



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 基于状态重构的非线性多智能体系统
一致性控制

作者姓名 李阔

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2020 年 11 月

中图分类号: xxx

UDC: xxx

学校代码: 10216

密级: 公开

工学博士学位论文

基于状态重构的非线性多智能体系统 一致性控制

博 士 研 究 生: 李阔

导 师: 华长春 教授

申 请 学 位: 工学博士

学 科 专 业: 控制科学与工程

所 属 学 院: 电气工程学院

答 辩 日 期: 2020 年 11 月

授 予 学 位 单 位: 燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**CONSENSUS CONTROL FOR NONLINEAR
MULTI-AGENT SYSTEMS BASED ON STATE
RECONSTRUCTION**

by Li Kuo

Supervisor: Professor Hua Changchun

Yanshan University

November, 2020

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《 》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字： 日期： 年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《 》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密 ☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☐。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘 要

多智能体系统一致性控制在航天科技、智能交通、传感器网络等领域具有广阔的应用前景，因而受到众多学者的青睐。在实际中，智能体通常具有非线性动力学特性，且其传感器、控制器、执行器等模块以及智能体之间的信息交互环节往往经由网络连接或完成。然而，现实网络环境下带宽和信道容量的限制，可能诱导网络拥堵现象，致使信息传输产生时滞。同时，网络环境的复杂多变，可能诱导智能体之间的通信链路产生故障，从而使得通信拓扑结构发生改变。此外，智能体的部分状态信息可能难以测量或全局共享，需要重构其状态信息提供反馈控制信号。因此，本文综合考虑了拓扑变化、时滞和状态难测量或共享等因素，研究了基于状态重构的非线性多智能体系统领导跟随分布式一致性控制问题。主要研究工作如下：

(1) 研究了基于变频切换拓扑的非线性多智能体系统领导跟随状态反馈一致性控制问题。基于一个优化的拓扑切换规则，为跟随者设计了分布式切换观测器重构领导者的状态信息。进而，利用动态增益控制方法，提出了基于该观测器的分布式控制器，从而有效改善现有控制器存在的抖振问题。随后，证明了此控制器能实现领导跟随状态一致性。该算法允许部分切换拓扑不含以领导者为根节点的有向生成树，且能实现拓扑之间变频切换。

(2) 研究了已知输入滞后非线性多智能体系统领导跟随状态反馈一致性控制问题。基于无向固定通信拓扑，为跟随者设计了分布式有限时间观测器重构领导者的状态信息。进而，利用断截预测控制方法，提出了基于该观测器和输入时滞的分布式控制器。随后，根据李亚普诺夫稳定性定理，给出了实现领导跟随状态一致性的充分条件。该算法允许领导者的输入是未知的时变函数和输入时滞是彼此不同的时变函数。

(3) 研究了基于输出反馈的非线性多智能体系统领导跟随完全分布式输出一一致性控制问题。基于智能体的相对输出信息，为跟随者设计了分布式降阶动态补偿器重构相关状态信息。进而，利用动态增益控制方法，提出了基于该补偿器的完全分布式类线性控制器。随后，证明了此控制器能在全局意义下实现领导跟随输出一一致性。该算法可有效减少智能体之间的信息传输量，且允许跟随者智能体具有较强的非线性动力学特性。

(4) 研究了未知输入滞后非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。基于智能体的相对输出信息，为跟随者构建了分布式观测器和经典观测器分别重构领导者的状态信息和跟随者的状态信息。进而，利用断截预测控制方法，提出了基于该双重观测器且独立于输入时滞的分布式控制器。随后，根据李亚普诺夫稳定性定理，给出了实现领导跟随状态一致性的充分条件。该算法允许输入时滞是彼此不同且未知的时变函数。

(5) 研究了未知状态滞后非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。基于智能体的相对输出信息，为跟随者设计了分布式动态补偿器重构相关状态信息。进而，利用动态增益控制方法，提出了基于该补偿器且独立于状态时滞的分布式控制器。随后，证明了此控制器可实现领导跟随状态一致性。该算法允许智能体具有高阶不确定的非线性动态。最后，将该算法扩展到具有较强非线性动态的状态滞后多智能体系统。

关键词：非线性多智能体系统；变频切换拓扑；输入时滞；状态重构；状态时滞；领导跟随一致性

Abstract

The consensus control of multi-agent systems has been increasingly favored by many scholars owing to its broad application prospects in many fields, such as the aerospace technology, intelligent transportation and sensor networks. In practice, agents usually have nonlinear dynamic characteristics, their modules including sensors, controllers, actuators and the information interaction between agents are connected or completed via networks. However, the limitation of bandwidth and channel capacity in real networks may lead to network congestion, and then result in delays in information transmission. Moreover, the complicated network environment may cause the faults of communication links between agents, and then induce the change of topology structure. Besides, partial state information of agents may be immeasurable or not shared globally, which needs to reconstruct the state information to provide feedback control signals. Therefore, by considering factors such as the topology change, delays, unmeasured or unshared states, this thesis studies the leader-following distributed consensus control problem of nonlinear multi-agent systems based on state reconstruction. The main research works are as follows.

(1) The leader-following state feedback consensus control problem is investigated for nonlinear multi-agent systems based on variable frequency switching topology. Based on an optimized topology switching rule, the distributed switched observers are designed for followers to reconstruct the state information of leader. Then, by using dynamic gain control method, the observers-based distributed controllers are proposed, which improve the chattering problem of existing controllers. Subsequently, it is proved that the controller achieves the leader-following state consensus. The algorithm allows that partial switching topologies do not contain the directed spanning tree with leader as the root, and realizes the variable frequency switches between topologies.

(2) The leader-following state feedback consensus control problem is investigated for nonlinear multi-agent systems subject to known input delays. Based on undirected fixed communication topology, the distributed finite-time observers are designed for followers to reconstruct the state information of leader. Then, the observers and input delays-based

distributed controllers are proposed by truncated prediction control method. Subsequently, based on the Lyapunov stability theorem, sufficient conditions are given for realizing the leader-following state consensus. The algorithm permits that the input of the leader is an unknown time-varying function and input delays are different time-varying functions.

(3) The output feedback-based leader-following fully distributed output consensus control problem is studied for nonlinear multi-agent systems. By using the relative output information of agents, the distributed reduced-order dynamic compensators are developed for followers to reconstruct the relevant state information. Then, the compensators-based fully distributed linear-like controllers are proposed based on the dynamic gain control method. Subsequently, it is proved that the controller can realize leader-following output consensus in global sense. The algorithm effectively reduces the transmission amount of information among agents and allows that all followers have strong nonlinear dynamics.

(4) The leader-following output feedback consensus control problem is investigated for nonlinear multi-agent systems with unknown input delays. Based on the relative output information of agents, the distributed observers and classical observers are designed for followers to reconstruct the state information of leader and followers, respectively. Then, by means of the truncated prediction control method, the double observers-based and input delay-independent distributed controllers are proposed. Subsequently, sufficient conditions are given for achieving the leader-following state consensus. The algorithm permits that input delays are unknown different time-varying functions.

(5) The leader-following output feedback consensus control problem is studied for nonlinear multi-agent systems with unknown state delays. Based on the relative outputs of agents, the distributed dynamic compensators are developed for followers to reconstruct the relevant state information. Then, the compensators-based and state delays-independent distributed controllers are designed based on dynamic gain control method. Subsequently, it is proved that the controller renders the leader-following state consensus. The algorithm permits that agents have high-order uncertain nonlinear dynamics. Finally, it is extended to multi-agent systems with state delays and strong nonlinear dynamics.

Keywords: Nonlinear multi-agent systems; variable frequency switching topology; input delays; state reconstruction; state delays; leader-following consensus

目 录

摘 要	I
Abstract.....	III
符号说明	VII
第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 多智能体系统一致性控制研究现状	4
1.2.1 状态反馈一致性控制研究现状	6
1.2.2 输出反馈一致性控制研究现状	10
1.3 现有工作存在的不足	13
1.4 多智能体系统一致性控制的基本知识	15
1.4.1 拓扑理论	15
1.4.2 重要定义及引理	16
1.5 本文的主要研究内容	17
1.5.1 研究思路	17
1.5.2 研究内容	18
第 2 章 基于变频切换拓扑的非线性多智能体系统状态反馈一致性控制	20
2.1 引言	20
2.2 预备知识和问题描述	21
2.2.1 预备知识	21
2.2.2 问题描述	23
2.3 分布式切换观测器设计	23
2.4 分布式状态反馈一致性控制器设计	27
2.5 数值仿真	31
2.6 本章小结	35
第 3 章 已知时变输入滞后非线性多智能体系统状态反馈一致性控制	37
3.1 引言	37
3.2 预备知识和问题描述	38
3.2.1 预备知识	38
3.2.2 问题描述	39
3.3 分布式有限时间观测器设计	40
3.4 分布式状态反馈一致性控制器设计	43
3.5 数值仿真	48

3.6 本章小结	52
第 4 章 基于降阶补偿器的非线性多智能体系统输出反馈一致性控制	53
4.1 引言	53
4.2 预备知识和问题描述	54
4.2.1 预备知识	54
4.2.2 问题描述	54
4.3 分布式降阶动态补偿器设计	56
4.4 完全分布式输出反馈一致性控制器设计	57
4.5 数值仿真	64
4.6 本章小结	67
第 5 章 未知时变输入滞后非线性多智能体系统输出反馈一致性控制	68
5.1 引言	68
5.2 预备知识和问题描述	69
5.2.1 预备知识	69
5.2.2 问题描述	69
5.3 双重观测器设计	70
5.3.1 分布式观测器设计	70
5.3.2 经典观测器设计	72
5.4 分布式输出反馈一致性控制器设计	74
5.5 数值仿真	79
5.6 本章小结	84
第 6 章 未知时变状态滞后非线性多智能体系统输出反馈一致性控制	85
6.1 引言	85
6.2 预备知识和问题描述	86
6.2.1 预备知识	86
6.2.2 问题描述	87
6.3 分布式动态补偿器设计	88
6.4 分布式输出反馈一致性控制器设计	89
6.5 扩展结果	94
6.6 数值仿真	97
6.7 本章小结	100
结 论	101
参考文献	103
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果	116
致 谢	118

符号说明

符号	说明
\mathfrak{R}	实数集合
\mathfrak{R}^+	非负实数集合, $\mathfrak{R}^+ = [0, +\infty)$
\mathfrak{R}^n	n 维实向量集合
$\mathfrak{R}^{m \times n}$	$m \times n$ 实矩阵集合
$\mathbb{C}^{m \times n}$	$m \times n$ 复矩阵集合
N	自然数集合
I_n	$n \times n$ 单位矩阵
$ x $	实数 x 的绝对值
$\ A\ $	向量或矩阵 A 的 2-范数
$\ A\ _1$	向量或矩阵 A 的 1-范数
A^T	实矩阵 A 的转置
A^{-1}	实矩阵 A 的逆
U^*	复矩阵 U 的共轭转置
\sup	一个集合的最小上界
$i \in \mathbb{N}_{1:n}$	$i = 1, 2, \dots, n$
$\max\{a, b\}$	实数 a 和 b 中的最大值
$\min\{a, b\}$	实数 a 和 b 中的最小值
$\lambda_{\max}(P)$	矩阵 P 的最大特征值
$\lambda_{\min}(P)$	矩阵 P 的最小特征值
$\text{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$P > 0 (P \geq 0)$	矩阵 P 为 (半) 正定矩阵
$P < 0 (P \leq 0)$	矩阵 P 为 (半) 负定矩阵
$\text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$	对角线元素为 $d_i, i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 的对角矩阵
$\text{sign}(x)$	符号函数, 且 $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

绚丽多彩的自然界总是存在着许多规则而又有序的生物群集行为，如鸟群编队迁徙、蜂群协同采蜜、鱼群结伴觅食、狮群协作捕食等，如图 1-1 至图 1-4 所示。这些生物群集行为，到底蕴藏着什么样的演化机理。经深入研究发现，大量的生物个体通过自组织和相互协作形成的群集行为，可以呈现出比个体功能更为强大的行为，并能实现个体无法完成的复杂目标。受此启发，科技工作者提出了多智能体系统的概念，试图将群集行为的机理运用到科技、经济、管理、军事、电力、医疗、工业等相关领域，用来造福人类。多智能体系统是指由多个自主个体及其相应组织规则和信息交互协议构成的，并且能够完成特定任务的一类复杂群体系统。多智能体系统中的个体通常具有自身动态演化特征，且个体之间的信息交互和感知是局部的^[1]。



图 1-1 鸟群编队迁徙

Fig.1-1 Formation migration of bird flock



图 1-2 蜂群协同采蜜

Fig.1-2 Cooperative collecting honey of bee flock



图 1-3 鱼群结伴觅食

Fig.1-3 Foraging food of fish flock in partnership



图 1-4 狮群协作捕食

Fig.1-4 Cooperative predation of lion flock

即使多智能体系统中的某些个体功能失效，也不会影响整体系统任务的完成。随着人工智能、大数据、移动通信等技术迅猛的发展，多智能体系统得到了更广泛的应用，并已成为控制科学、计算机科学、系统科学等学科领域的前沿研究课题^[2-4]。

协同控制是多智能体系统的一个核心问题，且在许多领域有广泛的应用前景^[5-7]，如机器人协作灭火、无人机编队、机械臂协作装配、挖掘机协作救援等，如图 1-5 至图 1-8 所示。近年来，它已成为科技工作者的研究热点问题。根据领导者的数量，多智能体系统的协同控制可以划分为三类：无领导者一致性控制、领导跟随一致性控制（一个领导者）和围捕控制（多个领导者），这三类控制既相互区别又相互联系，其中一致性控制是前两个控制类别的统称，也是研究协同控制的基础。一致性控制又包含三种控制形式：集中式、分散式和分布式^[8]，其中分布式一致性控制是一种分级递阶式控制，兼顾了集中式和分散式控制的优点，不仅能够有效的减少数据传输量，而且还能提高多智能体系统的容错能力、响应速度和协调效率。因此，多智能体系统一致性控制的目标是基于局部信息为非领导者智能体系统设计分布式一致性控制协议，使得所有智能体的部分或全部对应状态达成一致^[9]。



图 1-5 机器人协作灭火

Fig.1-5 Robots cooperation in fire fighting



图 1-6 无人机编队

Fig.1-6 Unmanned aerial vehicles formation



图 1-7 机械臂协作装配

Fig.1-7 Cooperative assembly of manipulators



图 1-8 挖掘机协作救援

Fig.1-8 Cooperative rescue of excavators

从系统控制理论视角看，多智能体系统一致性控制首先要对每个智能体构建动力学模型，其次要刻画智能体之间相互关系的通信拓扑，最后要设计智能体之间信息交互的分布式一致性控制协议（控制器）。近年来，针对单、双、高阶积分器和线性多智能体系统一致性控制理论研究日臻成熟。然而随着工业自动化程度的提高、生产工艺的日益多元，被控对象变得越来越复杂。现代工程控制系统普遍表现出结构参数多变、变量众多和较强非线性特性，例如电力系统、轧机系统、化学反应系统、导弹武器系统、航天器系统、机器人系统等。因此，非线性多智能体系统一致性控制理论研究越来越受到控制领域科技工作者的青睐^[10-12]。随着网络化技术的迅猛发展与广泛应用，每个智能体的传感器、控制器、执行器等模块通常是经由网络连接^[13]，并且智能体之间的信息交互也是经由网络完成，见网络结构图 1-9。尽管经由网络通信能提高智能体各模块之间或者智能体之间信息交互、融合的效率，但网络也对多智能体系统一致性控制带来了新的挑战。例如，由于网络带宽和信道容量的限制，当智能体各模块之间或者智能体之间的信息交互频率较高时，就会不可避免的产生网络拥堵现象，进而导致信息传输时滞问题。在这种情况下，信息不再能及时传递与分享，从而可能影响多智能体系统的整体性能，甚至破坏整个系统的稳定性。此外，复杂网络环境也可能导致智能体之间的通信链路发生故障^[14]，例如链路丢失、增加或改变，这意味着通信拓扑可能随着时间的推移而发生切换。因此，研究网络诱导因素（时滞、拓扑切换等）下的非线性多智能体系统一致性控制问题具有重要的理论意义和实用价值。

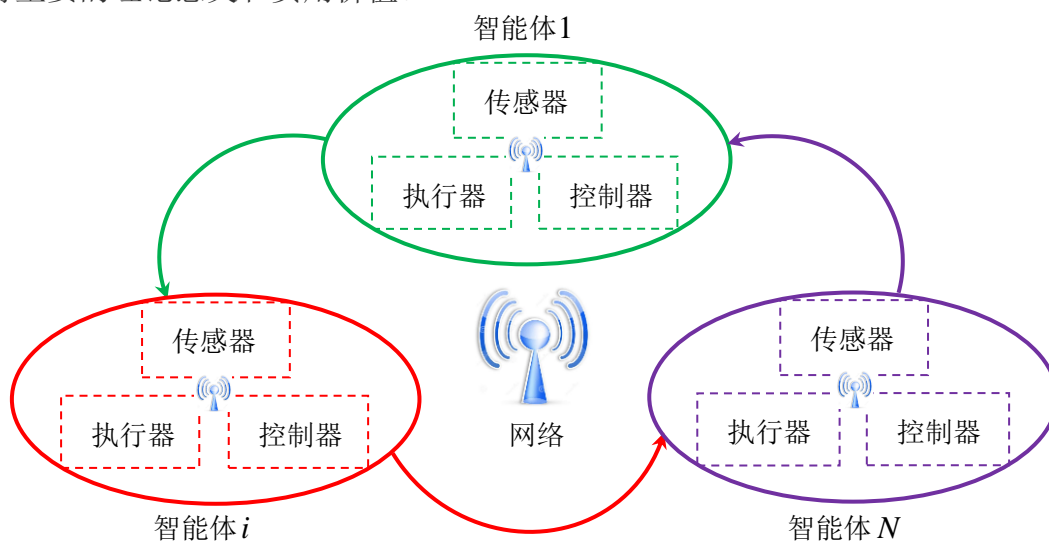


图 1-9 多智能体系统的网络结构

Fig.1-9 Network structures of multi-agent systems

多智能体系统内部个体之间信息交互和感知通常是局部的，因而每个智能体的状态信息很难共享给所有智能体。一般情况下，仅其邻居智能体能够获得共享信息，即状态难以全局共享。特别针对多智能体系统领导跟随一致性控制问题，领导者通常仅作为跟随者的指挥向导，而不受跟随者的影响。由于物理、距离、经济等实际因素的限制，领导者的信息往往难以共享给全部跟随者，但其为了与领导者的规划保持一致，需要直接或间接获得领导者的共享信息，用来更新自身的演化方向，从而实现领导跟随一致性。对跟随者而言，能够获得该信息的一个有效方法是基于局部通信关系重构领导者的共享信息。另一方面，在实际中，机械臂、机器人、卫星等智能体系统通常具有众多的状态变量。由于传感器技术或物理结构的限制，单个智能体的部分状态信息通常难以测量获得，一般情况下，仅能容易地测量获得智能体的输出信息。在此情况下，为了实现多智能体系统一致性控制，需要基于可获得的信息（如输出信息）重构难以测量的状态信息。因此，在状态难以共享或测量实际因素下，如何为非线性多智能体系统，协同设计分布式状态重构器和一致性控制器是一个具有重要理论和现实意义的问题。

综上所述，本文重点考虑了拓扑切换、时滞、状态难以共享或测量等实际问题，深入研究了基于状态重构的非线性多智能体系统领导跟随分布式一致性控制。通过以上研究，能够完善非线性多智能体系统一致性控制的基本理论，并有望对事故救援、远程医疗和空间探测等实际应用领域提供理论基础和关键技术。

1.2 多智能体系统一致性控制研究现状

在 1995 年，T. Vicsek 等作者利用统计学方法，提出了一个经典的自驱动粒子群相变模型，用来模拟粒子涌现出的一致性行为，并经由数值仿真验证了在粒子密度偏大且系统噪声偏小时，初始运动方向不同的粒子经局部交互后，其运动方向最终可趋于一致^[15]。在此基础之上，A. Jadbabaie 等作者首次根据代数图论知识，证明了当拓扑结构为无向连通图时，可以实现离散时间系统无领导者一致性，并且进一步研究了离散和连续时间系统的领导跟随一致性控制问题^[16]。随后，L. Gao 等作者纠正了文献[16]中定理 4-5 的证明问题，并将其结果扩展到无向连通拓扑图^[17]。此后的 15 年里，针对不同类型的多智能体系统和拓扑结构，从不同视角提出了各式各样的一致性控制策略。但若根据智能体系统状态可测与否，现有的控制策略能分为状态反馈一致性控制（状态可测）和输出反馈一致性控制（仅输出可测，状态不可测），

其中这两种控制方式可用如下的数学形式描述：考虑 N 个智能体系统，其中智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 的动力学模型可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t)) \\ y_i(t) = h_i(x_i(t)) \end{cases}$$

其中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 、 $y_i(t) \in \mathbb{R}^q$ 和 $u_i(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别表示智能体 i 的状态、输出和输入； $f_i(\cdot)$ 和 $h_i(\cdot)$ 表示相应的函数向量。如果智能体 i 的状态能够通过测量获得，那么智能体 i 的状态反馈一致性控制器能表述为

$$u_i(t) = u_i(x_i(t), x_j(t)), \quad j \in \mathcal{N}_i$$

其中 \mathcal{N}_i 表示智能体 i 的邻居智能体集合，这意味着智能体 i 及其邻居智能体的状态信息能直接用于反馈控制器 $u_i(t)$ 的设计。如果智能体 i 的状态信息不能够通过测量获得，仅其输出信息能够通过测量获得，则智能体 i 的输出反馈一致性控制器可表述为

$$u_i(t) = u_i(y_i(t), y_j(t)), \quad j \in \mathcal{N}_i$$

意味着智能体 i 及其邻居智能体的输出信息能直接用于反馈控制器 $u_i(t)$ 的设计，而其状态信息则不能直接用于反馈控制器的设计，需要基于相关的输出信息，重构其状态信息。一致性根据实现的结果可分为状态一致性和输出一致性，数学表述分别为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| \rightarrow \varepsilon, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{N}_{1:N}$$

其中 ε 是零，或者是可任意调节的正数。现阶段研究的智能体动力学模型主要包括单、

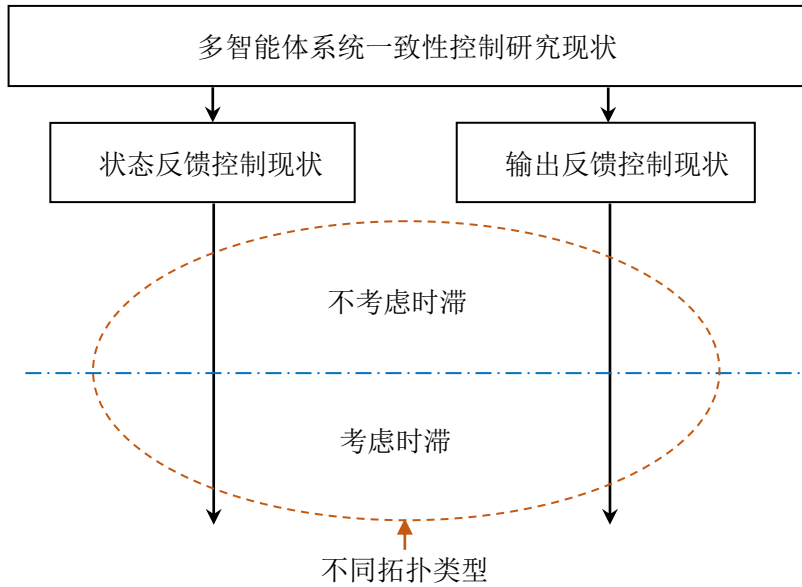


图 1-10 多智能体系统一致性控制研究现状解析框架

Fig.1-10 Analytic framework of research status on consensus control for multiagent systems

双、高阶积分器系统，线性系统和非线性系统。网络诱导产生的时滞通常分为三类：通信时滞、输入时滞和状态时滞。根据智能体之间信息流向的不同，通信拓扑可划分为：有向拓扑（单向流）和无向拓扑（双向流）。根据智能体之间通信链路故障与否，通信拓扑又可划分为：固定拓扑（无故障）和切换拓扑（故障）。下面将以状态反馈和输出反馈一致性控制为路线，以考虑时滞影响与否为分界线，对不同类型拓扑下的多智能体系统一致性控制研究现状展开系统性解析，如图 1-10 所示。

1.2.1 状态反馈一致性控制研究现状

近年来，在不考虑或考虑时滞影响下的多智能体系统状态反馈一致性控制研究取得了丰硕的成果，本部分以四种情况解析状态反馈控制的研究现状。

(1) 在无向固定或切换拓扑下，不考虑时滞影响下的多智能体系统状态反馈一致性控制的研究现状如下：B. Ning 等作者研究了双积分器多智能体系统的无领导者和领导跟随一致性问题，采用时间生成器控制方法，提出了分布式固定时间控制协议^[18]。Z. Guan 等作者研究了双积分器多智能体系统的领导跟随有限时间一致性问题，利用牵引控制技术，设计了有限时间一致性控制协议^[19]。L. Macellari 等作者研究了双积分器多智能体系统的预定表现平均一致性问题，提出了基于时间的分布式控制器^[20]。Z. Zuo 等作者研究了高阶积分器多智能体系统的固定时间一致性追踪问题，提出了基于固定时间观测器的状态反馈控制方案^[21]。H. Su 等作者研究了具有输入饱和的线性多智能体系统领导跟随一致性问题，在半全局意义下，设计了基于低增益反馈的一致性协议^[22]。Z. Li 等作者研究了线性多智能体系统领导跟随一致性问题，在领导者的输入是未知有界函数的情况下，提出了具有静态增益和自适应耦合增益的分布式不连续控制协议^[23]。W. Hu 等作者针对一类线性多智能体系统，提出了基于事件的渐近一致性控制算法，并证明该算法下不发生芝诺行为^[24]。针对线性多智能体系统一致性控制问题，D. Nguyen 提出了基于边缘动态的降阶分布式控制器设计方案^[25]；T. Cheng 等作者设计了基于事件触发通信调度的分散一致性控制器^[26]。Z. Wu 等作者提出了基于邻居智能体状态估计的分布式事件触发控制协议，实现了线性多智能体系统的领导跟随一致性^[27]。J. Jiang 等作者研究了线性时变多智能体系统领导跟随一致性问题，基于李亚普诺夫直接法，呈现了多个控制方案^[28]。K. Chen 等作者针对异构线性多智能体系统，在领导者系统矩阵包含不稳定极点的条件下，给出了智能体实现输出一致性的充分条件^[29]。X. Li 等作者研究了线性多智能体系统完全

分布式一致性控制问题, 利用智能体的相关状态信息, 提出了自适应事件触发控制协议^[30]。Z. Zuo 等作者针对线性和非线性多智能体系统, 在考虑执行器故障条件下, 提出了自适应容错一致性追踪控制算法^[31]。Y. Zhao 等作者研究了非同构匹配非线性多智能体系统自适应一致性控制问题, 基于边缘准则, 设计了具有自适应耦合强度的边缘控制协议^[32]。H. Rezaee 等作者研究了高阶非线性多智能体系统一致性问题, 利用共同李亚普诺夫函数方法, 给出了实现无领导者一致性的充分条件^[33]。M. Khalili 等作者研究了不确定非线性多智能体系统领导跟随一致性问题, 提出了分布式适应性容错控制方案^[34]。X. Wang 等作者研究了带有不匹配干扰的非线性多智能体系统领导跟随输出一致性问题, 提出了综合前馈和反馈的一致性控制方案^[35]。D. Shen 等作者研究了高阶异构非线性多智能体系统学习一致性控制问题, 通过选择障碍李亚普诺夫函数, 设计了基于输出约束的两种分布式控制协议^[36]。

(2) 在有向固定或切换拓扑下, 不考虑时滞影响下的多智能体系统状态反馈一致性控制的研究现状如下: X. Wang 等作者研究了具有不匹配扰动的高阶积分器多智能体系统分布式抗干扰输出一致性问题, 采用滑模控制方法, 设计了基于干扰观测器的控制协议^[37]。Y. Wang 等作者研究了高阶积分器多智能体系统的领导跟随有限时间一致性问题, 采用预设有限时间控制方法, 提出了分布式光滑控制协议^[38]。J. Qin 等作者研究了线性多智能体系统领导跟随一致性问题, 在不同拓扑切换规则下, 提出了三种不同的一致性控制方案^[39]。随后, 该作者又研究了线性多智能体系统的无领导者指数一致性控制问题^[40]。I. Saboori 等作者研究了具有 H_∞ 和加权 H_∞ 界的齐次线性时不变多智能体系统的一致性控制问题, 设计了分布式控制器, 并给出了实现一致性的充分条件^[41]。Z. Li 等作者研究了线性多智能体系统的完全分布式一致性控制问题, 设计了独立于通信拓扑全局信息的分布式自适应控制协议^[42]。J. Fu 等作者研究了一般线性多智能体系统有限时间一致性追踪控制问题, 提出了基于观测器的分布式控制器^[43]。J. Sun 等作者研究了带有干扰的线性多智能体系统分布式一致性问题, 提出了基于状态和干扰观测器的自适应干扰抑制控制策略^[44]。B. Wang 等作者研究了带有输入饱和的不确定线性多智能体系统半全局鲁棒追踪一致性控制问题, 提出了变分自适应低增益反馈控制方案^[45]。G. Wen 等作者研究了非线性多智能体系统的自适应一致性追踪问题, 在领导者智能体具有高阶非线性动态的情况下, 利用神经网络近似技术, 设计了基于局部观测器的控制协议^[46]。W. Liu 等作者针对不确定高阶非线性多智能体系统, 协同设计了自适应性分布式观测器和领导跟随一致性控制

方案^[47]。C. Du 等作者研究了基于事件触发控制的线性多智能体系统有限时间一致性问题,提出了基于新颖触发函数的分布式控制协议^[48]。G. Wang 研究了具有未知控制方向的高阶非线性多智能体系统一致性控制问题,提出了基于局部信息的分布式一致性控制方案^[49]。P. Gong 等作者针对不确定分数阶非线性多智能体系统,在考虑执行器故障条件下,利用边界层技术的自适应技术,发展了无领导者一致性容错控制算法^[50]。Y. Liu 等作者研究了具有未知控制方向的非线性多智能体系统预定表现一致性控制问题,提出了基于适应性观测器的分布控制策略^[51]。G. Wang 等作者研究了具有未知死区输入的非线性严格反馈多智能体系统一致性控制问题,利用低复杂度控制方法,提出了完全分布式领导跟随一致性协议^[52]。

(3) 在无向固定或切换拓扑下,考虑时滞影响下的多智能体系统状态反馈一致性控制的研究现状如下: P. Lin 等作者研究了具有通信时滞的双积分器多智能体系统无领导者一致性问题,提出了基于时滞的分布式控制算法,并给出了实现平均一致性的充分条件^[53]。Y. Zhang 等作者针对双积分器多智能体系统,在考虑随机通信时滞和丢包条件下,提出了无领导者一致性均方鲁棒控制协议,并给出了该协议有效的充要条件^[54]。A. Abdessameud 等作者研究了具有定常通信时滞的高阶积分器多智能体系统一致性问题,在没有利用通信拓扑全局信息的条件下,提出了完全分布式一致性控制算法^[55]。Y. Chen 等作者从频域视角研究了具有时变通信时滞的线性多智能体系统一致性问题,提出了状态反馈平均一致性控制协议^[56]。Z. Wang 等作者研究了具有时变通信时滞的连续时间线性多智能体系统一致性问题,给出了获得无领导者一致性的充分条件^[57]。P. He 等作者研究了具有通信时滞和噪声干扰的高阶非线性多智能体系统领导跟随一致性追踪问题,利用随机李亚普诺夫泛函稳定性理论,给出了实现均方一致性的充分条件^[58]。X. You 等作者研究了非线性多智能体系统领导跟随一致性问题,在考虑时变通信时滞和执行器饱和条件下,提出了基于状态反馈控制的一致性协议^[59]。J. Ni 等作者针对双积分器多智能体系统,在考虑输入时滞条件下,协同设计了分布式固定时间观测器和状态反馈一致性控制协议^[60]。G. Ran 等作者研究了具有输入时滞的双积分器多智能体系统有限时间一致性问题,提出了基于事件的有限时间控制协议^[61]。R. Sakthivel 等作者研究了具有输入时滞和随机执行器故障的非线性多智能体系统固定时间一致性问题,提出了基于可靠观测器的状态反馈控制算法^[62]。H. Chu 等作者针对具有输入时滞和状态饱和约束的非线性多智能体系统,在全局意义下提出了一致性控制算法,给出了该算法有效的充分条件^[63]。

H. Zhang 等作者研究了具有状态时滞的未知线性多智能体系统有限时域最优一致性控制问题, 通过利用神经网络逼近时变成本函数, 计算出了最优一致性控制策略^[64]。C. Chen 等作者研究了具有状态时滞的非线性多智能体系统一致性控制问题, 提出了适应性神经网络无领导者一致性控制方案^[65]。随后, H. Ma 等作者将^[65]的结果扩展到具有状态时滞和噪声干扰的非线性多智能体系统^[66]。

(4) 在有向固定或切换拓扑下, 考虑时滞影响下的多智能体系统状态反馈一致性控制的研究现状如下: J. Liu 等作者研究了具有噪声干扰和通信时滞的单积分器多智能体系统的随机一致性控制问题, 给出了实现几乎必然一致性和矩平均一致性的充分条件^[67]。D. Wang 等作者研究了具有通信时滞的单积分器多智能体系统平均一致性问题, 提出了类比例-微分的分布式控制算法^[68]。J. Sheng 等作者研究了具有通信时滞的线性多智能体系统最优一致性问题, 采用半离散化方法, 在有限维状态空间中建立了系统响应的映射, 给出了实现最优一致性控制的条件^[69]。N. Mu 等作者研究了具有通信时滞的线性多智能体系统事件触发一致性问题, 建立了实现其一致性的充分条件^[70]。J. Zheng 等作者研究了具有通信时滞和数据丢包的离散时间线性多智能体系统均方一致性问题, 给出了实现其一致性的充分条件^[71]。Y. Wang 等作者针对具有通信时滞的非线性多智能体系统, 采用牵引控制方法, 提出了领导跟随一致性协议, 且给出了该协议有效的充分条件^[72]。H. Wang 针对网络化机械系统, 在考虑通信时滞条件下, 提出了无积分作用的一致性控制协议和有积分作用的加权平均一致性控制协议^[73]。M. Lu 等作者研究了具有通信时滞的多个不确定欧拉-拉格朗日系统一致性控制问题, 采用前馈控制与自适应控制方法, 设计了自适应分布式控制器^[74]。H. Savino 等作者研究了具有输入时滞的线性多智能体系统一致性问题, 提出了能在均方意义下实现其一致性的控制协议^[75]。A. Ponomarev 等作者为具有定常输入时滞的线性多智能体系统, 提出了基于离散时间预测反馈的一致性控制策略^[76]。H. Zhang 等作者针对具有时变输入时滞的连续时间异构线性多智能体系统, 设计了分布式最优一致性控制协议^[77]。随后, 该作者针对具有输入时滞的未知线性多智能体系统, 提出了基于数据驱动的分布式最优一致性控制方案^[78]。X. Yang 等作者研究了具有输入时滞的离散时间线性多智能体系统一致性问题, 提出了基于断截伪预测器的反馈控制策略^[79]。C. Wang 等作者研究了具有输入时滞的非线性多智能体系统一致性控制问题, 在全局意义下, 给出了实现无领导者一致性的充分条件^[80]。随后, 该作者又提出了基于断截预测器的状态反馈控制算法^[81]。W. Qian 等作者研究了具有时变输入

时滞的非线性多智能体系统局部一致性控制问题,给出了实现其局部一致性的充分条件^[82]。B. Cui 等作者研究了具有状态时滞的非线性多智能体系统一致性追踪问题,提出了具有自适应学习特性的分布式控制策略^[83]。D. Zhou 等作者研究了具有时变状态时滞和采样数据的一阶非线性多智能体系统一致性控制问题,提出了基于分布式采样观测器的适应性控制协议^[84]。K. Chen 等作者研究了具有定常状态时滞的高阶非线性多智能体系统一致性追踪问题,利用反步控制方法,提出了基于神经网络的分布式适应性控制协议^[85]。

1.2.2 输出反馈一致性控制研究现状

与此同时,在不考虑或考虑时滞影响下的多智能体系统输出反馈一致性控制研究也取得了丰富的成果。本部分也以四种情况解析输出反馈控制的研究现状。

(1) 在无向固定或切换拓扑下,不考虑时滞影响下的多智能体系统输出反馈一致性控制的研究现状如下: G. Li 等作者针对高阶积分器多智能体系统,在考虑不匹配干扰条件下,设计了分布式有限时间观测器,并发展了输出一致性控制算法^[86]。H. Zhang 等作者研究了线性多智能体系统事件触发一致性控制问题,提出了基于观测器的输出反馈控制协议^[87]。H. Su 等作者研究了带有输入饱和的线性多智能体系统领导跟随一致性控制问题,用低增益输出反馈控制方法,提出了基于观测器的分布式控制协议^[88]。W. Hu 等作者针对一类线性多智能体系统,设计了基于事件和动态补偿器的输出一致性控制策略^[89]。X. Li 等作者研究了线性多智能体系统的完全分布式一致控制问题,提出了两种降阶自适应输出反馈控制方案^[90]。X. Zhang 等作者研究了时变非线性多智能体系统领导跟随一致性问题,在系统非线性项显含无界时变函数的条件下,提出了基于时变增益的分布式控制算法^[91]。C. Chen 等作者研究了高阶非线性半严格反馈多智能体系统一致性追踪问题,利用反步控制方法,提出了基于观测器的自适应控制协议^[92]。X. You 等作者研究了高阶非线性多智能体系统自触发领导跟随一致性问题,提出了动态输出反馈控制方案^[93]。随后,该作者将此方案扩展到非线性随机多智能体系统,提出了基于补偿器的输出反馈一致性控制协议^[94]。A. Rehman 等作者研究了带有扰动的非线性多智能体系统一致性问题,采用复合线性变参数方法,设计了适应性一致性控制协议^[95]。Y. Li 等作者研究了随机非线性关联多智能体系统领导跟随一致性问题,采用模糊逻辑系统近似技术,设计了基于动态增益滤波器的输出反馈控制协议^[96]。

(2) 在有向固定或切换拓扑下, 不考虑时滞影响下的多智能体系统输出反馈一致性控制的研究现状如下: B. Tian 等作者研究了双积分器多智能体系统固定时间领导跟随一致性问题, 提出了基于分布式固定时间观测器的连续控制协议^[97]。B. Zhou 等作者研究了线性多智能体系统输出反馈一致性问题, 提出了基于断截降阶观测器的控制协议^[98]。M. Fan 等作者研究了带有输入饱和的线性多智能体系统一致性问题, 在半全局意义下, 提出了基于观测器的输出反馈控制方案^[99]。F. Yaghmaie 等作者研究了线性异构多智能体系统输出调节(广义输出一致性)问题, 在全局和局部意义下, 提出了分布式控制协议, 并给出了实现一致性的充分条件^[100]。Z. Zhao 等作者研究了线性多智能体系统一致性问题, 在领导者输入为零的条件下, 提出了输出反馈控制算法^[101]。随后, Y. Lv 等作者放松了上述结果对领导者输入的假设条件, 允许该输入是有界的时变函数, 并提出了分布式自适应输出反馈一致性控制协议^[102]。X. Li 等作者研究了齐次线性多智能体系统一致性控制问题, 从鲁棒控制视角, 提出了基于观测器的输出反馈控制协议^[103]。H. Cai 等作者针对线性多智能体系统, 协同设计了自适应观测器和分布式输出调节方案^[104]。S. Du 等作者研究了随机抽样机制下线性多智能体系统一致性问题, 设计了基于观测器的随机抽样控制协议^[105]。L. Rong 等作者研究了线性多智能体系统一致性问题, 在有限通信带宽限制下, 采用了概率量化方法, 设计了基于分布式观测器的输出反馈控制协议^[106]。X. Li 等作者研究了具有非均匀加性稳定扰动的线性多智能体系统鲁棒一致性问题, 提出了动态输出反馈一致性控制协议^[107]。Z. Li 等作者研究了非线性多智能体系统有限时间一致性追踪控制, 结合齐次函数, 给出了基于观测器的有限时间控制协议^[108]。Y. Yang 等作者研究了遭受随机攻击的线性多智能体系统一致性控制问题, 在均方意义下, 设计了基于观测器的分布式安全控制协议^[109]。P. Wang 等作者研究了线性多智能体系统一致性追踪问题, 提出了基于未知输入观测器的输出反馈控制策略^[110]。Y. Lv 等作者研究了线性多智能体系统自适应无攻击一致性追踪控制问题, 提出了基于观测器的完全分布式适应性输出反馈控制协议^[111]。J. Sun 等作者研究了不确定非线性多智能体系统领导跟随一致性问题, 设计了基于局部观测器和自适应估计器的分布式输出反馈控制器^[112]。C. Chen 等作者研究了二阶非线性多智能体一致性追踪控制问题, 提出了基于模糊观测器的输出反馈自适应控制方案^[113]。L. Zhao 等作者研究了非线性多智能体系统输出一致性追踪问题, 提出了基于局部模糊状态估计器的分布式自适应控制策略^[114]。Y. Su 研究了非线性严格反馈多智能体系统输出一致性问题, 采用内模方

法, 设计了基于观测器的半全局输出反馈控制协议^[115]。X. Chen 等作者研究了不确定非线性多智能体系统预定时间调节问题, 提出了基于时间尺度函数的输出反馈控制器^[116]。

(3) 在无向固定或切换拓扑下, 考虑时滞影响下的多智能体系统输出反馈一致性控制的研究结果相对偏少。例如, T. Qi 等作者研究了具有通信时滞的离散时间多智能体系统一致性控制问题, 提出了分布式输出反馈一致性控制协议^[117]。X. Jiang 等作者研究了具有时变通信时滞的线性多智能体系统输出一致性问题, 利用可观测性分解技术, 提出了基于输出反馈的无领导者一致性控制方案^[118]。

(4) 在有向固定或切换拓扑下, 考虑时滞影响下的多智能体系统输出反馈一致性控制的研究现状如下: C. Tan 等作者研究了具有定常通信时滞的离散时间线性多智能体系统状态一致性问题, 基于网络预测控制方法, 提出了分布式动态输出反馈控制协议^[119]。随后, 该作者又进一步研究了该多智能体系统的输出一致性控制问题, 设计了动态输出反馈控制协议^[120]。X. Xu 等作者针对异构线性多智能体系统, 在考虑任意大定常或时变通信时滞条件下, 设计了基于分布式观测器的动态输出反馈一致性控制方案^[121]。随后, 该作者研究了具有通信、输入和输出时滞的不确定线性多智能体系统无领导一致性问题, 提出了基于分布式预测器的输出反馈控制协议^[122]。B. Zhou 等作者研究了具有定常输入和通信时滞的线性多智能体系统一致性问题, 采用断截预测控制方法, 设计了基于全阶观测器的输出反馈控制协议^[123]。Q. Liu 等作者研究了具有定常通信、输入和状态时滞的离散时间多智能体系统一致性问题, 设计了基于全阶/降阶观测器的输出反馈控制协议^[124]。B. Zhou 研究了具有输入时滞的线性多智能体系统一致性问题, 采用截断预测控制方法, 设计了基于降阶观测器的输出反馈控制协议^[125]。Y. Zhao 等作者研究了具有定常输入时滞和干扰的线性多智能体系统一致性问题, 设计了基于扰动观测器的预测输出反馈控制协议^[126]。C. Wang 等作者研究了具有定常输入、输出时滞和干扰的线性多智能体系统一致性问题, 提出了基于扩展状态观测器的预测输出反馈控制算法^[127]。H. Chu 等作者研究了具有时变输入时滞的线性多智能体系统领导跟随一致性问题, 提出了分布式输出反馈控制策略^[128]。随后, 该作者又研究了具有定常输入时滞的非线性多智能体系统一致性问题, 提出了基于观测器的断截预测反馈控制协议^[129]。S. Chen 等作者研究了具有定常输入、状态时滞和干扰的非线性多智能体系统一致性问题, 采用断截预测控制方法, 提出了基于观测器的输出反馈控制算法^[130]。

1.3 现有工作存在的不足

经过对多智能体系统一致性控制研究现状的讨论，能发现一个共性的问题：现有的工作主要集中在线性多智能体系统（含单、双和高阶积分器系统）一致性控制理论的研究。然而，应用日益广泛的复杂控制系统普遍存在非线性特性，线性系统模型很难完全表征其动力学特征，通常只能用非线性系统模型刻画。针对非线性多智能体系统，如果用线性理论为其分析和设计一致性控制协议，通常很难达到预定的控制目标。因此，亟需从不同角度，完善非线性多智能体系统一致性控制理论。同时，也能发现一些个性的问题，将从如下三方面阐述。

（1）拓扑切换问题

由于复杂网络环境下移动智能体之间可能存在未知障碍，导致现有通信机制下的一些通信链路产生故障。也可能由于移动智能体之间达到了彼此有效检测范围，从而引起部分智能体之间创建一些新的链路。也就是说，在实际中，随着时间的推移，通信拓扑结构可能是间歇或实时切换的，因此，研究切换拓扑下的一致性控制问题非常有意义。针对拓扑切换问题，现有结果通过定义拓扑切换序列的链接，并设计不同类型的拓扑切换规则，提出了带有切换拓扑结构的多智能体系统一致性控制判据。现有结果设计的拓扑切换规则通常要满足驻留时间条件（含联合连接条件）或平均驻留时间条件。由于基于驻留时间条件的拓扑切换信号要求任意两个连续的拓扑切换过程持续的时间都不小于一个常数。在实际中，该条件下的拓扑切换通常具有很强的局限性。平均驻留时间条件是对驻留时间条件一个放松，且基于平均驻留时间条件的拓扑切换信号允许任意两次连续的拓扑切换过程平均的驻留时间都不小于一个常数，即在必要时它允许通信拓扑快速切换。然而，此条件下拓扑切换次数限制为运行区间的仿射函数，只能获得时不变的拓扑切换频率。因此，如何设计允许拓扑变频切换的灵活切换规则，并在该规则下实现非线性多智能体系统一致性控制是一个值得研究的问题。

（2）时滞问题

在复杂网络化控制系统中，当物质和能量沿着特定的路径传输时，就会产生时滞现象。时滞的存在使得多智能体系统一致性控制问题变得更加复杂和困难。尽管有大量结果研究了时滞影响下的一致性控制问题，但其中大多数结果只考虑了通信时滞，而相关输入和状态时滞的研究结果偏少。针对输入时滞下的一致性控制问题，

现有结果普遍假设所有智能体的输入时滞是同一个已知常数或时变函数。在实际中，每个智能体通常有专属的通信渠道，因而所有智能体的输入时滞经常是不尽相同的。同时，由于技术原因，输入时滞的精确值往往很难测量获得，也就是说，输入时滞可能并非完全已知，一般情况下仅能获得其精确值的所在区间范围。因此，未知或不同输入时滞影响下的非线性多智能体系统状态和输出反馈一致性控制的研究具有重要的理论和实际意义。针对状态时滞下的一致性问题的研究，现有的大部分结果都集中在状态反馈控制。由于系统固有的特点或者测量技术和成本的限制，智能体的状态信息可能难以全部测量获得，一般仅能测量得到其输出信息，所以研究输出反馈一致性控制更有意义。尽管部分学者结果研究了这个问题，但现有结果提出的控制协议往往依赖于状态时滞，意味着状态时滞完全已知，在实际中，这显然很不合理。除此之外，现有结果关于非线性函数的假设条件相对保守。因此，未知状态时滞影响下的非线性多智能体系统输出反馈一致性控制理论亟待进一步完善。

（3）状态重构问题

在领导跟随一致性控制研究中，状态重构问题包含基于领导者状态重构问题和基于相关输出重构问题，其中前者是在领导者的状态或输出信息难以全局共享的情况下，根据局部通信关系和领导者的状态或输出信息，为跟随者设计分布式观测器重构领导者的状态信息；后者是在智能体的状态信息难以测量的情况下，根据智能体的相关输出信息，对跟随者或者所有智能体系统设计观测器或补偿器重构其状态信息。对无领导者一致性控制的研究一般仅涉及到基于相关输出重构问题。基于领导者状态重构的领导跟随状态反馈一致性控制思路是首先为跟随者设计分布式观测器，然后通过状态变换将领导跟随一致性问题转化为单系统的镇定问题，其中设计分布式观测器是其关键环节。该思路下的相关结果通常聚焦在无向或有向固定拓扑下的线性多智能体系统，而有待突破的是如何用这种控制方法为切换拓扑或输入时滞影响下的非线性多智能体系统设计控制协议。针对基于输出重构的输出反馈一致性控制的研究，绝大多数结果提出了基于全阶观测器的输出反馈控制协议，即每个观测器的动态阶次和智能体动态阶次相同，如果智能体的动态阶次太高，那么控制协议也需要较高阶次的附加动态。而基于降阶观测器的输出反馈控制协议需要较少的附加动态，相对来说更容易且经济地实施。目前，该控制协议仅存在于线性多智能体系统，且很难直接应用于非线性多智能体系统。因此，如何为非线性多智能体系统设计基于降阶观测器或补偿器的输出反馈一致性控制协议非常值得研究。

1.4 多智能体系统一致性控制的基本知识

1.4.1 拓扑理论

$\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示一个拓扑图, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示节点的集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示连接节点的弧线集合, 用一对节点 (i, j) 表示连接起始节点 i 和终止节点 j 的有向弧线。如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则称节点 j 是节点 i 的邻居节点; 否则, 不为邻居。 $\mathcal{N}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$ 表示节点 i 的邻居节点集合。如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 且 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 则意味着节点 j 和节点 i 互为邻居节点, 并且在这种情况下称拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是无向的; 否则, 称拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是有向的。如果任意两个节点之间存在一条路径, 则称拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是连通的。如果有向拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 中, 除根节点 (父节点) 外的所有节点 (子节点) 有且仅有一个根节点, 则称此拓扑图包含有向树。如果有向拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 存在包含所有节点的有向树, 则称此拓扑图包含有向生成树。 $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示邻接权重矩阵。如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则 $a_{ij} > 0$, 意味着节点 i 能收到节点 j 的信息; 否则, $a_{ij} = 0$ 。如果拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是无向的, 则 $a_{ij} = a_{ji}$; 否则, $a_{ij} \neq a_{ji}$ 。拉普拉斯矩阵能定义为: $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$,

$$d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}, \quad i \in \mathbb{N}_{1:N}。$$

若对上述 (跟随) 节点集合 \mathcal{V} , 再引入一个 (领导) 节点 0, 同时此领导节点扮演着一个特别角色, 它能影响跟随节点, 且不被跟随节点影响。那么就可以得到一个由节点 0 及其连接跟随节点的弧线和拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 构成的增广拓扑图 \mathcal{G} 。如果在增广拓扑图 \mathcal{G} 中, 存在至少一个 (跟随) 节点能获得节点 0 的信息, 并且拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是连通的, 则称此增广拓扑图 \mathcal{G} 也是连通的。然后, 拓扑矩阵可定义为: $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}$, 其中 $\mathcal{B} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ 表示领导跟随节点连通矩阵, 如果跟随节点 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 能收到领导节点 0 的信息, 则 $b_i > 0$; 否则, $b_i = 0$ 。

如果增广拓扑图中所有节点连接关系随着时间的推移不发生变化, 则称此增广拓扑图是固定的, 否则称其为切换的。当研究拓扑切换问题时, 首先要定义一个增广切换拓扑图集合为: $\bar{\mathcal{G}} = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M\}$, 其中 \mathcal{G}_i , $i \in \mathbb{N}_{1:M}$ 表示一个可能出现的切换增广拓扑图。然后, 为了便于描述增广切换拓扑图, 引入一个右连续的时变函数 $\sigma(t): [0, +\infty) \mapsto \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, M\}$, 其中 $\sigma(t)$ 称为拓扑切换信号。当 $t \in [0, +\infty)$, 活跃的增广拓扑图可以描述为 $\mathcal{G}_{\sigma(t)} \in \bar{\mathcal{G}}$ 。相似上述定义, 拓扑矩阵定义为: $\mathcal{H}_{\sigma(t)} = \mathcal{L}_{\sigma(t)} + \mathcal{B}_{\sigma(t)}$,

其中, $\mathcal{L}_{\sigma(t)} = \mathcal{D}_{\sigma(t)} - \mathcal{A}_{\sigma(t)}$, $\mathcal{D}_{\sigma(t)} = \text{diag}\{d_{1\sigma(t)}, d_{2\sigma(t)}, \dots, d_{N\sigma(t)}\}$, $d_{i\sigma(t)} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}]_{\sigma(t)}$, $i \in \mathbb{N}_{1:N}$,

$\mathcal{A}_{\sigma(t)} = [[a_{ij}]_{\sigma(t)}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathcal{B}_{\sigma(t)} = \text{diag}\{b_{1\sigma(t)}, b_{2\sigma(t)}, \dots, b_{N\sigma(t)}\}$ 。

在本论文中, 节点 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 均不存在自环情况, 也就是说, $a_{ii}=0$ 或 $[a_{ii}]_{\sigma(t)}=0$ 。同时, 每个节点能视为智能体, 其中, 领导节点表示领导者智能体, 跟随节点表示跟随者智能体。

1.4.2 重要定义及引理

定义 1.1^[131]: 如果 $a(t):[0, k) \mapsto [0, +\infty)$ 是一个连续且严格单调递增的函数, 同时满足 $a(0)=0$, 则称 $a(t)$ 是 \mathcal{K} 类函数。再如果 $k=+\infty$, 并且随着 $t \rightarrow k$, $a(k) \rightarrow +\infty$, 那么就称 $a(t)$ 是 \mathcal{K}_∞ 类函数。

定义 1.2^[131]: 如果 $c(r, s):[0, +\infty)^2 \mapsto [0, +\infty)$ 是一个连续函数, 并且对任意的固定变量 r , $c(r, s)$ 关于第二个变量 s 是 \mathcal{K}_∞ 类函数, 那么就称 $c(r, s)$ 是 \mathcal{FK}_∞ 类函数。

定义 1.3^[8]: 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 的克罗内克积是

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

并且当 C 和 D 是合适维数矩阵时, 如下特性成立

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ A \otimes B + A \otimes C &= A \otimes (B + C) \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD) \end{aligned}$$

定义 1.4^[29]: 考虑一个矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 并将其分块为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $M_{22} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 。如果 M_{22} 为非奇异矩阵, 则 $M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ 称为 M_{22} 在矩阵 M 中的舒尔补。相似地, 如果 M_{11} 为非奇异矩阵, 则 $M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$ 称为 M_{11} 在矩阵 M 中的舒尔补。如果 $M_{12} = M_{21}^T$, 那么如下三个不等式等价

- (i) $M < 0$
- (ii) $M_{11} < 0, M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} < 0$
- (iii) $M_{22} < 0, M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} < 0$

引理 1.1^[42]: 对任意的变量 $x \in \mathfrak{R}$ 和 $y \in \mathfrak{R}$, 如下不等式成立

$$xy \leq \frac{\epsilon^p |x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q\epsilon^q}$$

其中 ϵ , p 和 q 表示正实数, 并且满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

引理 1.2^[21]: 对任意变量 $x_i \in \mathfrak{R}$, $i \in \mathbb{N}_{1:n}$, 如下不等式成立

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p \leq \max \{ n^{p-1}, 1 \} \sum_{i=1}^n |x_i|^p$$

其中 p 是一个正实数。

引理 1.3^[80]: 对任意正定矩阵 Q 和函数向量 $x(t): [a, b] \mapsto \mathfrak{R}^n$, 其中 $a, b \in \mathfrak{R}$ 且 $b > a$, 如下积分不等式成立

$$\left(\int_a^b x^T(s) ds \right) Q \left(\int_a^b x(s) ds \right) \leq (b-a) \int_a^b x^T(s) Q x(s) ds$$

引理 1.4^[132]: 如果一个函数 $x(t): [0, +\infty) \mapsto \mathfrak{R}$ 是平方可积的, 即存在正常数 ε , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2(\tau) d\tau \leq \varepsilon < \infty$; 并且 $\dot{x}(t)$, $t \in [0, +\infty)$ 存在且有界, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

1.5 本文的主要研究内容

1.5.1 研究思路

本文针对现有结果存在的共性和个性问题, 全面深入的研究了基于状态重构的非线性多智能体系统领导跟随分布式一致性控制, 提出了分布式控制协议设计方案, 建立了解决一致性问题的判据准则。全文的思路和组织结构如图 1-11 所示。第 1 章阐述了多智能体系统的研究背景及意义, 从不同角度深度解析了多智能体系统一致性控制的研究现状, 讨论了现有结果存在的不足, 并且给出了多智能体系统一致性控制研究的相关基础知识。第 2-3 章, 考虑了变频切换拓扑、时变输入时滞、状态难以共享等因素, 研究了基于领导者状态重构的非线性多智能体系统分布式状态反馈一致性控制问题。第 4-6 章, 考虑了状态难以共享或测量、未知输入时滞、未知状态时滞等因素, 研究了基于输出重构的非线性多智能体系统分布式输出反馈一致性控制问题。最后, 总结了全文, 并且展望了下一步的研究工作。

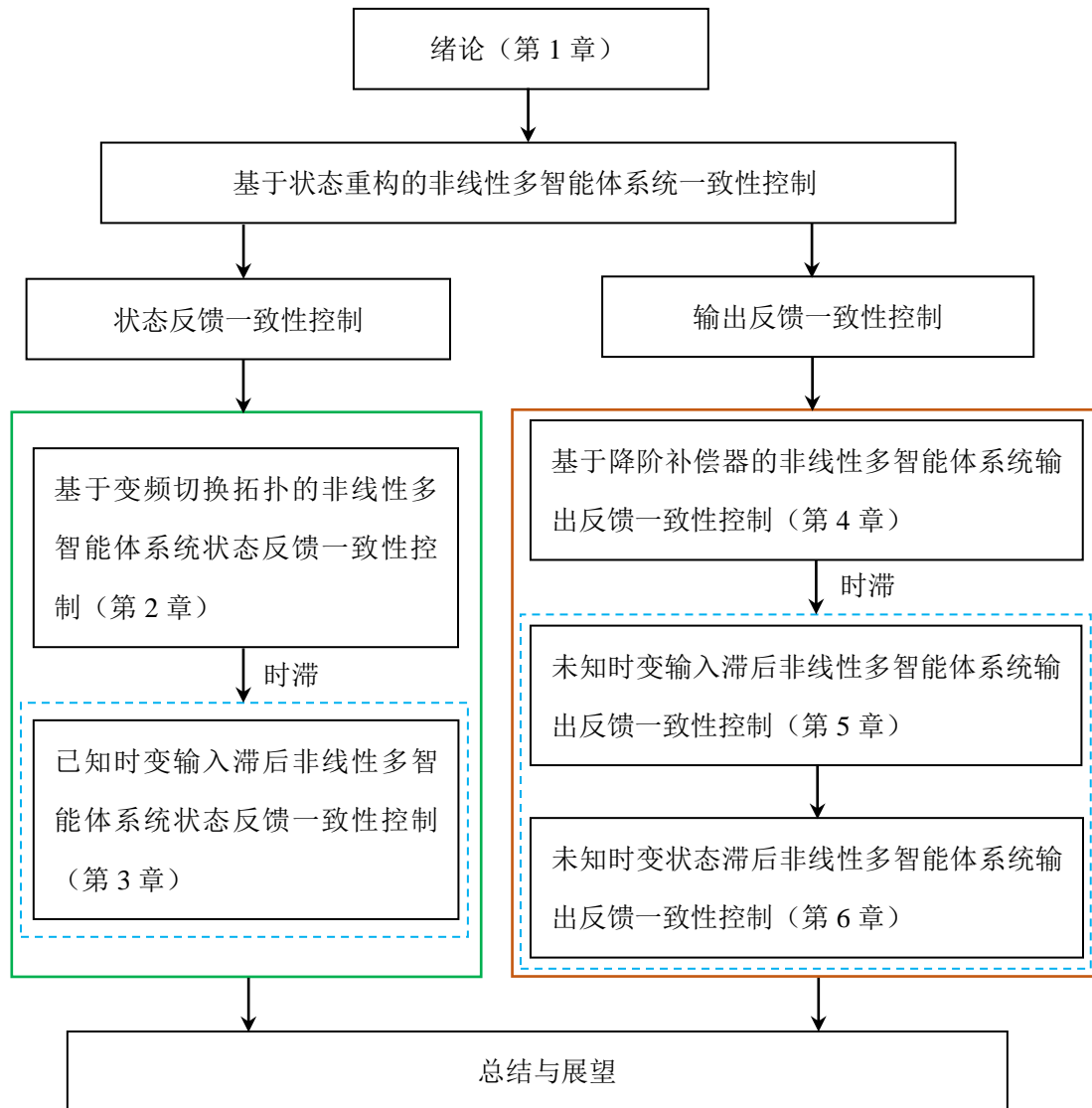


图 1-11 论文的组织结构

Fig.1-11 The organization structure of this dissertation

1.5.2 研究内容

本文主要研究内容呈现在第 2-6 章，综合考虑了拓扑切换、时滞、状态难以共享或测量等因素，针对非线性多智能体系统，提出了基于状态重构器（含观测器和补偿器）的领导跟随一致性控制协议。各章节具体研究内容概述如下：

第 2 章主要研究了变频有向切换拓扑下非线性多智能体系统状态反馈一致性控制问题。考虑了部分切换拓扑不包含以领导者为根节点有向生成树的情况，提出了一个允许拓扑切换频率随运行时间区间递增的拓扑切换规则。并在该规则下，为跟随者系统设计新颖分布式切换观测器重构领导者的状态信息。采用动态增益控制

方法,提出了基于该切换观测器且一阶可导的动态状态反馈控制协议,保证了非线性多智能体系统领导跟随状态一致性。

第3章主要研究了无向固定拓扑下具有已知输入时滞的非线性多智能体系统状态反馈一致性控制问题。考虑了领导者智能体输入为未知有界函数和智能体输入时滞彼此不同且为已知有界时变函数的情况。为跟随者智能体设计了分布式有限时间观测器重构领导者的状态信息。采用断截预测控制方法,提出了基于该有限时间观测器和输入时滞的静态状态反馈控制器。基于 Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函分析方法,给出了实现非线性多智能体系统领导跟随状态一致性的充分条件。

第4章主要研究了有向固定拓扑下基于输出反馈的非线性多智能体系统领导跟随完全分布式输出一致性控制问题。考虑了状态不可测和智能体间信息传输量过多的情况。在少保守性的非线性函数假设条件下,为跟随者设计了分布式降阶动态补偿器重构其状态信息。通过构造依赖于相关输出信息的动态增益,提出了基于该降阶动态补偿器且独立于全局拓扑矩阵信息的完全分布式动态输出反馈控制器。并在全局一致最终有界意义下,实现了非线性多智能体系统领导跟随输出一致性。

第5章主要研究了有向固定拓扑下具有未知输入时滞的非线性多智能体系统输出反馈一致性控制问题。考虑了状态不可测和智能体输入时滞彼此不同且为未知有界时变函数的情况。为跟随者设计了分布观测器和经典观测器分别重构领导者和跟随者的状态信息。采用断截预测控制方法,提出了基于该分布观测器和经典观测器且独立于输入时滞的静态输出反馈控制器。根据 L-K 泛函分析方法,给出了实现非线性多智能体系统领导跟随状态一致性的充分条件。

第6章主要研究了有向固定拓扑下具有未知状态时滞的非线性多智能体系统输出反馈一致性控制问题。考虑了状态不可测和智能体系统状态时滞为未知有界时变函数的情况。基于智能体的相对输出,为跟随者设计了全阶动态补偿器重构其的状态信息。采用动态增益控制和 L-K 泛函分析方法,提出了基于该补偿器且独立于状态时滞的动态输出反馈控制器,实现了非线性多智能体系统的领导跟随状态一致性。随后,提出的控制算法扩展应用到具有未知状态时滞和强非线性动态特性的多智能体系统。

第2章 基于变频切换拓扑的非线性多智能体系统状态反馈一致性控制

2.1 引言

多智能体系统一致性控制在航天科技、先进制造等领域具有广泛应用价值,受到了越来越多科技工作者的关注。多年来,在无向或有向固定拓扑下,从不同角度提出了大量的多智能体系统分布式一致性控制算法,见文献[6-11]及其参考文献。然而,在实际中,由于复杂网络环境的改变或者移动智能体自身的故障,可能导致智能体之间的通信拓扑结构随着时间推移而发生改变^[4]。近年来,在切换联合拓扑图下,针对具有各种动态特性的多智能体系统,许多结果也研究了其一致性控制问题。例如,文献[133]用李亚普诺夫函数法解决了单积分器多智能体系统一致性问题。沿着这一思路,针对线性或非线性多智能体系统,提出了渐近一致性控制、有限时间一致性控制和事件触发一致性控制等系列控制策略。现有结果几乎都要求切换拓扑在一定时间间隔内满足联合条件,且拓扑切换信号满足驻留时间条件(即拓扑切换信号在任意两个连续的切换过程,所持续时间都不小于一个正常数)。该条件似乎限制了一定时间间隔内拓扑切换的种类和频率。幸运的是,一些学者发现能通过改变拓扑切换信号规则(如让拓扑切换信号满足平均驻留时间条件)放松这些限制。

在基于平均驻留时间条件的切换拓扑下,一些学者从不同角度提出了一致性控制算法。例如,文献[134]研究了多输入多输出线性多智能体系统一致性干扰抑制问题。文献[135]利用混合控制方法解决了一阶非线性多智能体系统一致性问题。文献[136]研究了基于观测器的非线性多智能体系统分布式一致性追踪控制问题。上述工作都假设了切换拓扑图是连通的(或包含生成树)。为放松该假设条件,文献[137-138]提出了允许部分切换拓扑图是非连通(或不包含生成树)的一致性控制算法。但是,以上两文献仅研究了低阶多智能体系统的无领导者一致性问题。随后,文献[139]利用多李亚普诺夫函数方法研究了多智能体系统领导跟随一致性问题,允许领导者系统具有非线性动态,但其跟随者系统仍然是线性动态,且在领导者非线性项上有相对保守的条件。同时,其控制器直接依赖于切换信号和符号函数项,可能导致控制器出现抖振问题。此外,基于平均驻留时间条件的拓扑切换规则,在任意时间区间

内，拓扑切换次数依赖于该区间的仿射函数，仅能获得时不变的拓扑切换频率。

基于以上讨论，本章将针对一类非线性多智能体系统，提出一种基于变频拓扑切换规则的分布式一致性控制算法。相比存在的结果，本章的主要贡献总结如下：首先，在并非所有切换拓扑都包含以领导者为根的有向生成树下，给出了少保守性的拓扑切换信号条件，放松了拓扑切换次数为运行区间的仿射函数限制。并在此基础上，提出了一种新的领导跟随状态反馈一致性控制算法。其次，在此切换拓扑下，为跟随者设计了分布式切换观测器，该观测器能精准地估计高阶非线性领导者系统的状态信息。基于该切换观测器，领导跟随一致性问题可转化为切换系统镇定问题。最后，为跟随者设计了基于动态增益的分布式类线性控制器。由于此控制器不直接依赖于拓扑切换信号，且是一阶可导的，所以可极大地减轻其抖振现象。

2.2 预备知识和问题描述

2.2.1 预备知识

2.2.1.1 切换拓扑假设及引理

拓扑理论已经描述在章节 1.4.1。现在把本章考虑的增广切换拓扑图集合 $\bar{\mathcal{G}}$ 分为两部分： $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_s \cup \bar{\mathcal{G}}_u$ ，其中 $\bar{\mathcal{G}}_u = \{\mathcal{G}_k | k \in \mathcal{P}_u\}$ ， $\bar{\mathcal{G}}_s = \{\mathcal{G}_j | j \in \mathcal{P}_s\}$ ， $\mathcal{P} = \mathcal{P}_s \cup \mathcal{P}_u$ ， $\emptyset = \mathcal{P}_s \cap \mathcal{P}_u$ ，并且满足如下一个假设条件：

假设 2.1: \mathcal{G}_j ， $j \in \mathcal{P}_s$ 含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

很显然，本章假定了在切换拓扑图集合 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的增广拓扑 \mathcal{G}_j ， $j \in \mathcal{P}_s$ 都是有向固定的，并且满足假设 2.1 中的条件；然而，对其中的增广拓扑 \mathcal{G}_k ， $k \in \mathcal{P}_u$ 并没有作任何限定。结合章节 1.4.1 的描述，给出如下一个引理

引理 2.1^[140]：在满足假设 2.1 的拓扑 \mathcal{G}_s ， $s \in \mathcal{P}_s$ 下，对拓扑矩阵 $\mathcal{H}_s = \mathcal{L}_s + \mathcal{B}_s$ ，存在一个正常数 ϖ_s 和一个对角矩阵 $\Psi_s = \text{diag}\{\psi_{s1}, \psi_{s2}, \dots, \psi_{sN}\}$ ，其中 $\psi_{si} > 0$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ，使得如下不等式成立

$$\Psi_s \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_s^T \Psi_s \geq \varpi_s I_N$$

引理 2.2^[141]：对任意正常数 ς_i ，存在常数 θ_i ， $\bar{\varsigma}_i$ 和对称正定矩阵 P_i ，使得

$$\theta_i > 0, \bar{\varsigma}_i > 0, P_i > 0$$

$$\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i \leq -\theta_i I_n$$

$$\varsigma_i P_i \leq D_i P_i + P_i D_i + 2\varsigma_i P_i \leq \bar{\varsigma}_i P_i$$

其中 $D_i = \text{diag}\{0, 1, \dots, n-1\}$ ， $\bar{A}_i = A - BK_i^T$ ，且 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^n$ 和 $K_i \in \mathbb{R}^n$ 表述如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{bmatrix}$$

其中 k_{ij} , $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 是设计的正参数, 以保证 \bar{A}_i 是一个赫尔维兹 (Hurwitz) 矩阵。

2.2.1.2 拓扑切换信号特性

在章节 1.4.1 中的切换信号 $\sigma(t)$ 有如下特性: 在时间区间 $[0, t)$, $t > 0$ 内, $M_\sigma(0, t)$ 表示拓扑切换的次数。 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{M_\sigma(0, t)}$ 表示相应的拓扑切换时刻, 意味着在时刻 τ_i , 拓扑切换为 $\mathcal{G}_{\sigma(\tau_i)}$, 在下一相邻时刻 τ_{i+1} , 拓扑由 $\mathcal{G}_{\sigma(\tau_i)}$ 切换为 $\mathcal{G}_{\sigma(\tau_{i+1})}$ 。在时间区间 $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\mathcal{G}_{\sigma(\tau_i)}$ 的驻留时间为 $\Delta t_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$ 。那么在时间区间 $[s, t) \subset [0, +\infty)$, 拓扑 \mathcal{G}_j , $j \in \mathcal{P}$ 总的驻留时间为

$$T_j(s, t) = \left| [s, t) \cap \bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(\tau_i)=j}}^{+\infty} [\tau_i, \tau_{i+1}) \right|$$

显然地, 能得到 $\sum_{j \in \mathcal{P}} T_j(s, t) = t - s$ 。 $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ 是由有序对 (i, j) 构成的集合, 有序对 (i, j) 表示可以从拓扑 \mathcal{G}_i , $i \in \mathcal{P}$ 切换到拓扑 \mathcal{G}_j , $j \in \mathcal{P}$ 。对 $(m, n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$, $M_{mn}(s, t) = \# \{m \rightarrow n\}_s^t$ 表示在时间区间 $[s, t)$ 内, 从拓扑 \mathcal{G}_m 切换到拓扑 \mathcal{G}_n 的次数。进一步可以推算出 $M_\sigma(0, t) = \sum_{(m, n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})} M_{mn}(0, t)$ 。然后, 给出如下一个假设条件:

假设 2.2: 对 $j \in \mathcal{P}_S$, $k \in \mathcal{P}_U$ 和 $(m, n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$, 存在 \mathcal{FK}_∞ 类函数 $\rho_{j[S]}(\cdot, \cdot)$, $\rho_{k[U]}(\cdot, \cdot)$, $\rho_{mn}(\cdot, \cdot)$ 和正常数 $\bar{T}_{j[S]}$, $\bar{T}_{k[U]}$, \bar{M}_{mn} , 使在时间区间 $[s, t)$, 函数 $T_j(s, t)$, $T_k(s, t)$, $M_{mn}(s, t)$ 满足如下不等式

$$\begin{aligned} T_j(s, t) &\geq -\bar{T}_{j[S]} + \rho_{j[S]}(s, t-s) \\ T_k(s, t) &\leq \bar{T}_{k[U]} + \rho_{k[U]}(s, t-s) \\ M_{mn}(s, t) &\leq \bar{M}_{mn} + \rho_{mn}(s, t-s) \end{aligned}$$

注 2.1: 假设 2.2 中的第二个不等式说明在时间区间 $[s, t)$ 内, 集合 $\bar{\mathcal{G}}_S$ 中的拓扑活跃时间不能太长; 而第三个不等式说明在时间区间 $[s, t)$ 内, 拓扑切换次数应小于 \mathcal{FK}_∞ 类函数限定的界。值得说明的是, 在时间区间 $[s, t)$ 内, 基于平均驻留时间的拓扑切换规则要求拓扑切换次数依赖于仿射函数 $\frac{t-s}{\tau_a}$, 其中, τ_a 是平均驻留时间, 说明此

规则下, 只能得到时不变的拓扑切换频率。然而, 基于假设 2.2 的切换规则要求拓扑切换次数 $M_{mn}(s, t)$ 依赖于 \mathcal{FK}_∞ 函数 $\rho(s, t-s)$, 意味着在本章提出的切换规则下, 能

得到时变的拓扑切换频率。因此，满足假设 2.2 的拓扑切换规则要优于满足传统平均驻留时间条件的拓扑切换规则。

2.2.2 问题描述

在本章，研究了基于变频切换拓扑的高阶非线性多智能体系统领导跟随状态反馈一致性控制问题。考虑由编号为 0 的一个领导者和编号为 $1, \dots, N$ 的 N 个跟随者组成的 $N+1$ 个智能体。智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{0:N}$ 的非线性动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{ik}(t) = x_{i,k+1}(t) + f_k(\bar{x}_{ik}(t)); & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{x}_{in}(t) = u_i(t) + f_n(\bar{x}_{in}(t)) \end{cases} \quad (2-1)$$

其中 n 是智能体 i 动态的维数； $x_{ij}(t) \in \mathfrak{R}$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 和 $u_i(t) \in \mathfrak{R}$ 分别表示智能体 i 的状态变量、控制输入；领导者的控制输入定义为 $u_0(t) = 0$ ； $\bar{x}_{ij} = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}]^T \in \mathfrak{R}^j$ ；智能体 i 状态信息能通过测量获得； $f_j(\bar{x}_{ij}) : \mathfrak{R}^j \rightarrow \mathfrak{R}$ 是一个连续非线性函数，并且满足 $f_j(0) = 0$ 和如下一个假设条件。

假设 2.3: 对任意向量 $\bar{x}_{ij} \in \mathfrak{R}^j$ 和 $\bar{y}_{ij} \in \mathfrak{R}^j$ ，存在一个非负常数 γ_j ，使得

$$|f_j(\bar{x}_{ij}) - f_j(\bar{y}_{ij})| \leq \gamma_j \|\bar{x}_{ij} - \bar{y}_{ij}\|$$

这 $N+1$ 个智能体之间的通信关系是由切换拓扑刻画，已描述在章节 1.4.1 中，并满足假设 2.1 中和引理 2.1。智能体的状态信息能基于此拓扑进行传输。

注 2.2: 在本章中，智能体描述为具有下三角结构的非线性系统(2-1)，此系统模型能代表许多真实的物理系统，例如单连杆机械臂、倒立摆系统。尽管在固定拓扑和基于驻留时间或平均驻留时间条件的切换拓扑下，针对各种动态特性的多智能体系统，提出了许多优秀的领导跟随一致性控制算法，但是现有结果针对通信拓扑假设条件相对保守。鉴于此，本章将提出一种优化的拓扑切换规则，且允许部分切换拓扑不包含以领导者为根节点的有向生成树。同时，在该规则下，针对非线性多智能体系统，提出领导跟随状态反馈一致性控制算法。

目标: 本章主要目标是在切换拓扑下，为跟随者设计分布式控制器，使得所有智能体的对应状态实现一致性，即， $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow \varrho_0$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ ，其中 ϱ_0 表示一个可调的正常数。

2.3 分布式切换观测器设计

本部分将为跟随者设计新颖的分布式切换观测器重构领导者的状态信息。设计

该观测器之前，首先基于满足假设 2.1 的切换拓扑 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ ， $\sigma(t) := \mathcal{P}$ ，为跟随者智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 定义观测状态一致性误差

$$[e_k^{(i)}]_{\sigma(t)} = \sum_{j=1}^N [a_{ij}]_{\sigma(t)} (\hat{x}_{0k}^{(j)} - \hat{x}_{0k}^{(i)}) + [b_i]_{\sigma(t)} (x_{0k} - \hat{x}_{0k}^{(i)}) \quad (2-2)$$

其中 $[a_{is}]_{\sigma(t)}$ ， $[b_i]_{\sigma(t)}$ ， $i, s \in \mathbb{N}_{1:N}$ 定义在章节 2.2.1。

然后根据式(2-2)，在切换拓扑 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ ， $\sigma(t) := \mathcal{P}$ 下，为跟随者智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计分布式切换观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{0k}^{(i)} = \hat{x}_{0,k+1}^{(i)} + q[e_k^{(i)}]_{\sigma(t)} + f_k(\bar{\hat{x}}_{0k}^{(i)}); & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{\hat{x}}_{0n}^{(i)} = q[e_n^{(i)}]_{\sigma(t)} + f_n(\bar{\hat{x}}_{0n}^{(i)}) \end{cases} \quad (2-3)$$

其中 $\hat{x}_{0j}^{(i)}$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 表示智能体 i 观测器的状态变量， $\bar{\hat{x}}_{0j}^{(i)} = [\hat{x}_{01}^{(i)}, \hat{x}_{02}^{(i)}, \dots, \hat{x}_{0j}^{(i)}]^T \in \mathbb{R}^j$ ， q 是一个设计的正常数。

智能体 i 的观测误差定义为

$$\tilde{x}_{0k}^{(i)} = \hat{x}_{0k}^{(i)} - x_{0k} \quad (2-4)$$

根据式(2-2)和(2-4)，观测状态一致性误差 $[e_k^{(i)}]_{\sigma(t)}$ 可重写为

$$[e_k^{(i)}]_{\sigma(t)} = \sum_{j=1}^N [a_{ij}]_{\sigma(t)} (\tilde{x}_{0k}^{(j)} - \tilde{x}_{0k}^{(i)}) - [b_i]_{\sigma(t)} \tilde{x}_{0k}^{(i)} \quad (2-5)$$

结合式(2-3)和(2-4)，可以获得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{0k}^{(i)} = \tilde{x}_{0,k+1}^{(i)} + q[e_k^{(i)}]_{\sigma(t)} + \bar{f}_k^{(i)} \\ \dot{\tilde{x}}_{0n}^{(i)} = q[e_n^{(i)}]_{\sigma(t)} + \bar{f}_n^{(i)} \end{cases} \quad (2-6)$$

其中 $\bar{f}_k^{(i)} = f_k(\bar{\hat{x}}_{0k}^{(i)}) - f_k(\bar{x}_{0k})$ 。

定义向量 $z_i = [\tilde{x}_{0i}^{(1)}, \tilde{x}_{0i}^{(2)}, \dots, \tilde{x}_{0i}^{(N)}]^T$ 和 $F_i = [\bar{f}_i^{(1)}, \bar{f}_i^{(2)}, \dots, \bar{f}_i^{(N)}]^T$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

结合式(2-5)，(2-6)和章节 2.2.1，可计算得到

$$\begin{cases} \dot{z}_k = z_{k+1} - q\mathcal{H}_{\sigma(t)} z_k + F_k \\ \dot{z}_n = -q\mathcal{H}_{\sigma(t)} z_n + F_n \end{cases} \quad (2-7)$$

其中 $\mathcal{H}_{\sigma(t)}$ 定义在章节 2.2.1。

本部分的主要结果可总结成如下一个定理。

定理 2.1: 在假设 2.1-2.3 下，如果对每个时间间隔 $[r, r+s)$ ，存在一个常数 δ_1 和 \mathcal{FK}_∞ 函数 $\rho(\cdot, \cdot)$ ，使得

$$\begin{aligned} \delta_1 - \rho(r, s) &\geq - \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\bar{\lambda}_j| \rho_{j[S]}(r, s) + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\bar{\lambda}_k| \rho_{k[U]}(r, s) \\ &\quad + \sum_{(m,n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) \rho_{mn}(r, s), \end{aligned} \quad (2-8)$$

其中 \mathcal{FK}_∞ 函数 $\rho_{j[S]}(\cdot, \cdot)$, $\rho_{k[U]}(\cdot, \cdot)$, $\rho_{mn}(\cdot, \cdot)$ 定义在假设 2.2, 则分布切换观测器(2-3)能渐近地估计领导者的状态信息。

证明: 在切换拓扑 \mathcal{G}_l , $l \in \mathcal{P}$ 活跃时, 为系统(2-7), 选择一个类李亚普诺夫函数

$$V_{0l} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^T \Psi_l z_i \quad (2-9)$$

其中 Ψ_l 是一个正对角矩阵。

根据式(2-7)和(2-9), 经简单计算, 可得 V_{0l} 的导数为

$$\dot{V}_{0l} = -\sum_{i=1}^n q z_i^T \Psi_l \mathcal{H}_l z_i + \sum_{i=1}^{n-1} z_i^T \Psi_l z_{i+1} + \sum_{i=1}^n z_i^T \Psi_l F_i \quad (2-10)$$

基于引理 2.1 和式(2-10), 计算可得

$$-q z_i^T \Psi_l \mathcal{H}_l z_i \leq \begin{cases} -\frac{q}{2} z_i^T (\Psi_l \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_l^T \Psi_l) z_i \leq -\frac{q \varpi_l}{2} \|z_i\|^2; & l \in \mathcal{P}_S \\ q \|\Psi_l \mathcal{H}_l\| \|z_i\|^2; & l \in \mathcal{P}_U \end{cases} \quad (2-11)$$

利用引理 1.1, 假设 2.3 和式(2-10), 可以获得

$$\sum_{i=1}^n z_i^T \Psi_l F_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\|\Psi_l\|^2 \|z_i\|^2 + \|F_i\|^2) \leq \hat{\varepsilon}_l \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \quad (2-12)$$

其中 $\hat{\varepsilon}_l$ 定义为 $\hat{\varepsilon}_l = \frac{1}{2} (\|\Psi_l\|^2 + \hat{\gamma})$, $\hat{\gamma}$ 是一个合适的正常数。

根据式(2-10), 能得到如下不等式

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i^T \Psi_l z_{i+1} \leq \tilde{\varepsilon}_l \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \quad (2-13)$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_l$ 定义为 $\tilde{\varepsilon}_l = \frac{1}{2} (\|\Psi_l\|^2 + 1)$ 。

把式(2-11)-(2-13)代入式(2-10), 可以计算得到

$$\dot{V}_{0l} \leq \begin{cases} -\hat{\lambda}_l \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2; & l \in \mathcal{P}_S \\ \tilde{\lambda}_l \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2; & l \in \mathcal{P}_U \end{cases} \quad (2-14)$$

其中 $\hat{\lambda}_l$ 和 $\tilde{\lambda}_l$ 分别定义为 $\hat{\lambda}_l = \frac{1}{2} q \varpi_l - \bar{\varepsilon}_l$ 和 $\tilde{\lambda}_l = q \|\Psi_l \mathcal{H}_l\| + \bar{\varepsilon}_l$, 并且 $\bar{\varepsilon}_l = \hat{\varepsilon}_l + \tilde{\varepsilon}_l$ 。

对观测器(2-3), 取常数 q 满足如下不等式

$$q > \max \left\{ \frac{2\bar{\varepsilon}_l}{\varpi_l} \mid l \in \mathcal{P}_S \right\} \quad (2-15)$$

进而可以保证式(2-14)中的 $\hat{\lambda}_l > 0$ 。

很容易证实 $\min(\Psi_i) \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^n z_i^T \Psi_i z_i \leq \|\Psi_i\| \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2$ 。然后根据式(2-9), (2-14)

和(2-15), 可以计算得到

$$\dot{V}_{0i} \leq -\bar{\lambda}_i V_{0i} \quad (2-16)$$

其中 $\bar{\lambda}_i$ 表述为

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \frac{2\hat{\lambda}_i}{\|\Psi_i\|}; & i \in \mathcal{P}_S \\ -\frac{2\check{\lambda}_i}{\lambda_{\min}(\Psi_i)}; & i \in \mathcal{P}_U \end{cases} \quad (2-17)$$

根据式(2-9), 容易证实必须存在一个正常数 μ_{ij} , 例如 $\mu_{ij} \geq \lambda_{\max}(\Psi_j \Psi_i^{-1})$, 使得如下不等式成立

$$V_{0j}(z) \leq \mu_{ij} V_{0i}(z), i, j \in \mathcal{P} \quad (2-18)$$

其中 z 定义为 $z = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T]^T$ 。

基于章节 2.2.1 中的切换信号 $\sigma(t)$ 特性和式(2-16), 可以得到

$$\dot{V}_{0\sigma(t)}(z) \leq -\bar{\lambda}_{\sigma(t)} V_{0\sigma(t)}(z), \sigma(t) \in \mathcal{P} \quad (2-19)$$

利用式(2-19), 能计算得到

$$V_{0\sigma(t)}(z(t)) \leq \exp\left(-\bar{\lambda}_{\sigma(\tau_{M_\sigma(0,t)})}(t - \tau_{M_\sigma(0,t)})\right) V_{0\sigma(t)}\left(z(\tau_{M_\sigma(0,t)})\right) \quad (2-20)$$

根据式(2-18), 并迭代计算式(2-20), 能够获得

$$V_{0\sigma(t)}(z(t)) \leq \psi(t) V_{0\sigma(0)}(z(0)) \quad (2-21)$$

其中 $\psi(t)$ 定义为

$$\psi(t) = \exp\left(-\sum_{\substack{i=0, \\ \tau_{M_\sigma(0,t)+1}=t}}^{M_\sigma(0,t)} \bar{\lambda}_{\sigma(\tau_i)} \Delta t_{i+1} + \sum_{i=0}^{M_\sigma(0,t)-1} \ln \mu_{\sigma(\tau_i)\sigma(\tau_{i+1})}\right) \quad (2-22)$$

基于章节 2.2.1 中的切换信号 $\sigma(t)$ 特性, 式(2-17)和(2-22), $\psi(t)$ 可以重新写为如下形式

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp\left(-\sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\bar{\lambda}_j| \left|[0, t) \cap \bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(\tau_i)=j}}^{+\infty} [\tau_i, \tau_{i+1})\right| + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\bar{\lambda}_k| \left|[0, t) \cap \bigcup_{\substack{i=0 \\ \sigma(\tau_i)=k}}^{+\infty} [\tau_i, \tau_{i+1})\right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(m,n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) \#\{m \rightarrow n\}_0^{\tau_{M_\sigma(0,t)-1}}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\bar{\lambda}_j| T_j(0, t) + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\bar{\lambda}_k| T_k(0, t) + \sum_{(m,n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) M_{mn}(0, \tau_{M_\sigma(0,t)-1})\right) \end{aligned} \quad (2-23)$$

根据假设 2.2, 式(2-8)和(2-23)可知, $\psi(t)$ 满足如下不等式

$$\begin{aligned} \psi(t) \leq & \exp \left(\sum_{(m,n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) (\bar{M}_{mn} + \rho_{mn}(0,t)) + \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\bar{\lambda}_j| (\bar{T}_{j[S]} - \rho_{j[S]}(0,t)) \right. \\ & \left. + \sum_{j \in \mathcal{P}_U} |\bar{\lambda}_j| (\bar{T}_{j[U]} + \rho_{j[U]}(0,t)) \right) \\ \leq & \exp(\delta + \delta_1 - \rho_{mn}(0,t)) \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$\text{其中 } \delta \geq \sum_{(m,n) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})} (\ln \mu_{mn}) \bar{M}_{mn} + \sum_{j \in \mathcal{P}_S} |\bar{\lambda}_j| \bar{T}_{j[S]} + \sum_{k \in \mathcal{P}_U} |\bar{\lambda}_k| \bar{T}_{k[U]}.$$

根据式(2-9), 能证实一定存在 \mathcal{K}_∞ 函数 $\underline{\beta}(\|z(t)\|)$ 和 $\bar{\beta}(\|z(t)\|)$, 使得

$$\underline{\beta}(\|z(t)\|) \leq V_{0\sigma(t)}(z(t)) \leq \bar{\beta}(\|z(t)\|), \quad \sigma(t) \in \mathcal{P} \quad (2-25)$$

结合式(2-21)和(2-25), 能计算得到

$$\underline{\beta}(\|z(t)\|) \leq \psi(t) \bar{\beta}(\|z(0)\|) \quad (2-26)$$

根据式(2-24)和(2-26), 可以获得

$$\begin{aligned} \|z(t)\| & \leq \underline{\beta}^{-1}(\psi(t) \bar{\beta}(\|z(0)\|)) \\ & \leq \underline{\beta}^{-1}(\exp(\delta + \delta_1 - \rho_{mn}(0,t)) \bar{\beta}(\|z(0)\|)) \end{aligned} \quad (2-27)$$

基于定义 1.2 和式(2-27), 可以推出 $\|z(t)\|$ 随着 t 的增加而减小, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t)\| \rightarrow 0$ 。

然后, 可结论 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}_{0k}^{(i)}(t)| \rightarrow 0$, 证明完毕。

注 2.3: 因为本章提出的拓扑切换规则是基于假设 2.2 和式(2-8)中少保守性的条件, 而不是基于驻留时间和平均驻留时间条件, 所以现有算法很难扩展解决本章研究的领导跟随一致性控制问题。为了攻克这个挑战问题, 本章给出了一个新的解决路线: 首先为跟随者智能体设计分布式切换观测器(2-3)重构领导者智能体的状态信息, 然后把该问题转化为切换系统的镇定问题。该技术路线的关键就是设计出切换观测器(2-3)。同时, 由于不是所有切换拓扑都包含以领导者为根节点的有向生成树, 所以本部分选用多李亚普诺夫函数方法去完成切换观测器有效性的证明。根据式(2-16)可以发现, 当具有生成树的切换拓扑驻留期间, 在式(2-9)中, 类李亚普诺夫函数能量减小, 而当无生成树的切换拓扑驻留期间, 函数能量可能增加。但在本章提出的拓扑切换规则约束下, 能保证整个运行时间上函数能量总和是减小的。因此, 保证了分布式切换观测器的有效性。

2.4 分布式状态反馈一致性控制器设计

本部分将呈现本章的主要结果，也就是说，为跟随者智能体设计分布式控制器，使得所有智能体的对应状态实现一致性。在呈现主要结果之前，首先，基于分布式切换观测器(2-3)，选取如下一个状态变换

$$\bar{\eta}_{ij} = x_{ij} - \hat{x}_{0j}^{(i)}; \quad j \in \mathbb{N}_{1:n} \quad (2-28)$$

然后，根据式(2-1)和(2-28)，可获得如下一个非线性切换系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{\eta}}_{ik} = \bar{\eta}_{i,k+1} + \tilde{f}_k^{(i)} - q[e_k^{(i)}]_{\sigma(t)}; & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{\bar{\eta}}_{in} = u_i + \tilde{f}_n^{(i)} - q[e_n^{(i)}]_{\sigma(t)} \end{cases} \quad (2-29)$$

其中 $\tilde{f}_j^{(i)} = f_j(\bar{x}_{ij}) - f_j(\hat{x}_{0j}^{(i)})$ 。

很显然，通过引入分布式切换观测器(2-3)和状态变换(2-28)，本章考虑的领导跟随一致性问题转化为非线性切换系统(2-29)的镇定问题。也就是说，如果设计一个控制器能保证切换系统(2-29)的镇定性，那么该控制器也能使得智能体的对应状态获得一致。因此，在下面部分，将为切换系统(2-29)设计控制器。

本章的主要结果总结成如下一个定理。

定理 2.2: 在假设 2.1-2.3，如果为跟随者 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计基于分布式切换观测器(2-3)的状态反馈控制器：

$$u_i = -\sum_{j=1}^n L_i^{n-j+1} k_{ij} \bar{\eta}_{ij} \quad (2-30)$$

$$\dot{L}_i(t) = \max\{0; -\alpha_{i1} L_i^2 + \alpha_{i2} L_i\}; \quad L_i(0) \geq 1 \quad (2-31)$$

其中 α_{i1} 和 α_{i2} 是设计在式(2-41)中的正常数， k_{ij} 定义在引理 2.2；那么所有智能体的对应状态可实现一致。

证明： 定义如下两个向量

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(i)} &= [\tilde{f}_1^{(i)}, \tilde{f}_2^{(i)}, \dots, \tilde{f}_n^{(i)}]^T \\ [\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)} &= [[e_1^{(i)}]_{\sigma(t)}, [e_2^{(i)}]_{\sigma(t)}, \dots, [e_n^{(i)}]_{\sigma(t)}]^T \end{aligned}$$

把式(2-30)代入式(2-29)，然后可以得到

$$\dot{\bar{\eta}}_i = A_{i0} \bar{\eta}_i + \tilde{f}^{(i)} - q[\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)}; \quad \sigma(t) \in \mathcal{P} \quad (2-32)$$

其中 $A_{i0} = L_i C_{i2} \bar{A}_i C_{i2}^{-1}$ ， $C_{i1} = \text{diag}\{1, L_i, \dots, L_i^{n-1}\}$ ， $C_{i2} = L_i^{\zeta_i} C_{i1}$ ， \bar{A}_i 和 ζ_i 定义在引理 2.2。

对向量 $\bar{\eta}_i$ ，取如下一个状态变换：

$$\eta_i = C_{i2}^{-1} \bar{\eta}_i \quad (2-33)$$

结合式(2-32)和(2-33)，计算可得

$$\dot{\eta}_i = L_i \bar{A}_i \eta_i - \frac{\dot{L}_i}{L_i} (\zeta_i I_n + D_i) \eta_i + C_{i2}^{-1} (\tilde{f}^{(i)} - q[\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)}) \quad (2-34)$$

为分析系统(2-34)的稳定性, 选择如下李亚普诺夫函数

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \eta_i^T P_i \eta_i \quad (2-35)$$

其中 P_i 是一个对称正定矩阵, 且其定义在引理 2.2。

根据式(2-34)和(2-35), 能得到 V_1 的导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = \sum_{i=1}^N & \left(L_i \eta_i^T (\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i) \eta_i - \frac{\dot{L}_i}{L_i} \eta_i^T (D_i P_i + P_i D_i + 2\zeta_i P_i) \eta_i \right. \\ & \left. + 2\eta_i^T P_i C_{i2}^{-1} \tilde{f}^{(i)} - 2\eta_i^T P_i C_{i2}^{-1} q[\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)} \right) \end{aligned} \quad (2-36)$$

利用引理 2.2 和式(2-36), 经计算可以获得

$$\begin{aligned} & L_i \eta_i^T (\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i) \eta_i \leq -\theta_i L_i \eta_i^T \eta_i \\ & - \frac{\dot{L}_i}{L_i} \eta_i^T (D_i P_i + P_i D_i + 2\zeta_i P_i) \eta_i \\ & \leq -\zeta_i \frac{\dot{L}_i}{L_i} \eta_i^T P_i \eta_i \leq \alpha_{i1} \zeta_i \|P_i\| L_i \eta_i^T \eta_i - \alpha_{i2} \zeta_i \eta_i^T P_i \eta_i \end{aligned} \quad (2-37)$$

基于假设 2.3, 引理 1.1 和式(2-36), 可以计算出

$$\begin{aligned} 2\eta_i^T P_i C_{i2}^{-1} \tilde{f}^{(i)} & \leq \nu_i \|P_i\| \eta_i^T \eta_i + \frac{\|P_i\|}{\nu_i} \|C_{i2}^{-1} \tilde{f}^{(i)}\|^2 \\ & \leq \nu_i \|P_i\| \eta_i^T \eta_i + \frac{\bar{\gamma} \|P_i\|}{\nu_i} \eta_i^T \eta_i \\ & \leq \bar{\nu}_i \eta_i^T P_i \eta_i \end{aligned} \quad (2-38)$$

其中 $\bar{\nu}_i$ 定义为 $\bar{\nu}_i = \frac{\|P_i\|}{\lambda_{\min}(P_i)} \left(\nu_i + \frac{\bar{\gamma}}{\nu_i} \right)$, ν_i 和 $\bar{\gamma}$ 是合适的正常数。

根据引理 1.1 和式(2-36), 能够获得

$$\begin{aligned} -2q\eta_i^T P_i C_{i2}^{-1} [\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)} & \leq \epsilon_i \eta_i^T \eta_i + \frac{q^2 \|P_i\|^2}{\epsilon_i} \|[\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)}\|^2 \\ & \leq \bar{\epsilon}_i \eta_i^T P_i \eta_i + \frac{q^2 \|P_i\|^2}{\epsilon_i} \|[\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)}\|^2 \end{aligned} \quad (2-39)$$

其中 $\bar{\epsilon}_i$ 定义为 $\bar{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_i}{\lambda_{\min}(P_i)}$, ϵ_i 表示合适的正常数。

把式(2-37)和(2-39)代入式(2-36), 可以得到

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left(-\bar{\alpha}_{i1} L_i \eta_i^T \eta_i - \bar{\alpha}_{i2} \eta_i^T P_i \eta_i + \frac{q^2 \|P_i\|^2}{\epsilon_i} \|[\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)}\|^2 \right) \quad (2-40)$$

其中 $\bar{\alpha}_{i1} = \theta_i - \alpha_{i1} \zeta_i \|P_i\|$ 和 $\bar{\alpha}_{i2} = \alpha_{i2} \zeta_i - \bar{\epsilon}_i - \bar{\nu}_i$ 。

为保证式(2-40)中的 $\bar{\alpha}_{i1} > 0$ 和 $\bar{\alpha}_{i2} > 0$ ，选取 α_{i1} 和 α_{i2} 满足如下不等式

$$\alpha_{i1} < \frac{\theta_i}{\varsigma_i \|P_i\|}, \quad \alpha_{i2} > \frac{\bar{\epsilon}_i + \bar{\nu}_i}{\varsigma_i} \quad (2-41)$$

很容易证实，如下不等式成立

$$-\sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_{i2} \eta_i^T P_i \eta_i \leq -\chi V_1 \quad (2-42)$$

其中 $\chi = \min \{\bar{\alpha}_{i2} \mid i \in \mathbb{N}_{1:N}\}$ 。

定义如下一个向量

$$[\bar{e}_i]_{\sigma(t)} = \left[[e_i^{(1)}]_{\sigma(t)}, [e_i^{(2)}]_{\sigma(t)}, \dots, [e_i^{(N)}]_{\sigma(t)} \right]^T$$

结合引理 1.2，式(2-5)，(2-7)和(2-27)，能够得到

$$\sum_{i=1}^N \frac{q^2 \|P_i\|^2}{\epsilon_i} \left\| [\bar{e}^{(i)}]_{\sigma(t)} \right\|^2 \leq \mathcal{G} \sum_{i=1}^n \left\| [\bar{e}_i]_{\sigma(t)} \right\|^2 \leq \mathcal{G} \sum_{i=1}^n \left\| \mathcal{H}_{\sigma(t)} z_i \right\|^2 \leq \bar{\mathcal{G}} \|z\|^2 \leq \bar{\mathcal{G}} \left(\underline{\beta}^{-1}(t) \right)^2 \quad (2-43)$$

其中 \mathcal{G} ， $\bar{\mathcal{G}}$ 和 $\underline{\beta}^{-1}(t)$ 定义为

$$\mathcal{G} = \max \left\{ \frac{q^2 \|P_i\|^2}{\epsilon_i} \mid i \in \mathbb{N}_{1:N} \right\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \max \left\{ \left\| \mathcal{H}_{\sigma(t)} \right\|^2 \mid \sigma(t) \in \mathcal{P} \right\}$$

$$\underline{\beta}^{-1}(t) = \underline{\beta}^{-1} \left(\exp(\delta + \delta_1 - \rho_{mm}(0, t)) \bar{\beta}(\|z(0)\|) \right)$$

基于定义 1.2，可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{\beta}^{-1}(t) \rightarrow 0$ 。很显然，存在一个正常数 $\hat{\beta}$ ，使得 $\underline{\beta}^{-1}(t) \leq \hat{\beta}$ 。

然后把式(2-41)-(2-43)代入式(2-40)，可以获得

$$\dot{V}_1 \leq -\chi V_1 + \bar{\mathcal{G}} \hat{\beta}^2 \quad (2-44)$$

利用式(2-44)，计算能够得到

$$V_1 \leq V_1(0) e^{-\chi t} + \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\chi} \hat{\beta}^2 \quad (2-45)$$

根据式(2-35)和(2-45)，能够获得

$$\left\| \eta_i(t) \right\|^2 \leq \frac{V_1(0)}{\lambda_{\min}(P_i)} e^{-\chi t} + \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\chi \lambda_{\min}(P_i)} \hat{\beta}^2 \quad (2-46)$$

结合式(2-33)和(2-46)，可以计算出

$$\bar{\eta}_{ij}^2(t) \leq \frac{V_1(0) L_i^{2(j-1+\varsigma_i)}}{\lambda_{\min}(P_i)} e^{-\chi t} + \frac{\bar{\mathcal{G}} L_i^{2(j-1+\varsigma_i)}}{\chi \lambda_{\min}(P_i)} \hat{\beta}^2 \quad (2-47)$$

其中 $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 和 $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 。

由于 $L_i(t)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 是有界的，然后根据式(2-47)，能够得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\bar{\eta}_{ij}(t)| \rightarrow \varrho_0$ ，

其中 ϱ_0 是一个可调的常数, 且满足 $\varrho_0^2 \leq \frac{\bar{g}\hat{L}_{ij}\hat{\beta}^2}{\chi\lambda_{\min}(P_i)}$, $\hat{L}_{ij} \geq L_i^{2(j-1+\varsigma_i)}$ 是一个合适的正常数。

根据式(2-4)和(2-28), 能够得到

$$|x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| = |\bar{\eta}_{ij}(t) + \tilde{x}_{0j}^{(i)}(t)| \leq |\bar{\eta}_{ij}(t)| + |\tilde{x}_{0j}^{(i)}(t)|$$

然后结合定理 2.1, 能够结论 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow \varrho_0$ 。证明完毕。

注 2.4: 根据定理 2.1, 可以推出在 $t \in [0, +\infty)$ 上, 观测一致性状态误差 $[e_j^{(i)}]_{\sigma(t)}$ 是有界的, 并且它随着 $t \rightarrow +\infty$ 收敛至零。因此, 能够采用共同李亚普诺夫函数方法证明切换系统(2-29)的镇定性。跟随者 i 的控制器(2-30)主要是由式(2-31)中的动态增益 $L_i(t)$ 和跟随者 i 及其邻居观测器(2-3)的状态构成, 它不直接依赖切换信号 $\sigma(t)$, 且是一阶可导的。对比相关结果, 该算法能极大的减轻控制器的抖振。此外, 根据式(2-31), 能够得到 $L_i(t)$ 是一个非减的有界函数, 且满足 $1 \leq L(t) \leq L_{im} = \max \left\{ \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1}}, L(0) \right\}$ 。

注 2.5: 如果集合 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的所有增广切换拓扑都是无向的, 且是连通的, 那么领导者输入信号的假设条件可以放松为 $|u_0(t)| \leq \delta_0$, 其中 δ_0 是一个非负常数, 并且仅有部分跟随者能够获得它。如此条件下, 只需在式(2-3)中的每个动态等式右边, 增加一项 $\bar{q}\text{sign}([e_j^{(i)}]_{\sigma(t)})$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$, 其中 \bar{q} 表示一个设计的正常数。然后, 在式(2-9)中, 重新选择一个类李亚普诺夫函数为 $V_{0t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H}_i z_i$ 。最后, 通过简单修改本章的算法及其证明, 就能获得与定理 2.1-2.2 相似的结果。

注 2.6: 相比基于驻留时间条件^[22,26-28,40,45]和平均驻留时间条件^[136-139]的拓扑切换规则, 本章提出了更灵活的拓扑切换规则, 能够放松切换次数需为运行区间的仿射函数限制, 允许拓扑切换频率是时变的。同时, 本章考虑了在集合 $\bar{\mathcal{G}}$ 中, 部分切换拓扑可能不含以领导者为根节点的有向生成树情况。并在此情况下, 设计了基于灵活规则切换的分布式观测器重构领导者智能体的状态。同时, 提出了一种基于分布式切换观测器的状态反馈一致性控制算法。该算法放松了现有结果中关于领导者系统非线性项的严格假设条件, 并有效的改善了现有控制器存在的抖振问题。同时, 本结果也丰富了相关领域的研究理论。

2.5 数值仿真

为了验证本章提出的状态反馈一致性算法有效性, 本部分将考虑 5 个单连杆机械臂。基于工作[142], 单连杆机械臂 i , $i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的动力学模型为

$$\underline{M}_i \ddot{q}_i + \frac{1}{2} m_i g l_i \sin(q_i) = \tau_i + \omega_{id}; \quad i \in \mathbb{N}_{0:4} \quad (2-48)$$

其中 q_i , \dot{q}_i , \ddot{q}_i , m_i , l_i 和 τ_i 分别表示连杆的角位置, 角速度, 角加速度, 质量, 长度和控制力矩; \underline{M}_i 表示惯性矩阵, $g = 9.81$ 表示重力加速度, ω_{id} 表示作用在机械臂的外部干扰。通过定义 $\omega_{id} = 0$, $x_{i1} = q_i$, $x_{i2} = \dot{q}_i$ 和 $u_i = \tau_i$, (2-48) 可以重新写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = \frac{1}{\underline{M}_i} u_i - \frac{m_i g l_i}{2 \underline{M}_i} \sin(x_{i1}) \end{cases} \quad (2-49)$$

其中可以选取 $l_i = 0.4$, $m_i = 0.5$, $\underline{M}_i = 1$ 。

很容易能证实, 系统(2-49)满足假设 2.3 中的条件。

这些智能体之间通信关系刻画为满足假设 2.1 的切换拓扑, 见图 2-1。切换拓扑集描述为 $\bar{\mathcal{G}} = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3\}$, 且 $\bar{\mathcal{G}}_s = \{\mathcal{G}_1\}$ 和 $\bar{\mathcal{G}}_u = \{\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3\}$ 。切换信号 $\sigma(t) \in \mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$ 。取 $\mathcal{G}_1 \Rightarrow \{[b_1]_1 = 1, [a_{21}]_1 = 1, [a_{32}]_1 = 1, [a_{42}]_1 = 1\}$, $\mathcal{G}_2 \Rightarrow \{[a_{23}]_2 = 1, [a_{31}]_2 = 1\}$, $\mathcal{G}_3 \Rightarrow \{[b_4]_3 = 1\}$ 。

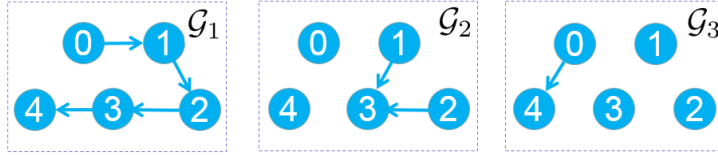


图 2-1 切换拓扑图

Fig.2-1 The switching topology

通过取 $\varpi_1 = 0.34$, 根据引理 2.1 可获得 Ψ_1 。然后取 $q = 10$ 和 $\bar{\lambda}_1 = 0.34$ 。通过定义 $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3$, 选择 $\bar{\lambda}_2 = 19.3$ 和 $\bar{\lambda}_3 = 13.1$ 。选取 $\bar{T}_{1[S]} = 0.1$, $\bar{T}_{2[U]} = 5$, $\bar{T}_{3[U]} = 4$ 。

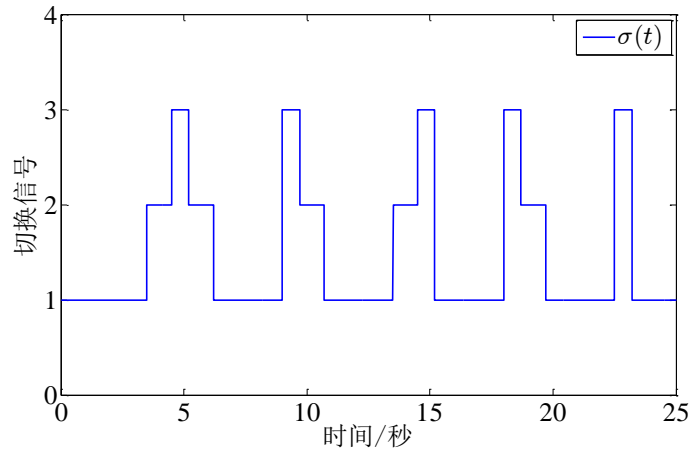


图 2-2 拓扑切换信号 $\sigma(t)$

Fig.2-2 The topology switching signal $\sigma(t)$

对所有的 $m, n \in \mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$, 可选取 $\mu_{mn} = 1$, $\bar{M}_{mn} = 1$, $\rho_{mn}(r, s) = 0.02s^{1.5} + 0.03s$, $\rho_{[S]}(r, s) = 0.035s^{1.5} + 0.2059s$, $\rho_{2[U]}(r, s) = 0.002s$, $\rho_{3[U]}(r, s) = 0.0024s$ 。然后能找到函数 $\rho(r, s) = 0.0119s^{1.5}$ 和常数 $\delta_1 = 2$ 满足式(2-8)中的条件。一个符合条件的拓扑切换信号呈现在图 2-2。

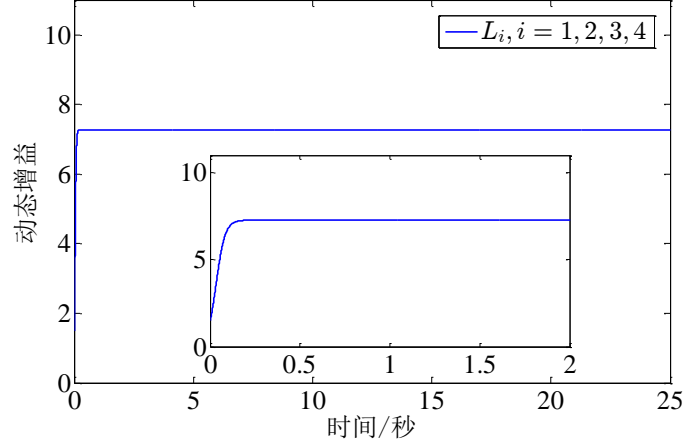


图 2-3 动态增益 $L_i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.2-3 The responses of the dynamic gains $L_i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

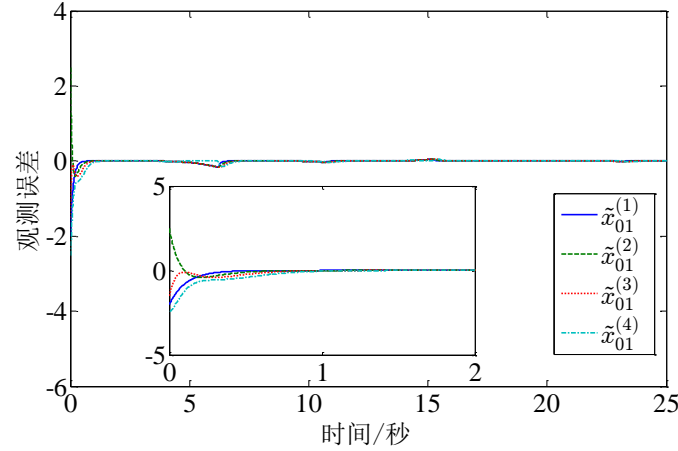


图 2-4 观测误差 $\tilde{x}_{01}^{(i)}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.2-4 The responses of observed errors $\tilde{x}_{01}^{(i)}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

对 $i \in \mathbb{N}_{1:4}$, 取 $K_i = [1, 2]^T$, $\theta_i = 1.5$, $\varsigma_i = 0.2$, $\bar{\varsigma}_i = 10$, 然后根据引理 2.2, 能得到 P_i 。选取 $\eta_i = 1$, $\nu_i = 1$, $\alpha_{i1} = 5.5$ 和 $\alpha_{i2} = 40$ 。

初始值可选为: $x_{01}(0) = 0.01$, $x_{02}(0) = 0.01$, $x_{11}(0) = 1$, $x_{12}(0) = 2$, $x_{21}(0) = -3.5$, $x_{22}(0) = 1.5$, $x_{31}(0) = 1.5$, $x_{32}(0) = -2$, $x_{41}(0) = -1$, $x_{42}(0) = -0.5$, $\hat{x}_{01}^{(1)}(0) = -2$, $\hat{x}_{02}^{(1)}(0) = -2$, $\hat{x}_{01}^{(2)}(0) = 2.5$, $\hat{x}_{02}^{(2)}(0) = -3$, $\hat{x}_{01}^{(3)}(0) = -1.5$, $\hat{x}_{02}^{(3)}(0) = 1.5$, $\hat{x}_{01}^{(4)}(0) = -2.5$, $\hat{x}_{02}^{(4)}(0) = -2$, $L_i(0) = 1.5$ 。仿真结果如图 2-3 至图 2-9 所示。

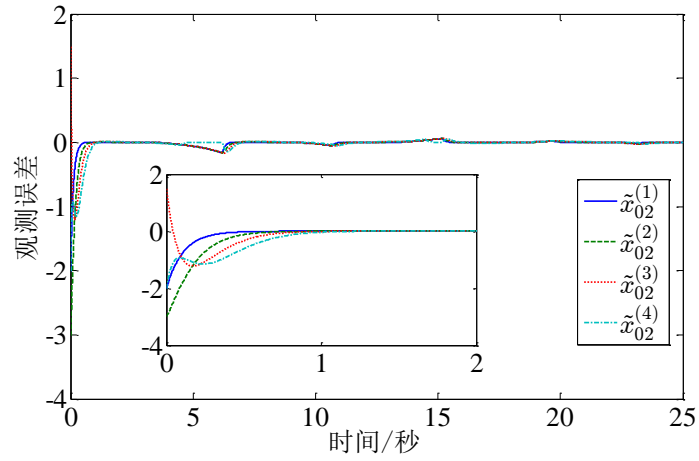


图 2-5 观测误差 $\tilde{x}_{02}^{(i)}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.2-5 The responses of observed errors $\tilde{x}_{02}^{(i)}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

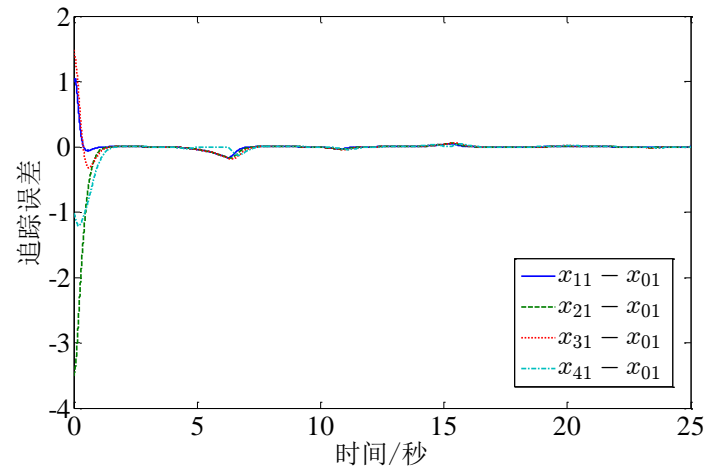


图 2-6 追踪误差 $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.2-6 The responses of tracking errors $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

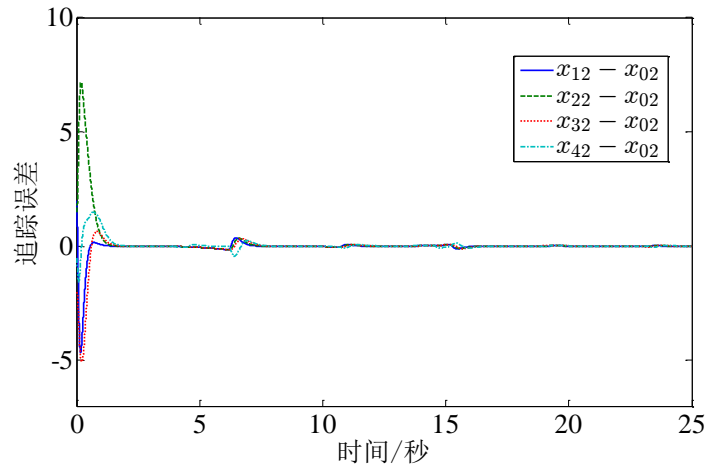


图 2-7 追踪误差 $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.2-7 The responses of tracking errors $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

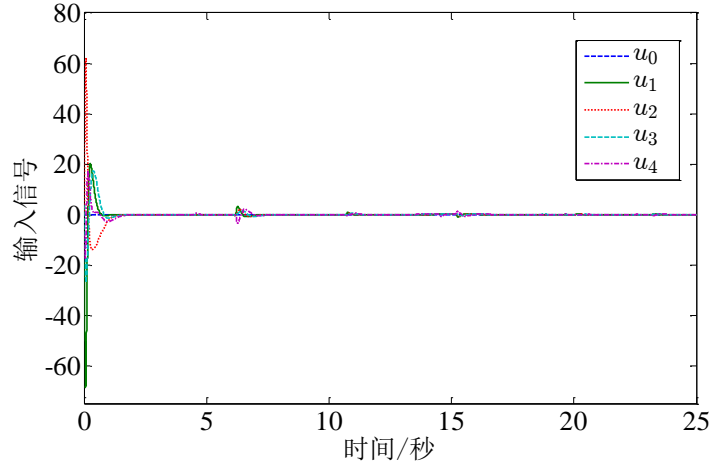

 图 2-8 输入信号 $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

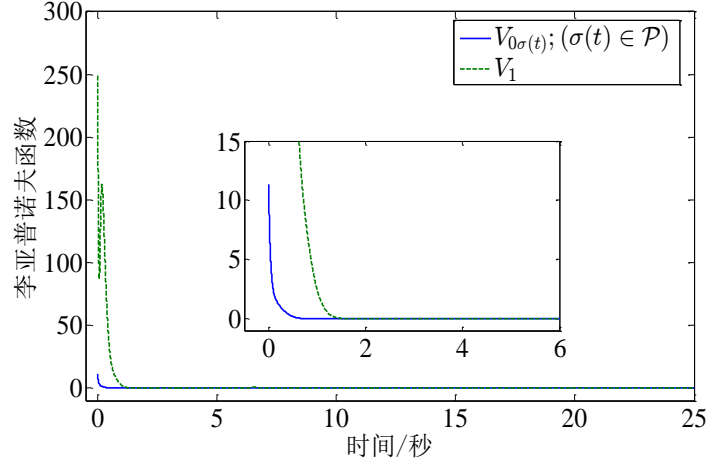
 Fig.2-8 The responses of input signals $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

 图 2-9 李亚普诺夫函数 $V_{0\sigma(t)}, \sigma(t) \in \mathcal{P}$ 和 V_1 的响应

 Fig.2-9 The responses of Lyapunov functions $V_{0\sigma(t)}, \sigma(t) \in \mathcal{P}$ and V_1

基于图 2-3，能够发现 $L_i(t)$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 是非减的有界函数；图 2-4 和图 2-5 说明了分布式观测器(2-3)的有效性；图 2-6 和图 2-7 表明实现了领导跟随一致性；根据图 2-8，可发现控制信号是有界的；图 2-9 给出了李亚普诺夫函数的响应曲线。基于以上仿真结果，可以结论本章提出的状态反馈一致性控制算法是有效的。

2.6 本章小结

本章在变频切换拓扑图下，为一类非线性多智能体系统提出了一种领导跟随状态反馈一致性控制策略。考虑了部分切换拓扑不包含以领导者智能体为根节点的有向生成树情况，并提出了优于传统平均驻留时间条件的拓扑切换规则。该规则放松了拓扑切换次数为运行区间的仿射函数限制，允许拓扑变频切换。同时，在该规则

下，设计了分布式切换观测器重构领导者状态，并给出了该观测器有效性的充分条件。随后，用动态增益控制方法，为跟随者设计了一阶可导的类线性控制器，改善了现有控制器的抖振问题，并严格证明了此控制器能使得所有智能体的对应状态实现一致性。由于移动智能体存在的外部环境复杂多变，可能致使其面临诸多的不确定性，所以未来的工作将把该算法推广到具有未知参数和随机干扰的非线性多智能体系统。

第3章 已知时变输入滞后非线性多智能体系统状态反馈一致性控制

3.1 引言

在实际控制系统中,由于决策和信号处理需要花费时间,时滞是不可避免的,它是系统不稳定或性能下降的一个主要因素。对于具有输入时滞的单系统,现有的研究主要集中在系统的镇定或稳定性分析上。例如,文献[143]研究了具有时变输入时滞的线性系统的伪预测反馈镇定问题。针对具有输入时滞和输出扰动的线性系统,文献[144]设计了自适应控制算法。文献[145]研究了具有未知输入延迟的线性系统,提出了全局自适应控制策略。针对具有输入时滞的非线性系统,文献[146]提出了截断预测输出反馈控制算法。然而,由于多智能体系统一致性控制需要考虑彼此之间的通信关系,所以针对单系统控制算法很难直接扩展到多智能体系统。

文献[61,75,63]分别聚焦在具有输入时滞的双积分器、线性、非线性多智能体系统,并从不同角度提出了优秀的无领导者一致性控制算法。但是这些算法对解决领导跟随一致性问题不再适用。近年来,一些学者针对此问题展开了系列研究。例如,文献[60]首先为跟随者设计了固定时间分布观测器估计领导者的状态信息,然后利用 Artstein 简约变换将时滞误差系统转化为无时滞的二阶系统,最后提出了基于非奇异终端滑模的领导跟随固定时间一致性控制协议。鉴于此模型是双积分器多智能体系统,且其输入时滞考虑为一个定常数,文献[62]研究了具有时变输入滞后的高阶非线性多智能体系统,并提出了分布式可靠控制器,随后利用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理,得到了实现领导跟随一致性的充分条件。然而,该结果假定了智能体的输入时滞是彼此相同的时变函数,同时也假定了领导者智能体系统的输入信号恒为零。从实际角度看,每个智能体有自己的网络通信渠道,其输入时滞很难保证完全相同。同时,领导者的输入信号并非恒为零。如何进一步放松这些严格条件并设计出合理可行的领导跟随一致性控制协议是一个有待突破的问题。

通过以上讨论,本章研究了一类具有已知不同时变输入时滞的非线性多智能体系统领导跟随状态反馈一致性控制问题。与现有研究结果相比,本章的主要贡献归纳为以下几个方面。首先,每个智能体的输入时滞描述为彼此不同的已知时变函数,

并且领导者的输入信号可以是未知有界时变函数，同时允许部分跟随者无法获得领导者的输入信号。在这些条件下，利用断截预测控制方法，提出了一个新颖的状态反馈一致性控制算法。其次，为每个跟随者设计了一个分布式有限时间观测器，用来估计具有高阶非线性动态的领导者系统状态信息。然后，通过引入合适的状态变换，领导跟随状态一致性控制问题被转化为单个非线性系统镇定问题。最后，基于 L-K 泛函分析方法，发展了基于分布式有限时间观测器的状态反馈一致性控制协议，该协议仅依赖于相关的状态信息，并且给出了实现多智能体系统领导跟随状态一致性的充分条件。

3.2 预备知识和问题描述

3.2.1 预备知识

拓扑理论知识已经描述在 1.4.1。本章考虑通信拓扑，满足如下一个假设条件

假设 3.1^[91]: 拓扑图 $\check{\mathcal{G}}$ 是无向固定的，其增广拓扑图 \mathcal{G} 是连通的。

定义 3.1^[147]: 考虑如下一个非线性系统

$$\dot{x} = f(t, x)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $f(\cdot)$ 是一个连续函数满足 $f(t, 0) = 0$ 。如果该系统是李亚普诺夫稳定，并且对任意的初始条件 $x(t_0) = x_0$ ，其所有解都满足 $\lim_{t \rightarrow T} x(t, x_0) = 0$ 和 $x(t, x_0) = 0, t > T$ ，

T 表示设置时间，那么称该系统的平衡点是全局有限时间稳定的，

引理 3.1^[147]: 对定义 3.1 中的系统，如果存在一个连续且无界的正函数 $V(x)$ ，使得如下不等式成立

$$\dot{V}(x) \leq -kV^\sigma(x)$$

其中 $k > 0$ 和 $0 < \sigma < 1$ ，则称此系统的平衡点是全局有限时间稳定的。

引理 3.2^[146]: 对任意正定矩阵 Ψ ，存在一个非负常数 ω ，使得如下等式成立

$$e^{A^T t} \Psi e^{At} - e^{\omega t} \Psi = -e^{\omega t} \int_0^t e^{-\omega \tau} e^{A^T \tau} R e^{A \tau} d\tau$$

其中 $R = -A^T \Psi - \Psi A + \omega \Psi$ ；如果 R 是一个正定矩阵，那么可得到 $e^{A^T t} \Psi e^{At} \leq e^{\omega t} \Psi$ ；在本章中，矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.2 问题描述

在本章，研究了基于分布式有限时间观测器的已知输入滞后非线性多智能体系统领导跟随状态反馈一致性控制问题。考虑由编号为0的一个领导者和编号为1...N的N个跟随者组成的N+1个智能体。智能体*i*， $i \in \mathbb{N}_{0:N}$ 的已知输入滞后非线性动力学模型呈现如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_{ik}(t) = x_{i,k+1}(t) + f_k(\bar{x}_{ik}(t)); k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{x}_{in}(t) = u_i(\phi_i(t)) + f_n(\bar{x}_{in}(t)) \end{cases} \quad (3-1)$$

其中 $x_{ij}(t) \in \mathfrak{R}$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ ， $u_i(t) \in \mathfrak{R}$ 和 $y_i(t) \in \mathfrak{R}$ 分别表示智能体*i*的状态变量，控制输入和输出； $\bar{x}_{ij} = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}]^T \in \mathfrak{R}^j$ ；智能体*i*状态信息可测量获得； $f_j(\bar{x}_{ij}): \mathfrak{R}^j \rightarrow \mathfrak{R}$ 是一个确定连续函数，且满足 $f_j(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ； $\phi_i(t)$ 是一个可微函数，且满足 $\phi_i(t) = t - d_i(t)$ ， $d_i(t)$ 表示已知的时变时滞。

注 3.1： 系统(3-1)能描述许多真实物理系统的动力学模型，如考虑输入时滞的单连杆机械臂和倒立摆系统。尽管现有的结果从不同角度提出了一些具有输入时滞的非线性多智能体系统领导跟随一致性控制策略，但大部分结果都假设了智能体的输入时滞是彼此相同，且描述为一个常数或时变函数，同时，这些工作也假设了领导者智能体的输入信号是零。很显然，从实际角度看，这些假设条件相对保守。因此，本章将放松这些严格假设条件，并针对非线性多智能体系统，提出一个新的领导跟随状态反馈一致性控制算法。

这N+1个智能体之间的通信关系是由无向固定拓扑刻画，已描述在章节 1.4.1 中，并满足假设 3.1 中的条件。智能体的状态信息能基于此拓扑进行传输。基于文献 [91]可以知道，在假设 3.1 下，拓扑矩阵 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}$ 是一个实对称正定矩阵，并且其所有特征值都是正实数。

为了提出分布式一致性控制器，需要对系统(3-1)作如下必要的假设。

假设 3.2： 对 $d_i(t)$ 和 $\phi_i(t)$ 的导数，存在常数 h_i 和 β_i ，使得

$$0 \leq d_i(t) \leq h_i, \quad 0 < \beta_i \leq \dot{\phi}_i(t) < +\infty$$

假设 3.3: 对任意向量 $\bar{x}_{ij} \in \mathfrak{R}^j$ 和 $\bar{y}_{ij} \in \mathfrak{R}^j$, 存在一个非负常数 γ_j , 使得

$$|f_j(\bar{x}_{ij}) - f_j(\bar{y}_{ij})| \leq \gamma_j \|\bar{x}_{ij} - \bar{y}_{ij}\|$$

假设 3.4: 领导者的控制输入信号是有界的, 也就是说 $|u_0(\phi_0)| \leq \sigma_0$, 其中 σ_0 是一个非负常数。

注 3.2: 假设 3.2 是关于输入时滞的一个标准条件, 见文献[143]。本章把智能体的输入时滞描述为彼此不同的时变函数, 而不是彼此相同的常数或时变函数, 所以相比现有结果, 此条件具有较少的保守性。同时, 根据假设 3.2, 能得到预测时间 $\phi_i^{-1}(t) - t$ 是有界的, 且满足 $0 \leq \phi_i^{-1}(t) - t \leq h_i$ 。假设 3.3 是关于系统非线性项的一个标准条件, 见文献[63]; 单连杆机械臂和倒立摆等实际系统的非线性特性都满足此条件。假设 3.4 是一个关于领导者输入信号的条件, 见文献[21]; 它允许领导者输入为时变函数, 而现有结果要求它必须是零, 所以假设 3.4 中的条件具有较少的保守性。

目标: 本章目标是为跟随者设计分布式控制器, 使得所有智能体的对应状态获得一致性。也就是说, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow 0$, $i \in \mathbb{N}_{1:N}$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

3.3 分布式有限时间观测器设计

由于不是所有的跟随者都能够获得领导者的状态信息, 所以本部分将为跟随者设计分布式有限时间观测器重构领导者的状态信息。在给出此观测器之前, 首先为跟随者 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$, 定义其观测状态一致性误差:

$$e_k^i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{x}_{0k}^j - \hat{x}_{0k}^i) + b_i (x_{0k} - \hat{x}_{0k}^i) \quad (3-2)$$

其中 a_{ij} 和 b_i , $i, j \in \mathbb{N}_{1:N}$ 描述在章节 1.4.1

然后根据式(3-2), 跟随者 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 的有限时间观测器设计为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{0k}^i = \hat{x}_{0,k+1}^i + \alpha_k \text{sign}(e_k^i) + q e_k^i + f_k(\bar{x}_{0k}^i); & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{\hat{x}}_{0n}^i = \alpha_n \text{sign}(e_n^i) + q e_n^i + f_n(\bar{x}_{0n}^i) \end{cases} \quad (3-3)$$

其中 \hat{x}_{0j}^i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 表示该有限时间观测器的状态变量; α_j , $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 和 q 表示设计的正常数; $\bar{x}_{0j}^i = [\hat{x}_{01}^i, \hat{x}_{02}^i, \dots, \hat{x}_{0j}^i]^T \in \mathfrak{R}^j$; $\text{sign}(\cdot)$ 表示一个符号函数。

本部分的主要结果可总结为如下一个定理。

定理 3.1: 在假设 3.1-3.4 下, 为跟随者 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计的有限时间观测器(3-3), 可在有限时间内精准地估计出领导者的状态信息。

证明: 定义观测误差为:

$$\tilde{x}_{0k}^i = \hat{x}_{0k}^i - x_{0k} \quad (3-4)$$

根据式(3-2)和(3-4)，能够推导出

$$e_k^i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\tilde{x}_{0k}^j - \tilde{x}_{0k}^i) - b_i \tilde{x}_{0k}^i \quad (3-5)$$

结合式(3-1)，(3-3)和(3-4)，可以得到

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{0k}^i = \tilde{x}_{0,k+1}^i + \alpha_k \text{sign}(e_k^i) + q e_k^i + \bar{f}_k^i; k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{\tilde{x}}_{0n}^i = \alpha_n \text{sign}(e_n^i) + q e_n^i + \bar{f}_n^i - u_0 \end{cases} \quad (3-6)$$

其中 $\bar{f}_j^i = f_j(\tilde{x}_{0j}^i) - f_j(\bar{x}_{0j})$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

定义如下两个向量

$$\begin{aligned} z_i &= [\tilde{x}_{0i}^1, \tilde{x}_{0i}^2, \dots, \tilde{x}_{0i}^N]^T \\ F_i &= [\bar{f}_i^1, \bar{f}_i^2, \dots, \bar{f}_i^N]^T, i \in \mathbb{N}_{1:n} \end{aligned} \quad (3-7)$$

利用式(3-6)和(3-7)，可计算出

$$\begin{cases} \dot{z}_k = z_{k+1} - \alpha_k \text{sign}(\mathcal{H}z_k) - q \mathcal{H}z_k + F_k; k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{z}_n = -\alpha_n \text{sign}(\mathcal{H}z_n) - q \mathcal{H}z_n + F_n - \mathbf{1}u_0 \end{cases} \quad (3-8)$$

其中 $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$; \mathcal{H} 表示拓扑矩阵，已定义在 1.4.1。

由于 \mathcal{H} 是对称正定矩阵，所以可为系统(3-8)，选择如下一个类李亚普诺夫函数

$$V_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} z_i \quad (3-9)$$

利用式(3-8)和(3-9)，可计算出 V_0 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= -\sum_{i=1}^n q z_i^T \mathcal{H} \mathcal{H} z_i + \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} z_{i+1} - \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} \alpha_i \text{sign}(\mathcal{H} z_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} F_i - z_n^T \mathcal{H} \mathbf{1} u_0 \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中 $z_{n+1} = 0$ 。然后根据式(3-10)，能够计算得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} z_{i+1} &\leq \varepsilon_1 \sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} \mathcal{H} z_i \\ -\sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} \alpha_i \text{sign}(\mathcal{H} z_i) &\leq -\sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathcal{H} z_i\|_1 \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中 ε_1 定义为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathcal{H}\mathcal{H})} \right)$$

结合假设 3.3, 引理 1.1 和式(3-10), 可以得到

$$\sum_{i=1}^n z_i^T \mathcal{H} F_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\|\mathcal{H} z_i\|^2 + \|F_i\|^2) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_2 z_i^T \mathcal{H} \mathcal{H} z_i \quad (3-12)$$

其中 ε_2 定义为

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\max \{ n \gamma_i^2 \mid i \in \mathbb{N}_{1:n} \}}{\lambda_{\min}(\mathcal{H}\mathcal{H})} \right)$$

利用假设 3.4 和式(3-10), 能够获得

$$-z_n^T \mathcal{H} \mathbf{1} u_0 \leq N \sigma_0 \|\mathcal{H} z_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n N \sigma_0 \|\mathcal{H} z_i\|_1 \quad (3-13)$$

其中 σ_0 定义在假设 3.4。

把式(3-11)-(3-13)代入式(3-10), 很容易地可得到

$$\dot{V}_0 \leq -\sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_i \|\mathcal{H} z_i\|_1 - \sum_{i=1}^n \varepsilon z_i^T \mathcal{H} \mathcal{H} z_i \quad (3-14)$$

其中 $\bar{\varepsilon}_i = \alpha_i - N \sigma_0$, $\varepsilon = q - \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 。

在式(3-3), 可以选择

$$\alpha_i > N \sigma_0, \quad q > \varepsilon_0 \quad (3-15)$$

能保证式(3-14)中的 $\bar{\varepsilon}_i > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 。

根据式(3-14)和(3-15), 可以计算出

$$\dot{V}_0 \leq -\sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_i \|\mathcal{H} z_i\|_1 \leq -\bar{\lambda} V_0^{\frac{1}{2}} \quad (3-16)$$

其中 $\bar{\lambda}$ 定义为 $\bar{\lambda} = 2 \left(\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{H}\mathcal{H})}{\|\mathcal{H}\|} \right)^{\frac{1}{2}} \min \{ \bar{\varepsilon}_i \mid i \in \mathbb{N}_{1:n} \}$ 。

利用引理 3.1 和式(3-16), 能够结论 $\lim_{t \rightarrow T} \tilde{x}_{0k}^i(t) = 0$, $k \in \mathbb{N}_{1:n}$ 和 $\tilde{x}_{0k}^i(t) = 0$, $t > T$ 。

定理 3.1 的证明完毕。

注 3.3: 有限时间观测器(3-3)能重构具有高阶非匹配非线性动态的领导者智能体的状态信息。而现有结果仅能重构高积分器或者匹配非线性领导者的状态信息。同

时, 智能体 i 的观测器仅依赖于邻居观测器状态信息和邻居领导者状态信息, 所以此观测器具有分布式特性。通过对跟随者设计此类分布式观测器, 能把一致性问题转化为传统的镇定问题。因此, 该观测器将在接下来进行的一致性分析和设计中起到重要的作用。值得说明的是, 设置时间 T 依赖于观测器的初始条件, 如果在(3-3)中每个动态等式右面增加一项 $\delta_i(e_j^i)^2 \text{sign}(e_j^i)$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$, 其中 δ_i 是一个正常数, 则(3-3)将成为固定时间观测器。此种情况下, 得到的设置时间 \bar{T} , 将不再依赖于观测器的初始条件。因为此做法是有限时间观测器的直接推广, 故不再呈现其细节证明。

3.4 分布式状态反馈一致性控制器设计

本部分将为跟随者设计分布式控制器, 使得所有智能体实现一致性。在给出控制器之前, 首先基于分布式有限时间观测器(3-3), 选取如下一个状态变换

$$\eta_{ij} = x_{ij} - \hat{x}_{0j}^i; \quad i \in \mathbb{N}_{1:n}, j \in \mathbb{N}_{1:n} \quad (3-17)$$

结合式(3-1), (3-3)和(3-17), 可以得到 η_{ij} 的导数:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{i,k+1} + \tilde{f}_k^i + d_k^i; & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{\eta}_{in} = u_i(\phi_i) + \tilde{f}_n^i + d_n^i \end{cases} \quad (3-18)$$

其中 $\tilde{f}_j^i = f_j(\bar{x}_{ij}) - f_j(\hat{x}_{0j}^i)$ 和 $d_j^i = -\alpha_j \text{sign}(e_j^i) - qe_j^i$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

然后, 定义如下两个向量

$$\begin{aligned} \tilde{f}^i &= [\tilde{f}_1^i, \tilde{f}_2^i, \dots, \tilde{f}_n^i]^T \\ d^i &= [d_1^i, d_2^i, \dots, d_n^i]^T \end{aligned}$$

随后, 式(3-18)可重新写为

$$\dot{\eta}_i = A\eta_i + Bu_i(\phi_i) + \tilde{f}^i + d^i \quad (3-19)$$

其中 A 定义在引理 3.2, $\tilde{f}^i = \tilde{f}^i(x_i, \hat{x}_0^i)$, $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T$, $\hat{x}_0^i = [\hat{x}_{01}^i, \dots, \hat{x}_{0n}^i]^T$, $d^i = d^i(e^i)$, $e^i = [e_1^i, \dots, e_n^i]^T$, $B = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ 。

很显然, 通过引入有限时间观测器(3-3)和状态变换(3-17), 本章考虑的领导跟随一致性问题转化成输入滞后非线性系统(3-19)的镇定问题。即如果设计一个控制器能保证该系统的镇定性, 那么此控制器也能使得智能体的对应状态实现一致性。因此, 下面部分将为该系统设计控制器。

本章的主要结果可总结为如下一个定理。

定理 3.2: 在假设 3.1-3.4 下, 如果存在常数 $\bar{\alpha}_i > 0$, $\omega \geq 0$ 和对称正定矩阵 P_i , 使得如下线性矩阵不等式成立

$$\begin{aligned}
 & \bar{\alpha}_i P_i^{-1} \geq BB^T \\
 & \left(A - \frac{1}{2} \omega I_n \right)^T + \left(A - \frac{1}{2} \omega I_n \right) < 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_i^{-1} A^T + A P_i^{-1} - 2BB^T + (3\bar{\alpha}_i^2 + 1) \epsilon_i I_n & P_i^{-1} \\ P_i^{-1} & -\frac{1}{\rho_i} I_n \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{3-20}$$

其中 $K_i = -B^T P_i$, $\rho_i = \frac{1}{\epsilon_i} (2\bar{\alpha}_i^2 h_i^2 e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1} + h_i^2 e^{\omega h_i} n \bar{\gamma}^2 + 2n \bar{\gamma}^2)$, $\bar{\gamma} = \max \{ \gamma_j | j \in \mathbb{N}_{1:n} \}$, ϵ_i 是一个正常数, 那么通过为跟随者 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计基于观测器(3-3)的状态反馈控制器

$$u_i(t) = K_i e^{A(\phi_i^{-1}(t)-t)} \eta_i(t) \tag{3-21}$$

可使所有智能体的对应状态实现一致性。

证明: 把式(3-21)代入式(3-19), 并利用断截预测控制方法, 能够得到

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_i(t) &= A \eta_i(t) + B K_i e^{A(t-\phi_i(t))} \eta_i(\phi_i(t)) + \tilde{f}^i(x_i(t), \hat{x}_0^i(t)) + d^i(e^i(t)) \\
 &= (A + B K_i) \eta_i(t) + \tilde{f}^i(x_i(t), \hat{x}_0^i(t)) + d^i(e^i(t)) \\
 &\quad - B K_i (\lambda_{i1}(t) + \lambda_{i2}(t) + \lambda_{i3}(t))
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

其中 λ_{i1} , λ_{i2} 和 λ_{i3} 定义为

$$\begin{aligned}
 \lambda_{i1}(t) &= \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} B K_i e^{A(s-\phi_i(s))} \eta_i(\phi_i(s)) ds \\
 \lambda_{i2}(t) &= \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} \tilde{f}^i(x_i(s), \hat{x}_0^i(s)) ds \\
 \lambda_{i3}(t) &= \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} d^i(e^i(s)) ds
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

对系统(3-22), 选择李亚普诺夫函数

$$V = \sum_{i=1}^n (V_{i1} + V_{i2} + V_{i3} + V_{i4}) \tag{3-24}$$

其中 V_{i1} , V_{i2} , V_{i3} 和 V_{i4} 定义为

$$\begin{aligned}
 V_{i1} &= \eta_i^T P_i \eta_i \\
 V_{i2} &= \frac{\bar{\alpha}_i^2 h_i e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1}}{\epsilon_i} \int_0^{2h_i} \left(\int_{t-s}^t \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\tau \right) ds \\
 V_{i3} &= \frac{h_i e^{\omega h_i} n \bar{\gamma}^2}{\epsilon_i} \int_0^{h_i} \left(\int_{t-s}^t \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\tau \right) ds \\
 V_{i4} &= \frac{h_i e^{\omega h_i}}{\epsilon_i} \int_0^{h_i} \left(\int_{t-s}^t d^{iT}(\tau) d^i(\tau) d\tau \right) ds
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

根据式(3-22)和(3-25), 能得到 V_{i1} 的导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} = & \eta_i^T (A^T P_i + P_i A - 2P_i B B^T P_i) \eta_i + 2\eta_i^T P_i (\tilde{f}^i + d^i) \\ & + 2\eta_i^T P_i B B^T P_i (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda_{i3}) \end{aligned} \quad (3-26)$$

根据式(3-26), 假设 3.2 和引理 1.1, 能计算得到

$$\begin{aligned} 2\eta_i^T P_i (\tilde{f}^i + d^i) \leq & \epsilon_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{2}{\epsilon_i} \|d^i\|^2 + \frac{2}{\epsilon_i} \|\tilde{f}^i\|^2 \\ \leq & \epsilon_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{2}{\epsilon_i} \|d^i\|^2 + \frac{2n\bar{\gamma}^2}{\epsilon_i} \eta_i^T \eta_i \end{aligned} \quad (3-27)$$

其中 $\bar{\gamma}$ 定义在式(3-20)。

根据式(3-20), (3-26)和引理 1.1, 可以获得

$$\begin{aligned} 2\eta_i^T P_i B B^T P_i \lambda_{ij} \leq & \epsilon_i \eta_i^T (P_i B B^T P_i)^2 \eta_i + \frac{1}{\epsilon_i} \|\lambda_{ij}\|^2 \\ \leq & \bar{\alpha}_i^2 \epsilon_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{1}{\epsilon_i} \|\lambda_{ij}\|^2; j \in \mathbb{N}_{1:3} \end{aligned} \quad (3-28)$$

其中 $\bar{\alpha}_i$ 定义在式(3-20)

把式(3-27)和(3-28)代入式(3-26), 可推导出

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} \leq & \eta_i^T \left(A^T P_i + P_i A - 2P_i B B^T P_i + (3\bar{\alpha}_i^2 + 1) \epsilon_i P_i P_i + \frac{2\bar{\gamma}^2}{\epsilon_i} I_n \right) \eta_i \\ & + \frac{2}{\epsilon_i} \|d^i\|^2 + \frac{1}{\epsilon_i} (\|\lambda_{i1}\|^2 + \|\lambda_{i2}\|^2 + \|\lambda_{i3}\|^2) \end{aligned} \quad (3-29)$$

根据式(3-23), 假设 3.2 和引理 1.3, 可以算出

$$\begin{aligned} \|\lambda_{i1}\|^2 \leq & d_i(t) \int_{\phi_i(t)}^t \eta_i^T(\phi_i(s)) e^{A^T(s-\phi_i(s))} P_i B B^T e^{A^T(t-s)} \\ & \times e^{A(t-s)} B B^T P_i e^{A(s-\phi_i(s))} \eta_i(\phi_i(s)) ds \\ \leq & h_i \int_{\phi_i(t)}^t \eta_i^T(\phi_i(s)) e^{A^T(s-\phi_i(s))} P_i B B^T e^{A^T(t-s)} \\ & \times e^{A(t-s)} B B^T P_i e^{A(s-\phi_i(s))} \eta_i(\phi_i(s)) ds \end{aligned} \quad (3-30)$$

根据式(3-20), (3-30)和引理 3.2, 能够获得

$$\begin{aligned} \|\lambda_{i1}\|^2 \leq & \bar{\alpha}_i^2 h_i \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega(t-s)} \eta_i^T(\phi_i(s)) e^{A^T(s-\phi_i(s))} e^{A(s-\phi_i(s))} \eta_i(\phi_i(s)) ds \\ \leq & \bar{\alpha}_i^2 h_i e^{2\omega h_i} \int_{\phi_i(t)}^t \eta_i^T(\phi_i(s)) \eta_i(\phi_i(s)) ds \end{aligned} \quad (3-31)$$

令 $\tau = \phi_i(s)$ ，能够计算得到

$$ds = \left(\frac{d}{ds} \phi_i(s) \Big|_{s=\phi_i^{-1}(\tau)} \right)^{-1} d\tau \quad (3-32)$$

结合式(3-31)和(3-32)，可以获得

$$\begin{aligned} \|\lambda_{i1}\|^2 &\leq \bar{\alpha}_i^2 h_i e^{2\omega h_i} \int_{\phi_i(\phi_i(t))}^{\phi_i(t)} \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\phi_i^{-1}(\tau) \\ &\leq \bar{\alpha}_i^2 h_i e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1} \int_{\phi_i(\phi_i(t))}^{\phi_i(t)} \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\tau \\ &\leq \bar{\alpha}_i^2 h_i e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1} \int_{t-2h_i}^t \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-33)$$

采用式(3-20)，(3-23)，假设 3.2-3.3，引理 1.3 和引理 3.2，能够计算获得

$$\begin{aligned} \|\lambda_{i2}\|^2 &\leq h_i \int_{\phi_i(t)}^t \tilde{f}^{iT}(x_i(s), \hat{x}_i(s)) e^{A^T(t-s)} e^{A(t-s)} \tilde{f}^i(x_i(s), \hat{x}_i(s)) ds \\ &\leq h_i \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega(t-s)} \tilde{f}^{iT}(x_i(s), \hat{x}_i(s)) \tilde{f}^i(x_i(s), \hat{x}_i(s)) ds \\ &\leq h_i e^{\omega h_i} n \bar{\gamma}^2 \int_{t-h_i}^t \eta_i^T(s) \eta_i(s) ds \end{aligned} \quad (3-34)$$

利用式(3-20)，(3-23)，假设 3.2，引理 1.3 和引理 3.2，可以导出

$$\begin{aligned} \|\lambda_{i3}\|^2 &\leq h_i \int_{\phi_i(t)}^t d^{iT}(e_i(s)) e^{A^T(t-s)} e^{A(t-s)} d^i(e_i(s)) ds \\ &\leq h_i \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega(t-s)} d^{iT}(e_i(s)) d^i(e_i(s)) ds \\ &\leq h_i e^{\omega h_i} \int_{t-h_i}^t d^{iT}(s) d^i(s) ds \end{aligned} \quad (3-35)$$

根据式(3-25)，能得到 V_{i2} ， V_{i3} 和 V_{i4} 的导数：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i2} &= \frac{1}{\epsilon_i} \left(2\bar{\alpha}_i^2 h_i^2 e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1} \eta_i^T \eta_i - \bar{\alpha}_i^2 h_i e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1} \int_{t-2h_i}^t \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\tau \right) \\ \dot{V}_{i3} &= \frac{\bar{\gamma}^2 n h_i}{\epsilon_i} \left(h_i e^{\omega h_i} \eta_i^T \eta_i - e^{\omega h_i} \int_{t-h_i}^t \eta_i^T(s) \eta_i(s) ds \right) \\ \dot{V}_{i4} &= \frac{h_i}{\epsilon_i} \left(h_i e^{\omega h_i} \|d^i\|^2 - e^{\omega h_i} \int_{t-h_i}^t d^{iT}(s) d^i(s) ds \right) \end{aligned} \quad (3-36)$$

结合式(3-24)，(3-29)，(3-33)-(3-36)，可以计算出

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N \eta_i^T \Xi_i \eta_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\epsilon_i} \left(2 + h_i^2 e^{\omega h_i} \right) \|d^i\|^2 \quad (3-37)$$

其中 Ξ_i 定义为

$$\Xi_i = A^T P_i + P_i A - 2P_i B B^T P_i + (3\bar{\alpha}_i^2 + 1) \epsilon_i P_i P_i + \frac{1}{\epsilon_i} \left(2\bar{\alpha}_i^2 h_i^2 e^{2\omega h_i} \beta_i^{-1} + h_i^2 e^{\omega h_i} n \bar{\gamma}^2 + 2n \bar{\gamma}^2 \right) I_n$$

根据定理 3.1, 可以结论 $\lim_{t \rightarrow T} \|d^i(t)\| = 0$ 和 $\|d^i(t)\| = 0, t \in [T, +\infty)$ 。然后, 式(3-37)

能重新写为

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N \eta_i^T \Xi_i \eta_i; \quad t \in [T, +\infty) \quad (3-38)$$

其中根据式(3-20), 可以知道 $\Xi_i < 0$ 。然后利用引理 1.4, (3-37)和(3-38), 可以得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\eta_i(t)\| \rightarrow 0 \quad (3-39)$$

根据式(3-4)和(3-17), 能得到 $\eta_{ij}(t) = x_{ij}(t) - x_{0j}(t) - \tilde{x}_{0j}^i(t)$ 。随后基于定理 3.1 和式(3-39), 可以结论 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow 0$ 。证明完毕。

注 3.4: 输入滞后非线性系统(3-19)的解是

$$\begin{aligned} \eta_i(t) = & e^{A(t-\phi_i(t))} \eta_i(\phi_i(t)) + \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} B u_i(\phi_i(s)) ds \\ & + \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} (\tilde{f}^i(s) + d^i(s)) ds \end{aligned}$$

通常把 $e^{A(t-\phi_i(t))} \eta_i(\phi_i(t))$ 称为系统状态在时间 t 的断截预测器。为解决输入时滞带来的困难, 本章提出了基于该预测器的领导跟随状态反馈一致性控制算法。通过为每个跟随者设计基于有限时间观测器(3-3)和输入时滞的分布式控制器(3-21), 可以保证领导跟随状态一致性能实现。根据 $0 \leq \phi_i^{-1}(t) - t \leq h_i$ 和(3-37)-(3-39), 也可以结论在 $t \in [0, +\infty)$ 上, 控制器 $u_i(t)$ 是有界的, 且满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_i(t)| \rightarrow 0$ 。

注 3.5: 文献[143-146]研究了输入滞后单系统的镇定问题, 由于智能体之间存在局部通信特性, 所以这些文献的算法无法直接扩展解决本章节的输入滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性控制问题。文献[60,63,75]主要关注了无领导者一致性控制问题, 提出的算法也不适合本章节的问题。尽管文献[61-62]研究了领导跟随一致性控制问题, 但这些工作假定了所有智能体的输入时滞是同一常数或时变函数, 也假定了领导者智能体输入为零。很显然, 这些假设条件相对保守。在本章中利用断截预测控制方法, 提出了基于分布式有限时间观测器的状态反馈一致性控制算法, 放松了这些相对严格的假设条件。

3.5 数值仿真

为了验证本章提出的状态反馈一致性控制算法有效性, 本部分将考虑 5 个具有输入时滞的单连杆机械臂。相似于文献[142], 单连杆机械臂 i , $i \in \mathbb{N}_{0.4}$ 的非线性动力学模型描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = \frac{1}{\underline{M}_i} u_i(\phi_i) - \frac{m_i g l_i \sin(x_{i1})}{2\underline{M}_i} \end{cases} \quad (3-40)$$

其中 $g = 9.81$, 对 $i \in \mathbb{N}_{0.4}$, 可以选取 $l_i = 0.11$, $m_i = 0.11$, $\underline{M}_i = 1$, $u_0 = 0.01 \sin(\phi_0)$ 和 $\phi_i = t - \frac{0.01(t+1)}{(2+i)t+1}$ 。

很显然系统(3-40)满足假设 3.2-3.4 中的条件。然后能选取 $h_i = 0.01$ 和 $\beta_i = 1$, $i \in \mathbb{N}_{1.4}$ 。 $\phi_i(t)$ 的反函数表示为:

$$\phi_i^{-1}(t) = \frac{1}{2(2+i)} \left((2+i)t - 0.99 + \sqrt{((2+i)t - 0.99)^2 + 4(2+i)(t+0.01)} \right)$$

这些智能体之间的通信关系刻画为满足假设 3.1 的通信拓扑, 如图 3-1 所示。然后选取 $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{23} = a_{32} = 1$, $a_{34} = a_{43} = 1$, $b_1 = b_4 = 1$ 。

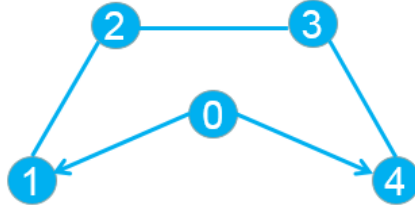


图 3-1 通信拓扑图

Fig.3-1 The communication topology

选取 $q = 5$, $\alpha_j = 0.5$, $j \in \mathbb{N}_{1.2}$; $\bar{\alpha}_i = 0.6$, $\omega = 1.1$ 和 $\epsilon_i = 0.5$, 然后可以计算得到

$$P_i = \begin{bmatrix} 0.0749 & 0.1511 \\ 0.1511 & 0.5979 \end{bmatrix}, \quad K_i = [-0.1511, -0.5979]。$$

初始值可选: $x_{01}(0) = 0.2$, $x_{02}(0) = 0.3$, $x_{11}(0) = 1$, $x_{12}(0) = 4$, $x_{21}(0) = 2$, $x_{22}(0) = 3$, $x_{31}(0) = 3$, $x_{32}(0) = 2$, $x_{41}(0) = 4$, $x_{42}(0) = 1$, $\hat{x}_{01}^1(0) = 3$, $\hat{x}_{02}^1(0) = 7$, $\hat{x}_{01}^2(0) = 4$, $\hat{x}_{02}^2(0) = 6$, $\hat{x}_{01}^3(0) = 5$, $\hat{x}_{01}^4(0) = 8$, $\hat{x}_{02}^4(0) = 2$ 。

仿真结果呈现在图 3-2 至图 3-10。

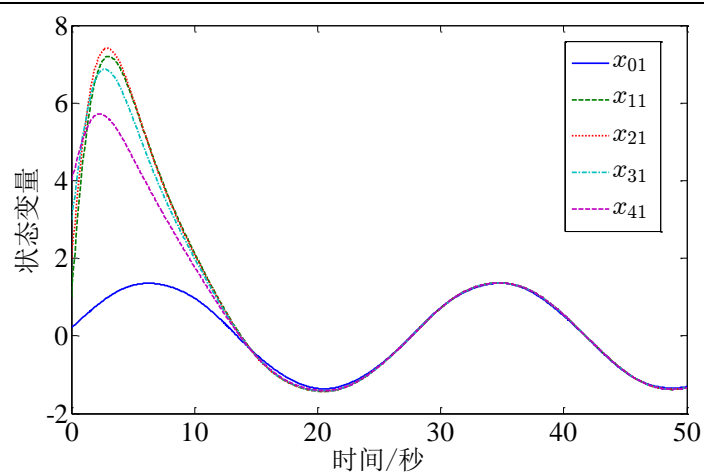


图 3-2 状态变量 $x_{i1}, i \in \mathbb{N}_{0,4}$ 的响应

Fig.3-2 The responses of state variables $x_{i1}, i \in \mathbb{N}_{0,4}$

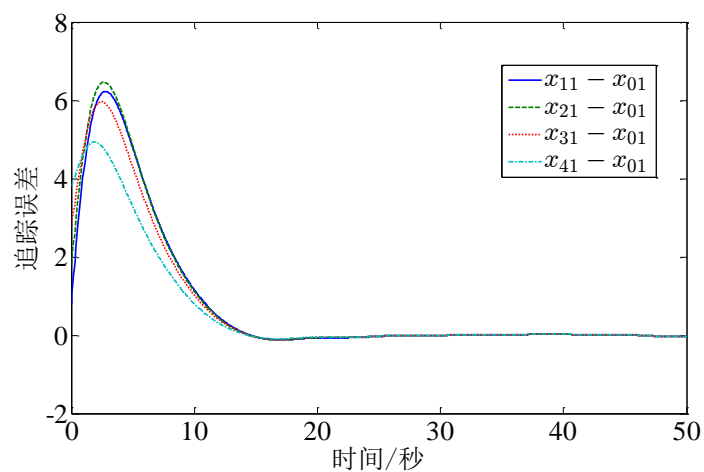


图 3-3 追踪误差 $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1,4}$ 的响应

Fig.3-3 The responses of tracking errors $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1,4}$

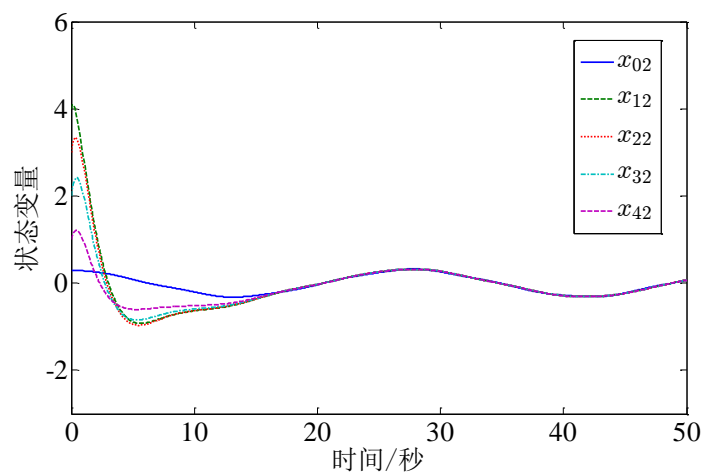


图 3-4 状态变量 $x_{i2}, i \in \mathbb{N}_{0,4}$ 的响应

Fig.3-4 The responses of state variables $x_{i2}, i \in \mathbb{N}_{0,4}$

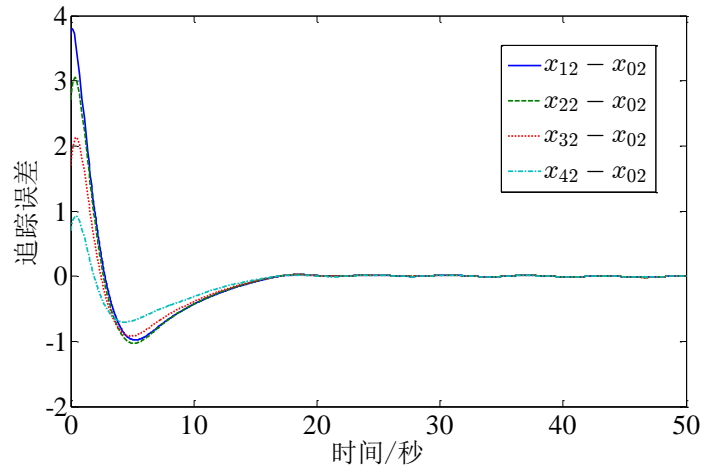


图 3-5 追踪误差 $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.3-5 The responses of tracking errors $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

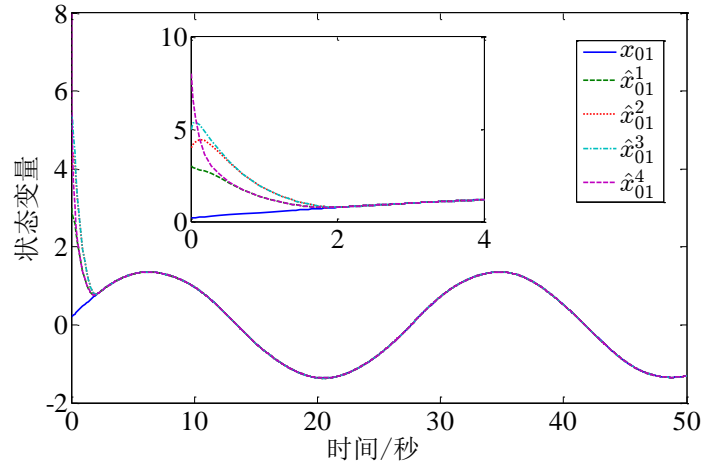


图 3-6 状态变量 x_{01} 和 $\hat{x}_{01}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.3-6 The responses of state variables x_{01} and $\hat{x}_{01}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

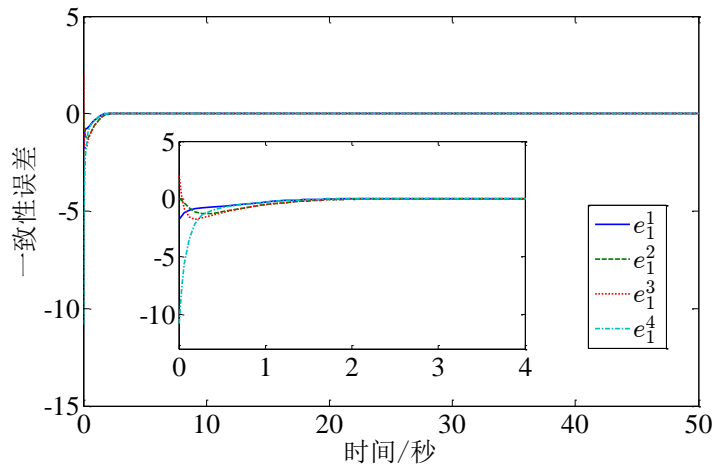


图 3-7 一致性误差 $e_1^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.3-7 The responses of consensus errors $e_1^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

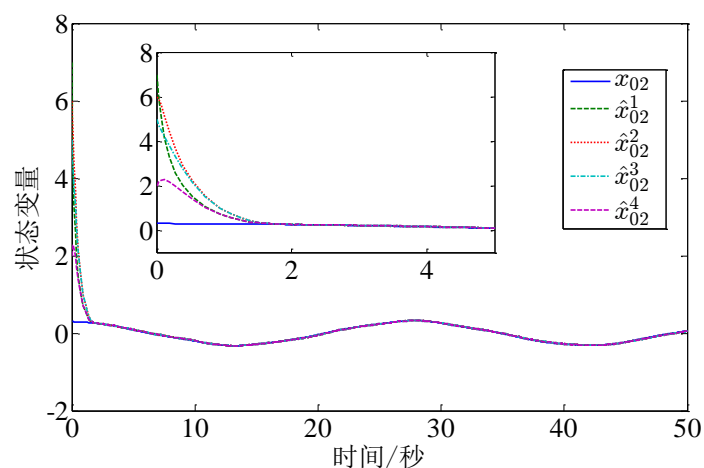


图 3-8 状态变量 x_{02} 和 $\hat{x}_{02}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.3-8 The responses of state variables x_{02} and $\hat{x}_{02}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

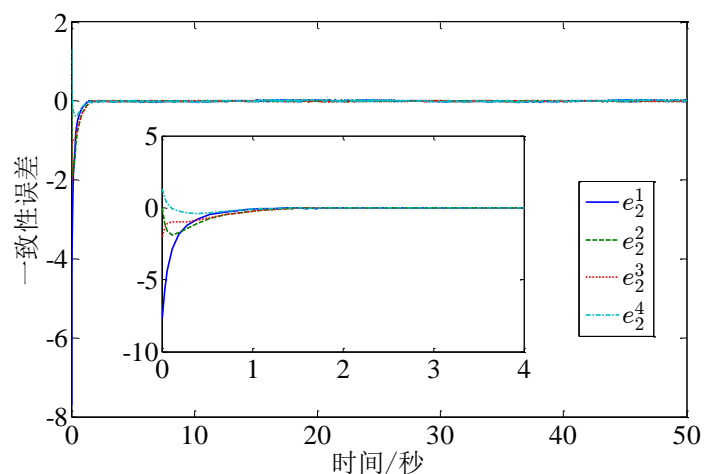


图 3-9 一致性误差 $e_2^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.3-9 The responses of consensus errors $e_2^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

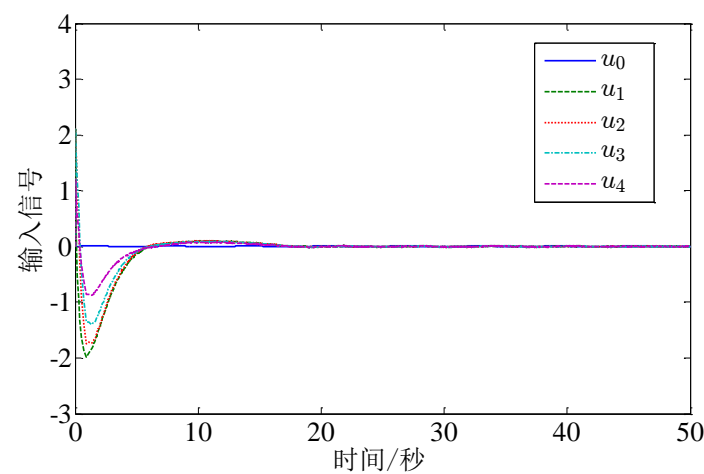


图 3-10 输入信号 $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.3-10 The responses of the input signals $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

图 3-3 至图 3-9 表明领导跟随一致性实现了；图 3-6 至图 3-9 说明了分布式有限时间观测器是有效的；根据图 3-10，能够发现控制信号是有界的，且收敛至零。基于以上仿真结果，可以结论本章针对输入滞后非线性多智能体系统，提出的状态反馈一致性控制算法是有效的。

3.6 本章小结

本章研究了一类输入滞后非线性多智能体系统领导跟随状态反馈一致性控制问题。为每个跟随者设计了有限时间观测器重构领导者智能体的状态信息，并严格证明了该观测器的有效性。在该观测器帮助下，通过引入合适的状态变换，本章研究的领导跟随一致性问题可以转化成单个输入滞后非线性系统的镇定问题。基于断截预测控制方法和 $L-K$ 泛函分析方法，提出了基于分布式有限时间观测器的领导跟随状态反馈一致性控制器，并且给出了该控制器有效的充分条件。本算法放松了现有结果针对输入时滞提出的严格假设条件，允许输入时滞是彼此不同的时变函数。同时，本算法也允许领导者输入为未知的有界时变函数。将来工作是研究输入滞后非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题。

第4章 基于降阶补偿器的非线性多智能体系统输出反馈一致性控制

4.1 引言

多智能体系统一致性控制在编队控制、空间交会等领域有广泛的应用前景。由于传统集中式控制理论无法直接应用到多智能体系统，所以多智能体系统分布式一致性控制受到更多的关注。同时，当智能体的绝对信息不完全可获得的情况下，仅利用部分相对信息设计分布式控制协议（控制器）仍然是更为实用且存在一定困难问题。现有的多智能体系统分布式一致性控制协议可分为两类：状态反馈控制协议和输出反馈控制协议。由于实际智能体的所有状态信息可能很难通过测量获得，所以输出反馈控制协议更具有实际意义。通常情况下，输出反馈一致性控制协议依赖于状态重构器（包含观测器、补偿器、滤波器）。也就是说，首先利用智能体系统的相关输出信息，设计状态重构器重构系统难测量的状态信息，然后基于该状态重构器设计输出反馈控制协议。如果状态重构器的动态阶次低于智能体系统的动态阶次，则称其为降阶重构器；否则，称其为全阶重构器。

大量优秀的结果研究了基于全阶重构器的多智能体系统输出反馈一致性控制问题，例如，文献[86-89,91-96]。如果智能体系统的动态阶次是高阶的，则全阶重构器的动态阶次也是高阶的。相对来说，降阶重构器具有较少的动态阶次，在实际中更容易经济地实施。鉴于此，一些学者开始研究基于降阶重构器的输出反馈一致性控制问题，见文献[90,111,148-150]及其参考文献。然而，文献[148-150]提出的控制协议是基于绝对输出信息和邻居智能体重构器的状态信息，使得交互信息量过多，增加了网络攻击的风险^[111]。尽管文献[90,111]提出了基于相对输出信息的控制协议，但是这些结果仅适用于线性多智能体系统，难以扩展到非线性多智能体系统。需要指出的是，利用智能体的相对输出信息，为非线性多智能体系统设计基于降阶重构器的输出反馈一致性控制协议，目前仍缺乏一种行之有效的方法。

受上述讨论的启发，本章研究了基于降阶补偿器的非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。相比存在的结果，本章的主要贡献总结如下：首先，考虑了更一般的非线性多智能体系统模型，并在少保守的非线性项假设条件下，提

出了一种新的输出反馈一致性控制算法。其次，为每个跟随者设计了基于相对输出信息的降阶动态补偿器重构相关状态信息。在实际中，该补偿器能相对容易且经济地实施。最后，采用了动态增益控制方法，设计了基于相对输出信息的完全分布式类线性输出反馈控制器。该控制器仅需要交互相关的输出信息，降低了网络攻击的潜在风险。本章未采用反步控制方法，避免了其固有的“微分大爆炸”问题。

4.2 预备知识和问题描述

4.2.1 预备知识

拓扑理论知识已经描述在 1.4.1。本章考虑通信拓扑，满足如下一个假设条件

假设 4.1: \mathcal{G} 是有向固定的，且包含一个以领导者为根节点的有向生成树。

然后结合章节 1.4.1 的描述，给出如下一个引理。

引理 4.1^[140]: 在满足假设 4.1 的拓扑 \mathcal{G} 下，对拓扑矩阵 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}$ ，存在一个正参数 ω_1 和正对角阵 $\Psi = \text{diag}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ 且 $\psi_i > 0$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ，使如下不等式成立

$$\Psi \mathcal{H} + \mathcal{H}^T \Psi \geq \omega_1 I_N$$

引理 4.2^[141]: 对任意的正常数 ι_{i0} ，存在一些常数 θ_{i1} ， θ_{i2} ， ι_{i1} ， ι_{i2} 和对称正定矩阵 P_{i1} ， P_{i2} ，使得如下不等式成立

$$\begin{aligned} A_{i1}^T P_{i1} + P_{i1} A_{i1} &\leq -\theta_{i1} I_{n_i-1} \\ A_{i2}^T P_{i2} + P_{i2} A_{i2} &\leq -\theta_{i2} I_{n_i-2} \\ \iota_{i0} P_{i1} &\leq D_i P_{i1} + P_{i1} D_i + 2\iota_{i0} P_{i1} \leq \iota_{i1} P_{i1} \\ \iota_{i0} P_{i2} &\leq D_i P_{i2} + P_{i2} D_i + 2\iota_{i0} P_{i2} \leq \iota_{i2} P_{i2} \\ \theta_{i1} > 0, \theta_{i2} > 0, \iota_{i1} > 0, \iota_{i2} > 0, P_{i1} > 0, P_{i2} > 0 \end{aligned}$$

其中 $D_i = \text{diag}\{0, 1, \dots, n_i - 2\}$ ， A_{i1} 和 A_{i2} 定义为

$$A_{i1} = \begin{bmatrix} -q_{i1} & & & \\ \vdots & & I_{n_i-2} & \\ -q_{i,n_i-2} & & & \\ -q_{i,n_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n_i-2} & \\ 0 & & & \\ -k_{i1} & -k_{i2} & \cdots & -k_{i,n_i-1} \end{bmatrix}$$

其中 q_{ij} 和 k_{ij} 是设计的正参数，用来保证 A_{i1} 和 A_{i2} 是赫尔维兹矩阵。

4.2.2 问题描述

在本章，研究了基于降阶动态补偿器的非线性多智能体系统领导跟随完全分

布式输出反馈一致性控制问题。考虑由编号为0的一个领导者和编号为1...N的N个跟随者组成的N+1个智能体。编号为0的领导者是一个虚拟智能体，其输出可以描述为一个时变函数 $y_0(t)$ 。跟随者智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 的非线性动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{ik}(t) = x_{i(k+1)}(t) + f_{ik}(\bar{x}_{ik}(t)), k \in \mathbb{N}_{1:n_i-1} \\ \dot{x}_{in_i}(t) = u_i(t) + f_{in_i}(\bar{x}_{in_i}(t)) \\ y_i(t) = x_{i1}(t) \end{cases} \quad (4-1)$$

其中 n_i 表示跟随者 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 的动态阶次； $x_{ij}(t) \in \mathbb{R}$ ， $u_i(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y_i(t) \in \mathbb{R}$ 分别表示跟随者 i 的状态变量，控制输入和输出；仅仅输出信号 $y_i(t)$ ， $i \in \mathbb{N}_{0:N}$ 可通过测量获得； $\bar{x}_{ij}(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{ij}(t)]^T \in \mathbb{R}^j$ ； $f_{ij}(\bar{x}_{ij}(t)) : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$ 是已知平滑非线性函数，并且满足 $f_{ij}(0) = 0$ 。

这N+1个智能体之间的通信关系是由有向固定拓扑刻画，已描述在章节 1.4.1 中，并满足假设 4.1 和引理 4.1。仅仅智能体的输出信息能基于此拓扑进行传输。

注 4.1: 系统(4-1)能描述许多实际系统的数学模型，如倒立摆系统、机械臂系统等。尽管许多工作研究了非线性多智能体系统输出反馈一致性控制问题，但现有结果通常都设计了基于全阶观测器的控制协议，相比基于降阶观测器的控制协议，它很难在实际中经济地实施。同时，现有结果的非线性项假设条件相对严格，且其控制协议依赖于绝对输出信息和邻居智能体观测器的状态信息，从而使得智能体之间的交互信息量增加，也相应地增加了通信负担和潜在的攻击风险。下面部分将综合考虑这些问题，针对非线性多智能体系统(4-1)，提出一种新颖的输出反馈一致性控制策略，以期获得更少保守性的结果，完善相关控制理论。

为设计分布式一致性控制器，为系统(4-1)给出如下两个必要假设。

假设 4.2: 针对跟随者智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 的非线性函数，存在一个非负平滑函数 $\gamma_{ik}(x_{i1}, \varpi_{i2}, \dots, \varpi_{ik})$ ，使得

$$\begin{aligned} & |f_{ik}(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) - f_{ik}(x_{i1}, \varpi_{i2}, \dots, \varpi_{ik})| \\ & \leq \gamma_{ik}(x_{i1}, \varpi_{i2}, \dots, \varpi_{ik}) \sum_{j=2}^k |x_{ij} - \varpi_{ij}|, \quad k \in \mathbb{N}_{1:n_i} \end{aligned}$$

其中 ϖ_{i2} 是一个合适的变量。

假设 4.3: 领导者输出 y_0 及其导数 \dot{y}_0 是有界的，且满足 $|\dot{y}_0| \leq d_0$ ，其中 d_0 是一个未知非负常数。

注 4.2: 现有结果普遍要求系统非线性函数满足： $|f_{ik}(\bar{x}_{ik}) - f_{jk}(\bar{x}_{jk})| \leq \gamma \|\bar{x}_{ik} - \bar{x}_{jk}\|$ ，其中 γ 是一个利普希茨(Lipschitz)常数。不同于现有结果，本章在假设 4.2 中，给出

了具有较少保守性的非线性假设条件， $\gamma_{ik}(\cdot)$ 是非线性函数而不是常数。很显然，现有结果的非线性假设条件是该条件的一个特殊情况。同时，很容易证实假设 4.2 的合理可行性。例如，取非线性函数为： $f_{i2}(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^2 x_{i2} \sin(x_{i2})$ ，然后通过计算可得

$$\begin{aligned} & |f_{i2}(x_{i1}, x_{i2}) - f_{i2}(x_{i1}, \varpi_{i2})| \\ &= x_{i1}^2 |x_{i2} \sin(x_{i2}) - \varpi_{i2} \sin(x_{i2}) + \varpi_{i2} \sin(x_{i2}) - \varpi_{i2} \sin(\varpi_{i2})| \\ &\leq x_{i1}^2 (2 + \varpi_{i2}^2) |x_{i2} - \varpi_{i2}| \end{aligned}$$

此外，假设 4.3 也是一个标准的条件。

目标：本章主要目标是在有向固定拓扑下，为跟随者设计分布式控制器，使得所有智能体的输出实现一致性，即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - y_0(t)| \rightarrow \varrho_0$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ ，其中 ϱ_0 是一个可调的参数。

4.3 分布式降阶动态补偿器设计

由于跟随者状态信息难以测量，并且领导者输出仅有部分跟随者可获得，所以本部分将基于相关输出信息，为跟随者设计分布式降阶动态补偿器重构相关状态信息。在设计补偿器之前，为跟随者 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ，定义输出一致性误差：

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (y_i - y_j) + b_i (y_i - y_0) \quad (4-2)$$

其中 a_{ij} 和 b_i 定义在章节 1.4.1。

然后根据式(4-2)，为跟随者 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计补偿器：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{i,k+1} = \hat{x}_{i,k+2} - L_i^k q_{ik} (-\omega_0 e_i + \hat{x}_{i2} + L_i q_{i1} y_i) + L_i^{k+1} q_{i,k+1} y_i \\ \quad - k L_i^{k-1} \dot{L}_i q_{ik} y_i, \quad k \in \mathbb{N}_{1:n_i-2} \\ \dot{\hat{x}}_{i,n_i} = u_i - L_i^{n_i-1} q_{i,n_i-1} (-\omega_0 e_i + \hat{x}_{i2} + L_i q_{i1} y_i) + g_{i n_i}(y_i, e_i) \\ \quad - (n_i - 1) L_i^{n_i-2} \dot{L}_i q_{i,n_i-1} y_i \end{cases} \quad (4-3)$$

其中 \hat{x}_{ij} ， $j \in \mathbb{N}_{1:n_i-1}$ 表示补偿器的状态变量； q_{ij} 表示设计正参数，且满足引理 4.2 的条件； ω_0 表示正参数且设计在式(4-40)； $g_{i n_i}(\cdot)$ 表示非线性函数且设计在式(4-11)； L_i 表示动态增益且设计为

$$\dot{L}_i(t) = \max \left\{ -\beta_i L_i^2 + \rho_i(y_i, e_i) L_i, 0 \right\}, \quad L_i(0) \geq 1 \quad (4-4)$$

其中 β_i 和 $\rho_i(\cdot)$ 分别表示正参数和非线性函数，它们设计在(4-40)。

注 4.3：由于跟随者智能体系统(4-1)的动态阶次是 n_i ，而该补偿器动态的阶次是 $n_i - 1$ ，所以称其为降阶补偿器。同时，又由于跟随者系统(4-1)具有少保守性的非线性

性项假设条件, 所以现有的全阶或降阶观测器不再适用于此系统。因此, 本章设计了新颖的降阶动态补偿器(4-3)重构跟随者的转化状态信息。本章提出的控制器将依赖于该补偿器, 而它能减少传输状态数量, 并且降低通信负担和潜在攻击风险的关键环节是在该补偿器中引入了输出一致性误差 e_i 。此举使得控制器只依赖于相对输出信息, 而不是绝对输出信息和邻居观测器状态信息。根据式(4-4), 能够可知 $L_i(t)$ 是一个时变函数, 且满足

$$1 \leq L_i(t) \leq \max \left\{ L_i(0); \frac{\rho_i(y_i, e_i)}{\beta_i} \right\} \quad (4-5)$$

4.4 完全分布式输出反馈一致性控制器设计

本部分将呈现本章的主要结果, 即为跟随者智能体设计分布式领导跟随输出反馈控制器, 使得所有智能体的输出实现一致性。在给出主要结果之前, 首先为跟随者系统(4-1), 选取如下状态变换

$$\begin{cases} z_{i1} = y_i \\ z_{i,k+1} = x_{i,k+1} + g_{ik}(y_i, e_i) - L_i^k q_{ik} z_{i1}, k \in \mathbb{N}_{1:n_i-1} \end{cases} \quad (4-6)$$

其中 $g_{ik}(y_i, e_i)$, $k \in \mathbb{N}_{1:n_i-1}$ 表示非线性函数, 且在之后定义。

根据式(4-1)和(4-6), 能够得到 z_{i1} 的动态为

$$\dot{z}_{i1} = x_{i2} + f_{i1} = -\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1} \quad (4-7)$$

其中 $g_{i1}(y_i, e_i) = \omega_0 e_i + f_{i1}$ 。

根据式(4-1), (4-6)和(4-7), 能够得到 $z_{i,k+1}$, $k \in \mathbb{N}_{1:n_i-2}$ 的动态为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,k+1} &= x_{i,k+2} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_i} (-\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial e_i} \dot{e}_i + f_{i,k+1} \\ &\quad - k L_i^{k-1} \dot{L}_i q_{ik} z_{i1} - L_i^k q_{ik} (-\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) \\ &= z_{i,k+2} - L_i^k q_{ik} (-\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) + \hat{f}_{ik} \\ &\quad - k L_i^{k-1} \dot{L}_i q_{ik} z_{i1} + L_i^{k+1} q_{i,k+1} z_{i1} \end{aligned} \quad (4-8)$$

其中 $g_{i,k+1}(\cdot)$, $\bar{f}_{i,k+1}$ 和 \hat{f}_{ik} 定义为

$$\begin{aligned} g_{i,k+1}(y_i, e_i) &= \bar{f}_{i,k+1} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_i} \omega_0 e_i \\ \bar{f}_{i,k+1} &= f_{i,k+1}(x_{i1}, -g_{i1}, -g_{i2}, \dots, -g_{ik}) \\ \hat{f}_{ik} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial e_i} \dot{e}_i + f_{i,k+1} - \bar{f}_{i,k+1} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_i} (z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) \end{aligned} \quad (4-9)$$

相似地, 能够得到 z_{in_i} 的动态为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{in_i} = & u_i + g_{in_i}(y_i, e_i) - (n_i - 1)L_i^{n_i-2}\dot{L}_i q_{i,n_i-1} z_{i1} + \hat{f}_{i,n_i-1} \\ & - L_i^{n_i-1} q_{i,n_i-1} (-\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) \end{aligned} \quad (4-10)$$

其中 $g_{in_i}(\cdot)$, \bar{f}_{in_i} 和 \hat{f}_{i,n_i-1} 定义为

$$\begin{aligned} g_{in_i} &= \bar{f}_{in_i} - \frac{\partial g_{i,n_i-1}}{\partial y_i} \omega_0 e_i \\ \bar{f}_{in_i} &= f_{in_i}(x_{i1}, -g_{i1}, -g_{i2}, \dots, -g_{i,n_i-1}) \\ \hat{f}_{i,n_i-1} &= \frac{\partial g_{i,n_i-1}}{\partial y_i}(z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) + \frac{\partial g_{i,n_i-1}}{\partial e_i} \dot{e}_i + f_{in_i} - \bar{f}_{in_i} \end{aligned} \quad (4-11)$$

结合式(4-7), (4-8)和(4-10), z_{ij} , $j \in \mathbb{N}_{1:n_i}$ 的动态呈现如下

$$\begin{cases} \dot{z}_{i1} = z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1} - \omega_0 e_i \\ \dot{z}_{i,k+1} = z_{i,k+2} - L_i^k q_{ik} (-\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) - k L_i^{k-1} \dot{L}_i q_{ik} z_{i1} \\ \quad + L_i^{k+1} q_{i,k+1} z_{i1} + \hat{f}_{ik} \\ \dot{z}_{in_i} = u_i - L_i^{n_i-1} q_{i,n_i-1} (-\omega_0 e_i + z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}) - (n_i - 1) L_i^{n_i-2} \dot{L}_i q_{i,n_i-1} z_{i1} \\ \quad + g_{in_i}(y_i, e_i) + \hat{f}_{i,n_i-1} \end{cases} \quad (4-12)$$

本章的主要结果可总结成如下一个定理。

定理 4.1: 在假设 4.1-4.3 下, 通过为跟随者智能体 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计基于降阶补偿器(4-3)的分布式类线性控制器

$$u_i = - \sum_{j=1}^{n_i-1} L_i^j k_{i,n_i-j} (\hat{x}_{i,n_i-j+1} + L_i^{n_i-j} q_{i,n_i-j} y_i) - g_{in_i}(y_i, e_i) \quad (4-13)$$

能保证跟随者系统(4-1)的所有状态是全局一致最终有界的, 且所有智能体输出可实现一致性, 其中 k_{ij} 表示设计的正参数, 且满足引理 4.2 的条件。

定义向量 $\xi_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$ 和 $\eta_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$ 为:

$$\begin{aligned} \xi_i &= [\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{i,n_i-1}]^T = [z_{i2} - \hat{x}_{i2}, \dots, z_{in_i} - \hat{x}_{in_i}]^T \\ \eta_i &= [\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{i,n_i-1}]^T = [\hat{x}_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1}, \dots, \hat{x}_{in_i} + L_i^{n_i-1} q_{i,n_i-1} z_{i1}]^T \end{aligned} \quad (4-14)$$

结合式(4-3), (4-12)和(4-13), 能得到 ξ_i 和 η_i 的导数为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A_{i01} \xi_i + \hat{f}_i \\ \dot{\eta}_i = A_{i02} \eta_i + L_i C_{i1} q_{i1} \xi_{i1} \end{cases} \quad (4-15)$$

其中 $A_{i0s} = L_i C_{i2} A_{is} C_{i2}^{-1}$, $s \in \mathbb{N}_{1:2}$, $C_{i2} = L_i^{l_0} C_{i1}$, $C_{i1} = \text{diag}\{1, L_i, \dots, L_i^{n_i-2}\}$, A_{is} 和 l_0 定义在引理 4.2; $\hat{f}_i = [\hat{f}_{i1}, \dots, \hat{f}_{i,n_i-1}]^T$; $q_i = [q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{i,n_i-1}]^T$ 。

选取如下状态变换

$$\bar{\xi}_i = C_{i2}^{-1} \xi_i, \quad \bar{\eta}_i = C_{i2}^{-1} \eta_i \quad (4-16)$$

结合式(4-15)和(4-16)，计算可以得到

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}_i = L_i A_{i1} \bar{\xi}_i - \frac{\dot{L}_i}{L_i} (\iota_{i0} I_{n_i-1} + D_i) \bar{\xi}_i + C_{i2}^{-1} \hat{f}_i \\ \dot{\bar{\eta}}_i = L_i A_{i2} \bar{\eta}_i - \frac{\dot{L}_i}{L_i} (\iota_{i0} I_{n_i-1} + D_i) \bar{\eta}_i + L_i q_i \bar{\xi}_{i1} \end{cases} \quad (4-17)$$

其中 D_i 定义在引理 4.2。

定义如下向量

$$\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T, \mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N \quad (4-18)$$

根据式(4-18)，(4-2)能重写为

$$\mathbf{e} = \mathcal{H}(\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0) \quad (4-19)$$

其中 \mathcal{H} 定义在引理 4.1。

选择候选李亚普诺夫函数

$$V_1 = \mathbf{e}^T \Psi \mathbf{e} \quad (4-20)$$

其中 Ψ 是一个正对角矩阵，定义在引理 4.1。

结合式(4-6)，(4-7)，(4-18)和(4-19)，能计算得到 V_1 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2\mathbf{e}^T \Psi \mathcal{H}(\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{1}\dot{y}_0) \\ &= -\omega_0 \mathbf{e}^T (\Psi \mathcal{H} + \mathcal{H}^T \Psi) \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \Psi \mathcal{H}(\hat{\xi}_1 + \hat{\eta}_1) - 2\mathbf{e}^T \Psi \mathcal{H} \mathbf{1} \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (4-21)$$

其中 $\hat{\xi}_1 = [\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{N1}]^T$ 和 $\hat{\eta}_1 = [\eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{N1}]^T$ 。

利用引理 4.1 和式(4-21)，能得到

$$-\omega_0 \mathbf{e}^T (\Psi \mathcal{H} + \mathcal{H}^T \Psi) \mathbf{e} \leq -\omega_0 \omega_1 \mathbf{e}^T \mathbf{e} = -\omega_0 \omega_1 \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (4-22)$$

其中 ω_1 定义在引理 4.1。

运用引理 1.1，式(4-16)和(4-21)，可推导出

$$\begin{aligned} 2\mathbf{e}^T \Psi \mathcal{H} \hat{\xi}_1 &\leq 2\|\mathbf{e}\| \|\Psi \mathcal{H}\| \|\hat{\xi}_1\| \\ &\leq \delta_1 \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \|\hat{\xi}_1\|^2 = 2\delta_1 \sum_{i=1}^N e_i^2 + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \sum_{i=1}^N L_i^{2t_{i0}} \|\bar{\xi}_i\|^2 \\ 2\mathbf{e}^T \Psi \mathcal{H} \hat{\eta}_1 &\leq 2\|\mathbf{e}\| \|\Psi \mathcal{H}\| \|\hat{\eta}_1\| \\ &\leq \delta_1 \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \|\hat{\eta}_1\|^2 = \delta_1 \sum_{i=1}^N e_i^2 + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \sum_{i=1}^N L_i^{2t_{i0}} \|\bar{\eta}_i\|^2 \end{aligned} \quad (4-23)$$

其中 δ_1 是任意正参数， $\omega_2 \geq \sup_{\mathcal{H} \in \Omega} (\|\Psi \mathcal{H}\|)$ ， Ω 是拓扑矩阵 \mathcal{H} 所有可能结构的集合。

利用引理 1.1，假设 4.3 和式(4-21)，可推导出

$$-2\mathbf{e}^T \Psi \mathcal{H} \mathbf{1} \dot{\mathbf{y}}_0 \leq 2\|\mathbf{e}\| \|\Psi \mathcal{H}\| \|\mathbf{1} \dot{\mathbf{y}}_0\| \leq \delta_1 \sum_{i=1}^N e_i^2 + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \sum_{i=1}^N d_0^2 \quad (4-24)$$

把式(4-22)-(4-24)代入式(4-21)，能够获得

$$\dot{V}_1 \leq -(\omega_0 \omega_1 - 3\delta_1) \sum_{i=1}^N e_i^2 + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \sum_{i=1}^N L_i^{2t_0} \left(\|\bar{\xi}_i\|^2 + \|\bar{\eta}_i\|^2 \right) + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \sum_{i=1}^N d_0^2 \quad (4-25)$$

选择一个候选李亚普诺夫函数

$$V_2 = \sum_{i=1}^N \left(\mu_{i1} \bar{\xi}_i^T P_{i1} \bar{\xi}_i + \mu_{i2} \bar{\eta}_i^T P_{i2} \bar{\eta}_i \right) \quad (4-26)$$

其中 μ_{i1} 和 μ_{i2} 是正常数且定义在式(4-36); P_{i1} 和 P_{i2} 是对称正定矩阵且定义在引理 4.2。

根据式(4-17)和(4-26)，计算 V_2 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \sum_{i=1}^N & \left(\mu_{i1} L_i \bar{\xi}_i^T \left(A_{i1}^T P_{i1} + P_{i1} A_{i1} \right) \bar{\xi}_i - \mu_{i1} \frac{\dot{L}_i}{L_i} \bar{\xi}_i^T \left(D_i P_{i1} + P_{i1} D_i + 2L_{i0} P_{i1} \right) \bar{\xi}_i \right. \\ & + 2\mu_{i2} L_i \bar{\eta}_i^T P_{i2} q_i \bar{\xi}_{i1} + \mu_{i2} L_i \bar{\eta}_i^T \left(A_{i2}^T P_{i2} + P_{i2} A_{i2} \right) \bar{\eta}_i \\ & \left. - \mu_{i2} \frac{\dot{L}_i}{L_i} \bar{\eta}_i^T \left(D_i P_{i2} + P_{i2} D_i + 2L_{i0} P_{i2} \right) \bar{\eta}_i + 2\mu_{i1} \bar{\xi}_i^T P_{i1} C_{i2}^{-1} \hat{f}_i \right) \end{aligned} \quad (4-27)$$

利用式(4-27)和引理 4.2，可以推导出

$$\begin{aligned} & \mu_{i1} L_i \bar{\xi}_i^T \left(A_{i1}^T P_{i1} + P_{i1} A_{i1} \right) \bar{\xi}_i \leq -\mu_{i1} \theta_{i1} L_i \|\bar{\xi}_i\|^2 \\ & \mu_{i2} L_i \bar{\eta}_i^T \left(A_{i2}^T P_{i2} + P_{i2} A_{i2} \right) \bar{\eta}_i \leq -\mu_{i2} \theta_{i2} L_i \|\bar{\eta}_i\|^2 \\ & -\mu_{i1} \frac{\dot{L}_i}{L_i} \bar{\xi}_i^T \left(P_{i1} D_i + D_i P_{i1} + 2L_{i0} P_{i1} \right) \bar{\xi}_i \\ & \leq -\mu_{i1} L_{i0} \frac{\dot{L}_i}{L_i} \bar{\xi}_i^T P_{i1} \bar{\xi}_i \leq \mu_{i1} L_{i0} \beta_i L_i \|\bar{\xi}_i\|^2 - \mu_{i1} L_{i0} \rho_i(\cdot) \bar{\xi}_i^T P_{i1} \bar{\xi}_i \\ & -\mu_{i2} \frac{\dot{L}_i}{L_i} \bar{\eta}_i^T \left(P_{i2} D_i + D_i P_{i2} + 2L_{i0} P_{i2} \right) \bar{\eta}_i \\ & \leq -\mu_{i2} L_{i0} \frac{\dot{L}_i}{L_i} \bar{\eta}_i^T P_{i2} \bar{\eta}_i \leq \mu_{i2} L_{i0} \beta_i L_i \|\bar{\eta}_i\|^2 - \mu_{i2} L_{i0} \rho_i(\cdot) \bar{\eta}_i^T P_{i2} \bar{\eta}_i \end{aligned} \quad (4-28)$$

运用式(4-27)和引理 1.1，能够计算出

$$\begin{aligned} 2\mu_{i2} L_i \bar{\eta}_i^T P_{i2} q_i \bar{\xi}_{i1} & \leq 2\mu_{i2} L_i \|\bar{\eta}_i\| \|P_{i2} q_i\| \|\bar{\xi}_i\| \\ & \leq \frac{\mu_{i2}^2 \|P_{i2} q_i\|^2}{\delta_{i2}} L_i \|\bar{\xi}_i\|^2 + \delta_{i2} L_i \|\bar{\eta}_i\|^2 \end{aligned} \quad (4-29)$$

其中 δ_{i2} 是任意正常数。

根据式(4-15)和(4-27)，可以获得

$$2\mu_{i1}\bar{\xi}_i^T P_{i1}C_{i2}^{-1}\hat{f}_i \leq 2\mu_{i1}\|P_{i1}\|\|\bar{\xi}_i\|\|C_{i2}^{-1}\hat{f}_i\| \leq 2\mu_{i1}\|P_{i1}\|\|\bar{\xi}_i\|\sum_{k=1}^{n_i-1}L_i^{-(k-1+t_{i0})}\|\hat{f}_{ik}\| \quad (4-30)$$

利用假设 4.2, 式(4-2), (4-9), (4-11), (4-14), (4-16), 可以得到

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_{ik}\| &\leq \left\|\frac{\partial g_{ik}}{\partial e_i}\dot{e}_i\right\| + \left\|\frac{\partial g_{ik}}{\partial y_i}(z_{i2} + L_i q_{i1} z_{i1})\right\| + |f_{i,k+1} - \bar{f}_{i,k+1}| \\ &\leq \gamma_{ik1}(\cdot)\sum_{j=2}^{k+1}|z_{ij} + L_i^{j-1}q_{i,j-1}z_{i1}| + \gamma_{ik2}(\cdot)\sum_{j=1}^N(\omega_0|e_j| + |z_{j2} + L_j q_{j1} z_{j1}| + |\dot{y}_0|) \end{aligned} \quad (4-31)$$

其中 $\gamma_{ik1}(y_i, e_i)$ 和 $\gamma_{ik2}(y_i, e_i)$ 是合适的非负函数。

把式(4-31)代入式(4-30), 且根据式(4-5), 能够推导出

$$\begin{aligned} 2\mu_{i1}\bar{\xi}_i^T P_{i1}C_{i2}^{-1}\hat{f}_i &\leq 2\mu_{i1}\|P_{i1}\|\|\bar{\xi}_i\|\left(\gamma_{i1}(\cdot)(\|\bar{\xi}_i\| + \|\bar{\eta}_i\|) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{i2}(\cdot)\sum_{j=1}^N(\omega_0|e_j| + L_j^{t_{j0}}\|\bar{\xi}_j\| + L_j^{t_{j0}}\|\bar{\eta}_j\| + |\dot{y}_0|)\right) \end{aligned} \quad (4-32)$$

定义 $\bar{\gamma}_{i1}(\cdot) = \mu_{i1}\|P_{i1}\|\gamma_{i1}(\cdot)$ 和 $\bar{\gamma}_{i2}(\cdot) = \mu_{i1}\|P_{i1}\|\gamma_{i2}(\cdot)$ 。然后根据式(4-32)和引理 1.1, 能够容易地推导出

$$\begin{aligned} 2\bar{\gamma}_{i1}(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|\|\bar{\eta}_i\| &\leq \delta_{i3}\bar{\gamma}_{i1}(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|^2 + \frac{1}{\delta_{i3}}\bar{\gamma}_{i1}(\cdot)\|\bar{\eta}_i\|^2 \\ 2\bar{\gamma}_{i2}(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|\sum_{j=1}^N\omega_0|e_j| &\leq \sum_{j=1}^N\left(\omega_0^2\nu_{i1j}\bar{\gamma}_{i2}^2(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|^2 + \frac{e_j^2}{\nu_{i1j}}\right) \\ 2\bar{\gamma}_{i2}(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|\sum_{j=1}^NL_j^{t_{j0}}\|\bar{\xi}_j\| &\leq \sum_{j=1}^N\left(\nu_{i2j}\bar{\gamma}_{i2}^2(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|^2 + \frac{L_j^{2t_{j0}}}{\nu_{i2j}}\|\bar{\xi}_j\|^2\right) \\ 2\bar{\gamma}_{i2}(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|\sum_{j=1}^NL_j^{t_{j0}}\|\bar{\eta}_j\| &\leq \sum_{j=1}^N\left(\nu_{i3j}\bar{\gamma}_{i2}^2(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|^2 + \frac{L_j^{2t_{j0}}}{\nu_{i3j}}\|\bar{\eta}_j\|^2\right) \end{aligned} \quad (4-33)$$

其中 ν_{isj} , $s \in \mathbb{N}_{1:4}$ 和 δ_{i3} 表示任意正常数。

根据引理 1.1, 假设 4.3 和式(4-32), 可以计算出

$$2\bar{\gamma}_{i2}(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|\sum_{j=1}^N|\dot{y}_0| \leq \sum_{j=1}^N\left(\nu_{i4j}\bar{\gamma}_{i2}^2(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|^2 + \frac{1}{\nu_{i4j}}d_0^2\right) \quad (4-34)$$

把式(4-33)和(4-34)代入式(4-32), 能够获得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N 2\mu_{i1}\bar{\xi}_i^T P_{i1}C_{i2}^{-1}\hat{f}_i &\leq \sum_{i=1}^N\left(\bar{\gamma}_i(\cdot)\|\bar{\xi}_i\|^2 + \frac{1}{\delta_{i3}}\bar{\gamma}_{i1}(\cdot)\|\bar{\eta}_i\|^2 + \check{\nu}_{i2}L_i^{2t_{i0}}\|\bar{\xi}_i\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \check{\nu}_{i3}L_i^{2t_{i0}}\|\bar{\eta}_i\|^2 + \check{\nu}_{i1}e_i^2 + \check{\nu}_{i4}d_0^2\right) \end{aligned} \quad (4-35)$$

其中 $\hat{\nu}_{ij}$, $\check{\nu}_{ij}$, $j \in \mathbb{N}_{1:4}$ 和 $\bar{\gamma}_i(\cdot)$ 表示为

$$\begin{aligned}\hat{v}_{i1} &= \sum_{j=1}^N v_{i1j}, \hat{v}_{i2} = \sum_{j=1}^N v_{i2j}, \hat{v}_{i3} = \sum_{j=1}^N v_{i3j}, \hat{v}_{i4} = \sum_{j=1}^N v_{i4j}, \\ \check{v}_{i1} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{v_{j1i}}, \check{v}_{i2} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{v_{j2i}}, \check{v}_{i3} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{v_{j3i}}, \check{v}_{i4} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{v_{j4i}}, \\ \bar{\gamma}_i(\cdot) &= (2 + \delta_{i3}) \bar{\gamma}_{i1}(\cdot) + (\omega_0^2 \hat{v}_{i1} + \hat{v}_{i2} + \hat{v}_{i3} + \hat{v}_{i4}) \bar{\gamma}_{i2}^2(\cdot)\end{aligned}$$

针对式(4-26), 选取 μ_{i1} 和 μ_{i2} 为:

$$\mu_{i1} = \frac{\mu_{i2}^2 \|P_{i2} q_i\|^2}{\theta_{i1} \delta_{i2}} + \bar{\mu}_{i1}, \quad \mu_{i2} = \frac{\delta_{i2}}{\theta_{i2}} + \bar{\mu}_{i2} \quad (4-36)$$

其中 $\bar{\mu}_{i1}$ 和 $\bar{\mu}_{i2}$ 是任意正常数。

很容易证实, 下面不等式成立

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P_{i1}) \|\bar{\xi}_i\|^2 &\leq \bar{\xi}_i^T P_{i1} \bar{\xi}_i \leq \|P_{i1}\| \|\bar{\xi}_i\|^2 \\ \lambda_{\min}(P_{i2}) \|\bar{\eta}_i\|^2 &\leq \bar{\eta}_i^T P_{i2} \bar{\eta}_i \leq \|P_{i2}\| \|\bar{\eta}_i\|^2\end{aligned} \quad (4-37)$$

把式(4-28), (4-29)和(4-35)代入式(4-27), 然后结合式(4-37), 可以计算出

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq -\sum_{i=1}^N \left(L_i^{1-2t_0} - \frac{\check{v}_{i2}}{\theta_{i1}} \right) \bar{\theta}_{i1} L_i^{2t_0} \|\bar{\xi}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N (\mu_{i1} t_{i0} \rho_i(\cdot) - \check{\gamma}_i(\cdot)) \bar{\xi}_i^T P_{i1} \bar{\xi}_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \left(L_i^{1-2t_0} - \frac{\check{v}_{i3}}{\theta_{i2}} \right) \bar{\theta}_{i2} L_i^{2t_0} \|\bar{\eta}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N (\mu_{i2} t_{i0} \rho_i(\cdot) - \check{\gamma}_i(\cdot)) \bar{\eta}_i^T P_{i2} \bar{\eta}_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \check{v}_{i1} e_i^2 + \sum_{i=1}^N \check{v}_{i4} d_0^2\end{aligned} \quad (4-38)$$

其中 $\check{\gamma}_i(\cdot) = \frac{1}{\lambda_{\min}(P_{i1})} \bar{\gamma}_i(\cdot)$, $\check{\gamma}_i(\cdot) = \frac{1}{\delta_{i3} \lambda_{\min}(P_{i2})} \bar{\gamma}_{i1}(\cdot)$; $\bar{\theta}_{i1}$ 和 $\bar{\theta}_{i2}$ 表示为

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{i1} &= \bar{\mu}_{i1} \theta_{i1} - \mu_{i1} t_{i0} \|P_{i1}\| \beta_i \\ \bar{\theta}_{i2} &= \bar{\mu}_{i2} \theta_{i2} - \mu_{i2} t_{i0} \|P_{i2}\| \beta_i\end{aligned} \quad (4-39)$$

对整个闭环系统, 选择李亚普诺夫函数为

$$V = V_1 + V_2 \quad (4-40)$$

结合式(4-25)和式(4-38), 能得到 V 的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^N \left(L_i^{1-2t_0} - \frac{\bar{\sigma}_{i1}}{\theta_{i1}} \right) \bar{\theta}_{i1} L_i^{2t_0} \|\bar{\xi}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N (\mu_{i1} t_{i0} \rho_i(\cdot) - \check{\gamma}_i(\cdot)) \bar{\xi}_i^T P_{i1} \bar{\xi}_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \left(L_i^{1-2t_0} - \frac{\bar{\sigma}_{i2}}{\theta_{i2}} \right) \bar{\theta}_{i2} L_i^{2t_0} \|\bar{\eta}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N (\mu_{i2} t_{i0} \rho_i(\cdot) - \check{\gamma}_i(\cdot)) \bar{\eta}_i^T P_{i2} \bar{\eta}_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \chi_{i1} e_i^2 + \sum_{i=1}^N \left(\check{v}_{i4} + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \right) d_0^2\end{aligned} \quad (4-41)$$

其中 $\bar{\sigma}_{i1} = \check{v}_{i2} + \frac{\omega_2^2}{\delta_1}$, $\bar{\sigma}_{i2} = \check{v}_{i3} + \frac{\omega_2^2}{\delta_1}$, χ_{i1} 定义为

$$\chi_{i1} = \omega_0 \omega_1 - (3\delta_1 + \check{v}_{i1}) \quad (4-42)$$

通过设计 ω_0 , $\rho_i(\cdot)$, β_i 和 $L_i(0)$ 为:

$$\begin{aligned} \omega_0 &> \frac{3\delta_1 + \check{v}_{i1}}{\omega_1}, \quad \rho_i(\cdot) \geq \frac{\check{\gamma}_i(\cdot)}{\mu_{i1}l_{i0}} + \frac{\check{\gamma}_i(\cdot)}{\mu_{i2}l_{i0}} \\ \beta_i &< \min \left\{ \frac{\bar{\mu}_{i1}\theta_{i1}}{l_{i0}\mu_{i1}\|P_{i1}\|}, \frac{\bar{\mu}_{i1}\theta_{i2}}{l_{i0}\mu_{i2}\|P_{i2}\|} \right\} \\ L_i(0) &\geq \max \left\{ \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_{i1}}{\bar{\theta}_{i1}} \right)^{\frac{1}{1-2t_{i0}}}, \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_{i2}}{\bar{\theta}_{i2}} \right)^{\frac{1}{1-2t_{i0}}} \right\} \end{aligned} \quad (4-43)$$

可以保证式(4-39)中的 $\bar{\theta}_{i1} > 0$, $\bar{\theta}_{i2} > 0$; 式(4-42)中的 $\chi_{i1} > 0$ 。

结合式(4-20), (4-26), (4-37), (4-41)和(4-43), 可以获得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^N \chi_{i1} e_i^2 - \sum_{i=1}^N \bar{\theta}_{i1} \|\bar{\xi}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N \bar{\theta}_{i2} \|\bar{\eta}_i\|^2 + \chi_0 \\ &\leq -\chi_1 V + \chi_0 \end{aligned} \quad (4-44)$$

其中 $\chi_1 = \min \left\{ \frac{\chi_{i1}}{\|\Psi\|}, \frac{\bar{\theta}_{i1}}{\mu_{i1}\|P_{i1}\|}, \frac{\bar{\theta}_{i2}}{\mu_{i2}\|P_{i2}\|}; i \in \mathbb{N}_{1:N} \right\}$, $\chi_0 = \sum_{i=1}^N \left(\check{v}_{i4} + \frac{\omega_2^2}{\delta_1} \right) d_0^2$ 。

根据式(4-44), 能够计算出

$$V(t) \leq V(0)e^{-\chi_1 t} + \frac{\chi_0}{\chi_1} \quad (4-45)$$

利用式(4-45), 可以得到随着 $t \rightarrow \infty$, $V_1(t) = \mathbf{e}^T \Psi \mathbf{e} \rightarrow \frac{\chi_0}{\chi_1}$, 这意味着 $|e_i(t)|$ 能收敛至

可调参数, 进而说明领导跟随一致性能够实现。同时, 也能结论跟随者系统(4-1)的所有状态是全局一致最终有界的。证明完毕。

注 4.4: 在式(4-23)中, 由于 Ω 是拓扑矩阵 \mathcal{H} 所有可能结构的集合, 所以在只需要知道智能体数目的条件下, 就可以获得这个鲁棒参数 $\omega_2 \geq \sup_{\mathcal{H} \in \Omega} (\|\Psi \mathcal{H}\|)$, 意味着它是

独立于全局通信拓扑信息。在有向固定拓扑下, 拓扑矩阵 \mathcal{H} 是一个 \mathcal{M} 矩阵, 它的所有特征根具有正实部, 所以引理 4.1 成立。该引理在本章中扮演重要角色。又由于基于降阶补偿器的控制器(4-13)只依赖于智能体相对输出信息, 所以它是完全分布式的。相比现有结果, 该控制器不需要传输补偿器的状态信息, 仅依赖于较少数量的传输状态, 进而可降低通信负担和潜在的攻击风险。同时, 此控制器有类线性结构, 方便在实际中实施。需要说明的是, 在没有假设 4.3 的条件下 (即 y_0 和 \dot{y}_0 是无界的),

本算法也能实现领导跟随一致性，但无法保证跟随者系统状态及控制器的有界性。

注 4.5: 在式(4-4)中，动态增益 $L_i(t)$ 也在本章的一致性分析设计中起到了关键作用。根据式(4-45)，能够知道 $|e_i(t)|$ 和 $|y_i(t)|$ 在 $t \in [0, \infty)$ 上都是有界的，而式(4-4)中 $\rho_i(y_i, e_i)$ 是一个平滑函数，所以能够结论在 $t \in [0, \infty)$ 上，函数 $\rho_i(\cdot)$ 也是有界的。然后结合式(4-5)，很容易的能推出 $L_i(t)$ 是一个非减有界函数。通过选择引理 4.2 中 $t_{i0} < 0.5$ 和式(4-43)中 $L_i(0)$ ，能够保证式(4-41)中 $L_i^{1-2t_{i0}} - \frac{\bar{\sigma}_{i1}}{\theta_{i1}} \geq 1$ 和 $L_i^{1-2t_{i0}} - \frac{\bar{\sigma}_{i2}}{\theta_{i2}} \geq 1$ ，且可以得到

式(4-44)。除此之外，由于跟随者系统(4-1)具有较强的非线性特性，致使现有的一致性算法不再适用于该系统，所以本章提出了新颖的动态增益一致性控制算法。本结果没有采用反步控制方法，因而避免了“微分大爆炸”问题。

4.5 数值仿真

为了验证本章提出的输出反馈一致性控制算法有效性，本部分将考虑 4 个智能体，其中虚拟领导者 0 的输出和跟随者智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{1,3}$ 的动力学模型分别描述为

$$\text{领导者 0: } y_0 = 0.3\sin(0.06t) + 0.5\sin(0.08t)$$

$$\text{跟随者 1: } \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = u_1 + x_{11}^2 x_{12} \sin(x_{12}) \\ y_1 = x_{11} \end{cases}$$

$$\text{跟随者 2: } \begin{cases} \dot{x}_{21} = u_2 + x_{21} \\ y_2 = x_{21} \end{cases}$$

$$\text{跟随者 3: } \begin{cases} \dot{x}_{31} = u_3 + x_{31}^2 \\ y_3 = x_{31} \end{cases}$$

很显然，以上系统满足假设 4.2-4.3 中的条件。

这些智能体之间的通信关系刻画为满足假设 4.1 的通信拓扑，如图 4-1 所示。然后选取 $a_{21} = 1$ ， $a_{32} = 1$ ， $b_1 = 1$ 。

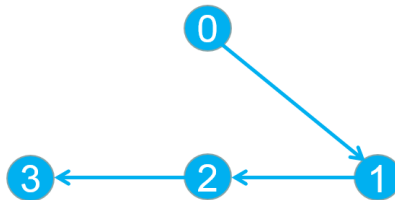


图 4-1 通信拓扑图

Fig.4-1 The communication topology

取 $\omega_1 = 0.38$ ，基于引理 4.1，能计算得到 $\Psi = \text{diag}\{0.7924, 0.5283, 0.5283\}$ 。

取 $\omega_2 = 3$ ， $\nu_{111} = \nu_{112} = \nu_{113} = 4$ ， $\delta_1 = 0.1$ ，进而选择 $\omega_0 = 3$ 。

取 $t_0 = 0.1$ ， $t_{11} = 1$ ， $q_{11} = 42$ ， $\theta_{11} = 84$ ， $t_{12} = 1$ ， $k_{11} = 42$ ， $\theta_{12} = 84$ ，基于引理 4.2，能得到 $P_{11} = 1$ ， $P_{12} = 1$ 。

取 $\delta_{12} = 42$ ， $\bar{\mu}_{11} = \bar{\mu}_{12} = 0.5$ ， $\mu_{12} = 1$ ， $\mu_{11} = 1$ ，进而选择 $\beta_1 = 410$ 。

取 $\delta_{13} = 1$ ， $\nu_{121} = 1$ ， $\nu_{131} = 1$ ， $\nu_{141} = \nu_{142} = \nu_{143} = 1$ ， $\gamma_{11}(\cdot) = x_{11}^2(2 + 9e_1^2)$ ， $\gamma_{22}(\cdot) = 3$ ， $g_{12} = 3e_1 x_{11}^2 \sin(3e_1)$ ，进而选择 $\rho_1(\cdot) = 10(4y_1^2(2 + 9e_1^2) + 1017)$ 。

初始值选择为： $x_{11}(0) = 0$ ， $x_{12}(0) = 0.1$ ， $x_{21}(0) = 0.8$ ， $x_{31}(0) = -0.5$ ， $L_1(0) = 24.8$ 和 $\hat{x}_{12}(0) = 0.02$ 。仿真结果被呈现在图 4-2 至图 4-6。

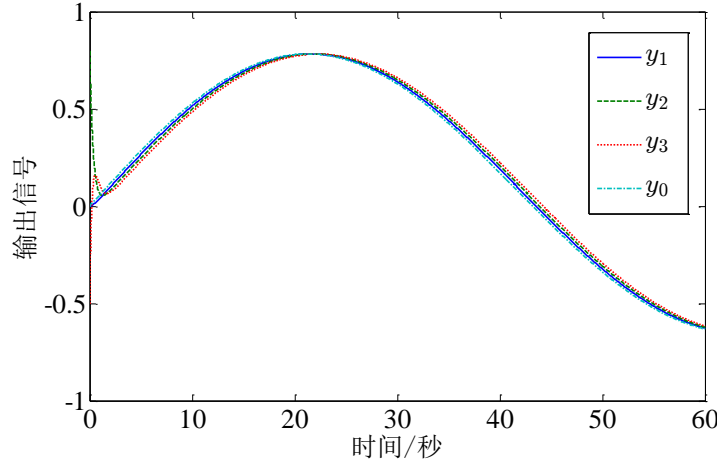


图 4-2 输出信号 $y_i, i \in \mathbb{N}_{0,3}$ 的响应

Fig.4-2 The responses of output signals $y_i, i \in \mathbb{N}_{0,3}$

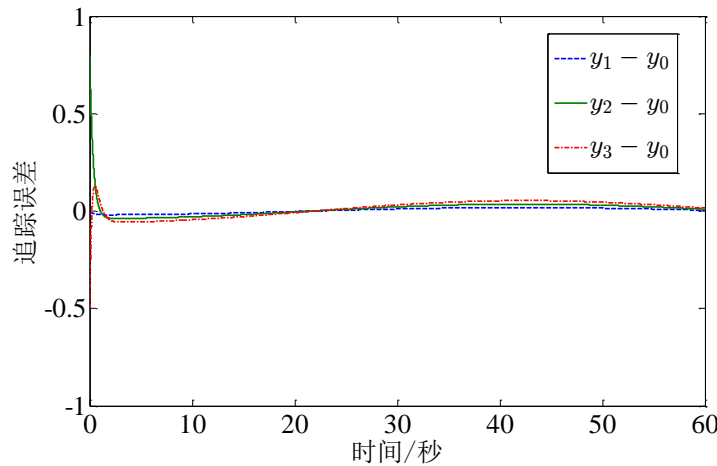


图 4-3 追踪误差 $y_i - y_0, i \in \mathbb{N}_{1,3}$ 的响应

Fig.4-3 The responses of tracking errors $y_i - y_0, i \in \mathbb{N}_{1,3}$

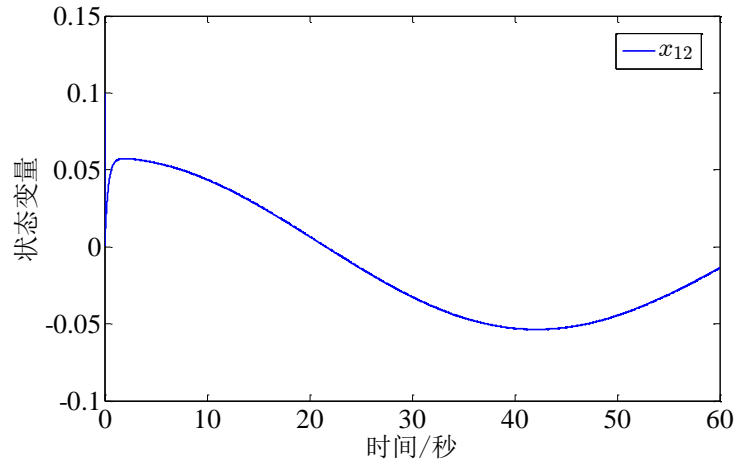


图 4-4 状态变量 x_{12} 的响应

Fig.4-4 The responses of the state variable x_{12}

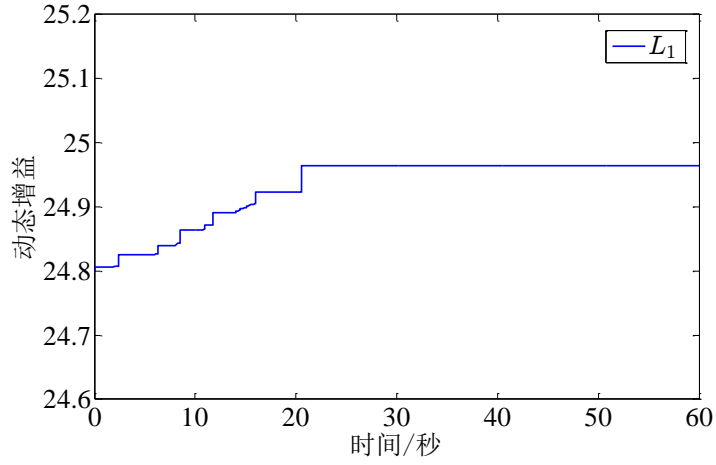


图 4-5 动态增益 L_1 的响应

Fig.4-5 The responses of the dynamic gains L_1

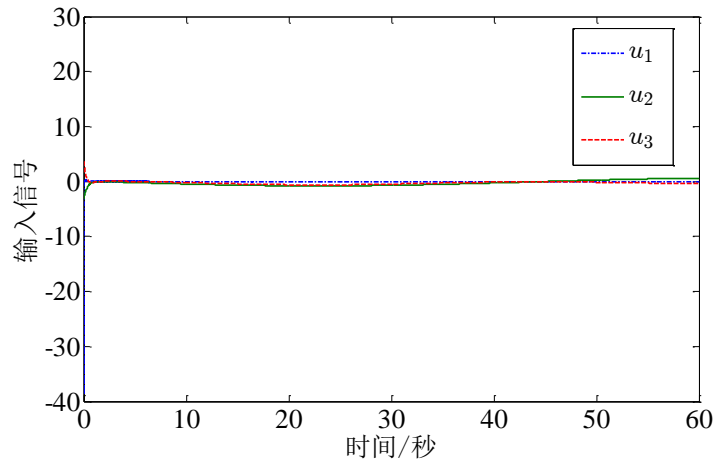


图 4-6 输入信号 $u_i, i \in \mathbb{N}_{1:3}$ 的响应

Fig.4-6 The responses of input signals $u_i, i \in \mathbb{N}_{1:3}$

图 4-2 和图 4-3 表明了所有智能体的输出能实现一致性。图 4-4 表明了跟随者系统的所有状态都是有界的。图 4-5 说明了动态增益是一个非减的有界函数。图 4-6 呈现了有界的控制输入信号。基于以上仿真结果，能够结论本章提出的领导跟随输出反馈一致性控制算法是有效的。

4.6 本章小结

本章针对一类高阶非线性多智能体系统，研究了其领导跟随输出反馈一致性问题。在跟随者系统具有较强的非线性特性条件下，基于智能体的相对输出信息，为跟随者设计了降阶动态补偿器。该补偿器在实际中可以相对容易且经济地实施。然后，提出了基于该补偿器的完全分布式输出反馈一致性控制器。该控制器仅需要较少的传输状态，进而减轻了通信负担和潜在的网络攻击风险。由于本算法仅能解决非线性多智能体系统领导跟随输出一致性控制问题，所以将来的工作主要致力于解决基于降阶补偿器的领导跟随状态一致性控制问题。

第5章 未知时变输入滞后非线性多智能体系统输出反馈一致性控制

5.1 引言

多智能体系统一致性控制具有广泛的工程应用价值，因而受到越来越多的科技工作者青睐。信息经由网络传输需要花费时间，不可避免的会产生时滞，如果对系统控制时不考虑网络诱导产生的时滞影响，可能会降低控制系统性能或者导致系统故障，甚至会造成无法估量的灾难。多年来，有大量优秀结果考虑了时滞影响下多智能体系统一致性问题。例如，文献[53-63]考虑了输入时滞下的一致性控制问题。但是这些结果都假定了智能体系统状态信息完全可以通过测量获得。然而，在实际中通常并非都是如此。通常，相比系统的输出信息，其状态信息更难通过测量获得。因此，研究具有输入时滞的多智能体系统输出反馈一致性控制更有实际意义。

近年来，一些学者从不同的角度研究了输出反馈一致性控制。例如，从系统模型角度看，文献[124]研究了输入滞后离散时间线性多智能体系统，文献[123,125-128]研究了输入滞后连续时间线性多智能体系统，文献[129-130]研究了输入滞后非线性多智能体系统。尽管文献[129-130]研究了输入滞后非线性多智能体系统输出反馈一致性控制，但是这些工作都假定了智能体的输入滞后是同一个已知常数，由于每个智能体有自己的通信渠道，所以实际中所有智能体的输入时滞应该是不尽相同的。同时，输入信号通常经由网络传输，而由于网络环境复杂多变，可能致使信号传输过程中产生的时滞随着时间推移而发生改变，并且很难通过测量获得其精确值。因此，从实际角度看，把智能体的输入滞后描述成彼此不同且未知的时变函数更合理。不幸的是，如果输入时滞描述为此类未知时变函数，那么现有的输出反馈一致性控制算法将不再适用。如何在少保守性的输入时滞条件下，针对非线性多智能体系统，提出合理可行的领导跟随输出反馈一致性控制算法，仍然是一个具有挑战性的问题。

通过以上讨论，本章研究了基于两类观测器的未知时变输入滞后非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。对比现有的工作，本章的主要贡献总结如下：首先，所有多智能体的输入时滞是未知的、时变的，且是彼此不同的。在相对少保守的条件下，利用截断预测控制方法，提出了分布式领导跟随输出反馈一致

性控制策略。其次，基于相关输出信息，为跟随者构造了分布式观测器和经典观测器，分别来估计领导者和跟随者的状态信息。最后，设计了基于双重观测器的有限维分布式输出反馈控制器。且通过构造合适的 L-K 泛函，给出了实现领导跟随一致性的充分条件。

5.2 预备知识和问题描述

5.2.1 预备知识

拓扑理论知识已经描述在 1.4.1。本章考虑通信拓扑，满足如下一个假设条件

假设 5.1: 拓扑 \mathcal{G} 是有向固定的，且含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

引理 5.1^[146]: 对任意正定矩阵 Ψ ，存在一个非负常数 ω ，使得下面等式成立

$$e^{A^T t} \Psi e^{At} - e^{\omega t} \Psi = -e^{\omega t} \int_0^t e^{-\omega \tau} e^{A^T \tau} R e^{A \tau} d\tau$$

其中 A 定义在(5-1)， $R = -A^T \Psi - \Psi A + \omega \Psi$ 。若 R 是正定矩阵，则可得 $e^{A^T t} \Psi e^{At} \leq e^{\omega t} \Psi$ 。

5.2.2 问题描述

在本章中，研究了基于双重观测器的未知输入滞后非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。考虑由编号为0的一个领导者和编号为1,...,N的N个跟随者组成的N+1个智能体。智能体 i ， $i \in \mathbb{N}_{0,N}$ 的非线性动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(\phi_i(t)) + f(x_i(t)) \\ y_i(t) = Cx_i(t) \end{cases} \quad (5-1)$$

其中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ， $u_i(t) \in \mathbb{R}^p$ 和 $y_i(t) \in \mathbb{R}^q$ 分别表示智能体 i 的状态变量，控制输入和输出； $u_0(\phi_0) = 0$ ；仅仅输出信息能通过测量获得； $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 是常数矩阵，且 (A, B) 是可控的， (A, C) 是可观的； $\phi_i(t) = t - d_i(t)$ 是一个连续可微函数， $d_i(t)$ 是未知时变输入时滞； $f(x_i): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是非线性函数向量，满足 $f(0) = 0$ 。

这 $N+1$ 个智能体之间的通信关系是由有向固定拓扑刻画，已描述在章节 1.4.1 中，并满足假设 5.1 中的条件。仅仅智能体的输出信息能基于此拓扑进行传输。在假设 5.1 下，拓扑矩阵 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}$ 是一个 \mathcal{M} 矩阵，并且其所有特征值 λ_i ， $i \in \mathbb{N}_{1,N}$ 都具有正实部，即 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ 。

注 5.1: 系统(5-1)能表示许多实际系统的动力学模型，如具有输入时滞的单连杆

机械臂和倒立摆系统等。通常来说，由于各智能体有自己通信渠道和执行器，每个智能体的信息传输和执行器响应需要花费时间不尽相同，从而使得智能体的输入时滞也彼此不同。同时，由于网络和外部环境的复杂变化，输入时滞可能不断变化且难以测量。因此，实际情况下，每个智能体的输入时延往往是时变的、不同的和未知的。尽管现有部分工作解决了输入滞后多智能体系统输出反馈一致性控制问题，但这些工作都假设了所有智能体的输入时滞必须是同一个已知常数。很显然，此假设是相对保守的。本章将提出一个新的输出反馈一致性算法去放松该严格条件。

为了实现领导跟随一致性，对系统(5-1)，给出一些必要的假设条件

假设 5.2: 对 $d_i(t)$ 和 $\phi_i(t)$ 的导数，存在已知常数 \bar{d}_i 和 β_i ，使得

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_i(t) \leq \bar{d}_i \\ 0 &< \beta_i \leq \dot{\phi}_i(t) < +\infty \end{aligned}$$

假设 5.3: 对任意的两个向量 $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ 和 $\bar{y} \in \mathfrak{R}^n$ ，存在一个非负常数 γ ，使得

$$\|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\| \leq \gamma \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

注 5.2: 假设 5.2 是针对输入时滞给出的标准条件，见文献[143]。本章把智能体的输入时滞描述为彼此不同且未知的时变函数，而不是彼此相同且已知的常数或时变函数，所以相比现有的相关工作，此条件具有较少的保守性。同时，由于 $d_i(t)$ 是未知的，它不能直接用于反馈控制，通过给出假设 5.2，就可以把 \bar{d}_i 和 β_i 直接用于反馈控制。假设 5.3 是针对系统非线性项给出的标准条件，见文献[63]；单连杆机械臂和倒立摆等实际系统都具有满足该假设条件的非线性特性。

目标: 本章的主要目标是为跟随者设计分布式输出反馈一致性控制器，使得所有智能体的对应状态获得一致性，即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0, i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 。

5.3 双重观测器设计

本部分将为每个跟随者设计两个观测器，即分布观测器和经典观测器，其中利用智能体相关输出信息设计的分布观测器，用来估计领导者的状态信息；利用跟随者输出信息设计的经典观测器，用来估计该跟随者的状态信息。

5.3.1 分布式观测器设计

由于领导者状态信息难以测量，且不是所有跟随者都能获得领导者的输出信息，所以本部分将为跟随者设计分布式观测器重构领导者的状态信息，其中为跟随者 i ，

$i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计如下分布式观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0^i(t) = A\hat{x}_0^i(t) + Le_i(t) + f(\hat{x}_0^i(t)) \\ y_0^i(t) = C\hat{x}_0^i(t) \end{cases} \quad (5-2)$$

其中 $\hat{x}_0^i \in \mathbb{R}^n$ 表示该观测器的状态, $y_0^i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 定义为该观测器的输出, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 表示设计的控制增益, e_i 表示一致性误差且定义为

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (y_0^j - y_0^i) + b_i (y_0 - y_0^i) \quad (5-3)$$

其中 a_{ij} 和 b_i 定义在章节 1.4.1。

定义分布观测误差:

$$z_i = \hat{x}_0^i - x_0 \quad (5-4)$$

利用式(5-1)-(5-4), 能够得到 z_i 的导数:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= Az_i + \hat{f}_i + Le_i \\ &= Az_i + \hat{f}_i + LC \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{x}_0^j - \hat{x}_0^i) + b_i (x_0 - \hat{x}_0^i) \right) \\ &= Az_i + \hat{f}_i + LC \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (z_j - z_i) - b_i z_i \right) \end{aligned} \quad (5-5)$$

其中 $\hat{f}_i = f(\hat{x}_0^i) - f(x_i)$ 。

定义 $Z = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_N^T]^T$ 。然后根据式(5-5), 可以计算获得

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= (I_N \otimes A)Z - (\mathcal{H} \otimes LC)Z + \hat{f} \\ &= A_z Z + \hat{f} \end{aligned} \quad (5-6)$$

其中 $\hat{f} = [\hat{f}_1^T, \hat{f}_2^T, \dots, \hat{f}_N^T]^T$ 和 $A_z = I_N \otimes A - \mathcal{H} \otimes LC$ 。

引理 5.2: 在假设 5.1 下, 存在矩阵 L 使 $A_z = I_N \otimes A - \mathcal{H} \otimes (LC)$ 是赫尔维兹矩阵。

证明: 在假设 5.1 下, 拓扑矩阵 \mathcal{H} 的所有特征根 λ_i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 有正实部, 即 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ 。定义酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$, 使得 $U^* \mathcal{H} U = \Lambda$, 其中 Λ 是上三角矩阵, 且其对角线元素是 λ_i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 。取如下一个相似变换

$$\begin{aligned} &(U^* \otimes I_n) A_z (U \otimes I_n) \\ &= (U^* \otimes I_n) (I_N \otimes A - \mathcal{H} \otimes (LC)) (U \otimes I_n) \\ &= I_N \otimes A - \Lambda \otimes (LC) \end{aligned}$$

它是一个上三角块矩阵, 且其对角块矩阵为 $A_{z_i} = A - \lambda_i LC$, 这意味着 A_z 的特征根能通过 A_{z_i} 的特征根确定。由于 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, 一定存在矩阵 L , 使得 A_{z_i} 是赫尔维兹矩阵。然后可以结论在假设 5.1 下, 存在矩阵 L 使得 A_z 是赫尔维兹矩阵。

本部分的主要结果可以描述成如下引理。

引理 5.4: 在引理 5.2 下, 如果存在正常数 δ_1 和对称正定矩阵 P_z , 使得

$$P_z A_z + A_z^T P_z \leq -2\gamma\delta_1 I_{Nn}; \quad \bar{\delta}_1 > 0 \quad (5-7)$$

其中 γ 定义在假设 5.3, $\bar{\delta}_1 = \frac{2\gamma}{\|P_z\|}(\delta_1 - \|P_z\|)$; 则分布式观测器(5-2)能渐近地估计领导者的状态信息, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_0^i(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ 。

证明: 对系统(5-6), 选取李亚普诺夫函数

$$V_z = Z^T P_z Z \quad (5-8)$$

利用引理 1.1, 假设 5.3 和式(5-6)-(5-8), 能得到 V_z 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= Z^T (P_z A_z + A_z^T P_z) Z + 2Z^T P_z \hat{f} \\ &\leq -2\gamma\delta_1 Z^T Z + \gamma \|P_z\| Z^T Z + \frac{\|P_z\|}{\gamma} \|\hat{f}\|^2 \\ &\leq -2\gamma(\delta_1 - \|P_z\|) \|Z\|^2 \\ &\leq -\bar{\delta}_1 V_z \end{aligned} \quad (5-9)$$

根据式(5-8), 能够计算得到

$$V_z(t) \leq e^{-\bar{\delta}_1 t} V_z(0) \quad (5-10)$$

结合式(5-4), (5-8)和(5-10), 可推出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_0^i(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ 。证明完毕。

5.3.2 经典观测器设计

由于跟随者状态信息难以测量, 所以本部分将为跟随者设计经典观测器重构其状态信息, 其中为跟随者 i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计如下经典观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = A\hat{x}_i + Bu_i(\phi_i) + K(y_i - \hat{y}_i) + f(\hat{x}_i) \\ \hat{y}_i = C\hat{x}_i \end{cases} \quad (5-11)$$

其中 $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^n$ 表示该观测器的状态, $\hat{y}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 定义为该观测器的输出, $K_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 表示设计的增益矩阵。

定义经典观测误差:

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - x_i \quad (5-12)$$

结合式(5-1), (5-11)和(5-12), 能够得到 \bar{x}_i 的导数:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &= A\bar{x}_i + K(y_i - \hat{y}_i) + f(\hat{x}_i) - f(x_i) \\ &= A\bar{x}_i - KC(\hat{x}_i - x_i) + \bar{f}_i \\ &= \bar{A}\bar{x}_i + \bar{f}_i \end{aligned} \quad (5-13)$$

其中 $\bar{A} = A - KC$ 和 $\bar{f} = f(\hat{x}_i) - f(x_i)$ 。

定义 $X = [\bar{x}_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ 。然后根据(5-13)，可以推导出

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (I_N \otimes \bar{A})X + \bar{f} \\ &= A_x X + \bar{f}\end{aligned}\quad (5-14)$$

其中 $A_x = I_N \otimes \bar{A}$ 和 $\bar{f} = [\bar{f}_1^T, \bar{f}_2^T, \dots, \bar{f}_N^T]^T$ 。

很显然，存在矩阵 K ，使得 A_x 是赫尔维兹矩阵。然后把本部分的主要结果总结成如下一个引理。

引理 5.5: 在 A_x 是赫尔维兹矩阵的条件下，如果存在正常数 δ_2 和对称正定矩阵 P_x ，使得如下不等式成立

$$P_x A_x + A_x^T P_x \leq -2\gamma\delta_2 I_{Nn}; \quad \bar{\delta}_2 > 0 \quad (5-15)$$

其中 γ 定义在假设 5.3， $\bar{\delta}_2 = \frac{2\gamma}{\|P_x\|}(\delta_2 - \|P_x\|)$ ，则经典观测器(5-11)能渐近地估计跟随者的状态信息。

证明: 对系统(5-11)，选择李亚普诺夫函数

$$V_x = X^T P_x X \quad (5-16)$$

结合引理 1.1，假设 5.3 和(5-14)-(5-16)，能得到 V_x 的导数：

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= X^T (P_x A_x + A_x^T P_x) X + 2X^T P_x \hat{f} \\ &\leq -2\gamma\delta_2 X^T X + \gamma \|P_x\| X^T X + \frac{\|P_x\|}{\gamma} \|\bar{f}\|^2 \\ &\leq -2\gamma(\delta_2 - \|P_x\|) \|X\|^2 \\ &\leq -\bar{\delta}_2 V_x.\end{aligned}\quad (5-17)$$

根据式(5-17)，能够计算得到

$$V_x(t) \leq e^{-\bar{\delta}_2 t} V_x(0) \quad (5-18)$$

结合式(5-12)，(5-16)和(5-18)，可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_i(t) - x_i(t)\| \rightarrow 0$ 。证明完毕。

注 5.3: 以上两类观测器在本章的领导跟随一致性控制算法设计中扮演了非常重要的角色，在其帮助下，本章研究的问题可以转化为经典的单系统镇定问题。基于相对的输出信息，这两类观测器为跟随者分别重构了领导者的状态和其自身状态，为下面部分实施的控制器设计提供了反馈信号。分布式观测器(5-2)是本章的一个创新设计，根据式(5-3)可知，它仅依赖于邻居领导者和观测器输出信息。而经典观测器引入于现有的工作，它仅依赖于跟随者的输出信息。

5.4 分布式输出反馈一致性控制器设计

本部分将为跟随者设计分布式控制器，使得所有智能体获得一致性。在给出控制器之前，引入如下一个状态变换

$$\eta_i = \hat{x}_i - \hat{x}_0^i; \quad i \in \mathbb{N}_{1:N} \quad (5-19)$$

结合式(5-2)，(5-11)，(5-12)和(5-19)，能够计算得到

$$\dot{\eta}_i = A\eta_i + Bu_i(\phi_i) + \tilde{f}_i - KC\bar{x}_i - Le_i \quad (5-20)$$

其中 $\tilde{f}_i = f(\hat{x}_i) - f(\hat{x}_0^i)$ 。

很显然，通过引入分布式观测器(5-2)，经典观测器(5-11)和状态变换(5-19)，本章研究的领导跟随一致性控制问题转化为了未知输入滞后非线性系统(5-20)的镇定问题。下面，将为系统(5-20)设计控制器保证其镇定性，进而实现领导跟随一致性。

本章的主要结果总结成如下一个定理。

定理 5.1: 在假设 5.1-5.3 下，若存在正常数 $\bar{\alpha}_i$ ， ω_1 ， ω_2 和对称正定矩阵 P_i ，使得如下线性矩阵不等式成立

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i P_i^{-1} &\geq BB^T \\ A^T A - \omega_1 I_n &< 0 \\ \left(A - \frac{1}{2} \omega_2 I_n \right)^T + \left(A - \frac{1}{2} \omega_2 I_n \right) &< 0 \\ \begin{bmatrix} P_i^{-1} A^T + A P_i^{-1} - 2BB^T + (5\bar{\alpha}_i^2 + 1)v_i I_n & P_i^{-1} \\ P_i^{-1} & -\frac{1}{\rho_i} I_n \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (5-21)$$

其中 $S_i = -B^T P_i$ ， $\rho_i = \frac{\omega_1 \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{v_i \omega_2} - \frac{\omega_1 \bar{d}_i}{v_i \omega_2} + \frac{3\gamma^2}{v_i} + \frac{\gamma^2 \bar{d}_i^2 e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{v_i} + \frac{2\bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i^2 e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1}}{v_i}$ ， v_i 是任意的正常数，那么通过为跟随者 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 设计如下控制器

$$u_i(t) = S_i e^{A\bar{d}_i} \eta_i(t) \quad (5-22)$$

可使得所有智能体的对应状态实现一致。

证明: 把式(5-22)代入式(5-20)，并基于断截预测控制方法，能得到

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i(t) &= A\eta_i(t) + BS_i e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} e^{Ad_i(t)} \eta_i(\phi_i) + \tilde{f}_i(\hat{x}_i(t), \hat{x}_0^i(t)) - KC\bar{x}_i(t) - Le_i(t) \\ &= \left(A + BS_i e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} \right) \eta_i(t) - BS_i (\lambda_{i1}(t) + \lambda_{i2}(t) - \lambda_{i3}(t) - \lambda_{i4}(t)) \\ &\quad + \tilde{f}_i(\hat{x}_i(t), \hat{x}_0^i(t)) - KC\bar{x}_i(t) - Le_i(t) \end{aligned} \quad (5-23)$$

其中 λ_{ij} , $j \in \mathbb{N}_{1:4}$ 定义为

$$\begin{aligned}\lambda_{i1}(t) &= e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} B S_i e^{A\bar{d}_i} \eta_i(\phi_i) ds \\ \lambda_{i2}(t) &= e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} \tilde{f}_i(\hat{x}_i(s), \hat{x}_0^i(s)) ds \\ \lambda_{i3}(t) &= e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} K C \bar{x}_i(s) ds \\ \lambda_{i4}(t) &= e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} \int_{\phi_i(t)}^t e^{A(t-s)} L e_i(s) ds\end{aligned}\quad (5-24)$$

对系统(5-23), 选取李亚普诺夫函数

$$V_i = V_{i1} + V_{i2} + V_{i3} + V_{i4} + V_{i5} \quad (5-25)$$

其中 V_{ij} , $j \in \mathbb{N}_{1:5}$ 描述为

$$\begin{aligned}V_{i1} &= \eta_i^T P_i \eta_i \\ V_{i2} &= \frac{\bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1}}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i} \left(\int_{t-s}^t \|\eta_i(\tau)\|^2 d\tau \right) ds \\ V_{i3} &= \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i} \gamma^2}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i} \left(\int_{t-\tau}^t \|\eta_i(s)\|^2 ds \right) d\tau \\ V_{i4} &= \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i} \left(\int_{t-\tau}^t \|K C \bar{x}_i(s)\|^2 ds \right) d\tau \\ V_{i5} &= \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i} \left(\int_{t-\tau}^t \|L e_i(s)\|^2 ds \right) d\tau\end{aligned}\quad (5-26)$$

结合式(5-20), (5-23)和(5-26), 能够计算出 V_{i1} 的导数:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{i1} &= \eta_i^T \left(A^T P_i + P_i A - P_i B B^T P_i e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} - e^{A^T(\bar{d}_i - d_i(t))} P_i B B^T P_i \right) \eta_i \\ &\quad + 2\eta_i^T P_i \left(\tilde{f}_i - K C \bar{x}_i - L e_i \right) + 2\eta_i^T P_i B B^T P_i (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} - \lambda_{i3} - \lambda_{i4})\end{aligned}\quad (5-27)$$

利用引理 1.1, 式(5-24)和(5-27), 可以获得

$$\begin{aligned}2\eta_i^T P_i B B^T P_i \lambda_{ij} &\leq \nu_i \eta_i^T (P_i B B^T P_i)^2 \eta_i + \frac{1}{\nu_i} \|\lambda_{ij}\|^2 \\ &\leq \bar{\alpha}_i^2 \nu_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{1}{\nu_i} \|\lambda_{ij}\|^2, \quad j \in \mathbb{N}_{1:2} \\ -2\eta_i^T P_i B B^T P_i \lambda_{ij} &\leq \nu_i \eta_i^T (P_i B B^T P_i)^2 \eta_i + \frac{1}{\nu_i} \|\lambda_{ij}\|^2 \\ &\leq \bar{\alpha}_i^2 \nu_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{1}{\nu_i} \|\lambda_{ij}\|^2, \quad j \in \mathbb{N}_{3:4}\end{aligned}\quad (5-28)$$

根据引理 1.3, 5.1, 假设 5.2, 式(5-21)和(5-24), 可以推导出

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{i1}\|^2 &\leq d_i(t) \int_{\phi_i(t)}^t \eta_i^T(\phi_i(s)) e^{A^T \bar{d}_i} P_i B B^T e^{A^T(t-s)} e^{(A^T+A)(\bar{d}_i-d_i(t))} \\
 &\quad \times e^{A(t-s)} B B^T P_i e^{A \bar{d}_i} \eta_i(\phi_i(s)) ds \\
 &\leq \bar{d}_i \bar{\alpha}_i^2 \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega_2(t-s+2\bar{d}_i-d_i(t))} \eta_i^T(\phi_i(s)) \eta_i(\phi_i(s)) ds \\
 &\leq \bar{d}_i \bar{\alpha}_i^2 e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \int_{\phi_i(t)}^t \eta_i^T(\phi_i(s)) \eta_i(\phi_i(s)) ds
 \end{aligned} \tag{5-29}$$

通过取 $\tau = \phi_i(s)$, 能够计算出

$$ds = \left(\frac{d}{ds} \phi_i(s) \Big|_{s=\phi_i^{-1}(\tau)} \right)^{-1} d\tau \tag{5-30}$$

利用假设 5.2, 式(5-29)和(5-30), 可以推导出

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{i1}\|^2 &\leq \bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \int_{\phi_i(\phi_i(t))}^{\phi_i(t)} \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) ds \\
 &\leq \bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1} \int_{\phi_i(\phi_i(t))}^{\phi_i(t)} \eta_i^T(\tau) \eta_i(\tau) d\tau \\
 &\leq \bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1} \int_{t-2\bar{d}_i}^t \|\eta_i(\tau)\|^2 d\tau
 \end{aligned} \tag{5-31}$$

根据引理 1.3, 5.1, 假设 5.2-5.3, 式(5-21)和(5-26), 可得

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{i2}\|^2 &\leq \bar{d}_i \int_{\phi_i(t)}^t \check{f}_i^T(\hat{x}_i(s), \hat{x}_0^i(s)) e^{A^T(t-s)} e^{(A^T+A)(\bar{d}_i-d_i(t))} \\
 &\quad \times e^{A(t-s)} \check{f}_i(\hat{x}_i(s), \hat{x}_0^i(s)) ds \\
 &\leq \bar{d}_i \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega_2(t-s+\bar{d}_i-d_i(t))} \eta_i^T(s) \eta_i(s) ds \\
 &\leq \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i} \gamma^2 \int_{t-\bar{d}_i}^t \|\eta_i(s)\|^2 ds
 \end{aligned} \tag{5-32}$$

结合引理 1.3, 5.1, 假设 5.2, 式(5-21)和(5-24), 能够推导出

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{i3}\|^2 &\leq \bar{d}_i \int_{\phi_i(t)}^t [K C \bar{x}_i(s)]^T e^{A^T(t-s)} e^{(A^T+A)(\bar{d}_i-d_i(t))} e^{A(t-s)} K C \bar{x}_i(s) ds \\
 &\leq \bar{d}_i \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega_2(t-s+\bar{d}_i-d_i(t))} [K C \bar{x}_i(s)]^T K C \bar{x}_i(s) ds \\
 &\leq \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i} \int_{t-\bar{d}_i}^t \|K C \bar{x}_i(s)\|^2 ds
 \end{aligned} \tag{5-33}$$

运用引理 1.3, 5.1, 假设 5.2, 式(5-21)和(5-24), 容易得到

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{i4}\|^2 &\leq \bar{d}_i \int_{\phi_i(t)}^t [L e_i(s)]^T e^{A^T(t-s)} e^{(A^T+A)(\bar{d}_i-d_i(t))} e^{A(t-s)} L e_i(s) ds \\
 &\leq \bar{d}_i \int_{\phi_i(t)}^t e^{\omega_2(t-s+\bar{d}_i-d_i(t))} [L e_i(s)]^T L e_i(s) ds \\
 &\leq \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i} \int_{t-\bar{d}_i}^t \|L e_i(s)\|^2 ds
 \end{aligned} \tag{5-34}$$

结合引理 1.1, 假设 5.2 和式(5-27), 不难推导出

$$\begin{aligned}
 & 2\eta_i^T P_i (\tilde{f}_i - KC\bar{x}_i - Le_i) \\
 & \leq \nu_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{3}{\nu_i} \|KC\bar{x}_i\|^2 + \frac{3}{\nu_i} \|Le_i\|^2 + \frac{3}{\nu_i} \|\tilde{f}_i\|^2 \\
 & \leq \nu_i \eta_i^T P_i P_i \eta_i + \frac{3}{\nu_i} \|KC\bar{x}_i\|^2 + \frac{3}{\nu_i} \|Le_i\|^2 + \frac{3\gamma^2}{\nu_i} \eta_i^T \eta_i.
 \end{aligned} \tag{5-35}$$

很容易证明如下不等式成立

$$\begin{aligned}
 & P_i B B^T P_i e^{A(\bar{d}_i - d_i(t))} - P_i B B^T P_i = P_i B B^T P_i \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} A e^{As} ds \\
 & e^{A^T(\bar{d}_i - d_i(t))} P_i B B^T P_i - P_i B B^T P_i = \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} e^{A^T s} A^T ds P_i B B^T P_i
 \end{aligned} \tag{5-36}$$

利用引理 1.1, 1.3, 5.1 和式(5-21), 可以获得

$$\begin{aligned}
 & -P_i B B^T P_i \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} A e^{As} ds - \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} e^{A^T s} A^T ds P_i B B^T P_i \\
 & \leq \nu_i (P_i B B^T P_i)^2 + \frac{1}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} e^{A^T s} ds A^T A \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} e^{As} ds \\
 & \leq \nu_i \bar{\alpha}_i^2 P_i P_i + \frac{\omega_1 (\bar{d}_i - d_i(t))}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} e^{(A^T + A)s} ds \\
 & \leq \nu_i \bar{\alpha}_i^2 P_i P_i + \frac{\omega_1 (\bar{d}_i - d_i(t))}{\nu_i} \int_0^{\bar{d}_i - d_i(t)} e^{\omega_2 s} I_n ds \\
 & \leq \nu_i \bar{\alpha}_i^2 P_i P_i + \frac{\omega_1 \bar{d}_i}{\nu_i \omega_2} (e^{\omega_2 \bar{d}_i} - 1) I_n
 \end{aligned} \tag{5-37}$$

把式(5-28)和(5-31)-(5-37)代入式(5-27), 容易得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{i1} & \leq \eta_i^T \left(A^T P_i + P_i A - 2P_i B B^T P_i + \left(\frac{\omega_1 \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i \omega_2} - \frac{\omega_1 \bar{d}_i}{\nu_i \omega_2} + \frac{3\gamma^2}{\nu_i} \right) I_n \right. \\
 & \quad \left. + \nu_i (5\bar{\alpha}_i^2 + 1) P_i P_i \right) \eta_i + \frac{\bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1}}{\nu_i} \int_{t-2\bar{d}_i}^t \|\eta_i(\tau)\|^2 d\tau \\
 & \quad + \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i} \gamma^2}{\nu_i} \int_{t-\bar{d}_i}^t \|KC\bar{x}_i(s)\|^2 ds + \frac{3}{\nu_i} \|KC\bar{x}_i\|^2 + \frac{3}{\nu_i} \|Le_i\|^2 \\
 & \quad + \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \left(\int_{t-\bar{d}_i}^t \|KC\bar{x}_i(s)\|^2 ds + \int_{t-\bar{d}_i}^t \|Le_i(s)\|^2 ds \right)
 \end{aligned} \tag{5-38}$$

根据式(5-26), 能够计算出 V_{ij} , $j \in \mathbb{N}_{2,5}$ 的导数为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{i2} &= \frac{\bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1}}{\nu_i} \left(2\bar{d}_i \|\eta_i(t)\|^2 - \int_{t-2\bar{d}_i}^t \|\eta_i(\tau)\|^2 d\tau \right) \\
 \dot{V}_{i3} &= \frac{\gamma^2 \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \left(\bar{d}_i \|\eta_i(t)\|^2 - \int_{t-\bar{d}_i}^t \|\eta_i(s)\|^2 ds \right) \\
 \dot{V}_{i4} &= \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \left(\bar{d}_i \|KC\bar{x}_i(t)\|^2 - \int_{t-\bar{d}_i}^t \|KC\bar{x}_i(s)\|^2 ds \right) \\
 \dot{V}_{i5} &= \frac{\bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \left(\bar{d}_i \|Le_i(t)\|^2 - \int_{t-\bar{d}_i}^t \|Le_i(s)\|^2 ds \right)
 \end{aligned} \tag{5-39}$$

结合式(5-25), (5-38)和(5-39), 不难获得

$$\dot{V}_i \leq \eta_i^T \Xi_i \eta_i + \frac{3 + \bar{d}_i^2 e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \left(\|KC\bar{x}_i\|^2 + \|Le_i\|^2 \right) \tag{5-40}$$

其中 Ξ_i 定义如下:

$$\begin{aligned}
 \Xi_i &= A^T P_i + P_i A - 2P_i B B^T P_i + \nu_i (5\bar{\alpha}_i^2 + 1) P_i P_i \\
 &+ \left(\frac{\omega_1 \bar{d}_i e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i \omega_2} - \frac{\omega_1 \bar{d}_i}{\nu_i \omega_2} + \frac{3\gamma^2}{\nu_i} + \frac{2\bar{\alpha}_i^2 \bar{d}_i^2 e^{2\omega_2 \bar{d}_i} \beta_i^{-1}}{\nu_i} + \frac{\gamma^2 \bar{d}_i^2 e^{\omega_2 \bar{d}_i}}{\nu_i} \right) I_n
 \end{aligned} \tag{5-41}$$

利用式(5-2), (5-4), (5-8)和(5-10), 能够推导出

$$\begin{aligned}
 \|Le_i\|^2 &= \left\| LC \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (z_j - z_i) - b_i z_i \right) \right\|^2 \\
 &\leq \|(\mathcal{H} \otimes LC)Z\|^2 \leq \frac{\|\mathcal{H} \otimes LC\|^2}{\lambda_{\min}(P_z)} V_z(t) \leq \frac{\|\mathcal{H} \otimes LC\|^2 V_z(0)}{\lambda_{\min}(P_z)} e^{-\bar{\delta}_1 t}
 \end{aligned} \tag{5-42}$$

根据式(5-12), (5-16)和(5-18), 容易得到如下不等式

$$\|KC\bar{x}_i\|^2 \leq \|KC\|^2 \|X\|^2 \leq \frac{\|KC\|^2}{\lambda_{\min}(P_x)} V_x(t) \leq \frac{\|KC\|^2 V_x(0)}{\lambda_{\min}(P_x)} e^{-\bar{\delta}_2 t} \tag{5-43}$$

把式(5-42)和(5-43)代入式(5-40), 可得

$$\dot{V}_i(t) \leq \eta_i^T(t) \Xi_i \eta_i(t) + \epsilon_{zi} e^{-\bar{\delta}_1 t} + \epsilon_{xi} e^{-\bar{\delta}_2 t} \tag{5-44}$$

其中由式(5-21), 可知 $\Xi_i < 0$; ϵ_{zi} 和 ϵ_{xi} 定义为

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{zi} &= \frac{(3 + \bar{d}_i^2 e^{\omega_2 \bar{d}_i}) \|\mathcal{H} \otimes LC\|^2 V_z(0)}{\nu_i \lambda_{\min}(P_z)} \\
 \epsilon_{xi} &= \frac{(3 + \bar{d}_i^2 e^{\omega_2 \bar{d}_i}) \|KC\|^2 V_x(0)}{\nu_i \lambda_{\min}(P_x)}
 \end{aligned}$$

根据式(5-44)和引理 1.4, 能够得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta_i(t)\| \rightarrow 0$ 。同时根据引理 5.4-5.5, 可以知道 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| \rightarrow 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}_i(t)\| \rightarrow 0$, 又由于如下不等式成立

$$\|x_i(t) - x_0(t)\| = \|\eta_i(t) + z_i(t) - \bar{x}_i(t)\| \leq \|\eta_i(t)\| + \|z_i(t)\| + \|\bar{x}_i(t)\|$$

所以能够结论 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ 。证明完毕。

注 5.4: 根据式(5-22), 可知跟随者 i , $i \in \mathbb{N}_{1,N}$ 的控制器是 $u_i(t) = S_i e^{A\bar{d}_i} \eta_i(t)$, 显然它依赖于输入时滞的上界 \bar{d}_i , 而不是其本身 $d_i(t)$ 。根据式(5-19), 可知 $\eta_i(t)$ 是由分布观测器的状态 $\hat{x}_0^i(t)$ 和经典观测器的状态 $\hat{x}_i(t)$ 构成, 所以此控制器是分布式的。不同于文献[53-63], 本章研究了输出反馈一致性问题, 也就是说, 本结果的控制器仅需要智能体的相关输出信息, 而不是其所有状态信息。相比于文献[123-130], 本章考虑的输入时滞可以是彼此不同且未知的时变函数, 而这些工作的输入时滞必须是精确已知的。很显然, 本结果关于输入时滞条件具有更少的保守性。

注 5.5: 由于智能体具有非线性特性, 且其输入时滞是时变的、不同的、未知的, 这给提出输出反馈一致性控制算法带来了许多的挑战, 例如: 输入时滞的彼此不同, 会导致难以提出分布式一致性控制器; 输入时滞的不断变化, 会导致构造 L-K 泛函变得困难; 输入时滞的难以测量, 会导致输入时滞无法直接应用于反馈控制, 并且难以补偿。为了克服这些困难, 本章首先设计了两类观测器重构智能体的状态信息, 然后在这两类观测器的帮助下, 将领导跟随一致性问题转化为单系统镇定问题, 随后利用断截预测控制方法, 提出了一个新颖的分布式领导跟随输出反馈一致性控制策略, 并给出了实现一致性的充分条件。

5.5 数值仿真

为了验证本章提出的输出反馈一致性控制算法有效性, 本部分将考虑 5 个具有未知输入时滞的单连杆机械臂。相似于文献[142], 单连杆机械臂 i , $i \in \mathbb{N}_{0,4}$ 的动力学模型描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = Ax_i + Bu_i(\phi_i) + f(x_i) \\ y_i = Cx_i \end{cases} \quad (5-45)$$

其中 $g = 9.81$; A , B , C 和 $f(x_i)$ 定义为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(x_i) = \begin{bmatrix} 0, -\frac{m_i g l_i \sin(x_{i1})}{2M_i} \end{bmatrix}^T, \quad B = \begin{bmatrix} 0, \frac{1}{M_i} \end{bmatrix}^T, \quad C = [1, 0]$$

对 $i \in \mathbb{N}_{0,4}$, 选取 $l_i = 8.3 \times 10^{-2}$, $m_i = 8.4 \times 10^{-2}$, $M_i = 1$, $u_0(\phi_0) = 0$, $\phi_i = t - \frac{0.01(t+1)}{it+1}$ 。

系统(5-45)满足假设 5.2-5.3 的条件。对 $i \in \mathbb{N}_{1,4}$, 可选 $\gamma = 0.04$, $\bar{d}_i = 0.01$, $\beta_i = 0.9$ 。

这些智能体之间的通信关系刻画为满足假设 5.1 的通信拓扑，见图 5-1。然后选取 $a_{21}=1$ ， $a_{32}=1$ ， $a_{43}=1$ ， $b_1=1$ ， $b_4=1$ 。

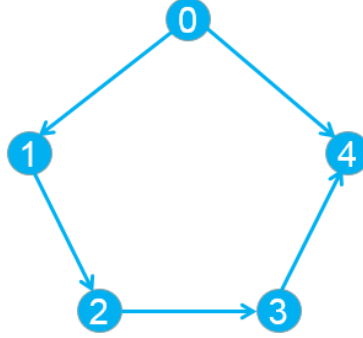


图 5-1 通信拓扑图

Fig.5-1 The communication topology

对 $i \in \mathbb{N}_{1:4}$ ，通过选取 $\bar{\alpha}_i = 0.4$ ， $\omega_1 = 1.05$ ， $\omega_2 = 1.05$ 和 $\nu_i = 0.35$ ，能够计算得到

$$P_i = \begin{bmatrix} 0.0658 & 0.1216 \\ 0.1216 & 0.4852 \end{bmatrix}, \quad S_i = [-0.1216, -0.4852]$$

通过选取 $L = [1, 2]^T$ 和 $\delta_1 = 22.5$ ，可以计算出

$$P_z = \begin{bmatrix} 0.0976 & 0.0501 & 0.0044 & -0.0661 & 0.0285 & -0.0541 & 0.0216 & -0.0021 \\ 0.0501 & 0.2054 & 0.0492 & -0.0816 & 0.0746 & 0.0255 & 0.0345 & 0.0216 \\ 0.0044 & 0.0492 & 0.1134 & 0.0160 & 0.0321 & -0.0833 & 0.0259 & -0.0386 \\ -0.0661 & -0.0816 & 0.0160 & 0.2421 & 0.0201 & -0.0603 & 0.0258 & 0.0143 \\ 0.0285 & 0.0746 & 0.0321 & 0.0201 & 0.1781 & 0.0118 & 0.0666 & -0.0201 \\ -0.0541 & 0.0255 & -0.0833 & -0.0603 & 0.0118 & 0.3000 & -0.0086 & -0.0063 \\ 0.0216 & 0.0345 & 0.0259 & 0.0258 & 0.0666 & -0.0086 & 0.1341 & 0.0442 \\ -0.0021 & 0.0216 & -0.0386 & 0.0143 & -0.0201 & -0.0063 & 0.0442 & 0.3831 \end{bmatrix}$$

通过取 $K = [1, 2]^T$ 和 $\delta_2 = 25$ ，能够计算得到 $P_x = I_4 \otimes P_0$ ，其中

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1494 & 0.0680 \\ 0.0680 & 0.2088 \end{bmatrix}$$

很显然，向量 x_i ， $i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 和向量 \hat{x}_i ， z_i ， \hat{x}_0^i ， $i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 能分别定义为

$$x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T, \quad \hat{x}_i = [\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}]^T, \quad z_i = [z_{i1}, z_{i2}]^T, \quad \hat{x}_0^i = [\hat{x}_{01}^i, \hat{x}_{02}^i]^T$$

初始值： $x_0(0) = [0.4, 0.2]^T$ ， $x_1(0) = [1.2, 4.3]^T$ ， $x_2(0) = [2.1, 3.4]^T$ ， $x_3(0) = [3.2, 2.5]^T$ ， $x_4(0) = [4.1, 1.3]^T$ ， $\hat{x}_1(0) = [0.2, 0.3]^T$ ， $\hat{x}_2(0) = [1, 4.3]^T$ ， $\hat{x}_3(0) = [2, 3.5]^T$ ， $\hat{x}_4(0) = [3, 2.9]^T$ ， $\hat{x}_0^1(0) = [3.6, 7.2]^T$ ， $\hat{x}_0^2(0) = [4.2, 6.4]^T$ ， $\hat{x}_0^3(0) = [5.2, 5.4]^T$ ， $\hat{x}_0^4(0) = [8.1, 2.6]^T$ 。仿真结果如图 5-2 至图 5-10 所示。

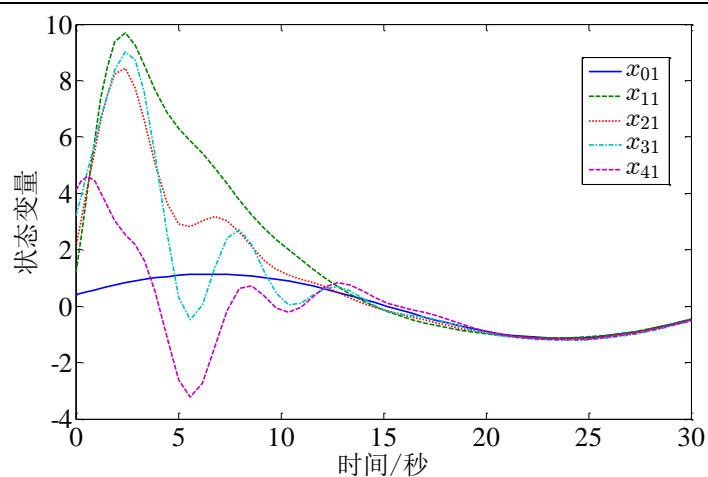


图 5-2 状态变量 $x_{i1}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.5-2 The responses of state variables $x_{i1}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

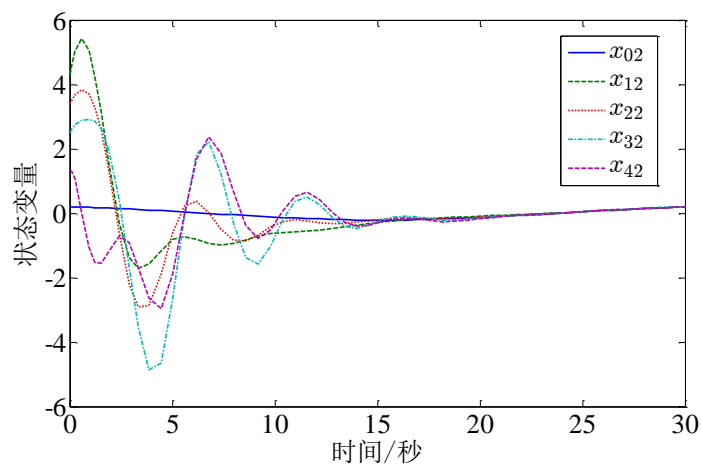


图 5-3 状态变量 $x_{i2}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.5-3 The responses of state variables $x_{i2}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

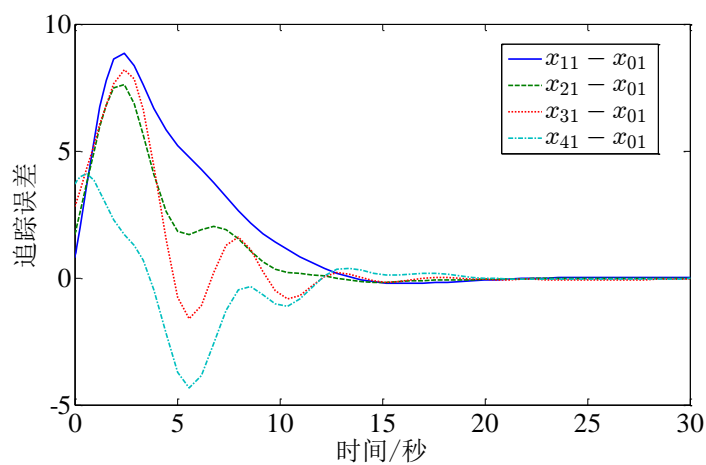


图 5-4 追踪误差 $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.5-4 The responses of tracking errors $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

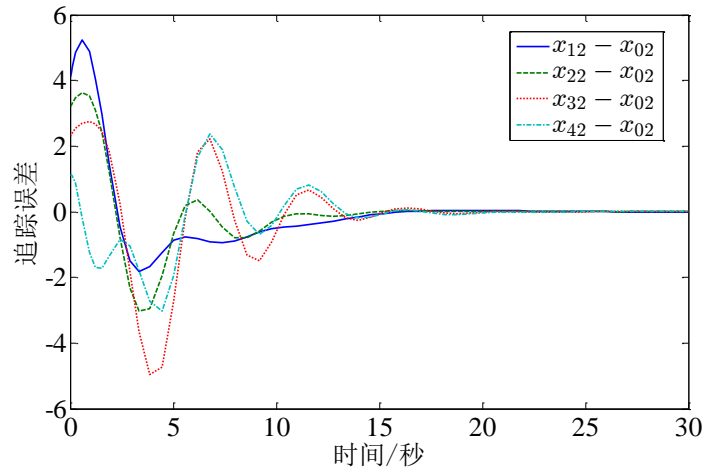


图 5-5 追踪误差 $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.5-5 The responses of tracking errors $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

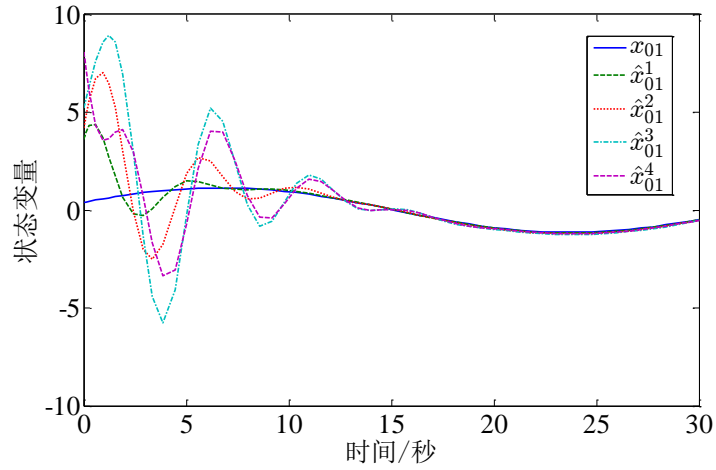


图 5-6 状态变量 x_{01} 和 $\hat{x}_{01}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.5-6 The responses of state variables x_{01} and $\hat{x}_{01}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

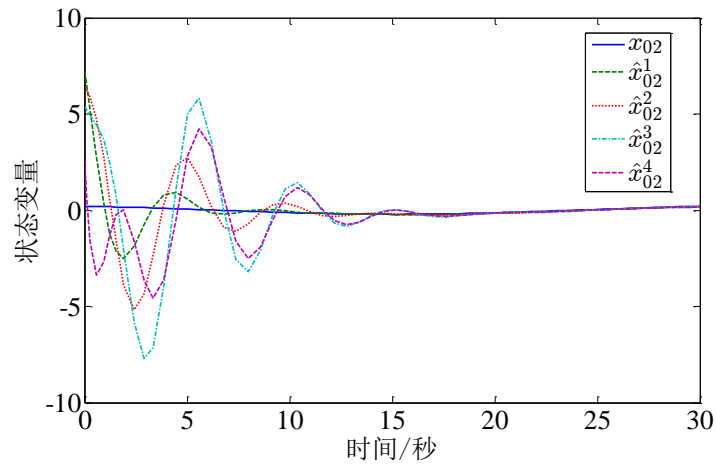


图 5-7 状态变量 x_{02} 和 $\hat{x}_{02}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.5-7 The responses of state variables x_{02} and $\hat{x}_{02}^i, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

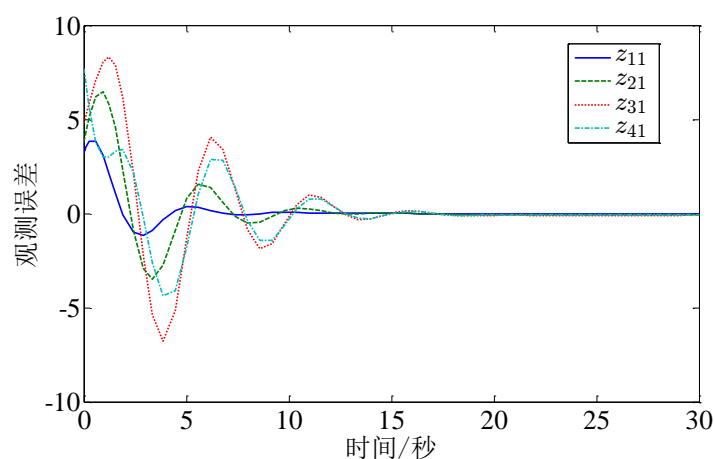


图 5-8 观测误差 $z_{i1}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.5-8 The responses of observed errors $z_{i1}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

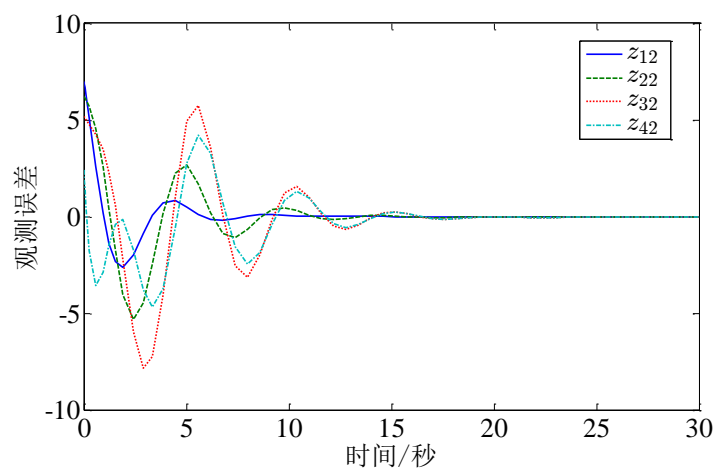


图 5-9 观测误差 $z_{i2}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.5-9 The responses of observed errors $z_{i2}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

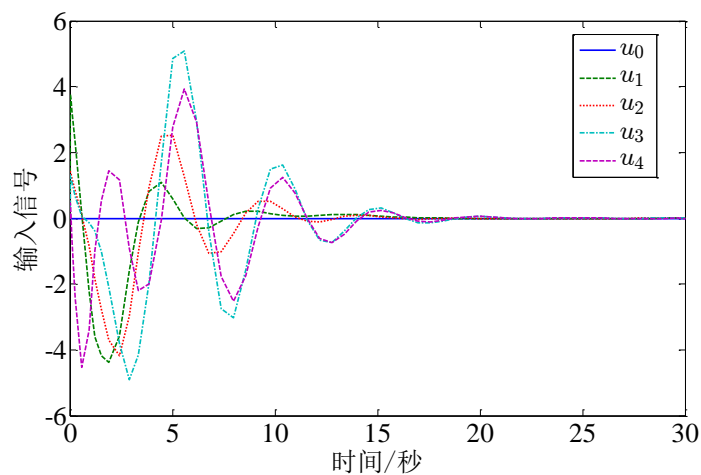


图 5-10 输入信号 $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.5-10 The responses of input signals $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

图 5-2 至图 5-5 说明了所有智能体的对应状态实现了一致性,图 5-6 至图 5-9 说明了分布观测器能估计出领导者智能体的状态,图 5-10 呈现了所有智能体的控制输入,很显然它们都是有界的。基于以上仿真结果,能结论本章提出的输出反馈一致性控制算法是有效的。

5.6 本章小结

本章在有向固定拓扑下,针对未知输入滞后非线性多智能体系统,提出了一种领导跟随输出反馈一致性控制策略。考虑了所有智能体输入时滞是未知且彼此不同的时变函数和智能体的状态难以测量情况。并基于此非理想条件,利用相关的输出信息,设计了两类观测器重构智能体的状态信息,致使领导跟随一致性问题转化为经典的镇定问题。随后,基于断截预测控制方法和 $L-K$ 泛函方法,设计了独立于输入时滞的分布式输出反馈一致性控制器,并且给出了实现未知输入滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性的充分条件。考虑到通信网络资源有限问题,所以将来工作主要致力于研究未知输入滞后非线性多智能体系统的事件触发输出反馈一致性控制问题。

第6章 未知时变状态滞后非线性多智能体系统输出反馈一致性控制

6.1 引言

多智能体系统一致性控制因其在社会网络、分布式优化、机器人编队等领域的广泛应用,而受到越来越多的学者关注。在实际中,智能体通常具有有限的通信能力,将致使每个智能体仅能与其邻居智能体通信,因此,一致性控制基本要求是协议需以分布方式实施。当物质和能量沿着特定的路径传输时,就会产生时滞现象。时滞的存在使得多智能体系统一致性控制问题变得更加复杂和困难。在多智能体系统一致性问题研究中,考虑的时滞通常包含三类:通信时滞、输入时滞和状态时滞。大量研究结果集中在前两类时滞下的一致性控制,如文献[53-63,117-129]。然而,对状态时滞下的一致性控制问题研究却凤毛麟角。虽然状态时滞下的单系统镇定或稳定性问题研究已经形成了较完善的控制理论,但是由于智能体之间局部通信特性,致使这些单系统控制理论不能直接扩展到多智能体系统。

尽管状态滞后下多智能体系统一致性控制研究成果相对较少,但是仍然有一些学者致力于此方面研究,试图完善其控制理论。例如,基于无向拓扑图,文献[64]研究了状态滞后线性多智能体系统无领导者一致性问题;文献[65-66,149]研究了一阶状态滞后非线性多智能体系统无领导者一致性问题。在有向拓扑图下,文献[83-85]研究了一阶或高阶状态滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性问题。但是,以上这些结果都是状态反馈一致性控制,也就是说,这些工作都假定了智能体状态信息是完全可测量的。然而,在实际中并非完全如此。通常情况下,相比智能体的状态信息,其输出信息是更容易通过测量获得。鉴于此,一些学者开始研究状态滞后多智能体系统输出反馈一致性控制问题。文献[124]研究了状态滞后离散线性多智能体系统无领导者一致性问题。考虑到实际系统普遍具有非线性特性的事实,文献[130]研究了状态滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性问题。尽管此结果能实现输出反馈控制,但其控制协议是基于绝对输出信息、邻居智能体的相对观测器信息,从而可能增加网络传输负担和网络攻击风险^[11]。同时,此控制协议还依赖于状态时滞,意味着状态时滞必须完全已知。由于网络环境复杂多变,状态时滞可能随着时间推

移而改变，并且难以测量，所以把状态时滞描述为未知时变函数更合理。

通过以上讨论，本章研究了基于动态补偿器的未知状态滞后非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。对比现有结果，本章主要贡献总结如下：首先，多智能体的状态时滞描述为未知时变函数，而不是已知定常数。在相对少保守的条件下，利用动态增益控制方法，提出了一个新的输出反馈一致性控制策略。其次，利用相对输出信息，为每个跟随者设计了动态补偿器重构相关状态信息。通过构造合适的 $L-K$ 泛函，提出了基于此补偿器的分布式输出反馈类线性控制器。最后，设计的控制器不仅独立于状态时滞，而且能减少网络传输负担和网络攻击风险。此外，提出的控制算法设计过程简单，且其能扩展解决具有少保守非线性项假设条件的状态滞后非线性多智能体系统输出反馈一致性控制问题。

6.2 预备知识和问题描述

6.2.1 预备知识

拓扑理论知识已经描述在 1.4.1。本章考虑通信拓扑，满足如下一个假设条件

假设 6.1: 拓扑 \mathcal{G} 是有向固定的，且含有一个以领导者为根节点的有向生成树。

在假设 6.1 下，拓扑矩阵 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是一个 \mathcal{M} 矩阵，并且其所有特征值 λ_i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 都具有正实部，即 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ 。然后给出如下一个引理。

引理 6.1: 在假设 6.1 下，对 $i \in \mathbb{N}_{1:n}$ ，存在合适的向量 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, $q_i > 0$ 和 $k = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$, $k_i > 0$ ，使得 $\Xi = I_N \otimes \bar{A} - \mathcal{H} \otimes (QC^T) \in \mathbb{R}^{2nN \times 2nN}$ 是一个赫尔维兹矩阵，其中矩阵 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 和向量 $Q \in \mathbb{R}^{2n}$, $C \in \mathbb{R}^{2n}$ 定义为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A - bk^T - qc^T & 0_{n \times n} \\ qc^T & A \end{bmatrix}, \quad Q = [-q^T, q^T]^T, \quad C = [c^T, c^T]^T$$

而矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和向量 $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ 定义为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{n-1} & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} b &= [0, 0, \dots, 1]^T \\ c &= [1, 0, \dots, 0]^T \end{aligned}$$

证明: 因为拓扑矩阵 \mathcal{H} 的所有特征根 λ_i , $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 具有正实部，所以存在一个酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ，使得 $U^* \mathcal{H} U = \Lambda$ ，其中 Λ 是以特征根 λ_i 为对角线元素上三角矩阵。然后取如下一个相似变换：

$$\begin{aligned}
 & (U^* \otimes I_{2n}) \Xi (U \otimes I_{2n}) \\
 &= (U^* \otimes I_{2n}) (I_N \otimes \bar{A} - \mathcal{H} \otimes (QC^T)) (U \otimes I_{2n}) \\
 &= I_N \otimes \bar{A} - \Lambda \otimes (QC^T)
 \end{aligned}$$

它是以矩阵 $\Xi_i = \bar{A} - \lambda_i QC^T$, $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ 为对角的上三角块矩阵。很显然, 矩阵 Ξ 的特征根可以由矩阵 Ξ_i 的特征根确定。定义如下一个矩阵

$$E = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

然后, 再取一个相似变换:

$$E^{-1} \Xi_i E = E^{-1} (\bar{A} - \lambda_i QC^T) E = \tilde{\Xi}_i$$

其中 $\tilde{\Xi}_i$ 可以表示为

$$\tilde{\Xi}_i = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk^T \\ 0 & A - \lambda_i qc^T \end{bmatrix} + (1 - \lambda_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ qc^T & -qc^T \end{bmatrix}$$

根据文献[152]的定理 1-3 可知, 存在向量 q 和 k , 使得下面系统是渐近稳定的

$$\dot{\zeta}(t) = \tilde{\Xi}_i \zeta(t)$$

这意味着存在向量 q 和 k , 使得 $\tilde{\Xi}_i$ 是一个赫尔维兹矩阵。由于 $\tilde{\Xi}_i$ 和 Ξ_i 是相似矩阵, 矩阵 Ξ 的特征根可以由矩阵 Ξ_i 的特征根确定, 所以必然存在合适的向量 q 和 k , 使得 Ξ 也是一个赫尔维兹矩阵。证明完毕。

6.2.2 问题描述

在本章, 研究了基于动态补偿器的未知状态滞后非线性多智能体系统领导跟随输出反馈一致性控制问题。考虑由编号为 0 的一个领导者和编号为 $1, \dots, N$ 的 N 个跟随者组成的 $N+1$ 个智能体。智能体 i , $i \in \mathbb{N}_{0:N}$ 的未知状态滞后非线性动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{ik}(t) = x_{i,k+1}(t) + f_k(t, \bar{x}_{ik}(t), \bar{x}_{ik}(t-d(t))), & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{x}_{in}(t) = u_i(t) + f_n(t, \bar{x}_{in}(t), \bar{x}_{in}(t-d(t))) \\ y_i(t) = x_{i1}(t) \end{cases} \quad (6-1)$$

其中 $x_{ij}(t) \in \mathbb{R}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y_i(t) \in \mathbb{R}$ 分别表示智能体 i 的状态变量, 控制输入和输出; $\bar{x}_{ij}(t) = [x_{i1}(t), \dots, x_{ij}(t)]^T$; $\bar{x}_{ij}(t-d(t)) = [x_{i1}(t-d(t)), \dots, x_{ij}(t-d(t))]^T$, $d(t)$ 是未知状态时滞, $u_0(t) = 0$; 输出可测量获得; $f_j(\cdot): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$ 是不确定连续非线性函数。

这 $N+1$ 个智能体之间的通信关系是由有向固定拓扑刻画, 已描述在章节 1.4.1 中, 并满足假设 6.1 中的条件。仅仅智能体的输出信息能基于此拓扑进行传输。

注 6.1: 系统(6-1)能描述许多真实物理系统的动力学模型, 如化学反应器、倒立

摆和机械臂。由于信号经由网络传输，必然需要时间的消耗，所以状态时滞是不可避免的。这些物理系统不但具有非线性特性，而且也具有状态滞后特性。绝大多数现存的工作都没有考虑系统的状态滞后特性。即使有少量结果关注了这个问题，但通常都假设系统状态完全可测。然而，真实物理系统的状态信号通常难以完全测量，一般情况下，仅仅系统的输出可以通过测量获得，例如对机械臂系统，它的位置信号就比速度信号容易测量获得。因此，本章将研究状态滞后多智能体系统(6-1)的分布式输出反馈一致性控制问题。

为设计分布式一致性控制器，给出如下两个必要假设。

假设 6.2: 对系统(6-1)的非线性项，存在已知非负常数 γ_{k1} 和 γ_{k2} ，使得

$$\begin{aligned} & \left| f_j(t, \bar{x}_{ij}, \bar{x}_{ijd}) - f_j(t, \bar{x}_{0j}, \bar{x}_{0jd}) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^j \gamma_{k1} |x_{ik} - x_{0k}| + \sum_{k=1}^j \gamma_{k2} |x_{ikd} - x_{0kd}| \end{aligned}$$

其中 $\bar{x}_{ijd} = \bar{x}_{ij}(t-d(t))$ 和 $x_{ijd} = x_{ij}(t-d(t))$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

假设 6.3: 对状态时滞 $d(t)$ 及其导数 $\dot{d}(t)$ ，存在已知的常数 d^* 和 \bar{d} ，使得

$$0 \leq d(t) \leq d^*, \quad \dot{d}(t) \leq \bar{d} < 1$$

注 6.2: 如果本章不考虑状态时滞，即 $d(t) = 0$ ，那么假设 6.2 直接可以转化为

$$\left| f_j(t, \bar{x}_{ij}) - f_j(t, \bar{x}_{0j}) \right| \leq \sum_{k=1}^j \gamma_{k1} |x_{ik} - x_{0k}|$$

许多现存的结果都能发现此假设条件，像机械臂，倒立摆等实际系统都具有此非线性特性。由于本章考虑了状态时滞，即 $d(t) \neq 0$ ，所以给出了假设 6.2 的条件，其实很多工程系统具有此非线性特性，像化学反应系统。因此，假设 6.2 是一个针对非线性项的标准条件。假设 6.3 中的条件意味着时滞可以任意大，但其变化率需要受限于小于 1 的常数。状态滞后相关的现有结果，几乎都是基于假设 6.3 获得的。

目标; 本章的主要目标是为跟随者设计分布式输出反馈控制器，使得所有智能体的对应状态实现一致性，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow 0$ ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ， $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

6.3 分布式动态补偿器设计

由于跟随者状态信息无法测量获得，并且仅有部分跟随者能获得领导者的输出信息，所以本部分将基于相对输出信息，为跟随者设计分布式全阶动态补偿器重构相关状态信息。在设计补偿器之前，为跟随者 i ， $i \in \mathbb{N}_{1:N}$ ，定义输出一致性误差：

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (y_i - y_j) + b_i (y_i - y_0) \quad (6-2)$$

其中 a_{ij} 和 b_i 定义在章节 1.4.1。

基于此输出一致性误差(6-2)，为跟随者 i 设计如下全阶动态补偿器

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{ik} = \xi_{i,k+1} + q_k L^k (e_i - \xi_{i1}), & k \in \mathbb{N}_{1:n-1} \\ \dot{\xi}_{in} = u_i + q_n L^n (e_i - \xi_{i1}) \end{cases} \quad (6-3)$$

其中 ξ_{ij} , $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 表示该补偿器的状态变量; L^k 表示 L 的 k 次幂; q_j 是设计的正参数,

且满足引理 6.1 中的条件; L 是一个动态增益, 且设计为

$$\dot{L}(t) = \max \{-\beta L^2 + \rho L; 0\}, \quad L(0) \geq 1 \quad (6-4)$$

其中 β 和 ρ 表示正参数, 将设计在式(6-40)。

注 6.3: 由于系统(6-1)含有不确定的非线性函数项, 致使现有含有同构于系统非线性项的观测器不再适用于本章的系统, 所以本章设计了独立于非线性项的全阶动态补偿器(6-3)重构跟随者追踪误差系统的状态信息。并且根据式(6-2)能够发现, 该补偿器只基于邻居智能体的相对输出信息, 因此, 它是分布式的。动态增益 L 在观测器中也起到了非常重要的作用, 它能补偿非常大的系统非线性项利普希茨常数 γ_{k1} , γ_{k2} 。同时根据式(6-4)和假设 6.3, 能够推算出

$$1 \leq L(t - d(t)) \leq L(t) \leq L_m = \max \left\{ L(0); \frac{\rho}{\beta} \right\} \quad (6-5)$$

显然, 动态增益 $L(t)$ 是一个非减有界函数。

6.4 分布式输出反馈一致性控制器设计

本部分将为所有跟随者智能体设计基于补偿器(6-3)的分布式输出反馈一致性控制器, 从而使得所有智能体系统的对应状态实现一致性。本章的主要结果可总结成如下一个定理。

定理 6.1: 在假设 6.1-6.3 下, 通过为跟随者设计如下输出反馈一致性控制器

$$u_i = - \sum_{j=1}^n L^{n-j+1} k_j \xi_{ij} \quad (6-6)$$

其中 k_j 是设计的正参数, 且满足引理 6.1 中的条件, 可使所有智能体实现一致性。

证明: 定义两个向量 ξ_i 和 η_i 如下:

$$\begin{aligned} \xi_i &= [\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}]^T \\ \eta_i &= [\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in}]^T = [x_{i1} - x_{01} - \xi_{i1}, x_{i2} - x_{02} - \xi_{i2}, \dots, x_{in} - x_{0n} - \xi_{in}]^T \end{aligned} \quad (6-7)$$

根据式(6-1), (6-3), (6-6)和(6-7), 可以计算得到

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \bar{A}_1 \xi_i + L^{1-l_0} C_2 q e_i - L^{1-l_0} C_2 q \xi_{i1} \\ \dot{\eta}_i = \bar{A}_2 \eta_i + L^{1-l_0} C_2 q (\eta_{i1} + \xi_{i1}) - L^{1-l_0} C_2 q e_i + F_i \end{cases} \quad (6-8)$$

其中 l_0 是一个设计的正常数; 矩阵 C_2 , \bar{A}_1 , \bar{A}_2 和向量 F_i 定义为

$$\begin{aligned} C_2 &= L^{l_0} C_1 \\ \bar{A}_1 &= L C_2 (A - b k^T) C_2^{-1} \\ \bar{A}_2 &= L C_2 (A - q c^T) C_2^{-1} \\ F_i &= [\bar{f}_{i1}, \bar{f}_{i2}, \dots, \bar{f}_{in}]^T \end{aligned} \quad (6-9)$$

而 $C_1 = \text{diag}\{1, L, \dots, L^{n-1}\}$; $\bar{f}_{ji} = f_j(t, \bar{x}_{ij}, \bar{x}_{ijd}) - f_j(t, \bar{x}_{0j}, \bar{x}_{0jd})$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$; 矩阵 A 和向量 b , c , k 定义在引理 6.1。

选取如下状态变换

$$\bar{\xi}_i = C_2^{-1} \xi_i, \quad \bar{\eta}_i = C_2^{-1} \eta_i \quad (6-10)$$

根据式(6-8)-(6-10), 能够计算出

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}_i = L(A - b k^T - q c^T) \bar{\xi}_i - \frac{\dot{L}}{L} (l_0 I_n + D) \bar{\xi}_i + q L^{1-l_0} e_i \\ \dot{\bar{\eta}}_i = L A \bar{\eta}_i + L q c^T \bar{\xi}_i - \frac{\dot{L}}{L} (l_0 I_n + D) \bar{\eta}_i - q L^{1-l_0} e_i + C_2^{-1} F_i \end{cases} \quad (6-11)$$

其中 $D = \text{diag}\{0, 1, \dots, n-1\}$ 。

定义如下两个向量

$$\Psi_i = [\bar{\xi}_i^T, \bar{\eta}_i^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \bar{F}_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1}^T, (C_2^{-1} F_i)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n} \quad (6-12)$$

结合式(6-11)和(6-12), 不难得到

$$\dot{\Psi}_i = L \bar{A} \Psi_i - \frac{\dot{L}}{L} \bar{D} \Psi_i - Q L^{1-l_0} e_i + \bar{F}_i \quad (6-13)$$

其中 \bar{A} 和 Q 定义在引理 6.1; $\bar{D} \in \mathbb{R}^{2n}$ 定义为

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} l_0 I_n + D & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & l_0 I_n + D \end{bmatrix} \quad (6-14)$$

根据式(6-1), (6-2), (6-10)和(6-12), 容易推出

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=1}^N a_{ij} (\eta_{i1} + \xi_{i1} - (\eta_{j1} + \xi_{j1})) + b_i (\eta_{i1} + \xi_{i1}) \\ &= L^{l_0} C^T \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (\Psi_i - \Psi_j) + b_i \Psi_i \right) \end{aligned} \quad (6-15)$$

其中 C 定义在引理 6.1。

定义 $\Psi = [\Psi_1^T, \dots, \Psi_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{2nN}$ 。根据式(6-13)和(6-15)，可以得到

$$\dot{\Psi} = L\Xi\Psi - \frac{\dot{L}}{L}I_N \otimes \bar{D}\Psi + \bar{F} \quad (6-16)$$

其中 $\bar{F} = [\bar{F}_1^T, \bar{F}_2^T, \dots, \bar{F}_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{2nN}$ ； Ξ 定义在引理 6.1。

根据引理 6.1 可知，存在合适的向量 q 和 k ，使得 Ξ 是赫尔维兹矩阵。因此，存在正常数 μ 和对称正定矩阵 $P = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ ，使得如下不等式成立

$$P\Xi + \Xi^T P \leq -\mu P \quad (6-17)$$

根据文献[153]，存在正常数 ι_0 和 $\bar{\iota}_0$ ，使得

$$-\iota_0 P_i \leq P_i D_1 + D_1 P_i \leq \bar{\iota}_0 P_i \quad (6-18)$$

其中 $D_1 = \text{diag}\{D, D\}$ 。

不等式(6-18)等价于

$$\iota_0 P_i \leq P_i \bar{D} + \bar{D} P_i \leq \iota_1 P_i \quad (6-19)$$

其中 $\iota_1 = 2\iota_0 + \bar{\iota}_0$ 。

针对式(6-16)，选择一个候选李亚普诺夫函数

$$V_1 = \Psi^T P \Psi \quad (6-20)$$

利用式(6-16)和(6-20)，能够计算出 V_1 的导数

$$\dot{V}_1 = L\Psi^T (P\Xi + \Xi^T P) \Psi - 2\frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \bar{D} \Psi_i + 2\sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \bar{F}_i \quad (6-21)$$

结合式(6-4)，(6-5)，(6-17)，(6-18)和(6-21)，可以推导出

$$\begin{aligned} L\Psi^T (P\Xi + \Xi^T P) \Psi &\leq -\mu L\Psi^T P \Psi = -\mu L \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i \\ -2\frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \bar{D} \Psi_i &= -\frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T (P_i \bar{D} + \bar{D} P_i) \Psi_i \leq -\iota_0 \frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i \end{aligned} \quad (6-22)$$

采用假设 6.2，式(6-7)，(6-9)和(6-10)，能够获得

$$\begin{aligned} |\bar{f}_{ji}| &\leq \sum_{k=1}^j \gamma_{k1} |x_{ik} - x_{0k}| + \sum_{k=1}^j \gamma_{k2} |x_{ikd} - x_{0kd}| \\ &\leq \sum_{k=1}^j \gamma_{k1} |\eta_{ik} + \xi_{ik}| + \sum_{k=1}^j \gamma_{k2} |\eta_{ikd} + \xi_{ikd}| \\ &\leq \sum_{k=1}^j \left(\gamma_{k1} L^{k-1+\iota_0} |\bar{\eta}_{ik} + \bar{\xi}_{ik}| + \gamma_{k2} L_d^{k-1+\iota_0} |\bar{\eta}_{ikd} + \bar{\xi}_{ikd}| \right) \end{aligned} \quad (6-23)$$

其中 L_d ， ξ_{ikd} ， η_{ikd} ， $\bar{\xi}_{ikd}$ 和 $\bar{\eta}_{ikd}$ 定义为

$$\begin{aligned} L_d &= L(t-d(t)), \quad \xi_{ikd} = \xi_{ik}(t-d(t)), \quad \eta_{ikd} = \eta_{ik}(t-d(t)), \\ \bar{\xi}_{ikd} &= \bar{\xi}_{ik}(t-d(t)), \quad \bar{\eta}_{ikd} = \bar{\eta}_{ik}(t-d(t)) \end{aligned}$$

根据式(6-5), (6-9)和(6-23), 可以得到

$$\begin{aligned}\|C_2^{-1}F_i\| &\leq \sum_{j=1}^n L^{-(j-1+t_0)} |\bar{f}_{ji}| \\ &\leq \gamma_1 (\|\bar{\eta}_i\| + \|\bar{\xi}_i\|) + \gamma_2 (\|\bar{\eta}_{id}\| + \|\bar{\xi}_{id}\|) \\ &\leq \bar{\gamma}_1 \|\Psi_i\| + \bar{\gamma}_2 \|\Psi_{id}\|\end{aligned}\quad (6-24)$$

其中 $\bar{\xi}_{id} = \bar{\xi}_i(t-d(t))$, $\bar{\eta}_{id} = \bar{\eta}_i(t-d(t))$, $\Psi_{id} = \Psi_i(t-d(t))$; γ_1 , γ_2 , $\bar{\gamma}_1$ 和 $\bar{\gamma}_2$ 是合适的正常数。

结合式(6-21)和(6-24), 能够推导出

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \bar{F}_i &\leq 2\sum_{i=1}^N \|\Psi_i\| \|P_i\| \|\bar{F}_i\| \\ &\leq 2\sum_{i=1}^N \|\Psi_i\| \|P_i\| \|C_2^{-1}F_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N 2\bar{\gamma}_1 \|P_i\| \|\Psi_i\|^2 + \sum_{i=1}^N 2\bar{\gamma}_2 \|P_i\| \|\Psi_i\| \|\Psi_{id}\|\end{aligned}\quad (6-25)$$

采用定理 6.1 和式(6-25), 可以计算出

$$\sum_{i=1}^N 2\bar{\gamma}_2 \|P_i\| \|\Psi_i\| \|\Psi_{id}\| \leq \sum_{i=1}^N \frac{\bar{\gamma}_2^2}{\delta_1} \|P_i\| \|\Psi_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \delta_1 \|P_i\| \|\Psi_{id}\|^2 \quad (6-26)$$

其中 δ_1 是一个正常数。

选择一个候选李亚普诺夫函数

$$V_2 = \sum_{i=1}^N \frac{e^{\varrho d^*}}{1-\bar{d}} \int_{t-d(t)}^t e^{-\varrho(t-s)} \delta_1 \|P_i\| \|\Psi_i(s)\|^2 ds \quad (6-27)$$

其中 ϱ 是一个正常数。

根据式(6-27), 能够推导出 V_2 的导数

$$\dot{V}_2 \leq -\varrho V_2 + \sum_{i=1}^N \frac{e^{\varrho d^*}}{1-\bar{d}} \delta_1 \|P_i\| \|\Psi_i\|^2 - \sum_{i=1}^N \delta_1 \|P_i\| \|\Psi_{id}\|^2 \quad (6-28)$$

对整个闭环系统, 选择李亚普诺夫函数

$$V = V_1 + V_2 \quad (6-29)$$

结合式(6-21), (6-22), (6-25), (6-26), (6-28)和(6-29), 能得到 V 的导数

$$\dot{V} \leq -\mu L \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i - t_0 \frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i - \varrho V_2 + \sum_{i=1}^N \bar{\gamma} \|P_i\| \|\Psi_i\|^2 \quad (6-30)$$

其中 $\bar{\gamma} = \frac{e^{\varrho d^*}}{1-\bar{d}} \delta_1 + \frac{\bar{\gamma}_2^2}{\delta_1} + 2\bar{\gamma}_1$ 。

很容易能够证实如下不等式成立

$$\lambda_{\min}(P_i)\|\Psi_i\|^2 \leq \Psi_i^T P_i \Psi_i \leq \|P_i\|\|\Psi_i\|^2 \quad (6-31)$$

根据式(6-30)和(6-31)，能够推导出

$$\dot{V} \leq -\bar{\mu}L \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i - \varrho V_2 - \bar{\rho} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i \quad (6-32)$$

其中 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\rho}$ 定义为

$$\bar{\mu} = \mu - \iota_0 \beta, \quad \bar{\rho} = \rho \iota_0 - \frac{\bar{\gamma} \|P\|}{\lambda_{\min}(P)} \quad (6-33)$$

针对式(6-4)，可以选择

$$\beta < \frac{\mu}{\iota_0}, \quad \rho > \frac{\bar{\gamma} \|P\|}{\iota_0 \lambda_{\min}(P)} \quad (6-34)$$

能保证式(6-33)中的 $\bar{\mu} > 0$ 和 $\bar{\rho} > 0$ 。

结合式(6-32)和(6-34)，容易得到

$$\dot{V} \leq -\bar{\mu}V_1 - \varrho V_2 \leq -\chi V \quad (6-35)$$

其中 $\chi = \min\{\bar{\mu}, \varrho\}$ 。

根据式(6-20)，(6-29)和(6-35)，不难计算出

$$V_1 = \Psi^T P \Psi \leq V(t) \leq V(0)e^{-\chi t}, \quad t \in [0, +\infty) \quad (6-36)$$

根据式(6-12)和(6-36)，可以得出

$$\|\bar{\eta}_i(t)\|^2 \leq \frac{V(0)}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\chi t}, \quad \|\bar{\xi}_i(t)\|^2 \leq \frac{V(0)}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\chi t} \quad (6-37)$$

采用式(6-5)，(6-7)，(6-10)和(6-37)，能够获得

$$\eta_{ij}^2(t) \leq \frac{V(0)L_m^{2(j+\iota_0-1)}}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\chi t}, \quad \xi_{ij}^2(t) \leq \frac{V(0)L_m^{2(j+\iota_0-1)}}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\chi t} \quad (6-38)$$

运用式(6-38)和如下不等式

$$|x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| = |x_{ij}(t) - x_{0j}(t) - \xi_{ij}(t) + \xi_{ij}(t)| \leq |\eta_{ij}(t)| + |\xi_{ij}(t)|$$

能够结论 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow 0$ 。证明完毕。

注 6.4: 本章提出的基于动态补偿器的控制协议(6-6)，它仅仅基于智能体的相对输出信息，而不是依赖于绝对输出信息和邻居智能体的观测器状态信息。因此，该控制器能减少传输状态的数量，以至于降低通信负担和潜在网络攻击风险。同时，由于此控制器独立于状态时滞，且有类线性结构，所以它方便在实际中实施。本算法有简单的设计过程，为了补偿未知的状态时滞，构造了新的 L-K 泛函(6-27)。然而，定理 6.1 是基于相对保守的非线性条件，即在假设 6.2 中，要求 γ_{k1} 和 γ_{k2} 是已知的非负常数。值得说明的是，通过轻微修改式(6-4)中的动态增益，该假设条件可以进一

步放松。在相对少保守的假设条件下，将呈现一个扩展结果。

6.5 扩展结果

本部分将把系统非线性项的假设 6.2 放松为假设 6.4，并通过修改动态增益(6-4)，提出一个少保守的输出反馈一致性控制算法。

假设 6.4: 对系统(6-1)的非线性项，存在未知非负时变函数 $\gamma_{k1}(t)$ 和 $\gamma_{k2}(t)$ ，使得

$$\begin{aligned} & \left| f_j(t, \bar{x}_{ij}, \bar{x}_{ijd}) - f_j(t, \bar{x}_{0j}, \bar{x}_{0jd}) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^j \gamma_{k1}(t) |x_{ik} - x_{0k}| + \sum_{k=1}^j \gamma_{k2}(t) |x_{ikd} - x_{0kd}| \end{aligned}$$

其中 $\gamma_{k1}(t) \leq \epsilon_1 e^{\nu_1 t}$ ， $\gamma_{k2}(t) \leq \epsilon_2 e^{\nu_2 t}$ ， ϵ_1 ， ϵ_2 是未知非负常数， ν_1 ， ν_2 是已知的非负常数。

注 6.5: 很显然，相比假设 6.2，假设 6.4 具有更少的保守性，此处， $\gamma_{k1}(t)$ 和 $\gamma_{k2}(t)$ 是未知非负时变函数，而不是已知常数。也就是说，假设 6.2 可以看作是假设 6.4 的一个特殊情况。据了解，现有的结果几乎都是在假设 6.2 下，提出了状态一致性控制算法。而在假设 6.4 的条件下，相关的现有算法不再有效于本章研究的一致性控制问题。因此，此条件下的输出反馈一致性控制算法设计非常具有挑战性。

在假设 6.4 下，将为本部分提出输出反馈一致性控制算法。

相似于小节 6.2，提出分布式动态补偿器(6-3)，然后把式(6-4)中的动态增益 L 修改为如下形式

$$\dot{L}(t) = \max \left\{ -\beta L^2 + \rho(t)L; \quad 0 \right\} \quad (6-39)$$

其中 $\rho(t) = \nu_0 e^{\nu_1 t}$ ， ν_0 是任意的正常数； ν_1 和 β 是正常数且设计在式(6-42)， $L(0) \geq 1$ 表示动态增益的初始值且设计在式(6-51)。

相似于小节 6.3，本部分的主要结果可总结成如下一个定理。

定理 6.2: 在假设 6.1，6.3-6.4 下，通过设计基于补偿器(6-5)和动态增益(6-39)的分布式控制器(6-6)，能使所有智能体的对应状态实现一致性。

证明: 这部分的证明相似于小节 6.3 的证明，仅需要把小节 6.3 中常数 γ_{k1} ， γ_{k2} ， γ_1 ， γ_2 ， $\bar{\gamma}_1$ ， $\bar{\gamma}_2$ ， $\bar{\gamma}$ 重新定义为时变函数 $\gamma_{k1}(t)$ ， $\gamma_{k2}(t)$ ， $\gamma_1(t)$ ， $\gamma_2(t)$ ， $\bar{\gamma}_1(t)$ ， $\bar{\gamma}_2(t)$ ， $\bar{\gamma}(t)$ 。然后能计算得到

$$\dot{V} \leq -\bar{\mu} L \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i - \varrho V_2 - \left(e^{\bar{\sigma} t} - \frac{\sigma_0}{\nu_0 l_0} \right) \nu_0 l_0 e^{\sigma_1 t} \sum_{i=1}^N \Psi_i^T P_i \Psi_i \quad (6-40)$$

其中 $\sigma_0 e^{\sigma_1 t} = \frac{\|P\|}{\lambda_{\min}(P)} \bar{\gamma}(t)$ ； σ_0 和 σ_1 分别是未知和已知的非负常数； ϱ 是正常数且设计

在式(6-51); $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\sigma}_1$ 定义为

$$\bar{\mu} = \mu - \iota_0 \beta, \quad \bar{\sigma}_1 = \nu_1 - \sigma_1 \quad (6-41)$$

针对式(6-39), 通过选择

$$\beta < \frac{\mu}{\iota_0}, \quad \nu_1 > \sigma_1 \quad (6-42)$$

能够保证式(6-41)中的 $\bar{\mu} > 0$, $\bar{\sigma}_1 > 0$ 。

根据式(6-42)可知, 必须存在一个时间 $t_1 < +\infty$, 使得

$$e^{\bar{\sigma}_1 t} - \frac{\sigma_0}{\nu_0 \iota_0} \geq 0; \quad t \in [t_1, +\infty) \quad (6-43)$$

利用式(6-40)和(6-43), 可以计算得到

$$\dot{V} \leq -\chi_1 V, \quad t \in [t_1, +\infty) \quad (6-44)$$

其中 $\chi_1 = \min\{\bar{\mu}L(0), \varrho\}$ 。

根据式(6-44), 能够得到

$$V(t) \leq V(t_1)e^{-\chi_1(t-t_1)} \quad (6-45)$$

结合式(6-20), (6-29)和(6-45), 容易算出

$$V_1 = \Psi^T P \Psi \leq V(t_1)e^{-\chi_1(t-t_1)} \quad (6-46)$$

采用式(6-12)和(6-46), 不难推导出

$$\|\bar{\eta}_i\|^2 \leq V_p e^{-\chi_1(t-t_1)}, \quad \|\bar{\xi}_i\|^2 \leq V_p e^{-\chi_1(t-t_1)} \quad (6-47)$$

其中 $V_p = \frac{V(t_1)}{\lambda_{\min}(P)}$ 。

根据式(6-10)和(6-47), 能够得到

$$\eta_{ij}^2 \leq \bar{V}_p \bar{L}^{\bar{n}_j}(t) e^{-\chi_1 t}, \quad \xi_{ij}^2 \leq \bar{V}_p \bar{L}^{\bar{n}_j}(t) e^{-\chi_1 t}, \quad t \in [t_1, +\infty) \quad (6-48)$$

其中 $\bar{V}_p = V_p e^{\chi_1 t_1}$ 和 $\bar{n}_j = 2(j + \iota_0 - 1)$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

利用式(6-39), 能证实 $L(t) \leq \max\left\{L(0), \frac{\rho(t)}{\beta}\right\}$ 。然后可以推出

$$\bar{L}^{\bar{n}_j}(t) \leq \max\left\{\bar{L}_0^{\bar{n}_j}, \bar{\nu}_{0j} e^{\bar{\nu}_{1j} t}\right\} \quad (6-49)$$

其中 $\bar{\nu}_{0i} = \left(\frac{\nu_0}{\beta}\right)^{\bar{n}_j}$, $\bar{L}_0^{\bar{n}_j} = \bar{L}^{\bar{n}_j}(0)$ 和 $\bar{\nu}_{1j} = \nu_1 \bar{n}_j$ 。

结合式(6-48)和(6-49), 容易计算出

$$\eta_{ij}^2 \leq \bar{V}_p \max\left\{\bar{L}_0^{\bar{n}_j}, \bar{\nu}_{0i} e^{\bar{\nu}_{1j} t}\right\} e^{-\chi_1 t}, \quad \xi_{ij}^2 \leq \bar{V}_p \max\left\{\bar{L}_0^{\bar{n}_j}, \bar{\nu}_{0i} e^{\bar{\nu}_{1j} t}\right\} e^{-\chi_1 t} \quad (6-50)$$

在式(6-39)和(6-40)中, 通过选取

$$\varrho \geq \bar{v}_{1(n+1)} + \bar{\chi}_1, \quad L(0) \geq \max \left\{ 1, \frac{\bar{v}_{1(n+1)} + \bar{\chi}_1}{\bar{\mu}} \right\} \quad (6-51)$$

其中 $\bar{\chi}_1$ 是任意的正常数，能保证式(6-50)中 $\chi_1 > \bar{v}_{1j}$, $j \in \mathbb{N}_{1:n}$ 。

结合式(6-50)和(6-51)，可以推断出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta_{ij}(t)| \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_{ij}(t)| \rightarrow 0 \quad (6-52)$$

然后根据式(5-52)，能够结论 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{ij}(t) - x_{0j}(t)| \rightarrow 0$ 。证明完毕。

注 6.6: 通过选取式(6-51)中的 ϱ 和 $L(0)$ ，基于动态增益(6-39)的类线性分布式控制器(6-6)，能在假设 6.4 条件下，使所有智能体获得一致性。在 $t \in [t_1, +\infty)$ 上，根据式(6-6)，(6-50)和(6-51)，可以计算得到

$$\|u_i(t)\| \leq \sqrt{n \sum_{j=1}^n L^{\bar{n}_j} k_j^2 \xi_{ij}^2} \leq \hat{V}_p e^{-0.5 \bar{\chi}_1 t} \quad (6-53)$$

其中 $\hat{V}_p = \sqrt{n \|k\|^2 \bar{V}_p \max \{L_0^{\bar{n}(n+1)}, \bar{v}_{0,n+1}\}}$ 。然后根据式(6-53)，可以推出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_i(t)\| \rightarrow 0$ 。

进而可以推出在 $t \in [0, +\infty)$ 上，控制器 $u_i(t)$ 是有界的。值得说明的是，在本部分提出的算法下，假设 6.3 中的条件也能放松，即 \bar{d} 和 d^* 可以是未知的非负常数。

注 6.7: 尽管文献[13]中能发现与假设 6.4 相似于的条件，但是相比此结果，本章考虑了状态时滞，并且给出了更少保守性的非线性条件，即函数 $\gamma_{k1}(t)$ 和 $\gamma_{k2}(t)$ 可以是未知的，而该工作要求这些函数必须是已知的，并且该工作的控制协议依赖于邻居观测器的状态信息。尽管随着时间的推移，动态增益 $L(t)$ 是无界的，但是小节 6.5 中的算法仍然能够保证控制器的有界性，且实现领导跟随一致性。通常情况下，由于系统未知参数不可能特别大，所以式(6-43)中的 t_1 时刻一般不会很大，可以让动态增益 $L(t)$ 实施相当长的一段时间，然后在 t_2 （即 $t_2 \gg t_1$ ）时刻之后，把 $\rho(t)$ 固定在 $\rho(t_2)$ ，可避免式(6-39)中动态增益的无界性问题。

注 6.8: 文献[65-66,151]是在无向固定拓扑下研究了无领导者一致性控制问题，但这些工作应用了神经网络逼近技术，导致这些结果只能在半全局意义下实现一致性。文献[83-85]是在有向固定或切换拓扑下研究了领导跟随一致性问题，但针对的系统模型比较简单，且这些结果都假定了智能体的状态信息完全可测，即这些工作提出了基于状态信息的控制器。尽管文献[124,130]是在有向固定拓扑下研究了领导跟随输出反馈一致性控制问题，但所提控制器完全依赖于状态时滞和智能体的绝对输出信息。本章放松了以上结果的限制，针对非线性多智能体系统，提出了独立于时滞且基于相对输出信息的控制器，并能在全局意义下实现领导跟随一致性。

6.6 数值仿真

为了说明本章提出的输出反馈一致性控制算法有效性（定理 6.1），本部分将考虑 5 个带有时滞循环流的两级化学反应器。相似于文献[154]，两级化学反应器 i ， $i \in \mathbb{N}_{0,4}$ 的动力学模型可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = -\frac{1}{\theta_{i1}}x_{i1} - \omega_{i1}x_{i1} + \frac{1-r_{i2}}{\varpi_{i1}}x_{i2} + \bar{\delta}_1(\cdot) \\ \dot{x}_{i2} = -\frac{1}{\theta_{i2}}x_{i2} - \omega_{i2}x_{i2} + \frac{r_{i1}}{\varpi_{i2}}x_{i1}(t-d(t)) + \frac{m_{i2}}{\varpi_{i2}}u_i + \bar{\delta}_2(\cdot) \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (6-54)$$

其中 x_{i1} 和 x_{i2} 表示化学反应物； r_{i1} 和 r_{i2} 表示循环流量； θ_{i1} 和 θ_{i2} 表示反应器停留时间； ω_{i1} 和 ω_{i2} 表示速率常数； m_{i2} 表示进给速度； ϖ_{i1} 和 ϖ_{i2} 表示化学反应器容积； $d(t)$ 表示时变状态时滞； $\bar{\delta}_1(\cdot)$ 和 $\bar{\delta}_2(\cdot)$ 表示作用于反应器的不确定干扰。

为(6-54)选取： $\theta_{i1} = \theta_{i2} = 10$ ， $\omega_{i1} = 0.02$ ， $\omega_{i2} = 0.05$ ， $r_{i1} = r_{i2} = 0.2$ ， $\varpi_{i1} = \varpi_{i2} = 0.8$ ， $m_{i2} = 0.8$ ， $\bar{\delta}_1(\cdot) = 0.03x_1$ ， $\bar{\delta}_2(\cdot) = 0.25x_{i2}(t-d(t))$ ， $d(t) = 0.6 + 0.2\sin(t)$ 。

很容易能证实系统(6-54)满足假设 6.1-6.3 的条件。

这些智能体之间的通信关系刻画为满足假设 6.1 的通信拓扑，见图 6-1。然后可以选取 $a_{21} = 1$ ， $a_{43} = 1$ ， $b_1 = b_3 = 1$ 。

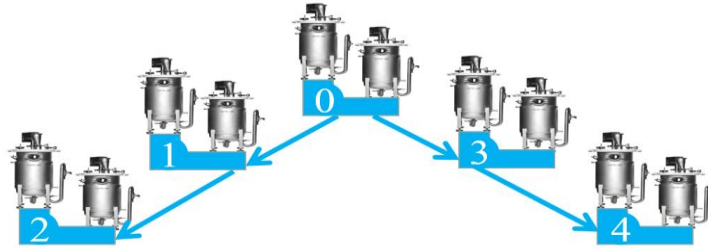


图 6-1 通信拓扑

Fig.6-1 The communication topology

选取 $d^* = 0.8$ ， $\bar{d} = 0.2$ ， $\varrho = 0.1$ ， $q_1 = 2$ ， $q_2 = 1$ ， $k_1 = 1$ ， $k_2 = 3$ ， $\mu = 0.22$ ， $\iota_0 = 1$ ， $\iota_1 = 6$ ， $\beta = 0.21$ ， $\rho = 295.2$ 。

初始值选为： $x_{01}(0) = -0.5$ ， $x_{02}(0) = 1$ ， $x_{11}(0) = -0.3$ ， $x_{12}(0) = 12$ ， $x_{21}(0) = -0.6$ ， $x_{22}(0) = -15$ ， $x_{31}(0) = 0.4$ ， $x_{32}(0) = -5$ ， $x_{41}(0) = -0.2$ ， $x_{42}(0) = 10$ ， $\xi_{11}(0) = -0.4$ ， $\xi_{12}(0) = 0.1$ ， $\xi_{21}(0) = 0.1$ ， $\xi_{22}(0) = -0.2$ ， $\xi_{31}(0) = 0.1$ ， $\xi_{32}(0) = 0.3$ ， $\xi_{41}(0) = -0.2$ ， $\xi_{42}(0) = 0.1$ ， $L(0) = 10$ 。仿真结果呈现图 6-2 至图 6-7。

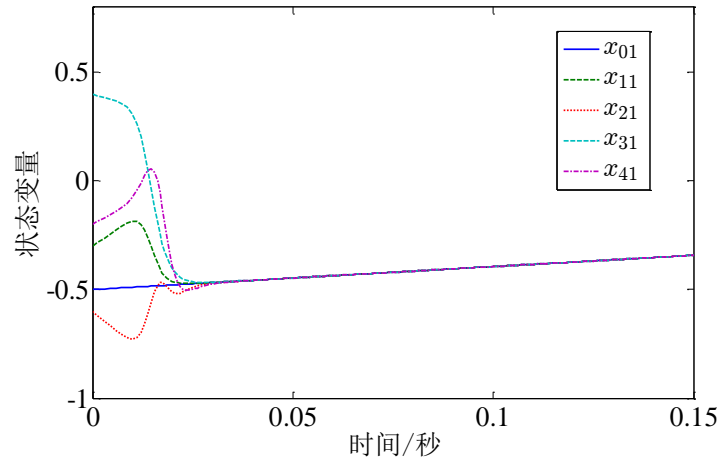


图 6-2 状态变量 $x_{i1}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.6-2 The responses of state variables $x_{i1}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

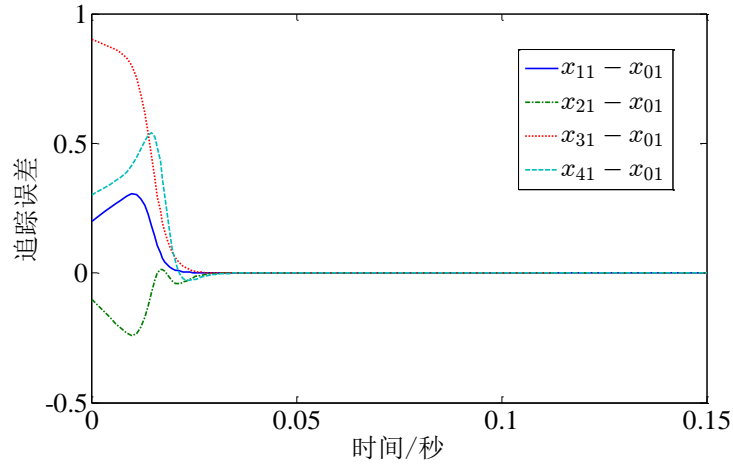


图 6-3 追踪误差 $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.6-3 The responses of tracking errors $x_{i1} - x_{01}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

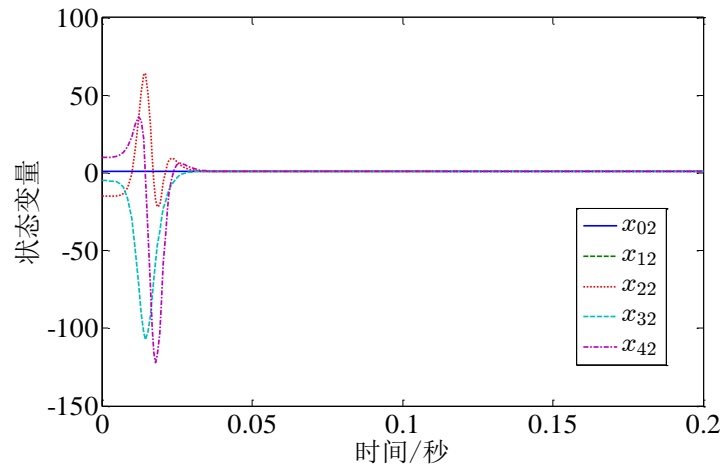


图 6-4 状态变量 $x_{i2}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.6-4 The responses of state variables $x_{i2}, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

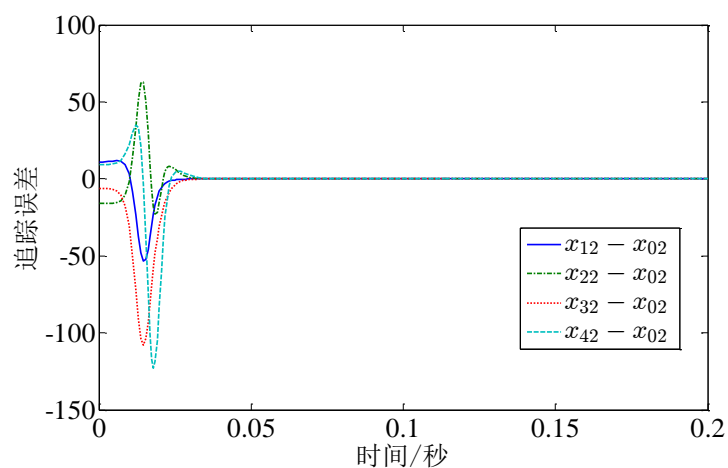


图 6-5 追踪误差 $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$ 的响应

Fig.6-5 The responses of tracking errors $x_{i2} - x_{02}, i \in \mathbb{N}_{1:4}$

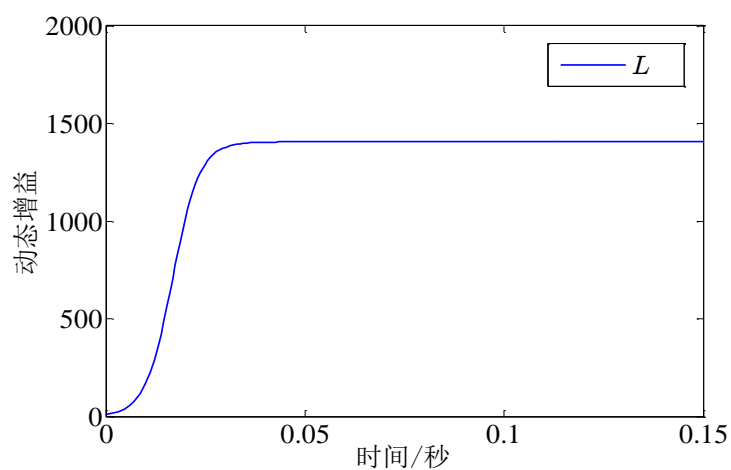


图 6-6 动态增益 L 的响应

Fig.6-6 The responses of the dynamic gain L

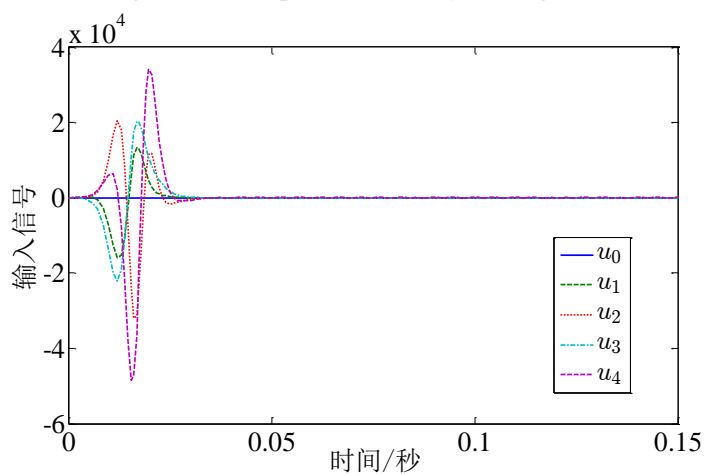


图 6-7 输入信号 $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$ 的响应

Fig.6-7 The responses of input signals $u_i, i \in \mathbb{N}_{0:4}$

图 6-2 至图 6-5 说明了所有智能体的状态能实现一致性。图 6-6 验证了动态增益是一个非减的有界时变函数。基于图 6-7 可知, 控制输入信号是有界的, 且收敛至零。根据以上仿真结果, 可以结论本章提出的输出反馈一致性控制算法是有效的。

6.7 本章小结

本章针对状态滞后非线性多智能体系统, 研究了其领导跟随输出反馈一致性控制问题。考虑了状态时滞是未知时变函数和智能体的状态信息难以测量情况。并在此条件下, 基于智能体的相对输出信息, 有向固定拓扑下为跟随者设计了独立于系统非线性项的分布式动态补偿器重构其状态信息。并且利用动态增益控制方法和 $L-K$ 泛函方法, 提出了基于动态增益且独立于状态时滞和邻居补偿器状态的类线性控制器。同时, 该控制器能有效减少通信状态的数目, 进而减轻了网络通信负担。由于在实际中, 降阶动态补偿器能更经济地实施, 所以将来的工作主要针对状态滞后非线性多智能体系统, 提出基于降阶动态补偿器的领导跟随输出反馈一致性控制算法。

结 论

多智能体系统分布式一致性控制在多机器人系统、航空航天、移动传感器网络、智能电网以及智能交通等领域具有广阔的应用价值，因而受到国内外科研工作者广泛关注。基于此，本文针对非线性多智能体系统，综合考虑了拓扑切换、输入时滞、状态时滞和状态难以共享或测量等实际问题，提出了基于状态重构的领导跟随分布式一致性控制算法。本文主要的创新成果总结如下：

(1) 无滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性控制方面。考虑了部分切换拓扑不含以领导者为根节点的有向生成树情况，给出了优于传统平均驻留时间条件的拓扑切换规则，实现了拓扑变频切换。在该规则下，设计了分布式切换观测器重构领导者系统的状态，并提出了可改善现有控制器抖振问题的分布式状态反馈一致性控制算法。之后，考虑了跟随者系统具有更少保守的非线性项假设条件和状态信息难以测量情况，设计了基于动态增益的降阶补偿器重构跟随者转换系统状态，提出了可减轻通信负担且可经济实施的完全分布式输出反馈一致性控制算法。

(2) 输入滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性控制方面。考虑了输入时滞是彼此不同的已知时变函数和领导者系统输入是未知有界时变函数情况，设计了分布式有限时间观测器重构领导者系统状态。提出了依赖于输入时滞的分布式状态反馈一致性控制算法。之后，考虑了输入时滞是彼此不同的未知时变函数和状态信息难以测量情况，设计了基于局部输出信息的两类观测器分别重构领导者和跟随者系统状态，提出了独立于输入时滞的分布式输出反馈一致性控制算法。

(3) 状态滞后非线性多智能体系统领导跟随一致性控制方面。考虑了状态时滞是未知时变函数和状态信息难以测量情况，设计了独立于系统非线性项的分布式动态补偿器重构跟随者追踪误差系统状态，提出了基于动态增益且独立于状态时滞和邻居补偿器状态的分布式输出反馈一致性控制算法。随后，进一步考虑了具有更少保守性的非线性项假设条件，通过轻微修改上述算法，可实现领导跟随状态一致性。

本文以考虑时滞影响与否为分界线，深入地研究了非线性多智能体系统领导跟随状态和输出反馈一致性控制问题。针对考虑的不同情况，设计了不同类型的观测器或补偿器重构智能体系统状态，并提出了依赖于这些重构状态的分布式一致性控制器，实现了领导跟随一致性。尽管上述研究成果丰富了非线性多智能体系统一致

性控制理论，但仍有如下两方面问题需要进一步研究。

(1) 由于航天科技和手术医疗等领域对系统控制时间和精度要求比较高，往往需要在有限时间内完成高精度的操作，所以渐近或指数稳定性控制方法很难实现上述控制目标。而有限时间控制是完成上述目标的有效方法，它不仅能实现时间最优控制，而且具有控制精度高、鲁棒性好、抗干扰能力强等优点。因此，需要在本文成果基础上，进一步研究有限时间一致性控制问题。

(2) 在实际中，嵌入智能体的微型数字处理器通常具有有限的通信和计算能力，且在离散时刻采集和处理相关控制信息，并将其经由网络共享给邻居智能体。如果实时采集、处理、共享此信息，必然会造成计算资源和通讯资源的浪费。而事件触发控制是减少此类资源浪费的有效方法。因此，需要在本文成果基础上，进一步研究事件触发一致性控制问题。

参考文献

- [1] 胡鸿翔, 梁锦, 温广辉, 等. 多智能体系统的群集行为研究综述[J]. 南京信息工程大学学报, 2018, 10(4): 415-421.
- [2] Lesser V. Cooperative multiagent systems: a personal view of the state of the art[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1999, 11(1): 133-142.
- [3] Olfati-Saber R, Fax J, Murray R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 97(1): 215-233.
- [4] Cao Y, Yu W, Ren W, et al. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 427-438.
- [5] Qin J, Ma Q, Shi Y, et al. Recent advances in consensus of multiagent systems: a brief survey[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 64(6): 4972-4983.
- [6] Ding L, Han Q, Ge X, et al. An overview of recent advances in event-triggered consensus of multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(4): 1110-1123.
- [7] Yang H, Han Q, Ge X, et al. Fault tolerant cooperative control of multi-agent systems: a survey of trends and methodologies[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(1): 4-17.
- [8] Li Z, Duan Z, Chen G, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2010, 57(1): 213-224.
- [9] 黄捷. 高阶非线性多智能体系统一致性控制研究[D]. 北京:北京理工大学博士学位论文, 2015.
- [10] Hua C, You X, Guan X. Leader-following consensus for a class of high order nonlinear multi-agent systems[J]. Automatica, 2016, 73(11): 138-144.
- [11] Yoo S. Distributed consensus tracking of a class of asynchronously switched nonlinear multi-agent systems[J]. Automatica, 2018, 87(1): 421-427.
- [12] Huang J, Wang W, Wen C, et al. Distributed adaptive leader-follower and leaderless consensus control of a class of strict-feedback nonlinear systems: a unified approach[J]. Automatica, 2020, 118(8): 109021.
- [13] 邢兰涛. 量化和事件触发控制若干问题研究[D]. 浙江: 浙江大学博士学位论文, 2018.

-
-
- [14] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
 - [15] Vicsek T, Cziroák A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
 - [16] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
 - [17] Gao L, Cheng D. Comment on coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1913-1916.
 - [18] Ning B, Han Q, Zuo Z. Practical fixed-time consensus for integrator-type multi-agent systems: a time base generator approach[J]. Automatica, 2019, 105(7): 406-414.
 - [19] Guan Z, Sun F, Wang Y, et al. Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 59(11): 2646-2654.
 - [20] Macellari L, Karayiannidis Y, Dimarogonas D. Multi-agent second-order average consensus with prescribed transient behavior[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 5282-5288.
 - [21] Zuo Z, Tian B, Defoort M, et al. Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(2): 563-570.
 - [22] Su H, Chen M, Lam J, et al. Semi-global leader-following consensus of linear multi-agent systems with input saturation via low gain feedback[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2013, 60(7): 1881-1889.
 - [23] Li Z, Liu X, Ren W, et al. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(2): 518-523.
 - [24] Hu W, Liu L, Feng G. Consensus of linear multi-agent systems by distributed event-triggered strategy[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(1): 148-157.
 - [25] Nguyen D. Reduced-order distributed consensus controller design via edge dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(1): 475-480.
 - [26] Cheng T, Kan Z, Klotz J, et al. Event-triggered control of multiagent systems for fixed and time-varying network topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62 (10):

- 5365-5371.
- [27] Wu Z, Xu Y, Lu R, et al. Event-triggered control for consensus of multiagent systems with fixed/switching topologies[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 63(2): 563-570.
- [28] Jiang J, Jiang Y. Leader-following consensus of linear time-varying multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. Automatica, 2020, 113(3):108804.
- [29] Chen K, Wang J, Zhao Z, et al. Output consensus of heterogeneous multiagent systems: a distributed observer-based approach[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2020.2998925.
- [30] Li X, Tang Y, Karimi H. Consensus of multi-agent systems via fully distributed event-triggered control [J]. Automatica, 2020, 116(6): 108898.
- [31] Zuo Z, Zhang J, Wang Y. Adaptive fault-tolerant tracking control for linear and lipschitz nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(6): 3923-3931.
- [32] Zhao Y, Wen G, Duan Z, et al. Adaptive consensus for multiple nonidentical matching nonlinear systems: an edge-based framework[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2015, 62(1): 85-89.
- [33] Rezaee H, Abdollahi F. Consensus problem in high-order multiagent systems with Lipschitz nonlinearities and jointly connected topologies[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(5): 741-748.
- [34] Khalili M, Zhang X, Polycarpou M, et al. Distributed adaptive fault tolerant control of uncertain multi-agent systems[J]. Automatica, 2018, 87(1): 142-151.
- [35] Wang X, Li S, Chen M. Composite backstepping consensus algorithms of leader-follower higher order nonlinear multiagent systems subject to mismatched disturbances[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 86(6): 1935-1946.
- [36] Shen D, Xu J. Distributed learning consensus for heterogenous high-order nonlinear multi-agent systems with output constraints[J]. Automatica, 2018, 97(11): 64-72.
- [37] Wang X, Li S, Lam J. Distributed active anti-disturbance output consensus algorithms for higher order multi-agent systems with mismatched disturbances[J]. Automatica, 2016, 74(12): 30-37.
- [38] Wang Y, Song Y. Leader-following control of high-order multi-agent systems under directed graphs: pre-specified finite time approach[J]. Automatica, 2018, 87(1): 113-120.

- [39] Qin J, Yu C, Gao H. Coordination for linear multiagent systems with dynamic interaction topology in the leader-following framework[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(5): 2412-2422.
- [40] Qin J, Yu C. Exponential consensus of general linear multi-agent systems under directed dynamic topology[J]. Automatica, 2014, 50(9): 2327-2333.
- [41] Saboori I, Khorasani K. H_∞ consensus achievement of multi-agent systems with directed and switching topology networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(11): 3104-3109.
- [42] Li Z, Wen G, Duan Z, et al. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1152-1157.
- [43] Fu J, Wang J. Observer-based finite-time coordinated tracking for general linear multi-agent systems[J]. Automatica, 2016, 66(4): 231-237.
- [44] Sun J, Geng Z, Lv Y, et al. Distributed adaptive consensus disturbance rejection for multi-agent systems on directed graphs[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 5(1): 629-639.
- [45] Wang B, Chen W, Zhang B. Semi-global robust tracking consensus for multi-agent uncertain systems with input saturation via metamorphic low-gain feedback[J]. Automatica, 2019, 103(5): 363-373.
- [46] Wen G, Yu W, Li Z, et al. Neuro-adaptive consensus tracking of multiagent systems with a high-dimensional leader[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(7): 1730-1742.
- [47] Liu W, Huang J. Adaptive leader-following consensus for a class of higher-order nonlinear multi agent systems with directed switching networks[J]. Automatica, 2017, 79(5): 84-92.
- [48] Du C, Liu X, Ren W, et al. Finite-time consensus for linear multiagent systems via event triggered strategy without continuous communication[J]. IEEE Transactions on Network Systems, 2020, 7(1): 19-29.
- [49] Wang G. Distributed control of higher-order nonlinear multi-agent systems with unknown nonidentical control directions under general directed graphs[J]. Automatica, 2019, 110(12): 108559.
- [50] Gong P, Lan W, Han Q. Robust adaptive fault-tolerant consensus control for uncertain nonlinear fractional-order multi-agent systems with directed topologies[J]. Automatica, 2020, 117(7): 1090

-
- 11.
- [51] Liu Y, Yang G. Prescribed performance-based consensus of nonlinear multiagent systems with unknown control directions and switching networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(2): 609-616.
- [52] Wang G, Wang C, Li L. Fully distributed low-complexity control for nonlinear strict-feedback multiagent systems with unknown dead-zone inputs[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(2): 421-431.
- [53] Lin P, Jia Y. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly connected topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(3): 778-784.
- [54] Zhang Y, Tian Y. Consensus of data-sampled multi-agent systems with random communication delay and packet loss[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 939-943.
- [55] Abdessameud A, Tayebi A. Distributed consensus algorithms for a class of high-order multi-agent systems on directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(10): 3464-3470.
- [56] Chen Y, Shi Y. Consensus for linear multiagent systems with time-varying delays: a frequency domain perspective[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2143-2150.
- [57] Wang Z, Xu J, Song X, et al. Consensus conditions for multi-agent systems under delayed information[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(11): 1773-1777.
- [58] He P, Li Y, Park J. Noise tolerance leader-following of high-order nonlinear dynamical multi-agent systems with switching topology and communication delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(1):108-143.
- [59] You X, Hua C, Peng D, et al. Leader-following consensus for multi-agent systems subject to actuator saturation with switching topologies and time-varying delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(2): 144-150.
- [60] Ni J, Liu L, Liu C, et al. Fixed-time leader-following consensus for second-order multiagent systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(11): 8635-8646.
- [61] Ran G, Liu J, Li C, et al. Event-based finite-time consensus control of second-order delayed multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, doi: 10.1109/TCSII.2020.2999480.

-
- [62] Sakthivel R, Kaviarasan B, Ahn C, et al. Observer and stochastic faulty actuator-based reliable consensus protocol for multiagent system [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(12): 2383-2393.
- [63] Chu H, Yue D, Dou C, et al. Consensus of multiagent systems with time-varying input delay and relative state saturation constraints[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2019.2961395.
- [64] Zhang H, Park J, Yue D, et al. Finite-horizon optimal consensus control for unknown multiagent state-delay systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(2): 402-412.
- [65] Chen C, Wen G, Liu Y, et al. Adaptive consensus control for a class of nonlinear multiagent time-delay systems using neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2014, 25(6): 1217-1226.
- [66] Ma H, Wang Z, Wang D, et al. Neural network based distributed adaptive robust control for a class of nonlinear multiagent systems with time delays and external noises[J]. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems, 2016, 46(6): 750-758.
- [67] Liu J, Zhang H, Liu X, et al. Distributed stochastic consensus of multi-agent systems with noisy and delayed measurements[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(10): 1359-1369.
- [68] Wang D, Zhang N, Wang J, et al. A PD-like protocol with a time delay to average consensus control for multi-agent systems under an arbitrarily fast switching topology[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 47(4): 898-907.
- [69] Sheng J, Ding Z. Optimal consensus control of linear multi-agent systems with communication time delay[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(15): 1899-1905.
- [70] Mu N, Liao X, Huang T. Event-based consensus control for a linear directed multiagent system with time delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2015, 62(3): 281-285.
- [71] Zheng J, Xu L, Xie L, et al. Consensusability of discrete-time multiagent systems with communication delay and packet dropouts[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(3): 1185-1192.
- [72] Wang Y, Cao J, Hu J. Pinning consensus for multi-agent systems with non-linear dynamics and time-varying delay under directed switching topology[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(17): 1931-1939.

-
- [73] Wang H. Consensus of networked mechanical systems with communication delays: a unified framework[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(6): 1571-1576.
- [74] Lu M, Liu L. Leader-following consensus of multiple uncertain Euler-Lagrange systems subject to communication delays and switching network[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(8): 2604-2611.
- [75] Savino H, Santos C, Souza F, et al. Conditions for consensus of multi-agent systems with time-delays and uncertain switching topology[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(2): 1258-1267.
- [76] Ponomarev A, Chen Z, Zhang H. Discrete-time predictor feedback for consensus of multiagent systems with delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(2): 498-504.
- [77] Zhang H, Yue D, Zhao W, et al. Distributed optimal consensus control for multiagent systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(6): 1747-1759.
- [78] Zhang H, Yue D, Dou C, et al. Data-driven distributed optimal consensus control for unknown multiagent systems with input-delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(6): 2095-2105.
- [79] Yang X, Zhou B. Consensus of discrete-time multiagent systems with input delays by truncated pseudo-predictor feedback[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(2): 505-516.
- [80] Wang C, Zuo Z, Lin Z, et al. Consensus control of a class of Lipschitz nonlinear systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2015, 62(11): 2730-2738.
- [81] Wang C, Zuo Z, Lin Z, et al. A truncated prediction approach to consensus control of Lipschitz nonlinear multiagent systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2017, 4(4): 716-724.
- [82] Qian W, Wang L, Chen M. Local consensus of nonlinear multiagent systems with varying delay coupling[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(12): 2462-2469.
- [83] Cui B, Ma T, Lewis F, et al. Distributed adaptive consensus control of heterogeneous multi-agent chaotic systems with unknown time delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(16): 2414-2422.
- [84] Zhou D, Hu B, Guan Z, et al. Consensus tracking control of uncertain multiagent systems with

- sampled data and time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, doi: 10.1109/TCYB.2019.2953555.
- [85] Chen K, Wang J, Zhang Y, et al. Leader-following consensus for a class of nonlinear strict-feedback multiagent systems with state time-delays[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(7): 2351-2361.
- [86] Li G, Wang X, Li S. Finite-time output consensus of higher-order multi-agent systems with mismatched disturbances and unknown state elements[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(12): 2571-2581.
- [87] Zhang H, Feng G, Yan H, et al. Observer-based output feedback event triggered control for consensus of multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(9): 4885-4894.
- [88] Su H, Chen M, Wang X, et al. Semiglobal observer-based leader-following consensus with input saturation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(6): 2842-2850.
- [89] Hu W, Liu L, Feng G. Output consensus of heterogeneous linear multi-agent systems by distributed event-triggered/self-triggered strategy[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 1914-1924.
- [90] Li X, Liu F, Buss M, et al. Fully distributed consensus control for linear multiagent systems: a reduced-order adaptive feedback approach[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2020, 7(2): 967-976.
- [91] Zhang X, Liu L, Feng G. Leader-follower consensus of time-varying nonlinear multi-agent systems[J]. Automatica, 2015, 52(2): 8-14.
- [92] Chen C, Wen G, Liu Y, et al. Observer-based adaptive backstepping consensus tracking control for high-order nonlinear semi-strict-feedback multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(7): 1591-1601.
- [93] You X, Hua C, Guan X. Self-triggered leader-following consensus for high-order nonlinear multi-agent systems via dynamic output feedback control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(6): 2002-2010.
- [94] You X, Hua C, Yu H, et al. Leader-following consensus for high-order stochastic multi-agent systems via dynamic output feedback control[J]. Automatica, 2019, 107(9): 418-424.
- [95] Rehman A, Rehan M, Iqbal N, et al. LPV scheme for robust adaptive output feedback consensus

- of Lipschitz multiagents using Lipschitz nonlinear protocol[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2020.2964567.
- [96] Li Y, Park J, Wu L, et al. Distributed output-feedback adaptive fuzzy leader-following consensus of stochastic nonlinear interconnected multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2020.3002331.
- [97] Tian B, Lu H, Zuo Z, et al. Fixed-time leader-follower output feedback consensus for second-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(4): 1545-1550.
- [98] Zhou B, Xu C, Duan G. Distributed and truncated reduced-order observer based output feedback consensus of multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2264-2270.
- [99] Fan M, Zhang H, Lin Z. Distributed semiglobal consensus with relative output feedback and input saturation under directed switching networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2015, 62(8): 796-800.
- [100] Yaghmaie F, Lewis F, Su R. Output regulation of linear heterogeneous multi-agent systems via output and state feedback[J]. Automatica, 2016, 67(5): 157-164.
- [101] Zhao Z, Lin Z. Global leader-following consensus of a group of general linear systems using bounded controls[J]. Automatica, 2016, 68(6): 294-304.
- [102] Lv Y, Li Z, Duan Z, et al. Distributed adaptive output feedback consensus protocols for linear systems on directed graphs with a leader of bounded input[J]. Automatica, 2016, 74(12): 308-314.
- [103] Li X, Soh Y, Xie L. Output-feedback protocols without controller interaction for consensus of homogeneous multi-agent systems: a unified robust control view[J]. Automatica, 2017, 81(7): 37-45.
- [104] Cai H, Lewis F, Hu G, et al. The adaptive distributed observer approach to the cooperative output regulation of linear multi-agent systems[J]. Automatica, 2017, 75(1): 299-305.
- [105] Du S, Xia W, Ren W, et al. Observer-based consensus for multiagent systems under stochastic sampling mechanism[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(12): 2328-2338.
- [106] Rong L, Wang S, Jiang G, et al. Distributed observer-based consensus over directed networks with limited communication bandwidth constraints[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2018.2875523.

- [107]Li X, Soh Y, Xie L. Robust consensus of uncertain linear multi-agent systems via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2018, 98(12): 114-123.
- [108]Li Z, Ji H. Finite-time consensus and tracking control of a class of nonlinear multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(13): 4413-4420.
- [109]Yang Y, Xu H, Yue D. Observer-based distributed secure consensus control of a class of linear multi-agent systems subject to random attacks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2019, 66(8): 3089-3099.
- [110]Wang P, Wen G, Huang T, et al. Observer-based consensus protocol for directed switching networks with a leader of nonzero inputs[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, doi: 10.1109/TCYB.2020.2981518.
- [111]Lv Y, Wen G, Huang T, et al. Adaptive attack-free protocol for consensus tracking with pure relative output information[J]. Automatica, 2020, 117(7): 108998.
- [112]Sun J, Geng Z, Lv Y. Adaptive output feedback consensus tracking for heterogeneous multi-agent systems with unknown dynamics under directed graphs[J]. Systems & Control Letters, 2016, 87(1): 16-22.
- [113]Chen C, Ren C, Du T. Fuzzy observed-based adaptive consensus tracking control for second-order multiagent systems with heterogeneous nonlinear dynamics[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 24(4): 906-915.
- [114]Zhao L, Yu J, Lin C. Distributed adaptive output consensus tracking of nonlinear multi-agent systems via state observer and command filtered backstepping[J]. Information Sciences, 2019, 478(4): 335-374.
- [115]Su Y. Semi-global output feedback cooperative control for nonlinear multi-agent systems via internal model approach[J]. Automatica, 2019, 103(5): 200-207.
- [116]Chen X, Zhang X, Liu Q. Prescribed-time decentralized regulation of uncertain nonlinear multi-agent systems via output feedback[J]. Systems & Control Letters, 2020, 137(3): 104640.
- [117]Qi T, Qiu L, Chen J. MAS consensus and delay limits under delayed output feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(9): 4660-4666.
- [118]Jiang X, Xia G, Feng Z. Output consensus of high-order linear multiagent systems with time varying delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(18): 1084-1094.
- [119]Tan C, Liu G. Consensus of discrete-time linear networked multi-agent systems with commu-

-
- nicate on delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(11): 2962-2968.
- [120]Tan C, Yin X, Liu G, et al. Prediction-based approach to output consensus of heterogeneous multi-agent systems with delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12 (1): 20-28.
- [121]Xu X, Liu L, Feng G. Consensus of heterogeneous linear multiagent systems with communication time-delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 1820-1829.
- [122]Xu X, Liu L, Feng G. Consensus of discrete-time linear multiagent systems with communication, input and output delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(2): 492-497.
- [123]Zhou B, Lin Z. Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays[J]. Automatica, 2014, 50(2): 452-464.
- [124]Liu Q, Zhou B. Consensus of discrete-time multiagent systems with state, input, and communication delays[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2018.2852944.
- [125]Zhou B. Consensus of delayed multi-agent systems by reduced-order observer-based truncated predictor feedback protocols[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(6): 1741-1751.
- [126]Zhao Y, Zhang W. Disturbance observer-based consensus control of input-delayed LTI systems with matched disturbances: a predictor feedback approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(11): 1584-1591.
- [127]Wang C, Zuo Z, Qi Z, et al. Predictor-based extended state-observer design for consensus of MASs with delays and disturbances[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(4): 1259-1269.
- [128]Chu H, Yue D, Dou C, et al. Consensus of multiagent systems with time-varying input delay via truncated predictor feedback[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2019.2956787.
- [129]Chu H, Gao L, Yue D, et al. Consensus of Lipschitz nonlinear multiagent systems with input delay via observer-based truncated prediction feedback[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2018.2883954.
- [130]Chen S, Zhang Z, Zheng Y. H_∞ scaled consensus for MASs with mixed time-delays and disturbances via observer-based output feedback[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, doi: 10.1109/TCYB.2020.3001643.
- [131]Kundua A, Chatterjee D, Liberzon D. Generalized switching signals for input-to-state stability of

- switched systems[J]. Automatica, 2016, 64(2): 270-277.
- [132] Tao G. A simple alternative to the Barbalat lemma[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(5): 698.
- [133] Hong Y, Gao L, Cheng D, et al. Lyapunov-based approach to multi-agent systems with switching jointly connected interconnection[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5): 943-948.
- [134] Wang P, Wen G, Yu X, et al. Consensus disturbance rejection for linear multiagent systems with directed switching communication topologies[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, doi: 10.1109/TCNS.2019.2903005.
- [135] Casadei G, Marconi L, Isidori A. About synchronization of homogeneous nonlinear agents over switching networks[C]. 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, USA, 2014, 4573-4578.
- [136] Wen G, Yu W, Xia Y, et al. Distributed tracking of nonlinear multiagent systems under directed switching topology: an observer-based protocol[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(5): 869-881.
- [137] Zheng D, Zhang H, Zheng Q. Consensus analysis of multiagent systems under switching topologies by a topology-dependent average dwell time approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 429-38.
- [138] Casadei G, Marconi L, Isidori A. About disconnected topologies and synchronization of homogeneous nonlinear agents over switching networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(3): 901-917.
- [139] Wen G, Zheng W. On constructing multiple Lyapunov functions for tracking control of multiple agents with switching topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(9): 3796-3803.
- [140] Ding Z, Li Z. Distributed adaptive consensus control of nonlinear output-feedback systems on directed graphs[J]. Automatica, 2016, 72(10): 46-52.
- [141] Zhang X, Lin Y. Adaptive output feedback control for a class of large-scale nonlinear time-delay systems[J]. Automatica, 2015, 52(2): 87-94.
- [142] Chen M, Ge S. Adaptive neural output feedback control of uncertain nonlinear systems with unknown hysteresis using disturbance observer[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics,

- 2015, 62(12): 7706-7716.
- [143]Zhou B. Pseudo-predictor feedback stabilization of linear systems with time-varying input delays[J]. Automatica, 2014, 50(11): 2861-2871.
- [144]Pyrkin A, Bobtsov A. Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(12): 4229-4234.
- [145]Huang C, Yu C. Global adaptive controller for linear systems with unknown input delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12): 6589-6594.
- [146]Zuo Z, Lin Z, Ding Z. Truncated prediction output feedback control of a class of Lipschitz nonlinear systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2016, 63(8): 788-792.
- [147]Zhang X, Feng G, Sun Y. Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems[J]. Automatica, 2012, 48(3): 499-504.
- [148]Li Z, Liu X, Lin P, et al. Consensus of linear multi-agent systems with reduced-order observer-based protocols[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(7): 510-516.
- [149]Zhou B, Xu C, Duan G. Distributed and truncated reduced-order observer based output feedback consensus of multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2264-2270.
- [150]Gao L, Xu B, Li J, et al. Distributed reduced-order observer-based approach to consensus problems for linear multi-agent systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(5): 784-792.
- [151]Wen G, Chen C, Liu Y, et al. Neural network-based adaptive leader-following consensus control for a class of nonlinear multiagent state-delay systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2151-2160.
- [152]Wen G, Zhao Y, Duan Z, et al. Containment of higher-order multi-leader multi-agent systems: a dynamic output approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(4): 1135-1140.
- [153]Praly L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 1103-1108.
- [154]Jia X, Chen X, Xu S, et al. Adaptive output feedback control of nonlinear time delay systems with application to chemical reactor systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(6): 4792-4799.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

（一）参与的科研项目

- [1] 网络关联大系统变增益控制及在多智能体中的应用, 河北省研究生创新资助项目. 批准号: CXZZBS2019056, 项目负责人.
- [2] 资源受限网络环境下重置控制与事件触发机制协同设计研究, 国家自然科学基金资助项目. 批准号: 61603329, 主要参与人.
- [3] 非最小相位高超声速飞行器暂态性能约束的预定性能控制研究, 河北省自然科学基金资助项目. 批准号: F2017203130, 主要参与人.

（二）发表的学术论文

- [1] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiu You, Xinping Guan. Output feedback-based consensus control for nonlinear time delay multiagent systems. Automatica, 2020,111(1): 108669.
- [2] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiu You, Xinping Guan. Distributed output feedback consensus control of multiagent systems with unknown output measurement sensitivity. IEEE Transactions on Automatic Control. DOI:10.1109/TAC.2020.3017711.
- [3] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiu You. Distributed asynchronous consensus control for nonlinear multi-agent systems under switching topologies. IEEE Transactions on Automatic Control. DOI: 10.1109/TAC.2020.3034212.
- [4] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiu You, Xinping Guan. Distributed consensus control for nonlinear multiagent systems under directed graphs of dynamic frequency switches. IEEE Transactions on Automatic Control. DOI:10.1109/ TAC.2020.2987302.
- [5] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiu You, Xinping Guan. Finite-time observer-based leader-following consensus for nonlinear multiagent systems with input delays. IEEE Transactions on Cybernetics. DOI:10.1109/ TCYB. 2019.2962157.
- [6] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xinping Guan. Distributed containment control for nonlinear stochastic multiagent systems. IEEE Transactions on Cybernetics. DOI:10.1109/TCYB.2019.2894502.
- [7] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiu You, Xinping Guan. Distributed output-feedback consensus control for nonlinear multiagent systems subject to unknown input delays. IEEE Transactions on Cyber-

- netics. DOI:10.1109/TCYB.2020.2993297.
- [8] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiping Guan. Global output feedback regulation of non-linear time delay systems subject to sensor measurement faults. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(6): 2292-2303.
- [9] **Kuo Li**, Changchun Hua, Xiping Guan. Funnel-like prescribed tracking control for uncertain nonlinear stochastic switched systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29 (12): 3936-3953.
- [10] Changchun Hua, **Kuo Li**, Xiping Guan. Semi-global/global output consensus for nonlinear multi-agent systems with time delays. Automatica, 2019, 103(5): 480-489.
- [11] Changchun Hua, **Kuo Li**, Xiping Guan. Leader-following output consensus for high-order nonlinear multiagent systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(3): 1156-1161.
- [12] Changchun Hua, **Kuo Li**, Xiping Guan. Event-based dynamic output feedback adaptive fuzzy control for stochastic nonlinear systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(5): 3004-3015.
- [13] Changchun Hua, **Kuo Li**, Yafeng Li, Xiping Guan. Decentralized adaptive tracking quantized control for interconnected pure feedback time delay nonlinear systems. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(5): 2313-2328.
- [14] Changchun Hua, **Kuo Li**, Xiping Guan. Decentralized event-triggered control for interconnected time-delay stochastic nonlinear systems using neural networks. Neurocomputing, 2018, 272(10): 270-278.
- [15] Xiu You, Changchun Hua, **Kuo Li**, Xinchun Jia. Fixed-time leader-following consensus for high order time-varying nonlinear multi-agent systems. IEEE Transactions on Automatic Control. DOI: 10.1109/TAC.2020.3005154.
- [16] Changchun Hua, Pengju Ning, **Kuo Li**, Xiping Guan. Fixed-time prescribed tracking control for stochastic nonlinear systems with unknown measurement sensitivity. IEEE Transactions on Cybernetics. DOI:10.1109/TCYB.2020.3012560.
- [17] Liuliu Zhang, Changchun Hua, Guangyu Cheng, **Kuo Li**, Xiping Guan. Decentralized adaptive output feedback fault detection and control for uncertain nonlinear interconnected systems. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(3): 935-945.

致 谢

窗外日光弹指过，席间花影坐前移。转眼间，燕山大学伴随我走过了五年多时光。此刻，我坐在书桌前，回首流年往事，思绪纷飞、感慨万千、无限留恋，浓浓感恩之情油然而生。

衷心感谢导师华长春教授。在我的硕博生涯中，华老师渊博的专业知识、严谨的治学态度、精益求精的工作作风对我影响深远。每篇学术论文，从标点符号到行文结构，从语法知识到理论证明，华老师都耐心地指导我修正完善，倾注了大量的心血。论文录用时的祝贺，拒退时的鼓励，温暖了我的研究生活。华老师朴实无华、平易近人的人格魅力和严于律己、宽以待人的崇高风范使我受益匪浅，不仅教会了我待人接物与为人处世的道理，也尽其所能帮助我排忧解难。在此，谨向华老师致以崇高的敬意和真诚的感谢！

同时，感谢张柳柳师姐的引荐、李亚峰师兄的启蒙、杨亚娜师姐的激励，让我有机会进入华老师课题组、从事控制领域相关研究、胸怀壮志搞科研。感谢同届的陈健楠、钱承等博士的陪伴，祝愿我们前程似锦。感谢杨晔、游秀、王力航、王芳、卫燕乔等师兄姐及老师对本论文提出的宝贵意见。感谢张宇、李志杰、王夕娟、孟蕊、宁鹏举、姜安琦、李启东、李昊等师兄姐妹的合作支持。感谢赵广磊、陈树宗、王春艳等老师与李军朋、刘国聘、王媛媛、吴双双、宁静华、于开飞、邱云飞、王毅博、王艺璐、陈佳强、曾祥瑞、高儒帅等师兄姐妹的帮助。感谢亲友小嘿、小强、杰哥、东东、广玉等带给我的欢声笑语。

最后，特别感谢我的父母、姐姐及亲人，谢谢你们的理解与支持，愿你们健康、开心每一天！

鼠年燕园喜连连
院校共庆乐开颜
奋进图远志更坚
学成博取换新天