



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 下三角非线性系统递归构造控制器设计

作者姓名 李亚峰

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2018 年 12 月

中图分类号: TP13
UDC: 007.5

学校代码: 10216
密级: 公开

工学博士学位论文

下三角非线性系统递归构造控制器设计

博士研究生	李亚峰
导 师	华长春 教授
申 请 学 位	工学博士
学 科 专 业	控制科学与工程
所 在 单 位	电气工程学院
答 辩 日 期	2018 年 12 月
授予学位单位	燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**THE RECURSIVE METHOD
BASED CONTROLLER DESIGNS FOR
LOWER TRIANGULAR NONLINEAR SYSTEMS**

by Yafeng Li

Supervisor: Prof. Changchun Hua

Yanshan University

December 2018

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《下三角非线性系统递归构造控制器设计》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字：

日期： 年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《下三角非线性系统递归构造控制器设计》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密 ☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

摘 要

随着科学技术的发展以及工程机械系统自动化程度的提高,现代工程实际系统日趋复杂化,且对系统控制性能的要求、作业任务的难度不断加强。其中,极具代表性的下三角非线性系统的控制问题,受到了国内外诸多学者的广泛关注,并取得了大量的研究成果。本文主要采用递归设计方法,基于确定性系统和随机系统 Lyapunov 稳定理论,依次研究了下三角确定性非线性系统、下三角随机非线性系统,以及下三角非线性多智能体系统的控制器设计问题,并考虑了未建模、死区输入、随机扰动、不确定参数、时滞等因素对系统控制器设计及稳定性分析的影响。本文的主要研究内容如下:

(1) 针对具有未建模动态及死区输入特性的关联时变非线性系统,基于递归设计策略,构造系统状态反馈有限时间分散控制器,使得系统状态在有限的时间内到达平衡点。其中,分别采用鲁棒控制方法和改变能量函数(changing supply function)方法,对系统的死区输入特性和未建模进行处理,并给出相应的限制性条件。另外,基于固定时间收敛定理,给出关联系统固定时间镇定条件,保证系统状态在固定时间内收敛到平衡点;

(2) 进一步考虑随机扰动及不确定参数对系统造成的影响,基于随机系统稳定性理论,给出任意切换规则下 p 型随机非线性系统的自适应状态反馈控制器设计方法。其中,自适应律通过调整函数的方法进行设计。所构造的控制器及自适应律均独立于切换规则。此外,当系统不存在随机扰动或参数已知时,分别给出了相应 p 型系统的有限时间稳定定理;

(3) 考虑时滞对随机系统控制器设计及稳定性分析的影响,并给出存在动态增益情形下,随机时滞系统的解的存在性唯一性定理及系统稳定性定理。基于动态增益方法,利用递归设计策略,构造 p 型时滞随机系统的自适应状态反馈跟踪控制器,保证了跟踪误差期望值的有界性。尤其,当被跟踪信号为零时,系统所有状态值依概率收敛到平衡点;

(4) 针对系统模型为下三角结构的确定性非线性多智能体系统,首先,基于动态增益方法,针对每个智能体,构造降阶动态增益观测器,估计系统不可测量状态,再利用递归设计方法,设计多智能体系统输出反馈分布式包络控制器,保证跟随者输出信息收敛到领导者所生成的凸包内。其中,所构造的降阶动态增益观测器放松了现有观测器的 Lipchitz 条件限制。同时,所研究的多智能体系统可以存在很强的异构性,使得提出的控制策略具有更广泛的适用性;

(5) 考虑随机扰动对多智能体系统控制器设计的影响, 基于随机系统稳定性理论, 利用递归设计方法, 给出下三角非线性随机多智能体系统领导跟随分布式一致性控制策略, 保证智能体输出跟踪误差期望的有界性, 且其它状态量在概率上全局有界稳定。所提出的分布式控制策略, 只需要邻居智能体的输出信息。

关键词: 下三角非线性系统; 随机系统; 多智能体系统; 递归设计方法; 时滞; 有限时间; 分布式控制; 动态增益

Abstract

With the development of science and technology, and the improvement of mechanical automation, the dynamic models of engineering systems have become increasingly complicated. In addition, requirements on system performance are improved and the difficulty of the task is also strengthened. In the series of the engineering system models, the control problem for the representative lower triangular nonlinear systems has attracted many scholars' attention, and lots of results have been made. By the recursive method and based on the deterministic and stochastic systems Lyapunov stability theorems, this dissertation investigates the controller design for lower triangular deterministic nonlinear systems, lower triangular stochastic nonlinear systems and lower triangular nonlinear multi-agent systems (MASs). The influence of many factors, such as unmodeled dynamics, dead-zone input, stochastic disturbance, uncertain parameters, time delays and so on, on the controller design and stability analysis is considered. In this dissertation, the main contents are summarized as follows.

(1) Based on the recursive method, the decentralized finite time state feedback controller is constructed for interconnected nonlinear systems with unmodeled dynamics and dead zone input, such that the state variables of the system converge to the equilibrium point in finite time. The robust control method and changing supply function are used to address the dead-zone input and unmodeled dynamics, respectively, and some restrictive conditions are given. In addition, based on the fixed time stability theorem, some conditions are given, under which the state variables can converge to equilibrium point in fixed time;

(2) Further, considering the influence of stochastic disturbances and the uncertain parameters, the adaptive state feedback controller is designed for a class of p -normal form switched stochastic nonlinear systems with arbitrary switching based on stochastic systems Lyapunov stability theorems. The adaptation law is designed by the tuning function method. Both the constructed controller and the adaptation law are independent

of the switching law. When there is no disturbance or uncertain parameters, two finite time stability theorems are given for the p -normal form nonlinear systems;

(3) Considering the influence of the time delay on the controller design and stability analysis, theorems on existence and uniqueness of the solution and time delay stochastic system stability are given under the case that there exists dynamic gain in the studied systems. Based on these theorems, by the recursive method and dynamic gain technique, the adaptive state feedback tracking controller is designed for p -normal form time delay stochastic nonlinear systems to guarantee boundness of the expectation of the tracking error. Specially, if the reference signal is zero, all the state variables will converge to equilibrium point in probability

(4) For the lower triangular nonlinear MASs, the reduced order dynamic gain observer is constructed first to estimate the unmeasured state variables based on the dynamic gain technique. Then, by the recursive method, the output feedback distributed containment controller is designed to make the outputs of the followers converge to the convex hull spanned by the outputs of the leaders. The designed observer relaxes the traditional Lipschitz condition, and the proposed method allows the MASs to be heterogeneous, which also makes the method have a wider class of application;

(5) Finally, considering the influence the stochastic disturbance on the MASs, the leader-following controller is designed based on the stochastic system stability theorem and the recursive method, to guarantee the boundness of the expectation of the tracking error and the other state variables in probability. The designed controller of every agent only needs the neighbors' outputs information.

Keywords: Lower triangular nonlinear systems; stochastic systems; multi-agent systems; recursive method; time-delay; finite time; distributed control; dynamic gain

目 录

摘 要	I
Abstract	III
符 号	VII
第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 下三角非线性系统研究现状	4
1.2.1 单下三角非线性系统研究现状	4
1.2.2 下三角非线性多智能体系统研究现状	7
1.2.3 现有工作存在的不足	8
1.3 本文工作	9
1.3.1 本文的框架结构	9
1.3.2 本文的具体内容	10
第 2 章 含未建模的下三角关联非线性系统有限时间与固定时间控制	12
2.1 引言	12
2.2 问题描述	13
2.3 有限时间与固定时间控制	15
2.3.1 基础性定义及引理	15
2.3.2 有限时间控制器设计	15
2.3.3 固定时间控制器设计	23
2.4 仿真验证	25
2.4.1 数值算例仿真	25
2.4.2 耦合倒立摆仿真	28
2.5 本章小结	31
第 3 章 任意切换规则下 p 型随机系统状态反馈控制	32
3.1 引言	32
3.2 问题描述	33
3.3 自适应状态反馈控制	34
3.3.1 基础性引理及定义	34
3.3.2 控制器设计及稳定性分析	36
3.3.3 有限时间镇定推论	45
3.4 仿真验证	47
3.5 本章小结	51

第 4 章 基于动态增益方法的时滞随机非线性系统自适应状态反馈控制	52
4.1 引言	52
4.2 问题描述	53
4.3 状态反馈控制器设计	55
4.3.1 基础性引理及定理	55
4.3.2 控制器设计及稳定性分析	57
4.4 仿真验证	70
4.5 本章小结	74
第 5 章 下三角高阶非线性多智能体系统分布式包络控制	75
5.1 引言	75
5.2 问题描述	76
5.2.1 图论	76
5.2.2 多智能体系统模型	77
5.3 分布式包络控制	78
5.3.1 基础性引理	78
5.3.2 降阶动态增益观测器设计	78
5.3.3 控制器设计及稳定性分析	81
5.4 仿真验证	89
5.5 本章小结	93
第 6 章 随机非线性多智能体系统分布式领导跟随控制	94
6.1 引言	94
6.2 问题描述	95
6.2.1 图论	95
6.2.2 多智能体系统模型	95
6.3 领导跟随控制	96
6.3.1 基础性引理	96
6.3.2 领导跟随控制及稳定性分析	96
6.4 仿真验证	107
6.5 本章小结	112
结 论	113
参考文献	115
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果	124
致 谢	126

符 号

R	实数集.
R_+	非负实数集, 即 $R_+ = [0, +\infty)$.
R^n	n 维欧几里得空间.
R_{odd}^+	分子分母均为正奇整数的实数集.
R_{even}^+	分子正偶整数, 分母为正奇整数的实数集.
X^T	表示矩阵 X 的转置.
$trace\{X\}$	表示方阵 X 的迹, 简写为 “ $tr\{X\}$ ”.
$\ X\ $	表示向量 X 的欧几里得范数, 亦写为 “ $ X $ ”.
C^i	表示函数 $V(x): R^n \rightarrow R$ 对于 x 变量, i 次连续可微.
$C^{i,j}$	表示函数 $V(t, x): R_+ \times R^n \rightarrow R$ 对于 t 变量 i 次连续可微, 对于 x 变量 j 连续可微.
K	表示所有连续的严格增函数 $W: R_+ \rightarrow R_+$, 且在零点为零.
K_∞	表示无界且属于 K 函数的函数.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$	具有流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间, 其中 Ω 是样本点的全体, \mathcal{F} 是 Ω 上的一个 σ -代数, P 是 \mathcal{F} 上的概率测度.
$C([-d, 0]; R^n)$	所有定义在 $[-d, 0]$ 的 R^n 维函数, 且范数 $\ f\ = \sup_{x \in [-d, 0]} f(x) $ 的连续函数组成的集合, 其中 $f \in C([-d, 0]; R^n)$.
$C_{\mathcal{F}_0}^b([-d, 0]; R^n)$	所有取值于 $C([-d, 0]; R^n)$ 且 \mathcal{F}_0 可测的有界随机变量 $X = \{X(\theta): -d \leq \theta \leq 0\}$ 构成的空间.
$a \wedge b$	表示取 a 和 b 中的最小值.
Ω_1 / Ω_2	表示属于集合 Ω_1 而不属于集合 Ω_2 的元素构成的集合.

第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

现代科学技术发展日新月异，工程机械自动化程度飞速提高，使得现代工程被控系统越发大规模且复杂化，如电力系统、化工系统、制造过程、数字通信网络、城市交通系统等^[1,2]。同时，系统亦表现出强非线性、强耦合性、未建模、参数不确定、随机扰动、输入非线性等一系列特性，采用经典的线性模型控制理论，及对非线性模型线性化^[3]，虽然可以容易地、较为全面地分析系统各方面的性能，但是却忽略了系统本身具有的非线性特性，所设计的控制器也难以满足现代工程实际系统更为苛刻的性能要求及更高强度的任务要求。因此，非线性系统控制理论的研究已成为控制领域的热点和难点。

下三角非线性系统作为实际工程系统中一类广泛存在的结构形式，受到了国内外学者的广泛关注，并已存在了大量的研究成果。很多机械结构模型或实际工程问题的数学模型，直接表现为下三角结构，或者经过适当的坐标变换，可以转化为下三角非线性系统，如遥操作系统，航天器姿态控制系统，四旋翼控制系统，单摆系统，质量弹簧系统，轮式移动机器人，船舶航向控制系统，单连杆柔性机械臂等^[4-9]，如图 1-1 至图 1-2。在确定性下三角系统研究方面，下三角非线性关联系统模型最具有般性，其内部每个子系统都表现为下三角结构，且在各个子系统间存在结构上的耦合^[1,2]。自二十世纪六十年代开始，关联系统的控制理论研究得到迅速发展，但由于关联系统信息处理量大、结构复杂，所设计的控制方法对计算机计算速度以及信号监测、信息传输等要求大大提高。因而，非线性关联系统的控制器设计及稳定性分析极具挑战性和工程意义。

实际上，任何工程动态模型都会受到来自系统内部或者外部环境随机因素的影响，系统随机模型更能准确反映工程机械系统的动态特性，如平行主动悬挂系统，弱耦合欠驱动系统，化工系统等^[10-13]。相比于传统的确定性系统，在随机非线性系统中，系统内部及外界环境的随机扰动因素进一步被考虑。同时，系统中扩散项的引入，以及稳定性分析中 Hessian 项的引入，也为系统的稳定性分析与控制器设计带来了许多挑战。



图 1-1 空间机械手系统

Fig. 1-1 Space Manipulator System



图 1-2 四旋翼控制系统

Fig. 1-2 Quadrotor System

另一方面，相比于单个系统的控制研究，多个子系统之间的协作控制——多智能体系统控制，以其高效率、高容错和高并行等诸多优势，在近十多年中受到了大量研究学者的关注，并投入了大量精力予以研究，使多智能体协作控制成为了近十年来控制领域研究的热点问题^[14-15]。关于此方面的研究，可以追溯至二十世纪八十年代，研究学者们注意到自然界中存在诸多群体行为，例如物理现象中粒子的自激励、自组织等行为，又如生物界鱼类的群集行为、鸟类集体迁徙、昆虫等协作捕食、共同抵御入侵者的行为，如图 1-3 至图 1-4。这些行为都表现出群体协作的特性，以达到某种相同的状态或实现共同的目的。随着通信技术及计算机技术的发展，人们越来越意识到多个系统之间的协作，能以更小的代价完成更复杂的任务，并使系统具有更大的容错性、安全性、鲁棒性，且使得任务完成地更有效率^[16-18]。



图 1-3 鱼类群集

Fig. 1-3 Fish Flocking



图 1-4 协作捕食

Fig. 1-4 Cooperation on Predation

至今，多智能体系统以巨大的协作优势和广泛的应用前景，引起了通讯控制、计算机、人工智能等领域学者的广泛关注。其分布式控制的研究已成为控制领域的一个热点问题。一般来说，多智能体系统是由多个单一的智能体，通过一定的信息传递方式及作用规则，来相互协调，最终完成系统共同的目标，这些规则主要由领域规则和通信拓扑组成^[19]。多智能体系统没有统一的中央处理单元，而是用邻域规则来描述两个智能体之间的信息交互方式或两个智能体之间的通信关系，如果智能体之间的通信关系随着时间的变化而不进行改变，则用固定通信拓扑加以描述，反之，则用切换拓扑加以刻画。目前关于多智能体系统的研究可以分为：运动协调问题和覆盖协调问题。前者主要包括一致性问题，编队问题，聚集问题等。后者主要包括部署、搜罗、勘探等。其中一致性是运动协调的基本问题，许多编队问题

和聚集问题最终可以转化为一致性问题。进一步根据领导者多少的情况，可以将一致性问题划分为无领导者一致性问题，领导跟随一致性问题以及多领导者情形下的包络控制问题。

综上所述，本文将首先对下三角非线性系统展开研究，分别给出几类下三角确定性系统和下三角随机非线性系统的控制器设计方法，并以此为理论基础，结合拓扑图论知识，进一步对当前非线性多智能体系统的一致性控制的相关结果作进一步深入探索和拓展，丰富现有的相关领域的理论研究内容，并为后续实际工程学习和应用奠定基础。

1.2 下三角非线性系统研究现状

1.2.1 单下三角非线性系统研究现状

目前，关于单下三角非线性系统，从系统结构方面主要可以划分为：确定性下三角非线性系统^[20-29]和随机下三角非线性系统^[30-34]。相比于确定性下三角系统，如系统模型(1-1)-(1-4)，在随机系统中进一步考虑了随机扰动对系统的影响，即在系统动态模型中多出扩散项 f_j^T ，如系统模型(1-5)。两者在控制器设计方面具有很大的相似性，以下首先简要介绍确定性非线性系统。确定性下三角非线性系统一般的表达形式如(1-1)，

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + g_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 + g_2(x_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u(t) + g_n(x_n) \end{cases} \quad (1-1)$$

其中，对于 $j=1, \dots, n$ ，定义 $\bar{x}_j = [x_1, \dots, x_j]^T$ 。其在第一维微分变量 \dot{x}_1 中只含有 x_1, x_2 两个变量，在第二维微分变量 \dot{x}_2 中只含有 x_1, x_2, x_3 三个变量，依次在第 n 维微分变量 \dot{x}_n 中含有 x_1, x_2, \dots, x_n 所有状态变量及控制器 u ，即在直观的系统结构上具有“下三角”特征。系统(1-1)也称为严格反馈系统。如果系统中非线性项 $g_j(\bar{x}_j) = 0$ ，非线性系统(1-1)弱化为通常所说的链式系统。考虑表达形式如(1-2)的非线性系统，

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + g_1(\bar{x}_n) \\ \dot{x}_2 = x_3 + g_2(\bar{x}_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u(t) + g_n(\bar{x}_n) \end{cases} \quad (1-2)$$

如果系统中非线性项 $g_j(\bar{x}_n)$ 满足以下条件(1-3),

$$g_j(\bar{x}_n) \leq f_j(x_1, x_2, \dots, x_j) \quad (1-3)$$

则仍称(1-2)为下三角系统。进一步的考虑如下形式系统(1-4),

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1} + g_1(\bar{x}_n) \\ \dot{x}_2 = x_3^{p_2} + g_2(\bar{x}_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u^{p_n} + g_n(\bar{x}_n) \end{cases} \quad (1-4)$$

其中, 非线性项 $g_j(\bar{x}_n)$ 满足条件(1-3), 称此类型系统为 p 型下三角系统。其中, 若 p_j 为偶数, 则系统(1-4)不可控, 例如 $\dot{x} = u^2 + x$ 。因此, 通常要求 p_j 为正奇数。

另外, 除了以上三种具有代表性的三角结构系统, 当前所研究的高阶下三角非线性系统中还包括更为一般化的纯反馈系统^[20,21]和下三角关联系统^[22-26]。纯反馈形式的非线性系统在本文不做讨论。关联系统方面, 大多数学者集中于输出关联系统的研究, 如文献^[22-24], 也有部分文献给出了强关联非线性系统的一些结果^[26]。

进一步考虑如下形式随机非线性系统,

$$\begin{cases} dx_1 = (x_2 + g_1(\bar{x}_n))dt + f_1^T(\bar{x}_n)dw \\ dx_2 = (x_3 + g_2(\bar{x}_n))dt + f_2^T(\bar{x}_n)dw \\ \vdots \\ dx_n = (u + g_n(\bar{x}_n))dt + f_n^T(\bar{x}_n)dw \end{cases} \quad (1-5)$$

其中, w 定义为一个完备概率空间上的 Wiener 过程, 若漂移项 $g_j(\bar{x}_n)$ 和扩散项 $f_j^T(\bar{x}_n)$ 的范数均满足条件(1-3), 即在系统结构上具有“下三角”特点, 则称系统(1-5)为下三角随机系统。相应的在下三角随机系统中也存在 p 型结构和关联结构, 此处不再赘述。

在下三角非线性系统控制器的设计方面主要有反馈线性化方法、递归设计方法以及构造性方法(非递归设计)。反馈线性化的方法, 主要是通过引入一个非奇异坐标变换, 将系统转换为能控标准型, 或者部分线性化的系统, 再通过状态反馈与预置控制, 解决系统的控制问题。但是, 这种方法存在较多限制, 首先系统是否能进行线性化, 需要进一步利用 Frobenius 定理来确定, 其次通过线性化方法镇定系统, 所设计的控制器只能达到局部镇定^[35]。在构造性控制器设计方法方面, 通常采用高增益或动态增益的方法, 并结合自适应及鲁棒控制方法, 进而构造系统控制器, 并利

用 Lyapunov 稳定理论分析系统稳定性。利用此方法可以设计出类线性(linear-like)结构的控制器形式，且通常与观测器联合设计。由于该方法常用于构造输出反馈控制器，故而对系统非线性项具有相应的条件限制^[36-37]，且此方法技巧性强，尤其是在与自适应方法联合解决相关控制器设计问题时，具有较高的设计难度。

相比于以上两种方法，递归设计以其结构化和系统化的优势，无论在状态反馈控制，还是输出反馈控制方面都具有较广泛的应用，且通常结合 Lyapunov 稳定理论，同时给出系统控制器设计方法和稳定性分析。递归设计是一种将高阶系统的控制器设计问题，转化为一系列低阶系统的设计问题，在每一低阶子系统的设计中引入额外的设计裕度，镇定本子系统并补偿前一子系统残留项所带来的影响，其设计方向和控制信号的控制方向相反，如图 1-5。

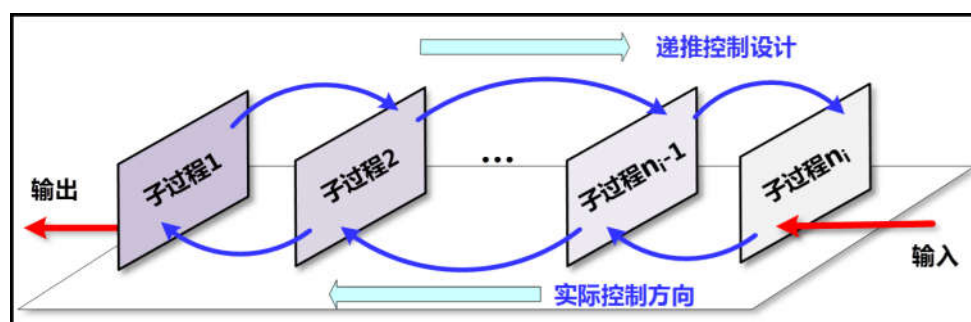


图 1-5 递归设计

Fig. 1-5 Recursive Method

作为递归设计的一种经典控制器设计方法——反步设计(backstepping)，自 1991 年，被 Kanellakopoulos 等人提出以来，大批学者将其与自适应控制、鲁棒控制、动态面控制、智能控制、观测器设计、k 滤波等方法相结合，给出了一系列理论研究结果。文献[38]通过引入 Lipschitz 条件，对系统进行观测器设计，基于设计的观测器，利用反步设计的方法，给出了系统输出反馈控制器构造策略。文献[39]，通过采用动态面控制方法(Dynamic Surface Control)，克服了反步设计中存在的“计算爆炸”问题。文献[25,27]进一步考虑了系统中存在未知非线性函数的情形，利用神经网络等智能控制的逼近能力，给出了关联系统的输出反馈控制方法。尤其，在文献[30]中，Deng 等人引入了一类四次方形式的 Lyapunov 函数，结合反步设计，很好的解决了随机下三角系统的状态反馈控制问题，此后得到了诸多学者引用，并用于不同问题下随机系统的控制器设计。例如，文献[40]利用此方法研究了，输出量受时滞影响下的随机系统输出反馈问题。

基于经典的反步设计所得到的控制效果，往往是渐近稳定的，甚至是有界稳定或半全局稳定的。通过将反步设计中的状态变换进行一定的改良或与其它方法相结合，研究学者们得到了更佳的控制效果，甚至解决了一些困扰许久的难题。文献[29]中，基于递归的设计方法，结合自适应控制，给出了一类下三角 p 型确定性系统的自适应有限时间控制器设计方法，保证系统状态在有限的时间内到达平衡点。文献[41]，考虑了一类下三角全状态时滞系统，利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函对系统时滞项进行处理，通过在递归设计的每一步引入动态增益，对后续设计中由于时滞因素而产生的残留项进行补偿，很好的解决了下三角全状态时滞系统的镇定问题。在随机系统研究方面，文献[13]给出了严格反馈随机非线性系统的状态反馈控制方法。文献[42]进一步研究了 p 型下三角随机非线性系统的有限时间控制问题。

1.2.2 下三角非线性多智能体系统研究现状

对于下三角多智能体系统一致性的研究，从智能体系统结构类型角度可以简单划分为：下三角线性多智能体系统和下三角非线性多智能体系统。线性多智能体系统的研究涉及一阶积分型多智能体系统^[43]、二阶双积分型多智能体^[44-45]以及高阶链式多智能体系统^[46-47]。需要强调的是，在线性多智能体一致性研究中，一般考虑多个智能体的全状态一致性问题，即设计分布式控制器使得智能体每阶状态变量最终能够趋于一致。

相比于线性多智能体系统，非线性多智能体系统在模型结构上更为一般化，且更能准确刻画被控系统的动态模型，同时分布式控制器的设计也更具挑战性，因此，非线性多智能体系统的研究在近几年受到了诸多学者的关注。由于非线性多智能体的系统结构复杂，且线性系统的控制方法不再适用，故而，在非线性多智能系统方面，目前大量的研究文献多集中于多智能体输出一致性的研究中。包括无领导者一致性，单领导者情形下的领导跟随一致性，以及多领导者情形下的包络控制问题。基于拓扑图论知识，结合非线性系统的诸多的控制方法，产生了一系列的研究结果。文献[48]针对二阶非线性多智能体，利用神经网络的逼近能力，估计系统未知非线性，解决了二阶非线性多智能体系统在固定有向通信拓扑下的同步控制问题。文献[49]，利用动态面控制的方法，研究了高阶异构非线性多智能体系统的包络控制问题，克服了反步设计中“计算爆炸”问题，但也限制了初始域只能是半全局。文献[50]，利用反步设计及调整函数的方法，研究了含有不确定参数的高阶非线性多智能体的领

导跟随问题。文献[51-52]基于随机系统Lyapunov稳定理论及拓扑图论,研究了随机非线性多智能体的一致性控制问题。除此之外,也有一部分学者在非线性多智能体全状态一致性方面做了相关工作。文献[53-54]研究了非线性确定性多智能体的全状态一致控制问题。

1.2.3 现有工作存在的不足

尽管目前关于下三角非线性系统的控制器设计、稳定性分析以及多系统一致性研究已存在较多的研究成果,但考虑系统内部及环境外部随机扰动、时滞、不确定参数等因素时,仍存在许多未解决的问题。

首先,在确定性下三角非线性系统控制器设计方面,大多数控制器的控制效果只能达到有界稳定或者渐进稳定。甚至,利用智能控制、动态面控制等方法,只能达到半全局稳定。为了使得系统能够获得更好的控制性能,也有一部分文献研究了非线性系统的有限时间、固定时间控制器设计方法,以保证系统状态的有限时间收敛性能,但在具有未建模及死区输入特性的关联非线性系统有限时间制器设计方面,并不存在相关研究结果。

其次,在随机下三角非线性系统控制器设计方面,现有文献大多针对严格反馈随机系统控制器设计展开研究,且只考虑输出状态中含有时滞信息时,系统的控制器构造策略。也有部分文献考虑了全部状态变量含有时滞信息时,系统控制器的设计方法,但对系统时滞项具有较强的限制条件。而且,针对系统结构更为一般化的 p 型下三角随机非线性系统,相关控制器设计更具为困难。同时,在 p 型随机系统的有限时间控制器设计方面,据作者所知,没有文献考虑多模态任意切换对控制器设计造成的影响。

最后,在非线性多智能体输出一致性控制器设计方面,目前存在的研究结果一般要求每个智能体的系统阶次相同,且构造的控制器会用到邻接智能体的全部状态信息,甚至控制器信息。也有部分文献通过采用动态面控制的方法,克服利用邻接智能体控制器信息的条件限制,但是只能达到半全局稳定的控制效果。对于输出反馈分布式控制器的构造,对系统模型具有较强的限制,通常要求智能体非线性项满足Lipschitz条件。在随机非线性多智能体分布式控制方面,智能体动态模型更为一般化。系统扩散项以及Lyapunov函数微分算子中Hessian项的存在,使得控制器设计更为困难,同时也存在类似的问题。

1.3 本文工作

1.3.1 本文的框架结构

对于下三角复杂非线性系统，已存在大量的研究成果。同时，仍存在较多难以解决的问题。本文针对现有研究结果的局限和欠缺，以经典的递归设计方法，分别对单个下三角非线性系统和下三角多智能体系统存在的控制问题展开研究，具体的框架结构如图 1-6。

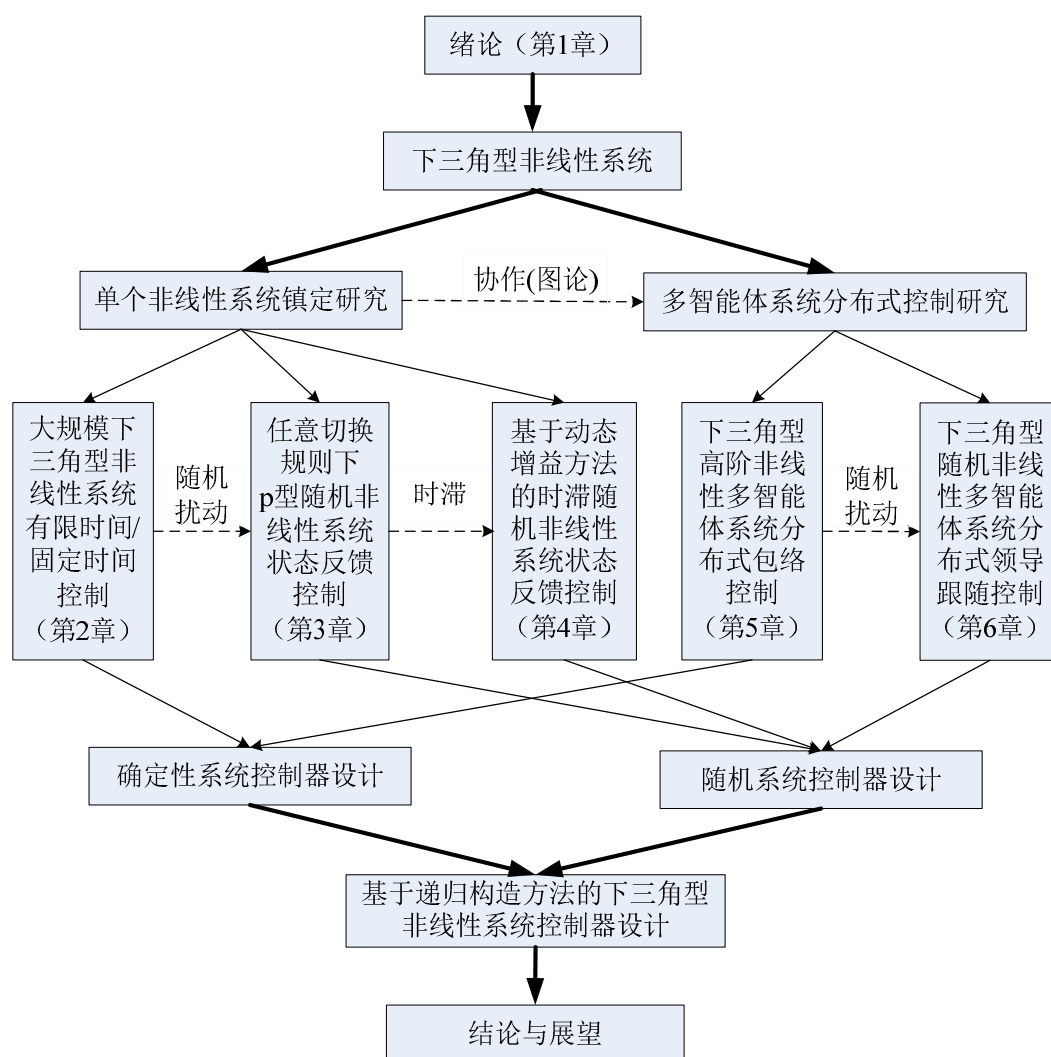


图 1-6 论文的框架结构

Fig. 1-6 The structure of this dissertation

在第 1 章绪论中，阐述了非线性系统及多智能体系统的研究背景和意义，并对下三角非线性系统和下三角多智能体系统的研究现状进行了简要总结和回顾。在第 2、3、4 章中，考虑了单个非线性系统的镇定及跟踪问题。其中，第 2 章研究了含有

未建模动态及死区输入的确定性关联非线性系统的有限时间及固定时间控制问题，第 3、4 章进一步考虑了随机扰动对系统的影响，基于随机系统稳定性理论，分别给出了任意切换规则下和时滞情形下随机非线性系统的状态反馈控制器设计方法。在第 5、6 章中，基于之前三章中单个非线性系统控制器设计的理论结果及推导中的技术技巧，考虑了确定性及随机下三角非线性多智能体系统的分布式控制问题。其中，第 5 章中给出了确定性多智能体系统的输出反馈分布式包络控制器设计方法，第 6 章中，进一步考虑了随机扰动对智能体动态性能的影响，基于随机 Lyapunov 稳定理论，给出了多智能体系统分布式领导跟随控制方法。

本文所研究的被控系统结构，由易到难，由确定性系统到随机系统，由单系统镇定到多系统协作，并且系统都为下三角结构。控制器的整体构造策略均采用递归设计方法。但由于解决的控制问题各不相同，故具体细节上存在较大差异。

1.3.2 本文的具体内容

本文的各章节研究内容简要概述如下：

第 2 章考虑一类具有未建模动态及死区输入非线性的时变输出关联系统的状态反馈有限时间与固定时间镇定问题。克服了未建模信息、时变信息、关联信息、死区输入四方面因素，对系统状态有限时间与固定时间稳定造成的影响。给出系统状态反馈控制器的构造策略，以及达到相应镇定效果应满足的限制性条件；

第 3 章考虑一类更一般化的 p 型切换随机非线性系统的状态反馈镇定问题。在本章中，主要解决随机扰动、切换信息、不确定参数及 p 型结构对系统镇定造成的影响。基于随机系统 Lyapunov 稳定定理，给出了系统自适应状态反馈控制器设计方法，并基于此，分别给出了系统随机有限时间稳定和自适应有限时间稳定两个推论及应满足的条件；

第 4 章进一步考虑了时滞信息对随机系统控制器设计的影响，研究了含有不确定参数的 p 型时滞随机系统自适应跟踪控制问题。本章中，被控系统的一个显著特点是，除了高阶项（即 x^p 项）外，系统所有非线性项内部状态均可含有时滞信息，并通过动态增益方法进行有效解决。另外，通过调整函数的方法进行自适应律设计，估计系统不确定参数；

第 5 章针对一类下三角异构非线性多智能体系统，采用递归设计，研究了系统输出反馈分布式包络控制问题，使得跟随者收敛到由多个领导者构成的凸包内。本

章主要解决了, 在非线性项不满足 Lipchitz 条件时, 智能体系统的动态增益降阶观测器设计问题, 以及无向图条件下输出反馈分布式控制器设计策略;

第 6 章进一步考虑了随机扰动对多智能体系统分布式控制器设计的影响, 研究了一类非线性异构随机多智能体系统的分布式领导跟随状态反馈控制问题。本章中, 基于随机系统 Lyapunov 稳定理论, 给出了无向图条件下, 系统控制器构造策略, 并证明了跟踪误差期望的有界性, 即跟随者输出与领导者输出差值的期望有界。

最后, 对全文的工作进行了总结, 指出了本文的主要贡献及设计方法中存在的固有问题, 并对今后的研究工作进行了展望。

第2章 含未建模的下三角关联非线性系统有限时间与固定时间控制

本章研究了一类具有未建模动态和死区输入特性的时变关联系统的有限时间与固定时间分散控制问题。其中，关联项绝对值上界为时变非线性方程，相比于通常采用的线性限制条件或时不变限制条件，此条件更为宽松。本章基于递归设计策略，首先构造系统有限时间分散控制器，使得系统状态变量可以在有限的时间内收敛至零点。有限时间上界值可由设计参数及状态初值计算得出。进一步，给出了系统固定时间稳定的限制性条件，其固定时间上界值只依赖于控制器设计参数。

2.1 引言

在实际工程中，许多系统模型可以用关联系统来描述^[1,2]。对于关联系统，传统的控制方法主要包括递阶控制、集中控制等^[24]，但由于关联系统结构复杂，采用一般的控制方法对计算机计算速度以及信号监测、信息传输等要求极高。因而，分散控制以其无需其它相关联子系统信息，只使用自身系统信息，就可实现整体系统的稳定控制的明显优势，而受到许多学者的关注^[25,27,55-59]。文献[25,27,55]采用智能控制算法(神经网络控制、模糊控制)，研究了关联系统在未知控制方向、参数不确定、限定输出暂稳态性能等一系列情形下的系统镇定问题。文献[56-58]研究了关联系统在多时延情形下，系统的镇定问题，以及 h 无穷控制在关联系统控制中的应用。显然，这些控制方法中的最优收敛效果为指数收敛，甚至神经网络控制、模糊控制等智能算法不能达到全局稳定的效果，相比于有限时间控制具有明显缺陷。

在近些年，有限时间控制作为一类时间最优控制方法，已经吸引了越来越多学者的关注。有限时间控制的主要特征是，使得被控系统状态值在有限的时间内到达平衡点，并且此后始终停留在平衡点，即系统的最终状态误差为零。在现有文献中，有限时间控制方法已被应用于多类非线性系统中^[13,42,28-29,59-61]。文献[28]给出了一类严格反馈非线性系统的有限时间控制器设计方法。文献[29]进一步研究了带有不确定参数的 p 型下三角非线性系统自适应有限时间控制问题。在文献[59]中，针对一类下三角时变非线性系统，提出了一种非递归的有限时间控制器设计方法，相比于递归

设计, 此方法有效的降低了控制增益。文献[60-61]研究了切换非线性系统的全局有限时间控制问题。文献[13,42]分别给出了严格反馈随机非线性系统和 p 型下三角随机非线性系统状态反馈有限时间控制器设计方法。

另一方面, 由于实际工程系统的复杂性, 建立其精确的数学模型往往是很困难的。未建模动态便可用于刻画系统中难以建立其准确数学模型的部分动态信息。非线性系统中的未建模信息通常被假设为输入到状态稳定(input to state stable)、输入到输出实际稳定(input to output practically stable)、输入到状态实际稳定(input to state practically stable)等^[37,62-66]。基于不同的假设条件, 以上文献中分别针对不同的被控系统给出了相应的控制器设计方法。尽管, 目前针对有限时间控制的研究及含有未建模动态的非线性系统镇定的研究均存在大量结果, 但是关于含有未建模动态及死区输入的时变关联系统有限时间控制的研究几乎没有, 关联项、未建模等信息的引入也给系统控制器设计带来了很大困难。

本章针对一类含有未建模动态及死区输入非线性的时变关联系统, 基于递归设计方法, 构造系统有限时间分散控制器。分别采用改变能量函数^[67]和鲁棒控制方法对系统未建模及死区输入进行处理。并进一步给出系统固定时间稳定的条件。最后, 通过数值仿真证明控制器构造方法的有效性。

2.2 问题描述

考虑如下关联非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_i = Q_i(z_i, \bar{y}_n, t) \\ \dot{x}_{i1} = x_{i2} + g_{i1}(x_{i1}, t) + f_{i1}(\bar{y}_n, z_i, t) \\ \dot{x}_{ij} = x_{i(j+1)} + g_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) + f_{ij}(\bar{y}_n, z_i, t) \\ \dot{x}_{in_i} = u_i(v_i) + g_{in_i}(\bar{x}_{in_i}, t) + f_{in_i}(\bar{y}_n, z_i, t) \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (2-1)$$

其中 $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n_{i-1}$, $x_{ij}(t) \in R$ 和 $y_i(t) \in R$ 分别为第 i 个子系统状态变量和输出; $\bar{x}_{ij}(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{ij}(t)]^T$ 为第 i 个子系统的状态向量; $\bar{y}_n(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ 为关联系统的输出向量; $z_i \in R^{m_i}$ 为第 i 个子系统未建模动态部分的内部状态向量; $Q_i: R^{m_i} \times R^n \times R_+ \rightarrow R^{m_i}$, $g_{ij}: R^j \times R_+ \rightarrow R$, 和 $f_{ij}: R^n \times R^{m_i} \times R_+ \rightarrow R$ 为 C^1 不确定连续非线性函数; v_i 为第 i 个子系统的控制输入; $u_i \in R$ 表示死区非线性输出, 具体形式如下

$$u_i(v_i) = \begin{cases} m_{ir}(t)(v_i - b_{ir}) & v_i \geq b_{ir} \\ 0 & b_{il} < v_i < b_{ir} \\ m_{il}(t)(v_i - b_{il}) & v_i \leq b_{il} \end{cases} \quad (2-2)$$

其中 $b_{ir} > 0$, $b_{il} < 0$ 且均为常数, $m_{ir}(t)$ 和 $m_{il}(t)$ 为正时变函数。

为了研究系统控制问题, 给出以下假设条件:

假设 2.1 ^[66] 各子系统中未建模动态 z_i , 满足有限时间输入到状态稳定 (finite-time input-to-state stability), 即存在正定 Lyapunov 函数 $U_i(z_i)$, K_∞ 函数 $\underline{\alpha}_i$, $\bar{\alpha}_i$ 和 γ_{il} , 正已知函数 $\epsilon_i \in (0,1)$, $\tilde{\epsilon}_i > 1$, $a_i > 0$ 和 $\tilde{a}_i \geq 0$, 使得对于所有 $t \geq 0$ 有如下条件成立

$$\underline{\alpha}_i(\|z_i\|) \leq U_i(z_i) \leq \bar{\alpha}_i(\|z_i\|) \quad (2-3)$$

$$\dot{U}_i(z_i) \leq -a_i U_i^{\epsilon_i} - \tilde{a}_i U_i^{\tilde{\epsilon}_i} + \sum_{l=1}^n \gamma_{il}(|y_l|) \quad (2-4)$$

假设 2.2 非线性函数 $g_{ij}(\bar{x}_{ij}, t)$ 和 $f_{ij}(\bar{y}_n, z_i, t)$ 满足以下限制性条件

$$|g_{ij}(\cdot)| \leq (|x_{i1}| + |x_{i2}| + \dots + |x_{ij}|) r_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \quad (2-5)$$

$$|f_{ij}(\cdot)| \leq \Phi_{ij}(y_i, t) (|y_1| \varphi_{ij1}(y_1, t) + |y_2| \varphi_{ij2}(y_2, t) + \dots + |y_n| \varphi_{ijn}(y_n, t) + \Delta_{ij}(\|z_i\|)) \quad (2-6)$$

式中, $r_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0$, $\Phi_{ij}(y_i, t) \geq 0$, 和 $\varphi_{ijl}(y_l, t) \geq 0$, $l = 1, 2, \dots, n$, 为已知 C^1 时变方程。 $\Delta_{ij}(\cdot) \geq 0$ 为已知正非减函数。

假设 2.3 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n$ 和 $j = 1, 2, \dots, n_i$, (2-4) 中的函数 $\gamma_{il}(\cdot)$ 和 (2-6) 中的函数 $\Delta_{ij}(\cdot)$ 满足如下限制条件

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_{il}(s)}{s^d} < +\infty \quad (2-7)$$

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_{ij}^{\hat{d}}(\underline{\alpha}_i^{-1}(s))}{s^{\tilde{\epsilon}_i}} < +\infty \quad (2-8)$$

其中, $p \geq 1 + q_2$ 为分子为偶数分母为奇数的正分数, $\hat{d} = d / q_2 > 1$, $d = p - (2 / (2\bar{n} + 1))$, $q_2 = (2\bar{n} - 1) / (2\bar{n} + 1)$, $\bar{n} \geq \max\{n_i, i = 1, \dots, n\}$ 。

假设 2.4 存在正常数 \underline{m}_{ir} , \underline{m}_{il} , \bar{b}_{ir} 和负常数 \underline{b}_{il} , 使得以下条件成立 $m_{ir}(t) \geq \underline{m}_{ir}$, $m_{il}(t) \geq \underline{m}_{il}$, $b_{ir} \leq \bar{b}_{ir}$, $b_{il} \geq \underline{b}_{il}$ 。

注释 2.1 在假设 2.2 中, 限制性条件中可显含时变信息, 相比文献[28]中的条件更为宽松。对于假设 2.3, 若不等式 $\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_{ij}(\underline{\alpha}_i^{-1}(s))}{s} < +\infty$ 成立, 则条件(2-8)亦成立, 即条件(2-8)更为宽松。事实上, 根据参考文献[28], 只要 $g_{ij}(\cdot)$, $f_{ij}(\cdot)$ 绝对值的上界

函数满足(2-5)和(2-6),且假设 2.1 成立即可,即本文中的非线性方程 $Q_i(\cdot)$, $g_{ij}(\cdot)$, $f_{ij}(\cdot)$ 可以包含关联系统中所有的状态信息。

2.3 有限时间与固定时间控制

2.3.1 基础性定义及引理

引理 2.1^[28] 对于奇整数 $p > 0$, $q > 0$, 定义正常数 $b = p/q \leq 1$, 则有以下不等式: $|x^b - y^b| \leq 2^{1-b} |x - y|^b$ 成立。

引理 2.2^[68] 对于正实数 x_1, x_2, \dots, x_i, b , 有以下不等式成立 $(x_1 + x_2 + \dots + x_i)^b \leq \max\{i^{b-1}, 1\} (x_1^b + x_2^b + \dots + x_i^b)$ 。

引理 2.3^[69] 考虑如下标量系统: $\dot{y} = -\alpha y^{m/n} - \beta y^{p/q}$, $y(0) = y_0$ 。如果参数 m, n, p, q 均为正奇整数, 且满足 $m > n, p < q, \alpha > 0$ 和 $\beta > 0$, 则系统全局固定时间稳定, 固定时间设定值 T 满足: $T < T_{\max} := \frac{1}{\alpha} \frac{n}{m-n} + \frac{1}{\beta} \frac{q}{q-p}$ 。

引理 2.4^[28] 对于正实数 c, d 和任意的函数 $\gamma(x, y) > 0$, 存在以下不等式成立: $|x|^c |y|^d \leq \frac{c\gamma(x, y)|x|^{c+d}}{c+d} + \frac{d\gamma^{-c/d}(x, y)|y|^{c+d}}{c+d}$ 。

定义 2.1^[29] 考虑系统 $\dot{x} = f(x, t)$, $f(0, t) = 0, x \in R^n$ 。其中, 函数 $f(x, t)$ 关于变量 x 连续。若系统 Lyapunov 稳定, 且存在设定时间 T , 使得对于任意的初始状态 $x(t_0) = x_0 \in R^n$, 有 $\lim_{t \rightarrow T} x(t, t_0, x_0) = 0$ 成立, 则系统全局有限时间稳定。

注释 2.2 在引理 2.3 中, 如果对于任意的时刻 $y \geq 0$ 始终成立, 则根据文献[70]的证明, 引理 2.3 中的参数 m, n, p, q 亦可以选取为正偶整数。

2.3.2 有限时间控制器设计

在本小节, 将采用加幂积分及递归设计的方法, 针对关联系统(2-1)设计有限时间分散控制器, 保证系统全局有限时间镇定。首先, 针对第 i 个子系统, 选取如下加幂积分型 Lyapunov 函数

$$V_{in_i} = \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} = \sum_{j=1}^{n_i} \int_{x_{ij}^*}^{x_{ij}} (s^{1/q_j} - x_{ij}^{*1/q_j})^{p-q_j} ds \quad (2-9)$$

式中, $q_j = (2\bar{n} + 3 - 2j) / (2\bar{n} + 1)$, 连续虚拟控制器 $x_{i1}^*, x_{i2}^*, \dots, x_{in_i}^*$ 设计为如下形式

$$\begin{aligned} x_{i1}^* &= 0, & \xi_{i1} &= x_{i1}^{1/q_1} - x_{i1}^{*1/q_1} \\ x_{i2}^* &= -\xi_{i1}^{q_2} \beta_{i1}(x_{i1}, t), & \xi_{i2} &= x_{i2}^{1/q_2} - x_{i2}^{*1/q_2} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$x_{i(n_i+1)}^* = -\xi_{in_i}^{q_{n_i+1}} \beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i}, t), \quad \xi_{in_i} = x_{in_i}^{1/q_{n_i}} - x_{in_i}^{*1/q_{n_i}}$$

其中, $x_{i(n_i+1)}^*$ 为第 i 个子系统“期望”的死区输出, 并用于构造第 i 个子系统的控制器 $v_i(t)$ 。 $\beta_{i1}(\cdot) \geq 0, \beta_{i2}(\cdot) \geq 0, \dots, \beta_{in_i}(\cdot) \geq 0$ 为待设计的一阶连续可微函数。

为简化后续理论推导, 先给出以下命题及相关证明。

命题 2.1 对于 $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n_i$, 存在一阶连续可微函数 $\rho_{ij}(\bar{x}_{ij}, t)$, 使得以下不等式成立: $\xi_{ij}^{p-q_j} g_{ij} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^d + \xi_{ij}^d \rho_{ij}$ 。

证明: 对于 $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n_i$, 由引理 2.2 和(2-10), 可得

$$|x_{ij}| \leq \left| \xi_{ij} + x_{ij}^{*1/q_j} \right|^{q_j} \leq \left| \xi_{ij} \right|^{q_j} + \left| \xi_{i(j-1)} \right|^{q_j} \left| \beta_{i(j-1)} \right| \quad (2-11)$$

通过(2-5)和 $0 < q_{n_i} < \dots < q_2 < q_1 = 1$, 可得

$$\begin{aligned} &g_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \\ &\leq \left(\left| \xi_{i1} \right|^{q_1} + \left| \xi_{i2} \right|^{q_2} + \left| \xi_{i1} \right|^{q_2} \left| \beta_{i1} \right| + \dots + \left| \xi_{ij} \right|^{q_j} + \left| \xi_{i(j-1)} \right|^{q_j} \left| \beta_{i(j-1)} \right| \right) r_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \\ &\leq \left(\left| \xi_{i1} \right|^{q_{j+1}} + \left| \xi_{i2} \right|^{q_{j+1}} + \dots + \left| \xi_{ij} \right|^{q_{j+1}} \right) \bar{r}_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \end{aligned} \quad (2-12)$$

式中, $\bar{r}_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0$ 为一阶可微函数。进一步基于引理 2.4, 可得命题 2.1。

命题 2.2 对于 $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n_i$, 存在可设计的一阶连续可微函数 $\psi_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0$, $\varphi_{ij11}(y_1, t) \geq 0, \varphi_{ij21}(y_2, t) \geq 0, \dots, \varphi_{ijn1}(y_n, t) \geq 0$ 和正实数 a_{ij} , 使得以下不等式成立:

$$\xi_{ij}^{p-q_j} f_{ij} \leq \xi_{ij}^d \psi_{ij} + y_1^d \varphi_{ij11} + \dots + y_n^d \varphi_{ijn1} + a_{ij} \Delta_{ij}^{\hat{d}} \quad (2-13)$$

证明: 基于假设 2.2 和引理 2.4, 可直接证明此命题。

命题 2.3 对于 $2 \leq j \leq n_i$, 存在正实数 C_{ij} 使得 $\xi_{i(j-1)}^{p-q_{j-1}} (x_{ij} - x_{ij}^*) \leq \frac{1}{4} \xi_{i(j-1)}^d + C_{ij} \xi_{ij}^d$ 。

证明: 基于引理 2.1, 引理 2.4 和(2-10), 可直接证明此命题。

命题 2.4 对于 $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n_i$, 存在正实数 a_{ik} 和一阶连续可微分函数 $d_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0, \varphi_{ik1(j-k+1)}(y_1, t) \geq 0, \dots, \varphi_{ikn(j-k+1)}(y_n, t) \geq 0$, 使得以下不等式成立

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{ik}} \dot{x}_{ik} &\leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^d + \xi_{ij}^d d_{ij} + \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \Delta_{ik}^{\hat{d}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{j-1} (y_1^d \varphi_{ik1(j-k+1)} + \dots + y_n^d \varphi_{ikn(j-k+1)}) \end{aligned} \quad (2-14)$$

证明：参考[28]中(A.4)-(A.7)的证明，存在一阶连续可微函数 $d_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0$ 使得

$$\left| \frac{\partial x_{ij}^{*1/q_j}}{\partial x_{ik}} \right| \leq \left(\sum_{l=1}^{j-1} \xi_{il}^{1-q_k} \right) d_{ijk}(\bar{x}_{i(j-1)}, t) \quad (2-15)$$

基于(2-6)和(2-11)-(2-15)，可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x_{ij}^{*1/q_j}}{\partial x_{ik}} \dot{x}_{ik} \right| &\leq \left(\sum_{l=1}^{j-1} \xi_{il}^{1-q_k} \right) d_{ijk}(\bar{x}_{i(j-1)}, t) \left\{ |\xi_{ik}|^{q_k} + |\xi_{i(k+1)}|^{q_k} |\beta_{i(k-1)}| \right. \\ &\quad \left. + (|\xi_{i1}|^{q_{k+1}} + \dots + |\xi_{ik}|^{q_{k+1}}) \bar{r}_{ik} + \Phi_{ik}(|y_1| \varphi_{ik1} + \dots + |y_n| \varphi_{ikn} + \Delta_{ik}) \right\} \\ &\leq |y_1|^{1-q_k+q_{k+1}} \tilde{\varphi}_{ik1(j-k+1)} + \dots + |y_n|^{1-q_k+q_{k+1}} \tilde{\varphi}_{ikn(j-k+1)} \\ &\quad + \left(\sum_{l=1}^{j-1} \xi_{il}^{1-q_k} \right) \Phi_{ik} d_{ijk} \Delta_{ik} + \left(|\xi_{i1}|^{1-q_k+q_{k+1}} + \dots + |\xi_{ij}|^{1-q_k+q_{k+1}} \right) \tilde{d}_{ijk} \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中， $\tilde{\varphi}_{ik1(j-k+1)}(y_1, t) \geq 0, \dots, \tilde{\varphi}_{ikn(j-k+1)}(y_n, t) \geq 0, \tilde{d}_{ijk}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0$ 为被设计的一阶连续可微函数。其次，由于

$$\begin{aligned} &\left| -(p-q_j) \int_{x_{ij}^*}^{x_{ij}} (s^{1/q_j} - x_{ij}^{*1/q_j})^{p-q_j-1} ds \right| \\ &\leq (p-q_j)(x_{ij} - x_{ij}^*)(x_{ij}^{1/q_j} - x_{ij}^{*1/q_j})^{p-q_j-1} \leq 2^{1-q_j} (p-q_j) |\xi_{ij}|^{p-1} \end{aligned}$$

结合(2-16)，可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{ik}} \dot{x}_{ik} &= -(p-q_j) \int_{x_{ij}^*}^{x_{ij}} (s^{1/q_j} - x_{ij}^{*1/q_j})^{p-q_j-1} ds \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial x_{ij}^{*1/q_j}}{\partial x_{ik}} \dot{x}_{ik} \\ &\leq 2^{1-q_j} (p-q_j) |\xi_{ij}|^{p-1} \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ (|\xi_{i1}|^{1-q_k+q_{k+1}} + \dots + |\xi_{ij}|^{1-q_k+q_{k+1}}) \tilde{d}_{ijk} \right. \\ &\quad \left. + |y_1|^{1-q_k+q_{k+1}} \tilde{\varphi}_{ik1(j-k+1)} + \dots + |y_n|^{1-q_k+q_{k+1}} \tilde{\varphi}_{ikn(j-k+1)} + \left(\sum_{l=1}^{j-1} \xi_{il}^{1-q_k} \right) \Phi_{ik} d_{ijk} \Delta_{ik} \right\} \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^d + \xi_{ij}^d d_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) + \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \Delta_{ik}^{\hat{d}}(\|z_i\|) + \sum_{k=1}^{j-1} (y_1^d \varphi_{ik1(j-k+1)} + \dots + y_n^d \varphi_{ikn(j-k+1)}) \end{aligned}$$

命题 2.5 对于 $1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n_i$ ，存在一阶连续可微函数 $b_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq 0$ ，使得以

下不等式成立: $\frac{\partial W_{ij}}{\partial t} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^d + \xi_{ij}^d b_{ij}$ 。其中, $\frac{\partial W_{ij}}{\partial t}$ 表示对函数 W_{ij} 内部显含的时间变量 t 求微分, 如: 对于 $F(x(t), t) = x^2 \sin t$, 有 $\frac{\partial F}{\partial t} = x^2 \cos t$ 。

证明: 采用数学归纳法证明此命题。第 1 步, 对于 $j = 2$, 由(2-10)可得

$$\frac{\partial \xi_{i2}}{\partial t} = \frac{\partial (x_{i2}^{1/q_2} - x_{i2}^{*1/q_2})}{\partial t} = \xi_{i1} \frac{\partial \beta_{i1}^{1/q_2}}{\partial t}$$

第 $j-1$ 步, 假定以下等式成立

$$\frac{\partial \xi_{i(j-1)}}{\partial t} = \xi_{i1} \frac{\partial \beta_{i1}^{1/q_2}}{\partial t} \beta_{i2}^{1/q_3} \dots \beta_{i(j-2)}^{1/q_{j-1}} + \xi_{i2} \frac{\partial \beta_{i2}^{1/q_3}}{\partial t} \beta_{i3}^{1/q_4} \dots \beta_{i(j-2)}^{1/q_{j-1}} + \dots + \xi_{i(j-2)} \frac{\partial \beta_{i(j-2)}^{1/q_{j-1}}}{\partial t}$$

由上式, 并结合(2-10)可得

$$\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial t} \leq |\xi_{i1}| \eta_{ij1} + |\xi_{i2}| \eta_{ij2} + \dots + |\xi_{i(j-1)}| \eta_{ij(j-1)} \quad (2-17)$$

其中, $\eta_{ij1} \geq \left| \frac{\partial \beta_{i1}^{1/q_2}}{\partial t} \beta_{i2}^{1/q_3} \dots \beta_{i(j-1)}^{1/q_j} \right|$, $\eta_{ij2} \geq \left| \frac{\partial \beta_{i2}^{1/q_3}}{\partial t} \beta_{i3}^{1/q_4} \dots \beta_{i(j-1)}^{1/q_j} \right|$, ..., $\eta_{ij(j-1)} \geq \left| \frac{\partial \beta_{i(j-1)}^{1/q_j}}{\partial t} \right|$ 为可被设计的满足此不等式条件的一阶可微函数。由以上推导归纳可得, 对 $j = 2, \dots, n_i$, 式(2-17)始终成立。

对于 $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n_i$, 由(2-17), 引理 2.1 以及(2-9)中 W_{ij} 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{ij}}{\partial t} &= (p - q_j) \frac{-\partial (x_{ij}^*)^{1/q_j}}{\partial t} \int_{x_{ij}^*}^{x_{ij}} (s^{1/q_j} - x_{ij}^{*1/q_j})^{p-q_j-1} ds \\ &\leq (p - q_j) \left| \frac{\partial \xi_{i(j-1)} \beta_{i(j-1)}^{1/q_j}}{\partial t} \right| |x_{ij} - x_{ij}^*| \xi_{ij}^{p-q_j-1} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^d + \xi_{ij}^d b_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \end{aligned}$$

式中, $b_{ij}(\bar{x}_{ij}, t)$ 为被设计的正一阶可微函数。

命题 2.6 积分型 Lyapunov 函数 $V_{in_i}(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})$ 为正一阶连续可微函数, 且满足以下不等式条件 $V_{in_i} \leq 2(\xi_{i1}^p + \dots + \xi_{in_i}^p)$ 。

证明: 此命题证明较为直接, 在本文中略去。

下一步, 结合以上命题, 采用递归设计策略, 构造系统分散控制器。

第 1 步: 计算 Lyapunov 函数 $V_{i1} = W_{i1}$ 的微分

$$\dot{V}_{i1} = x_{i1}^{p-1} (g_{i1} + f_{i1}) + x_{i1}^{p-1} (x_{i2} - x_{i2}^*) + x_{i1}^{p-1} x_{i2}^*$$

结合假设 2.2, 可得

$$x_{i1}^{p-1} g_{i1} \leq |\xi_{i1}|^{p-1} |\xi_{i1}| r_{i1} \leq \xi_{i1}^d \rho_{i1}$$

式中, $\rho_{i1}(x_{i1}, t) \geq \xi_{i1}^{p-d} r_{i1}(x_{i1}, t)$ 为可被设计的一阶连续可微函数, 例如, $\rho_{i1}(x_{i1}, t)$ 可设计为 $\rho_{i1}(x_{i1}, t) = (\frac{d}{p} + \frac{p-d}{p} x_{i1}^p) r_{i1}$ 。

进一步, 结合命题 2.2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} \leq & x_{i1}^{p-1} (x_{i2} - x_{i2}^*) + x_{i1}^{p-1} x_{i2}^* + \xi_{i1}^d (\rho_{i1} + \psi_{i1}) \\ & + y_1^d \varphi_{i111} + y_2^d \varphi_{i121} + \dots + y_n^d \varphi_{i1n1} + a_{i1} \Delta_{i1}^{\hat{d}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

设计虚拟控制器 x_{i2}^* 为如下形式

$$x_{i2}^* = -\xi_{i1}^{q_2} \beta_{i1}(x_{i1}, t)$$

式中, $\beta_{i1}(x_{i1}, t) \geq (\rho_{i1} + \psi_{i1} + n_i + \Sigma_{Ljk} + \rho_i(\xi_{i1}) + \xi_{i1}^{(d_0+1)/d_0})$ 为被设计的一阶连续可微函数, $\Sigma_{Ljk} := \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{n_l} \sum_{k=1}^{n_l-j+1} \varphi_{Ljk}(y_i, t)$, $\varphi_{Ljk}(y_i, t)$ 和 $\rho_i(\xi_{i1})$ 为待设计的一阶连续可微函数, d_0 为可设计的奇正整数。

将设计的 x_{i2}^* 带入(2-17)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} \leq & -\xi_{i1}^d \Sigma_{Ljk} - \xi_{i1}^d n_i - \xi_{i1}^d \rho_i + x_{i1}^{p-1} (x_{i2} - x_{i2}^*) \\ & - \xi_{i1}^{\bar{d}} + y_1^d \varphi_{i111} + \dots + y_n^d \varphi_{i1n1} + a_{i1} \Delta_{i1}^{\hat{d}} \end{aligned} \quad (2-19)$$

式中, $\bar{d} = d + (d_0 + 1) / d_0$ 。

第 j 步: 假定以下 Lyapunov 函数成立

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i(j-1)} \leq & -\xi_{i1}^d \Sigma_{Ljk} - (n_i - j + 2) \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^d - \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^{\bar{d}} - \xi_{i1}^d \rho_i \\ & + \sum_{J=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{j-J} (y_1^d \varphi_{iJ1k} + y_2^d \varphi_{iJ2k} + \dots + y_n^d \varphi_{iJnk}) + \xi_{i(j-1)}^{p-q_{j-1}} (x_{ij} - x_{ij}^*) \\ & + (j-1) a_{i1} \Delta_{i1}^{\hat{d}} + (j-2) a_{i2} \Delta_{i2}^{\hat{d}} + \dots + \Delta_{i(j-1)}^{\hat{d}} a_{i(j-1)} \end{aligned} \quad (2-20)$$

设计虚拟控制器 $x_{i(j+1)}^*$ 为如下形式

$$x_{i(j+1)}^* = -\xi_{ij}^{q_{j+1}} \beta_{ij}(\bar{x}_{ij}, t)$$

式中, $\beta_{ij}(\bar{x}_{ij}, t) \geq (b_{ij} + d_{ij} + \rho_{ij} + \psi_{ij} + C_{ij}) + (n_i - j + 1) + \xi_{ij}^{(d_0+1)/d_0}$ 为可被设计的一阶连续可微函数。结合(2-20)和命题 2.1 到命题 2.5, 可得 $\dot{V}_{ij} = \dot{V}_{i(j-1)} + \dot{W}_{ij}$ 满足如下形式

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{ij} \leq & -\xi_{i1}^d \Sigma_{Ijik} - (n_i - j + 1) \sum_{k=1}^j \xi_{ik}^d - \sum_{k=1}^j \xi_{ik}^{\bar{d}} - \xi_{i1}^d \rho_i \\
 & + \xi_{ij}^{p-q_j} (x_{i(j+1)} - x_{i(j+1)}^*) + \sum_{J=1}^j \sum_{k=1}^{j-J+1} (y_1^d \varphi_{iJ1k} + \dots + y_n^d \varphi_{iJnk}) \\
 & + j a_{i1} \Delta_{i1}^{\hat{d}} + (j-1) a_{i2} \Delta_{i2}^{\hat{d}} \dots + a_{ij} \Delta_{ij}^{\hat{d}}
 \end{aligned}$$

第 n_i 步: 基于以上递归设计, 及虚拟控制器构造结构, 在此步中, 可以设计系统“期望的”死区输出为如下形式

$$x_{i(n_i+1)}^* = -\xi_{in_i}^{q_{n_i+1}} \beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i}, t) \quad (2-21)$$

式中, $\beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i}, t) \geq (b_{in_i} + d_{in_i} + \rho_{in_i} + \psi_{in_i} + C_{in_i}) + 1 + \xi_{in_i}^{(d_0+1)/d_0}$ 为可设计的一阶连续可微函数, $q_{n_i+1} = q_{n_i} - (2 / (2\bar{n} + 1))$, 进一步可以得到如下不等式

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{in_i} \leq & -\sum_{k=1}^{n_i} (\xi_{ik}^d + \xi_{ik}^{\bar{d}}) + \sum_{J=1}^{n_i} \left((n_i - J + 1) a_{iJ} \Delta_{iJ}^{\hat{d}} \right) \\
 & - \xi_{i1}^d \rho_i - \xi_{i1}^d \Sigma_{Ijik} + \sum_{J=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i-J+1} \sum_{l=1}^n y_l^d \varphi_{iJlk}(y_l, t) \\
 & + \xi_{in_i}^{p-q_{n_i}} (u_i(v_i) - x_{i(n_i+1)}^*)
 \end{aligned} \quad (2-22)$$

构造第 i 个子系统的控制器为如下形式

$$v_i = \begin{cases} x_{i(n_i+1)}^* / \underline{m}_{ir} + \bar{b}_{ir} & x_{i(n_i+1)}^* > 0 \\ 0 & x_{i(n_i+1)}^* = 0 \\ x_{i(n_i+1)}^* / \underline{m}_{il} + \underline{b}_{il} & x_{i(n_i+1)}^* < 0 \end{cases} \quad (2-23)$$

至此, 关联系统(2-1)的有限时间分散控制器设计完毕, 以下给出本节的主要定理及其证明。

定理 2.1 对于满足假设 2.1-2.4 的时变关联非线性系统(2-1), 有限时间分散控制器(2-23)可保证系统状态全局有限时间镇定。其有限时间设定值 $T_1(x_0)$ 的上界满足

$$T_1(x_0) \leq V^{1-d/q}(x_0) \left(\left(\frac{1}{2} \min \{1, \hat{a}_i | i = 1 \dots n\} \right)^{d/q} (1-d/q) \right)^{-1}, \text{ 其中, } \hat{a}_i \text{ 为适当正常数, 满足(2-32).}$$

证明: 根据(2-23), 结合(2-1)可得

$$u_i - x_{i(n_i+1)}^* = \begin{cases} m_{ir} \left(\frac{x_{n_i+1}^*}{\underline{m}_{ir}} + \bar{b}_{ir} - b_{ir} \right) - x_{i(n_i+1)}^* > 0 & x_{i(n_i+1)}^* > 0 \\ 0 & x_{i(n_i+1)}^* = 0 \\ m_{il} \left(\frac{x_{n_i+1}^*}{\underline{m}_{il}} + \underline{b}_{il} - b_{il} \right) - x_{i(n_i+1)}^* < 0 & x_{i(n_i+1)}^* < 0 \end{cases} \quad (2-24)$$

由于 $\xi_{in_i}^{p-q_{n_i}} x_{i(n_i+1)}^* \leq 0$ ，可得 $\xi_{in_i}^{p-q_{n_i}} (u_i(v_i) - x_{i(n_i+1)}^*) \leq 0$ 。结合(2-22)，可得 Lyapunov

函数 $V_0 = \sum_{i=1}^n V_{in_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij}$ 的微分满足如下不等式

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} (\xi_{ik}^d + \xi_{ik}^{\bar{d}}) + \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i-J+1} \sum_{l=1}^n y_l^d \varphi_{iJlk}(y_l, t) - \sum_{i=1}^n \xi_{il}^d \rho_i \\ & - \sum_{i=1}^n \xi_{il}^d \Sigma_{lJik} + \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^{n_i} \left((n_i - J + 1) a_{iJ} \Delta_{iJ}^{\hat{d}} \right) \end{aligned}$$

基于等式 $\sum_{i=1}^n \xi_{il}^d \Sigma_{lJik} = \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i-J+1} \sum_{l=1}^n y_l^d \varphi_{iJlk}(y_l, t)$ ，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} (\xi_{ik}^d + \xi_{ik}^{\bar{d}}) - \sum_{i=1}^n \xi_{il}^d \rho_i \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^{n_i} \left((n_i - J + 1) a_{iJ} \Delta_{iJ}^{\hat{d}} (\|z_i\|) \right) \end{aligned} \quad (2-25)$$

针对系统未建模动态部分处理，选取以下 Lyapunov 函数

$$\bar{U}_i = \int_0^{U_i} \omega_i(\varsigma_i) d\varsigma_i \quad (2-26)$$

式中， $\omega_i(\varsigma_i)$ 为待设计的非负非减函数。利用(2-4)，可知(2-26)的微分满足如下形式

$$\dot{\bar{U}}_i \leq -\frac{a_i}{2} \omega_i(U_i) U_i^{\epsilon_i} - \tilde{a}_i \omega_i(U_i) U_i^{\tilde{\epsilon}_i} + \omega_i(U_i) \left(-\frac{a_i}{2} U_i^{\epsilon_i} + \sum_{l=1}^n \gamma_{il}(|y_l|) \right) \quad (2-27)$$

分情况分析(2-27)，考虑以下三种情形。

情形 1: 如果对于所有 i ， I 的取值， $-\frac{a_i}{2} U_i^{\epsilon_i} + \gamma_{il}(|y_l|) \leq 0$ 成立，则有

$$\dot{\bar{U}}_i \leq -\frac{a_i}{2} \omega_i(U_i) U_i^{\epsilon_i} - \tilde{a}_i \omega_i(U_i) U_i^{\tilde{\epsilon}_i} \quad (2-28)$$

情形 2: 如果对于所有 i , I 的取值, $-\frac{a_i}{2n}U_i^{\epsilon_i} + \gamma_{il}(|y_l|) > 0$ 成立, 可得以下不等式成立: $U_i \leq [\frac{2n}{a_i}\gamma_{il}(|y_l|)]^{1/\epsilon_i}$ 。进一步, 则有

$$\begin{aligned} \dot{\bar{U}}_i &\leq -\frac{a_i}{2}\omega_i(U_i)U_i^{\epsilon_i} - \tilde{a}_i\omega_i(U_i)U_i^{\tilde{\epsilon}_i} \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \omega_i([\frac{2n}{a_i}\gamma_{il}(|y_l|)]^{1/\epsilon_i})\gamma_{il}(|y_l|) \end{aligned} \quad (2-29)$$

情形 3: 如果只对于部分 i , I 取值, $-\frac{a_i}{2n}U_i^{\epsilon_i} + \gamma_{il}(|y_l|) > 0$ 成立。基于(2-28)和(2-29), 可得(2-29)仍然成立。故而, 综合三种情形可知, (2-29)在任何情形下均成立。

选取系统整体 Lyapunov 函数为 $V = V_0 + \sum_{i=1}^n \bar{U}_i$ 。结合(2-25)和(2-29), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} (\xi_{ik}^d + \xi_{ik}^{\bar{d}}) + \frac{a_i}{2}\omega_i(U_i)U_i^{\epsilon_i} + \tilde{a}_i\omega_i(U_i)U_i^{\tilde{\epsilon}_i} \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \xi_{il}^d \rho + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \omega_i \left(\left[\frac{2n}{a_i} \gamma_{il}(|y_l|) \right]^{1/\epsilon_i} \right) \gamma_{il}(|y_l|) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^{n_i} \left((n_i - J + 1) \Delta_{iJ}^{\hat{d}}(\|z_i\|) a_{iJ} \right) \end{aligned} \quad (2-30)$$

基于(2-3), (2-7)和(2-8), 必定存在函数 $\omega_i(U_i)$ 使得以下不等式成立

$$\frac{a_i}{4}\omega_i(U_i)U_i^{\epsilon_i} \geq \sum_{J=1}^{n_i} \left((n_i - J + 1) \Delta_{iJ}^{\hat{d}}(\|z_i\|) a_{iJ} \right) \quad (2-31)$$

$$\frac{a_i}{4}\omega_i(U_i)U_i^{\epsilon_i} \geq \left(\frac{\hat{a}_i}{2} \bar{U}_i \right)^{d/q} \quad (2-32)$$

式中, \hat{a}_i 为适当正常数。(2-32)将进一步在注释 2.3 中讨论。

基于(2-7), 选取函数 $\rho_i(\xi_{il})$ 满足如下不等式

$$\xi_{il}^d \rho_i \geq \sum_{l=1}^n \omega_l([\frac{2n}{a_l}\gamma_{li}(|y_l|)]^{1/\epsilon_l})\gamma_{li}(|y_l|) \quad (2-33)$$

基于引理 2.2, (2-30), (2-31)-(2-33)和命题 2.6, 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} \left(\xi_{ik}^d + \xi_{ik}^{\bar{d}} \right) - \sum_{i=1}^n \omega_i(U_i) \left(\frac{a_i}{4} U_i^{\epsilon_i} + \tilde{a}_i U_i^{\tilde{\epsilon}_i} \right) \\
 &\leq -\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} \xi_{ik}^d - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{4} \omega_i(U_i) U_i^{\epsilon_i} \\
 &\leq -\left(\frac{1}{2} V_0 \right)^{d/q} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{a}_i}{2} \bar{U}_i \right)^{d/q} \\
 &\leq -\left(\frac{1}{2} \min \{1, \hat{a}_i \mid i=1, 2, \dots, n\} \right)^{d/q} V^{d/q}
 \end{aligned} \tag{2-34}$$

基于(2-34)，可得定理 2.1。证明完毕。

注释 2.3 在此，给出一种确定函数 $\omega_i(U_i)$ 的方法。由(2-26)，可得 $\bar{U}_i \leq \omega_i(U_i) U_i$ 。如果选取 $\bar{U}_i \leq \omega_i(U_i) U_i$ 满足如下不等式条件

$$\frac{a_i}{4} \omega_i(U_i) U_i^{\epsilon_i} \geq \left(\frac{\hat{a}_i}{2} \omega_i(U_i) U_i \right)^{d/q} \tag{2-35}$$

则(2-32)成立。进一步，由(2-35)可得

$$\omega_i^{1-d/q}(U_i) \geq \frac{4}{a_i} \left(\frac{\hat{a}_i}{2} \right)^{d/q} U_i^{d/q-\epsilon_i} \tag{2-36}$$

由于， $\lim_{\bar{n} \rightarrow +\infty} \frac{d}{p} \rightarrow 1$ ， $\frac{d}{p} < 1$ 和 $0 < \epsilon_i < 1$ ，必然存在正整数 \bar{n} ，使得 $\frac{d}{p} - \epsilon_i \geq 0$ 。因此，必然存在 $\omega_i(U_i)$ 满足(2-36)。只需要选取同时满足(2-35)和(2-36)的 $\omega_i(U_i)$ 函数，即可保证(2-31)和(2-32)同时成立。

2.3.3 固定时间控制器设计

在本小节，将以上一小节中有限时间控制器设计为基础，进一步给出系统(2-1)固定时间稳定条件及定理，并对系统固定时间稳定进行稳定性分析。

由(2-30)-(2-34)可知，如果去除 β_{ij} 中的项 $\xi_{ij}^{(d_0+1)/d_0}$ ，甚至(2-4)中的参数 $\tilde{a}_i = 0$ ，定理 2.1 仍然成立。但虚拟控制器中的设计量 $\xi_{ij}^{(d_0+1)/d_0}$ 可以增加系统状态的收敛速率，甚至使系统固定时间镇定。以下给出系统(2-1)固定时间稳定条件及定理。

定理 2.2 对于满足假设 2.1-2.4 的时变关联非线性系统(2-1)，如果 $\tilde{a}_i \neq 0$ ，并且存在函数 $\omega_i(U_i)$ 同时满足(2-31)及以下条件

$$\tilde{a}_i \omega_i(U_i) U_i^{\tilde{\epsilon}_i} \geq (\bar{a}_i \bar{U}_i)^{\hat{\epsilon}_i} \tag{2-37}$$

则分散控制器(2-23)可保证系统状态全局固定时间镇定。其中, $\bar{a}_i > 0$, $\hat{\epsilon}_i > 1$ 为适当常参。系统固定时间设定值 T_2 的上界满足 $T_2 \leq \frac{2}{\varrho} \frac{\varrho_4}{\varrho_4 - \varrho_2} + \frac{2(n+1)^{\varrho_1/\varrho_3-1}}{\varrho} \frac{\varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3}$ 。另外, 如果函数 $\Delta_{ij}^{\hat{d}}(\alpha_i^{-1}(t))$ 满足(2-41), 则一定存在 $\omega_i(U_i)$ 同时满足(2-31)和(2-37), 参考注释 2.4。本定理中 $\omega_i(U_i)$ 无需满足(2-32)。

证明: 基于引理 2.2, 式(2-31), (2-33), (2-37)和命题 2.6, 式(2-30)可以被转换为如下形式

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^n \left\{ (\bar{a}_i \bar{U}_i)^{\hat{\epsilon}_i} + \frac{a_i}{4} \omega_i(U_i) U_i^{\epsilon_i} + \sum_{k=1}^{n_i} (\xi_{ik}^d + \xi_{ik}^{\bar{d}}) \right\} \quad (2-38)$$

基于引理 2.2, (2-38)可以被写为如下形式

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{1}{2} V_0\right)^{d/q} - n_0 V_0^{\bar{d}/p} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{4} \omega_i^{1-\epsilon_i} \bar{U}_i^{\epsilon_i} + (\bar{a}_i \bar{U}_i)^{\hat{\epsilon}_i} \right) \quad (2-39)$$

式中, $n_0 = 0.5^{\bar{d}/p} \left(\sum_{i=1}^n n_i \right)^{1-\bar{d}/p}$ 。

基于引理 2.2 和 $\hat{\epsilon}_i > 1 > \epsilon_i$, $\frac{\bar{d}}{p} > 1 > \frac{d}{p}$, 并定义 $\frac{\varrho_1}{\varrho_3} = \min \left\{ \frac{\bar{d}}{p}, \hat{\epsilon}_i | i=1, 2, \dots, n \right\} > 1$, $\frac{\varrho_2}{\varrho_4} = \max \left\{ \frac{d}{p}, \epsilon_i | i=1, 2, \dots, n \right\} < 1$, $\varrho = \min \left\{ 0.5^{d/p}, n_0, \frac{a_i}{4} \omega_i^{1-\epsilon_i}(0), \bar{a}_i^{\hat{\epsilon}_i} | i=1, 2, \dots, n \right\}$, 则(2-39)可转换为如下形式

$$\dot{V} \leq 0.5\varrho \left\{ -V_0^{\frac{\varrho_2}{\varrho_4}} - V_0^{\frac{\varrho_1}{\varrho_3}} - \sum_{i=1}^n \left(\bar{U}_i^{\frac{\varrho_2}{\varrho_4}} + \bar{U}_i^{\frac{\varrho_1}{\varrho_3}} \right) \right\} \leq -0.5\varrho \left(V^{\frac{\varrho_2}{\varrho_4}} + (n+1)^{\frac{1-\varrho_1}{\varrho_3}} V^{\frac{\varrho_1}{\varrho_3}} \right) \quad (2-40)$$

结合引理 2.3, 可得定理 2.2。证明完毕。

注释 2.4 在本节中, 从设计过程可知, 被设计函数 $\omega_i(U_i)$ 必须同时满足条件(2-31)和(2-37)。在此, 给出一类存在函数 $\omega_i(U_i)$ 的充分性条件。首先, 如果 $\Delta_{ij}^{\hat{d}}(\alpha_i^{-1}(U_i))$ 满足以下等式条件

$$\Delta_{ij}^{\hat{d}}(\alpha_i^{-1}(\varepsilon^{\tau_i} U_i)) = \varepsilon^{\varepsilon_{i1}} \Delta_{ij}^{\hat{d}}(\alpha_i^{-1}(U_i)), \quad \varepsilon_{i1} \geq \tau_i \epsilon_i \quad (2-41)$$

式中, $\varepsilon, \tau_i, \varepsilon_{i1}, \epsilon_i$ 均为正常数, 则可以选取, 在权 τ_i 下, 齐次度为 $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{i1} - \tau_i \epsilon_i \geq 0$ 的函数 $\omega_i(U_i)$, 使得(2-31)成立。进一步, 一定存在 $\hat{\epsilon}_i \in (1, \tilde{\epsilon}_i]$, 使得 $\omega_i(U_i)^{\hat{\epsilon}_i-1}$ 和 $U_i^{\hat{\epsilon}_i-\hat{\epsilon}_i}$ 在权 τ_i 下的齐次度相同。则基于加权齐次理论(参考文献[71]中引理 A.1 和文献[72]), 一定存在正参数 \bar{a}_i , 使得以下不等式成立

$$\omega_i(U_i)^{\hat{\epsilon}_i-1} \leq \frac{\tilde{a}_i}{\bar{a}_i^{\hat{\epsilon}_i}} U_i^{\hat{\epsilon}_i-\hat{\epsilon}_i} \quad (2-42)$$

进而, 可得 $\tilde{a}_i \omega_i(U_i) U_i^{\hat{\epsilon}_i} \geq (\bar{a}_i \omega_i(U_i) U_i)^{\hat{\epsilon}_i}$, 则(2-37)成立。

2.4 仿真实验

2.4.1 数值算例仿真

本节分别以数值算例说明所提出的理论方法的有效性。考虑如下含有未建模动态及死区输入的时变关联系统

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = -z_i^{0.6} + y_i^{0.6} \\ \dot{x}_{i1}(t) = x_{i2} + z_i^{0.6} \\ \dot{x}_{i2}(t) = u_i(v_i) + x_{i1}A_i + \sum_{j=1}^2 y_j C_{ij} \end{cases} \quad (2-43)$$

其中, $i=1,2$ 。对于死区(2-2), 选取其参数为 $m_{ir}(t)=0.8$, $m_{il}(t)=1.2$, $b_{ir}=2b_{il}=-3.5$ 。本节其它系统参数选取为 $\underline{m}_{ir}=0.7$, $\underline{m}_{il}=1$, $\bar{b}_{ir}=2.5$, $\underline{b}_{il}=-4$, $A_1=A=\sin(t)$, $A_2=B=t$, $C_{12}=C=\cos(t)$, $C_{21}=D=t$, $C_{11}=C_{22}=0$ 。

对于(2-43), 存在 $U_i = z_i^2$, 使得

$$\dot{U}_i \leq -0.75U_i^{4/5} + 0.75y_i^{8/5}$$

基于条件(2-8)和(2-36), 可得 $(p-2/(2\bar{n}+1))/p \geq \epsilon_i = 0.8$ 。因此, 选取 $p=2$, $\bar{n}=2$ 。

以下, 基于本文提出的设计方法, 通过两步构造系统控制器。

第1步: 由(2-19)得,

$$\dot{V}_{i1} \leq \xi_{i1}(x_{i2} - x_{i2}^*) + \xi_{i1}x_{i2}^* + \frac{5}{8}\xi_{i1}^{8/5} + \frac{3}{8}z_i^{8/5}$$

设计虚拟控制器 $x_{i2}^* = -\xi_{i1}^{q_2}(1 + \Sigma_{i1k} + 0.625)$, 其中待设计函数 Σ_{i1k} 在第二步中给出。

第2步: 由(2-9)可知,

$$\dot{V}_{i2} = \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} \dot{x}_{i2} + \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} + \frac{\partial V_{i2}}{\partial t}$$

进一步, 基于本文提出的命题, 可得到以下不等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} \dot{x}_{i2} &\leq \xi_{i2}^{7/5}(u_i - x_{i2}^*) + \xi_{i2}^{7/5}x_{i2}^* + 0.125(A_i x_{i1})^8 + 0.875\xi_{i2}^{8/5} \\ &\quad + 0.875\xi_{i2}^{8/5} + 0.125(y_1 C_{i1} + y_2 C_{i2})^8 \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} \leq \frac{14}{5} * \frac{5}{8} (d_{i21} \beta_{i1})^{8/5} \xi_{i2}^{8/5} + \frac{14}{5} * \frac{3}{8} \xi_{i1}^{8/5} + \frac{14}{5} \xi_{i2}^{8/5} d_{i21}(x_{i1}, t) \quad (2-45)$$

$$\frac{\partial V_{i2}}{\partial t} \leq E_i \xi_{i1}^{8/5} + \xi_{i2}^{8/5} b_{i2}(\bar{x}_{i2}, t) \quad (2-46)$$

$$\xi_{i1}(x_{i2} - x_{i2}^*) \leq \frac{5}{4} \xi_{i1}^{8/5} + \frac{3}{4} \xi_{i2}^{8/5} \quad (2-47)$$

式中, $d_{i21}(x_{i1}, t)$, $b_{i2}(\bar{x}_{i2}, t)$ 和 E_i 为待设计量。

基于式(2-31)和(2-36), 设置 $\omega_i(U_i) = 1$, $(\hat{a}_i / 2)^{8/5} = 3/16$ 。结合式(2-44)-(2-47)和 $\dot{U}_i \leq -0.75U_i^{4/5} + 0.75y_i^{8/5}$, 可得

$$\Sigma_{i1k} = E_1 + \frac{1}{8} A^8 x_{11}^{32/5} + \frac{14}{5} * \frac{3}{8} + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} D^8 x_{11}^{32/5}$$

$$\Sigma_{i2k} = E_2 + \frac{1}{8} C^8 x_{21}^{32/5} + \frac{14}{5} * \frac{3}{8} + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} B^8 x_{21}^{32/5}$$

进一步, 可得

$$-\frac{\partial x_{12}^*}{\partial t} = \xi_{11} * AD\xi, AD\xi = \frac{5}{3} \beta_{11}^{2/3} (\xi_{11}^{32/5} (A^7 \dot{A} + D^7 \dot{D}))$$

$$-\frac{\partial x_{22}^*}{\partial t} = \xi_{21} * BC\xi, BC\xi = \frac{5}{3} \beta_{21}^{2/3} (\xi_{21}^{32/5} (B^7 \dot{B} + C^7 \dot{C}))$$

在式(2-45)和(2-46)中, 取参数 $E_1 = E_2 = \frac{7}{4}$, 可得

$$b_{12} = \frac{14}{5} * \frac{3}{8} (AD\xi)^{8/3} \xi_{12}^{16/15}, b_{22} = \frac{14}{5} * \frac{3}{8} (BC\xi)^{8/3} \xi_{22}^{16/15}$$

$$d_{121} = \frac{4}{3} \beta_{11}^{2/3} \xi_{11}^{32/5} (A^8 + D^8), d_{221} = \frac{4}{3} \beta_{21}^{2/3} \xi_{21}^{32/5} (C^8 + B^8)$$

则, 对于 $i=1, 2$, 设计如下死区“期望”输出

$$x_{i3}^* = -\xi_{i2}^{q_2} (b_{i2} + 3.5 + \frac{14}{15} d_{i21} + \frac{14}{15} * \frac{5}{8} (d_{i21} \beta_{i1})^{8/5})$$

基于式(2-23), 可得

$$v_i = \begin{cases} x_{i3}^* / \underline{m}_{ir} + \bar{b}_{ir} & x_{i3}^* > 0 \\ 0 & x_{i3}^* = 0 \\ x_{i3}^* / \underline{m}_{il} + \underline{b}_{il} & x_{i3}^* < 0 \end{cases}$$

选取系统初值如下： $z_1 = 0.3, x_{11} = -0.8, x_{12} = -0.5, z_2 = -0.2, x_{21} = 0.5, x_{22} = 0.4$ 。数值仿真结果如图 2-1 和图 2-2。从图中可以看出，所设计的分散控制器可克服死区及未建模的影响，使得关联系统状态稳定。

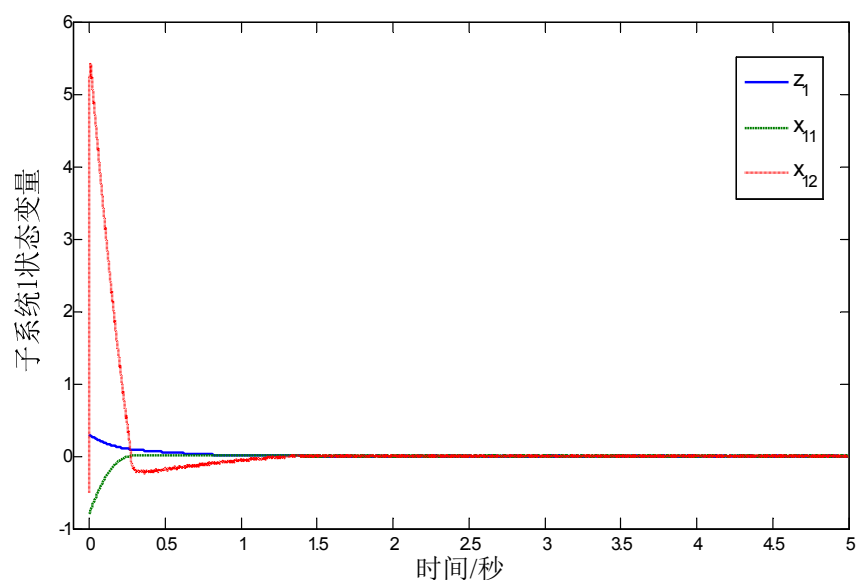


图 2-1 子系统 1 的状态响应

Fig.2-1 The response of states of the subsystem 1

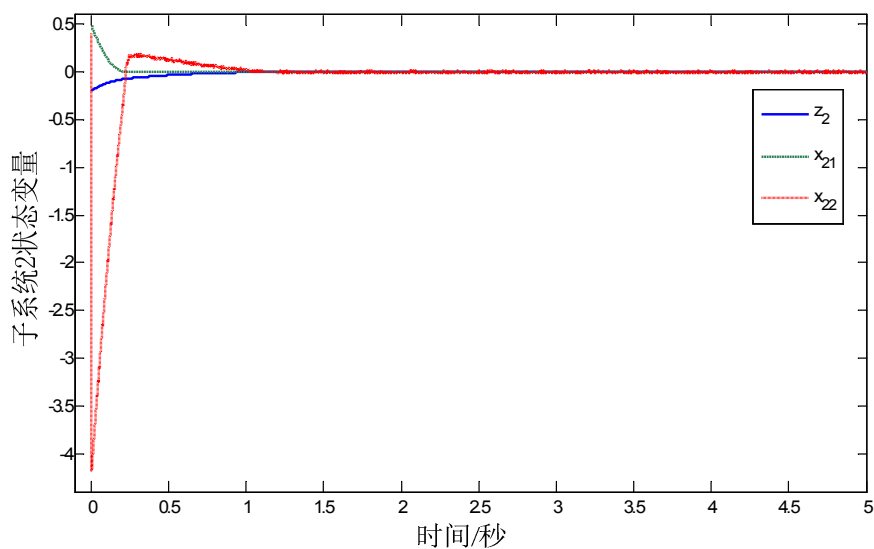


图 2-2 子系统 2 的状态响应

Fig.2-2 The response of states of the subsystem 2

2.4.2 耦合倒立摆仿真

本节以耦合倒立摆系统的有限时间控制，进一步说明所提出的理论方法的有效性，倒立摆系统结构参考文献[73]。耦合倒立摆系统动态模型如下

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 + b_1 \dot{\theta}_1 - F a_1 \cos(\theta_1 - \beta) &= u_1 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + F a_2 \cos(\theta_2 - \beta) &= u_2 \end{aligned} \quad (2-48)$$

其中， b_1 和 b_2 为耦合系数，且

$$\begin{aligned} F &= k \{1 + A^2 (l_k - l_0)^2\} (l_k - l_0), \quad |A(l_k - l_0)| < 1 \\ \beta &= \arctan\left(\frac{a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos \theta_2}{l_0 - a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2}\right) \\ l_k &= \{(l_0 - a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2)^2 + (a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos \theta_2)^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

选取系统(2-48)的参数如下： $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ ， $l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$ ， $l_0 = 1\text{m}$ ， $g = 9.8\text{m/s}^2$ ， $b_1 = b_2 = 0.009$ ， $k = 30$ ， $A = 0.1$ ， $a_1 = a_2 = 0.1\text{m}$ 。

令 $x_{11} = \theta_1$ ， $x_{12} = \dot{\theta}_1$ ， $x_{21} = \theta_2$ ， $x_{22} = \dot{\theta}_2$ ，系统(2-48)可以转换为如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, \dot{x}_{12} = 4u_1 + g_{12}(\bar{x}_{12}) + f_{12}(\bar{y}_2) \\ \dot{x}_{21} = x_{22}, \dot{x}_{22} = 4u_2 + g_{22}(\bar{x}_{22}) + f_{22}(\bar{y}_2) \\ y_1 = x_{11}, y_2 = x_{21} \end{cases} \quad (2-49)$$

其中， $g_{12} = 19.6 \sin x_{11} - 0.036 x_{12}$ ， $g_{22} = 19.6 \sin x_{21} - 0.036 x_{22}$ ， $f_{12} = 4F a_1 \cos(x_{11} - \beta)$ ， $f_{22} = -4F a_2 \cos(x_{21} - \beta)$ 。

进一步，可得以下不等式成立，

$$|g_{i2}| \leq 19.6 |x_{i1}| + 0.036 |x_{i2}|, \quad i = 1, 2$$

$$|l_k - l_0| \leq (1 - 0.1 \sin \theta_1 + 0.1 \sin \theta_2) + 0.1 |\cos \theta_1 - \cos \theta_2| - 1 \leq 0.4$$

由于 $\cos \theta_2 + |\theta_2| \geq 1$ ，可得 $\cos \theta_1 - |\theta_1| \leq 1 \leq \cos \theta_2 + |\theta_2|$ ，进而得 $\cos \theta_1 - \cos \theta_2 \leq |\theta_1| + |\theta_2|$ 。

类似地，有 $\cos \theta_2 - \cos \theta_1 \leq |\theta_1| + |\theta_2|$ 成立。因此以下不等式成立

$$|l_k - l_0| \leq 0.2 (|x_{11}| + |x_{21}|)$$

$$|f_{i2}| \leq 0.4 |F| \leq 0.4 * 30 * 1.016 * |l_k - l_0| \leq 2.5 |x_{11}| + 2.5 |x_{21}|$$

采用本章节控制器设计方法，通过两步构造系统控制器。

第 1 步：选取参数 $p = 2$ ， $q_1 = 1$ ， $q_2 = 3/5$ ， $q_3 = 1/5$ ， $d = 8/5$ ，由式(2-19)和式(2-49)可得，

$$\dot{V}_{i1} = \xi_{i1}(x_{i2} - x_{i2}^*) + \xi_{i1}^* x_{i2}^*$$

设计虚拟控制器 $x_{i2}^* = -\xi_{i1}^{q_2} \beta_{i1}(x_{i1})$ ，其中待设计函数 $\beta_{i1}(x_{i1})$ 在第二步中给出。

第2步：由(2-9)可知，

$$\begin{aligned}\dot{V}_{i2} &= \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} \dot{x}_{i2} + \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} \\ &= -(2-q_2) \frac{\partial x_{i2}^{*1/q_2}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} \int_{x_{i2}^*}^{x_{i2}} (s^{1/q_2} - x_{i2}^{*1/q_2})^{1-q_2} ds + x_{i1} (x_{i2} - x_{i2}^*) \\ &\quad - \xi_{i1}^d \beta_{i1}(x_{i1}) + \xi_{i2}^{2-q_2} (4u_i + g_{i2}(\bar{x}_{i2}) + f_{i2}(\bar{y}_2))\end{aligned}$$

进一步，基于本文提出的命题，以下不等式成立

$$\begin{aligned}x_{i1} (x_{i2} - x_{i2}^*) &\leq \frac{5}{4} \xi_{i1}^d + \frac{3}{4} \xi_{i2}^d \\ \xi_{i2}^{2-q_2} g_{i2}(\bar{x}_{i2}) &\leq \rho_{i2} + \frac{1}{8} \xi_{i1}^d \\ \xi_{i2}^{2-q_2} f_{i2}(\bar{y}_2) &\leq \xi_{i2}^d \psi_{i2} + \xi_{i1}^d \frac{25}{24} (1 + \xi_{i1}^{6/5}) + \xi_{i2}^d \frac{25}{24} (1 + \xi_{i2}^{6/5}) \\ -(2-q_2) \frac{\partial x_{i2}^{*1/q_2}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} \int_{x_{i2}^*}^{x_{i2}} (s^{1/q_2} - x_{i2}^{*1/q_2})^{1-q_2} ds &\leq 2^{2/5} * \frac{7}{5} * d_{i21} * \xi_{i2}^d + \frac{3}{8} \xi_{i1}^d + \frac{3}{8} \xi_{i2}^d A_i^{1+q_2}\end{aligned}$$

其中， $d_{i21} \geq |\partial x_{i2}^{*1/q_2} / \partial x_{i1}|$ 后续给出，且 $\rho_{i2} = 0.875 * B_i^{8/7} + 0.036 \xi_{i2}^{2/5}$ ， $\psi_{i2} = \frac{35}{12} \xi_{i2}^{4/5}$ ，

$$B_i = 19.6 \xi_{i1}^{4/5} + 0.036 \xi_{i1}^{2/5} \beta_{i1}, \quad A_i = \frac{7}{5} * 2^{2/5} * d_{i21} * \beta_{i1}。$$

设计控制器及 $\beta_{i1}(x_{i1})$ 如下，

$$\begin{aligned}\beta_{i1} &= \frac{25}{12} (1 + y_i^{6/5}) + 2 \\ u_i &= -\frac{1}{4} \xi_{i2}^{1/5} (d_{i2} + \rho_{i2} + \psi_{i2} + 1)\end{aligned}$$

其中， $d_{i2} = \frac{5}{8} * A_i^{8/5} + \frac{7}{5} * 2^{2/5} * d_{i21}$ ， $d_{i21} = \beta_{i1}^{5/3} + \frac{25}{6} \beta_{i1}^{2/3} * y_i^{6/5}$ 。

最终，可得如下不等式成立

$$\dot{V}_{12} + \dot{V}_{22} \leq -\frac{1}{4} (\xi_{i1}^d + \xi_{i2}^d + \xi_{i21}^d + \xi_{i22}^d) \leq -\frac{1}{4} \left(\frac{V_{12} + V_{22}}{2} \right)^{d/2}$$

选取系统初值如下： $x_{11}(0) = 0.7, x_{12}(0) = -0.1, x_{21}(0) = -0.3, x_{22}(0) = 0.1$ 。数值仿真结果如图 2-3 和图 2-4。从图中可以看出，状态反馈分散控制器可以保证系统状态的稳定性。

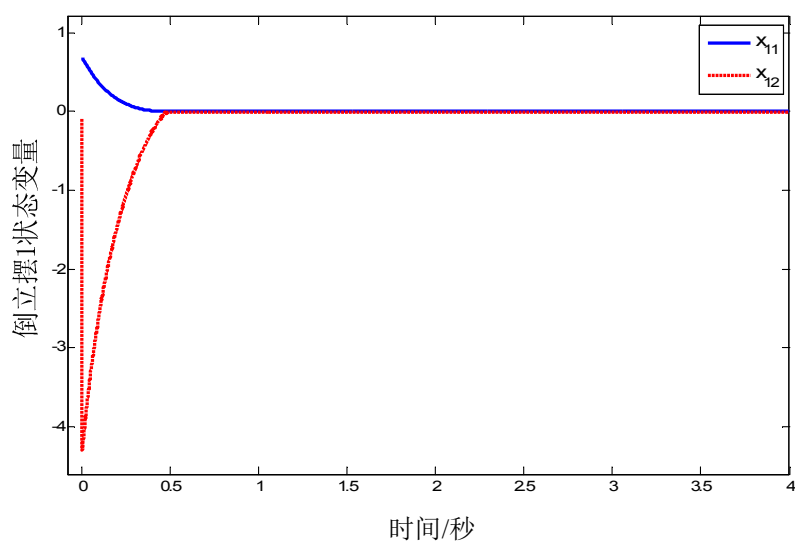


图 2-3 倒立摆 1 的状态响应

Fig.2-3 The response of states of the pendulums 1

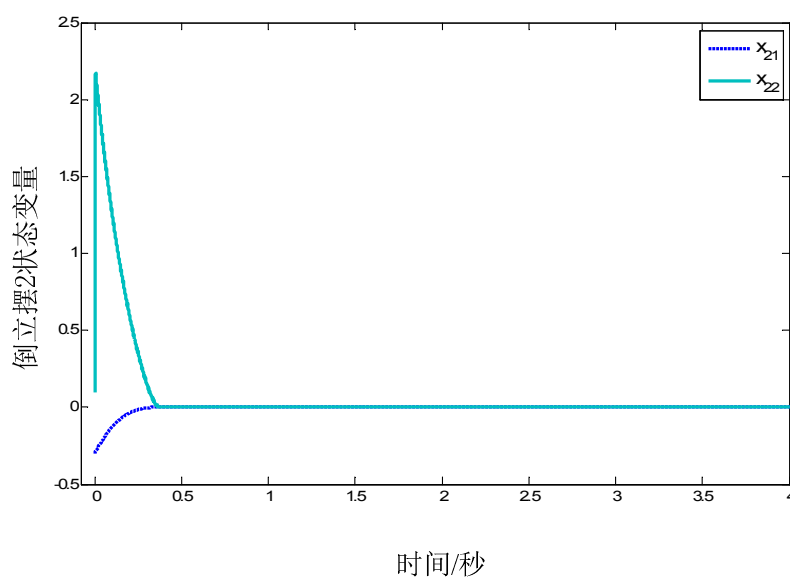


图 2-4 倒立摆 2 的状态响应

Fig.2-4 The response of states of the pendulums 2

2.5 本章小结

本章针对一类具有死区输入非线性特性和未建模动态的时变关联非线性系统，给出了其有限时间分散控制器构造方法，在此基础上，进一步给出系统固定时间稳定条件及定理，并对结果进行了理论分析和证明。本章中所设计的有限时间与固定时间分散控制器，有效克服了未建模、死区非线性、时变信息及关联特性带来的影响，保证了系统状态全局有限时间与固定时间收敛。最后，通过数值仿真说明所提出方法的有效性。

第 3 章 任意切换规则下 p 型随机系统状态反馈控制

在上一章中, 针对确定性下三角系统, 研究了其有限时间控制策略。本章中将进一步考虑随机扰动对系统的影响, 研究更一般化的非线性被控模型。实际上, 任何实际工程动态模型都会受到来自系统内部或者外部环境随机因素的影响, 系统随机模型更能反映其动态特性。本章将基于随机 Lyapunov 稳定理论, 采用递归方法, 研究任意切换规则下 p 型随机非线性系统的控制器设计问题, 构造其自适应状态反馈控制器, 保证其在概率上稳定, 并给出相关稳定性分析。

3.1 引言

在过去的数十年中, 随机非线性系统作为一类在建模、稳定性分析和控制器设计中重要的工程系统类型, 已经吸引了大量研究学者的关注, 并取得了丰富的研究成果^[30-32,74]。下三角随机非线性系统作为随机系统中重要的组成部分, 已存在了较多的研究成果。大量的控制方法已被用于下三角随机非线性系统的控制器设计及稳定性分析。针对严格反馈随机非线性系统, 如状态反馈控制^[30]、输出反馈控制^[33]、自适应控制^[31]、有限时间控制^[13,32]等, 在相应文献中被应用, 以构造系统有效的控制策略。进一步, 针对 p 型随机系统, 亦存在较多研究结果^[34,42,75-78]。如果令 $p=1$, 其将弱化为严格反馈型系统, 因此, 相比于严格反馈型, p 型随机非线性系统在结构上更具一般性。

在 p 型确定性系统研究方面, 在文献[79-80]中首次提出了此类系统的控制问题, 并给出了一种基于加幂积分型 Lyapunov 函数的控制器设计及稳定性分析方案。文献[81-82]分别研究了 p 型确定性非线性系统的智能跟踪控制问题, 以及多状态时滞情形下系统镇定问题。对于 p 型随机非线性系统, 为了保证系统解的存在性和唯一性, 使系统非线性函数满足局部 Lipchitz 条件, 一些关于系统非线性函数的增长性条件被给出^[34,75-77]。对于随机非线性系统有限时间控制的研究, 由于只需要保证系统解的存在性, 这些限制性条件被进一步放松^[42,78]。

另外, 本章中进一步考虑了系统中可能存在的切换特性。切换系统, 是一类包含有限个子系统, 并基于某一切换规则, 动态系统模型在各个子系统之间进行切换的工程系统模型。显然, 若只有一个子系统模型时, 被研究的系统即为非切换系统。

故而，本章中被控模型进一步一般化。针对切换系统，现已有大量的研究成果。多种控制方法，如多 Lyapunov 函数方法、共同 Lyapunov 函数方法等，被用于构造控制器，进而使得系统镇定^[83-87]。特别地，基于共同 Lyapunov 函数，构造切换系统控制器，可以满足任意切换规则的要求，这种优势已经吸引了众多学者的关注。文献[83]研究了一类任意切换规则下的随机非线性系统全局镇定问题。在文献[84]中，针对含有未知参数的下三角随机非线性切换系统，研究了其输出反馈控制问题。文献[85]中结合自适应控制，设计随机切换系统镇定控制器。文献[85-86]进一步考虑了 p 型随机切换系统的有限时间控制问题。

综合以上讨论，本章针对一类任意切换规则下含有不确定参数的 p 型随机非线性系统，基于共同 Lyapunov 函数的方法，采用递归策略，构造系统自适应状态反馈控制器。所设计的自适应律及控制器均独立于切换规则。此外，进一步给出了关于被控系统随机有限时间稳定及自适应有限时间稳定的推论。

3.2 问题描述

考虑如下 p 型切换随机时变非线性系统

$$dx_i(t) = \left(x_{i+1}^{p_{i\sigma(t)}} + f_{i\sigma(t)}(t, x, \theta_{i1}) \right) dt + g_{i\sigma(t)}^T(t, x, \theta_{i2}) dw \quad (3-1)$$

其中，对于 $1 \leq i \leq n$ ， $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 和 $x_{n+1}^{p_{n\sigma(t)}} = u^{p_{n\sigma(t)}}$ 分别表示系统的状态向量和控制输入。 $w \in R^\kappa$ 定义为一完备概率空间上的 κ 维 Wiener 过程。分段右连续时变函数 $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ 为系统切换信号，表示系统动态模型在 m 个子模态间的切换规则。对于 $k \in M$ ，有 $p_{ik} \in R_{odd}^+$ 。 $\theta_{i1} \in R^{q_{i1}}$ 和 $\theta_{i2} \in R^{q_{i2}}$ 为未知常参数向量。对于 $k \in M$ ，系统漂移项 $f_{ik}(t, x, \theta_{i1}): R^{n+q_{i1}+1} \rightarrow R$ 和扩散项 $g_{ik}^T(t, x, \theta_{i2}): R^{n+q_{i2}+1} \rightarrow R^\kappa$ 关于显含的时间变量 t 为分段连续，关于其它变量连续，并满足条件 $f_{ik}(t, 0, \theta_{i1}) = 0$ 和 $g_{ik}^T(t, 0, \theta_{i2}) = 0$ 。 $f_{ik}(\cdot)$ 和 $g_{ik}^T(\cdot)$ 为 Borel 可测的，且满足假设 3.2。系统状态变量在任意切换时刻不会发生跳变。

为研究随机系统式(3-1)控制问题，在本章给出如下假设：

假设 3.1 在系统(3-1)中，对于 $k \in M$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 和给定的参数 p_{ik} ，存在常数 $q_i \in R_{odd}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 和 $\tau_k \in (0, 1)$ ， $\tau_k \in R_{odd}$ ，使得

$$q_1 \geq 2, \frac{p_{ik}}{q_{i+1}} + 1 = \tau_k + \frac{1}{q_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3-2)$$

$$\frac{1}{q_i} \leq \dots \leq \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q_1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3-3)$$

假设 3.2 非线性函数 $f_{ik}(t, x, \theta_{i1})$ 和 $g_{ik}^T(t, x, \theta_{i2})$ 满足以下条件

$$|f_{ik}(\cdot)| \leq \theta(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_i|)r_{ik}(t, \bar{x}_i) \quad (3-4)$$

$$|g_{ik}(\cdot)| \leq \theta(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_i|)\bar{r}_{ik}(t, \bar{x}_i) \quad (3-5)$$

其中, 对于 $i=1, 2, \dots, n$, $k \in M$, $r_{ik}(t, \bar{x}_i) \geq 0$ 和 $\bar{r}_{ik}(t, \bar{x}_i) \geq 0$ 为已知 $C^{1,2}$ 函数。 θ 为未知正参数。

假设 3.3 对于切换规则 $\sigma(t)$, 在有限的时间段内, 切换次数有限。

注释 3.1 本章中假设 3.1 与文献[60]中假设 1 类似, 后者研究了一类确定性 p 型非线性系统的控制问题, 本章进一步研究了随机切换系统的控制问题。式(3-2)中的不等式条件 $q_1 \geq 2$, 用于保证后续控制器设计中不存在奇异值问题如(3-22)和(3-31)。

若系统(3-1)中不存在 Wiener 过程, 则(3-2)和(3-3)中条件可以分别被进一步放松为 $q_1 \geq 1$ 和 $\frac{p_{ik}}{q_{i+1}} \leq \min \left\{ \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_i} \right\}$, $i=1, 2, \dots, n$ 。假设 3.1 用于保证系统不存在 Zeno 行为, 相同的条件限制可以参考文献[60,88]。

注释 3.2 相比于文献[13,42,60,77,86], 系统(3-1)更为一般化, 其假设条件更为宽松。在本章中, 对于 $i=1, 2, \dots, n$ 和 $k \in M$, 如果 p_{ik} 为奇正整数, 条件(3-3)可以由条件(3-2)推导得出。与文献[42]相比, 若系统(3-1)中不存在切换规则的限制, 本文中的系统参数 p_{ik} 的要求更一般化, 且参数 q_i 的选取也较为简便, 只需满足假设 1。另外, 在本文的控制器设计过程中, 文献[13]中的不等式条件(69)并未被采用, 此条件将进一步对参数的选取带来更多的限制。取而代之, 在本文, (3-31)被证明并采用。

3.3 自适应状态反馈控制

3.3.1 基础性引理及定义

为研究系统(3-1)的控制问题, 先给出以下基础知识、定义及相关引理。

考虑如下切换时变随机非线性系统:

$$dx = f_{\sigma(t)}(t, x)dt + g_{\sigma(t)}^T(t, x)dw \quad (3-6)$$

其中, $x \in R^n$, w 定义为一完备概率空间上的 Wiener 过程。分段连续函数 $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ 为切换规则。对于 $k \in M$, $f_k(t, x)$ 和 $g_k^T(t, x)$ 关于显含的时间变量 t 为分段连续, 关于其它变量连续, 并满足条件 $f_k(t, 0) = 0$ 和 $g_k(t, 0) = 0$ 。

$f_k(\cdot)$ 和 $g_k^T(\cdot)$ 为 Borel 可测的。系统状态变量在任意切换时刻不会发生跳变。对于 C^2 函数 $V(x)$, $\ell V(x)$ 表示 $V(x)$ 的微分算子, 形式定义如下:

$$\ell V = \frac{\partial V}{\partial x} f_k + \frac{1}{2} \text{trace} \{ g_k \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g_k^T \} \quad (3-7)$$

定义 3.1 如果以下条件满足, 则随机系统(3-6)的解在概率上有界 (参考文献[31])

$$\limsup_{c \rightarrow \infty} P \{ |x(t)| \geq c \} = 0$$

定义 3.2^[89] 如果对于任意的初始值 $x_0 \in R^n$, 系统(3-6)的解存在, 且满足以下条件(i)和(ii):

(i) 依概率有限时间吸引性: 对于任一初值 $x_0 \in R^n \setminus \{0\}$, 定义系统全部状态第一次到达零点的时间 $T_{x_0} = \inf \{ t | x(t, x_0) = 0 \}$ 为随机设定时间, 其值几乎是有限的, 即 $P \{ T_{x_0} < \infty \} = 1$;

(ii) 依概率稳定性: 对于任意一对参数 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $r > 0$, 存在参数 $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$, 使得对任意的 $|x_0| < \delta$, 不等式 $P \{ |x(t, x_0)| < r, \text{ for } \forall t \geq 0 \} \geq 1 - \varepsilon$ 成立;

则系统(3-6)在概率上有限时间镇定。

引理 3.1 对非线性系统(3-6), 如果存在 Lyapunov 函数 $V(t, x) \in C^{1,2}(R_+ \times R^n; R_+)$ 和正常数 K_0 , 使得对任意的 $t \geq 0$, 条件(i)和(ii)成立: (i) $\ell V(t, x) \leq K_0(1 + V(t, x))$; (ii) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{t \geq 0} V(t, x) = \infty$ 。则在假设 3.3 下, 对任意的状态初值, 时变切换随机非线性系统(3-6)存在一个弱解。

证明: 由于对 $k \in M$, 函数 $f_k(t, x)$ 和 $g_k^T(t, x)$ 关于显含的时间变量 t 分段连续, 关于状态量 x 连续, 因此, 对任意 $t \geq 0$, 在任意切换规则下, 函数 $f_{\sigma(t)}(t, x)$ 和 $g_{\sigma(t)}^T(t, x)$ 关于显含的时变参量 t 分段连续, 关于状态量 x 连续。进而, 基于假设 3.3 及文献[90]中的“定义 1”和文献[91]可知, 对于任意的初值和 $t \in [0, \sigma_\infty)$, 系统(3-6)存在一个弱解, 其中 σ_∞ 满足 $\limsup_{t \rightarrow \sigma_\infty} |x(t)| = \infty$, 称为爆破时间。因此, 只需证明 $\sigma_\infty = \infty$ a.s.。此证明与文献[74]中“定理 1”的相关证明相同, 在此略去。

引理 3.2 考虑存在解的系统(3-6), 如果存在 C^2 函数 $V(x): R^n \rightarrow R_+$, K_∞ 函数 μ_1 和 μ_2 , 正实数 $c > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$, 使得对所有的 $x \in R^n$ 和 $t \geq 0$, 以下条件成立,

$$\mu_1(|x|) \leq V(x) \leq \mu_2(|x|)$$

$$\ell V(x) \leq -cV^\gamma(x)$$

则系统(3-6)在概率上有限时间稳定。

证明：引理 3.2 为文献[86] “引理 2” 证明的一类特殊情形，此情形同样在文献[86] “注释 2” 中予以了说明。

3.3.2 控制器设计及稳定性分析

在本小节，针对系统(3-6)，给出其自适应状态反馈控制器设计方法，保证系统状态在概率上有界。首先，选取 C^2 Lyapunov 函数如下

$$V = \sum_{i=1}^n W_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \quad (3-8)$$

其中， Θ 为与参数 θ 相关的正常数， $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ ，且

$$W_i = \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{4-1/q_i} ds \quad (3-9)$$

另外， C^0 虚拟控制器 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*$ 形式定义如下

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, & \xi_1 &= x_1^{q_1} - x_1^{*q_1} \\ x_2^* &= -\xi_1^{1/q_2} \beta_1(t, x_1, \hat{\Theta}), & \xi_2 &= x_2^{q_2} - x_2^{*q_2} \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{n+1}^* &= -\xi_n^{1/q_{n+1}} \beta_n(t, \bar{x}_n, \hat{\Theta}), & \xi_n &= x_n^{q_n} - x_n^{*q_n} \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中，对任意的 $k \in M$ ， $u = x_{n+1}^*$ 为被设计的系统控制器， $\beta_1(\cdot) \geq 0, \beta_2(\cdot) \geq 0, \dots, \beta_{n-1}(\cdot) \geq 0$ 为被设计的 $C^{1,2}$ 函数， $\beta_n(\cdot) \geq 0$ 为连续函数。所设计的控制器及这些中间函数均独立于切换规则 $\sigma(t)$ 。

以下，采用递归的设计方法，构造系统(3-1)控制器。

第 1 步：计算 W_1 的微分算子如下

$$\ell W_1 = \xi_1^{4-\frac{1}{q_1}} (x_2^{p_{1k}} + f_{1k}(\cdot)) + \frac{1}{2} q_1 \left(4 - \frac{1}{q_1} \right) \xi_1^{4-\frac{2}{q_1}} g_{1k}^T g_{1k} \quad (3-11)$$

利用假设 3.2，引理 2.1 和引理 2.4，可得

$$\xi_1^{4-1/q_1} f_{1k}(\cdot) \leq \left| \xi_1^{4-1/q_1} \right| \theta |x_1| r_{1k}(t, x_1) \leq \Theta \xi_1^4 \gamma_1(t, x_1) \quad (3-12)$$

$$\frac{1}{2} q_1 (4 - q_1) \xi_1^{4-\frac{2}{q_1}} g_{1k}^T g_{1k} \leq \frac{1}{2} q_1 (4 - q_1) \xi_1^{4-\frac{2}{q_1}} \theta^2 x_1^2 \bar{r}_{1k}^2(t, x_1) \leq \Theta \xi_1^4 \varphi_1(t, x_1) \quad (3-13)$$

其中， $\gamma_1(t, x_1)$ 和 $\varphi_1(t, x_1)$ 为适当的正 $C^{1,2}$ 函数，均独立于切换信号。 Θ 为适当的与 θ 相关的正常数。由于

$$\begin{aligned} \Theta \xi_1^4 \gamma_1 + \Theta \xi_1^4 \varphi_1 &= \tilde{\Theta} \xi_1^4 (\gamma_1 + \varphi_1) + \hat{\Theta} \xi_1^4 (\gamma_1 + \varphi_1) \\ &\leq \tilde{\Theta} \xi_1^4 (\gamma_1 + \varphi_1) + \hat{\Theta} \xi_1^{3+\tau_k} (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\varphi}_1) \end{aligned} \quad (3-14)$$

其中, 自适应律 $\dot{\hat{\Theta}} \geq 0$, 设计形式为(3-48)。 $\tilde{\gamma}_1(t, x_1)$ 和 $\tilde{\varphi}_1(t, x_1)$ 为适当的 $C^{1,2}$ 函数, 且独立于切换规则, 如可选取 $\tilde{\gamma}_1(t, x_1) = (1 + \xi_1^2)\gamma_1(t, x_1)$ 和 $\tilde{\varphi}_1(t, x_1) = (1 + \xi_1^2)\varphi_1(t, x_1)$ 。并设计虚拟控制器

$$x_2^* = -\xi_1^{1/q_2} \beta_1(t, x_1, \hat{\Theta}) \quad (3-15)$$

其中, $\beta_1(t, x_1, \hat{\Theta}) \geq \left\{ \hat{\Theta}(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\varphi}_1) + n + \xi_1^{\tau_0} \right\}^{1/p_1}$, $\tau_0 = \frac{1+q_0}{q_0}$ 。 $p_1 := \min\{p_{1k}; k \in M\}$ 。 q_0 为奇整数。为了简化后续推导, 定义 $p_i := \min\{p_{ik}; k \in M\}$ 。

利用式(3-11)-(3-15), 可得

$$\ell\left(W_1 + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^2\right) \leq -n\xi_1^{d_{1k}} - \xi_1^{d_{2k}} + \xi_1^{4-\frac{1}{q_1}}(x_2^{p_{1k}} - x_2^{*p_{1k}}) + \tilde{\Theta}(\bar{\tau}_1 - \dot{\hat{\Theta}}) \quad (3-16)$$

其中, $d_{1k} = 3 + \tau_k < 4$, $d_{2k} = 3 + \tau_k + \tau_0 > 4$, $\bar{\tau}_1 = \xi_1^4(\gamma_1 + \varphi_1)$ 。

第2步: 计算 W_2 的微分算子如下

$$\begin{aligned} \ell W_2 = & \xi_2^{4-\frac{1}{q_2}}(x_3^{p_{2k}} + f_{2k}(\cdot)) + \frac{\partial W_2}{\partial x_1}(x_2^{p_{1k}} + f_{1k}(\cdot)) + \frac{\partial W_2}{\partial \hat{\Theta}}\dot{\hat{\Theta}} + \frac{\partial W_2}{\partial t} \\ & + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1^2} g_{1k}^T g_{1k} + 2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2 \partial x_1} g_{2k}^T g_{1k} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2^2} g_{2k}^T g_{2k} \right\} \end{aligned} \quad (3-17)$$

为简化后续理论推导, 先给出以下命题及相关证明。

命题 3.1 对于 $2 \leq i \leq n$, 存在与切换规则无关的 $C^{1,2}$ 函数 $\gamma_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$, $\bar{\gamma}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$

和适当的参数 Θ , 使得

$$\xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} f_{ik}(\cdot) + \frac{\partial W_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} (x_{j+1}^{p_{jk}} + f_{jk}) \leq \Theta \xi_i^4 \gamma_i + \xi_i^{3+\tau_k} \bar{\gamma}_i + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k}$$

证明: 首先, 采用数学归纳法, 计算 $\left| \frac{-\partial x_i^{*q_i}}{\partial t} \right|$ 的上界。第1步, 对于 $i=2$, 有以下等式成立

$$\frac{-\partial x_2^{*q_2}}{\partial t} = \frac{\partial(\xi_1 \beta_1^{q_2})}{\partial t} = \xi_1 \frac{\partial \beta_1^{q_2}}{\partial t}$$

第 $i-1$ 步, 假定 $\frac{\partial(-x_{i-1}^{*q_{i-1}})}{\partial t} \leq \xi_1 \frac{\partial \beta_1^{q_2}}{\partial t} \beta_2^{q_3} \dots \beta_{i-2}^{q_{i-1}} + \xi_2 \frac{\partial \beta_2^{q_3}}{\partial t} \beta_3^{q_4} \dots \beta_{i-2}^{q_{i-1}} + \dots + \xi_{i-2} \frac{\partial \beta_{i-2}^{q_{i-1}}}{\partial t}$ 成立, 可得

$$\left| \frac{-\partial x_i^{*q_i}}{\partial t} \right| \leq |\xi_1| \eta_{i1} + \dots + |\xi_{i-1}| \eta_{i(i-1)} \quad (3-18)$$

其中, $\eta_{i1}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta}) \geq \left| \frac{\partial \beta_1^{q_2}}{\partial t} \beta_2^{q_3} \dots \beta_{i-1}^{q_i} \right|, \dots, \eta_{i(i-1)}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta}) \geq \left| \frac{\partial \beta_{i-1}^{q_i}}{\partial t} \right|$ 为正 $C^{1,2}$ 函数。

参考文献[28]中(A.4)-(A.7)的证明, 存在正 $C^{1,2}$ 函数 $\Phi_{ik}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta})$ 使得以下不等式成立

$$\left| \frac{\partial x_i^{*q_i}}{\partial x_k} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-1/q_k} \Phi_{ik}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta}) \quad (3-19)$$

利用假设 3.2, (3-10), (3-18)和(3-19), 可得

$$\begin{aligned} & \xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} f_{ik} + \frac{\partial W_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} (x_{j+1}^{p_{jk}} + f_{jk}) \\ & \leq \left| \xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} \right| \theta(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_i|) r_{ik} + \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \frac{-\partial x_i^{*q_i}}{\partial t} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{3-\frac{1}{q_i}} ds \\ & \quad + \sum_{j=1}^{i-1} \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \frac{-\partial x_i^{*q_i}}{\partial x_j} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{3-\frac{1}{q_i}} ds (x_{j+1}^{p_{jk}} + f_{jk}) \\ & \leq \left| \xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} \right| \theta \left(|\xi_1^{1/q_1}| + \dots + \left| (\xi_i - \xi_{i-1} \beta_{i-1}^{q_i})^{1/q_i} \right| \right) r_{ik} + \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \left| \frac{\partial x_i^{*q_i}}{\partial t} \right| \\ & \quad \times 2^{1-1/q_i} \left| \xi_i^{1/q_i} \right| \left| \xi_i^{3-\frac{1}{q_i}} \right| + \sum_{j=1}^{i-1} \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-1/q_j} \right) \Phi_{ik} 2^{1-1/q_i} \left| \xi_i^{1/q_i} \right| \left| \xi_i^{3-\frac{1}{q_i}} \right| \\ & \quad \times \left(\left| \xi_{j+1} - \xi_j \beta_j^{q_{j+1}} \right|^{\frac{p_{jk}}{q_{j+1}}} + \theta \left(|\xi_1^{1/q_1}| + \dots + \left| (\xi_j - \xi_{j-1} \beta_{j-1}^{q_j})^{1/q_j} \right| \right) r_{jk} \right) \end{aligned} \quad (3-20)$$

由假设 3.1, 可知对任意的 $j=1, \dots, i$, 有 $4 - \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \geq 4$ 和 $1 - \frac{1}{q_j} + 3 + \frac{p_{jk}}{q_{j+1}} = 3 + \tau_k < 4$ 。

利用引理 2.1, 引理 2.4 和假设 3.1, 可得, 对于 $2 \leq i \leq n$, 存在正 $C^{1,2}$ 函数 $\gamma_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$, $\bar{\gamma}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$ 和适当的参数 Θ , 使得

$$\begin{aligned} & \xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} f_{ik}(\cdot) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} (x_{j+1}^{p_{jk}} + f_{jk}(\cdot)) \\ & \leq \Theta \xi_i^4 \gamma_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta}) + \xi_i^{3+\tau_k} \bar{\gamma}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta}) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \end{aligned} \quad (3-21)$$

证明完毕。

命题 3.2 对于 $2 \leq i \leq n$, 存在与切换规则无关的 $C^{1,2}$ 函数 $\varphi_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$, $\bar{\varphi}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$

和适当的参数 Θ ，使得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,t=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_j \partial x_t} g_{jk}^T g_{ik} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i \partial x_j} g_{ik}^T g_{jk} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} g_{ik}^T g_{ik} \right\} \\ & \leq \Theta \xi_i^4 \varphi_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta}) + \xi_i^{3+\tau_k} \bar{\varphi}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta}) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \end{aligned}$$

证明：首先，由假设 3.1，可得，对于 $\kappa, t=1, 2, \dots, n$ ，不等式 $1 - \frac{1}{q_\kappa} - \frac{1}{q_t} > 0$ 成立。

亦采用数学归纳法确定 $\left| \frac{\partial^2 x_i^{*q_i}}{\partial x_\kappa \partial x_t} \right|$ 的上界。

第 1 步，对于 $i=2$ 和 $\kappa, t=1$ ，有

$$\left| \frac{\partial^2 x_2^{*q_2}}{\partial x_1^2} \right| = \left| \frac{\partial^2 (-\beta_1^{q_2} \xi_1)}{\partial x_1 \partial x_1} \right| \leq \xi_1^{1-\frac{2}{q_1}} \phi_{211}(t, x_1, \hat{\Theta}) \quad (3-22)$$

其中， $\phi_{211}(t, x_1, \hat{\Theta})$ 为一适当的被设计的正 $C^{1,2}$ 函数。为了简便起见，对于 $i=2, \dots, n$ 和 $\kappa, t=1, \dots, n-1$ ，定义适当的正 $C^{1,2}$ 函数 $\phi_{ikt}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta})$ ，这些待设计的函数将在后续被使用并满足其所在不等式的条件限制。

第 2 步， $i=3$ 时，对于 $\kappa, t=1$ ，有

$$\left| \frac{\partial^2 x_3^{*q_3}}{\partial x_1^2} \right| = \left| \frac{\partial^2 (-\beta_2^{q_3} (x_2^{q_2} - x_2^{*q_2}))}{\partial x_1^2} \right| \leq \sum_{j=1}^2 \xi_j^{1-\frac{2}{q_1}} \phi_{311}(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta}) \quad (3-23)$$

对于 $\kappa=2$ 和 $t=1$ ，利用引理 2.1 和(3-10)，(3-19)，有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 x_3^{*q_3}}{\partial x_2 \partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial^2 (-\beta_2^{q_3} (x_2^{q_2} - x_2^{*q_2}))}{\partial x_2 \partial x_1} \right| \\ & = \left| \xi_2 \frac{-\partial \beta_2^{q_3}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial (-\beta_2^{q_3})}{\partial x_2} \frac{\partial (-x_2^{*q_2})}{\partial x_1} + \frac{\partial (-\beta_2^{q_3})}{\partial x_1} \frac{\partial x_2^{q_2}}{\partial x_2} - \beta_2^{q_3} \times 0 \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^2 \xi_j^{1-\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}} \phi_{321}(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta}) \end{aligned} \quad (3-24)$$

对于 $\kappa=t=2$ ，利用引理 2.1 和(3-10)，有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 x_3^{*q_3}}{\partial x_2^2} \right| &= \left| \frac{\partial^2 \left(-\beta_2^{q_3} (x_2^{q_2} - x_2^{*q_2}) \right)}{\partial x_2^2} \right| \\
&= \left| \xi_2 \frac{-\partial \beta_2^{q_3}}{\partial x_2^2} - \beta_2^{q_3} \frac{\partial^2 x_2^{q_2}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial(-\beta_2^{q_3})}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^{q_2}}{\partial x_2} \right| \leq \sum_{j=1}^2 \xi_j^{1-\frac{2}{q_2}} \phi_{322}(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta})
\end{aligned} \tag{3-25}$$

由(3-23)-(3-25)可得, 对于 $\kappa, \iota=1, 2$, 有

$$\left| \frac{\partial^2 x_3^{*q_3}}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} \right| \leq \sum_{j=1}^2 \xi_j^{1-\frac{1}{q_\kappa}-\frac{1}{q_\iota}} \phi_{3\kappa\iota}(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta}) \tag{3-26}$$

第 i 步, 假定对于 $\kappa, \iota=1, 2, \dots, i-2$, 存在

$$\left| \frac{\partial^2 x_{i-1}^{*q_{i-1}}}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-2} \xi_j^{1-\frac{1}{q_\kappa}-\frac{1}{q_\iota}} \phi_{(i-1)\kappa\iota}(t, \bar{x}_{i-2}, \hat{\Theta}) \tag{3-27}$$

对于 $\kappa, \iota=1, 2, \dots, i-2$, 利用(3-19)和(3-27), 可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 x_i^{*q_i}}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} \right| &= \left| \frac{\partial^2 \left(-\beta_{i-1}^{q_i} (x_{i-1}^{q_{i-1}} - x_{i-1}^{*q_{i-1}}) \right)}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} \right| \\
&= \left| \xi_{i-1} \frac{-\partial \beta_{i-1}^{q_i}}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} + \frac{\partial(-\beta_{i-1}^{q_i})}{\partial x_\kappa} \frac{\partial(-x_{i-1}^{*q_{i-1}})}{\partial x_\iota} + \frac{\partial(-\beta_{i-1}^{q_i})}{\partial x_\iota} \frac{\partial(-x_{i-1}^{*q_{i-1}})}{\partial x_\kappa} + \beta_{i-1}^{q_i} \frac{\partial^2 x_{i-1}^{*q_{i-1}}}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-\frac{1}{q_\kappa}-\frac{1}{q_\iota}} \phi_{i\kappa\iota}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta})
\end{aligned} \tag{3-28}$$

对于 $\kappa=i-1, \iota=1, 2, \dots, i-2$, 利用(3-10), (3-19)和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 x_i^{*q_i}}{\partial x_{i-1} \partial x_\iota} \right| &= \left| \frac{\partial^2 \left(-\beta_{i-1}^{q_i} (x_{i-1}^{q_{i-1}} - x_{i-1}^{*q_{i-1}}) \right)}{\partial x_{i-1} \partial x_\iota} \right| \\
&= \left| \xi_{i-1} \frac{-\partial \beta_{i-1}^{q_i}}{\partial x_{i-1} \partial x_\iota} + \frac{\partial(-\beta_{i-1}^{q_i})}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial(-x_{i-1}^{*q_{i-1}})}{\partial x_\iota} + \frac{\partial(-\beta_{i-1}^{q_i})}{\partial x_\iota} \frac{\partial x_{i-1}^{q_{i-1}}}{\partial x_{i-1}} - \beta_{i-1}^{q_i} \times 0 \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-\frac{1}{q_i}-\frac{1}{q_\iota}} \phi_{i(i-1)\iota}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta})
\end{aligned} \tag{3-29}$$

对于 $\kappa=\iota=i-1$, 可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 x_i^{*q_i}}{\partial x_{i-1}^2} \right| &= \left| \frac{\partial^2 \left(-\beta_{i-1}^{q_i} (x_{i-1}^{q_{i-1}} - x_{i-1}^{*q_{i-1}}) \right)}{\partial x_{i-1}^2} \right| \\
&= \left| \xi_{i-1} \frac{-\partial \beta_{i-1}^{q_i}}{\partial x_{i-1}^2} - \beta_{i-1}^{q_i} \frac{\partial^2 x_{i-1}^{q_{i-1}}}{\partial x_{i-1}^2} + 2 \frac{\partial(-\beta_{i-1}^{q_i})}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial x_{i-1}^{q_{i-1}}}{\partial x_{i-1}} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-\frac{2}{q_{i-1}}} \phi_{i(i-1)(i-1)}(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta})
\end{aligned} \tag{3-30}$$

由(3-27), (3-30), 对于 $\kappa, \iota=1, 2, \dots, i-1$, 可得

$$\left| \frac{\partial^2 x_i^{*q_i}}{\partial x_\kappa \partial x_t} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-\frac{1}{q_\kappa}-\frac{1}{q_t}} \phi_{i\kappa t} \left(t, \bar{x}_{i-1}, \hat{\Theta} \right) \quad (3-31)$$

以下, 计算 $\frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_j \partial x_t} g_{jk}^T g_{ik}$, $\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i \partial x_j} g_{ik}^T g_{jk}$ 和 $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} g_{ik}^T g_{ik}$ 的上界。由假设 3.1, 假设 3.2, 引理 2.1, 引理 2.4 以及式(3-10), (3-19), (3-31), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_j \partial x_t} g_{jk}^T g_{ik} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^{i-1} \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \frac{-\partial^2 x_i^{*q_i}}{\partial x_j \partial x_t} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{3-\frac{1}{q_i}} ds (g_{jk}^T g_{ik}) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^{i-1} \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \left(3 - \frac{1}{q_i} \right) \frac{\partial x_i^{*q_i}}{\partial x_j} \frac{\partial x_i^{*q_i}}{\partial x_t} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{2-\frac{1}{q_i}} ds (g_{jk}^T g_{ik}) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^{i-1} \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \left(\sum_{k=1}^{i-1} \xi_k^{1-\frac{1}{q_j}-\frac{1}{q_t}} \right) \phi_{iji} 2^{1-\frac{1}{q_i}} |\xi_i^3| \theta^2 (|\xi_1^{1/q_i}| + \dots \\ & \quad + \left| (\xi_j - \xi_{j-1} \beta_{j-1}^{q_j})^{1/q_j} \right|) \bar{r}_{jk} (|\xi_1^{1/q_i}| + \dots + \left| (\xi_t - \xi_{t-1} \beta_{t-1}^{q_t})^{1/q_t} \right|) \bar{r}_{ik} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^{i-1} \left(4 - \frac{1}{q_i} \right) \left(3 - \frac{1}{q_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-1/q_j} \right) \Phi_{ij} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{1-1/q_i} \right) \Phi_{ii} 2^{1-\frac{1}{q_i}} \xi_i^2 \theta^2 \\ & \quad \times \left(|\xi_1^{1/q_i}| + \dots + \left| (\xi_j - \xi_{j-1} \beta_{j-1}^{q_j})^{1/q_j} \right| \right) \bar{r}_{jk} \left(|\xi_1^{1/q_i}| + \dots + \left| (\xi_t - \xi_{t-1} \beta_{t-1}^{q_t})^{1/q_t} \right| \right) \bar{r}_{ik} \\ & \leq \Theta \xi_i^4 \varphi_{i1} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right) + \xi_i^{3+\tau_k} \bar{\varphi}_{i1} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right) + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \end{aligned} \quad (3-32)$$

式中, $\varphi_{i1} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right)$ 和 $\bar{\varphi}_{i1} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right)$ 为独立于切换规则的被设计的正 $C^{1,2}$ 函数。

类似地, 可得以下不等式成立

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i \partial x_j} g_{ik}^T g_{jk} \leq \Theta \xi_i^4 \varphi_{i2} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right) + \xi_i^{3+\tau_k} \bar{\varphi}_{i2} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right) + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \quad (3-33)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} g_{ik}^T g_{ik} \leq \Theta \xi_i^4 \varphi_{i3} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right) + \xi_i^{3+\tau_k} \bar{\varphi}_{i3} \left(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta} \right) + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \quad (3-34)$$

由(3-32)-(3-34), 令 $\kappa, t=1, 2, \dots, i-1$ 和 $\kappa, t=1, 2, \dots, i-1$, 可得命题 2.2。

证明完毕。

命题 3.3 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 存在正常数 C_{i+1} , 使得

$$\xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} \left(x_{i+1}^{p_{ik}} - x_{i+1}^{*p_{ik}} \right) \leq C_{i+1} \xi_{i+1}^{3+\tau_k} + \frac{1}{4} \xi_i^{3+\tau_k}$$

证明: 基于引理2.1和引理2.4, 可直接证明此命题。

命题 3.4 $V^* = \sum_{i=1}^n W_i$ 是正定 C^2 函数, 满足以下不等式: $V^* \leq 2(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \dots + \xi_n^4)$ 。

证明: 基于引理 2.2, 此命题很容易被证明, 因此省略。

利用(3-16), (3-17)和命题 3.1-3.3, 可得

$$\begin{aligned} & \left(W_1 + W_2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \\ & \leq -n \xi_1^{d_{1k}} - \xi_1^{d_{2k}} + \xi_2^{4-\frac{1}{q_2}} \left(x_3^{p_{2k}} - x_3^{*p_{2k}} \right) + \xi_2^{4-\frac{1}{q_2}} x_3^{*p_{2k}} \\ & \quad + \Theta \xi_2^4 (\gamma_2 + \varphi_2) + \tilde{\Theta} \left(\bar{\tau}_1 - \dot{\hat{\Theta}} \right) + \frac{\partial W_2}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}} \\ & \quad + \xi_2^{3+\tau_k} (\bar{\gamma}_2 + \bar{\varphi}_2) + C_2 \xi_2^{3+\tau_k} + \frac{3}{4} \xi_1^{3+\tau_k} \end{aligned} \quad (3-35)$$

利用引理 2.1 和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned} & \Theta \xi_2^4 (\gamma_2 + \varphi_2) \leq \tilde{\Theta} \xi_2^4 (\gamma_2 + \varphi_2) + \hat{\Theta} \xi_2^{3+\tau_k} (\tilde{\gamma}_2 + \tilde{\varphi}_2) \\ & \frac{\partial W_2}{\partial \hat{\Theta}} (\bar{\tau}_1 + \xi_2^4 (\gamma_2 + \varphi_2)) \end{aligned} \quad (3-36)$$

$$\begin{aligned} & \leq (4-1/q_i) \frac{-\partial x_i^{*q_i}}{\partial \hat{\Theta}} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_j} - x_i^{*q_i})^{3-1/q_i} ds (\bar{\tau}_1 + \xi_2^4 (\gamma_2 + \varphi_2)) \\ & \leq \xi_2^{3+\tau_k} \rho_2(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta}) + \frac{1}{4} \xi_1^{3+\tau_k} \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中, $\tilde{\gamma}_2(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta})$, $\tilde{\varphi}_2(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta})$ 和 $\rho_2(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta})$ 为独立于切换规则的正 $C^{1,2}$ 函数。

进一步, 设计虚拟控制器 x_3^* , 如下

$$x_3^* = -\xi_2^{1/q_3} \beta_2(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta}) \quad (3-38)$$

其中, $\beta_2(t, \bar{x}_2, \hat{\Theta}) \geq \left\{ \bar{\gamma}_2 + \bar{\varphi}_2 + C_2 + \rho_2 + \hat{\Theta}(\tilde{\gamma}_2 + \tilde{\varphi}_2) + n - 1 + \xi_2^{\tau_0} \right\}^{1/p_2}$ 为被设计的独立于切换规则的 $C^{1,2}$ 函数。

由(3-35)-(3-38), 可得

$$\begin{aligned} & \ell \left(W_1 + W_2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \\ & \leq -(n-1) \sum_{j=1}^2 \xi_j^{d_{1k}} + \sum_{j=1}^2 \xi_j^{d_{2k}} + \xi_2^{4-\frac{1}{q_2}} \left(x_3^{p_{2k}} - x_3^{*p_{2k}} \right) + \left(\tilde{\Theta} - \frac{\partial W_2}{\partial \hat{\Theta}} \right) (\bar{\tau}_2 - \dot{\hat{\Theta}}) \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中, $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_1 + \xi_2^4 (\gamma_2 + \varphi_2)$ 。

第 i 步: 假定, 在第 $i-1$ 步, $\sum_{j=1}^{i-1} W_j + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2$ 的微分算子满足

$$\begin{aligned} \ell \left(\sum_{j=1}^{i-1} W_j + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \leq & -(n-i+2) \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{d_{1k}} + \xi_{i-1}^{4-\frac{1}{q_{i-1}}} \left(x_i^{p_{(i-1)k}} - x_i^{*p_{(i-1)k}} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{d_{2k}} + \left(\tilde{\Theta} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial W_j}{\partial \hat{\Theta}} \right) (\bar{\tau}_{i-1} - \dot{\hat{\Theta}}) \end{aligned} \quad (3-40)$$

其中, $\bar{\tau}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^4 (\gamma_j + \varphi_j)$ 。

计算 W_i 的微分算子为

$$\begin{aligned} \ell W_i = & \xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} \left(x_{i+1}^{p_{ik}} + f_{ik}(\cdot) \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \left(x_{j+1}^{p_{jk}} + f_{jk}(\cdot) \right) + \frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,t=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_j \partial x_t} g_{jk}^T g_{tk} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i \partial x_j} g_{ik}^T g_{jk} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} g_{ik}^T g_{ik} \right\} \end{aligned} \quad (3-41)$$

结合命题 3.1-3.3 及式(3-40)-(3-41), 可得

$$\begin{aligned} \ell \left(\sum_{j=1}^i W_j + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \leq & -(n-i+2) \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{d_{1k}} + \left(\tilde{\Theta} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial W_j}{\partial \hat{\Theta}} \right) (\bar{\tau}_{i-1} - \dot{\hat{\Theta}}) + \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{d_{2k}} + \xi_i^{4-\frac{1}{q_i}} x_{i+1}^{p_{ik}} \\ & + \Theta \xi_i^4 (\gamma_i + \varphi_i) + \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}} + \xi_i^{3+\tau_k} (\bar{\gamma}_i + \bar{\varphi}_i) + C_i \xi_i^{3+\tau_k} + \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \end{aligned} \quad (3-42)$$

利用引理 2.1 和引理 2.4, 可得

$$\Theta \xi_i^4 (\gamma_i + \varphi_i) \leq \tilde{\Theta} \xi_i^4 (\gamma_i + \varphi_i) + \hat{\Theta} \xi_i^{3+\tau_k} (\tilde{\gamma}_i + \tilde{\varphi}_i) \quad (3-43)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\Theta}} (\bar{\tau}_{i-1} + \xi_i^4 (\gamma_i + \varphi_i)) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial W_j}{\partial \hat{\Theta}} \xi_i^4 (\gamma_i + \varphi_i) \leq \xi_i^{3+\tau_k} \rho_i + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{3+\tau_k} \quad (3-44)$$

其中, $\tilde{\gamma}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$, $\tilde{\varphi}_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$ 和 $\rho_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta})$ 为被设计的独立于切换规则的正 $C^{1,2}$ 函数。

设计虚拟控制器 x_{i+1}^* , 如下

$$x_{i+1}^* = -\xi_i^{1/q_{i+1}} \beta_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta}) \quad (3-45)$$

其中, $\beta_i(t, \bar{x}_i, \hat{\Theta}) \geq \left\{ \bar{\gamma}_i + \bar{\varphi}_i + C_i + \rho_i + \hat{\Theta}(\tilde{\gamma}_i + \tilde{\varphi}_i) + n - i + 1 + \xi_i^{\tau_0} \right\}^{1/p_i}$ 为被设计的独立于切

换规则的 $C^{1,2}$ 函数。

由式(3-42)-(3-45), 可得

$$\begin{aligned} \ell \left(\sum_{j=1}^i W_j + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \leq & -(n-i+1) \sum_{j=1}^i \xi_j^{3+\tau_k} + \xi_i^{4-\frac{1}{q_2}} \left(x_{i+1}^{p_{ik}} - x_{i+1}^{*p_{ik}} \right) + \sum_{j=1}^i \xi_j^{d_{2k}} + \left(\tilde{\Theta} - \sum_{j=2}^i \frac{\partial W_j}{\partial \hat{\Theta}} \right) (\bar{\tau}_i - \dot{\hat{\Theta}}) \end{aligned} \quad (3-46)$$

其中, $\bar{\tau}_i = \sum_{j=1}^i \xi_j^4 (\gamma_j + \varphi_j)$ 。

第 n 步: 基于以上递归设计, 可知, 存在非 Lipschitz 自适应状态反馈控制器

$$u = x_{n+1}^* = -\xi_n^{1/q_{n+1}} \beta_n(t, \bar{x}_n, \hat{\Theta}) \quad (3-47)$$

其中, $\beta_n(t, \bar{x}_n, \hat{\Theta}) \geq \{\bar{\gamma}_n + \bar{\varphi}_n + C_n + \rho_n + \hat{\Theta}(\gamma_n + \varphi_n) + 1 + \xi_n^{\tau_0}\}^{1/p_n}$ 为被设计的独立于切换规则的 $C^{1,2}$ 函数, 及自适应律

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = \bar{\tau}_n = \sum_{j=1}^n \xi_j^4 (\gamma_j + \varphi_j), \quad \hat{\Theta}(0) = 0 \quad (3-48)$$

使得以下不等式成立

$$\ell V = \ell \left(\sum_{j=1}^n W_j + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \leq - \sum_{j=1}^n (\xi_j^{d_{1k}} + \xi_j^{d_{2k}}) \leq - \sum_{j=1}^n \xi_j^d \quad (3-49)$$

其中, $\max_{k \in M} \{d_{1k}\} \leq d \leq \max_{k \in M} \{d_{2k}\}$, $d < 4$ 。

至此, p 型随机切换系统(3-1)的自适应状态反馈控制器设计完毕, 以下给出本节的主要定理及其证明。

定理 3.1 对于满足假设 3.1-3.3, 任意切换规则下的 p 型随机切换系统 (3-1), 自适应状态反馈控制器(3-47)和自适应律(3-48), 能够保证系统状态变量以概率有界。

证明: 基于引理3.1, 可知系统解存在。以下证明系统状态以概率有界。与文献 [92]中“(B.3)”类似, 结合命题3.4, 存在正常数 m_i 和 K_∞ 函数 $\mu(\cdot)$, 使得

$$\mu\left(\left|\left((x - x^*), \tilde{\Theta}\right)\right|\right) \leq \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_i^*)^4 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \leq V \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^4 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \quad (3-50)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ 。

取一任意正参数 $r > 0$ 。定义 $\sigma_r = \inf \left\{ t; \left| \left((x(t) - x^*(t)), \tilde{\Theta}(t) \right) \right| \geq r \right\}$ 。利用伊藤公式 (Itô's formula) 和(3-48)-(3-50), 可得

$$\begin{aligned} P(\sigma_r \leq t) \mu(r) &\leq E \left(I_{\{\sigma_r \leq t\}} V(x(\sigma_r), \tilde{\Theta}(\sigma_r)) \right) \\ &\leq E \left(V(x(t \wedge \sigma_r), \tilde{\Theta}(t \wedge \sigma_r)) \right) \leq V(x_0, \Theta) \end{aligned} \quad (3-51)$$

由(3-51), 可得 $P(\sigma_r \leq t) \leq V(x_0, \Theta) / \mu(r)$ 。令 $r \rightarrow \infty$, 则有 $P(\sigma_r \leq t) \rightarrow 0$ 。令

$t \rightarrow \infty$, 则 $P(\sigma_r \leq \infty) \rightarrow 0$ 。故而, 可得

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} P\left\{\left|\left(x(t) - x^*(t)\right), \tilde{\Theta}(t)\right| \geq r\right\} = 0 \quad (3-52)$$

由定义 3.1 和(3-52), 可得定理 3.1。证明完毕。

3.3.3 有限时间镇定推论

在上一小节中, 给出了系统(3-1)自适应状态反馈控制器的设计方法, 但所设计的控制器只能保证系统状态的有界性。在本小节, 将进一步研究系统达到有限时间稳定所需要的条件, 并给出两个相关推论。

推论 3.1 对于满足假设 3.1-3.3 且假设 3.2 中参数 θ 已知时, 任意切换规则下状态反馈控制器(3-47), 能够保证 p 型随机切换系统 (3-1)的系统状态在概率上有限时间稳定, 其中控制器中 $\hat{\Theta}$ 替换为已知的 Θ 。即, 存在随机设定时间 T_1 , 使得对 $\forall t \geq T_1$, 有 $x(t, x_0) = 0$ 。

证明: 由推导过程(3-8)-(4-49)和命题3.4, 可得

$$\ell \sum_{j=1}^n W_j \leq -\sum_{j=1}^n \xi_j^d \leq -\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^4\right)^{d/4} \leq -2^{-d/4} \left(\sum_{j=1}^n W_j\right)^{d/4} \quad (3-53)$$

结合引理 3.2, 可得推论 3.1。基于引理 3.1, 可以保证系统解的存在性。关于系统解唯一性的讨论可以参考文献[13,42,86]。

推论 3.2 对于满足假设 3.1-3.3 的 p 型切换系统 (3-1), 如果以下条件(i)和(ii)成立:

(i)在系统(3-1)中不存在 Wiener 过程 w , 即系统为确定性切换系统;

(ii)在条件(3-4)和(3-5)中, 函数 $r_{ik}(\cdot)$ 和 $\bar{r}_{ik}(\cdot)$ 为时不变函数, 即 $r_{ik}(t, \bar{x}_i)$ 和 $\bar{r}_{ik}(t, \bar{x}_i)$ 重新写作 $r_{ik}(\bar{x}_i)$ 和 $\bar{r}_{ik}(\bar{x}_i)$ 。

则自适应状态反馈控制器(3-47)和自适应律(3-48), 能够保证系统自适应有限时间稳定。其中, 取 $\varphi_i(\bar{x}_i, \hat{\Theta}) = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i, \hat{\Theta}) = \tilde{\varphi}_i(\bar{x}_i, \hat{\Theta}) = 0$ 。

证明: 由推导过程(3-8)-(4-49)和命题3.4, 可得

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n W_j + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2 \right) \leq -\sum_{j=1}^n (\xi_j^{d_{1k}} + \xi_j^{d_{2k}}) \quad (3-54)$$

进一步, 可得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right) &\leq - \sum_{j=1}^n \left(\xi_j^{d_{1k}} + \xi_j^{d_{2k}} \right) + \tilde{\Theta} \dot{\Theta} \\
 &\leq - \sum_{j=1}^n \left(\xi_j^{d_{1k}} + \xi_j^{d_{2k}} \right) + \tilde{\Theta} \sum_{j=1}^n \xi_j^4 \gamma_j \left(\bar{x}_j, \hat{\Theta} \right) \\
 &\leq \frac{-1}{2^{\frac{d}{4}+1}} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right)^{\frac{d}{4}} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{-1}{2} + \tilde{\Theta} \xi_j^{1-\tau_k} \gamma_j \left(\bar{x}_j, \hat{\Theta} \right) \right) \xi_j^{d_{1k}}
 \end{aligned} \tag{3-55}$$

很显然, 由(3-48)可知, $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta} \leq \Theta$ 。由(3-55), 可得

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right) \leq -2^{\frac{d}{4}-1} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right)^{\frac{d}{4}} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{-1}{2} + \Theta \xi_j^{1-\tau_k} \gamma_j \left(\bar{x}_j, \hat{\Theta} \right) \right) \xi_j^{d_{1k}} \tag{3-56}$$

由于当 $\bar{x}_i = 0$, 有 $\xi_j^{1-\tau_k} = 0$, 因此, 一定存在一个正常数 ρ , 使得对于任意的

$$x \in \Omega = \left\{ (x, \hat{\Theta}) : \sum_{j=1}^n W_j \leq \rho \right\}, \text{ 有 } 2\Theta \xi_j^{1-\tau_k} \gamma_j \left(\bar{x}_j, \hat{\Theta} \right) \leq 1 \text{ 成立, 其中 } k \in M, \forall i=1, \dots, n.$$

如果系统状态初始值 $x_0 \in \Omega$, 由(3-55)可得

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right) \leq -2^{\frac{d}{4}-1} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right)^{\frac{d}{4}} \tag{3-57}$$

进而, 可知系统状态将始终在 Ω 内, 并在有限的时间内到达平衡点, 有限时间设定为 T_2 满足 $T_2 \leq 2^{\frac{d}{4}+1} \left(1 - \frac{d}{4} \right)^{-1} \rho^{1-\frac{d}{4}}$ 。

如果 $x_0 \notin \Omega$, 即 $\sum_{j=1}^n W_j > \rho$, 此时有以下不等式成立

$$\begin{aligned}
 V(x(0), \tilde{\Theta}(0)) &\geq V(x(0), \tilde{\Theta}(0)) - V(x(\tau), \tilde{\Theta}(\tau)) \\
 &\geq \int_0^\tau \sum_{j=1}^n \left(\xi_j^{d_{1k}}(s) + \xi_j^{d_{2k}}(s) \right) ds \\
 &\geq \int_0^\tau 2^{-d/4} \left(\sum_{j=1}^n W_j \right)^{d/4} ds \geq \int_0^\tau 2^{-d/4} \rho^{d/4} ds
 \end{aligned} \tag{3-58}$$

进而, x 将在 T_3 时间内收敛到 Ω , 并进一步花费时间 T_2 到达平衡点。其中,

$$T_3 \leq \frac{2^{d/4} V(x(0), \tilde{\Theta}(0))}{\rho^{d/4}} \tag{3-59}$$

证明完毕。

注释 3.3 本节中亦可采用矛盾法证明推论 3.2。如果对于所有的 $t \geq 0$, 有 $x(t) \notin \Omega$ 成立, 即对于所有的 $t \geq 0$, 有 $\sum_{j=1}^n W_j > \rho$ 成立, 则一定存在正常数 $\bar{\rho}$, 使得对于所有的 $t \geq 0$, 有不等式 $\sum_{j=1}^n \xi_j^4 \gamma_j(\bar{x}_j, \hat{\Theta}) \geq \bar{\rho}$ 成立。继而可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}(t) = \infty$ 。这显然和条件 $V(x(t), \tilde{\Theta}(t)) < \infty$ 矛盾。因此, 一定存在 T_3 使得系统状态在此时间内收敛到 Ω 。

3.4 仿真验证

本节以数值算例说明所提出理论方法的有效性, 考虑如下 p 型随机非线性系统

$$\begin{cases} dx_1 = \left(x_2^{p_{1\sigma(t)}} + f_{1\sigma(t)}(t, x) \right) dt + g_{1\sigma(t)}^T(t, x) dw \\ dx_2 = \left(u^{p_{2\sigma(t)}} + f_{2\sigma(t)}(t, x) \right) dt + g_{2\sigma(t)}^T(t, x, \theta_{22}) dw \end{cases} \quad (3-60)$$

其中, $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2\}$, $p_{11} = 1$, $p_{21} = 1$, $f_{11}(\cdot) = 0.2x_1 \sin x_2$, $g_{11}(\cdot) = 0$, $f_{21}(\cdot) = 0$, $g_{21}(\cdot) = \theta_{22} 0.5t^{0.25} x_1 \cos x_1$, $\theta_{22} = 1$ (θ_{22} 值不可用于控制器设计), $p_{12} = 19/21$, $p_{22} = 17/19$, $f_{12}(\cdot) = 0.4x_1 \cos x_1$, $g_{12}(\cdot) = 0$, $f_{22}(\cdot) = 0$, $g_{22}(\cdot) = \theta_{22} t^{0.25} x_1 \sin x_2$ 。在本数值仿真中, 关于假设 3.1, 取参数 $\tau_1 = 45/47$, $\tau_2 = 43/47$, $q_1 = 47/23$, $q_2 = 47/21$, $q_3 = 47/19$ 。关于假设 3.2, 取 $|f_{1k}(\cdot)| \leq 0.4|x_1|$, $|g_{1k}(\cdot)| = 0$, $|f_{2k}(\cdot)| = 0$, $|g_{2k}(\cdot)| \leq \theta|x_1|t^{0.25}$ 。

通过两步, 构造系统控制器。

第 1 步, 计算 W_1 的微分算子如下

$$\begin{aligned} \ell W_1 &= \xi_1^{4-\frac{1}{q_1}} \left(x_2^{p_{1k}} + f_{1k}(\cdot) \right) \\ &\leq \xi_1^{4-\frac{1}{q_1}} x_2^{p_{1k}} + 0.4 \xi_1^{3+\tau_k} \left(1 + \xi_1^{6/5} \right) \end{aligned} \quad (3-61)$$

设计虚拟控制器 x_2^* 如下

$$x_2^* = -\xi_1^{1/q_2} \beta_1(x_1) = -\xi_1^{1/q_2} \left\{ 0.4 \left(1 + \xi_1^{6/5} \right) + \xi_1^{6/5} + C \right\}^{21/19} \quad (3-62)$$

其中, C 为待设计的正常数。进一步, 可得

$$\ell W_1 = \xi_1^{4-\frac{1}{q_1}} \left(x_2^{p_{1k}} - x_2^{*p_{1k}} \right) - C \xi_1^{3+\tau_k} - \xi_1^{4.2+\tau_k} \quad (3-63)$$

第 2 步, 计算 W_2 的微分算子如下

$$\begin{aligned}
 \ell W_2 &= \xi_2^{4-\frac{1}{q_2}} u_k^{p_{2k}} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2^2} g_{2k}^T g_{2k} \\
 &\leq \xi_2^{4-\frac{1}{q_2}} u_k^{p_{2k}} + (4-q_2^{-1}) \left| \frac{-\partial x_2^{*q_2}}{\partial x_1} \right| 2^{1-q_2^{-1}} |\xi_2^3| \left(\left(|\xi_2| + |\xi_1 \beta_1^{q_2}| \right)^{\frac{p_{1k}}{q_2}} + |f_{1k}| \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (4-q_2^{-1}) q_2 |\xi_2^{3-q_2^{-1}}| \left(|\xi_2|^{1-q_2^{-1}} + |\xi_1|^{1-q_2^{-1}} \beta_1^{q_2-1} \right) \theta^2 x_1^2 t^{0.5}
 \end{aligned} \tag{3-64}$$

由(3-62), 可得

$$\left| \frac{-\partial x_2^{*q_2}}{\partial x_1} \right| \leq \left| \frac{\partial \xi_1 \beta_1^{q_2}(x_1)}{\partial x_1} \right| \leq \xi_1^{1-1/q_1} \Phi_{21}(x_1) \tag{3-65}$$

其中, $\Phi_{21}(x_1) = q_1 \beta_1^{q_2} + 1.4 * 1.2 * (19/21) q_1 q_2 \xi_1^{6/5} \beta_1^{(q_2-19/21)}$ 。利用引理 2.1 和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned}
 &(4-q_2^{-1}) \left| \frac{-\partial x_2^{*q_2}}{\partial x_1} \right| 2^{1-q_2^{-1}} |\xi_2^3| |\xi_2|^{\frac{p_{1k}}{q_2}} \\
 &\leq 2(4-q_2^{-1}) \left(\frac{1}{5} * \frac{1-\frac{1}{q_1}}{3+\tau_k} \xi_1^{3+\tau_k} + 5^{\frac{(1-1/q_1)}{(3+p_{1k}/q_2)}} \frac{3+\frac{p_{1k}}{q_2}}{3+\tau_k} \xi_2^{3+\tau_k} \Phi_{21}^{\frac{(3+\tau_k)}{(3+p_{1k}/q_2)}} \right) \\
 &\leq \frac{1}{5} \xi_1^{3+\tau_k} + 5^{\frac{1}{3}} * 6.4 \xi_2^{3+\tau_k} \Phi_{21}^{1.2}
 \end{aligned} \tag{3-66}$$

类似地, 可得

$$2(4-q_2^{-1}) \left| \frac{-\partial x_2^{*q_2}}{\partial x_1} \right| |\xi_2^3| \left| \xi_1^{\frac{p_{1k}}{q_2}} \beta_1^{p_{1k}} \right| \leq \frac{1}{5} * 1.8 \xi_1^{3+\tau_k} + 5^{\frac{1}{3}} * 5.5 \xi_2^{3+\tau_k} (\Phi_{21} \beta_1)^{1.4} \tag{3-67}$$

$$2(4-q_2^{-1}) \left| \frac{-\partial x_2^{*q_2}}{\partial x_1} \right| |\xi_2^3| |f_{1k}| \leq \frac{0.73}{5} \xi_1^{3+\tau_k} + 5^{\frac{1}{3}} * 2.16 \xi_2^{3+\tau_k} (1 + \xi_2^{0.16}) \Phi_{21}^{1.36} \tag{3-68}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} (4-q_2^{-1}) q_2 |\xi_2^{3-q_2^{-1}}| |\xi_2|^{1-q_2^{-1}} \theta^2 x_1^2 t^{0.5} \\
 &\leq \frac{1}{5} \xi_1^{3+\tau_k} + 3.1 * 5^{\frac{1}{3}} \Theta \xi_2^4 (1 + \xi_2^{0.24}) (1+t) \\
 &\leq \frac{1}{5} \xi_1^{3+\tau_k} + 3.1 * 5^{\frac{1}{3}} \tilde{\Theta} \xi_2^4 (1 + \xi_2^{0.24}) (1+t) \\
 &\quad + 3.1 * 5^{\frac{1}{3}} \hat{\Theta} \xi_2^{3+\tau_k} (1 + \xi_2^{4/47}) (1 + \xi_2^{0.24}) (1+t)
 \end{aligned} \tag{3-69}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(4-q_2^{-1})q_2 \left| \xi_2^{3-q_2^{-1}} \right| \left| \xi_1 \right|^{1-q_2^{-1}} \beta_1^{q_2-1} \theta^2 x_1^2 t^{0.5} \\
 & \leq \frac{1}{5} * 1.6 \xi_1^{3+\tau_k} + 2.5 * 2.9 \xi_2^4 (1 + \xi_2^{0.4}) \beta_1^{2.1} \Theta (1+t) \\
 & \leq \frac{1}{5} * 1.6 \xi_1^{3+\tau_k} + 2.5 * 2.9 \xi_2^4 (1 + \xi_2^{0.4}) \beta_1^{2.1} \tilde{\Theta} (1+t) \\
 & \quad + 2.5 * 2.9 \xi_2^{3+\tau_k} (1 + \xi_2^{4/47}) (1 + \xi_2^{0.4}) \beta_1^{2.1} \hat{\Theta} (1+t)
 \end{aligned} \tag{3-70}$$

$$\xi_1^{4-\frac{1}{q_1}} (x_2^{p_{1k}} - x_2^{*p_{1k}}) \leq 1.8 \xi_1^{3+\tau_k} + 0.23 \xi_2^{3+\tau_k} \tag{3-71}$$

其中, $\Theta := \max \{ \theta^{62/23}, \theta^{92/35}, \theta^{93/28}, \theta^{184/57} \}$ 。

因此, 设计正常数 C , 控制器和自适应律如下

$$C = \frac{1}{5} (1 + 1.8 + 0.73 + 1 + 1.6) + 1.8 + 0.1 \tag{3-72}$$

$$\begin{aligned}
 u &= -\xi_2^{1/q_3} \beta_2 (\bar{x}_2, \hat{\Theta}) \\
 &= -\xi_2^{1/q_3} \left\{ 5^{\frac{1}{3}} * 6.4 \Phi_{21}^{1.2} + 5^{\frac{1}{3}} * 5.5 (\Phi_{21} \beta_1)^{1.4} \right. \\
 & \quad + 5^{\frac{1}{3}} * 2.16 (1 + \xi_2^{0.16}) \Phi_{21}^{1.36} + 3.1 * 5^{\frac{1}{3}} (1+t) \\
 & \quad \times \hat{\Theta} (1 + \xi_2^{4/47}) (1 + \xi_2^{0.24}) + 2.5 * 2.9 (1+t) (1 + \xi_2^{4/47}) \\
 & \quad \times (1 + \xi_2^{0.4}) \beta_1^{2.1} \hat{\Theta} + 0.23 + 0.1 + 0.1 \xi_2^{6/5} \left. \right\}^{19/17}
 \end{aligned} \tag{3-73}$$

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = (1+t) \left(3.1 * 5^{\frac{1}{3}} \xi_2^4 (1 + \xi_2^{0.24}) + 2.5 * 2.9 \xi_2^4 (1 + \xi_2^{0.4}) \beta_1^{2.1} \right) \tag{3-74}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}
 & \ell(W_1 + W_2) \\
 & \leq -0.1 \sum_{j=1}^2 (\xi_j^{3+\tau_k} + \xi_j^{4.2+\tau_k})
 \end{aligned} \tag{3-75}$$

系统的初始值选取为 $x_1 = 0.4, x_2 = 0.2, \hat{\Theta}(0) = 0$ 。仿真结果如下图所示。图 3-1 为系统任意规则的切换信号; 图 3-2 为系统状态响应曲线, 从图中可以看出, 系统状态稳定; 图 3-3 为系统自适应律响应曲线。

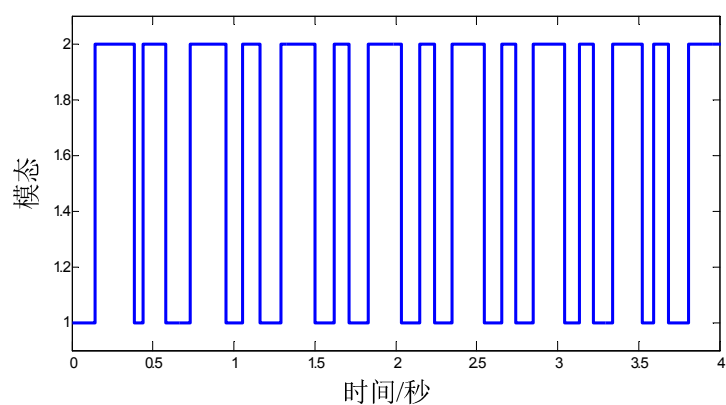


图 3-1 系统切换信号

Fig. 3-1 The response of switching signal

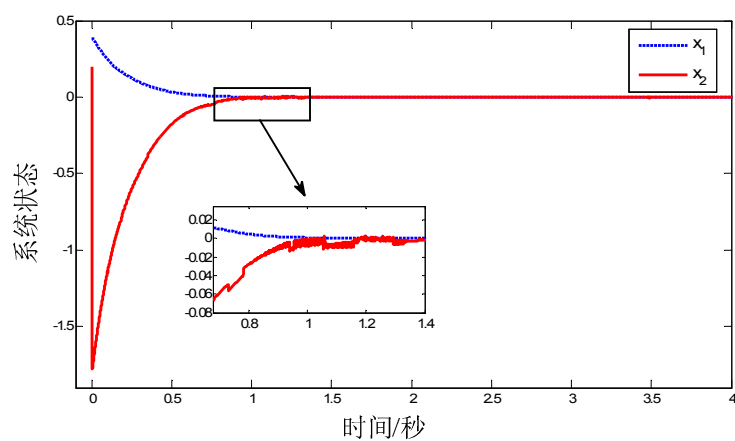


图 3-2 系统的状态响应

Fig. 3-2 The response of state variables

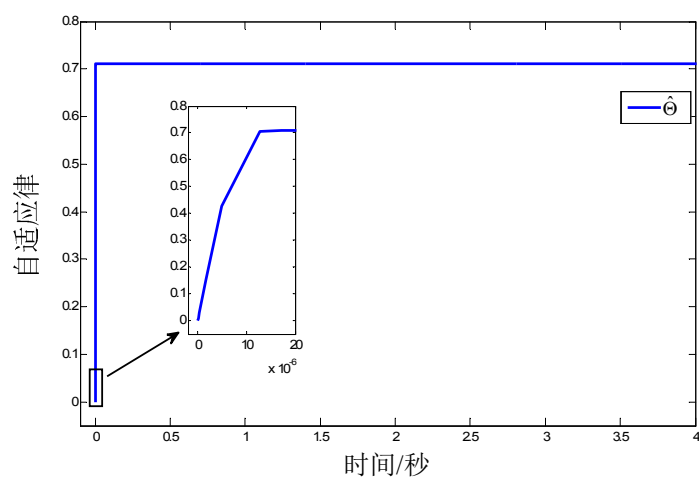


图 3-3 自适应律 $\hat{\Theta}$ 的响应曲线

Fig. 3-3 The response of the adaptive law $\hat{\Theta}$

3.5 本章小结

本章中进一步考虑了随机扰动对系统的影响, 基于随机 Lyapunov 稳定理论, 研究了在任意切换规则下, 下三角 p 型随机不确定非线性系统的自适应状态反馈控制问题。采用递归设计方法, 构造系统控制器, 保证系统依概率稳定。此外, 基于给出的主要定理, 进一步给出了切换系统随机有限时间稳定的推论, 以及无随机扰动条件下, 系统自适应有限时间稳定的推论。最后, 通过数值仿真说明所提出的主要定理的有效性。

第4章 基于动态增益方法的时滞随机非线性系统自适应 状态反馈控制

在本章中,将进一步考虑时滞因素对系统的影响,研究下三角 p 型随机不确定时滞系统的输出追踪问题。时延广泛存在于工程系统中,且严重影响系统控制性能。本章针对随机时滞非线性系统,提出存在动态增益的随机时滞系统稳定定理,并给出一类下三角 p 型随机时滞系统的自适应追踪控制方法及相关理论分析,保证追踪误差期望的有界性。

4.1 引言

时滞现象广泛存在于实际工程系统中,如轧机系统、输电网络、液压系统、涡轮喷气发动机、网络系统、微波振荡器等。时滞的存在,可能会使得系统控制性能难以保证,甚至导致系统运行不稳定。因此,到目前为止,关于时滞系统的稳定性分析和鲁棒控制已经受到了大批学者的关注,如文献[38,93-96]。

对于确定性时滞系统的研究,基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和 Razumikhin 引理,线性矩阵不等式方法(LMI)^[93]、反步设计方法^[94]、滑模控制方法^[97]、动态增益方法^[41,98,99]、光滑动态增益输出反馈控制^[95]、自适应输出反馈控制^[100]等控制器构造方法相继被学者们采用,并给出了大量的研究结果。尤其需要指出的是,在文献[41]中,针对严格反馈时滞系统,作者提出了一种基于动态增益的状态反馈控制器构造方法,此方法很大程度上放松了控制器构造对于系统非线性项的限制性条件,即时滞非线性项为满足严格反馈型的光滑函数(无增长条件限制)。类似的方法进一步被推广至确定性下三角 p 型时滞系统^[98,99]。

另一方面,在过去的数十年中,针对随机非线性系统,其稳定性分析问题和系统控制器设计问题已经吸引了大量学者的关注,见文献[33,74,77,101-106]等。在文献[101]中,作者首次引入四次方形式的 Lyapunov 函数,用以处理微分算子中产生的 Hessian 项。进一步,此方法被推广到带有零动态的随机非线性系统^[107]、带有未知参数的随机关联系统^[33]、随机 p 型系统^[34,75,77]等。特别地,在文献[75]中,关于 p 型系统的阶次参数 p_i 的限制性条件被进一步放松。对于随机时滞非线性系统的研究,在

文献[74,103]中,给出了时滞随机系统解的存在性和唯一性条件,以及保证系统稳定性的相关定理。其中的限制性条件,在文献[40,104]中被进一步放松。基于以上文献中的稳定性定理,不同随机时滞非线性系统的状态反馈控制、输出反馈控制等结果被相继提出^[40,68,105,106,108]。但现有结果中,对于随机时滞非线性系统中非线性项的限制性条件较强,其需要满足一定的增长条件限制,或者只允许输出信息受时滞因素影响。

通过以上的分析和介绍,目前关于确定性时滞系统以及随机时滞系统的研究,已存在大量研究结果。但是,对于后者研究仍存在许多具有挑战性的难题。例如,针对系统非线性项中状态变量均含有时滞信息,且非线性项没有增长条件限制的严格反馈随机时滞非线性系统,如何设计其时滞无关状态反馈控制器,使得系统依概率稳定?如何在相同的限制性条件下,进一步设计下三角 p 型时滞随机系统的时滞无关状态反馈控制器?

在本章中,将针对一类下三角 p 型随机不确定时滞系统,基于动态增益的方法,研究其自适应状态反馈追踪控制。首先,给出基于动态增益的随机时滞系统解的存在性及唯一性定理,并进一步给出相关稳定性定理及限制性条件。其次,基于以上提出的定理,给出一类时滞随机系统的状态反馈控制器构造方法及相关推论。最后,给出算例验证。

4.2 问题描述

考虑如下随机时滞不确定非线性系统

$$\begin{cases} dx_i(t) = (x_{i+1}^{p_i} + f_i(x, x_d, \theta, t))dt + g_i^T(x, x_d, \theta, t)dw \\ y(t) = x_1(t); x(s) = \psi(s), s \in [-d, 0] \end{cases} \quad (4-1)$$

其中, $1 \leq i \leq n$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, 并定义 $x_{n+1} = u$, 分别为系统状态向量和系统控制输入。 $p_i \geq 1$, $p_i \in R_{odd}^+$ 。未知正常数 d 表示系统时滞信息。 $w \in R^\kappa$ 定义为一完备概率空间上的 κ 维 Wiener 过程。 $\theta \in R^m$ 是未知常参数。定义 $f(\cdot) = f(x(t))$ 和 $f_d(\cdot) = f(x(t-d))$ 。对于向量 $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, 定义 $x_d = [x_1(t-d), \dots, x_n(t-d)]^T$ 。漂移项 $f_i(x, x_d, \theta, t): R^{2n+m+1} \rightarrow R$ 和扩散项 $g_i^T(x, x_d, \theta, t): R^{2n+m+1} \rightarrow R^\kappa$ 为 Borel 可测的, 且满足假设 4.1。

本章的目的是针对系统(4-1), 设计时滞无关自适应状态反馈控制器, 使得系统输出 y 能够跟踪上给定的参考信号 y_r , 且其它状态变量依概率有界。特别地, 如果

参考信号 $y_r = 0$ ，所有的状态变量几乎收敛至平衡点。为研究随机系统式(4-1)控制问题，在本章给出如下假设：

假设 4.1 对于 $i=1, \dots, n$ ，非线性函数 $f_i(x, x_d, \theta, t)$ 和 $g_i(x, x_d, \theta, t)$ 关于变量 (x, x_d) 满足局部 Lipschitz 条件，并且函数 $f_i(0, 0, \theta, t)$ 和 $g_i(0, 0, \theta, t)$ 关于时间变量 t 一致有界。 $f_i(0, 0, \theta, t) = g_i(0, 0, \theta, t) = 0$ 。存在常数 $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n \geq 0$ 和已知的光滑正函数 $\varphi_{i1}(\bar{x}_{id}, \theta) \geq 0$ ， $\varphi_{i2}(\bar{x}_{id}, \theta) \geq 0$ ，使得

$$|f_i(x, x_d, \theta, t)| \leq \varphi_{i1}(\bar{x}_{id}, \theta) \sum_{k=1}^i |x_{kd}|^{(r_i + \tau_i)/r_i} \quad (4-2)$$

$$|g_i(x, x_d, \theta, t)| \leq \varphi_{i2}(\bar{x}_{id}, \theta) \sum_{k=1}^i |x_{kd}|^{(r_i + 0.5\tau_i)/r_i} \quad (4-3)$$

其中， $\tau_i = q_i / d_i$ ， q_i 是一个偶整数， d_i 是一个奇整数。 $r_i \in R_{odd}^+$ ， $r_{i+1}p_i = r_i + \tau_i$ 。定义 $r_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$ ，且 $a_i = r_0 / r_i$ 。在这个假设中，以下条件之一应当满足：条件(1). 如果对于所有的 $i=1, 2, \dots, n$ ， $a_i = 1$ 或 $a_i \geq 2$ 成立，则 $r_n + \tau_n \geq r_i$ ， $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_m > r_0$ 和 $\tau_{m+1} = \tau_{m+2} = \dots = \tau_{n-1} = 0$ 成立；条件(2). $r_n + \tau_n \geq 2r_i$ ，且 $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_m > \max\{2r_i\}$ 和 $\tau_{m+1} = \tau_{m+2} = \dots = \tau_{n-1} = 0$ 成立。

假设 4.2 参考信号 y_r 以及其导数 \dot{y}_r 有界。

注释 4.1 在本章中，主要研究系统(4-1)的时滞问题，因此考虑在条件(4-2)及(4-3)不等号右侧仅含有时滞项的情形。当然，在本章中，(4-2)及(4-3)可以很容易的被推广到如下更一般的形式

$$|f_i(x, x_d, \theta, t)| \leq \varphi_{i1}(\bar{x}_{id}, \theta) \sum_{k=1}^i |x_{kd}|^{(r_i + \tau_i)/r_i} + \varphi_{i3}(\bar{x}_i, \theta) \sum_{k=1}^i |x_k|^{(r_i + \tau_i)/r_i} \quad (4-4)$$

$$|g_i(x, x_d, \theta, t)| \leq \varphi_{i2}(\bar{x}_{id}, \theta) \sum_{k=1}^i |x_{kd}|^{(r_i + 0.5\tau_i)/r_i} + \varphi_{i4}(\bar{x}_i, \theta) \sum_{k=1}^i |x_k|^{(r_i + 0.5\tau_i)/r_i} \quad (4-5)$$

其中， $\varphi_{i1}(\bar{x}_{id}, \theta) \geq 0$ ， $\varphi_{i2}(\bar{x}_{id}, \theta) \geq 0$ ， $\varphi_{i3}(\bar{x}_i, \theta) \geq 0$ ， $\varphi_{i4}(\bar{x}_i, \theta) \geq 0$ 为已知光滑函数。尤其，当 $r_1 = 1$ ， $\tau_i = p_i - 1$ 时，条件(4-4)可以被进一步弱化为文献[98]中的假设 A.2。如果 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$ (即系统(4-1)弱化为严格反馈随机系统)，且 $\tau_i = 0$ ，则条件(4-4)及(4-5)等价于条件“关于函数 $f_i(\cdot)$ 和 $g_i(\cdot)$ 无增长条件限制”。此情形下，文献[41]为本文的一种特例。为了进一步说明，本文的条件(4-4)比文献[98]的条件 A.2 更宽松，举例如下：考虑一个三阶系统，其中 $p_1 = 3$ ， $p_2 = 5$ ， $p_3 = 1$ ，如果 $\tau_1 = 8$ ， $\tau_2 = 4$ ， $\tau_3 = 16/5$ ， $r_1 = 1$ ， $r_2 = 3$ ， $r_3 = 7/5$ ，或者 $\tau_1 = 2$ ， $\tau_2 = 6/5$ ， $\tau_3 = 14/25$ ， $r_1 = 1$ ， $r_2 = 1$ ， $r_3 = 11/25$ ，则假设 4.1 中的条件(1)成立，此情形下文献[98]的条件 A.2 不成立。

4.3 状态反馈控制器设计

4.3.1 基础性引理及定理

为研究系统(4-1)的控制问题，先给出以下基础知识及相关引理、定理。

考虑如下时滞随机非线性系统：

$$dx(t) = f(l(t), x(t), x(t-d_0(t)), t)dt + g^T(l(t), x(t), x(t-d_0(t)), t)dw \quad (4-6)$$

$$dl(t) = h(l(t), x(t), t)dt \quad (4-7)$$

其中， $x(t) \in R^N$ ， $l(t) \in R^M$ 。N和M为正常数。 $w \in R^\kappa$ 定义为一完备概率空间上的 κ 维Wiener过程。 $d_0(t)$ 为时变时滞，且满足 $d \geq d_0(t) \geq 0$ 。

对于一个 C^2 函数 $V(x)$ ，定义 $\ell V(x)$ 为 $V(x)$ 的微分算子，表示如下

$$\ell V = \frac{\partial V}{\partial x} f(\cdot) + \frac{1}{2} \text{trace} \left\{ g^T(\cdot) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(\cdot) \right\} \quad (4-8)$$

定理 4.1 对于系统(4-6)-(4-7)，假定函数 $f(l, x, y, t)$ ， $g(l, x, y, t)$ 和 $h(l, x, t)$ 关于变量 (l, x, y) 满足局部Lipschitz条件，且关于时间变量 t 一致有界。如果以下条件(i)和(ii)均成立，

(i)存在非负函数 $V(l, x, x_t, t)$ ，关于变量 (x, x_t) 二次连续可微，关于变量 (l, t) 一次连续可微，使得对于任意的 $t \geq 0$ 和某些常数 $K > 0$ 以下不等式成立

$$\ell V(l, x, x_t, t) \leq K(1 + V(l, x, x_t, t)) \quad (4-9)$$

其中，对于任意的 $t \geq 0$ ，有 $x_t := x_t(s) := x(t+s)$ ， $s \in [-d, 0]$ ，即 $x_t \in C([-d, 0]; R^N)$ 。 x_t 表明 $V(l, x, x_t, t)$ 可以被选取为Lyapunov-Krasovskii泛函(参考文献[109])。

(ii) l -子系统(4-7)是输入到状态稳定的(ISS 即 Input to State Stable)，即如果 $|x|$ 是有界的， $|l|$ 也是有界的，且以下等式成立

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t < \infty} V(t, l, x, x_t) = \infty \quad (4-10)$$

则对于任意的初值 $\{X(s) : -d \leq s \leq 0\} = X \in C_{\mathcal{F}_0}^b([-d, 0]; R^{N+M})$ ， $X(s) := (x(s), l(s))$ 系统(4-6)-(4-7)在 $[-d, \infty)$ 上有唯一解。

证明：由于函数 $f(l, x, y, t)$ ， $g(l, x, y, t)$ 和 $h(l, x, t)$ 在变量 (l, x, y) 处满足局部Lipschitz条件，所以对于任意的初值 $\{X(s) : -d \leq s \leq 0\} = X \in C_{\mathcal{F}_0}^b([-d, 0]; R^{N+M})$ ，系统(4-6)-(4-7)在 $t \in [-d, \sigma_\infty]$ 具有唯一的最大局部解 $X(t)$ ，其中 σ_∞ 为爆破时间(explosion time)，且满足 $\limsup_{t \rightarrow \sigma_\infty} |X(t)| = \infty$ (见参考文献[103]，95页定理3.2.2)。进一步，由条件(ii)可以得到， $\limsup_{t \rightarrow \sigma_\infty} |x(t)| = \infty$ 成立。因此，只需要证明 $\sigma_\infty = \infty$ a.s.。选

取整数 $k \geq 0$ ，定义停止时间(stopping time) 为 $\tau_k = \sigma_\infty \wedge \inf \{t \in [0, \sigma_\infty] : |x(t)| \geq k\}$ 。显然， τ_k 随着 k 的增长而增长，且 $\tau_\infty \leq \sigma_\infty$ 成立。定义 $V_0 = V(l(0), x(0), x_t(s), 0)$ 和 $V_k(t) = V(l(t \wedge \tau_k), x(t \wedge \tau_k), x((t \wedge \tau_k) + s), t \wedge \tau_k)$ 。对于任意的 $k \geq 1$ 和 $t \geq 0$ ，基于伊藤公式，有以下不等式成立

$$\begin{aligned} EV_k(t) &= EV_0 + E \int_0^{t \wedge \tau_k} \ell V(l(s_0), x(s_0), x(s_0 + s), s) ds_0 \\ &\leq EV_0 + E \int_0^t K(1 + V_k(s_0)) ds_0 \\ &\leq EV_0 + Kt + K \int_0^t \left\{ \sup_{0 \leq r \leq s_0} EV_k(r) \right\} ds_0 \end{aligned} \quad (4-11)$$

由于式(4-11)中不等号右侧为关于时间变量的增函数，故而，以下不等式成立

$$\sup_{0 \leq r \leq t} EV_k(r) \leq V_0 + Kt + K \int_0^t \left\{ \sup_{0 \leq r \leq s_0} EV_k(r) \right\} ds_0$$

利用 Gronwall 不等式，可得 $\sup_{0 \leq r \leq t} EV_k(r) \leq (V_0 + Kt)e^{Kt}, \forall t \geq 0$ 。因此，

$$EV_k(t) \leq (V_0 + Kt)e^{Kt}, \forall t \geq 0 \quad (4-12)$$

由于 $V(l, x, x_t, t) \geq 0$ 是连续的，且 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq \infty} V(t, l, x, x_t) = \infty$ 。基于条件(ii)，存在函数 $\mu(\cdot): R_+ \rightarrow R_+$ ，且对于 $k \geq 0$ 可以定义 $\mu(k) := \inf_{|x| \geq k, 0 \leq t \leq \infty} V(l, x, x_t, t)$ 。显然，

$$\mu(|x|) \leq V(l, x, x_t, t) \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(k) = \infty$$

由(4-12)可知

$$(V_0 + Kt)e^{Kt} \geq E\mu(|x(t \wedge \tau_k)|) \geq \mu(k)P(\tau_k \leq t) \quad (4-13)$$

由(4-13)可得，对于任意的正常数 t ，有 $P(\tau_\infty \leq t) = 0$ 。因此， $P(\tau_\infty < \infty) = 0$ 成立。即得 $\tau_\infty = \infty$ a.s.。进一步，可得 $\sigma_\infty = \infty$ a.s.。证明完毕。

定理 4.2 对于系统(4-6)-(4-7)，令定理 4.1 中的条件(i)和(ii)成立。假定存在非负函数 $V(l, x, x_t, t)$ ，关于变量 (x, x_t) 二次连续可微，关于变量 (l, t) 一次连续可微，使得

$$\ell V(l, x, x_t, t) \leq -W(l, x) \quad (4-14)$$

其中，函数 $W(l, x)$ 是连续且非负的，则对于任意给定的初始值， $X(s) := (x(s), l(s))$ ， $\{X(s) : -d \leq s \leq 0\} = X \in C_{\mathcal{F}_0}^b([-d, 0]; R^{N+M})$ ，以下式子成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(l, x) = 0 \quad \text{a.s.} \quad (4-15)$$

证明：基于定理 4.1 及(4-14)，显然，系统(4-6)-(4-7)在 $[-d, \infty)$ 上存在唯一解。由于 l -子系统是 ISS 的，故而 $|x| \rightarrow \infty$ 等价于 $|X| \rightarrow \infty$ ，即 $\lim_{|X| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq \infty} V(t, l, x, x_t) = \infty$ a.s.。

类似文献[74]中“定理 2.1”的证明以及文献[40]“定理 2”的证明，可得(4-15)。具体推导过程在此处略去。

注释 4.2 在本章中，定理 4.1 比文献[74]中“定理 A.1”及文献[40]“定理 1”更具一般性。不等式(4-9)可以被进一步放松为如下形式

$$\ell V(l, x, x_t, t) \leq K(1 + V(l, x, x_t, t) + W_1(l, x, t) + W_2(l, x_d, t))$$

其中， $W_1(l, x, t) \leq a_1 V(l, x, x_t, t)$ ， $W_2(l, x, t) \leq a_2 V(l, x, x_t, t)$ 。 a_1 和 a_2 为正参数。证明方法与定理 4.1 以及文献[74]“定理 A.1”证明相同。

引理 4.1^[41] 对于任意的光滑函数 $g(\theta, x_1, \dots, x_n): R^{m+n} \rightarrow [0, +\infty)$ ，以及正实数 k ，存在光滑函数 $g_0(\theta): R^m \rightarrow [0, +\infty)$ ， $g_i(x_1, \dots, x_i): R^i \rightarrow [0, +\infty)$ ，其中 $i=1, 2, \dots, n$ ，使得不等式 $g(\theta, x_1, \dots, x_n) \sum_{i=1}^n |x_i|^k \leq g_0(\theta) \sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_i) |x_i|^k$ 成立。

引理 4.2^[77] 定义 $r = p/q \geq 1$ ，其中 p 和 q 是正奇整数。对于任意的实数 x, y ，存在常数 $c > 0$ ，使得 $|x^r - y^r| \leq r|x - y|(x^{r-1} + y^{r-1}) \leq c|x - y|((x - y)^{r-1} + y^{r-1})$ 成立。

注释 4.3 在文献[41]“引理 1”中，参数 k 是正整数。事实上，基于引理 2.4， k 可以是任意的正数，即引理 4.1。在引理 4.2 中，可以选取 c 满足 $c \geq r \max\{2^{r-2}, 1\} + r$ ，可以通过分析两种情形予以证明：情形 1(x, y 符号相反)，显然， $(x - y)^{r-1} \geq x^{r-1}$ 成立。因此，如果 $c \geq r \max\{2^{r-2}, 1\} + r$ ，则引理 4.2 成立；情形 2(x, y 符号相同)，由于 $c \geq r \max\{2^{r-2}, 1\} + r$ ，则有不等式 $\frac{c-r}{r} \geq \max\{2^{r-2}, 1\}$ 成立。进一步，可以得到不等式 $\frac{c}{r}(x - y)^{r-1} + \frac{c-r}{r}y^{r-1} \geq \max\{2^{r-2}, 1\}((x - y)^{r-1} + y^{r-1}) \geq (x^{r-1} + y^{r-1})$ 成立。继而，引理 4.2 成立。

4.3.2 控制器设计及稳定性分析

在本小节中，在假设 4.1 和假设 4.2 下，通过动态增益的方法，构造系统(4-1)自适应状态反馈控制器，其形式如下

$$u = u(x, l, \hat{\Theta}, t), \text{ 其中, } \dot{l} = \psi_1(x, l, \hat{\Theta}, t), \dot{\hat{\Theta}} = \psi_2(x, l, \hat{\Theta}, t)$$

使得系统追踪误差及其它状态变量依概率有界。尤其，如果参考信号 $y_r = 0$ 且选取设计参数 $\bar{\tau} = 0$ ，则系统状态变量几乎收敛到平衡点。其中动态增益 l 和自适应律 $\hat{\Theta}$ 在后续设计。

令 $\rho \in R_{even}^+$ 且 $\rho > \max_{2 \leq i \leq n} \{2r_i + \tau_i, r_i + \tau_i + 2\sigma\}$ 。基于假设 4.1, 通过以下方式选取参数 $\sigma \in R_{odd}^+$: (a). 如果假设 4.1 中的条件(i)成立, 选取 $\sigma = r_0$; (b). 如果假设 4.1 中条件(ii)成立, 选取 $\sigma \in R_{odd}^+$ 满足以下不等式 $\min\{r_n + \tau_n, \tau_m\} \geq \sigma \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{2r_i\}$ 。

以下, 通过递归设计的方法, 构造系统控制器。

第 1 步: 定义 $\xi_1 = (x_1 - y_r)^{\frac{\sigma}{r_1}}$, 选取 Lyapunov 函数

$$V_1 = W_{11} + \frac{1}{l_1} W_{12} \text{ 和 } V_0 = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2,$$

其中 $W_{11} = \int_0^{x_1 - y_r} s^{\frac{\rho - \tau_1 - r_1}{r_1}} ds$, $W_{12} = \xi_1^{(\rho - \tau_1)/\sigma}$, $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ 。 Θ 为正且和参数 θ 相关(为了简化, 在后续的放缩中, 如果需要某些和 θ 相关的参数, 以保证相应的不等式成立, 可统一采用这些参数的最大值, 并写为 Θ 。 Θ 通过自适应的方法予以处理)。设计动态增益形式如下

$$\begin{aligned} \dot{l}_1(t) &= \max \left\{ \xi_1^{\tau_1/\sigma} (-l_1^2 + l_1 \rho_1(\cdot)), 0 \right\}, \\ l_1(s) &= 1 \text{ for } \forall s \in [-d, 0] \end{aligned} \quad (4-16)$$

其中, $\rho_1(x_1, y_r, \hat{\Theta})$ 是待设计的正光滑函数。关于设计的动态增益有以下特性:

$$\begin{aligned} (i) & 0 \leq \dot{l}_1 \leq \xi_1^{\tau_1/\sigma} l_1 \rho_1(\cdot) \\ (ii) & \dot{l}_1 \geq \xi_1^{\tau_1/\sigma} (-l_1^2 + l_1 \rho_1(\cdot)) \\ (iii) & l_1 \geq l_{1d} \geq 1. \end{aligned}$$

求取 Lyapunov 函数 $V_0 + V_1$ 的微分算子, 如下

$$\begin{aligned} \ell(V_0 + V_1) &= \left(1 + \frac{\rho - \tau_1}{r_1 l_1} \right) \xi_1^{(\rho - \tau_1 - r_1)/\sigma} (x_2^{p_1} + f_1(\cdot) - \dot{y}_r) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \tau_1 - r_1}{r_1} + \frac{(\rho - \tau_1)(\rho - \tau_1 - r_1)}{r_1^2 l_1} \right) \\ &\quad \times \xi_1^{(\rho - \tau_1 - 2r_1)/\sigma} |g_1(\cdot)|^2 - \frac{\dot{l}_1}{l_1^2} \xi_1^{(\rho - \tau_1)/\sigma} + \tilde{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}} \end{aligned} \quad (4-17)$$

基于假设 4.1, 引理 4.1 及引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned} |f_1(\cdot)| &\leq \varphi_{11}(x_{1d}, \theta) |x_{1d}|^{(r_1 + \tau_1)/r_1} \\ &\leq \theta_{11}(\theta) \left(\bar{\varphi}_{11}(\cdot) |\xi_{1d}|^{(r_1 + \tau_1)/\sigma} + \bar{C}_{11}(y_{rd}) \right) \end{aligned} \quad (4-18)$$

其中, $\theta_{11}(\theta)$ 是与参数 θ 相关的正常数, $\bar{\varphi}_{11}(x_{1d}, y_{rd})$ 是一个适当的光滑正函数, $\bar{C}_{11}(y_{rd})$ 满足 $\bar{C}_{11}(0)=0$ 。进一步, 利用引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\rho - \tau_1}{r_1 l_1}\right) \xi_1^{(\rho - \tau_1 - r_1)/\sigma} (f_1(\cdot) - \dot{y}_r) \\ & \leq \Theta \xi_1^{\rho/\sigma} \delta_{11}(\cdot) + \xi_{1d}^{\rho/\sigma} \sigma_{11d}(\cdot) + C_{11}(y_{rd}, \dot{y}_r) \end{aligned} \quad (4-19)$$

其中, $\delta_{11}(\cdot) := \delta_{11}(x_1, y_r)$, $\sigma_{11d}(\cdot) := \sigma_{11}(x_{1d}, y_{rd})$ 是适当的光滑正函数, $C_{11}(y_{rd}, \dot{y}_r)$ 有界且满足 $C_{11}(0, 0) = 0$ 。

类似于(4-18)-(4-19)推导, 利用条件(4-3)及引理 2.2, 引理 2.4, 引理 4.1, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \tau_1 - r_1}{r_1} + \frac{(\rho - \tau_1)(\rho - \tau_1 - r_1)}{r_1^2 l_1} \right) \xi_1^{(\rho - \tau_1 - 2r_1)/\sigma} |g_1(\cdot)|^2 \\ & \leq \Theta \xi_1^{\rho/\sigma} \delta_{12}(\cdot) + \xi_{1d}^{\rho/\sigma} \sigma_{12d}(\cdot) + C_{12}(y_{rd}) \end{aligned} \quad (4-20)$$

其中, $\delta_{12}(x_1, y_r)$, $\sigma_{12d}(x_{1d}, y_{rd})$ 是适当的光滑正函数, $C_{12}(y_{rd})$ 是有界的且满足 $C_{12}(0) = 0$ 。

选取以下 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\tilde{V}_1 = \int_{t-d}^t e^{-\frac{t-s-d}{d}} \xi_1^{\rho/\sigma}(s) \sigma_1(x_1(s), y_r(s)) ds \quad (4-21)$$

其中, $\sigma_1(\cdot) = \sigma_{11}(x_1, y_r) + \sigma_{12}(x_1, y_r)$ 。

由(4-16)-(4-21), 可得

$$\begin{aligned} \ell(V_0 + V_1 + \tilde{V}_1) & \leq \left(1 + \frac{\rho - \tau_1}{r_1 l_1}\right) \xi_1^{\frac{\rho - \tau_1 - r_1}{\sigma}} x_2^{p_1} - \frac{1}{d} \tilde{V}_1 + \Theta \xi_1^{\frac{\rho}{\sigma}} \delta_1(\cdot) \\ & \quad + \xi_1^{\frac{\rho}{\sigma}} + e \xi_1^{\frac{\rho}{\sigma}} \sigma_1(\cdot) - \frac{1}{l_1} \xi_1^{\frac{\rho}{\sigma}} \rho_1(\cdot) - \tilde{\Theta} \dot{\Theta} + C_1 \end{aligned} \quad (4-22)$$

其中, $\delta_1(\cdot) = \delta_{11}(x_1, y_r) + \delta_{12}(x_1, y_r)$ 。 $C_1(y_{rd}, \dot{y}_r) = C_{11} + C_{12}$ 且满足 $C_1(0, 0) = 0$ 。

为了简化, 给出以下变换及定义

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x_1 - y_r)^{\sigma/r_1}, & x_1^* &= 0 \\ \xi_2 &= x_2^{\sigma/r_2} - x_2^{*\sigma/r_2}, & x_2^{*p_1} &= -\xi_1^{r_2 p_1 / \sigma} \beta_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ \xi_i &= x_i^{\sigma/r_i} - x_i^{*\sigma/r_i}, & x_i^{*p_{i-1}} &= -\xi_{i-1}^{r_i p_{i-1} / \sigma} \tilde{l}_{i-2} \beta_{i-1} \end{aligned} \quad (4-23)$$

其中, $i=1,2,\dots,n+1$, $x_{n+1}^* := u$, $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 为虚拟控制器。 $\beta_1(x_1, y_r, \hat{\Theta}) \geq 0, \dots, \beta_n(\bar{x}_n, \bar{l}_{n-2}, y_r, \hat{\Theta}) \geq 0$ 为待设计的适当光滑函数。 l_i 为待设计的动态增益。 定义 $\tilde{l}_i := l_1 l_2 \dots l_i$, $\bar{l}_i := [l_1, l_2, \dots, l_i]^T$ 。 设计 $\beta_1(\cdot)$ 为如下形式

$$\beta_1(\cdot) = \sqrt{1 + \hat{\Theta}^2} \delta_1(\cdot) + e\sigma_1(\cdot) + 1 + a_1 \quad (4-24)$$

其中, $a_1 > 0$ 是待设计的常数。

由于 $\frac{\rho - \tau_1}{r_1 l_1} \xi_1^{(\rho - \tau_1 - r_1)/\sigma} x_2^{*p_1} \leq 0$, 结合式(4-22)-(4-24), 可得

$$\begin{aligned} & \ell(V_0 + V_1 + \tilde{V}_1) \\ & \leq -a_1 \xi_1^{\rho/\sigma} - \frac{1}{d} \tilde{V}_1 + \tilde{\Theta} \left(-\dot{\hat{\Theta}} - \bar{\tau} \hat{\Theta} + \xi_1^{\rho/\sigma} \delta_1 \right) + \left(1 + \frac{\rho - \tau_1}{r_1 l_1} \right) \\ & \quad \times \xi_1^{(\rho - \tau_1 - r_1)/\sigma} (x_2^{p_1} - x_2^{*p_1}) - \frac{1}{l_1} \xi_1^{\rho/\sigma} \rho_1(\cdot) + \bar{\tau} \hat{\Theta} + C_1 \end{aligned} \quad (4-25)$$

其中, $\bar{\tau} \geq 0$ 为可设计的常数。

第 i 步: 假定, 在第 $i-1$ 步, 存在 C^2 正定 Lyapunov 函数 $V_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (V_j + \tilde{V}_j)$ 和在(4-23)

中定义的虚拟控制器 $x_i^{*p_{i-1}} = -\xi_{i-1}^{r_i p_{i-1}/\sigma} \tilde{l}_{i-2} \beta_{i-1}(\cdot)$, 及以下形式的动态增益

$$\begin{aligned} \dot{l}_{i-1}(t) &= \tilde{l}_{i-2} \max \left\{ \xi_{i-1}^{\tau_{i-1}/\sigma} (-l_{i-1}^2 + l_{i-1} \rho_{i-1}(\cdot)), 0 \right\}, \\ l_{i-1}(s) &= 1 \text{ for } \forall s \in [-d, 0] \end{aligned} \quad (4-26)$$

使得以下不等式成立

$$\begin{aligned} & \ell \left(V_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (V_j + \tilde{V}_j) \right) \\ & \leq -\sum_{j=1}^{i-1} (a_j - i + j + 1) \xi_j^{\rho/\sigma} - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{V}_j - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{l_j} \xi_j^{\rho/\sigma} \left(\rho_j(\cdot) - \sum_{k=j+1}^{i-1} e \rho_{kj}(\cdot) \right) \\ & \quad + \left(\tilde{\Theta} + \sum_{j=2}^{i-1} \Phi_j(\cdot) \right) \left(-\dot{\hat{\Theta}} - \bar{\tau} \hat{\Theta} + \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{\rho/\sigma} \delta_j(\cdot) \right) + \frac{\rho - \tau_{i-1}}{\sigma} \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_{i-1}^{(\rho - \tau_{i-1} - \sigma)/\sigma} \\ & \quad \times \left(\frac{\sigma}{r_{i-1}} x_{i-1}^{(\sigma - r_{i-1})/r_{i-1}} \right) (x_i^{p_{i-1}} - x_i^{*p_{i-1}}) + \frac{1}{\tilde{l}_{i-2}} \xi_{i-1}^{(\rho - \tau_{i-1} - r_{i-1})/\sigma} (x_i^{p_{i-1}} - x_i^{*p_{i-1}}) \\ & \quad + \bar{\tau} \hat{\Theta} + (i-2) a \bar{\tau} \hat{\Theta}^2 + (i-2) \bar{\tau} b + \sum_{j=1}^{i-1} C_j \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中, $\Phi_j = -\frac{1}{\tilde{l}_{j-1}} \frac{\partial W_{j1}}{\partial \hat{\Theta}} - \frac{1}{\tilde{l}_j} \frac{\partial W_{j2}}{\partial \hat{\Theta}}$ 。 $a, b > 0$ 是可设计常数。 $C_j(y_{rd}, \dot{y}_{rd})$ 为适当函数且满足 $C_j(0, 0) = 0$ 。 所需要注意的是, 当 $i = 2$ 时, (4-27) 中的 $x_{i-1}^{(\sigma-r_{i-1})/r_{i-1}}$ 应当写作 $\xi_{i-1}^{(\sigma-r_{i-1})/r_{i-1}}$, 以使得(4-27)和(4-22)相同。 当 $i \geq 3$ 时, 以下设计仍成立。

选取以下 Lyapunov 函数

$$V_i = \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} W_{i1} + \frac{1}{\tilde{l}_i} W_{i2} \quad (4-28)$$

其中, $W_{i1} = \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{\sigma/r_i} - x_i^{*\sigma/r_i})^{(\rho-\tau_i-r_i)/\sigma} ds$, $W_{i2} = \xi_i^{(\rho-\tau_i)/\sigma}$ 。 动态增益 l_i 设计如下

$$\dot{l}_i(t) = \tilde{l}_{i-1} \max \left\{ \xi_i^{\tau_i/\sigma} \left(-l_i^2 + l_i \rho_i(\cdot) \right), 0 \right\}, l_i(0) = 1 \quad (4-29)$$

其中, $\rho_i(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-1}, y_r, \hat{\Theta})$ 是光滑的待设计正函数。 l_i 与 l_1 具有相似的特性。

进一步, 可得 V_i 的微分算子如下

$$\begin{aligned} \ell V_i = & -\frac{1}{(\tilde{l}_{i-1})^2} \frac{d(\tilde{l}_{i-1})}{dt} W_{i1} + \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_i^{(\rho-\tau_i-r_i)/\sigma} x_{i+1}^{p_i} \\ & + \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \left(\sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial W_{i1}}{\partial l_j} \dot{l}_j + \frac{\partial W_{i1}}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}} + \frac{\partial W_{i1}}{\partial y_r} \dot{y}_r \right) + \frac{\rho-\tau_i}{r_i} \frac{1}{\tilde{l}_i} \xi_i^{\frac{\rho-\tau_i-\sigma}{\sigma}} x_i^{\frac{\sigma-r_i}{r_i}} x_{i+1}^{p_i} \\ & + \frac{1}{\tilde{l}_i} \left(\sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial W_{i2}}{\partial l_j} \dot{l}_j + \frac{\partial W_{i2}}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}} + \frac{\partial W_{i2}}{\partial y_r} \dot{y}_r \right) - \frac{1}{(\tilde{l}_i)^2} \frac{d(\tilde{l}_i)}{dt} W_{i2} + \sum_{j=1}^6 T_{ij} \end{aligned} \quad (4-30)$$

式中,

$$\begin{aligned} T_{i1} &= \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_i^{(\rho-\tau_i-r_i)/\sigma} f_i(\cdot); & T_{i4} &= \frac{\rho-\tau_i}{r_i} \frac{1}{\tilde{l}_i} \xi_i^{\frac{\rho-\tau_i-\sigma}{\sigma}} x_i^{\frac{\sigma-r_i}{r_i}} f_i(\cdot); \\ T_{i2} &= \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_{i1}}{\partial x_j} (x_{j+1}^{p_j} + f_j(\cdot)); & T_{i5} &= \frac{1}{\tilde{l}_i} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_{i2}}{\partial x_j} (x_{j+1}^{p_j} + f_j(\cdot)); \\ T_{i3} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \sum_{j,k=1}^i \frac{\partial^2 W_{i1}}{\partial x_j \partial x_k} g_j^T g_k; & T_{i6} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{l}_i} \sum_{j,k=1}^i \frac{\partial^2 W_{i2}}{\partial x_j \partial x_k} g_j^T g_k. \end{aligned}$$

为简化后续理论推导, 先给出以下六个命题及相关证明。

命题 4.1 对于 $i = 2, \dots, n$, 存在适当函数 $\delta_i(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$, $\sigma_{id}(\bar{x}_{id}, \bar{l}_{i-2,d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$,

$\rho_{i1d}(x_{1d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd}), \dots, \rho_{i,i-1,d}(\bar{x}_{i-1,d}, \bar{l}_{i-2,d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$ 非负且光滑, 及可任意小的有界函数

$C_{i1}(y_{rd}, \dot{y}_{rd})$, 其满足 $C_{i1}(0,0)=0$, 使得以下不等式成立

$$\begin{aligned} & T_{i1} + T_{i2} + T_{i3} + T_{i4} + T_{i5} + T_{i6} \\ & \leq \Theta \xi_i^{\rho/\sigma} \delta_i(\cdot) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{l_{jd}} \xi_{jd}^{\rho/\sigma} \rho_{ijd}(\cdot) + \xi_{id}^{\rho/\sigma} \sigma_{id}(\cdot) + C_{i1} \end{aligned}$$

证明: 利用引理 4.1, 及假设 4.1, 可得

$$|f_i(\cdot)| \leq \theta_{i1}(\theta) \left(\sum_{k=1}^i \tilde{\varphi}_{ik1}(\cdot) |x_{kd}|^{(r_i + \tau_i)/r_i} \right) \quad (4-31)$$

$$|g_i(\cdot)| \leq \theta_{i2}(\theta) \left(\sum_{k=1}^i \tilde{\varphi}_{ik2}(\cdot) |x_{kd}|^{(r_i + 0.5\tau_i)/r_i} \right) \quad (4-32)$$

其中, θ_{i1} 和 θ_{i2} 是与参数 θ 相关的适当正参数。 $\tilde{\varphi}_{ik1}(\bar{x}_{id})$ 和 $\tilde{\varphi}_{ik2}(\bar{x}_{id})$ 是适当正光滑函数。

进一步, 利用(4-23), 引理 2.2, 及假设 4.1, 可得

$$|f_i(\cdot)| \leq \theta_{i1}(\theta) \left(\sum_{k=1}^i \bar{\varphi}_{ik1}(\cdot) |\xi_{kd}|^{\frac{r_i + \tau_i}{\sigma}} + \bar{C}_{i1} \right) \quad (4-33)$$

$$|g_i(\cdot)| \leq \theta_{i2}(\theta) \left(\sum_{k=1}^i \bar{\varphi}_{ik2}(\cdot) |\xi_{kd}|^{\frac{r_i + 0.5\tau_i}{\sigma}} + \bar{C}_{i2} \right) \quad (4-34)$$

其中, $\bar{\varphi}_{i11}(x_1, y_r, \hat{\Theta}), \dots, \bar{\varphi}_{i,i-1,1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta}), \bar{\varphi}_{i,i,1}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta})$ 是适当的正光滑函数。

函数 $\bar{\varphi}_{i11}(\cdot), \dots, \bar{\varphi}_{i,i-1,1}(\cdot)$ 分别由虚拟控制器 x_2^*, \dots, x_i^* 确定。 $\bar{C}_{i1}(y_{rd})$ 和 $\bar{C}_{i2}(y_{rd})$ 有界且满足 $\bar{C}_{i1}(0) = \bar{C}_{i2}(0) = 0$ 。

由(4-23)可以得到以下等式

$$x_k^{(\sigma - r_k)/r_k} = \left(\xi_k - \xi_{k-1} \left(\tilde{l}_{k-2} \beta_{k-1}(\bar{x}_{k-1}, \bar{l}_{k-3}, y_r, \hat{\Theta}) \right)^{\frac{\sigma}{(r_k p_{k-1})}} \right)^{\frac{(\sigma - r_k)}{\sigma}} \quad (4-35)$$

结合文献[75]的放缩方法(A.4), (A.5), (A.9), 及引理 2.2, 可得, 对于 $i, k = 2, \dots, n$, 存在适当的正光滑函数 $d_{ij}(\bar{x}_{i-1}, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta}), \bar{d}_{ij}(\bar{x}_{i-1}, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta})$ 使得

$$\frac{\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_j} \leq \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\xi_k|^{(\sigma - r_j)/\sigma} \right) d_{ij}(\cdot) \quad (4-36)$$

$$\frac{\partial^2 x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_j \partial x_k} \leq \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\xi_k|^{(\sigma-r_j-r_k)/\sigma} \right) \bar{d}_{ijk}(\cdot) \quad (4-37)$$

利用引理 2.1, 引理 2.2, 引理 2.4, 及(4-33)-(4-37), 对于 $i=1,2,3$, 存在适当的正光滑函数 $\delta_{i1}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$, $\sigma_{i1d}(\bar{x}_{id}, \bar{l}_{i-2,d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$ 和 $\rho_{i1d}(x_{1d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd}), \dots, \rho_{i,i-1,d}(\bar{x}_{i-1,d}, \bar{l}_{i-2,d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$, 其中 $\rho_{i1d}(\cdot), \dots, \rho_{i,i-1,d}(\cdot)$ 分别由 x_2^*, \dots, x_i^* 确定, 使得以下不等式成立

$$T_{i1} = \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_i^{(\rho-\tau_i-r_i)/\sigma} f_i(\cdot) \leq \Theta \xi_i^{\rho/\sigma} \delta_{i1} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\tilde{l}_{jd}} \xi_{jd}^{\rho/\sigma} \rho_{ij1d} + \xi_{id}^{\rho/\sigma} \sigma_{i1d} + C_{i11} \quad (4-38)$$

$$\begin{aligned} T_{i2} &= \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial W_{i1}}{\partial x_j} (x_{j+1}^{p_j} + f_j(\cdot)) \\ &= \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \frac{(\rho-\tau_i-r_i)}{\sigma} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{-\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_j} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{\sigma/r_i} - x_i^{*\sigma/r_i})^{\frac{(\rho-\tau_i-r_i-\sigma)}{\sigma}} ds (x_{j+1}^{p_j} + f_j) \\ &\leq \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \frac{(\rho-\tau_i-r_i)}{\sigma} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\xi_k|^{(\sigma-r_j)/\sigma} \right) d_{ij}(\cdot) \\ &\quad \times |x_i - x_i^*| |\xi_i|^{(\rho-\tau_i-r_i-\sigma)/\sigma} |x_{j+1}^{p_j} + f_j(\cdot)| \\ &\leq \Theta \xi_i^{\rho/\sigma} \delta_{i2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\tilde{l}_{jd}} \xi_{jd}^{\rho/\sigma} \rho_{ij2d} + \xi_{id}^{\rho/\sigma} \sigma_{i2d} + C_{i12} \end{aligned} \quad (4-39)$$

$$\begin{aligned} T_{i3} &= \frac{1}{2\tilde{l}_{i-1}} \sum_{j,k=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_{i1}}{\partial x_j \partial x_k} g_j^T g_k + \frac{1}{2\tilde{l}_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial^2 W_{i1}}{\partial x_i \partial x_k} g_i^T g_k + \frac{1}{2\tilde{l}_{i-1}} \frac{\partial^2 W_{i1}}{\partial x_i \partial x_i} g_i^T g_i \\ &\leq \frac{1}{2\tilde{l}_{i-1}} \frac{(\rho-\tau_i-r_i)}{\sigma} \sum_{j,k=1}^i \frac{-\partial^2 x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_j \partial x_k} g_j^T g_k \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{\sigma/r_i} - x_i^{*\sigma/r_i})^{(\rho-\tau_i-r_i-\sigma)/\sigma} ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \frac{(\rho-\tau_i-r_i)(\rho-\tau_i-r_i-\sigma)}{\sigma^2} \sum_{j,k=1}^i \frac{\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_j} \frac{\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_k} g_j^T g_k \\ &\quad \times \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{\sigma/r_i} - x_i^{*\sigma/r_i})^{(\rho-\tau_i-r_i-2\sigma)/\sigma} ds + \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \frac{(\rho-\tau_i-r_i)}{2\sigma} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial x_k} \\ &\quad \times \xi_i^{(\rho-\tau_i-r_i-\sigma)/\sigma} g_i^T g_k + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \frac{(\rho-\tau_i-r_i)}{\sigma} \frac{\partial x_i^{\sigma/r_i}}{\partial x_i} \xi_i^{(\rho-\tau_i-r_i-\sigma)/\sigma} g_i^T g_i \\ &\leq \Theta \xi_i^{\rho/\sigma} \delta_{i3} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\tilde{l}_{jd}} \xi_{jd}^{\rho/\sigma} \rho_{ij3d} + \xi_{id}^{\rho/\sigma} \sigma_{i3d} + C_{i13} \end{aligned} \quad (4-40)$$

其中, $C_{il_l}(y_{rd})$ 有界, 且满足 $C_{il_l}(0)=0$ 。

类似于式(4-38)-(4-40)的放缩方法, 利用(4-35), 存在适当的正光滑函数 $\delta_{i4}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$, $\sigma_{i4}(\bar{x}_{id}, \bar{l}_{i-2,d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$ 和正光滑函数 $\rho_{i14d}(x_{1d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$, \dots , $\rho_{i,i-1,4d}(\bar{x}_{i-1,d}, \bar{l}_{i-2,d}, \hat{\Theta}_d, y_{rd})$, 及满足条件 $C_{i14}(0)=0$ 的可任意小的有界函数 $C_{i14}(y_{rd})$, 使得以下不等式成立

$$T_{i4} + T_{i5} + T_{i6} \leq \Theta \xi_i^{\rho/\sigma} \delta_{i4} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{l_{jd}} \xi_{jd}^{\rho/\sigma} \rho_{ij4d} + \xi_{id}^{\rho/\sigma} \sigma_{i4d} + C_{i14} \quad (4-41)$$

通过(4-38)-(4-41), 可以证得命题 4.1。

命题 4.2 对于 $i=2, 3, \dots, n$, 存在适当的正光滑函数 $h_{i1}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$, 使得

$$\frac{1}{\bar{l}_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial W_{i1}}{\partial l_j} j_j + \frac{1}{\bar{l}_i} \sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial W_{i2}}{\partial l_j} j_j \leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{i-2} \xi_j^{\rho/\sigma} + \xi_i^{\rho/\sigma} h_{i1}(\cdot).$$

证明: 首先通过数学归纳的方法, 求取 $\frac{\partial x_{i+1}^{*\sigma/r_{i+1}}}{\partial l_j}$ 的上界。

第 1 步, 存在正光滑函数 $\Psi_{312}(\bar{x}_2, l_1, y_r, \hat{\Theta})$ 使得

$$\frac{\partial x_3^{*\sigma/r_3}}{\partial l_1} = -\xi_2 \frac{\partial \left(l_1 \beta_2(\bar{x}_2, y_r, \hat{\Theta}) \right)^{\sigma/(r_3 p_2)}}{\partial l_1} \leq |\xi_2| \Psi_{312}(\bar{x}_2, l_1, y_r, \hat{\Theta}) \quad (4-42)$$

第 $i-1$ 步, 假定对于 $j=1, 2, \dots, i-2$, 存在正的光滑函数 $\Psi_{ijk}(\bar{x}_{i-1}, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta})$,

使得以下不等式成立

$$\frac{\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial l_j} \leq \sum_{k=j+1}^{i-1} |\xi_k| \Psi_{ijk}(\bar{x}_{i-1}, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta}) \quad (4-43)$$

则, 对于 $j=1, 2, \dots, i-1$, 有以下不等式成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{i+1}^{*\sigma/r_{i+1}}}{\partial l_j} &= -\xi_i \frac{\partial \left(\bar{l}_{i-1} \beta_i(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, y_r, \hat{\Theta}) \right)^{\frac{\sigma}{r_{i+1} p_i}}}{\partial l_j} + \frac{\partial x_i^{*\sigma/r_i}}{\partial l_j} \left(\bar{l}_{i-1} \beta_i(\cdot) \right)^{\frac{\sigma}{r_{i+1} p_i}} \\ &\leq \sum_{k=j+1}^i |\xi_k| \Psi_{i+1,jk}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-1}, y_r, \hat{\Theta}) \end{aligned} \quad (4-44)$$

基于式(4-29), (4-44), 类似于命题 4.1 的证明, 可以很容易得到命题 4.2 的结果, 故省略。证明完毕。

命题 4.3 对于 $i = 2, 3, \dots, n$, 存在适当正光滑函数 $h_{i2}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$ 和满足条件 $C_{i2}(0) = 0$ 的可任意小的有界函数 $C_{i2}(\dot{y}_{rd})$, 使得以下不等式成立

$$\frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \left(\frac{\partial W_{i1}}{\partial y_r} \dot{y}_r \right) + \frac{1}{\tilde{l}_i} \left(\frac{\partial W_{i2}}{\partial y_r} \dot{y}_r \right) \leq \xi_i^{\rho/\sigma} h_{i2}(\cdot) + C_{i2}.$$

证明: 此命题证明较为直接, 故略去。

命题 4.4 对于 $i = 2, 3, \dots, n$, 存在适当正光滑函数 $h_{i3}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$, 使得以下不等式成立

$$\begin{aligned} & \frac{\rho - \tau_{i-1}}{\sigma} \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_{i-1}^{\frac{\rho - \tau_{i-1} - \sigma}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{r_{i-1}} x_{i-1}^{\frac{\sigma - r_{i-1}}{r_{i-1}}} \right) (x_i^{p_{i-1}} - x_i^{*p_{i-1}}) \\ & + \frac{1}{\tilde{l}_{i-2}} \xi_{i-1}^{\frac{\rho - \tau_{i-1} - r_{i-1}}{\sigma}} (x_i^{p_{i-1}} - x_i^{*p_{i-1}}) \leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{\rho/\sigma} + \xi_i^{\rho/\sigma} h_{i3}(\cdot). \end{aligned}$$

证明: 通过(4-23), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\rho - \tau_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1} \sigma} \xi_{i-1}^{(\rho - \tau_{i-1} - \sigma)/\sigma} \left(\frac{\sigma}{r_{i-1}} x_{i-1}^{(\sigma - r_{i-1})/r_{i-1}} \right) \\ & \times (x_i^{p_{i-1}} - x_i^{*p_{i-1}}) + \frac{1}{\tilde{l}_{i-2}} \xi_{i-1}^{\frac{\rho - \tau_{i-1} - r_{i-1}}{\sigma}} (x_i^{p_{i-1}} - x_i^{*p_{i-1}}) \\ & = \left(\xi_{i-1} - \xi_{i-2} \left(\tilde{l}_{i-3} \beta_{i-2}(\bar{x}_{i-2}, \bar{l}_{i-4}, y_r, \hat{\Theta}) \right)^{\frac{\sigma}{r_{i-1} p_{i-2}}} \right)^{\frac{\sigma - r_{i-1}}{\sigma}} \\ & \times \frac{\rho - \tau_{i-1}}{r_{i-1}} \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_{i-1}^{\frac{\rho - \tau_{i-1} - r_{i-1}}{\sigma}} \left(\left(x_i^{\sigma/r_i} \right)^{\frac{r_i p_{i-1}}{\sigma}} - \left(x_i^{*\sigma/r_i} \right)^{\frac{r_i p_{i-1}}{\sigma}} \right) + \xi_{i-1}^{\frac{\rho - \tau_{i-1} - r_{i-1}}{\sigma}} \\ & \times \frac{1}{\tilde{l}_{i-2}} \left(\left(x_i^{\sigma/r_i} \right)^{(r_i p_{i-1})/\sigma} - \left(x_i^{*\sigma/r_i} \right)^{(r_i p_{i-1})/\sigma} \right) \end{aligned} \quad (4-45)$$

如果 $(r_i p_{i-1})/\sigma \geq 1$, 基于引理 2.4 和引理 4.2, 可证得命题 4.4。如果 $(r_i p_{i-1})/\sigma < 1$, 基于引理 2.1 和引理 2.4, 可证得命题 4.4。综上, 命题 4.4 成立。证明完毕。

命题 4.5 对于 $i = 2, 3, \dots, n$, 存在适当正光滑函数 $h_{i4}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$, 使得以下不等式成立

$$-\Phi_i \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{\frac{\rho}{\sigma}} \delta_j(\cdot) - \xi_i^{\frac{\rho}{\sigma}} \delta_i(\cdot) \sum_{j=2}^{i-1} \Phi_j \leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^{\frac{\rho}{\sigma}} + \xi_i^{\frac{\rho}{\sigma}} h_{i4}(\cdot)$$

其中, $\Phi_i(\cdot) = -\frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \frac{\partial W_{i1}}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}} - \frac{1}{\tilde{l}_i} \frac{\partial W_{i2}}{\partial \hat{\Theta}} \dot{\hat{\Theta}}$.

证明: 此命题证明较为直接, 故略去。

命题 4.6 对于 $i = 2, 3, \dots, n$, 存在适当正光滑函数 $h_{i5}(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r)$ 和正常数 a, b , 使得以下不等式成立

$$\bar{\tau} \Phi_i(\cdot) \hat{\Theta} \leq \bar{\tau} \xi_i^{\rho/\sigma} h_{i5}(\cdot) + \bar{\tau} b + \bar{\tau} a \hat{\Theta}^2$$

证明: 此命题证明较为直接, 故略去。

选取 Lyapunov 泛函, 如下

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i = & \int_{t-d}^t e^{-\frac{t-s-d}{d}} \left\{ \xi_i^{\rho/\sigma}(s) \sigma_i(\bar{x}_i(s)) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{-1}(s) \xi_j^{\rho/\sigma}(s) \rho_{ij}(\bar{x}_j(s), \bar{l}_{j-1}(s), \hat{\Theta}(s), y_r(s)) \right\} ds. \end{aligned} \quad (4-46)$$

利用(4-26)-(4-46), 及命题 4.1-4.5, 以及以下不等式

$$-\frac{1}{(\tilde{l}_{i-1})^2} \frac{d(\tilde{l}_{i-1})}{dt} W_{i1} - \frac{1}{(\tilde{l}_i)^2} \frac{d(\tilde{l}_i)}{dt} W_{i2} \leq \xi_i^{\frac{\rho}{\sigma}} - \frac{1}{l_i} \xi_i^{\frac{\rho}{\sigma}} \rho_i(\cdot)$$

可以得到, 有以下不等式成立

$$\begin{aligned} & \ell \left(V_0 + \sum_{j=1}^i (V_j + \tilde{V}_j) \right) \\ & \leq -\sum_{j=1}^{i-1} (a_j - i + j + 1) \xi_j^{\rho/\sigma} - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^i \tilde{V}_j - \sum_{j=1}^i \frac{1}{l_j} \xi_j^{\rho/\sigma} \left(\rho_j(\cdot) - e \sum_{k=j+1}^i \rho_{kj}(\cdot) \right) \\ & + \left(\tilde{\Theta} + \sum_{j=2}^i \Phi_j(\cdot) \right) \left(\sum_{j=1}^i \xi_j^{\rho/\sigma} \delta_j(\cdot) - \dot{\hat{\Theta}} - \bar{\tau} \hat{\Theta} \right) + \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_i^{\frac{\rho-\tau_i-r_i}{\sigma}} x_{i+1}^{p_i} \\ & + \xi_i^{\rho/\sigma} \left(\hat{\Theta} \delta_i(\cdot) + e \sigma_i(\cdot) + h_i(\cdot) \right) + \frac{\rho - \tau_i}{r_i} \frac{1}{\tilde{l}_i} \xi_i^{(\rho-\tau_i-\sigma)/\sigma} x_i^{(\sigma-r_i)/r_i} x_{i+1}^{p_i} \\ & + \sum_{j=1}^i \xi_j^{\rho/\sigma} + \bar{\tau} \hat{\Theta} + (i-1) a \bar{\tau} \hat{\Theta}^2 + (i-1) \bar{\tau} b + \sum_{j=1}^i C_j \end{aligned} \quad (4-47)$$

其中, $h_i(\bar{x}_i, \bar{l}_{i-2}, \hat{\Theta}, y_r) = \sum_{j=1}^i h_{ij}(\cdot) + \bar{\tau} h_{i5}(\cdot)$, $C_i = C_{i1} + C_{i2}$ 。

设计 $\beta_i(\cdot)$ 如下

$$\beta_i(\cdot) = \sqrt{1 + \hat{\Theta}^2} \delta_i(\cdot) + e \sigma_i(\cdot) + h_i(\cdot) + 1 + a_i \quad (4-48)$$

其中, $a_i > 0$ 是一个待设计的常数。由于以下不等式成立

$$\frac{\rho - \tau_i}{r_i} \frac{1}{\tilde{l}_i} \xi_i^{(\rho - \tau_i - \sigma)/\sigma} x_i^{(\sigma - r_i)/r_i} x_{i+1}^{*p_i} \leq 0 \quad (4-49)$$

进一步, 可得

$$\begin{aligned} & \ell \left(V_0 + \sum_{j=1}^i (V_j + \tilde{V}_j) \right) \\ & \leq - \sum_{j=1}^i (a_j - i + j) \xi_j^{\rho/\sigma} - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^i \tilde{V}_j - \sum_{j=1}^i \frac{1}{l_j} \xi_j^{\rho/\sigma} \left(\rho_j(\cdot) - \sum_{k=j+1}^i e \rho_{kj}(\cdot) \right) \\ & + \left(\tilde{\Theta} + \sum_{j=2}^i \Phi_j(\cdot) \right) \left(\sum_{j=1}^i \xi_j^{\rho/\sigma} \delta_j(\cdot) - \dot{\hat{\Theta}} - \bar{\tau} \hat{\Theta} \right) + \frac{\rho - \tau_i}{r_i} \frac{1}{\tilde{l}_i} \xi_i^{(\rho - \tau_i - \sigma)/\sigma} \\ & \times x_i^{(\sigma - r_i)/r_i} (x_{i+1}^{p_i} - x_{i+1}^{*p_i}) + \frac{1}{\tilde{l}_{i-1}} \xi_i^{(\rho - \tau_i - r_i)/\sigma} (x_{i+1}^{p_i} - x_{i+1}^{*p_i}) \\ & + \bar{\tau} \hat{\Theta} + (i-1) a \bar{\tau} \hat{\Theta}^2 + (i-1) \bar{\tau} b + \sum_{j=1}^i C_j \end{aligned} \quad (4-50)$$

第 n 步: 在这一步中, 选取 Lyapunov 函数 V_n 如下

$$V_n = \frac{1}{\tilde{l}_{n-1}} W_{n1} \quad (4-51)$$

其中, $W_{n1} = \int_{x_n^*}^{x_n} (s^{\sigma/r_n} - x_n^{*\sigma/r_n})^{(\rho - \tau_n - r_n)/\sigma} ds$ 。选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n = \int_{t-d}^t e^{-\frac{t-s-d}{d}} & \left\{ \xi_n^{\rho/\sigma}(s) \sigma_n(\bar{x}_n(s)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j(s)} \xi_j^{\rho/\sigma}(s) \right. \\ & \times \rho_{nj}(\bar{x}_j(s), \bar{l}_{j-1}(s), \hat{\Theta}(s), y_r(s)) \left. \right\} ds \end{aligned} \quad (4-52)$$

与递归设计过程相同, 设计如下控制器

$$u = -\xi_n^{r_{n+1}p_n/\sigma} \tilde{l}_{n-1} \beta_n(\cdot) \quad (4-53)$$

其中, $\beta_n(\bar{x}_n, \bar{l}_{n-2}, y_r, \hat{\Theta}) = \sqrt{1 + \hat{\Theta}^2} \delta_n(\cdot) + e\sigma_n(\cdot) + h_n(\cdot) + a_n$ 。设计自适应律如下

$$\dot{\hat{\Theta}} = \sum_{j=1}^n \xi_j^{\rho/\sigma} \delta_j(\cdot) - \hat{\Theta} \bar{\tau} \quad (4-54)$$

设计正的光滑函数 ρ_j 和参数 a_j 及参数 a 如下: $\rho_j(\cdot) = \sum_{k=j+1}^n e\rho_{kj}(\cdot)$, $j=1,2,\dots,n-1$; $a_j = (n-j) + a_0$, $j=1,2,\dots,n$; $a = 1/8(n-1)$, 其中 a_0 为可设计的正常数。则有以下不等式成立,

$$\begin{aligned} & \ell \left(V_0 + \sum_{j=1}^n (V_j + \tilde{V}_j) \right) \\ & \leq -a_0 \sum_{j=1}^n \xi_j^{\frac{\rho}{\sigma}} - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n \tilde{V}_j + \bar{\tau} \tilde{\Theta} (\Theta - \tilde{\Theta}) + \frac{\bar{\tau}}{8} (\Theta - \tilde{\Theta})^2 + (n-1) \bar{\tau} b + \sum_{j=1}^n C_j \quad (4-55) \\ & \leq -a_0 \sum_{j=1}^n \xi_j^{\rho/\sigma} - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n \tilde{V}_j - \frac{1}{4} \tilde{\Theta}^2 \bar{\tau} + \frac{3}{4} \bar{\tau} \Theta^2 + (n-1) \bar{\tau} b + \sum_{j=1}^n C_j \end{aligned}$$

由于 $3(\xi_j^{\rho/\sigma} + 1) \geq 3\xi_j^{(\rho-\tau_j)/\sigma} \geq V_i$, 可得

$$\ell V = \ell \sum_{j=0}^n (V_j + \tilde{V}_j) \leq -\alpha V + C \quad (4-56)$$

其中, $\alpha = \min \left\{ \frac{1}{3} a_0, \frac{1}{d}, \frac{1}{2} \bar{\tau} \right\}$, $C = na_0 + \frac{3}{4} \bar{\tau} \Theta^2 + (n-1) \bar{\tau} b + \sum_{j=1}^n C_j$ 。

定理 4.3 对于满足假设 4.1-4.2 的时滞随机非线性系统(4-1), 设计动态增益(4-16), (4-26), (4-29), 及自适应律(4-54)和状态反馈控制器(4-53), 可得如下结论:

- (1) 闭环系统(4-1), 对于任意的初始值 $\{X(s) : -d \leq s \leq 0\} = X \in C_{\mathcal{F}_0}^b([-d, 0]; R^{2n})$, $X(s) := (x(s), \bar{l}_{n-1}(s), \hat{\Theta}(s))$, 在 $[-d, \infty)$ 上存在唯一解;
- (2) 输出跟踪误差 $\xi_1^{(\rho-\tau_1)/\sigma}$ 的期望是有界的, 且其它状态变量在概率上有界;
- (3) 若参考信号 $y_r(t) = 0$, 且设计 $\bar{\tau} = 0$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ a.s.。

证明: (1) 首先, 由于 $r_{n+1}p_n = r_n + \tau_n \geq \sigma$ 成立, $\tau_i/\sigma = 0$ 或者 $\tau_i/\sigma > 1$ 成立, 且 y_r 有界, 因此, 设计的控制器 u^{p_n} 以及动态增益(4-16), (4-26), (4-29)和自适应律(4-54)在 X 满足局部 Lipschitz 条件, 且关于 t 一致有界。其次, 由于参考信号 y_r 有界, 因此,

如果范数 $\left\| \bar{x}_n, \hat{\Theta} \right\|$ 有界, 则 \bar{l}_{n-1} 有界。然后, 为了证明所构造的 Lyapunov 函数 V 满足条件(4-10), 考虑以下 $n+1$ 种情形。

情形 1, 如果 $\hat{\Theta}$ 无界, 显然 V_0 无界;

情形 2, 如果 $\hat{\Theta}$ 有界, x_1 无界, 显然 W_{11} 无界;

情形 3, 如果 $\left\| \hat{\Theta}, x_1 \right\|$ 有界, x_2 无界, 则 l_1 有界, 显然, 可得 W_{21} 无界;

.....

情形 $n+1$, 如果 $\left\| \hat{\Theta}, \bar{x}_{n-1} \right\|$ 有界, x_n 无界, 则 l_{n-1} 有界, 显然, 可得 W_{n1} 无界。

因此, 所构造的 Lyapunov 函数 V 满足条件(4-10), 即

$$\lim_{\left\| \hat{\Theta}, \bar{x}_n \right\| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq \infty} V(t, l, x, x_t) = \infty \quad (4-57)$$

结合定理 4.1 和(4-56), 可证得结论“(1)”。

(2) 由(4-56), 可得

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha t} V] &= V(0) + E \int_0^t \ell(e^{\alpha s} V(s)) ds \\ &= V(0) + E \int_0^t (e^{\alpha s} \ell V(s)) ds + \alpha E \int_0^t (e^{\alpha s} V(s)) ds \\ &\leq V(0) + E \int_0^t e^{\alpha s} C ds \leq V(0)_0 + \frac{C}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \end{aligned} \quad (4-58)$$

其中, $V(0)$ 是 Lyapunov 函数的初始值。进一步可得

$$EV \leq e^{-\alpha t} V(0) + \frac{C}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (4-59)$$

继而可得

$$P(|\bar{X}| > r) \inf_{|\bar{X}| > r} V(\bar{X}) \leq e^{-\alpha t} V_0 + \frac{C}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (4-60)$$

其中 $\bar{X} = [\xi_1, x_2, \dots, x_n, \bar{l}_{n-1}, \hat{\Theta}]^T$ 。进一步可得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t < \infty} P(|\bar{X}| > r) = 0 \quad (4-61)$$

基于(4-59)和(4-61), 可证得结论“(2)”。

(3) 如果参考信号 $y_r(t) = 0$ ，且设计 $\bar{\tau} = 0$ ，(4-55)可变换为如下形式

$$\ell \sum_{j=1}^n (V_j + \tilde{V}_j) \leq -a_0 \sum_{j=1}^n \xi_j^{\rho/\sigma} - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n \tilde{V}_j \quad (4-62)$$

基于定理 4.2，可得结论“(3)”。证明完毕。

4.4 仿真验证

本节以数值算例说明所提出的理论方法的有效性，考虑如下时滞随机系统

$$\begin{cases} dx_1 = x_2^{7/3} dt + 0.3x_{1d}^{5/3} dw \\ dx_2 = u dt + 0.3\theta x_{2d} dt \end{cases} \quad (4-63)$$

其中，未知参数 $\theta = 1$ ， $d = 0.4$ ，即， $x_{1d} = x_1(t - 0.4)$ 和 $x_{2d} = x_2(t - 0.4)$ 。在这个算例仿真中，对于假设 4.1，相应的参数依次选取为 $r_1 = r_2 = 1$ ， $\tau_1 = 4/3$ ， $\tau_2 = 0$ ， $\sigma = 1$ ， $\rho = 4$ 。通过以下两步，设计系统控制器。

第 1 步，定义 $\xi_1 = x_1 - y_r$ ，且构造 $V_0 = \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^2$ ， $V_1 = W_{11} + \frac{1}{l_1}W_{12}$ ，其中

$$W_{11} = \int_0^{x_1 - y_r} s^{5/3} ds, W_{12} = \xi_1^{8/3},$$

$$l_1(t) = \max\{\xi_1^{4/3}(-l_1^2 + l_1\rho_1(\cdot)), 0\}, l_1(0) = 1.$$

基于本章提出的设计方法，可得

$$\ell(V_0 + V_1) = \left(1 + \frac{8}{3l_1}\right) \xi_1^{5/3} (x_2^{7/3} - \dot{y}_r) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \frac{40}{9}\right) \xi_1^{2/3} (0.3x_{1d}^{5/3})^2$$

由(4-19)和(4-20)，可得

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{8}{3l_1}\right) \xi_1^{5/3} \dot{y}_r &\leq \varrho \frac{11}{3} \frac{5}{12} \xi_1^4 + \varrho^{-5/7} \frac{11}{3} \frac{7}{12} \dot{y}_r^{12/7} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \frac{40}{9}\right) \xi_1^{2/3} (0.3x_{1d}^{5/3})^2 &\leq \frac{55}{18} 2^{7/3} * 0.3^2 \left(\varrho \frac{\xi_1^4}{6} + \frac{\xi_1^4}{6} + \frac{5}{6} \xi_{1d}^4 + \varrho^{\frac{-1}{5}} \frac{5}{6} y_{rd}^4 \right) \end{aligned}$$

其中， $\varrho > 0$ 为设计参数。

设计 $x_2^{*7/3} = -\xi_1^{7/3} \beta_1(\cdot)$ ， $\beta_1(\cdot) = \varrho \frac{11}{3} \frac{5}{12} + \frac{55}{18} * 2^{7/3} * 0.3^2 \left(\varrho \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + e \frac{5}{6} \right) + 1 + a_1$ 。然后，

选取 $\tilde{V}_1 = \int_{t-d}^t e^{-\frac{t-s-d}{d}} \frac{55}{18} * 2^{7/3} * 0.3^2 \frac{5}{6} \xi_1^4(s) ds$ ，可得

$$\begin{aligned} &\ell(V_0 + V_1 + \tilde{V}_1) \\ &\leq -a_1 \xi_1^4 - \frac{1}{d} \tilde{V}_1 + \tilde{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}} + \left(1 + \frac{8}{3l_1}\right) \xi_1^{5/3} (x_2^{7/3} - x_2^{*7/3}) - \frac{1}{l_1} \xi_1^4 \rho_1(\cdot) + C_1 \end{aligned} \quad (4-64)$$

其中, $C_1 = \varrho^{-5/7} \frac{11}{3} \frac{7}{12} \dot{y}_r^{12/7} + \frac{55}{18} * 2^{7/3} * 0.3^2 \varrho^{-1/5} \frac{5}{6} y_{rd}^4$ 。

第2步, 选取 $V_2 = \frac{1}{l_1} \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*)^3 ds$, 可得

$$\begin{aligned} \ell V_2 &= \frac{\xi_2^3}{l_1} (u + 0.3\theta x_{2d}) + \frac{3x_2^{7/3}}{l_1} \frac{-\partial x_2^*}{\partial x_1} \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*)^2 ds \\ &\quad + \frac{3}{l_1} \frac{-\partial x_2^*}{\partial y_r} \dot{y}_r \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*)^2 ds + \frac{3}{l_1} \left(\frac{-\partial x_2^*}{\partial x_1} \right)^2 (0.3x_{1d}^{5/3})^2 \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*) ds \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{8}{3l_1} \right) \xi_1^{5/3} (x_2^{7/3} - x_2^{*7/3}) &\leq \frac{11}{3} 5.3 \left\{ \frac{5}{12} \xi_1^4 \varrho_1 + \frac{7}{12} \xi_2^4 \varrho_1^{-5/7} + \frac{3}{4} \xi_1^4 \varrho_1 + \frac{1}{4} \xi_2^4 \beta_1^{16/7} \varrho_1^{-3} \right\} \\ \frac{1}{l_1} \xi_2^3 0.3\theta x_{2d} &\leq \frac{3}{5} * \frac{3}{4} * \theta^{4/3} \xi_2^4 + \frac{3}{40} \xi_{2d}^4 + \frac{3}{40l_{1d}} \xi_{1d}^4 \beta_{1d}^{12/7} \\ \frac{3}{l_1} \frac{-\partial x_2^*}{\partial x_1} \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*)^2 ds * x_2^{7/3} &\leq 3 * 2^{4/3} \xi_2^4 \xi_2^{4/3} + 2^{4/3} * \frac{5}{4} \xi_2^4 \xi_2^{16/5} \beta_1^{12/5} + 2^{4/3} * \frac{7}{4} \xi_1^4 \\ 3 \frac{1}{l_1} \frac{-\partial x_2^*}{\partial y_r} \dot{y}_r \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*)^2 ds &\leq \varrho \frac{9}{4} \xi_2^4 + \varrho^{-3} \frac{3}{4} \dot{y}_r^4 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} &3 \frac{1}{l_1} \left(\frac{-\partial x_2^*}{\partial x_1} \right)^2 \int_{x_2^*}^{x_2} (s - x_2^*) ds (0.3x_{1d}^{5/3})^2 \\ &\leq 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \xi_2^4 * \xi_2^8 * \frac{1}{6} (1 + \varrho) + \frac{1}{l_{1d}} 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \frac{5}{6} \xi_{1d}^4 \\ &\quad + \varrho^{-1/5} 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \frac{5}{6} y_{rd}^4 \end{aligned}$$

其中, $\varrho_1 > 0$ 为设计参数, 定义 $\Theta = \theta^{4/3}$ 。

设计 $u = -l_1 \xi_2 \beta_2(\cdot)$, 其中

$$\begin{aligned} \beta_2(\cdot) &= \frac{11}{3} * 5.3 * \frac{7}{12} \varrho_1^{-5/7} + \frac{11}{3} * 5.3 * 0.25 \beta_1^{16/7} \varrho_1^{-3} \\ &\quad + 0.6 * 0.75 * \sqrt{1 + \hat{\Theta}^2} + 0.075e + 3 * 2^{4/3} \xi_2^{4/3} \\ &\quad + 3 * 2^{4/3} * \frac{5}{12} \xi_2^{16/5} \beta_1^{12/5} + \varrho \frac{9}{4} + 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \xi_2^8 * \frac{1}{6} (1 + \varrho) + 1 \end{aligned}$$

设计以下参数及自适应律

$$\rho_1(\cdot) = e 0.075 \beta_1^{12/7} + 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \frac{5}{6}$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = 0.6 * 0.75 \xi_2^4 - \bar{\tau} \hat{\Theta}$$

$$a_1 = 1 + \frac{11}{3} * 5.3 \left(\frac{5}{12} \varrho_1 + 0.75 \varrho_1 \right) + 3 * 2^{4/3} * \frac{7}{12}$$

选取以下 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 = & \int_{t-d}^t e^{-\frac{t-s-d}{d}} \left(\frac{3}{40} \xi_2^4(s) + \frac{1}{l_1(s)} \frac{3}{40} \xi_1^4(s) \right. \\ & \left. \times \beta_1^{\frac{12}{7}}(s) + \frac{1}{l_1(s)} 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \frac{5}{6} \xi_1^4(s) \right) ds \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & \ell(V_0 + V_1 + \tilde{V}_1 + V_2 + \tilde{V}_2) \\ & \leq -\xi_1^4 - \xi_2^4 - \frac{1}{d} \tilde{V}_1 - \tau \tilde{V}_2 + \bar{\tau} \hat{\Theta} + C_1 + C_2 \end{aligned}$$

其中, $C_2 = \varrho^{-3} \frac{3}{4} \dot{y}_r^4 + \varrho^{-1/5} 3 * 0.3^2 * 2^{7/3} * \frac{5}{6} y_{rd}^4$ 。

选取系统状态初值, 如下, $x_1(s) = 2.5$, $x_2(s) = -0.9$, $s \in [-4, 0]$, $\hat{\Theta}(0) = 0.7$ 。设计控制参数 $\varrho = 4$, $\varrho_1 = 0.4$ 。考虑如下两种情形: 情形 1, $y_r = 3 \sin 3t$, $\bar{\tau} = 1$; 情形 2, $y_r = 0$, $\bar{\tau} = 0$ 。仿真结果如图 4-1 至图 4-6。在情形 1 中, 由图 4-1 可以看出, 系统输出可以跟踪上参考信号。在情形 2 中, 由图 4-4 可以看出, 系统状态收敛至平衡点。

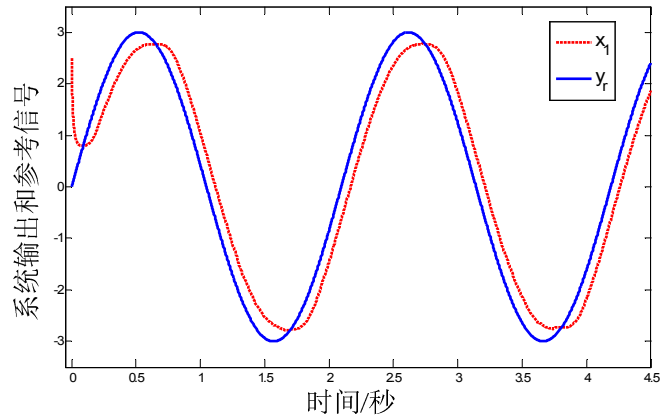


图 4-1 情形 1 中, 系统输出响应曲线

Fig. 4-1 The response of output of case 1

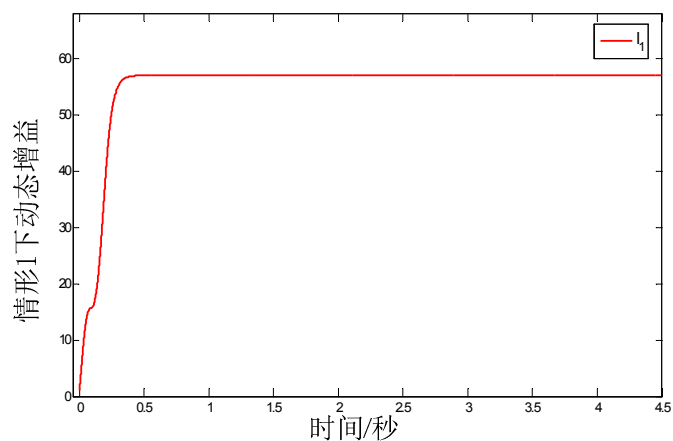


图 4-2 情形 1 中，动态增益 l_1 响应曲线

Fig. 4-2 The response of the dynamic gain l_1 in case 1

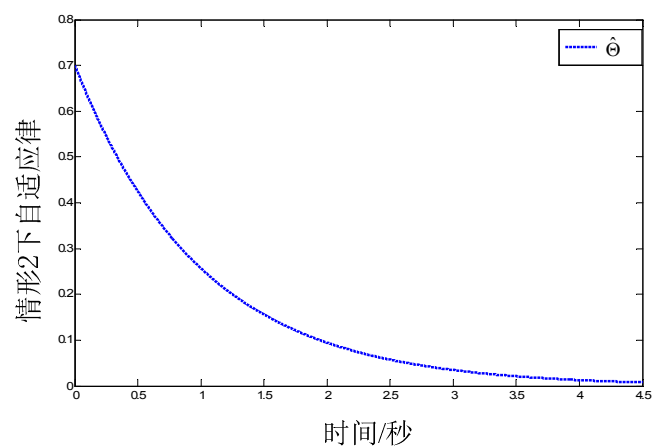


图 4-3 情形 1 中，系统自适应律 $\hat{\Theta}$ 的响应曲线

Fig. 4-3 The response of the estimator $\hat{\Theta}$ in case 1

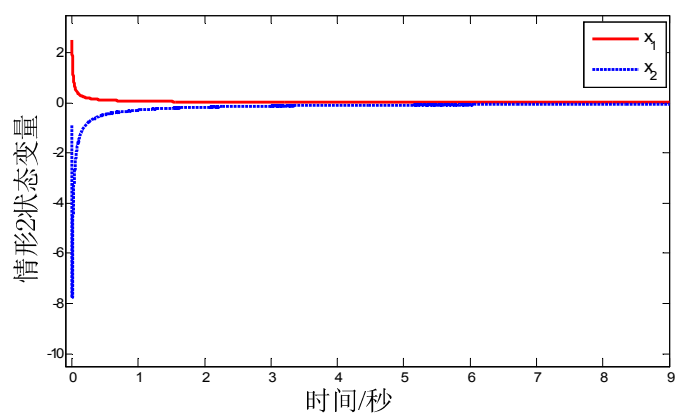
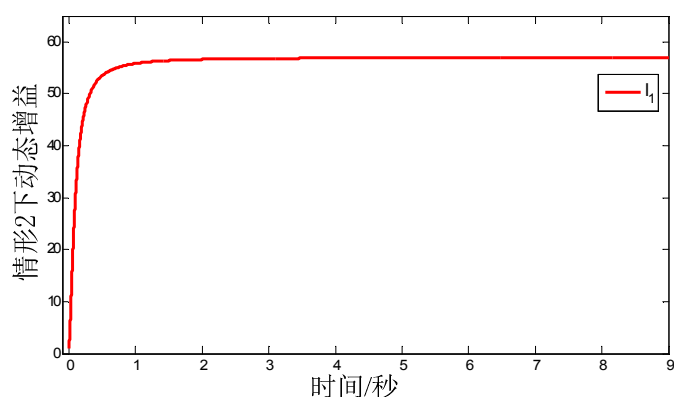
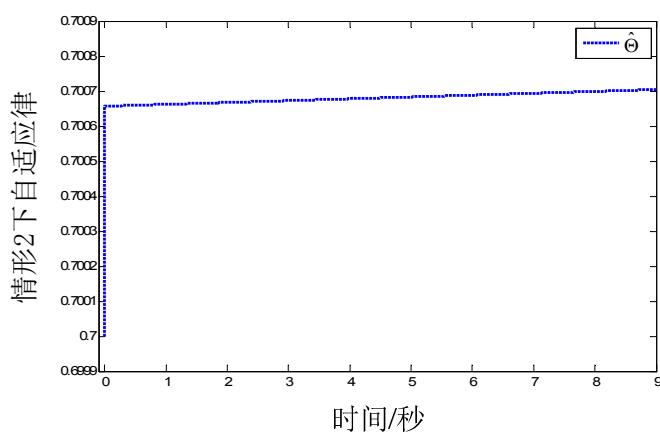


图 4-4 情形 2 中，系统状态响应曲线

Fig. 4-4 The response of state variables of case 2

图 4-5 情形 2 中，动态增益 l_1 响应曲线Fig. 4-5 The response of the dynamic gain l_1 in case 2图 4-6 情形 2 中，系统自适应律 $\hat{\Theta}$ 的响应曲线Fig. 4-6 The response of the estimator $\hat{\Theta}$ in case 2

4.5 本章小结

本章利用动态增益的方法，采用递归设计策略，研究了一类 p 型时滞不确定随机系统的自适应跟踪控制器设计问题，并给出了三个相关定理。其中，定理 4.1 用于证明系统解的存在性和唯一性。定理 4.2 用于证明系统稳定性。定理 4.3 表明，所构造的控制器可以解决系统(4-1)的自适应追踪问题。本章中所给出的结果同样适用于严格反馈系统及确定性系统。

第5章 下三角高阶非线性多智能体系统分布式包络控制

本文在第2, 3, 4章中, 分别研究了单个下三角系统的镇定问题、追踪问题。第2章中, 所研究系统模型虽为关联系统, 但并不涉及系统间协作问题。本章将进一步引入图论知识, 研究多个系统间的分布式控制问题, 即多智能体分布式控制。其中, 单个智能体为下三角结构, 且状态不可测。通过分别构造每个智能体观测器, 采用递归设计方法, 最终给出多智能体系统的输出反馈分布式控制器设计方法。

5.1 引言

随着通信技术及计算机技术的发展, 人们越来越意识到多个智能体系统的协作能以更小的代价完成更复杂的任务, 并使得系统具有更大的容错性、安全性、鲁棒性^[16,17,110]。另外, 相比集中控制, 分布式方法更为灵活、操作方便。因此, 在过去的十多年中, 多智能体系统的分布式控制受到了诸多学者的关注。多智能体系统分布式协作控制的一个显著特点是, 单个智能体只需要利用邻接智能体的信息, 便可以达到一定的控制目标, 进而协作完成一个共同的任务。

一般地, 根据是否有领导者, 以及领导者的个数, 多智能体系统的控制问题可以划分为: 无领导者的一致性控制问题、领导跟随一致性控制问题、多领导者包络控制问题。无领导者情形下, 多智能体的一致性控制目的是, 设计控制器使得多智能体的状态最终趋于一致^[111]。对于领导跟随问题, 通常假定, 多智能体系统以领导者作为根节点存在一个有向生成树, 即所有的跟随者能够通过一个有向路径得到领导者的状态信息^[48,52,54,112-116]。在文献[48,113]中分别研究了二阶积分多智能体系统及线性多智能体系统的领导跟随控制问题。文献[54]利用动态增益的方法, 研究了时变多智能体系统的全状态一致性问题。文献[52]进一步研究了随机多智能体系统的领导跟随问题。

而对于多领导者情形下, 多智能体系统的包络控制目的是, 使得所有的跟随者最终收敛到由领导者构成的凸包内^[117-120], 此情形下的控制问题更具一般性。文献[117]给出了多静态和多动态领导者下, 网络化多智能体的包络控制策略, 并给出了相应的必要条件和充分条件。文献[118]研究了固定有向网络及切换有向网络下, 单积分多智能体系统的包络控制问题。文献[49,120-121]分别研究了二阶积分多智能体

系统、高阶线性多智能体系统以及高阶非线性多智能体系统的包络控制。但文献[49]中的结果，只能保证系统半全局最终一致有界。

在本章，将进一步考虑高阶非线性多智能体系统的分布式控制问题。其中，每个智能体只有输出信息可测量，其它状态不可测。因此，首先构造智能体系统降阶动态增益观测器，一定程度上放松了现有文献中在构造观测器时的 Lipschitz 条件限制。然后，基于所构造的观测器，利用递归设计策略，构造系统输出反馈分布式控制器，使得跟随者进入领导者构成的凸包内，实现系统全局一致性稳定且收敛误差可任意小。

5.2 问题描述

5.2.1 图论

本章中采用图论描述多智能体系统间通信关系。考虑一个由 m 个领导者和 n 个跟随者构成的多智能体系统，用图 $G=(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$ 来表示通信拓扑，其中节点集合 $\mathcal{V}=\{\nu_k, k=1, 2, \dots, n+m\}$ ，边集合 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 。节点 l 的邻居集合为 $N_{kl}=\{l | (\nu_l, \nu_k) \in \mathcal{E}\}$ ， (ν_l, ν_k) 表示节点 ν_k 能收到节点 ν_l 的信息。邻接矩阵表示为 $A=[a_{kl}] \in R^{(n+m) \times (n+m)}$ 。对于 $k, l=1, 2, \dots, n+m$ ，如果 $(\nu_l, \nu_k) \in \mathcal{E}$ 则 $a_{kl} > 0$ ，否则 $a_{kl} = 0$ 。由于领导者没有邻接智能体，因此，对于 $k=n+1, \dots, n+m$ 和 $l=1, 2, \dots, n+m$ ，有 $a_{kl} = 0$ 。假定，对于任意的 $k=1, 2, \dots, n+m$ ，有 $a_{kk} = 0$ ，即无自环(no self-loop)。定义入度矩阵 $D = \text{diag}\{d_k\}$ ，其中 $d_k = \sum_{l \in N_k} a_{kl}$ 。定义 Laplacian 矩阵

$$\bar{L} = D - A = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 & \bar{L}_2 \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}$$

其中 $\bar{L}_1 \in R^{n \times n}$ ， $\bar{L}_2 \in R^{n \times m}$ 。 $\lambda_{\min}(Q)$ 和 $\lambda_{\max}(Q)$ 分别表示矩阵 Q 的最小特征值和最大特征值。凸包 $Co(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \mid x_i \in X, \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\}$ 。定义 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 。 $\text{sign}(x)$

表示取变量 x 的符号， $\text{sign}(0) = 0$ 。为了阅读简便，这里给出以下变量表示形式，其相关定义在本章正文中第一次出现时给出：

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{iqs} &= L_i^{-s+2-a_i} e_{iqs}; & \tilde{e}_{is} &= [\tilde{e}_{i1s}, \tilde{e}_{i2s}, \dots, \tilde{e}_{ips}]^T; & \tilde{E}_{iq} &= [\tilde{e}_{iq2}, \tilde{e}_{iq3}, \dots, \tilde{e}_{iqn_i}]^T; \\ \tilde{E}_i &= [\tilde{E}_{i1}^T, \tilde{E}_{i2}^T, \dots, \tilde{E}_{ip}^T]^T; & \hat{e}_{q1} &= [e_{1q1}, e_{2q1}, \dots, e_{nq1}]^T; & e_1 &= [e_{11}^T, e_{21}^T, \dots, e_{n1}^T]^T; \\ e_{is} &= [e_{i1s}, e_{i2s}, \dots, e_{ips}]^T = x_{is} - \hat{x}_{is}. \end{aligned}$$

5.2.2 多智能体系统模型

本章中, 考虑由 m 个领导者和 n 个跟随者构成的多智能体系统。其中, 跟随者的动态模型如下

$$\begin{cases} \dot{x}_{is} = x_{i(s+1)} + f_{is}(\bar{x}_{is}) \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (5-1)$$

其中, $i=1, \dots, n$, $s=1, \dots, n_i$, $x_{is} = [x_{i1s}, x_{i2s}, \dots, x_{ips}]^T \in R^p$ 和 $y_i = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}]^T \in R^p$ 分别表示第 i 个智能体的状态向量和输出向量。 $x_{i(n_i+1)} := u_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ip}]^T \in R^p$ 为智能体控制输入。 $\bar{x}_{is} = [x_{i1}^T, \dots, x_{is}^T]^T$ 。 $f_{is}(\bar{x}_{is}) = [f_{i1s}(\bar{x}_{is}), \dots, f_{ips}(\bar{x}_{is})]^T \in R^p$, 对于 $q=1, 2, \dots, p$, $f_{iqs}(\bar{x}_{is})$ 为光滑函数, 且满足 $f_{iqs}(0) = 0$ 。领导者的输出定义为 $y_{n+1}, \dots, y_{n+m} \in R^p$ 。

为了研究系统控制问题, 给出以下假设条件:

假设 5.1 对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq q \leq p$, 非线性函数 $f_{iqs}(\bar{x}_{is})$ 满足以下条件

$$|f_{iq1}(x_{i1})| \leq \bar{\eta}_i(y_i) \|x_{i1}\| \quad (5-2)$$

$$|\Delta_{iqs}| \leq \eta_i(y_i) \|\bar{x}_{is} - \hat{\bar{x}}_{is}\|, \quad 2 \leq s \leq n_i \quad (5-3)$$

其中, $\Delta_{iqs} = f_{iqs}(\bar{x}_{is}) - f_{iqs}(\hat{\bar{x}}_{is})$, $\bar{\eta}_i(y_i)$ 和 $\eta_i(y_i)$ 为已知正光滑函数。 $\hat{\bar{x}}_{is} = [x_{i1}^T, \dots, \hat{x}_{is}^T]^T$, $\hat{x}_{is} = [\hat{x}_{i1s}, \dots, \hat{x}_{ips}]^T \in R^p$ 。

假设 5.2 对于 $l = n+1, \dots, n+m$, m 个领导者的输出向量为 $y_l = [y_{l1}, \dots, y_{lp}]^T \in R^p$, 且他们的微分 $\dot{y}_{l1}, \dot{y}_{l2}, \dots, \dot{y}_{lp}$ 有界。

假设 5.3 图 G 是固定不变的, 由 n 个跟随者构成的图是无向的, 且对于任意一个跟随者至少存在一条有向路径能得到领导者信息。

本章目的是, 设计分布式输出反馈控制器, 使得跟随者的输出最终收敛到由领导者输出 $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}\}$ 生成的凸包内, 即 $\inf_{h(t) \in Y(t)} \|y_i - h(t)\| < \epsilon$, 其中 $i=1, 2, \dots, n$, $Y(t) = Co\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}\}$, ϵ 的界为可设计的任意小的正常数。

注释 5.1 假设 5.1 与文献[122]中假设条件类似, 但是本章中假设比文献[38]和[122]中条件更宽松。假设 5.2 与文献[49,52,115]中条件类似。假设 5.3 与文献[115,123]中条件类似, 另外此假设只是对通信拓扑的条件限制, 在本章的控制器设计中, 所设计的智能体控制器只需要邻接智能体输出信息。

5.3 分布式包络控制

5.3.1 基础性引理

为研究多智能体系统(5-1)的控制问题，先给出以下基础性引理。

引理 5.1^[124] 矩阵 $-\bar{L}_1^{-1}\bar{L}_2$ 中的每一个元素都是非负的，且每一行元素的和为 1。

引理 5.2 在假设 5.3 下，矩阵 \bar{L}_1 为正定对称矩阵。

证明：此引理的证明与文献[123]中“引理 3”的证明类似。在此省略。

引理 5.3^[122] 存在常数 k_{is} ，以及正实数 a_i ， p_i ， κ_i 和正定对称矩阵 P_i 使得

$$\begin{aligned} A_i^T P_i + P_i A_i &\leq -\kappa_i P_i, p_i \bar{I}_i \leq P_i \leq \bar{I}_i \quad (0 < p_i \leq 1) \\ -a_i P_i &\leq D_i P_i + P_i D_i \leq a_i P_i, D_i = \text{diag}\{0, \dots, n_i - 2\} \end{aligned}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} -k_{i2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{i3} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -k_{in_{i-1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{in_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中， \bar{I}_i 是 $(n_i - 1)$ 维单位矩阵。

5.3.2 降阶动态增益观测器设计

在本小节，设计如下降阶动态增益观测器，估计智能体不可测量的状态

$$\begin{cases} \hat{x}_{i2} = \lambda_{i2} + k_{i2} L_i x_{i1} \\ \hat{x}_{is} = \lambda_{is} + k_{is} L_i^{s-1} x_{i1} \\ \hat{x}_{in_i} = \lambda_{in_i} + k_{in_i} L_i^{n_i-1} x_{i1} \end{cases} \quad (5-4)$$

其中， $s = 2, \dots, n_i - 1$ ，动态增益 $L_i(t) \geq 1$ 的设计形式在式(5-15)给出。 $k_{is} \in R$ 满足引理

5.3 条件限制。 $\lambda_{is} = [\lambda_{i1s}, \dots, \lambda_{ips}]^T$ ，且

$$\dot{\lambda}_{i2} = \hat{x}_{i3} + f_{i2}(\bar{\hat{x}}_{i2}) - k_{i2} L_i \hat{x}_{i2} - k_{i2} \dot{L}_i x_{i1} - k_{i2} L_i f_{i1}(x_{i1}) \quad (5-5)$$

$$\dot{\lambda}_{is} = \hat{x}_{i(s+1)} + f_{is}(\bar{\hat{x}}_{is}) - k_{is} L_i^{s-1} \hat{x}_{i2} - (s-1) k_{is} L_i^{s-2} \dot{L}_i x_{i1} - k_{is} L_i^{s-1} f_{i1}(x_{i1}) \quad (5-6)$$

$$\dot{\lambda}_{in_i} = u_i + f_{in_i}(\bar{\hat{x}}_{in_i}) - k_{in_i} L_i^{n_i-1} \hat{x}_{i2} - (n_i-1) k_{in_i} L_i^{n_i-2} \dot{L}_i x_{i1} - k_{in_i} L_i^{n_i-1} f_{i1}(x_{i1}) \quad (5-7)$$

定义观测误差 $e_{is} = [e_{i1s}, e_{i2s}, \dots, e_{ips}]^T = x_{is} - \hat{x}_{is}$ ，其中 $2 \leq s \leq n_i$ 。可得

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{i2} &= e_{i3} - k_{i2} L_i e_{i2} + \Delta_{i2} \\
 \dot{e}_{is} &= e_{i(s+1)} - k_{is} L_i^{s-1} e_{i2} + \Delta_{is} \\
 \dot{e}_{in_i} &= -k_{in_i} L_i^{n_i-1} e_{i2} + \Delta_{in_i}
 \end{aligned} \tag{5-8}$$

其中, $\Delta_{is} = [\Delta_{i1s}, \Delta_{i2s}, \dots, \Delta_{ips}]^T$ 。

定义 $\tilde{e}_{iqs} = L_i^{-s+2-a_i} e_{iqs}$, 其中 $q=1, 2, \dots, p$ 。 a_i 满足引理 5.3。 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{e}}_{iqs} &= L_i^{-s+2-a_i} \left(e_{iq(s+1)} - k_{is} L_i^{s-1} e_{iq2} + \Delta_{iqs} \right) + (-s+2-a_i) L_i^{-s+1-a_i} \dot{L}_i e_{iqs} \\
 &= L_i \left(\tilde{e}_{iq(s+1)} - k_{is} \tilde{e}_{iq2} \right) + L_i^{-s+2-a_i} \Delta_{iqs} + (-s+2-a_i) \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{e}_{iqs}
 \end{aligned} \tag{5-9}$$

进一步, 定义 $\tilde{E}_{iq} = [\tilde{e}_{iq2}, \tilde{e}_{iq3}, \dots, \tilde{e}_{iqn_i}]^T$, 可得

$$\dot{\tilde{E}}_{iq} = L_i A_i \tilde{E}_{iq} + C_i \Lambda_{iq} - \frac{\dot{L}_i}{L_i} D_i \tilde{E}_{iq} - a_i \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq} \tag{5-10}$$

其中, $\Lambda_{iq} = [\Delta_{iq2}, \dots, \Delta_{iqn_i}]^T$, $C_i = \text{diag}\{L_i^{-a_i}, L_i^{-1-a_i}, \dots, L_i^{-n_i+2-a_i}\}$ 。 D_i 和 A_i 满足引理 5.3。

选取如下 Lyapunov 函数

$$V_{eq} = \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} \tag{5-11}$$

其中, P_i 为正定矩阵。

通过引理 5.3, 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{eq} &= L_i \tilde{E}_{iq}^T \left(A_i^T P_i + P_i A_i \right) \tilde{E}_{iq} + 2 \tilde{E}_{iq}^T P_i C_i \Lambda_{iq} \\
 &\quad - \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq}^T \left(D_i P_i + P_i D_i \right) \tilde{E}_{iq} - 2 a_i \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} \\
 &\leq -\kappa_i L_i \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} + 2 \tilde{E}_{iq}^T P_i C_i \Lambda_{iq} - a_i \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} \\
 &\quad - \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq}^T \left(a_i P_i + D_i P_i + P_i D_i \right) \tilde{E}_{iq}
 \end{aligned} \tag{5-12}$$

利用假设 5.1, 结合 $\tilde{e}_{iqs} = L_i^{-s+2-a_i} e_{iqs}$ 和 $L_i \geq 1$, 可得

$$\begin{aligned}
 \|C_i \Lambda_{iq}\| &\leq \eta_i \sqrt{\sum_{s=2}^2 \sum_{q=1}^p \tilde{e}_{iqs}^2 + \sum_{s=2}^3 \sum_{q=1}^p \tilde{e}_{iqs}^2 + \dots + \sum_{s=2}^{n_i} \sum_{q=1}^p \tilde{e}_{iqs}^2} \\
 &\leq \eta_i \sqrt{(n_i-1) \sum_{s=2}^{n_i} \sum_{q=1}^p \tilde{e}_{iqs}^2} = \eta_i \sqrt{n_i-1} \|\tilde{E}_i\|
 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{E}_i = [\tilde{E}_{i1}^T, \tilde{E}_{i2}^T, \dots, \tilde{E}_{ip}^T]^T$ 。

进一步, 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q=1}^p 2\tilde{E}_{iq}^T P_i C_i \Lambda_{iq} \\
 & \leq \sum_{q=1}^p 2\|\tilde{E}_{iq}\| \|P_i\| \|C_i \Lambda_{iq}\| \leq \sum_{q=1}^p 2\|\tilde{E}_{iq}\| \|P_i\| \eta_i \sqrt{n_i - 1} \|\tilde{E}_i\| \\
 & \leq (p+1) \|P_i\| \eta_i \sqrt{n_i - 1} \|\tilde{E}_i\|^2 = \sum_{q=1}^p (p+1) \eta_i \sqrt{n_i - 1} \|P_i\| \|\tilde{E}_{iq}\|^2 \\
 & \leq \sum_{q=1}^p (p+1) \frac{\eta_i \sqrt{n_i - 1} \|P_i\|}{\lambda_{\min}(P_i)} \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq}
 \end{aligned} \tag{5-13}$$

由(5-12)-(5-13), 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q=1}^p \dot{V}_{eq} \\
 & \leq \sum_{q=1}^p \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} \left\{ \frac{(p+1) \eta_i (y_i) \sqrt{n_i - 1} \|P_i\|}{\lambda_{\min}(P_i)} - \kappa_i L_i - a_i \frac{\dot{L}_i}{L_i} + \frac{F_{1i} + F_{2i}}{\lambda_{\min}(P_i)} \right\} \\
 & \quad - \sum_{q=1}^p \|\tilde{E}_{iq}\|^2 (F_{1i} + F_{2i}) - \sum_{q=1}^p \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq}^T (a_i P_i + D_i P_i + P_i D_i) \tilde{E}_{iq}
 \end{aligned} \tag{5-14}$$

其中 F_{1i} 和 F_{2i} 为正常数。

设计动态增益如下

$$\dot{L}_i(t) = \frac{L_i}{a_i} \left\{ \frac{(p+1) \eta_i (y_i) \sqrt{n_i - 1} \|P_i\|}{\lambda_{\min}(P_i)} + \frac{F_{1i} + F_{2i}}{\lambda_{\min}(P_i)} - \mu_i L_i \right\}, L_i(0) = 1 \tag{5-15}$$

其中, 选取参数 μ_i 满足 $0 < \mu_i \leq \frac{F_{1i} + F_{2i}}{\lambda_{\min}(P_i)}$, 使得对于任意的 t , 有 $L_i(t) \geq 1$ 。

利用(5-15)和引理 5.3, 可得

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{q=1}^p \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tilde{E}_{iq}^T (a_i P_i + D_i P_i + P_i D_i) \tilde{E}_{iq} \\
 & \leq \sum_{q=1}^p \frac{\mu_i L_i}{a_i} \tilde{E}_{iq}^T (a_i P_i + D_i P_i + P_i D_i) \tilde{E}_{iq} \leq \sum_{q=1}^p 2\mu_i L_i \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq}
 \end{aligned}$$

进一步, 可得

$$\sum_{q=1}^p \dot{V}_{eq} \leq - \sum_{q=1}^p L_i \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} (\kappa_i - 3\mu_i) - \sum_{q=1}^p \|\tilde{E}_{iq}\|^2 (F_{1i} + F_{2i}) \tag{5-16}$$

为了使得 $(\kappa_i - 3\mu_i)$ 为正, μ_i 应同时满足 $\mu_i < \kappa_i / 3$ 。因此 $0 < \mu_i < \min \left\{ \frac{\kappa_i}{3}, \frac{F_{1i} + F_{2i}}{\lambda_{\min}(P_i)} \right\}$ 。

进一步, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p \dot{V}_{eq} &\leq - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p L_i \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} (\kappa_i - 3\mu_i) - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p \|\tilde{E}_{iq}\|^2 (F_{1i} + F_{2i}) \\ &= - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p L_i \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} (\kappa_i - 3\mu_i) - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{s=2}^{n_i} \|\tilde{e}_{is}\|^2 (F_{1i} + F_{2i}) \end{aligned} \quad (5-17)$$

其中 $\Omega_j = \{i \mid n_i \geq j; i = 1, 2, \dots, n\}$, $\tilde{e}_{is} = [\tilde{e}_{i1s}, \tilde{e}_{i2s}, \dots, \tilde{e}_{ips}]^T$ 。

注释 5.2 在本小节, 设计了智能体系统降阶动态增益观测器。相比于全维观测器, 所设计观测器维度降低。另外, 由于采用了动态增益的方法, 使得对于非线性项 $f_{iqs}(\bar{x}_{is})$ 的限制性条件得到放松。由(5-15)可知, 所设计的动态增益 $L_i(t)$ 有界, 界的大小与函数 $\eta_i(y_i)$ 相关。

注释 5.3 如果 $\eta_i(y_i)$ 为正的常值, 或者其上界为正的常值, 由式(5-14)可知, 存在常值 L_i 使得 $\sum_{q=1}^p \dot{V}_{ieq}$ 为负定。另一方面, 如果函数 $\eta_i(\cdot)$ 包含时变参量 t , 例如函数 $\eta_i(\cdot) = y_i^2(1 + 0.1t^2)$, (5-15)中所设计的 L_i 仍有效, 但是 L_i 的有界性不能被保证, 这和函数 $\eta_i(\cdot)$ 的具体形式有关。

5.3.3 控制器设计及稳定性分析

在这一小节, 将通过递归设计的方法, 构造多智能体系统分布式输出反馈控制器。首先定义以下误差变量

$$e_{iq1} = \sum_{l \in N_i} a_{il} (y_{iq} - y_{lq}) = \sum_{l=1}^n a_{il} (y_{iq} - y_{lq}) + \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} (y_{iq} - y_{lq}) \quad (5-18)$$

定义向量 $\hat{e}_{q1} = [e_{1q1}, e_{2q1}, \dots, e_{nq1}]^T$, 跟随者输出向量 $\hat{y}_q = [x_{1q1}, x_{2q1}, \dots, x_{nq1}]^T$, 领导者输出向量 $y_{dq} = [y_{(n+1)q}, y_{(n+2)q}, \dots, y_{(n+m)q}]^T$, 可得

$$\hat{e}_{q1} = \bar{L}_1 \hat{y}_q + \bar{L}_2 y_{dq} \quad (5-19)$$

进一步, 定义 $\bar{y}_{dq} = -\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}$, 可得

$$\hat{e}_{q1} = \bar{L}_1 \hat{y}_q - \bar{L}_1 \bar{y}_{dq} = \bar{L}_1 (\hat{y}_q - \bar{y}_{dq}) \quad (5-20)$$

由引理 5.1, 可知 $\bar{y}_{dq} \in Co\{y_{(n+1)q}, y_{(n+2)q}, \dots, y_{(n+m)q}\}$ 。由(5-20)可知, 如果 $\|\hat{e}_{q1}\|$ 有界, 则 $\|\hat{y}_q - \bar{y}_{dq}\|$ 有界。以下, 将设计控制器, 保证 $\|\hat{e}_{q1}\|$ 的有界性。

选取以下状态变换

$$\begin{cases} z_{i2} = \hat{x}_{i2} - \alpha_{i1} \\ z_{is} = \hat{x}_{is} - \alpha_{i(s-1)} \\ z_{in_i} = \hat{x}_{in_i} - \alpha_{i(n_i-1)} \end{cases} \quad (5-21)$$

其中 $\alpha_{i(s-1)} = [\alpha_{i1(s-1)}(\cdot), \alpha_{i2(s-1)}(\cdot), \dots, \alpha_{ip(s-1)}(\cdot)]^T$ 为可设计的虚拟控制器，内部变量为 $e_{iq1}, x_{i1}, \bar{\lambda}_{i(s-1)}, \text{sign}(a_{i1})L_1, \dots, \text{sign}(a_{in_i})L_n, \text{sign}(a_{i1})x_{i1}, \dots, \text{sign}(a_{in_i})x_{in_i}, \bar{\lambda}_{i(s-1)} = [\lambda_{i2}^T, \dots, \lambda_{i(s-1)}^T]^T, \bar{\lambda}_{i1} := 0$ 。

选取以下 Lyapunov 函数

$$V_0 = V_1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} V_{ik} \quad (5-22)$$

其中， $V_1 = \sum_{q=1}^p \hat{e}_{q1}^T \bar{L}_1^{-1} \hat{e}_{q1}$ ， $V_{ik} = z_{ik}^T z_{ik}$ 。

以下通过递归的方法，构造系统控制器。

第 1 步：求取 V_1 的微分，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{q=1}^p 2\hat{e}_{q1}^T (\dot{\hat{y}}_q - \dot{\bar{y}}_{dq}) = 2e_1^T (x_2 + f_1(\cdot)) - \sum_{q=1}^p 2\hat{e}_{q1}^T \dot{\bar{y}}_{dq} \\ &= 2e_1^T (x_2 - \alpha_1) + 2e_1^T f_1(\cdot) - \sum_{q=1}^p 2\hat{e}_{q1}^T \dot{\bar{y}}_{dq} + 2e_1^T \alpha_1 \end{aligned} \quad (5-23)$$

其中， $e_1 = [e_{11}^T, \dots, e_{n1}^T]^T$ ， $e_{i1} = [e_{i11}, e_{i21}, \dots, e_{ip1}]^T$ ， $x_2 = [x_{12}^T, x_{22}^T, \dots, x_{n2}^T]^T$ ， $f_1(\cdot) = [f_{11}^T, f_{21}^T, \dots, f_{n1}^T]^T$ ， $\alpha_1 = [\alpha_{11}^T, \alpha_{21}^T, \dots, \alpha_{n1}^T]^T$ 。

由(5-19)，可得

$$\|\hat{y}_q\|^2 \leq 2\|\bar{L}_1^{-1}\|^2 \|\hat{e}_{q1}\|^2 + 2\|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}\|^2 \quad (5-24)$$

因此，可得

$$\sum_{i=1}^n \|x_{i1}\|^2 = \sum_{q=1}^p \|\hat{y}_q\|^2 \leq 2\|\bar{L}_1^{-1}\|^2 \|e_1\|^2 + \sum_{q=1}^p 2\|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}\|^2 \quad (5-25)$$

结合(5-2)可得

$$\begin{aligned}
 2e_1^T f_1(\cdot) &= 2e_{11}^T f_{11} + 2e_{21}^T f_{21} + \dots + 2e_{n1}^T f_{n1} \\
 &\leq 2\bar{\eta}_1(y_1) \|e_{11}\| \|x_{11}\| + \dots + 2\bar{\eta}_n(y_n) \|e_{n1}\| \|x_{n1}\| \\
 &\leq \delta_1 \sum_{i=1}^n \bar{\eta}_i^2 \|e_{i1}\|^2 + \delta_1^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_{i1}\|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \|e_{i1}\|^2 \left(\delta_1 \bar{\eta}_i^2 + 2\delta_1^{-1} \|\bar{L}_1^{-1}\|^2 \right) + \delta_1^{-1} \sum_{q=1}^p 2 \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}\|^2
 \end{aligned} \tag{5-26}$$

其中, δ_1 为任意的正常值。

$$\begin{aligned}
 -\sum_{q=1}^p 2\hat{e}_{q1}^T \dot{y}_{dq} &= \sum_{q=1}^p 2\hat{e}_{q1}^T \bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 \dot{y}_{dq} \leq \sum_{q=1}^p 2 \|\hat{e}_{q1}\| \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 \dot{y}_{dq}\| \\
 &\leq \delta_1 \sum_{i=1}^n \|e_{i1}\|^2 + \delta_1^{-1} \sum_{q=1}^p \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 \dot{y}_{dq}\|^2
 \end{aligned} \tag{5-27}$$

通过(5-21)和 $\tilde{e}_{iqs} = L_i^{-s+2-a_i} e_{iqs}$, 可得

$$\begin{aligned}
 2e_1^T (x_2 - \alpha_1) &= 2e_1^T (x_2 - \hat{x}_2 + z_2) = 2e_1^T (x_2 - \hat{x}_2) + 2e_1^T z_2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{L_i^{2a_i}}{F_{1i}} \|e_{i1}\|^2 + F_{1i} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 \right) + \sum_{i=1}^n \|e_{i1}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} z_{i2}^T z_{i2}
 \end{aligned} \tag{5-28}$$

其中, $\hat{x}_2 = [\hat{x}_{12}^T, \hat{x}_{22}^T, \dots, \hat{x}_{n2}^T]^T$, $z_2 = [z_{12}^T, z_{22}^T, \dots, z_{n2}^T]^T$, $\Omega_j = \{i \mid n_i \geq j; i=1, 2, \dots, n\}$, $j=1, 2, \dots, \bar{n}$, $\bar{n} = \max\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ 。如果智能体为一阶系统, 则定义 $L_i = 0$, $x_{i2} = \hat{x}_{i2} = \alpha_{i1}$ 表示系统控制器 u_i , $z_{i2} = e_{i2} = \tilde{e}_{i2} = 0$ 。即定义 $x_{i(n_i+1)} = \hat{x}_{i(n_i+1)} = \alpha_{ni}(\cdot) = u_i$ 且 $z_{i(n_i+1)} = 0$ 。

由(5-23), (5-26)-(5-28), 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &\leq \sum_{i=1}^n \|e_{i1}\|^2 \left(\delta_1 \bar{\eta}_i^2 + 2\delta_1^{-1} \|\bar{L}_1^{-1}\|^2 + \delta_1 + \frac{L_i^{2a_i}}{F_{1i}} + 1 \right) \\
 &\quad + 2e_1^T \alpha_1 + \frac{1}{\delta_1} \sum_{q=1}^p 2 \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}\|^2 + \frac{1}{\delta_1} \sum_{q=1}^p \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 \dot{y}_{dq}\|^2 \\
 &\quad + \sum_{i \in \Omega_2} F_{1i} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} z_{i2}^T z_{i2}
 \end{aligned} \tag{5-29}$$

设计虚拟控制器 α_{i1} 如下

$$\alpha_{i1} = -e_{i1} \beta_{i1}(y_i, L_i) \tag{5-30}$$

其中, $\beta_{i1} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_1 \bar{\eta}_i^2 + 2\delta_1^{-1} \|\bar{L}_1^{-1}\|^2 + \delta_1 + \frac{L_i^{2a_i}}{F_{1i}} + 2 + \bar{D}_i \right\}$, \bar{D}_i 为正的常值。

则(5-29)可转化为如下形式

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\sum_{i=1}^n \|e_{i1}\|^2 (\bar{D}_i + 1) + \delta_1^{-1} \sum_{q=1}^p 2 \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}\|^2 \\ & + \delta_1^{-1} \sum_{q=1}^p \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 \dot{y}_{dq}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} z_{i2}^T z_{i2} + \sum_{i \in \Omega_2} F_{1i} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 \end{aligned} \quad (5-31)$$

第2步: 由(5-4), (5-18)和(5-21), 计算 $\sum_{i \in \Omega_2} V_{i2}$ 的微分, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega_2} \dot{V}_{i2} &= \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2 z_{iq2} \dot{z}_{iq2} = \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2 z_{iq2} \left(\dot{\hat{x}}_{iq2} - \dot{\alpha}_{iq1}(e_{iq1}, x_{i1}) \right) \\ &= \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2 z_{iq2} \left\{ z_{iq3} + \alpha_{iq2} + f_{iq2}(\bar{\hat{x}}_{i2}) + k_{i2} L_i e_{iq2} - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial e_{iq1}} \right. \\ &\quad \times \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) (x_{iq2} + f_{iq1}(x_{i1})) - \sum_{l=1}^n a_{il} (x_{lq2} + f_{lq1}(x_{l1})) - \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} \dot{y}_{lq} \right) \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial x_{i11}} (x_{i12} + f_{i11}(x_{i1})) - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial x_{i21}} (x_{i22} + f_{i21}(x_{i1})) \\ &\quad \left. - \dots - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial x_{ip1}} (x_{ip2} + f_{ip1}(x_{i1})) - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial L_i} \dot{L}_i \right\} \end{aligned} \quad (5-32)$$

为了推导方便, 给出以下命题及证明。

命题 5.1 对于 $2 \leq i \leq n$, $2 < j < n_i$, $\bar{n} = \max\{n_1, \dots, n_n\}$, 存在光滑函数 $\phi_{iqj}(\cdot)$, 使得

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2 z_{iqj} \left\{ k_{ij} L_i^{j-1} e_{iq2} - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) x_{iq2} - \sum_{l=1}^n a_{il} x_{lq2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} \dot{y}_{lq} \right) - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} x_{ik2} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} x_{lk2} \right\} \\ & \leq \frac{1}{\bar{n}-1} \left(\sum_{i=1}^n \bar{D}_i \|e_{i1}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} F_{2i} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} \hat{D}_i z_{i2}^T z_{i2} \right) \\ & \quad + \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p z_{iqj} \phi_{iqj}(\cdot) + \delta_2^{-1} \sum_{l=n+1}^{n+m} (a_{il} \dot{y}_{lq})^2 \end{aligned}$$

其中, \hat{D}_i 是正常值。 $\phi_{iqj}(\cdot)$ 是和变量 $e_{iq1}, x_{i1}, \bar{\lambda}_{i(j-1)}, \text{sign}(a_{i1})L_1, \dots, \text{sign}(a_{in})L_n, \text{sign}(a_{i1})x_{i1}, \dots, \text{sign}(a_{in})x_{n1}$ 相关的函数。 $\phi_{iqj}(\cdot)$ 只包含邻接智能体的输出信息。

证明: 利用等式 $x_{iq2} = e_{iq2} + \hat{x}_{iq2}$, $\hat{x}_{iq2} = z_{iq2} + \alpha_{iq1}$, $\alpha_{iq1} = -e_{iq1} \beta_{i1}(y_i, L_i)$, $\hat{x}_{ij} = \lambda_{ij} + k_{ij} L_i^{j-1} x_{i1}$, 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left\{ k_{ij} L_i^{j-1} e_{iq2} - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) x_{iq2} - \sum_{l=1}^n a_{il} x_{lq2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} \dot{y}_{lq} \right) - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} x_{ik2} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} x_{lk2} \right\} \\
 & = \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left\{ k_{ij} L_i^{j-1} e_{iq2} - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) (e_{iq2} + \hat{x}_{iq2}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{l=1}^n a_{il} (e_{lq2} + z_{lq2} - e_{lq1} \beta_{l1}) - \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} \dot{y}_{lq} \right) - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} (e_{ik2} + \hat{x}_{ik2}) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} (e_{lk2} + z_{lk2} - e_{lk1} \beta_{l1}(y_l, L_l)) \right\} \quad (5-33)
 \end{aligned}$$

利用杨氏不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left\{ k_{ij} L_i^{j-1} e_{iq2} - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) e_{iq2} - \sum_{l=1}^n a_{il} e_{lq2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} e_{ik2} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} e_{lk2} \right\} \quad (5-34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \sum_{i \in \Omega_2} \frac{F_{2i}}{\bar{n}-1} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p z_{iqj} \phi_{iqj1}(\cdot) \\
 & \quad \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left\{ \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \sum_{l=1}^n a_{il} e_{lq1} \beta_{l1}(y_l, L_l) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} e_{lk1} \beta_{l1}(y_l, L_l) \right\} \quad (5-35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \sum_{i=1}^n \frac{\bar{D}_i}{\bar{n}-1} \|e_{i1}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p z_{iqj} \phi_{iqj2}(\cdot) \\
 & \quad \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left\{ -\frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(-\sum_{l=1}^n a_{il} z_{lq2} - \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} \dot{y}_{lq} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} z_{lk2} \right\} \quad (5-36) \\
 & \leq \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\hat{D}_i}{\bar{n}-1} z_{i2}^T z_{i2} + \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p z_{iqj} \phi_{iqj3} + \delta_2^{-1} \sum_{l=n+1}^{n+m} (a_{il} \dot{y}_{lq})^2
 \end{aligned}$$

选取函数 $\phi_{iqj4}(\cdot)$ ，使得

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p z_{iqj} \phi_{iqj4}(\cdot) \\ &= \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left(\frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) \hat{x}_{iq2} - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} \hat{x}_{ik2} \right) \end{aligned} \quad (5-37)$$

其中，参数 δ_2 和 \hat{D}_i 为正的常值。 $\phi_{iqj1}(\cdot), \phi_{iqj2}(\cdot), \phi_{iqj3}(\cdot)$ 和 $\phi_{iqj4}(\cdot)$ 为与变量 $e_{iq1}, x_{i1}, \bar{x}_{i(j-1)}, \text{sign}(a_{i1})L_1, \dots, \text{sign}(a_{in})L_n, \text{sign}(a_{i1})x_{i1}, \dots, \text{sign}(a_{in})x_{in}$ 相关的适当正函数。定义函数 $\phi_{iqj}(\cdot) = \phi_{iqj1}(\cdot) + \phi_{iqj2}(\cdot) + \phi_{iqj3}(\cdot) + \phi_{iqj4}(\cdot)$ ，结合(5-33)-(5-37)，可证得命题 5.1。证明完毕。

由于

$$\sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2z_{iq2} z_{iq3} \leq \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p z_{iq2}^2 + \sum_{i \in \Omega_3} \sum_{q=1}^p z_{iq3}^2 \quad (5-38)$$

设计虚拟控制器 α_{iq2} 如下

$$\begin{aligned} & \alpha_{iq2} \\ &= - \left\{ - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) f_{iq1}(x_{i1}) - \sum_{l=1}^n a_{il} f_{lq1}(x_{l1}) \right) \right. \\ & \quad + f_{iq2}(\bar{x}_{i2}) - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial x_{i11}} f_{i11}(x_{i1}) - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial x_{i21}} f_{i21}(x_{i1}) - \dots \\ & \quad \left. - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial x_{ip1}} f_{ip1}(x_{i1}) - \frac{\partial \alpha_{iq1}}{\partial L_i} \dot{L}_i \right\} - \frac{1}{2} (\phi_{iq2} + 3z_{iq2} + \hat{D}_i z_{iq2}) \end{aligned} \quad (5-39)$$

由(5-32)-(5-39)和命题 5.1，可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Omega_2} \dot{V}_{i2} \\ & \leq \sum_{i=1}^n \frac{\bar{D}_i}{\bar{n}-1} \|e_{i1}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} \frac{F_{2i}}{\bar{n}-1} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\hat{D}_i}{\bar{n}-1} z_{i2}^T z_{i2} \\ & \quad - \sum_{i \in \Omega_2} \hat{D}_i z_{i2}^T z_{i2} - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2z_{iq2}^2 + \sum_{i \in \Omega_3} \sum_{q=1}^p z_{iq3}^2 + \delta_2^{-1} \sum_{l=n+1}^{n+m} (a_{il} \dot{y}_{lq})^2 \end{aligned} \quad (5-40)$$

第 j 步：对于 $3 \leq j \leq \bar{n}-1$ ，计算 $\sum_{i \in \Omega_j} V_{ij}$ 的微分的

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \Omega_j} \dot{V}_{ij} &= \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \dot{z}_{iqj} = \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left(\dot{\hat{x}}_{iqj} - \dot{\alpha}_{iq(j-1)} \right) \\
 &= \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} \left\{ z_{iq(j+1)} + \alpha_{iqj} + k_{ij} L_i^{j-1} e_{iq2} + f_{iqj}(\bar{\hat{x}}_{ij}) - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) \right. \right. \\
 &\quad \times (x_{iq2} + f_{iq1}(x_{i1})) - \sum_{l=1}^n a_{il} (x_{lq2} + f_{lq1}(x_{l1})) - \sum_{l=n+1}^{n+m} a_{il} \dot{y}_{lq} \Big) \\
 &\quad - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} (x_{lk2} + f_{lk1}(x_{l1})) - \sum_{k=1}^p \sum_{\tau=2}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial \lambda_{ik\tau}} \dot{\lambda}_{ik\tau} \\
 &\quad \left. - \sum_{l=1}^n \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial L_l} \dot{L}_l - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial L_i} \dot{L}_i - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} (x_{ik2} + f_{ik1}(x_{i1})) \right\}
 \end{aligned} \tag{5-41}$$

结合命题 5.1 和以下不等式

$$\sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj} z_{iq(j+1)} \leq \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p z_{iqj}^2 + \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \sum_{q=1}^p z_{iq(j+1)}^2 \tag{5-42}$$

设计虚拟控制器 α_{iqj} 如下

$$\begin{aligned}
 \alpha_{iqj} &= - \left\{ - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) f_{iq1}(x_{i1}) - \sum_{l=1}^n a_{il} f_{lq1}(x_{l1}) \right) \right. \\
 &\quad + f_{iqj}(\bar{\hat{x}}_{ij}) - \sum_{k=1}^p \sum_{\tau=2}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial \lambda_{ik\tau}} \dot{\lambda}_{ik\tau} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{lk1}} f_{lk1}(x_{l1}) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial x_{ik1}} f_{ik1}(x_{i1}) - \sum_{l=1}^n \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial L_l} \dot{L}_l \\
 &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_{iq(j-1)}}{\partial L_i} \dot{L}_i \right\} - \frac{1}{2} (\phi_{iqj} + 3z_{iqj})
 \end{aligned} \tag{5-43}$$

继而, 由(5-41)-(5-43)和命题 5.1, 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \Omega_j} \dot{V}_{ij} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\bar{D}_i}{\bar{n}-1} \|e_{i1}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} \frac{F_{2i}}{\bar{n}-1} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 + \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\hat{D}_i}{\bar{n}-1} z_{i2}^T z_{i2} \\
 &\quad - \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{q=1}^p 2z_{iqj}^2 + \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \sum_{q=1}^p z_{iq(j+1)}^2 + \delta_2^{-1} \sum_{l=n+1}^{n+m} (a_{il} \dot{y}_{lq})^2
 \end{aligned} \tag{5-44}$$

第 \bar{n} 步: 基于以上推导过程, 对于 $\sum_{i \in \Omega_{\bar{n}}} V_{i\bar{n}}$, 有

$$\begin{aligned}
 \alpha_{iq\bar{n}} = & - \left\{ - \frac{\partial \alpha_{iq(\bar{n}-1)}}{\partial e_{iq1}} \left(\left(\sum_{l=1}^{n+m} a_{il} \right) f_{iq1}(x_{i1}) - \sum_{l=1}^n a_{il} f_{lq1}(x_{l1}) \right) \right. \\
 & + f_{iq\bar{n}}(\bar{x}_{i\bar{n}}) - \sum_{k=1}^p \sum_{\tau=2}^{\bar{n}-1} \frac{\partial \alpha_{iq(\bar{n}-1)}}{\partial \lambda_{ik\tau}} \dot{\lambda}_{ik\tau} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \text{sign}(a_{il}) \\
 & \times \frac{\partial \alpha_{iq(\bar{n}-1)}}{\partial x_{lk1}} f_{lk1}(x_{l1}) - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \alpha_{iq(\bar{n}-1)}}{\partial x_{ik1}} f_{ik1}(x_{i1}) \\
 & \left. - \sum_{l=1}^n \text{sign}(a_{il}) \frac{\partial \alpha_{iq(\bar{n}-1)}}{\partial L_l} \dot{L}_l - \frac{\partial \alpha_{iq(\bar{n}-1)}}{\partial L_i} \dot{L}_i \right\} - \frac{1}{2} (\phi_{iq\bar{n}} + 2z_{iq\bar{n}})
 \end{aligned} \tag{5-45}$$

其中, $\phi_{iq\bar{n}}$ 是由命题 5.1 确定的适当的函数。且有

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \Omega_{\bar{n}}} \dot{V}_{i\bar{n}} \leq & \sum_{i=1}^n \frac{\bar{D}_i}{\bar{n}-1} \|e_{i1}\|^2 - \sum_{i \in \Omega_{\bar{n}}} \sum_{q=1}^p 2z_{iq\bar{n}}^2 + \delta_2^{-1} \sum_{l=n+1}^{n+m} (a_{il} \dot{y}_{lq})^2 \\
 & + \sum_{i \in \Omega_2} \left(\frac{F_{2i}}{\bar{n}-1} \|\tilde{e}_{i2}\|^2 + \frac{\hat{D}_i}{\bar{n}-1} z_{i2}^T z_{i2} \right)
 \end{aligned} \tag{5-46}$$

因此, 可得所有智能体的分布式控制器如下

$$u_{iq} = \alpha_{iqn_i} \tag{5-47}$$

其中, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq q \leq p$ 。

且有整个 Lyapunov 函数的微分如下

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p \dot{V}_{eq} + \dot{V}_0 = \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p \dot{V}_{eq} + \dot{V}_1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} \dot{V}_{ik} \\
 = & \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p \dot{V}_{eq} + \dot{V}_1 + \sum_{i \in \Omega_2} \dot{V}_{i2} + \dots + \sum_{i \in \Omega_{\bar{n}}} \dot{V}_{i\bar{n}} \\
 \leq & - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p L_i \tilde{E}_{iq}^T P_i \tilde{E}_{iq} (\kappa_i - 3\mu_i) - \sum_{i=1}^n \|e_{i1}\|^2 \\
 & - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p z_{iq2}^2 - \sum_{i \in \Omega_3} \sum_{q=1}^p z_{iq3}^2 - \dots - \sum_{i \in \Omega_{\bar{n}}} \sum_{q=1}^p z_{iq\bar{n}}^2 + \epsilon \\
 \leq & - \frac{1}{\lambda_{\max}(\bar{L}_1^{-1})} V_1 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} V_{ik} - \sum_{i \in \Omega_2} \sum_{q=1}^p (\kappa_i - 3\mu_i) V_{eq} + \epsilon \\
 \leq & - \min \{ (\kappa_i - 3\mu_i), \lambda_{\max}^{-1}(\bar{L}_1^{-1}), 1 | i=1, 2, \dots, n \} V + \epsilon
 \end{aligned} \tag{5-48}$$

其中, $\epsilon = \delta_1^{-1} \sum_{q=1}^p 2 \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 y_{dq}\|^2 + \delta_1^{-1} \sum_{q=1}^p \|\bar{L}_1^{-1} \bar{L}_2 \dot{y}_{dq}\|^2 + \delta_2^{-1} (\bar{n}-1) \sum_{l=n+1}^{n+m} (a_{il} \dot{y}_{lq})^2$ 可以任意的小,

参数 δ_1 和 δ_2 可适当选取。

基于(5-28)给出本章的主要结论，如下：

定理 5.1 对于满足假设 5.1-5.3 的多智能体系统(5-1)，基于所设计的降阶动态增益观测器(5-4)，所构造的虚拟控制器(5-30)，(5-39)，(5-43)，(5-45)和输出反馈分布式控制器(5-47)能够保证误差 e_{iq1} 最终一致有界且界可任意小，即跟随者最终收敛到由领导者所生产的凸包内。

5.4 仿真实验

在本小节，考虑由三个领导者和三个跟随者构成的多智能体系统，通信拓扑如图 5-1。跟随者的动态模型如下

$$\begin{cases} \dot{x}_{111} = u_{11} + \bar{a}_{11}x_{121} \\ \dot{x}_{121} = u_{12} + \bar{a}_{12}x_{111} \end{cases} \quad (5-49)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{211} = x_{212} + \bar{a}_{11}x_{221} \\ \dot{x}_{221} = x_{222} + \bar{a}_{12}x_{211} \\ \dot{x}_{212} = u_{21} + \bar{a}_{11}x_{211}x_{222} \\ \dot{x}_{222} = u_{22} + \bar{a}_{12}x_{221}x_{212} \end{cases} \quad (5-50)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{311} = u_{31} + \bar{a}_{11} \sin(x_{321}) \\ \dot{x}_{321} = u_{32} + \bar{a}_{12}x_{311} \end{cases} \quad (5-51)$$

其中， $\bar{a}_{11} = 0.2$ ， $\bar{a}_{12} = 0.3$ 。

由(5-4)-(5-7)，智能体(5-50)的降阶动态增益观测器设计如下

$$\begin{aligned} \hat{x}_{212} &= \lambda_{212} + k_{22}L_2x_{211} \\ \dot{\lambda}_{212} &= u_{21} + \bar{a}_{11}x_{211}\hat{x}_{222} - k_{22}L_2\hat{x}_{212} - k_{22}\dot{L}_2x_{211} - \bar{a}_{11}k_{22}L_2x_{221} \end{aligned} \quad (5-52)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{222} &= \lambda_{222} + k_{22}L_2x_{221} \\ \dot{\lambda}_{222} &= u_{22} + \bar{a}_{12}x_{221}\hat{x}_{212} - k_{22}L_2\hat{x}_{222} - k_{22}\dot{L}_2x_{221} - \bar{a}_{12}k_{22}L_2x_{211} \end{aligned} \quad (5-53)$$

其中， $k_{22} > 0$ 。由(5-15)， L_2 设计如下

$$\dot{L}_2(t) = \frac{L_2}{a_2} \left\{ \frac{(p+1)\eta_2(y_2)\sqrt{n_2-1}\|P_2\|}{\lambda_{\min}(P_2)} + \frac{F_{12} + F_{22}}{\lambda_{\min}(P_2)} - \mu_2 L_2 \right\}, L_2(0) = 1 \quad (5-54)$$

其中， $a_2 > 0$ ， $p = 2$ 。参数 P_2 ， F_{12} 和 F_{22} 为正的常数。 $\mu_2 < \min \left\{ \frac{k_{22}}{3}, \frac{F_{12} + F_{22}}{\lambda_{\min}(P_2)} \right\}$ ，

$\eta_2(y_2) = \max\{\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}\}(1 + x_{211}^2 + x_{221}^2)$ 。

由(5-30)，可得，第一个虚拟控制器设计如下

$$\alpha_{i1} = -e_{i1}\beta_{i1}(y_i, L_i) \quad (5-55)$$

其中 $\beta_{i1} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_1 \bar{\eta}_i^2 + 2\delta_1^{-1} \|\bar{L}_1^{-1}\|^2 + \delta_1 + \frac{L_i^{2a_i}}{F_{li}} + 2 + \bar{D}_i \right\}$ 。 \bar{D}_i , δ_1 为正常数。 $\bar{\eta}_i = \max \{\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}\}$, $L_1 = L_3 = 0$, $e_{i1} = [e_{i11}, e_{i21}]^T$ 。 $u_1 = \alpha_{11}$, $u_3 = \alpha_{31}$ 。 在这一步中, 由于跟随者 1,3 为一阶系统, 故给出了其控制器最终形式。

通过命题 5.1, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^2 2z_{2q2} \left\{ \beta_{21} \left(\left(\sum_{l=1}^6 a_{2l} \right) x_{2q2} - \sum_{l=1}^3 a_{2l} x_{lq2} - 0 \right) + k_{22} L_2 e_{2q2} + 0 + 0 \right\} \\ & \leq \sum_{q=1}^2 z_{2q2} \left\{ z_{2q2} \frac{2L_2^{2a_2}}{F_{22}} (k_{22} L_2)^2 + 2\beta_{21} (\cdot) (a_{21} + a_{23}) \hat{x}_{2q2} + z_{2q2} \beta_{21}^2 \right. \\ & \quad \times \frac{2L_2^{2a_2}}{F_{22}} (a_{21} + a_{23})^2 + \frac{z_{2q2}}{\bar{D}_1} (\beta_{21} a_{21} \beta_{11})^2 + \frac{z_{2q2}}{\bar{D}_3} (\beta_{21} a_{23} \beta_{31})^2 \left. \right\} \\ & \quad + F_{22} (\tilde{e}_{212}^2 + \tilde{e}_{222}^2) + \bar{D}_1 e_{111}^2 + \bar{D}_1 e_{121}^2 + \bar{D}_3 e_{311}^2 + \bar{D}_3 e_{321}^2 \end{aligned} \quad (5-56)$$

即得

$$\begin{aligned} \phi_{2q2}(\cdot) &= z_{2q2} \frac{2L_2^{2a_2}}{F_{22}} (k_{22} L_2)^2 + 2\beta_{21} (a_{21} + a_{23}) \hat{x}_{2q2} + z_{2q2} \beta_{21}^2 \\ & \quad \times \frac{2L_2^{2a_2}}{F_{22}} (a_{21} + a_{23})^2 + \frac{z_{2q2}}{\bar{D}_1} (\beta_{21} a_{21} \beta_{11})^2 + \frac{z_{2q2}}{\bar{D}_3} (\beta_{21} a_{23} \beta_{31})^2 \end{aligned} \quad (5-57)$$

进一步, 通过(5-45)和(5-47), 可得

$$\begin{aligned} u_{21} &= -\left\{ \bar{a}_{11} x_{211} \hat{x}_{222} + e_{211} a_2 (\dot{L}_2 / F_{12}) L_2^{2a_2-1} + (a_{21} + a_{23}) \bar{a}_{11} x_{221} \beta_{21} \right. \\ & \quad \left. - a_{21} \bar{a}_{11} x_{121} \beta_{21} - a_{23} \bar{a}_{11} \sin(x_{321}) \beta_{21} \right\} - \frac{1}{2} \{ \phi_{212}(\cdot) + 2z_{212} \} \end{aligned} \quad (5-58)$$

$$\begin{aligned} u_{22} &= -\left\{ \bar{a}_{12} x_{221} \hat{x}_{212} + e_{221} a_2 (\dot{L}_2 / F_{12}) L_2^{2a_2-1} + (a_{21} + a_{23}) \bar{a}_{12} x_{211} \beta_{21} \right. \\ & \quad \left. - a_{21} \bar{a}_{12} x_{111} \beta_{21} - a_{23} \bar{a}_{12} x_{311} \beta_{21} \right\} - \frac{1}{2} \{ \phi_{222}(\cdot) + 2z_{222} \} \end{aligned} \quad (5-59)$$

设置系统参数 $k_{22} = 0.65$, $a_2 = 1$, $P_2 = 4$, $F_{12} = F_{22} = 1$, $\mu_2 = 0.2$, $\delta_1 = 15$, $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = \bar{D}_3 = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0.8$, $a_{32} = a_{23} = 0.8$, $a_{14} = a_{15} = 1$, $a_{35} = a_{36} = 1$ 。领导者输出信息 $y_{41} = 0.5 + 0.1t$, $y_{42} = 0.5 + 0.12 \sin 2t$, $y_{51} = 0.7 + 0.1t$, $y_{52} = 0.5 + 0.12 \sin 2t$, $y_{61} = 0.73 + 0.1t$, $y_{62} = 0.8 + 0.12 \sin 2t$ 。三个跟随者的系统初始值及观测器, 动态增益初始值如下 $x_{111}(0) = 0.6$, $x_{121}(0) = 2.7$, $x_{211}(0) = 0.9$, $x_{212}(0) = 0.3$, $x_{221}(0) = 3$, $x_{222}(0) = 1.2$, $x_{311}(0) = 0.6$, $x_{321}(0) = -2.4$, $\lambda_{212}(0) = 0$, $\lambda_{222}(0) = 0$, $L_2(0) = 1$ 。仿真结果如图 5-2 至 5-7 所示。由图 5-2 可以看出, 跟随者 1,2,3 最终进入由领导者 4,5,6

所生成的凸包内。图 5-3 和图 5-4 说明了所设计降阶动态增益观测器的有效性。图 5-5 至 5-7 说明误差 e_{iq1} 的有界性。

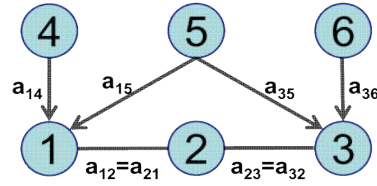


图 5-1 通信拓扑图

Fig. 5-1 Communication topology

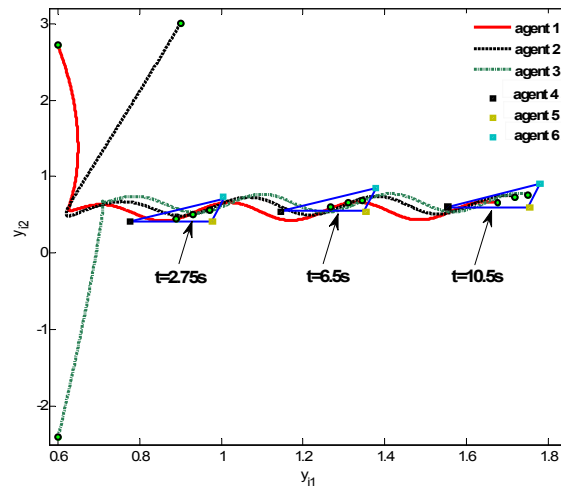


图 5-2 跟随者在二维平面的轨迹

Fig. 5-2 The trajectories of three followers in the two-dimensional space

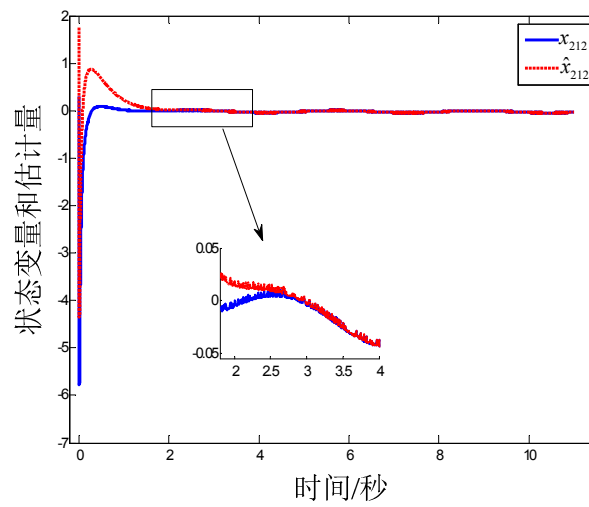


图 5-3 状态量 x_{212} 及估计量 \hat{x}_{212} 的响应曲线

Fig. 5-3 The responses of x_{212} and \hat{x}_{212}

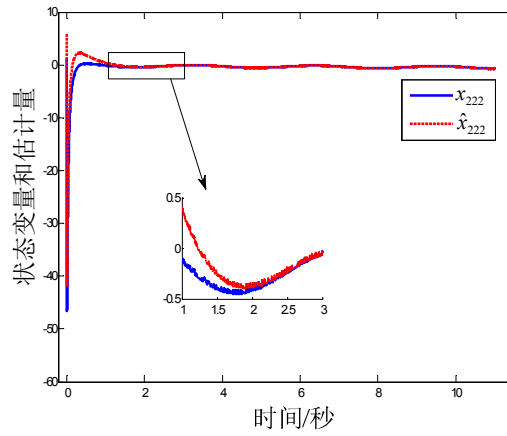


图 5-4 状态量 x_{222} 及估计量 \hat{x}_{222} 的响应曲线

Fig. 5-4 The responses of x_{222} and \hat{x}_{222}

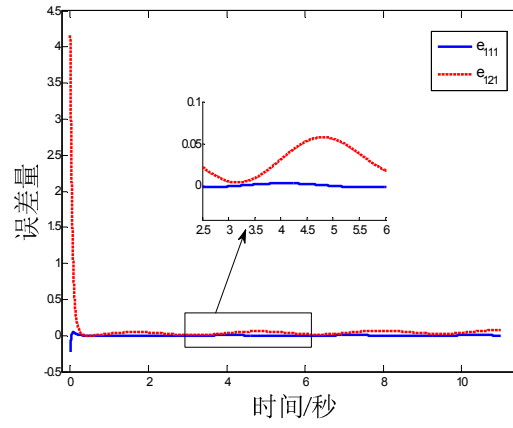


图 5-5 误差量 e_{111} 及 e_{121} 的响应曲线

Fig. 5-5 The responses of the containment error e_{111} and e_{121}

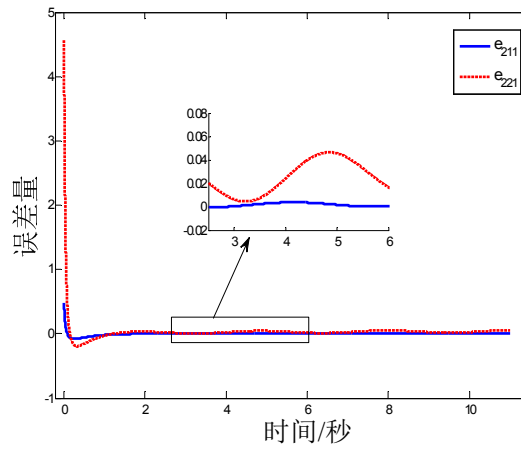
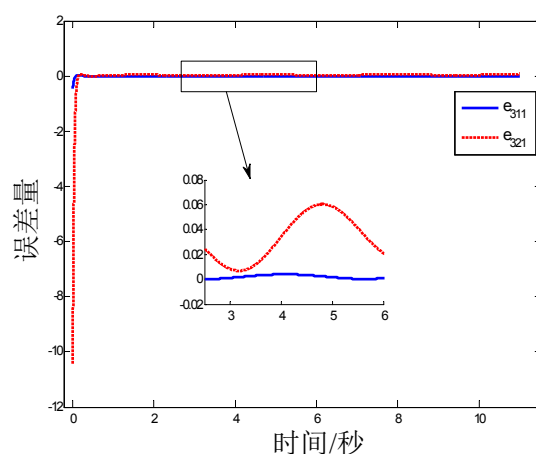


图 5-6 误差量 e_{211} 及 e_{221} 的响应曲线

Fig. 5-6 The responses of the containment error e_{211} and e_{221}

图 5-7 误差量 e_{311} 及 e_{321} 的响应曲线Fig. 5-7 The responses of the containment error e_{311} and e_{321}

5.5 本章小结

本章针对一类确定性下三角非线性多智能体系统，研究了其分布式输出反馈包络控制问题。首先，针对每个智能体，利用动态增益方法构造其降阶观测器，放松了现有文献对系统非线性项的 Lipschitz 限制条件。基于所设计的观测器，利用递归设计策略构造系统输出反馈分布式控制器，所设计的控制器只需要邻接智能体的输出信息，且每个智能体在系统结构上可以存在较大差异，甚至系统阶次可以不同。最后，给出数值仿真验证方法的有效性。

第 6 章 随机非线性多智能体系统分布式领导跟随控制

本章作为前一章工作的延伸,将进一步考虑随机扰动对智能体系统的影响,研究高阶异构非线性多智能体系统的领导跟随控制问题。本章同样采用递归设计方法,构造智能体系统分布式状态反馈控制器,并基于随机系统 Lyapunov 理论,证明领导者与跟随者输出误差的期望最终一致有界,且界值可以任意小。

6.1 引言

在现有的诸多多智能体系统文献中,研究学者主要集中于对确定性多智能体系统进行一致性控制器设计及稳定性分析,所涉及的多智能体系统类型包括单积分系统,双积分系统,高阶线性系统,以及非线性多智能体系统,涉及无领导者,单领导者,及多领导者情形^[48,54,113,118]。多种控制方法也相继被采用,如状态反馈控制,输出反馈控制,有限时间控制,自适应控制,神经网络控制等。然而,关于随机多智能体系统的结果,相对较少。

在实际工程中,系统动态模型不可避免的会受到来自系统内部或外部环境的扰动影响,建立智能体系统随机模型,更能准确反映其动态特性,增强控制方法的鲁棒性。另一方面,相比于确定性多智能体模型,随机模型在系统结构方面更具一般性。系统中扩散项的存在,也给分布式控制器的设计带来了一定的挑战。在文献[51-52,125]中,进一步考虑了随机扰动对智能体控制器设计的影响,并给出了多智能体系统领导跟随控制方法。但同时,也存在一些不足和缺陷。例如,在[52]中,所构造的控制器需要邻接智能体的控制信息,并且每个智能体的阶次必须相同。在文献[51]中,采用了基于 DSC 的递归方法,构造控制器,尽管避免了对邻接控制信息的依赖,但控制结果只能做到半全局,即初始值受到限制。

因此,本章将进一步研究高阶随机非线性多智能体在固定无向通信拓扑下的状态反馈分布式控制问题。通过递归的方法构造系统控制器,基于随机系统 Lyapunov 稳定理论,证明领导者及跟随者输出误差期望的有界性。本章在控制器构造方法上与前一章具有很大的相似性,然而在具体推导方面又具有明显的区别。所构造的状态反馈控制器只需要自身的状态信息以及邻接智能体的输出信息,且保证系统全局

最终一致有界，另外，每个智能体阶次可以完全不同，即单积分、双积分、高阶智能体可以同属于一个多智能体系统。

6.2 问题描述

6.2.1 图论

本章中采用图论描述多智能体系统间通信关系。考虑一个由 1 个领导者和 n 个跟随者构成的多智能体系统，用图 $G=(\nu, \varepsilon, A)$ 来表示 n 个跟随者之间通信拓扑，其中节点集合 $\nu=\{\nu_i, i=1, \dots, n\}$ ，边集合 $\varepsilon \subseteq \nu \times \nu$ 。邻接矩阵表示为 $A=[a_{ij}] \in R^{n \times n}$ 。对于 $i, j=1, 2, \dots, n$ ，如果 $(\nu_j, \nu_i) \in \varepsilon$ 则 $a_{ij} > 0$ ，否则 $a_{ij} = 0$ 。假定，对于任意的 $i=1, 2, \dots, n$ ，有 $a_{ii} = 0$ ，即无自环(no self-loop)。节点 i 的邻居集合为 $N_i = \{j | (\nu_j, \nu_i) \in \varepsilon\}$ ， (ν_j, ν_i) 表示节点 ν_i 能收到节点 ν_j 的信息。定义入度矩阵 $D = \text{diag}\{d_i\}$ ，其中 $d_i = a_{i1} + \dots + a_{in}$ 。定义 Laplacian 矩阵 $L = D - A$ 。用图 $\bar{G}=(\bar{\nu}, \bar{\varepsilon})$ 表示 1 个领导者和 n 个跟随者之间的通信拓扑，其中节点集合 $\bar{\nu}=\{\nu_i, i=0, 1, \dots, n\}$ ，边集合 $\bar{\varepsilon} \subseteq \bar{\nu} \times \bar{\nu}$ 。如果 $(\nu_0, \nu_i) \in \bar{\varepsilon}$ ，则 $0 \in N_i$ 。定义常值 $b_i > 0$ ，表示第 i 个跟随者可以收到领导者信息，否则 $b_i = 0$ 。定义 $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$ 。

6.2.2 多智能体系统模型

本章中，考虑由 1 个领导者和 n 个跟随者构成的随机非线性多智能体系统。其中，跟随者的动态模型如下

$$\begin{cases} dx_{is} = \left(x_{i(s+1)} + g_{is}(\bar{x}_{in_i}) \right) dt + f_{is}^T(\bar{x}_{in_i}) dw \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (6-1)$$

其中，对于 $i=1, \dots, n$ 和 $s=1, \dots, n_i$ ， $x_{is} \in R$ 和 $y_i \in R$ 分别表示第 i 个智能体的状态和输出。 $x_{i(n_i+1)} := u_i \in R$ 为控制输入。 $\bar{x}_{in_i} = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}]^T$ 。 $f_{is}(\bar{x}_{in_i}) = [f_{is1}(\bar{x}_{in_i}), \dots, f_{ism}(\bar{x}_{in_i})]^T$ 。 $w \in R^m$ 定义为一完备概率空间上的 m 维 Wiener 过程。函数 $g_{is}(\bar{x}_{in_i})$ ， $f_{is1}(\bar{x}_{in_i})$ ， \dots ， $f_{ism}(\bar{x}_{in_i})$ 为 Borel 可测的光滑函数，且满足 $g_{is}(0) = 0$ ， $f_{is}(0) = 0$ 。

为了研究系统控制问题，给出以下假设条件：

假设 6.1 对于 $i=1, \dots, n$ ，函数 $g_{is}(\bar{x}_{in_i})$ ，向量函数 $f_{is}(\bar{x}_{in_i})$ 满足以下条件：对于 $s=1$ ，

$$\|g_{i1}(\cdot)\| \leq \delta_{i1} |x_{i1}| \quad (6-2)$$

$$\|f_{i1}(\cdot)\| \leq \gamma_{i1} |x_{i1}| \quad (6-3)$$

其中, δ_{i1} , γ_{i1} 为已知正的常值; 对于 $s=2, \dots, n_i$,

$$\|g_{is}(\cdot)\| \leq (|x_{i1}| + |x_{i2}| + \dots + |x_{is}|) \delta_{is}(\bar{x}_{is}) \quad (6-4)$$

$$\|f_{is}(\cdot)\| \leq (|x_{i1}| + |x_{i2}| + \dots + |x_{is}|) \gamma_{is}(\bar{x}_{is}) \quad (6-5)$$

其中, $\delta_{is}(\bar{x}_{is})$, $\gamma_{is}(\bar{x}_{is})$ 为已知光滑函数, $\bar{x}_{is} = [x_{i1}, \dots, x_{is}]^T$ 。

假设 6.2 领导者输出为 $y_0 \in R$, 且微分 \dot{y}_0 有界。

假设 6.3 通信拓扑 \bar{G} 固定, 且含有一个以领导者为根的生成树。由 n 个跟随者构成的通信拓扑为固定无向图。

注释 6.1 对于系统(6-1), 每个智能体的阶次 n_i , 漂移项、扩散项可以不同, 即本章所研究的智能体系统是异构的。由假设 6.1 可知, 所研究的智能体模型可以包含单积分模型、双积分模型、严格反馈非线性系统模型等。由假设 6.3 和文献[54]中“引理 1”可知, $(L+B)$ 为对称正定矩阵, 因此 $(L+B)^{-1}$ 也是正定对称矩阵。

6.3 领导跟随控制

6.3.1 基础性引理

为研究多智能体系统(6-1)的控制问题, 先给出以下基础性引理。

引理 6.1 对于正实数 a , 有以下不等式成立:

如果 $a < 1$,

$$(|x_1| + \dots + |x_s|)^a \leq |x_1|^a + \dots + |x_s|^a \quad (6-6)$$

$$(|x_1|^a + \dots + |x_s|^a) / s \leq [(|x_1| + \dots + |x_s|) / s]^a \quad (6-7)$$

如果 $a > 1$,

$$|x_1|^a + \dots + |x_s|^a \leq (|x_1| + \dots + |x_s|)^a \quad (6-8)$$

$$[(|x_1| + \dots + |x_s|) / s]^a \leq (|x_1|^a + \dots + |x_s|^a) / s \quad (6-9)$$

6.3.2 领导跟随控制及稳定性分析

在本小节, 利用递归设计, 给出随机多智能体系统分布式状态反馈控制器构造方法。首先, 定义如下一致性误差

$$e_{i1} = \sum_{l \in N_i} a_{il} (y_l - y_i) + b_i (y_0 - y_i) \quad (6-10)$$

进一步, 可得其微分为

$$de_{i1} = \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) + g_{ie}(\cdot) \right) dt + f_{ie}^T(\cdot) dw \quad (6-11)$$

其中,

$$g_{ie}(\cdot) = \sum_{l \in N_i} a_{il} (g_{l1}(\cdot) - g_{i1}(\cdot)) - b_i g_{i1}(\cdot)$$

$$f_{ie}^T(\cdot) = \sum_{l \in N_i} a_{il} (f_{l1}^T(\cdot) - f_{i1}^T(\cdot)) - b_i f_{i1}^T(\cdot)$$

由(6-10), 可得

$$e_1 = -(L+B)(y - 1y_0) \quad (6-12)$$

其中, $e_1 = [e_{11}, e_{21}, \dots, e_{n1}]^T$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, $I = [1, \dots, 1]^T \in R^n$ 。

进一步可得

$$de_1 = (e_2 - (L+B)g_1(\cdot))dt - (L+B)f_1^T(\cdot)dw$$

$$= (e_2 + g_e(\cdot))dt + f_e^T(\cdot)dw \quad (6-13)$$

其中, $e_2 = -(L+B)(x_2 - I\dot{y}_0)$, $x_2 = [x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}]^T$, $g_1(\cdot) = [g_{11}(\cdot), g_{21}(\cdot), \dots, g_{n1}(\cdot)]^T$, $f_1^T(\cdot) = [f_{11}(\cdot), \dots, f_{n1}(\cdot)]^T$, $g_e(\cdot) = [g_{1e}(\cdot), \dots, g_{ne}(\cdot)]^T$, $f_e^T(\cdot) = [f_{1e}(\cdot), \dots, f_{ne}(\cdot)]^T$ 。

以下给出相关中间变量的定义及虚拟控制器 x_{i1}^* , x_{i2}^* , ..., $x_{i(n_i+1)}^*$ 的形式

$$x_{i1}^* = 0, \quad \xi_{i1} = e_{i1} - x_{i1}^*$$

$$x_{i2}^* = \xi_{i1} \beta_{i1}, \quad \xi_{i2} = x_{i2} - x_{i2}^*$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_{i(n_i+1)}^* = -\xi_{in_i} \beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i}), \quad \xi_{in_i} = x_{in_i} - x_{in_i}^* \quad (6-14)$$

其中, β_{i1} 是一个可设计的正常值, 且满足(6-50)。 $\beta_{i2}(\bar{x}_{i2})$, $\beta_{i3}(\bar{x}_{i3})$, ..., $\beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i})$ 为待设计的正光滑函数, $u_i := x_{i(n_i+1)}^*$ 。

通过(6-14), 及(6-2)-(6-5), 对于 $s=1, \dots, n_i$, 有

$$\|g_{is}(\cdot)\| \leq (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + \dots + |\xi_{is}|) \bar{\delta}_{is}(\cdot) \quad (6-15)$$

$$\|f_{is}(\cdot)\| \leq (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + \dots + |\xi_{is}|) \bar{\gamma}_{is}(\cdot) \quad (6-16)$$

其中, $\bar{\delta}_{i1}$ 和 $\bar{\gamma}_{i1}$ 为正的常值, $\bar{\delta}_{is}(\bar{x}_{is})$ 和 $\bar{\gamma}_{is}(\bar{x}_{is})$ 为适当的正光滑函数。

基于引理 6.1 和以下不等式,

$$\|y\|^2 = |x_{11}|^2 + |x_{21}|^2 + \dots + |x_{n1}|^2$$

$$= \left\| -(L+B)^{-1} e_1 + I y_0 \right\|^2 \leq 2 \left\| -(L+B)^{-1} e_1 \right\|^2 + 2 \|I y_0\|^2 \quad (6-17)$$

$$\leq 2 e_1^T (L+B)^{-1} (L+B)^{-1} e_1 + 2 \|I y_0\|^2 \leq 2 \lambda_1^2 \|e_1\|^2 + 2 \|I y_0\|^2$$

其中, $\lambda_1 = \lambda_{\max}((L+B)^{-1})$ 表示矩阵 $(L+B)^{-1}$ 的最大特征值, 可得

$$\|g_1(\cdot)\| \leq \|g_{11}(\cdot)\| + \|g_{21}(\cdot)\| + \dots + \|g_{n1}(\cdot)\| \leq \lambda_g (\|e_1\| + \|Iy_0\|) \quad (6-18)$$

$$\|g_{ie}(\cdot)\| = \left\| \sum_{l \in N_i} a_{il} (g_{l1}(\cdot) - g_{i1}(\cdot)) - b_l g_{il}(\cdot) \right\| \leq \lambda_{gi} (\|e_1\| + \|Iy_0\|) \quad (6-19)$$

$$\|f_1(\cdot)\|^2 = \|f_{11}(\cdot)\|^2 + \|f_{21}(\cdot)\|^2 + \dots + \|f_{n1}(\cdot)\|^2 \leq \gamma_f (\|e_1\|^2 + \|Iy_0\|^2) \quad (6-20)$$

$$\|f_{ie}^T(\cdot)\| = \left\| \sum_{l \in N_i} a_{il} (f_{l1}^T(\cdot) - f_{i1}^T(\cdot)) - b_l f_{il}^T(\cdot) \right\| \leq \gamma_{fi} (\|e_1\| + \|Iy_0\|) \quad (6-21)$$

其中, λ_g , λ_{gi} , γ_f , γ_{fi} 为适当的正常值。

以下, 通过递归方法, 设计系统控制器。选取以下 Lyapunov 函数,

$$V = V_1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} V_{ik} \quad (6-22)$$

其中, $V_1 = \frac{1}{2} \Phi^2$, $\Phi := e_1^T (L+B)^{-1} e_1$, $V_{ik} = \frac{1}{4} \xi_{ik}^4$ 。

第 1 步: 计算 Lyapunov 函数 V_1 的微分算子, 如下

$$\begin{aligned} \ell V_1 &= 2\Phi e_1^T (L+B)^{-1} (e_2 + g_e(\cdot)) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ f_e(\cdot) \frac{\partial^2 V_1}{\partial e_1^2} f_e^T(\cdot) \right\} \\ &= 2\Phi (-e_1^T (x_2 - I\dot{y}_0) - e_1^T g_1(\cdot)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ f_1(\cdot) (L+B) \frac{\partial^2 V_1}{\partial e_1^2} (L+B) f_1^T(\cdot) \right\} \end{aligned} \quad (6-23)$$

利用(6-18)和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned} -2\Phi e_1^T g_1(\cdot) &\leq 2\lambda_1 \|e_1\|^2 \|e_1\| \lambda_g (\|e_1\| + \|Iy_0\|) \\ &\leq \left(2\lambda_1 \lambda_g + \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_g \varrho \right) \|e_1\|^4 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_g \varrho^{-3} \|Iy_0\|^4 \leq H_{11} \|e_1\|^4 + F_{11} \end{aligned} \quad (6-24)$$

其中, $H_{11} = \left(2\lambda_1 \lambda_g + \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_g \varrho \right)$, $F_{11} = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_g \varrho^{-3} \|Iy_0\|^4$ 。正常参数 $\varrho > 0$ 可任意大。

利用引理 2.4, 可得

$$2\Phi e_1^T I\dot{y}_0 \leq 2 \left(\lambda_1 \|e_1\|^2 \right) \|e_1\| \|I\dot{y}_0\| \leq 2\lambda_1 \|e_1\|^3 \|I\dot{y}_0\| \leq H_{12} \|e_1\|^4 + F_{12} \quad (6-25)$$

其中, $H_{12} \geq \frac{3}{2} \lambda_1 \varrho$, $F_{12}(y_0, \dot{y}_0) \geq \frac{1}{2} \lambda_1 \varrho^{-3} \|\dot{y}_0\|^4$ 。通过选取参数 ϱ , 可使得 $F_{12}(y_0, \dot{y}_0)$ 任意小, 且满足 $F_{12}(0, 0) = 0$ 。为了简便, 以下推导过程中, 定义与 y_0 和 \dot{y}_0 相关的函数 $F_{j\sigma}(y_0, \dot{y}_0)$, 且满足 $F_{j\sigma}(0, 0) = 0$ 。对于 $j=1, \dots, \hat{n}$, $\sigma=1, \dots, 6$, 其中 $\hat{n} = \max\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$, $H_{j\sigma}$ 为适当正常值。

利用杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} -2\Phi e_1^T (x_2 - x_2^*) &\leq 2\lambda_1 \|e_1\|^2 \sum_{i \in \Omega_2} |e_{i1} \xi_{i2}| \\ &\leq 2\lambda_1 \|e_1\|^2 \|e_1\| \left(\sum_{i \in \Omega_2} |\xi_{i2}| \right) \leq H_{13} \|e_1\|^4 + \sum_{i \in \Omega_2} C \xi_{i2}^4 \end{aligned} \quad (6-26)$$

其中, $\Omega_j = \{i | n_i \geq j; i=1, 2, \dots, n\}$, $j=1, 2, \dots, \hat{n}$, $\hat{n} = \max\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$, $x_2^* = [x_{12}^*, \dots, x_{n2}^*]^T$, $H_{13} = \frac{3}{2} n \lambda_1$, $C = \frac{1}{2} \lambda_1$ 。

对于 Hessian 项, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ f_1(L+B) \frac{\partial^2 V_1}{\partial e_1^2} (L+B) f_1^T \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ 2f_1 e_1 (f_1 e_1)^T + f_1(L+B) e_1^T (L+B)^{-1} e_1 f_1^T \right\} \\ &\leq 2\sqrt{m} \|e_1\|^2 \|f_1\|^2 + \lambda_1 \|e_1\|^2 \text{tr} \left\{ f_1(L+B) f_1^T \right\} \\ &= 2\sqrt{m} \|e_1\|^2 \|f_1\|^2 + \lambda_1 \|e_1\|^2 \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i + d_i) \|f_{i1}\|^2 - \sum_{r,k=1}^n a_{rk} f_{r1}^T f_{k1} \right\} \\ &\leq 2\sqrt{m} \|e_1\|^2 \|f_1\|^2 + \lambda_1 \|e_1\|^2 \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i + d_i) \|f_{i1}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,k=1}^n a_{rk} (\|f_{r1}\|^2 + \|f_{k1}\|^2) \right\} \end{aligned}$$

基于引理 2.4 和引理 6.1, (6-17)和(6-20), 存在适当的正常值 H_{14} 和参数 F_{13} , 使得

$$\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ f_1(\cdot)(L+B) \frac{\partial^2 V_1}{\partial e_1^2} (L+B) f_1^T(\cdot) \right\} \leq H_{14} \|e_1\|^4 + F_{13} \quad (6-27)$$

通过(6-14)和(6-23)-(6-27), 可得

$$\begin{aligned} \ell V_1 &\leq -2\Phi e_1^T x_2^* + \sum_{i \in \Omega_2} C \xi_{i2}^4 + H_1 \|e_1\|^4 + F_1 \\ &\leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \sum_{i \in \Omega_2} C \xi_{i2}^4 + H_1 \|e_1\|^4 + F_1 \end{aligned} \quad (6-28)$$

其中, $\lambda_2 = \lambda_{\min}((L+B)^{-1})$ 是矩阵 $(L+B)^{-1}$ 的最小特征值。定义参数 $H_1 = H_{11} + \dots + H_{14}$,

$F_1 = F_{11} + F_{12} + F_{13}$ 。

第2步：计算 Lyapunov 函数 $\sum_{i \in \Omega_2} V_{i2}$ 的微分算子，如下

$$\begin{aligned}
 & \ell \sum_{i \in \Omega_2} V_{i2} \\
 &= \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial V_{i2}}{\partial e_{i1}} \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) + g_{ie} \right) \\
 &+ \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} g_{i2} + \sum_{i \in \Omega_3} \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} (x_{i3} - x_{i3}^*) + \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} x_{i3}^* \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_2} \left(\frac{\partial^2 V_{i2}}{\partial e_{i1}^2} f_{ie}^T f_{ie} + 2 \frac{\partial^2 V_{i2}}{\partial x_{i2} \partial e_{i1}} f_{i2}^T f_{ie} + \frac{\partial^2 V_{i2}}{\partial x_{i2}^2} f_{i2}^T f_{i2} \right)
 \end{aligned} \tag{6-29}$$

利用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_3} \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} (x_{i3} - x_{i3}^*) \leq \sum_{i \in \Omega_3} |\xi_{i2}|^3 |\xi_{i3}| \\
 & \leq \frac{3}{4} \sum_{i \in \Omega_3} \xi_{i2}^4 + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_3} \xi_{i3}^4 \leq \frac{3}{4} \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_3} \xi_{i3}^4
 \end{aligned} \tag{6-30}$$

利用引理 2.4 和(6-14)，可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial V_{i2}}{\partial e_{i1}} \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) \right) \\
 &= \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^3 \left(\frac{-\partial x_{i2}^*}{\partial e_{i1}} \right) \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) \right) \\
 &\leq \sum_{i \in \Omega_2} |\xi_{i2}^3| \beta_{i1} \left\{ \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} + b_i \right) (|\xi_{i2}| + |\xi_{i1} \beta_{i1}|) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l \in N_i} a_{il} (|\xi_{l2}| + |\xi_{l1} \beta_{l1}|) + b_i |\dot{y}_0| \right\} \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 d_{i2} + F_{21}
 \end{aligned} \tag{6-31}$$

其中， d_{i2} 是一个适当的正常数。

通过(6-15)，(6-17)，(6-19)和引理 2.4，可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial V_{i2}}{\partial e_{i1}} g_{ie}(\cdot) = \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^3 \frac{-\partial x_{i2}^*}{\partial e_{i1}} g_{ie}(\cdot) \\
 &\leq \sum_{i \in \Omega_2} |\xi_{i2}^3| \beta_{i1} \lambda_{gi} (\|e_1\| + \|I y_0\|) \leq \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 \varphi_{i2} + H_{21} \|e_1\|^4 + F_{22}
 \end{aligned} \tag{6-32}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_{i2}} g_{i2}(\cdot) &= \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^3 g_{i2}(\cdot) \leq \sum_{i \in \Omega_2} |\xi_{i2}^3| (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + |\xi_{i2}|) \bar{\delta}_{i2}(\cdot) \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i1}^4 + \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 b_{i2}(\bar{x}_{i2}) + H_{22} \|e_1\|^4 + F_{23} \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 b_{i2}(\bar{x}_{i2}) + H_{22} \|e_1\|^4 + F_{23}
 \end{aligned} \tag{6-33}$$

其中, φ_{i2} 是适当的正常数。 $b_{i2}(\bar{x}_{i2})$ 为正光滑函数。为了使不等式(6-50)成立, 且使得 F_{22} 可任意地调整, 在(6-32)的放缩中, 参数 β_{i1} 应当被融入参数 φ_{i2} 中, 且与设计参数 H_{22} 和 F_{22} 无关。后续对参数 $H_{j\sigma}$ 和 $F_{j\sigma}$ 有同样的放缩要求。

利用引理 2.4 和(6-21), 可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial^2 V_{i2}}{\partial e_{i1}^2} f_{ie}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_2} \left\{ \xi_{i2}^3 \frac{-\partial^2 x_{i2}^*}{\partial e_{i1}^2} + 3\xi_{i2}^2 \left(\frac{\partial x_{i2}^*}{\partial e_{i1}} \right)^2 \right\} \gamma_{fi}^2 (\|e_1\| + \|I y_0\|)^2 \\
 &\leq \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 \rho_{i21}(\bar{x}_{i2}) + H_{23} \|e_1\|^4 + F_{24}
 \end{aligned} \tag{6-34}$$

其中, $\rho_{i21}(\bar{x}_{i2})$ 为适当的正光滑函数。

利用(6-16), (6-17)和(6-21), 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial^2 V_{i2}}{\partial x_{i2} \partial e_{i1}} f_{i2}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) &= \sum_{i \in \Omega_2} 3\xi_{i2}^2 \frac{-\partial x_{i2}^*}{\partial e_{i1}} f_{i2}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) \\
 &\leq \sum_{i \in \Omega_2} 3\xi_{i2}^2 \beta_{i1} \gamma_{fi} (\|e_1\| + \|I y_0\|) (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + |\xi_{i2}|) \bar{\gamma}_{i2} \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 \rho_{i22}(\bar{x}_{i2}) + H_{24} \|e_1\|^4 + F_{25}
 \end{aligned} \tag{6-35}$$

其中, $\rho_{i22}(\bar{x}_{i2})$ 为适当的正光滑函数。

利用(6-16), (6-17)和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_2} \frac{\partial^2 V_{i2}}{\partial x_{i2}^2} f_{i2}^T(\cdot) f_{i2}(\cdot) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_2} 3\xi_{i2}^2 f_{i2}^T(\cdot) f_{i2}(\cdot) \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_2} 3\xi_{i2}^2 (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + |\xi_{i2}|)^2 \bar{\gamma}_{i2}^2(\bar{x}_{i2}) \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 \rho_{i23}(\bar{x}_{i2}) + H_{25} \|e_1\|^4 + F_{26}
 \end{aligned} \tag{6-36}$$

其中, $\rho_{i23}(\bar{x}_{i2})$ 为适当的正光滑函数。

利用(6-28)-(6-36), 可得

$$\begin{aligned} \ell V_1 + \ell \sum_{i \in \Omega_2} V_{i2} &\leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + 2 \sum_{\tau=1}^2 H_\tau \|e_1\|^4 \\ &\quad + \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 \left(C + \frac{3}{4} + d_{i2} + \varphi_{i2} + b_{i2} + \rho_{i2} \right) \\ &\quad - \sum_{i \in \Omega_2} \xi_{i2}^4 \beta_{i2} + 2 \sum_{\tau=1}^2 F_\tau + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_3} \xi_{i3}^4 \end{aligned} \quad (6-37)$$

其中, $\rho_{i2}(\bar{x}_{i2}) = \rho_{i21}(\bar{x}_{i2}) + \rho_{i22}(\bar{x}_{i2}) + \rho_{i23}(\bar{x}_{i2})$, $F_2(y_0, \dot{y}_0) = F_{21}(y_0, \dot{y}_0) + \dots + F_{26}(y_0, \dot{y}_0)$, $H_2 = H_{21} + \dots + H_{25}$ 。

对于 $i \in \Omega_2$, 设计 $\beta_{i2}(\bar{x}_{i2})$ 如下

$$\beta_{i2}(\bar{x}_{i2}) \geq C + \frac{3}{4} + d_{i2} + \varphi_{i2} + b_{i2} + \rho_{i2}(\bar{x}_{i2}) + (\hat{n} - 1) \quad (6-38)$$

则, 可得

$$\begin{aligned} \ell V_1 + \ell \sum_{i \in \Omega_2} V_{i2} &\leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \hat{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{\tau=1}^2 H_\tau \|e_1\|^4 \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i \wedge 2} (\hat{n} - 1) \xi_{ik}^4 + \sum_{\tau=1}^2 F_\tau + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_3} \xi_{i3}^4 \end{aligned} \quad (6-39)$$

第 j 步: 假定 $V_1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge (j-1)} V_{ik}$ 的微分算子, 如下

$$\begin{aligned} \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge (j-1)} V_{ik} &\leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \hat{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{\tau=1}^{j-1} H_\tau \|e_1\|^4 \\ &\quad - (\hat{n} - j + 2) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ik}^4 + \sum_{\tau=1}^{j-1} F_\tau + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \end{aligned} \quad (6-40)$$

则, 可计算 $\sum_{i \in \Omega_j} V_{ij}$ 的微分算子, 如下

$$\begin{aligned} \ell \sum_{i \in \Omega_j} V_{ij} &= \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} x_{i(j+1)}^* + \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} (x_{i(j+1)} - x_{i(j+1)}^*) \\ &\quad + \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} g_{ij} + \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ik}} (x_{i(k+1)} + g_{ik}) \\ &\quad + \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial e_{i1}} \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) + g_{ie} \right) + Trace \end{aligned} \quad (6-41)$$

其中, 定义

$$\begin{aligned} \text{Trace} = & \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \left\{ \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial e_{i1}^2} f_{ie}^T f_{ie} + 2 \sum_{r=1}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial e_{i1} \partial x_{ir}} f_{ie}^T f_{ir} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ij} \partial e_{i1}} f_{ij}^T f_{ie} + \sum_{r,k=1, r \neq k}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ir} \partial x_{ik}} f_{ir}^T f_{ik} \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} f_{ij}^T f_{ik} + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ik}^2} f_{ik}^T f_{ik} + \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ij}^2} f_{ij}^T f_{ij} \right\} \end{aligned}$$

为了推导方便, 给出以下命题。

命题 6.1 对于 $i=1, \dots, n$, $j=3, \dots, \hat{n}_i$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} (x_{i(j+1)} - x_{i(j+1)}^*) &= \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \xi_{ij}^3 \xi_{i(j+1)} \\ &\leq \frac{3}{4} \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \xi_{ij}^4 + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \xi_{i(j+1)}^4 \leq \frac{3}{4} \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \xi_{i(j+1)}^4 \end{aligned}$$

命题 6.2 对于 $i=1, \dots, n$, $j=3, \dots, \hat{n}_i$, 存在正的光滑函数 $d_{ij}(\bar{x}_{ij})$ 和正可调参数方程 $F_{j1}(y_0, \dot{y}_0)$, 使得

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial e_{i1}} \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) \right) \\ &= \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^3 \left(\frac{-\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right) \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} (x_{l2} - x_{i2}) + b_i (\dot{y}_0 - x_{i2}) \right) \\ &\leq \sum_{i \in \Omega_j} |\xi_{ij}^3| \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right| \left\{ \left(\sum_{l \in N_i} a_{il} + b_i \right) (|\xi_{i2}| + |\xi_{i1} \beta_{i1}|) + \sum_{l \in N_i} a_{il} (|\xi_{l2}| + |\xi_{l1} \beta_{l1}|) + b_i |\dot{y}_0| \right\} \\ &\leq 0.25 \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 d_{ij}(\bar{x}_{ij}) + F_{j1} \end{aligned}$$

命题 6.3 对于 $i=1, \dots, n$, $j=3, \dots, \hat{n}_i$, 存在正的光滑函数 $\varphi_{ij}(\bar{x}_{ij})$, 适当的正常数 H_{j1} , 和正可调参数方程 $F_{j2}(y_0, \dot{y}_0)$, 使得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial e_{i1}} g_{ie}(\cdot) &= \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^3 \frac{-\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} g_{ie}(\cdot) \\ &\leq \sum_{i \in \Omega_j} |\xi_{ij}^3| \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right| \lambda_{gi} (\|e_1\| + \|I y_0\|) \leq \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) + H_{j1} \|e_1\|^4 + F_{j2} \end{aligned}$$

命题 6.4 对于 $i=1, \dots, n$, $j=3, \dots, \hat{n}_i$, 存在正的光滑函数 $b_{ij}(\bar{x}_{ij})$, 适当的正常数 H_{j2} , 和正可调参数方程 $F_{j3}(y_0, \dot{y}_0)$, 使得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ik}} (x_{i(k+1)} + g_{ik}) + \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} g_{ij} = \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ij}^3 \frac{-\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ik}} (\xi_{i(k+1)} - \xi_{ik} \beta_{ik} + g_{ik}) + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^3 g_{ij} \\
 & \leq \sum_{i \in \Omega_j} |\xi_{ij}^3| \left\{ (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + \dots + |\xi_{ij}|) \bar{\delta}_{ij}(\cdot) + \sum_{k=1}^{j-1} \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ik}} \right| (|\xi_{i(k+1)}| + |\xi_{ik}| \beta_{ik} + (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + \dots + |\xi_{ik}|) \bar{\delta}_{ik}) \right\} \\
 & \leq 0.25 \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 b_{ij}(\bar{x}_{ij}) + H_{j2} \|e_1\|^4 + F_{j3}
 \end{aligned}$$

命题 6.5 对于 $i=1, \dots, n$, $j=3, \dots, \hat{n}_i$, 存在正的光滑函数 $\rho_{ij}(\bar{x}_{ij})$, 适当的正常数 H_{j3} , 和正可调参数方程 $F_{j4}(y_0, \dot{y}_0)$, 使得

$$Trace \leq 0.5 \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij}(\bar{x}_{ij}) + H_{j3} \|e_1\|^4 + F_{j4}$$

证明: 首先给出以下两个等式

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right| &= \left| \frac{\partial (\xi_{i(j-1)} \beta_{i(j-1)})}{\partial e_{i1}} \right| = \left| \beta_{i(j-1)} \left(\frac{\partial (\xi_{i(j-2)} \beta_{i(j-2)})}{\partial e_{i1}} \right) \right| = \beta_{i(j-1)} \beta_{i(j-2)} \dots \beta_{i1} \\
 \frac{\partial^2 x_{ij}^*}{\partial e_{i1}^2} &= 0
 \end{aligned}$$

利用(6-21)和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial e_{i1}^2} f_{ie}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \left\{ \frac{-\partial^2 x_{ij}^*}{\partial e_{i1}^2} \xi_{ij}^3 + 3 \xi_{ij}^2 \left(\frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right)^2 \right\} f_{ie}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \left\{ \left| \frac{\partial^2 x_{ij}^*}{\partial e_{i1}^2} \xi_{ij}^3 \right| + 3 \xi_{ij}^2 \left(\frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right)^2 \right\} \gamma_{fi}^2 (\|e_1\| + \|I y_0\|)^2 \leq \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij1}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j1} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j1}
 \end{aligned}$$

其中, \bar{H}_{j1} 是适当的正常数。 $\bar{F}_{j1}(y_0, \dot{y}_0)$ 为与 y_0 和 \dot{y}_0 相关的可调函数, 界可任意小, 且满足 $\bar{F}_{j1}(0,0)=0$ 。另外, 简便起见, 参数 $\bar{H}_{j2}, \dots, \bar{H}_{j7}$ 和 $\bar{F}_{j2}(y_0, \dot{y}_0), \dots, \bar{F}_{j7}(y_0, \dot{y}_0)$ 具有类似的性质, 不在赘述。

通过(6-16), (6-17), (6-21)和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{r=1}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial e_{i1} \partial x_{ir}} f_{ie}^T(\cdot) f_{ir}(\cdot) = \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{r=1}^{j-1} \left\{ \xi_{ij}^3 \frac{-\partial^2 x_{ij}^*}{\partial e_{i1} \partial x_{ir}} + 3 \xi_{ij}^2 \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ir}} \right\} f_{ie}^T(\cdot) f_{ir}(\cdot) \\
 & \leq \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{r=1}^{j-1} \left\{ \left| \xi_{ij}^3 \frac{-\partial^2 x_{ij}^*}{\partial e_{i1} \partial x_{ir}} \right| + 3 \xi_{ij}^2 \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ir}} \right| \right\} \gamma_{fi} (\|e_1\| + \|I y_0\|) (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + \dots + |\xi_{ir}|) \bar{\gamma}_{ir}(\bar{x}_{ir}) \\
 & \leq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij2}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j2} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ij} \partial e_{i1}} f_{ij}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) = \sum_{i \in \Omega_j} 3\xi_{ij}^2 \frac{-\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} f_{ij}^T(\cdot) f_{ie}(\cdot) \\
 & \leq \sum_{i \in \Omega_j} 3\xi_{ij}^2 \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial e_{i1}} \right| \gamma_{\hat{f}_i}(\|e_1\| + \|I y_0\|)(|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + |\xi_{i2}| + \dots + |\xi_{ij}|) \bar{\gamma}_{ij}(\bar{x}_{ij}) \\
 & \leq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i=1}^n \xi_{ij}^4 \rho_{ij3}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j3} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j3} \\
 & \quad \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{r, k=1, r \neq k}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ir} \partial x_{ik}} f_{ir}^T(\cdot) f_{ik}(\cdot) \\
 & = \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{r, k=1, r \neq k}^{j-1} f_{ir}^T(\cdot) f_{ik}(\cdot) \left\{ \xi_{ij}^3 \frac{-\partial^2 x_{ij}^*}{\partial x_{ir} \partial x_{ik}} + 3\xi_{ij}^2 \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ir}} \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ik}} \right\} \\
 & \leq \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{r, k=1, r \neq k}^{j-1} (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + |\xi_{i2}| + \dots + |\xi_{ir}|) \bar{\gamma}_{ir}(\bar{x}_{ir}) \\
 & \quad \times (|x_{i1}| + |\xi_{i1}| + \dots + |\xi_{ik}|) \bar{\gamma}_{ik}(\bar{x}_{ik}) \left\{ \left| \xi_{ij}^3 \frac{-\partial^2 x_{ij}^*}{\partial x_{ir} \partial x_{ik}} \right| + 3\xi_{ij}^2 \left| \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ir}} \frac{\partial x_{ij}^*}{\partial x_{ik}} \right| \right\} \\
 & \leq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij4}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j4} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j4}
 \end{aligned}$$

类似地，可得以下不等式成立

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} f_{ij}^T(\cdot) f_{ik}(\cdot) \leq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij5}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j5} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j5} \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ik}^2} f_{ik}^T(\cdot) f_{ik}(\cdot) \leq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij6}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j6} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j6} \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_j} \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_{ij}^2} f_{ij}^T(\cdot) f_{ij}(\cdot) \leq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n_i \wedge (j-1)} \xi_{ir}^4 + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \rho_{ij7}(\bar{x}_{ij}) + \bar{H}_{j7} \|e_1\|^4 + \bar{F}_{j7}
 \end{aligned}$$

选取正光滑函数 $\rho_{ij} = \sum_{k=1}^7 \rho_{ijk}$ ，参数 $H_{j3} := \bar{H}_{j1} + \dots + \bar{H}_{j7}$ 和 $F_{j4} = \bar{F}_{j1} + \dots + \bar{F}_{j7}$ 。进一步可

证得命题 6.5。证毕。

基于命题 6.1-6.5，可得

$$\begin{aligned}
 & \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge (j-1)} V_{ik} + \ell \sum_{i \in \Omega_j} V_{ij} = \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge j} V_{ik} \\
 & \leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \hat{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{\tau=1}^j H_\tau \|e_1\|^4 \\
 & \quad - (\hat{n} - j + 1) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} \xi_{ik}^4 + \sum_{\tau=1}^j F_\tau + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \xi_{i(j+1)}^4 - \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \beta_{ij}(\bar{x}_{ij}) \\
 & \quad + \sum_{i \in \Omega_j} \xi_{ij}^4 \{1 + d_{ij}(\bar{x}_{ij}) + \varphi_{ij}(\bar{x}_{ij}) + b_{ij}(\bar{x}_{ij}) + \rho_{ij}(\bar{x}_{ij})\}
 \end{aligned} \tag{6-42}$$

其中, $F_j = F_{j1} + \dots + F_{j4}$, $H_j = H_{j1} + H_{j2} + H_{j3}$ 。

设计 $\beta_{ij}(\bar{x}_{ij})$ 如下

$$\beta_{ij}(\bar{x}_{ij}) \geq 1 + d_{ij} + \varphi_{ij} + b_{ij} + \rho_{ij} + (\hat{n} - j + 1) \tag{6-43}$$

则有

$$\begin{aligned}
 \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge j} V_{ik} & \leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \hat{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{\tau=1}^j H_\tau \|e_1\|^4 \\
 & \quad - (\hat{n} - j + 1) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i \wedge j} \xi_{ik}^4 + \sum_{\tau=1}^j F_\tau + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega_{j+1}} \xi_{i(j+1)}^4
 \end{aligned} \tag{6-44}$$

第 \hat{n} 步: 对于 $i \in \Omega_{\hat{n}}$, 基于以上递归设计过程设计正光滑函数 $\beta_{i\hat{n}}(\bar{x}_{i\hat{n}})$ 如下

$$\beta_{i\hat{n}}(\bar{x}_{i\hat{n}}) \geq 1 + d_{i\hat{n}} + \varphi_{i\hat{n}} + b_{i\hat{n}} + \rho_{i\hat{n}} + 1 \tag{6-45}$$

设计 $x_{i(\hat{n}+1)}^*$ 如下

$$x_{i(\hat{n}+1)}^* = -\xi_{i\hat{n}}^4 \beta_{i\hat{n}}(\bar{x}_{i\hat{n}}) \tag{6-46}$$

即, 所设计的所有智能体控制器形式如下

$$u_i = -\xi_{in_i}^4 \beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) \tag{6-47}$$

其中,

$$\beta_{in_i}(\bar{x}_{in_i}) \geq 1 + b_{in_i} + d_{in_i} + \rho_{in_i} + \hat{n} - n_i + 1 \tag{6-48}$$

最终可得, 整体 Lyapunov 函数的微分算子如下

$$\begin{aligned}
 \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge (\hat{n}-1)} V_{ik} + \ell \sum_{i \in \Omega_{\hat{n}}} V_{i\hat{n}} & = \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i \wedge \hat{n}} V_{ik} = \ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} V_{ik} \\
 & \leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} + \hat{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^4 + \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} H_\tau \|e_1\|^4 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} \xi_{ik}^4 + \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} F_\tau
 \end{aligned} \tag{6-49}$$

基于引理 6.1, 必然存在正常值 β_{i1} 使以下不等式成立

$$2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^n e_{i1}^2 \beta_{i1} \geq \hat{n} \sum_{i=1}^n e_{i1}^4 + \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} H_{\tau} \|e_1\|^4 \quad (6-50)$$

结合(6-49)，可得

$$\ell V_1 + \ell \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} V_{ik} \leq -\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} \xi_{ik}^4 + \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} F_{\tau} \leq -\sum_{i=1}^n e_{i1}^4 - 4 \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n_i} V_{ik} + \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} F_{\tau} \quad (6-51)$$

利用引理 6.1，可得

$$\sum_{i=1}^n e_{i1}^4 \geq \frac{1}{n} \|e_1\|^4 \geq \frac{2}{n\lambda_1^2} \frac{1}{2} \lambda_1^2 \|e_1\|^4 \geq \frac{2}{n\lambda_1^2} V_1$$

进一步，可得

$$\ell V \leq -\min \left\{ \frac{2}{n\lambda_1^2}, 4 \right\} V + \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} F_{\tau}(y_0, \dot{y}_0) \leq -\alpha V + \epsilon \quad (6-52)$$

其中， $\alpha = \min \left\{ \frac{2}{n\lambda_1^2}, 4 \right\}$ ， $\epsilon = \sum_{\tau=1}^{\hat{n}} F_{\tau}(y_0, \dot{y}_0)$ ，且 $F_{\tau}(y_0, \dot{y}_0)$ 任意可调。

基于(6-52)，可得

$$\frac{dE[V(t)]}{dt} \leq -\alpha E[V(t)] + \epsilon \quad (6-53)$$

进一步，可得

$$E[V(t)] \leq e^{-\alpha t} E[V(0)] + \frac{\epsilon}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (6-54)$$

根据(6-54)，可得本章主要结论如下(相关分析，可参考文献[52]第 5 部分以及文献[33]定理 1)。

定理 6.1 对于满足假设 6.1-6.3 的多智能体系统(6-1)，所设计的分布式状态反馈控制器(6-47)，可保证输出跟踪误差期望有界，且其它状态量在概率上有界。

注释 6.2 由(6-52)可得，若 $y_0 = 0$ ， $F_{\tau}(y_0, \dot{y}_0) = 0$ ，即 ℓV 负定，则基于文献[126]，114 页，定理 2.4，可得输出跟踪误差以及跟随者所有状态变量随机渐近稳定，即

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0; x_0) = 0 \right\} = 1$$

其中， x_0 为初始值， t_0 为初始时刻， $x = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn_n}]$ 。

6.4 仿真验证

在本小节，考虑由一个领导者和三个跟随者构成的多智能体系统，通信拓扑如图 6-1。跟随者的动态模型如下

$$\begin{cases} dx_{11} = u_1 dt + 0.1x_{11} dw \\ dx_{21} = (x_{22} + 0.3x_{21})dt + 0.1x_{21} dw \\ dx_{22} = u_2 dt + x_{21} dw \\ dx_{31} = u_3 dt + 0.1x_{31} dw \end{cases} \quad (6-55)$$

基于本章提出的控制器设计方法，通过两步构造系统控制器 u_1 ， u_2 ， u_3 。具体推导过程如下。

第 1 步，选取形如(6-22)的 Lyapunov 函数，基于(6-24)-(6-27)，可得

$$\begin{aligned} -2\Phi e_1^T g_1 &\leq 2\lambda_1 \|e_1\|^3 |0.3x_{21}| \leq 2\lambda_1 \|e_1\|^3 0.3\sqrt{2} (\lambda_1 \|e_1\| + \|Iy_0\|) \\ &\leq 0.6\sqrt{2}\lambda_1^2 \|e_1\|^4 + \frac{1}{4} 2\sqrt{2}\lambda_1 \|Iy_0\|^4 \varrho^{-3} + \frac{3}{4} \varrho 2\sqrt{2}\lambda_1 \|e_1\|^4 (0.3^{4/3}) \end{aligned} \quad (6-56)$$

$$2\Phi e_1^T I\dot{y}_0 \leq \frac{3}{2} \varrho \lambda_1 \|e_1\|^4 + \frac{1}{2} \varrho^{-3} \lambda_1 \|I\dot{y}_0\|^4 \quad (6-57)$$

$$-2\Phi e_1^T (x_2 - x_2^*) \leq \frac{3}{2} \lambda_1 \|e_1\|^4 + \frac{1}{2} \lambda_1 \|\xi_{22}\|^4 \quad (6-58)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} tr \left\{ f_1 (L+B) \frac{\partial^2 V_1}{\partial e_1^2} (L+B) f_1^T \right\} \\ &\leq 2 * 0.1^2 \|e_1\|^2 \|y\|^2 + 0.1^2 \lambda_1 \lambda_3 \|e_1\|^2 \|y\|^2 \\ &\leq 0.1^4 \|e_1\|^4 (4\lambda_1^2 + 2\lambda_1^3 + 2\varrho + \lambda_1 \lambda_3 \varrho) \\ &\quad + 2\varrho^{-3} \|Iy_0\|^4 + \lambda_1 \lambda_3 \varrho^{-1} \|Iy_0\|^4 \end{aligned} \quad (6-59)$$

其中， $\varrho > 0$ 。 λ_3 是矩阵 $(L+B)$ 的最大特征值。

进一步，可得

$$\begin{aligned} \ell V_1 &\leq -2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^3 e_{i1}^2 \beta_{i1} + \frac{1}{2} \lambda_1 \|\xi_{22}\|^4 + H_1 \|e_1\|^4 + \frac{1}{4} 2\sqrt{2}\lambda_1 \|Iy_0\|^4 \varrho^{-3} \\ &\quad + \frac{1}{2} \varrho^{-3} \lambda_1 \|I\dot{y}_0\|^4 + 2\varrho^{-3} \|Iy_0\|^4 + \lambda_1 \lambda_3 \varrho^{-1} \|Iy_0\|^4 \end{aligned} \quad (6-60)$$

其中，

$$\begin{aligned} H_1 &= 0.6\sqrt{2}\lambda_1^2 + \frac{3}{4} \varrho 2\sqrt{2}\lambda_1 (0.3^{4/3}) + \frac{3}{2} \varrho \lambda_1 \\ &\quad + \frac{3}{2} \lambda_1 + 0.1^4 (4\lambda_1^2 + 2\lambda_1^3 + 2\varrho + \lambda_1 \lambda_3 \varrho) \end{aligned}$$

第 2 步, 基于(6-31)-(6-36), 可得

$$\frac{\partial V_{22}}{\partial e_{21}}(a_{23}(u_3 - x_{22}) + b_2(\dot{y}_0 - x_{22})) \leq \frac{1}{4}(\xi_{21}^4 + \xi_{31}^4) + \xi_{22}^4 d_{22} + \frac{\varrho^{-3} b_2}{4} |\dot{y}_0|^4 \quad (6-61)$$

$$\frac{\partial V_{22}}{\partial e_{21}} g_{2e} \leq |\xi_{22}^3| \beta_{21} (a_{23} |x_{21}| + b_2 |x_{21}|) \leq \xi_{22}^4 \varphi_{22} + \frac{1}{4} \|e_1\|^4 + \frac{1}{4} \varrho^{-3} \|I y_0\|^4 \quad (6-62)$$

$$\frac{\partial V_{22}}{\partial x_{22}} g_{22} = 0 \quad (6-63)$$

$$\frac{3}{2} \xi_{22}^2 \beta_{21}^2 f_{2e}^2 \leq 3 \xi_{22}^2 \beta_{21}^2 0.1^2 (a_{23} + b_2)^2 \|y\|^2 \leq \xi_{22}^4 \rho_{221} + \|e_1\|^4 + 3 \varrho^{-3} \|I y_0\|^4 \quad (6-64)$$

$$\begin{aligned} & -3 \xi_{22}^2 \beta_{21} f_{2e} f_{22} \\ & \leq 3 \xi_{22}^2 \beta_{21} |x_{21}| |a_{23} (x_{31} - x_{21}) - b_2 x_{21}| 0.1 \leq 3 \xi_{22}^2 \beta_{21} (a_{23} + b_2) \|y\|^2 0.1 \\ & \leq \xi_{22}^4 \rho_{222} + 0.03 \lambda_1^2 (a_{23} + b_2) \|e_1\|^4 + 0.03 \lambda_1^2 (a_{23} + b_2) \varrho^{-1} \|I y_0\|^4 \end{aligned} \quad (6-65)$$

$$\frac{3}{2} \xi_{22}^2 f_{22}^2 \leq \xi_{22}^4 \rho_{223} + \|e_1\|^4 + \frac{3}{2} \varrho^{-1} \|I y_0\|^4 \quad (6-66)$$

其中,

$$\begin{aligned} d_{22} &= \frac{3}{4} (\beta_{21} \beta_{31} a_{23})^{4/3} + \frac{3}{4} \beta_{21}^{8/3} (a_{23} + b_2)^{4/3} + a_{23} \beta_{21} + \frac{3}{4} \varrho b_2 \beta_{21}^{4/3} + b_2 \\ \varphi_{22} &= \frac{3}{4} (\beta_{21} (a_{23} + b_2) \sqrt{2} \lambda_1)^{4/3} + \frac{3}{4} \varrho (\beta_{21} (a_{23} + b_2) \sqrt{2})^{4/3} \\ \rho_{221} &= 0.1^4 * 3 (\beta_{21} (a_{23} + b_2) \lambda_1)^4 + 0.1^4 * 3 \varrho (\beta_{21} (a_{23} + b_2))^{4/3} \\ \rho_{222} &= 3 \lambda_1^2 (a_{23} + b_2) \beta_{21}^2 + 3 \varrho (a_{23} + b_2) \beta_{21}^2 \\ \rho_{223} &= \frac{3}{2} \lambda_1^4 + \frac{3}{2} \varrho \end{aligned}$$

进一步, 可得

$$\begin{aligned} \ell \sum_{i \in \Omega_2} V_{i2} &\leq \frac{1}{4} (\xi_{21}^4 + \xi_{31}^4) + \xi_{22}^4 u_2 + \frac{1}{4} \varrho^{-3} b_2 |\dot{y}_0|^4 \\ &+ \xi_{22}^4 (d_{22} + \varphi_{22} + \rho_{221} + \rho_{222} + \rho_{223}) + 2.25 \|e_1\|^4 \\ &+ \frac{1}{4} \varrho^{-3} \|I y_0\|^4 + 3 \varrho^{-3} \|I y_0\|^4 + 0.03 \lambda_1^2 (a_{23} + b_2) \varrho^{-1} \|I y_0\|^4 \\ &+ 0.03 \lambda_1^2 (a_{23} + b_2) \|e_1\|^4 + \frac{3}{2} \varrho^{-1} \|I y_0\|^4 \end{aligned}$$

令 $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = \beta_1$ 且选取 β_1 满足

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 \|e_1\|^2 \sum_{i=1}^3 e_{i1}^2 \beta_{i1} &= 2\lambda_2 \|e_1\|^4 \beta_1 \\ &\geq (0.03\lambda_1^2 (a_{23} + b_2) + 2.25) \|e_1\|^4 + 2H_1 + 2(\xi_{11}^4 + \xi_{21}^4 + \xi_{31}^4) \end{aligned} \quad (6-67)$$

利用(6-47)，可设计控制器为如下形式

$$u_1 = e_{11}\beta_{11}; u_2 = -\xi_{22}\beta_{22}; u_3 = e_{11}\beta_{31}$$

其中， $\xi_{22} = x_{22} - x_{22}^*$ ， $x_{22}^* = e_{11}\beta_{21}$ ， $\beta_{22} = d_{22} + \varphi_{22} + \rho_{221} + \rho_{222} + \rho_{223} + \frac{1}{2}\lambda_1 + 1$ 。

设置参数 $a_{23} = a_{22} = 0.8$ ， $b_1 = b_2 = 1$ ，则取 $\lambda_1 = 2.8042$ ， $\lambda_2 = 0.4485$ ， $\lambda_3 = 2.2434$ 。选取 $\varrho = 3$ 。基于(6-67)，设计 $\beta_1 = 35.6390$ 。系统初始值选取如下 $x_{11} = -1$ ， $x_{21} = 3$ ， $x_{22} = 2$ ， $x_{31} = -2$ 。考虑两种情形：情形 1， $y_0 = 0.5(\sin(6t) + \cos(2t))$ ；情形 2， $y_0 = 0$ 。仿真结果如图 6-2 至 6-5，从中可看出设计方法的有效性。

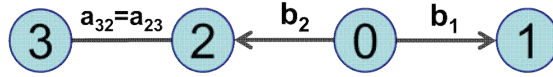


图 6-1 通信拓扑图

Fig. 6-1 Communication topology

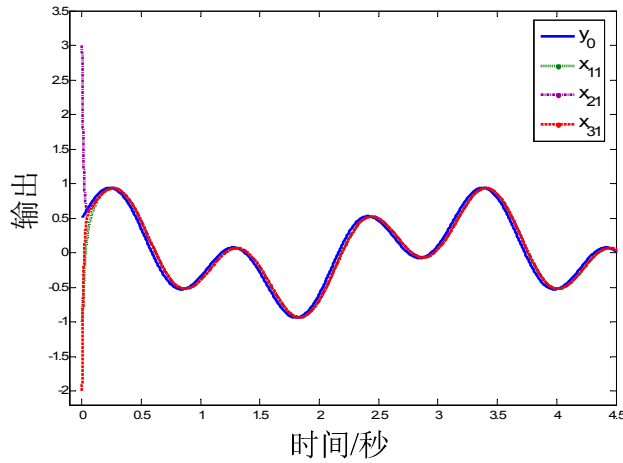


图 6-2 情形 1 下的输出曲线

Fig. 6-2 Outputs consensus of the multi-agent systems in the case 1

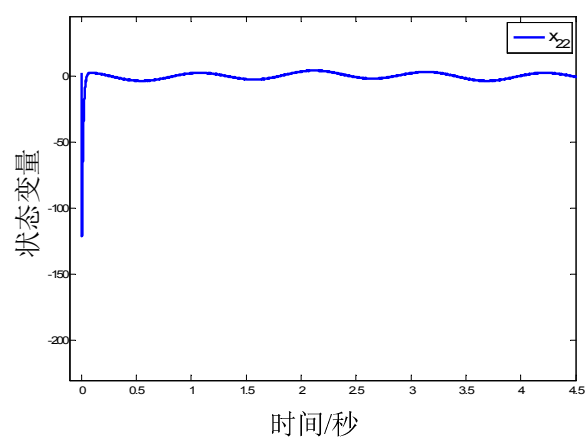


图 6-3 情形 1 下状态量 x_{22} 响应曲线

Fig. 6-3 The response of x_{22} in the case 1

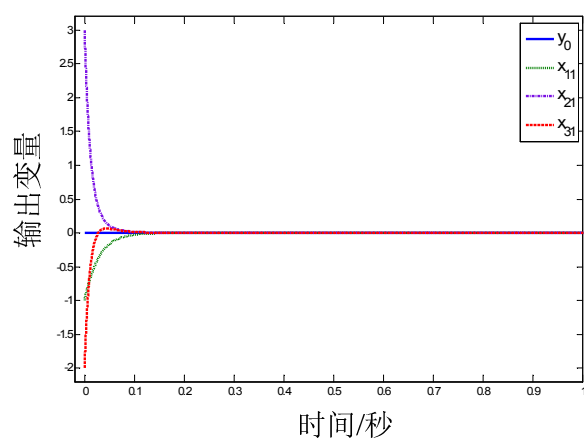


图 6-4 情形 2 下的输出曲线

Fig. 6-4 Outputs consensus of the multi-agent systems in the case 2

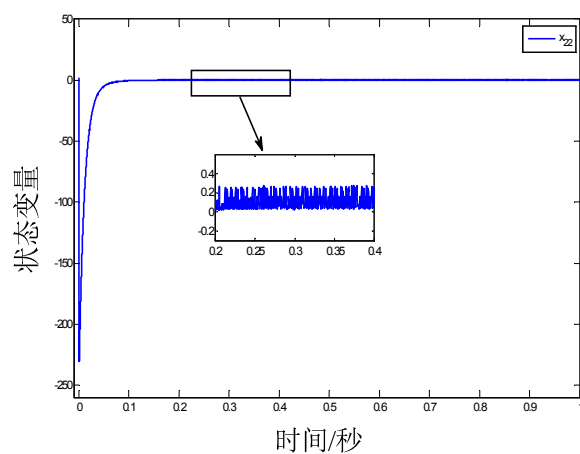


图 6-5 情形 2 下状态量 x_{22} 响应曲线

Fig. 6-5 The response of x_{22} in the case 2

6.5 本章小结

本章作为前一章工作的延伸,进一步考虑了随机扰动对智能体系统的影响,研究了随机多智能体系统领导跟随分布式控制问题。通过递归的设计方法构造系统状态反馈控制器,所设计的控制器只需要邻接智能体的输出信息,因此,每个智能体在系统结构上可以存在较大差异,并基于随机系统 Lyapunov 稳定理论,证明跟踪误差期望的有界性。最后,通过数值仿真说明方法的有效性。

结 论

本文主要针对下三角结构的非线性系统，利用递归设计方法，分别研究了下三角确定性系统、下三角随机非线性系统以及下三角非线性多智能体系统的控制器设计问题。考虑了系统未建模、死区输入非线性、随机扰动、不确定参数、时滞等因素对系统控制器设计及稳定性分析的影响，给出了系统控制器设计策略。并结合图论知识，研究了多智能体系统分布式控制问题。所给出的研究结果，一定程度上放松了现有结果的限制性条件，且丰富了相关领域的理论研究内容。本文的主要创新归结如下：

(1) 在确定性下三角非线性系统的研究方面，本文主要针对具有死区输入特性及未建模的关联时变系统，分别设计了系统状态反馈有限时间分散控制策略和状态反馈固定时间分散控制策略，且给出相应的状态收敛至平衡点的有限时间上界值及固定时间上界值。所设计的有限时间与固定时间分散控制器，有效克服了未建模、死区非线性及时变项带来的影响；

(2) 在下三角随机非线性系统的研究方面，针对更为一般化的 p 型随机不确定非线性系统，分别考虑切换特性和时滞因素，并给出了相应的自适应状态反馈控制策略。在具有切换特性时，基于共同 Lyapunov 函数的方法，设计了独立于切换规则的控制律及自适应律，并给出了随机有限时间稳定条件，进一步扩展了确定性系统方面的研究结果。在考虑时滞因素时，首先给出了系统解的存在性唯一性定理及时滞随机系统稳定性定理，并利用动态增益方法，给出了时滞随机系统的控制器设计方法。这一情形中，相比于现有结果，所研究的系统非线性项中，所有状态量均可以含有时滞信息，极大的放松了现有结果的限制性条件；

(3) 在下三角非线性多智能体系统的研究方面，分别考虑了确定性多智能体系统的包络控制问题和随机多智能体系统的领导跟随一致性问题。在确定性多智能体情形中，利用动态增益方法，构造了系统降阶动态增益观测器，放松了现有观测器设计对非线性项的 Lipchitz 条件限制。在随机多智能体情形中，基于随机系统稳定理论，设计分布式控制器，克服了随机扰动对一致性控制的影响。两种情形下，所研究的多智能体系统可以存在很强的异构性，且设计的分布式控制器只需要邻接智能体输出信息，并能保证系统全局稳定性。

本文主要采用递归设计方法，对系统进行控制器设计。在针对不同的系统类型时，状态变换的细节上存在较大差异，但总体的设计思路具有一定的相通性。虽然本文在下三角非线性系统的控制器设计方面，放松了现有结果的一些限制性条件，

并给出了一些新颖的设计方法，但递归设计的采用，不可避免的会引入一些问题，如计算爆炸、高增益等。另外，在随机时滞系统及多智能体系统控制方面也存在较多值得深入考虑的问题。以下将这些问题及相关可能的解决方法简要概括如下：

(1) 针对高阶非线性下三角系统反步设计中存在的计算爆炸问题，目前通常采用动态面的方法进行处理，但只能做到半全局有界稳定，在初始值的选取上，存在较大限制。也有一部分文献采用非递归的设计方法，构造系统控制器，但研究结果相对较少，在我们的成果中也有初步涉及；

(2) 针对随机时滞系统，在本文中给出了 p 型随机系统的状态反馈控制器设计方法，在我们其它的主要成果中，对严格反馈型随机时滞系统的输出反馈控制也做了相关研究，但本文假设条件下的 p 型时滞随机系统的输出反馈问题，仍是一个具有挑战性的难题；

(3) 针对多智能体系统，本文主要研究了输出一致性问题，而并未涉及全状态一致性问题。现有的论文成果中对于全状态一致性的研究，主要为线性多智能体，非线性多智能体的相关成果很少，在随机多智能体方面寥寥无几。因此非线性多智能体全状态一致性问题也是一个值得研究的方向。

参考文献

- [1] Bergen A R. Power System Analysis[M]. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1986.
- [2] Zhang H, Cai L. Decentralized nonlinear adaptive control of an HVAC system[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part C, 2002, 32(4):493-498.
- [3] Cheng D Z, Zhi-Qiang L I. A survey on linearization of nonlinear systems[J]. Journal of Shandong University, 2009, 39(2):26-36.
- [4] Khali H K. Nonlinear systems (Third Edition)(M). Prentice Hall, 2002.
- [5] Hua C, Yang Y. Bilateral teleoperation design with/without gravity measurement[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2012, 61(12):3136-3146.
- [6] Hua C, Chen J, Li Y. Leader-follower finite-time formation control of multiple quadrotors with prescribed performance[J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(16):1-10.
- [7] Jiang Z P, Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping[J]. Automatica, 1997, 33(7): 1393-1399
- [8] Yang Y S, Ren J S. Adaptive fuzzy robust tracking controller design via small gain approach and its application[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003, 11(6): 783-795.
- [9] Ferrara A, Giacomini L. Control of a class of mechanical systems with uncertainties via a constructive adaptive/second order VSC approach[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control, 2000, 122(1): 33-39.
- [10] Krstic M. Nonlinear and adaptive control design[M]. John Willey & Sons, Inc, 1995.
- [11] Xie X J, Duan N. Output tracking of high-order stochastic nonlinear systems with application to benchmark mechanical system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(5):1197-1202.
- [12] Liu L, Yin S, Zhang L, et al. Improved results on asymptotic stabilization for stochastic nonlinear time-delay systems with application to a chemical reactor system[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Systems, 2017, 47(1):195-204.
- [13] Khoo S, Yin J, Man Z, Yu X.. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form[J]. Automatica, 2013, 49(5):1403-1410.
- [14] 刘金琨,尔联洁.多智能体技术应用综述[J].控制与决策, 2001,16(2):133-140.
- [15] 王巍.不确定非线性多智能体系统的协调控制[D].大连:大连海事大学博士学位论文,2015.
- [16] 王祥科,李迅,郑志强.多智能体系统编队控制相关问题研究综述[J].控制与决策, 2013, 28(11):1601-1613.
- [17] 原魁,李园,房立新.多移动机器人系统研究发展近况[J].自动化学报, 2007,33(8):785-794.

- [18] 游秀.一类非匹配非线性多智能体系统的分布式一致性控制[D].秦皇岛:燕山大学博士学位论文,2017.
- [19] 王晓丽,洪奕光.多智能体系统分布式控制的研究新进展[J].复杂系统与复杂性科学. 2010,7(2-3):70-81.
- [20] Yun H C, Yoo S J. Filter-driven-approximation-based control for a class of pure-feedback systems with unknown nonlinearities by state and output feedback[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Systems, 2018, 48(2):161–176.
- [21] Ge S S, Yang C, Tong H L. Adaptive predictive control using neural network for a class of pure-feedback systems in discrete time[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19(9): 1599–1614.
- [22] Hua C, Zhang L, Guan X. Decentralized output feedback controller design for nonlinear interconnected systems with unknown control direction and time-varying delays[J]. International Journal of Adaptive Control & Signal Processing, 2015, 28(11):1160-1173.
- [23] Li Y, Tong S, Li T. Adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control of interconnected nonlinear pure-feedback systems.[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(1):138-149.
- [24] Mahmoud M S, Decentralized systems with design constraints[M]. Springer-Verlag, UK, 2011.
- [25] Hua C, Zhang L, Guan X. Output feedback control for interconnected time-delay systems with prescribed performance[J]. Neurocomputing, 2014, 129: 208-215.
- [26] Zhang X, Lin Y. Nonlinear decentralized control of large-scale systems with strong interconnections [J]. Automatica, 2014, 50(9):2419-2423.
- [27] Hua C, Wang Q G, Guan X. Adaptive fuzzy output feedback controller design for nonlinear time delay systems with unknown control direction[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B, 2009, 39(2): 363-374.
- [28] Huang X, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear Systems[J]. Automatica, 2005, 41(5):881-888.
- [29] Hong Y, Wang J, Cheng D. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(5):858-862.
- [30] Deng H, Krstić M. Stochastic nonlinear stabilization–I: A backstepping design[J]. Systems & Control Letters, 1997, 32:143–150.
- [31] Liu S, Zhang J, Jiang Z. A Notion of stochastic input-to-state stability and its application to Stability of cascaded stochastic nonlinear systems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2008; 24(1):141–156.

-
- [32] Yin J, Khoo S, Man Z, Yu X. Finite-time stability and instability of stochastic nonlinear systems[J]. Automatica, 2011, 47:2671-2677.
- [33] Liu S, Zhang J, Jiang Z. Decentralized adaptive output-feedback stabilization for large-scale stochastic nonlinear systems[J]. Automatica, 2007, 43:238-251.
- [34] Xie X J, Tian J. Adaptive state-feedback stabilization of high-order stochastic systems with nonlinear parameterization[J]. Automatica, 2009, 45:126-133.
- [35] 焦晓红,关新平.非线性系统分析与设计[M].电子工业出版社,2008.
- [36] Zhang X, Lin Y. A New Approach to global asymptotic tracking for a class of low-triangular nonlinear systems via output feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(12):3192-3196.
- [37] Jiang Z P, Praly L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties[J]. Automatica, 1998, 34(7):825-840.
- [38] Hua C, Guan X, Shi P. Robust backstepping control for a class of time delayed systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6):894-899.
- [39] Yoo S J, Jin B P, Choi Y H. Adaptive dynamic surface control for stabilization of parametric strict-feedback nonlinear systems with unknown time delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(12):2360-2365.
- [40] Liu S, Ge S, & Zhang J. Adaptive output-feedback control for a class of uncertain stochastic non-linear systems with time delays[J]. International Journal of Control, 2008, 81(8):1210-1220.
- [41] Zhang X, Lin, Y. Adaptive control of nonlinear time-delay systems with application to a two-stage chemical reactor[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4):1074-1079.
- [42] Wang H, Zhu Q. Finite-time stabilization of high-order stochastic nonlinear systems in strict-feedback form[J]. Automatica, 2015, 54: 284-291.
- [43] Saber R, Fax J, Murray R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [44] Ren W. On consensus algorithms for double-integrator dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(6): 1503-1509.
- [45] Yu W, Chen G, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1089-1095.
- [46] Du H, Li S, He Y, et al. Distributed high-order finite-time consensus algorithm for multi-agent systems[C]. in Proceedings of the 32th Chinese Control Conference, Xi'an, China, 2013, 603-608.
- [47] Rezaee H, Abdollahi F. Average consensus over high-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions

- on Automatic Control, 2015, 60(11): 3047-3052.
- [48] Das A, Lewis F L. Cooperative adaptive control for synchronization of second-order systems with unknown nonlinearities[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2011, 21(13):1509-1524.
- [49] Yoo S J. Distributed adaptive containment control of uncertain nonlinear multi-agent systems in strict-feedback form[J]. Automatica, 2013, 49(7):2145-2153.
- [50] Wang W, Wen C, Huang J. Distributed adaptive asymptotically consensus tracking control of nonlinear multi-agent systems with unknown parameters and uncertain disturbances [J]. Automatica, 2017, 77:133-142.
- [51] Hua C, Zhang L, Guan X. Distributed adaptive neural network output tracking of leader-following high-order stochastic nonlinear multiagent systems with unknown dead-zone input[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 47(1):177-185.
- [52] Li W, Zhang J F. Distributed practical output tracking of high-order stochastic multi-agent systems with inherent nonlinear drift and diffusion terms[J]. Automatica, 2014, 50(12):3231-3238.
- [53] You X, Hua C, Guan X. Self-triggered leader-following consensus for high-order nonlinear multiagent systems via dynamic output feedback control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, DOI: 10.1109/TCYB.2018.2813423.
- [54] Zhang X, Liu L, Feng G. Leader-follower consensus of timevarying nonlinear multi-agent systems[J]. Automatica, 2015, 52: 8–14.
- [55] Wang H, Chen B. Adaptive fuzzy decentralized control for a class of large scale stochastic nonlinear systems[J]. Neurocomputing, 2013, 103:155-163.
- [56] Oucheriah S. Decentralized stabilization of large scale systems with multiple delays in the interconnections[J]. International journal of control, 2000, 73(13):1213-1223.
- [57] Mahmoud M S. Decentralized stabilization of interconnected systems with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54 (11): 2663-2668.
- [58] Thanh N T, Phat V N. Decentralized H_∞ control for large-scale interconnected nonlinear time-delay systems via LMI approach[J]. Journal of Process Control, 2012, 22 (7):1325-1339.
- [59] Zhang X, Feng G, Sun Y. Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems [J]. Automatica, 2012, 48(3):499-504.
- [60] Fu J, Ma R, Chai T. Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers[J]. Automatica, 2015, 54:360–373.

-
- [61] Liang Y J, Ma R, Wang M, et al. Global finite-time stabilisation of a class of switched nonlinear systems[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(16):2897-2904.
- [62] Hua C, Guan X. Output feedback stabilization for time-delay nonlinear interconnected systems using neural networks[J]. IEEE Trans Neural Netw, 2008, 19(4):673-688.
- [63] Liu Y, Li X Y. Decentralized robust adaptive control of nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5):848-856.
- [64] Rovithakis G A. Robust redesign of a neural network controller in the presence of unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Neural Network, 2004, 15(6):1482-1490.
- [65] Tong S, Wang T, Li Y, et al. Adaptive neural network output feedback control for stochastic nonlinear systems with unknown dead-zone and unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 44(6):910-921.
- [66] Hong Y, Jiang Z P, Feng G. Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2010, 48(7): 4395–4418.
- [67] Sontag E, Teel A. Changing supply functions in input/state stable systems[J]. Automatic Control IEEE Transactions on, 1995, 40(8):1476-1478.
- [68] L Liu, XJ Xie. Output-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay [J]. Automatica, 2011, 47(12):2772-2779.
- [69] Zuo Z. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks[J]. Automatica, 2015, 54(C):305-309.
- [70] Zuo Z, Lin T. Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(6):1366-1375.
- [71] Du H, Qian C, Yang S, et al. Recursive design of finite-time convergent observers for a class of time-varying nonlinear systems [J]. Automatica, 2013, 49(2):601-609.
- [72] Bacciotti A, Rosier L. Liapunov functions and stability in control theory (2nd ed)[M]. Springer, 2005.
- [73] Tang Y, Tomizuka M, Guerrero G, et al. Decentralized robust control of mechanical systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 45(4):771-776.
- [74] Mao X. A note on the LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 268:125–142.
- [75] Li W, Liu X, Zhang S. Further results on adaptive state-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems[J]. Automatica, 2012, 48:1667–1675.
- [76] Liu L, Xie X J. State-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with SISS inverse dynamics[J]. Asian Journal of Control, 2012, 14:207–216.

- [77] Liu L, Yin S, Gao H, Alsaadi F, Hayat T. Adaptive partial-state feedback control for stochastic high-order nonlinear systems with stochastic input-to-state stable inverse dynamics[J]. *Automatica*, 2015, 51:285–291.
- [78] Gao F, Wu Y. Global finite-time stabilisation for a class of stochastic high-order time-varying nonlinear systems[J]. *International Journal of Control*, 2016, 89(12): 2453–2465.
- [79] Lin W, Qian C J. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2000, 39(5): 339–351.
- [80] Lin W, Qian C J. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: an adding a power integrator technique[J]. *Systems and Control Letters*, 2000, 39(5):353–364.
- [81] Zhao X, Shi P, Zheng X, Zhang J. Intelligent tracking control for a class of uncertain high order nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on neural networks and learning systems*, 2016, 27(9): 1976–1982.
- [82] Zhang X, Lin W, Lin Y. Nonsmooth control of time-delay nonlinear systems by dynamic state feedback[J]. *IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control*, 2015: 7715–7722.
- [83] Hou M, Fu F, Duan G. Global stabilization of switched stochastic nonlinear systems in strictfeedback form under arbitrary switchings[J]. *Automatica*, 2013: 49:2571–2575.
- [84] Niu B, Karimi H R, Wang H, Liu Y. Adaptive output-feedback controller design for switched nonlinear stochastic systems with a modified average dwell-time method[J]. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics: systems*, 2017, 47(7): 1371–1382.
- [85] Zhao X, Shi P, Zheng X, Zhang L. Adaptive tracking control for switched stochastic nonlinear systems with unknown actuator dead-zone[J]. *Automatica*, 2015, 60:193–200.
- [86] Huang S, Xiang Z. Finite-time stabilization of switched stochastic nonlinear systems with mixed odd and even powers[J]. *Automatica*, 2016, 73:130-137.
- [87] Huang S, Xiang Z. Finite-time stabilization of a class of switched stochastic nonlinear systems under arbitrary switching[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26: 2136–2152.
- [88] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4):475–482.
- [89] Yin J, Khoo S. Continuous finite-time state feedback stabilizers for some nonlinear stochastic systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25:1581–1600.
- [90] Li F, Liu Y. Global stability and stabilization of more general stochastic nonlinear systems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, 413: 841–855.

-
- [91] Zhang J, Liu Y. Nonsmooth adaptive control design for a large class of uncertain high-order stochastic nonlinear systems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012(1):291-300.
- [92] Qian C, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7):1061–1079.
- [93] Gu K, Chen J, Kharitonov V. *Stability of time-delay systems*[M]. Birkhäuser Boston, 2003.
- [94] Hua C, Liu P X, Guan X. Backstepping control for nonlinear systems with time delays and applications to chemical reactor systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(9):3723-3732.
- [95] Hua C C, Guan X P. Smooth dynamic output feedback control for multiple time-delay systems with nonlinear uncertainties [J]. *Automatica*, 2016, 68:1-8.
- [96] Lin C, Wang Q G, Tong H L, et al. LMI approach to analysis and control of takagi-sugeno fuzzy systems with time delay[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [97] Zhao X, Yang H, Xia W, et al. Adaptive fuzzy hierarchical sliding-mode control for a class of MIMO nonlinear time-delay systems with input saturation[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 25(5):1062-1077.
- [98] Zhang X, Lin Y. Global stabilization of high-order nonlinear time-delay systems by state feedback[J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 65: 89–95.
- [99] Zhang X, Lin Y. Nonsmooth Feedback Control of Time-Delay Nonlinear Systems: A Dynamic Gain Based Approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(1): 438–444.
- [100] Zhu, Y., Krstic, M., & Su, H. Adaptive output feedback control for uncertain linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(2): 545–560.
- [101] Deng H, Krstić M. Stochastic nonlinear stabilization part I: a backstepping design[J]. *Systems and Control Letters*, 1997, 32: 143–150.
- [102] Krstić M, Deng H. *Stabilization of uncertain nonlinear systems*[M]. New York: Springer,1998.
- [103] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations[M]. Dekker, New York, 1994.
- [104] Li X, Mao X. The improved LaSalleType theorems for stochastic differential delay equations[J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 2012, 30: 568–589.
- [105] Xie X, Liu L. A homogeneous domination approach to state feedback of stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013,58(2): 494–499.

- [106] Xie X, Liu L. Further results on output feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2012,48: 2577–2586.
- [107] Liu S, Jiang Z, Zhang J. Global output-feedback stabilization for a class of stochastic non-minimum-phase nonlinear systems[J]. Automatica, 2008,44: 1944–1957.
- [108] Jiao T, Xu S, Lu J, Wei Y, Zou, Y. Decentralised adaptive output feedback stabilisation for stochastic time-delay systems via LaSalle-Yoshizawa-type theorem[J]. International Journal of Control, 2016,89(1): 69–83.
- [109] Kolmanovskii V B, Nosov V R. Stability of Functional Differential Equations[M]. London: Academic Press, 1986.
- [110] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control System Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [111] Ren W, Beard R W, Atkins E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination[C]. American Control Conference, 2005, 1859–1964.
- [112] Ren W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state[J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(7):474-483.
- [113] Su Y, Huang J. Cooperative output regulation of linear multiagent systems by output feedback[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61:1248–1253.
- [114] El-Ferik S, Qureshi A, Lewis F L. Neuro-adaptive cooperative tracking control of unknown higher-order affine nonlinear systems[J]. Automatica, 2014, 50(3):798-808.
- [115] Shen Q, Shi P. Distributed command filtered backstepping consensus tracking control of nonlinear multiple-agent systems in strict-feedback form[J]. Automatica, 2015, 53:120-124..
- [116] Meng Z, Ren W, Cao Y, et al. Leaderless and leader-following consensus with communication and input delays under a directed network topology[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B, 2011, 41(1):75-88.
- [117] Liu H, Xie G, Wang L. Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems[J]. Automatica, 2012, 48(7):1415-1422.
- [118] Cao Y, Ren W, Egerstedt M. Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching directed networks[J]. Automatica, 2012, 48(8):1586-1597.
- [119] Li J, Ren W, Xu S. Distributed containment control with multiple dynamic leaders for double-Integrator dynamics using only position measurements [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(6):1553-1559.

- [120] Cao Y, Stuart D, Ren W, et al. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: algorithms and experiments[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(4):929-938.
- [121] Wen G, Zhao Y, Duan Z, et al. Containment of higherorder multi-leader multi-agent systems: a dynamic output approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(4):1135-1140.
- [122] Praly L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6):1103-1108.
- [123] Hong Y, Hu J, Gao L. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology[J]. Automatica, 2007, 42(7):1177-1182.
- [124] Meng Z, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12):2092-2099.
- [125] Tang Y, Gao H, Zhang W, Kurths J. Leader-following consensus of a class of stochastic delayed multi-agent systems with partial mixed impulses[J]. Automatica, 2015, 53:346-354.
- [126] Mao X. Stochastic differential equations and applications (Second Edition)[M]. Horwood, 2007.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

(一) 参与的科研项目

- [1] 复杂非线性系统有限时间容错控制及在多智能体中的应用。河北省研究生创新资助项目(项目编号: CXZZBS2017048), 资助期限: 2017.01-2017.12, 项目负责人。
- [2] 随机非线性系统有限时间镇定研究及在多智能体中的应用。燕山大学创新助手项目(经费编号: 314-0230000206), 项目负责人。
- [3] 复杂非线性滞后动力系统的控制与应用。优秀青年科学基金项目(批准号: 61322303), 项目参与人。
- [4] 多变量多态性能约束下网络关联非线性系统分散协同控制及应用。面上项目(批准号: 61673335), 项目参与人。

(二) 已发表成果

- [1] **Yafeng Li**, Changchun Hua, Xinping Guan. Distributed output feedback leader-following control for high-order nonlinear multiagent system using dynamic gain method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics. 2018(accept)
- [2] **Yafeng Li**, Changchun Hua, Shuangshuang Wu, Xinping Guan. Output feedback distributed containment control for high-order nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8):2032-2043.
- [3] **Yafeng Li**, Changchun Hua, Guopin Liu, Xinping Guan. Adaptive state feedback control for switched stochastic high-order nonlinear systems under arbitrary switchings[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2017,28(6): 2047-2063.
- [4] **Yafeng Li**, Liuliu Zhang, Changchun Hua, Yu Zhang, Xinping Guan. Output feedback control for stochastic nonlinear time delay systems using dynamic gain technique[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(3): 1073-1087.
- [5] Changchun Hua, **Yafeng Li**, Xinping Guan. Finite/Fixed-Time Stabilization for Nonlinear Interconnected Systems With Dead-Zone Input[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(5):2554-2560.
- [6] Changchun Hua, **Yafeng Li**, Xinping Guan. Leader-following consensus for high-order nonlinear stochastic multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8):1882-1891.

- [7] Changchun Hua, **Yafeng Li**, Liuliu Zhang, Xinpings Guan. Adaptive state feedback control for time-delay stochastic nonlinear systems based on dynamic gain method[J]. International Journal of Control, 2018:1-16.
- [8] Changchun Hua, **Yafeng Li**, Dan Liu, Xinpings Guan. Stability analysis for fractional-order PD controlled delayed systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(13):3118-3132.
- [9] Changchun Hua, **Yafeng Li**. Output feedback prescribed performance control for interconnected time-delay systems with unknown Prandtl-Ishlinskii hysteresis[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(7):2750-2764.
- [10] Changchun Hua, **Yafeng Li**, Hongbin Wang, Xinpings Guan. Decentralised fault-tolerant finite-time control for a class of interconnected non-linear systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(16):2331-2339.
- [11] Changchun Hua, Guopin Liu, **Yafeng Li**, and Xinpings Guan, Adaptive neural tracking control for interconnected switched systems with non-ISS unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics. 2018. DOI: 10.1109/TCYB.2018.2809576
- [12] Changchun Hua, Shiyang Liu, **Yafeng Li**, Xinpings Guan, Distributed adaptive output feedback leader-following consensus control for nonlinear multi-agent systems system[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems. 2018. DOI: 10.1109/TSMC.2018. 2849740
- [13] Changchun Hua, Jiannan Chen, **Yafeng Li**, Xinpings Guan. Adaptive prescribed performance control of half-car active suspension system with unknown dead-zone input[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2018, 111:135-148.
- [14] Changchun Hua, Yuanyuan Wang, **Yafeng Li**, Huiguang Li. Hua C, Wang Y, Li Y, et al. Decentralized output feedback control of interconnected stochastic nonlinear time-delay systems with dynamic interactions[J]. Neurocomputing, 2017, 221,48-59.
- [15] Changchun Hua, Tong zhang, **Yafeng Li**, Xinpings Guan. Robust output feedback control for fractional order nonlinear systems with time-varying delays[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2016, 3(4):477-482.
- [16] **Yafeng Li**, Changchun Hua, Guopin Liu. Finite-time prescribed performance control for nonlinear systems with unmodeled dynamics. 2016 31st Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation, 2016, 175-180.

致 谢

五载春秋，转瞬即逝；业之将终，前路之始。

感谢华长春老师的倾心栽培。五年来，有压力与迷茫，也有成功与欢笑。华老师在时间上给予的最大宽松与自由，在学业上给予的引领与要求，教会了我，“学习是为自己负责”的态度。华老师以身作则，乐观、活力、勤奋、自律、高要求、高标准，时时感染着我们。五年多的收获与荣誉离不开老师的指导与帮助，而自律、勤奋的品行将是我一生的财富。

感谢老乡兼同窗挚友的张柳柳师姐，五年前的引荐，有幸与课题组结缘，走进控制领域的学术天地，与师兄师弟师姐师妹们，相遇、相识、相助、相知。感谢同门的李军朋(朋哥)，杨亚娜(娜姐)，杨睨(睨姐)，游秀(游师姐)，刘丹(小丹师姐)，于彩霞(小于师姐)，赵励为(为哥)等师兄师姐们，在学习上生活中的帮助与解惑。感谢刘国聘，张宇，王媛媛，吴双双，张彤，陈健楠，李阔，柳世莹，田丹阳，武莉莉等师弟师妹们的合作与支持。感谢李志杰，王毅博，宁静华，邱云飞等师弟师妹们对本文的阅读与纠正。感谢同届的黄伟、张涛、王雅洁、李静，有幸三年相伴。感谢王芳，赵广磊，陈树宗，钱俊磊(钱姐)，各位老师的指导与帮助。感谢 C401、C201，一起走过，相伴的人。

感谢香港城市大学冯刚教授、刘璐老师的指导与支持。毕业前夕，有幸于城大访问，开阔视野的同时，也感受了冯老师课题组浓厚的学习氛围，认识了许多优秀的栋梁之材。

最后，感谢给予我生命，养育我成人的父母，愿你们健康长寿。感谢姐姐的偏爱，愿你们幸福美满。感谢我的亲人。

愿我爱的人，愿爱我的人，喜乐平安。