伪逆矩阵 $A^+$ 是唯一的

证明：设 X，Y 均为A的伪逆矩阵，即 $A^+$ ~~有两个~~ 不唯一。

则：$\begin{cases} XAX=X \\ AXA=A \\ (AX)^*=AX \\ (XA)^*=XA \end{cases}$ $\begin{cases} YAY=Y \\ AYA=A \\ (AY)^*=AY \\ (YA)^*=YA \end{cases}$

① $X=XAX$

$=XAYAX$

$=XY^HA^HX^HA^H$

$=XAY$

$=A^HX^HY$

$=A^HY^HA^HX^HY$

$=YAXAY$

$=YAY=Y$

~~$X=XAX=XAYAX=(XA)^*(YA)^*A$~~

$$\boxed{\begin{aligned} &=A^*X^*A^*Y^*A \\ &=A^*Y^*A \\ &=(YA)^*A \\ &=YAX \\ &=YAYAX \\ &=\cancel{(YA)^*}Y\cancel{(AY)}^*(AX)^* \end{aligned}}$$

$=Y$

$$\begin{aligned} X=XAX=XAYAX&=(XA)^*(YA)^*X \\ &=A^*X^*A^*Y^*X \\ &=A^*Y^*X \\ &=(YA)^*X \\ &=YAX \\ &=YAYAX \\ &=Y(AY)^*(AX)^* \\ &=YY^*A^*X^*A^* \\ &=YY^*A^* \\ &=Y(AY)^* \\ &=YAY=Y \end{aligned}$$

即A的伪逆矩阵 $A^+$ 唯一

过程以向量

8

# 2015年矩阵分析试题

一、（10分）在线性空间$R^{2\times2}$，中，求向量：$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$

在基

$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$

下的坐标。

二.（10分）证明：任意一个复矩阵都可以表示成一个 Hermite 矩阵（即$A^H=A$）和一个斜 Hermite 矩阵即（$A^H=-A$）的和，且表示式唯一。

三.（10分）证明：$\|X\|_2\le\|X\|_1\le\sqrt{n}\|X\|_2$，其中$X\in C^n$。

四.（10分）求二次型$X^TAX$对 t 的导数，其中 A 为$n\times n$常数矩阵，$X=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))^T\in F^n$。

五.（10分）证明：酉矩阵的任意一行（列）用模为 1 的复数编乘后，所得的矩阵仍为酉矩阵。

六.（10分）设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}$求矩阵 A 的伪逆矩阵$A^+$。

七.（10分）证明：$A^+=\left(A^HA\right)^+A^H$。

八.（15分）设$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-7&-6&-1&1\end{bmatrix}$，求下列矩阵范数：$\|A\|_{m_1},\|A\|_{m_2},\|A\|_{m_\infty},\|A\|_1,\|A\|_\infty$

九.（15分）求下列矩阵的 Smith 标准型、若儿当（Jordan）标准型、初等因子、不变因子和各阶行列式因子，设：$A=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-2&0\\1&-4&0\end{bmatrix}$