《非线性系统分析与设计》

结课报告

姓名：杨泽坤

班级：双控三班

学号：202221030205

电话：17393196310

成绩：

1 摘要

介绍导师姓名、研究方向以及自己的课题内容。针对自己的研究方向分析存在的哪些控制问题、不足

(1) 导师姓名 华长春

研究方向 时滞系统 以下引自 IEEE

delay systems 时滞系统,nonlinear control systems 非线性系统控制,closed loop systems 闭环系统,feedback 反馈,robust control 反馈控制,Lyapunov methods 李雅普诺夫方法,adaptive control 自适应控制,asymptotic stability 渐近稳定性,control system synthesis 控制系统分析,delays 时延,nonlinear system 非线性系统,stability 稳定性,chaos 混沌,decentralised control 分散控制,fuzzy control 模糊控制,interconnected systems 互联系统

(2) 研究方向分析

1) 研究方向存在的控制问题

由于我接触课题的时间并不长，所以我以我现在接触到的方向来简单介绍一下我现阶段研究方向的所涉及到控制问题：

一是对于 LK 泛函设计，直接构造型 LK 泛函，完全型 LK 泛函

二是切换系统结合 在异步切换系统中使用平均驻留时间乃至持续驻留时间来放宽切换系统中子系统的稳定性要求

三是将非线性系统和时滞系统结合

(3) 研究方向的不足

首先是对于 LK 泛函设计的研究方向的一些不足,直接构造型 LK 泛函保守性不能改变完全性 LK 泛函保守性低甚至可以得到充要条件但是计算更加复杂, 针对时滞 LFC 系统的稳定性问题，现有文献普遍采用基于 DDE 的时域方法，并取得了许多成果。由于构造 L-K 泛函没有普遍规律，分析过程需要处理积分项，不可避免地增加了稳定判据的保守性。因此， 针对时滞多区域 LFC 系统的稳定性问题还有很大的研究空间.

最近提出的 LOI 研究框架，虽然有望建立保守性极小的甚至充分必要条件，但还不构成熟，仍然在完善过程中。目前只是应用在了连续线性时滞系统的研究中，得到了较好的研究结果，但对于离散时滞和时变时滞系统，仍然会存在一些问题，PI 算子形式需要相应的改变和适应，新提出的 PIE 工具箱也存在着适应性问题等等，有待进一步研究和改进.

接下来是异步切换系统的问题尽管针对切换系统稳定性分析问题研究已存在一系列研究成果，然而考虑到切换系统在当今日益复杂的工业过程控制系统中的广泛应用，现有成果无论从理论研究层面还是实际应用层面都并非完善，围绕这一研究方向，还有较多亟待研究的开放性问题。首先，现有结果大多聚焦于线性切换系统，然而切换系统的应用环境复杂，线性切换系统难以刻画实际系统涉及到的干扰、系统不确定性、未建模动态等因素。其次，现有基于时间约束条件的切换系统稳定性分析多基于平均驻留时间方法。然而，依据平均驻留时间定义，系统切换频率为固定常数。然而现实中往往需要更灵活的切换规则。最后，现有文献大多旨在保证系统的稳定性，对系统的暂稳态性能约束较少考虑。而随着实际系统对系统暂稳态性能的要求不断提高，这一问题的研究意义日益明显，然而相关方面研究成果却较为稀缺。

2 引言

针对 2-3 篇代表性的英文文献进行梳理，并对这些文献进行有深度的评述。例如主要研究了什么问题，解决了什么问题，有什么突出优势，尚存在什么问题。

(1) 时滞系统

对于时滞系统我选取了我看过的吴双双师姐和王毅博师兄的两篇文章，这两篇文章都是关于 LOI 方法在 LFC 系统中的应用的和一篇 Peet.M.M 的文章，这篇提出 SOS 方法应用线性算子转化完全平方型 LK 泛函。

吴双双师姐

Hua C,Wang Y, Wu S.Stability analysis of micro-grid frequency control system with two additive time-varying delay. Journal of the Franklin Institute,2019.

A Dual to Lyapanov’s Second Method for Linear Systems with Multiple Delays and Implementation using SOS

王毅博师兄

Hua, C. and Y. Wang, Delay-Dependent Stability for Load Frequency Control System via Linear Operator Inequality. IEEE Trans Cybern, 2022. 52(7): p. 6984-6992.[1]

三篇文章都主要研究了 LOI 方法，其中 Peet 的主要提出了 LOI 方法，师兄和师姐的研究了 LOI 方法在 LFC 系统中的应用。LOI **方法是基于**线性算子和 SOS **理论最新的完全型泛函构建及实现方法**。

时滞系统实质上是一种无限维系统。由于 LMI 技术的局限性，以及直接构建型泛函结构的特定性，上述研究成果需要将时滞系统无限维的特性转化为有限维，导致时滞系统的时滞特性并没有被完全利用到。考虑到构建完全型 L-K 泛函能够充分利用无限维系统的特性并且可能得到充分必要条件，一些学者开始将其应用到时滞系统的研究中。根据直接构造型 LK 泛函保守性不能改变，而 LOI 方法是基于 SOS 方法(标准的平方和多项式)的。Peet 基于 SOS 方法提出了完全型 L-K 泛函线性算子参数化的方法，基于此方法构建的完全型泛函保守性极小，因此所得到的结果基本接近充分必要条件，但由于完全型泛函的待定参数为多项式矩阵函数参数，而且需要推导、计算将所有约束化为 SOS 约束，因此计算过程复杂繁琐。LOI 方法的提出便是为解决这一问题。LOI 方法允许最后的约束条件以类似线性矩阵不等式——线性算子不等式的形式给出，允许矩阵参数取为算子参数。当 LOI 中的线性算子形式为特定的线性 PI 算子(偏积分算子)时，基于 SOS 工具箱，Peet 给出了相应的 MATLAB 的 PIE 工具箱，可以直接求解这类 LOI，大大简化了分析过程，提高了求解效率。

突出优势就是完全性 LK 泛函保守性低甚至可以得到充要条件但是计算更加复杂通过构建完全型 L-K 泛函来分析系统的稳定性， 分析过程不涉及积分不等式技术的使用， 因此所得结果几乎不包含保守性。线性算子理论为时滞多区域 LFC 系统的稳定性分析提供了新思路。

所使用的 LOI 研究框架时最近提出的，虽然有望建立保守性极小的甚至充分必要条件，但还不构成熟，仍然在完善过程中。目前只是应用在了连续线性时滞系统的研究中，得到了较好的研究结果，但对于离散时滞和时变时滞系统，仍然会存在一些问题，PI 算子形式需要相应的改变和适应，新提出的 PIE 工具箱也存在着适应性问题等等，有待进一步研究和改进

增广型 LK 泛函在标准型泛函的基础上，对系统的状态向量进行了扩维，增加了交叉项，利用到更多关于时滞的信息，以降低结果的保守性，是目前时滞系统研究中最常用的一种泛函结构。

(2) 切换系统

对于切换系统我选取了刘国聘师兄和柴天佑院士团队的一篇文章

Liu, G., C. Hua and X. Guan, Asynchronous stabilization of switched neutral systems: A cooperative stabilizing approach. Nonlinear analysis. Hybrid systems, 2019. 33: p. 380-392.

Jun Fu a, Tai-Fang Li b, Tianyou Chai a, Chun-Yi Su c Sampled-data-based stabilization of switched linear neutral systems. Automatica, 72(), 92–99.

刘国聘师兄的论文主要考虑了时滞对系统稳定性的影响，针对一类中立切换时滞系统，研究了系统异步切换下的镇定问题。基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析方法分析了时延对系统稳定性的影响，结合求解线性矩阵不等式，完成了时延及异步切换条件下镇定控制器设计。通过控制器与切换信号协同设计，保证了切换系统存在不稳定切换子系统情况下系统的全局渐近稳定性。

提出了控制器与切换信号协同镇定方法。考虑到系统中存在不稳定的子系统，仅靠传统控制器设计方法无法镇定该切换系统。通过切换信号限制不稳定系统的运行条件，可保证整个系统最终的稳定性。

3 主要研究内容

(1) 研究对象

1) 多重时滞系统

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i x(t-\tau_i)$$

根据 DDE 表示的传统多区域 LFC 系统模型, 推导得出基于 PIE 的系统模型

PDE-ODE 耦合的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{\Xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_0 \boldsymbol{x}(t) - \int_{-1}^{0} \bar{\boldsymbol{A}}_1(s)\, \boldsymbol{\psi}_s(t,s)\, \mathrm{d}s \\ \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{\psi}_s(t,s) \end{bmatrix}$$

转换为 PIE 的形式

$$T\dot{x}_f(t) = A x_f(t)$$

2) 中立时滞系统

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} x(t-r) + C_{\sigma(t)} \dot{x}(t-h) + D_{\sigma(t)} u(t) \\ &x(\theta) = \psi(\theta), \forall \theta \in [-H, 0], H = \max\{t, h\} \end{aligned}$$

系统的切换序列表示为

$$\aleph_p = \{(\sigma(t_0), t_0), \ldots (\sigma(t_k), t_k), \ldots \mid \sigma(t_k) \in \mathcal{P}, k = 0, 1, \ldots\}$$

(2) 分析对象特性

1) 中立时滞系统对象特性

本章中关于切换信号的限制条件为不等式。该不等式限制切换次数以及不稳定子系统和异步切换持续时间上限，同时稳定子系统的运行时间必须持续足够长的时间。该条件比较容易直观理解，即对于一个含有不稳定子系统的切换系统而言，系统切换瞬间以及不稳定子系统运行过程会造成系统发散。而稳定子系统运行过程会使得系统状态收敛。因而，通过系统足够长的收敛运行时间限制系统发散，最终保证系统指数收敛稳定。

选取 LK 泛函

$$
\begin{aligned}
V_{\sigma(t)}(t) = {} & x^T(t)P_{\sigma(t)}x(t)+\int_{t-r}^{t} e^{\alpha_i(s-t)}x^T(s)Q_{\sigma(t)}x(s)\mathrm{d}s \\
& +\int_{t-r}^{t}\int_{\theta}^{t} e^{\alpha_i(s-t)}\dot{x}^T(s)R_{\sigma(t)}\dot{x}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{t-h}^{t} e^{\alpha_i(s-t)}\dot{x}^T(s)S_{\sigma(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\
& +\int_{t-h}^{t}\int_{\theta}^{t} e^{\alpha_i(s-t)}\dot{x}^T(s)M_{\sigma(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

2) 多重时滞系统对象特性

通过以上的变换将系统转化为 PIE 形式后选取完全型 LK 泛函

$$
\begin{aligned}
V(t) = {} & \int_{-h}^{0}\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & Q(s) \\ Q^T(s) & S(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix}\mathrm{d}s \\
& +\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} x^{\mathrm{T}}(t+s)R(s,\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

之后利用 Peet 提出的 PI 算子(偏微分算子)将上式完全型 LK 泛函转化为 Z 空间内积的形式，其中 Z 空间的定义为

$$Z_{m,n,k} \coloneqq \{R^m \times L_2^n[-\tau_1,0] \times \ldots \times L_2^n[-\tau_k,0]\}$$

而偏积分算子利用 Peet 中的定义为

$$\left\langle \begin{bmatrix} y \\ \psi_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ \phi_i \end{bmatrix} \right\rangle_{Z_{m,n,K}} = \tau_K y^T x + \sum_{i=1}^{K}\int_{-\tau_i}^{0} \psi_i(s)^T \phi_i(s) ds.$$

最终完全型 LK 泛函利用偏积分算子表达为

$$V(t) = \langle \nu, H\nu \rangle_Z$$

(3) 分析对象性能

1)中立时滞系统性能

在分析中立异步切换系统稳定性时，要求在每个子系统在异步切换之后正常运行阶段必须指数稳定，即$\alpha > 0$，对比这一条件，本章提出当 $\sigma(t) \in P_{m2}^{u}$ 时，允许$\alpha_{\sigma(t)} < 0$ ，相较于所有的$\alpha_{\sigma(t)} > 0$ 而言，所提方法使得 LMI 的求解条件更加宽松。

利用 LMI 进行一系列的放缩后，最终由全局渐近稳定设计出的控制器形式为

$$K_i = U_i \bar{W}_i^{-1}$$

2) 多重时滞系统性能

当有下式成立

$$T^* HA + A^* HT < 0$$

多重时滞系统渐近稳定。

(4) 课上所学知识在其中的应用

其中无论是各类型的 LK 泛函或是定义偏积分算子时使用的$\boldsymbol{L_2}$空间再或是后面的利用 Lyapunov 稳定性判据判定渐近稳定时的两种形式以及全局渐近稳定等概念均为课上所学。

4 仿真验证

利用仿真验证所设计控制器的有效性。并对仿真结果进行分析。

仿真

子系统 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.8 & -0.3 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

子系统 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ -0.2 & -0.6 \end{bmatrix}$$
$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ -0.15 & 0.8 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

观察以上两个子系统，易知$P_{m2}^S = \{1\}, P_{m2}^u = \{2\}$, 即第二个子系统为不可控的子系统。

给定$\tau(t) = 0.308, r = 0.4, h = 0.3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \beta_1 = \beta_2 = 2, \mu = 2.$

通过求解 LMI，得到如下控制器增益：

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.3178 & 0.8389 \\ -1.3983 & -8.5772 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -3.8051 & 0.8461 \\ -1.0301 & -8.2361 \end{bmatrix}$$

令$h(t) = t$ ，关于切换信号的限制条件为

$$N_t^\sigma = 0.3t + t^{\frac{1}{3}}$$
$$\eta_2^h(1,t) = 0.855 - t^{-\frac{1}{3}}$$
$$\eta_2^h(2,t) = 0.125 + t^{-\frac{1}{3}} - t^{-\frac{2}{3}}$$
$$\eta_1^h(1,t) = \eta_1^h(2,t) = \frac{1}{2}(0.02 + t^{-\frac{2}{3}})$$

因此，通过下式验证可知成立

$$\hat{\nu}_h \sum_{(m,n)\in E(\mathcal{P})} \hat{\rho}_{mn} \ln \mu_{mn} + \left(\sum_{i\in\mathcal{P}_{m2}^{u}} |\alpha_i| \hat{\eta}_2^h(i) - \sum_{i\in\mathcal{P}_{m2}^{s}} |\alpha_i| \breve{\eta}_2^h(i) + \sum_{i\in\mathcal{P}} |\beta_i| \hat{\eta}_1^h(i) \right) = 0.416 - 0.425 < 0$$

5 总结与未来规划

(1) 对于未来研究方向的一些规划

由于看了王毅博师兄和吴双双师姐的论文学习到一些新的时滞系统的 LK 泛函形式，这些新的 LK 泛函在 LFC 系统中都得到了很不错的结果，所以想要将这些新的 LK 泛函形式结合到刘国聘师兄用的中立切换系统中，看能不能得到更好的，对于子系统稳定性限制更少的结果。并且还希望当系统模型存在不确定干扰或系统模型过于复杂时，设计处不确定系统切换控制策略， 或简化系统模型同时保留原系统特性进而给出相应控制策略。