燕山大学 2022 年秋季学期研究生课程考试答题纸（卷面满分 80）

课程名称：系统建模 学院：电气工程学院 专业：控制科学与工程、控制工程 考试时间：2022-12-1

班级：双控三班 学号：202221030205 姓名：杨泽坤

题号	1	2	3	4	5						总分
得分											

说明：在空白纸上按照顺序答题，**拍照后贴到此答题纸上**。**转成 PDF 文件**后在指定时间内发送至教师指定邮箱，**PDF 文件**与**邮件主题同名**：**系统建模-学号-姓名**。**务必保证字迹、图片清晰，否则会影响成绩！！！**

答题如下（**在每张答题用纸右上角签名，并写上学号**）：

1\. $\theta=(a_1,a_2)^T$，$y=(2,2,3)^T$ $\Phi=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}$

$$\Phi^T\Phi=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\\3&5\end{bmatrix}$$

$$\Phi^Ty=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}$$

解正则方程组 $\Phi^T\Phi\theta=\Phi^Ty$

即 $\begin{bmatrix}6&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}$

解得 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

∴参数的最小二乘估计为 $a_1=1$，$a_2=1$.

(1). 令 $\varphi_k^T=[-y(2+k-1),\cdots,-y(k),u(2+k-1),\cdots,u(k)]$ ①

$\theta^T=[a_1,a_2,~~a_n~~,b_1,b_2,~~b_n~~]$

则①式可写为向量形式 $y(2+k)=\varphi_k^T\theta+e(2+k)$

求解参数向量 θ，使得残差平方和 $J=\sum_{k=3}^{N+2}[y(k)-\varphi_{k-2}^T\theta]$ 达到极小.

若将 J 写成向量形式：$J=e_N^Te_N$ ②

其中 $e_N=y_N-\Phi_N\theta=\begin{bmatrix}e(2+1)\\e(2+2)\\\vdots\\e(2+N)\end{bmatrix}$ ③

$$\Phi_N=\begin{bmatrix}\varphi_1^T\\\varphi_2^T\\\vdots\\\varphi_N^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y(2)&-y(1)&u(2)&u(1)\\-y(2+1)&-y(2)&u(2+1)&u(2)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-y(2+N-1)&-y(N)&u(2+N-1)&u(N)\end{bmatrix}$$

$$y_N=\begin{bmatrix}y(2+1)\\y(2+2)\\\vdots\\y(2+N)\end{bmatrix}$$

将③代入②式中，关于 θ 求偏导可得正规方程组 $(\Phi_N^T\Phi_N)\theta=\Phi_N^Ty_N$

若 $\Phi_N^T\Phi_N$ 可逆则存在唯一解 $\hat\theta_N=(\Phi_N^T\Phi_N)^{-1}\Phi_N^Ty_N$，则 $\hat\theta_N$ 为

∴ 参数的最小二乘估计为 $a_1=1$, $a_2=1$.

2. (1). 令 $\varphi_k^T = [-y(2+k-1), \cdots, -y(k), u(2+k-1), \cdots, u(k)]$ ①

$\theta^T = [a_1, a_2, \cancel{\cdots a_n}, b_1, b_2 \cancel{\cdots b_n}]$

则①式可写为向量形式 $y(2+k) = \varphi_k^T\theta + e(2+k)$

确定参数向量 θ，使得残差平方和 $J = \sum_{k=3}^{N+2}[y(k) - \varphi_{k-2}^T\theta]$ 达到极小.

指标 J 可写成向量形式：$J = e_N^T e_N$ ②

其中 $e_N = y_N - \Phi_N\theta = \begin{bmatrix} e(2+1) \\ e(2+2) \\ \vdots \\ e(2+N) \end{bmatrix}$ ③

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(2+1) & -y(2) & u(2+1) & u(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(2+N-1) & -y(N) & u(2+N-1) & u(N) \end{bmatrix}$$

$$y_N = \begin{bmatrix} y(2+1) \\ y(2+2) \\ \vdots \\ y(2+N) \end{bmatrix}$$

将③代入②式中，关于 θ 求偏导可得方程组 $(\Phi_N^T\Phi_N)\theta = \Phi_N^T y_N$

若 $\Phi_N^T\Phi_N$ 可逆则存在唯一解 $\hat{\theta}_N = (\Phi_N^T\Phi_N)^{-1}\Phi_N^T y_N$，则 $\hat{\theta}_N$ 为 θ 的最小二乘估计.

(2) 残差的加权平方和为：$J = e_N^T W_N e_N$，其中 W_N 为正定矩阵。

则加权最小二乘估计为 $\hat{\theta}_N = (\Phi_N^T W_N \Phi_N)^{-1}\Phi_N^T W_N y_N$

假定根据 (n+N) 次采样得到的最小二乘估计为 $\hat{\theta}_N$，第 (n+N+1) 采样后，得到的估计为 $\hat{\theta}_{N+1}$

$$\hat{\theta}_{N+1} = (\Phi_{N+1}^T W_{N+1} \Phi_{N+1})^{-1}\Phi_{N+1}^T W_{N+1} y_{N+1}$$

其中 $\Phi_{N+1} = \begin{bmatrix}\Phi_N \\ \varphi_{N+1}^T\end{bmatrix}$，$y_{N+1} = \begin{bmatrix} y_N \\ y(2+N+1)\end{bmatrix}$，$W_{N+1} = \begin{bmatrix} W_N & 0 \\ 0 & w_{N+1}\end{bmatrix}$

推导 $\hat{\theta}_N$ 和 $\hat{\theta}_{N+1}$ 之间的关系。

令 $P_k = (\Phi_k^T W_k \Phi_k)^{-1}$ 则 $P_{N+1} = [\Phi_{N+1}^T W_{N+1} \Phi_{N+1}]^{-1} = [\Phi_N^T W_N \Phi_N + \varphi_{N+1} w_{N+1} \varphi_{N+1}^T]^{-1}$

$$= [P_N^{-1} + \varphi_{N+1} w_{N+1} \varphi_{N+1}^T]^{-1}$$

得到 $P_N^{-1} = P_{N+1}^{-1} - \varphi_{N+1} w_{N+1} \varphi_{N+1}^T$

$$\hat{\theta}_{N+1} = P_{N+1}\Phi_{N+1}^T W_{N+1} y_{N+1} = P_{N+1}[\Phi_N^T W_N y_N + \varphi_{N+1} w_{N+1} y(2+N+1)]$$

$$= P_{N+1}[P_N^{-1}\hat{\theta}_N + \varphi_{N+1} w_{N+1} y(2+N+1)]$$

由 P_N^{-1} 得到 $\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_{N+1}\varphi_{N+1} w_{N+1}[y(2+N+1) - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N]$

得到 $P_{N+1} = P_N - \dfrac{P_N \varphi_{N+1} \varphi_{N+1}^T P_N}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + w_{N+1}^{-1}}$ ①

将①式代入 $\hat{\theta}_{N+1}$ 得到 $\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \dfrac{P_N \varphi_{N+1}}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + w_{N+1}^{-1}}[y(n+N+1) - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N]$ ②

则①，②构成了加权最小二乘估计的递推算法。

特别地，如果把每次的误差都平等对待，即取加权矩阵 W 为单位阵，

则通常最小二乘递推公式为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \dfrac{P_N \varphi_{N+1}}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + 1}[y(n+N+1) - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N] \\ P_{N+1} = P_N - \dfrac{P_N \varphi_{N+1} \varphi_{N+1}^T P_N}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + 1} \end{cases}$$

(3). 性能指标为 $J = \sum_{k=3}^{N+2} \rho^{2+N-k} [y(k) - \varphi_{k-2}^T \theta]^2 \quad 0<\rho<1.$

$$W_{N+1} = \begin{bmatrix} \rho W_N & & \\ & \cdots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

(由 $J = e_N^T W_N e_N$ 得)

代入(2)中得 $P_{N+1} = [P_N^{-1} + \varphi_{N+1} W_{N+1} \varphi_{N+1}^T]^{-1}$

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_{N+1} \varphi_{N+1} W_{N+1} [y(2+N+1) - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N]$$

利用矩阵求逆公式,得实时递推最小二乘算法.

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \dfrac{P_N \varphi_{N+1}}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + \rho} [y(2+N+1) - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N] \\ P_{N+1} = \dfrac{1}{\rho} \left[P_N - \dfrac{P_N \varphi_{N+1} \varphi_{N+1}^T P_N}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + \rho}\right] \end{cases}$$

在实际应用中,由于 ρ 相对于 $\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1}$ 是很小的,又因 ρ 一般取值接近于1

因此上式简化为
$$\begin{cases} \hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \dfrac{P_N \varphi_{N+1}}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + 1} [y(2+N+1) - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N] \\ P_{N+1} = \dfrac{1}{\rho} \left[P_N - \dfrac{P_N \varphi_{N+1} \varphi_{N+1}^T P_N}{\varphi_{N+1}^T P_N \varphi_{N+1} + 1}\right] \end{cases}$$

3、$\varepsilon(k)$ 为有色噪声 即 $\xi(k)=\sum_{i=1}^{n} c_i e(k-i)+e(k)$

其中 $\{e(i)\}$ 为零均值白色噪声序列，与输入 $\{u(k)\}$ 无关

则 $$y(k)+a_1 y(k-1)+\cdots+a_n y(k-n)=b_0 u(k)+\cdots+b_n u(k-n)+e(k)+c_1 e(k-1)+\cdots+c_n e(k-n)$$

若 $\{e(k)\}$ 是能测量到的，则可将 $e(k)$ 视为确定性输入并列入到向量中去，

上式可写为 $y(k)=\varphi_{k-n}^T\theta+e(k)$

其中 $\varphi_{k-n}^T=[-y(k-1),\cdots,-y(k-n),u(k-1),\cdots u(k-n),e(k-1),\cdots e(k-n)]$

$\theta^T=[a_1,\cdots a_n,b_1\cdots b_n,c_1\cdots c_n]$

但 $e(k)$ 不可测，因此将 $e(k)$ 用估计来代替 φ_{k-n} 为 $\hat{\varphi}_{k-n}$

即 $\hat{\varphi}_{k-n}^T\triangleq[-y(k-1),\cdots,-y(k-n),u(k-1),\cdots,u(k-n),\hat{e}(k-1),\cdots \hat{e}(k-n)]$

$\hat{e}(k)=y(k)-\hat{\varphi}_{k-n}^T\hat{\theta}_{k-1}$

其中 $\hat{\theta}_{k-1}$ 为参数的第 $k-1$ 次估计值，其递推算法为

$$\hat{\theta}_{k+1}=\hat{\theta}_k+\frac{P_k\hat{\varphi}_{k+1}}{\hat{\varphi}_{k+1}^T P_k \hat{\varphi}_{k+1}+1}\left[y(n+k+1)-\hat{\varphi}_{N+1}^T\hat{\theta}_k\right]$$

$$P_{k+1}=P_k-\frac{P_k\hat{\varphi}_{k+1}\hat{\varphi}_{k+1}^T P_k}{\hat{\varphi}_{k+1}^T P_k\hat{\varphi}_{k+1}+1}$$

4.

$N=100$

n	F
1	—
2	$\frac{595.65-494.61}{494.61}\cdot\frac{100-2\times2}{2}\approx 9.88$
3	$\frac{494.61-446.27}{494.61}\cdot\frac{100-2\times3}{2}\approx 5.09$
4	$\frac{446.27-424.45}{446.27}\cdot\frac{100-2\times4}{2}\approx 2.36$
5	$\frac{424.45-416.85}{424.45}\cdot\frac{100-2\times5}{2}\approx 0.83$

由表中可以看出，

① 当模型阶数 1到5时 $J(n)$ 下降.

② 当 2到3阶时 $F = 5.20 > 3.09$. $J(n)$ 减少是显著的.

当3到4时, $F = 2.36 < 3.09$ $J(n)$ 减少不显著 故模型应为3阶.

5. 模型为 $(1-\Phi_1 z^{-1}-\Phi_2 z^{-2}-\cdots-\Phi_N z^{-n})y(k)=(1-\theta_1 z^{-1}-\cdots-\theta_N z^{-m})w(k)$

对充分大的 p 拟合模型 $w(k)=(1-r_1 z^{-1}-r_2 z^{-2}-\cdots-r_p z^{-p})y(k)$ ①

令 $y=\begin{bmatrix} y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} y(n) & \cdots & y(1) \\ y(n+1) & & y(2) \\ \vdots & & \vdots \\ y(N-1) & \cdots & y(N-n) \end{bmatrix}$

用最小二乘法估计 r 得到 $\begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}=(X^T X)^{-1}X^T y$ 并将其带入①式得到 $\hat{w}$

即 $\hat{w}(k)=(1-\hat{r}_1 z^{-1}-\hat{r}_2 z^{-2}-\cdots-\hat{r}_p z^{-p})y(k)$

将这些估计的 $\hat{w}$ 作为输入，将 y 作为输出，再用最小二乘法拟合 ARMA(n,m) 模型

即 $(1-a_1 z^{-1}-a_2 z^{-2}-\cdots-a_n z^{-n})y(k)=(b_0(1-\frac{b_1}{b_0}z^{-1}-\cdots-\frac{b_m}{b_0}z^{-m})w(k)$

考虑到常数 b_0 可以归入 σ_w 中，故上式右端首项系数应取 1

与 ARMA(n,m) 模型比较可知 $\begin{cases} \Phi_i=\hat{a}_i & i=1\cdots n \\ \theta_i=\frac{\hat{b}_i}{b_0} & i=1\cdots m \end{cases}$