



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 基于 LMI 方法的几类时滞系统的稳定性

研究

作者姓名 邱云飞

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2022 年 12 月

中图分类号: TP13

学校代码: 10216

UDC: 007.5

密级: 公开

工学博士学位论文

基于 LMI 方法的几类时滞系统的稳定性研究

博 士 研 究 生: 邱云飞

导 师: 华长春 教授

申 请 学 位: 工学博士

学 科 专 业: 控制科学与工程

所 属 学 院: 电气工程学院

答 辩 日 期: 2022 年 12 月

授 予 学 位 单 位: 燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**STABILITY RESEARCH OF SEVERAL KINDS OF
TIME-DELAY SYSTEMS USING LMI METHOD**

by Qiu Yunfei

Supervisor: Professor Hua Changchun

Yanshan University

December, 2022

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《基于 LMI 方法的几类时滞系统的稳定性研究》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字： 日期： 年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《基于 LMI 方法的几类时滞系统的稳定性研究》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密 ☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☐。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘要

时滞现象广泛地存在于工业流程、制造应用以及军事技术中，例如厚度自动控制系统、电力系统以及航空航天系统等。时滞的存在对系统的稳定性往往具有很大的影响，甚至会导致系统不稳定。因而，对时滞系统的分析成为控制理论和控制工程领域的研究热点。目前，针对时滞系统的主要研究方向集中在两个方面：对 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函的设计和对不等式的处理。时滞系统的理论研究已经取得了大量的成果，但是针对个性化的时滞系统的研究还不全面。本文针对几类时滞系统的稳定性分析展开研究，对时滞系统理论进行完善，并且利用仿真验证了所提方案的有效性。本文的主要研究工作概括如下：

(1) 研究了带有三角函数形式的时变时滞的神经网络和线性系统的稳定性问题。基于三角函数形式的时变时滞和时变时滞的导数之间的特有性质，利用图像分析法进行数学解析，构造了一种新型的区间逼近法。进而，利用区间逼近法，提出了新的时滞区间。随后，基于这种新的时滞区间以及新型环函数，得到了神经网络以及线性系统的稳定性判据。最后，运用数值算例验证了所提出方法的可行性和有效性。

(2) 研究了带有多重时滞的递归神经网络的稳定性问题。基于时滞状态和当前状态的关系，对不同时滞的大小进行分类讨论。进而，提出了增强型时滞区间分割法，构造出不同的时滞区间。随后，基于 Wirtinger 不等式和互凸不等式，提出了两种保守性较低的时滞相关稳定性判据。最后，通过数值仿真验证了所提出来的算法的有效性。

(3) 研究了 T-S 模糊时滞系统的稳定性问题。基于 T-S 模糊系统的性质，构建了隶属度函数相关矩阵方法。进而，提出了带有单积分二次时滞乘积项和隶属度函数相关矩阵项的泛函。随后，在处理泛函求导的结果的过程中，利用不等式估计方法来估计积分不等式，并引入多项式不等式的充要条件来估计 L-K 泛函中存在的二次型以及 L-K 泛函求导结果中的二次型，使得估计误差大幅降低，获得一个保守性较低的稳定性判据。最后，通过数值仿真验证了所提出的方法的有效性。

(4) 研究了带有控制器扰动的 T-S 模糊系统的采样控制问题。基于 T-S 模糊系统的性质，提出了带有调整型环函数项和隶属度相关矩阵项的 L-K 泛函，这种泛函不

仅包含当前状态，也包含时滞状态。进而，利用 Wirtinger 不等式和增强型单积分不等式，得到具有较低保守性的新型稳定性判据。随后，通过计算线性矩阵不等式，得到非脆弱采样控制器参数。设计的控制器能够降低控制器不确定性对系统性能的影响，以及降低系统的计算负担。最后，通过数值算例说明了所得理论结果的可行性和有效性。

关键词：时滞系统；线性矩阵不等式；稳定性分析；Lyapunov-Krasovskii 泛函；神经网络系统；T-S 模糊系统

Abstract

Time delay phenomenon widely exists in industrial processes, manufacturing applications and military technologies, such as automatic thickness control systems, power systems and aerospace systems. The existence of time-delay has a great impact on the stability of the system, and even leads to the instability of the system. Therefore, the analysis of time-delay systems has become the research highlight in the field of control theory and control engineering. At present, the main research directions for time-delay systems focus on two aspects: the design of Lyapunov Krasovskii (L-K) functional and the treatment of inequalities. The theoretical research on time-delay systems has made a lot of achievements, but the research on personalized time-delay systems is not comprehensive enough. In this paper, the stability research of several kinds of time-delay systems is studied, and the theory of time-delay systems is improved. The main research work of this paper is summarized as follows:

(1) The stability of neural networks and linear systems with time-varying delay in the form of trigonometric functions is studied. Based on the special properties between the time-varying delay and the derivative of the time-varying delay of the trigonometric function, a novel interval approximation method is constructed by using the image analysis method for mathematical analysis. Then, a new delay interval is introduced by using interval approximation method. Subsequently, based on the new delay interval and the new looped-functional, the stability criteria of delayed neural networks and linear systems are obtained. Finally, numerical examples are used to verify the feasibility of the proposed method.

(2) The stability of recurrent neural networks with multiple time delays is studied. Based on the relationship between the delay state and the current state, the size of different delays in different cases is discussed. Then, an enhanced delay interval partitioning method is proposed to construct different delay intervals. Subsequently, based on Wirtinger inequality and cross convex inequality, two delay-dependent stability criteria are proposed with less conservatism. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is

verified through numerical simulation.

(3) The stability of T-S fuzzy systems with time-varying delay is studied. Based on the property of the T-S fuzzy system, the membership function matrices method is constructed. Then, Lyapunov Krasovskii (L-K) functional with single integral quadratic-delay-product term and membership function matrices term is proposed. Subsequently, in the process of dealing with the result of functional derivation, the inequality estimation method is used to estimate the integral inequality. The necessary and sufficient condition of polynomial inequality is introduced to estimate the quadratic form existing in L-K functional and the quadratic form formed by L-K functional derivatives, which greatly reduces the estimation error and obtains a less conservative stability criterion. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by numerical simulation.

(4) The sampling control problem of the T-S fuzzy systems with controller uncertainties is studied. Based on the property of the T-S fuzzy system, an L-K functional with adjustable looped function terms and membership function matrices is proposed, which includes not only the current state, but also the delayed state. Then, by using Wirtinger inequality and improved single integral inequality, the new stability criteria with less conservatism are obtained. Subsequently, by calculating the linear matrix inequalities, the parameters of the non-fragile sampling controller are obtained. The designed controller can reduce the influence of controller uncertainty on system performance and reduce the computational burden of the system. Finally, numerical examples show the superiority of the presented method.

Keywords: Time-delay system; Linear matrix inequality; Stability analysis; Lyapunov-Krasovskii functional; Neural networks; T-S fuzzy system

目 录

摘 要	I
Abstract.....	III
第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究的目的和意义	1
1.2 研究现状和主要研究方法	2
1.2.1 L-K 泛函的主要构建方法.....	3
1.2.2 L-K 泛函求导结果的主要处理方法.....	7
1.2.3 现有工作存在的不足	12
1.3 本文的主要研究内容	12
1.3.1 研究框架	12
1.3.2 研究内容	13
第 2 章 基于区间逼近法的时滞神经网络的稳定性分析	15
2.1 引言	15
2.2 带有三角函数形式时滞的神经网络模型及相关引理	16
2.3 区间逼近法	18
2.4 主要结果	21
2.4.1 稳定性分析	21
2.4.2 无源性分析	24
2.5 数值算例	27
2.6 本章小结	28
第 3 章 基于区间逼近法的线性时滞系统的稳定性分析	29
3.1 引言	29
3.2 带有三角函数形式时滞的线性时滞模型及相关引理	30
3.3 区间逼近法	31
3.4 时滞相关稳定性判据	34
3.5 数值算例	39
3.6 本章小结	41
第 4 章 带有多重时滞的递归神经网络的时滞相关稳定性分析	42
4.1 引言	42
4.2 带有多时滞的递归神经网络模型及相关引理	43
4.3 时滞相关稳定性判据	45
4.4 数值算例	54

4.5 本章小结	55
第 5 章 基于二次时滞乘积方法的 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析	57
5.1 引言	57
5.2 时滞 T-S 模糊系统模型及相关引理	59
5.3 时滞相关稳定性判据	61
5.4 数值算例	68
5.5 本章小结	70
第 6 章 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析与非脆弱采样控制	71
6.1 引言	71
6.2 时滞 T-S 模糊系统模型及相关引理	72
6.3 主要结果	75
6.3.1 稳定性分析	76
6.3.2 采样控制器设计	81
6.4 数值算例	85
6.5 本章小结	90
结 论	91
参考文献	93
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果	106
致 谢	108

符 号

\mathbb{R}	实数集合
\mathbb{N}	自然数
\mathbb{N}^+	正整数
\mathbb{R}^n	实数向量集合
$\mathbb{R}^{n \times n}$	$n \times n$ 维实矩阵集合
\mathcal{C}	连续函数集合
$I(I_n)$	适当维数(n 维)的单位矩阵
$O(0_n)$	适当维数($n \times n$ 维)的零矩阵
$\text{diag}(\dots)$	对角矩阵
A^T	矩阵 A 的转置
$\text{sym}(A)$	$A + A^T$
$\text{col}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
\mathbb{S}^n	$n \times n$ 维对称矩阵集合
\mathbb{S}_+^n	$n \times n$ 维正定对称矩阵集合
\mathbb{S}_-^n	$n \times n$ 维负定对称矩阵集合
$P > (\geq) 0$	P 为正定(半正定)矩阵
$P < (\leq) 0$	P 为负定(半负定)矩阵
$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix}$
\forall	任意

第1章 绪论

1.1 课题背景及研究的目的和意义

动态系统是随时间变化的系统，然而现实中很多系统的变化趋势，不止与当前的系统状态有关，还有可能与之前的系统状态有关，这样的现象称为时滞现象。时滞现象广泛地出现在工程系统和制造应用中，例如厚度自动控制系统、航空航天系统、机械传动系统以及高炉冶炼过程等^[1-5]。由于时滞现象的研究背景广泛，时滞系统的研究吸引了国内外研究人员的关注。带有时滞项的系统称为时滞系统，一个简单的线性时变时滞系统模型如式(1-1)所示：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h(t)) \\ x(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1-1)$$

其中 $x(t)$ 是系统状态， A 和 A_d 是常数矩阵， $\phi(\theta)$ 是初始条件， $h(t) \in [0, h]$ 是时变时滞， h 是时滞上界。时变时滞 $h(t)$ 通常分为以下三种情况： $h(t)$ 可导，时滞和时滞导数均存在上下界； $h(t)$ 可导，时滞存在上下界，时滞导数存在上界； $h(t)$ 不可导，时滞存在上下界。如果 $h(t)$ 为常数，则系统(1-1)可转化为定常时滞系统。

稳定性是保证系统稳定运行的最基础条件，然而，时滞现象的存在往往会致使系统性能恶化，甚至使原来稳定的系统变得不稳定^[6]。另一方面，有些文献显示某些时滞对于系统稳定性存在正面影响^[6,9-11]。文献[9]提到对于钢质导管架式平台，有意地在反馈通道中引入小时延，可以显著降低振幅和所需要的控制力。文献[10]研究了网络谐波振荡器的时延同步问题，并指出利用当前位置数据无法实现网络同步，而利用滞后的位置数据即存储在内存中的过期位置数据可以实现网络同步。

控制领域的科研工作者对时滞系统的稳定性问题，进行了很多深入细致的研究。在最近二十年，迎来了对时滞系统研究的热潮^[3,12-17]。研究时滞系统的一个主要问题是如何降低保守性，也就是如何求取能够保持系统稳定状态的更大的时滞上界。如何放松系统可允许最大时滞上界的稳定性判据要求，一直是研究时滞系统稳定性的追求目标。对于非线性时滞系统，由于其复杂的非线性动力学特性，对其进行稳定性分析是极富挑战性的。

因此，从稳定性的角度探索时滞系统的研究方法具有十分重要的理论意义和实际意义。

1.2 研究现状和主要研究方法

近三十年来,针对时滞系统的稳定性研究取得了令人瞩目的研究成果。目前针对时滞系统稳定性研究的主要方法是频域分析法和时域分析法。由于本文的主要内容是基于时域分析法进行的,故本节侧重于对时域分析法进行总结。

频域分析法是一种较为基础的方法,其判定方法是根据系统的特征根是否位于复平面的左半平面,进而做出判断^[21-25]。然而由于频域分析法是将系统进行 Laplace 变换,导致时滞系统的特征方程是超越方程,求解过程较为不便。因此,这种方法存在较强的局限性,且目前针对这一方法的研究结果相对偏少。文献[21]利用积分二次约束框架来处理稳定性问题,将验证鲁棒稳定性的判据表示为一组频率相关的线性矩阵不等式的可行性问题。文献[25]研究了非线性和线性变参数时滞系统的稳定性,并提出了一种代数解释,可利用积分二次约束定义更一般的频域延迟约束。

时域分析法是一种较为主流的方法,由于这种方法更为便捷,故时域分析法在时滞系统稳定性分析中占据主要位置^[3,26-28]。基于稳定性判据是否和时滞的大小有关,可将时域分析法分为时滞无关稳定性判据和时滞相关稳定性判据。由于时滞无关稳定性判据对时滞的大小没有限制,因而所得到的结果保守性较大,此外现实应用中的时滞往往都是有范围约束的,故时滞相关稳定性判据越来越受到国内外科研工作者的青睐。

时域分析法又主要分为 Lyapunov-Razumikhin (L-R)函数方法和 Lyapunov-Krasovskii (L-K)泛函方法。L-R 方法是设计 Lyapunov 函数,并应用 Razumikhin 定理实现系统稳定性。Razumikhin 方法多用于分析非线性时滞系统的稳定性。基于改进型 Razumikhin 定理,文献[27]研究了受时变时延非线性扰动的线性系统的稳定性问题。基于反步控制法,文献[28]设计了输出反馈控制器,所设计的控制器能够保证三阶非线性系统全局渐近稳定。

L-K 方法是设计 L-K 泛函,应用 L-K 稳定性定理来证明系统稳定性^[29-31]。L-K 泛函又分为完全型 L-K 泛函和直接构建型 L-K 泛函。

接下来,详细介绍 L-K 泛函的设计方法和其求导结果的主要处理方法。首先,给出 L-K 稳定性定理。时滞系统一般由泛函微分方程描述,如式(1-2)所示:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1-2)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ， h 是时滞上界， $f: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， \mathcal{C} 表示将区间 $[-h, 0]$ 映射到 \mathbb{R}^n 的所有连续函数组成的空间。

定理 1-1 (L-K 稳定性定理^[3]) 假设 $f: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， $u(s)$ 、 $v(s)$ 和 $\omega(s): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是连续非减函数，且当 $s > 0$ 时， $u(s)$ 和 $v(s)$ 大于 0； $u(0) = v(0) = 0$ 。如果存在一个连续可导的函数 $V: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi(0)\|) \quad (1-3)$$

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -\omega(\|\phi(0)\|) \quad (1-4)$$

那么微分方程(1-2)的零解是一致稳定的。假如存在当 $s > 0$ 时， $\omega(s) > 0$ ，则微分方程(1-2)的零解是一致渐近稳定的。

基于 L-K 稳定性定理，目前针对时滞系统的保守性降低方法主要体现在两个方面：一是对于 L-K 泛函的构建；二是对于 L-K 求导结果的处理。

1.2.1 L-K 泛函的主要构建方法

关于 L-K 泛函的选取与构造对获得保守性更低的稳定性判据起到至关重要的作用，泛函的选取又主要分为完全型 L-K 泛函和直接构建型泛函。

1.2.1.1 完全型 L-K 泛函

1965 年，Repin 提出完全平方函数 (Complete Quadratic Lyapunov Functionals) 的概念，并构造了完全型 L-K 泛函^[32]。文献[3]指出，对于一个时滞系统，保证其渐近稳定的充要条件是存在一个满足 L-K 泛函条件和导数条件的完全型 L-K 泛函，即完全型泛函可为定常时滞系统的稳定性提供充要条件。一般来说，此类完全型 L-K 泛函可表示为如下形式：

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x^T(t)Px(t) + 2x^T(t)\int_{-h}^0 Q(\theta)x_t(\theta)d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x_t^T(\theta_1)T(\theta_1, \theta_2)x_t(\theta_2)d\theta_1d\theta_2 + \int_{-h}^0 x_t^T(\theta)S(\theta)x_t(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (1-5)$$

其中 $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ 代表时滞系统的状态， P 是正定对称矩阵， $Q(\theta)$ ， $T(\theta_1, \theta_2)$ 和 $S(\theta)$ 是连续矩阵函数。

在实际中，运用数值方法来验证此类泛函的存在性，通常需要该矩阵函数的近似值，然而从数学的角度上求解这样的泛函存在难度^[33]。在文献[34]中，这些矩阵函数以多项式函数的形式表示，并应用 SOSTOOLS 工具箱和 SeduMi 程序来进行数值验证。基于平方和(Sum Of Square, SOS)方法，文献[35-37]提出了完全型 L-K 泛

函线性算子参数化的方法，并提出了线性算子不等式(Linear Operator Inequalities, LOI)方法来解决计算复杂的问题，并取得了很好的研究进展。文献[35]将线性多时滞系统以及所构建的状态观测器写成分布式参数系统的形式，并构建了完全型 L-K 泛函来解决具有传感器噪声的线性多时滞系统的 H_∞ 观测器设计问题，并得到了观测误差较小的 H_∞ 观测器。基于 SOS 框架，文献[37]提出了新的关于多输入多输出的单时滞系统的稳定性条件，其中所提出的稳定性条件利用变量变换，将控制综合问题转述为几乎没有保守性的凸优化问题。

1.2.1.2 直接构建型 L-K 泛函

直接构造型 L-K 泛函由于其简单性，强适用性的优势，成为了一种比较常用的泛函构建方法，并广泛受到了科研工作者的青睐。常见的 L-K 泛函主要包括无积分项，一重积分项和二重积分项。以定常时滞系统即系统(1-1)中的时滞是常数为例，设计如下泛函：

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \quad (1-6)$$

其中矩阵 $P > 0$ ， $Q > 0$ ， $R > 0$ ，使得 $V(t)$ 正定。对 $V(t)$ 求导，令 $\dot{V}(t)$ 负定得到稳定性判据。为了降低保守性，在泛函(1-6)的基础上，涌现出各种不同的 L-K 泛函形式。接下来对这些 L-K 泛函形式进行分类介绍，其中重点介绍增广型 L-K 泛函，多重积分型 L-K 泛函和时滞分割型 L-K 泛函。

增广型 L-K 泛函即通过添加增广项，来构造的泛函形式。例如在式(1-6)的 $x^T(t)P(t)$ 中加入增广项，得到 $\zeta_1^T(t)P\zeta_1(t)$ ，其中 $\zeta_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h), \int_{t-h}^t x(s)ds\}$ 。增广型泛函的主要特点是引入更多的时滞信息，然后推导出稳定性判据。由于增广项的出现可以使得系统的状态和时滞相关项的状态耦合连接，因此增广项的出现可能会减少结果的保守性^[8,38-41]。文献[38]利用增广型泛函引入了时滞项并结合自由矩阵方法，提出了关于神经系统的改进型时滞相关稳定性判据。文献[39]利用增广型 L-K 泛函，构造了带有时滞乘积项和增广矩阵项的泛函。然后利用辅助方程不等式和改进型互凸组合方法来处理泛函求导产生的结果，对具有参数不确定性的时滞系统进行鲁棒 H_∞ 稳定性分析，并得到了一个保守性较低的结果。在文献[40]中，基于增广型 L-K 泛函，Guo 利用隶属度函数信息，构造了一种新的隶属度函数相关的增广型 L-K 泛函，并得到一个保守性较低的 T-S 模糊时滞系统的稳定性判据。

在一些情况下，增广向量的出现对降低时滞系统稳定性判据的保守性并没有作

用。文献[8]指出，许多不等式例如 Wirtinger 不等式^[42]、辅助方程不等式^[43]、Bessel-Legendre 不等式^[44]通过引入更多的额外项来降低和 Jensen 不等式^[3]之间的估计差距，但是假如 L-K 泛函中没有引入增广项，这些不等式对于降低系统的保守性是没有作用的。文献[8]运用数学方法证明了在选取同样泛函的条件时，在泛函的非积分项中不含增广项的情况下，利用 Wirtinger 不等式和 Jensen 不等式来分别判定单积分项得到的系统稳定性判据是等价的。虽然相较于 Jensen 不等式，Wirtinger 不等式通过引入了额外项即单积分项，成功地降低了对于单积分的估计差距，然而对于时滞系统来说没有起到降低保守性的作用。

多重积分型 L-K 泛函即通过添加多重积分项，来构造的泛函形式。多重积分项泛函包括三重积分项，以及三重以上积分项。三重积分的形式如下所示：

$$\int_{-h}^0 \int_r^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds dr d\theta$$

通过将三重积分型泛函和增广型泛函结合，并加入更多的系统的状态向量，可在式(1-6)的基础上，构造如下典型的泛函形式：

$$\begin{aligned} V(t) = & \zeta_1^T(t) P \zeta_1(t) + \int_{t-h}^t \zeta_2^T(s) Q \zeta_2(s) ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \zeta_2^T(s) R \zeta_2(s) ds d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \int_r^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds dr d\theta \end{aligned} \quad (1-7)$$

其中 $\zeta_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h), \int_{t-h}^t x(s) ds\}$ ， $\zeta_2(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t)\}$ 。三重积分项的引入对于降低保守性是有作用的^[45-50]，在文献[45]中，Sun 首次提出使用三重积分项来构造 L-K 泛函来研究时滞系统，在不引入任何自由权矩阵的情况下，获得了几种不同的稳定性判据。文献[47]构造了多区间下的三重积分型泛函，其中考虑了更多的状态信息，并在处理泛函的导数的时候，将系统时滞的各个子区间情况统一考虑，以线性矩阵不等式的形式给出了改进型区间时变时滞系统的稳定性判据。文献[49]利用增广型泛函和三重积分项来构造 L-K 泛函，研究了具有随机时滞的区间时滞系统的稳定性问题。

另外有学者提出了四重积分型 L-K 泛函^[51,52]，由于三重以上积分泛函形式复杂，多重积分的引入在后续处理求导结果中，也会引入新的需要处理的积分项，因而并没有广泛应用。文献[51]中，将两个四重积分项引入到 L-K 泛函中，在不引入任何自由矩阵的基础上，得到了保守性较低的稳定性判据。

时滞分割型 L-K 泛函即将时滞分成平均或者不平均的子区间，基于新的区间构造的泛函形式。在 2006 年，Gouaisbaut 首次提出时滞分割法^[53]，并广泛地应用在构

造不同形式的泛函中。时滞分割型泛函如下所示：

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\frac{h}{r}}^t \eta^T(\omega)Q\eta(\omega)d\omega + \int_{t-\frac{h}{r}}^t \int_v^t \dot{x}^T(\omega)R\dot{x}(\omega)d\omega dv \quad (1-8)$$

其中 $r \in \mathbb{N}^+$ 为分割次数， $\eta(t) = \text{col}\{x(t), x(t - \frac{1}{r}h), \dots, x(t - \frac{r-1}{r}h)\}$ 。文献[53]指出稳定性判据的保守性随子区间数量的增加而减少，另一方面，随着子区间数量的增加，稳定性判据的变量数量和计算复杂度也在增加。文献[54]首次将时滞区间分为三个子区间，子区间的长度分不同情况讨论。通过这种方法，新的稳定性判据不仅有效地降低了保守性，而且降低了计算复杂度。此外，文献[55]利用时滞分割法将时滞区间进行均匀分割，得到了线性时滞广义系统的稳定性判据。

除了以上提到的常用的三种方法之外还有很多泛函构造方法，例如，基于不等式构造型泛函^[56,57]，时延乘积法^[56,58-60]，动态时滞区间法^[61,62]，矩阵精炼法^[58,63,64]，区间排序法^[65]，多项式法^[66,67]。

文献[56]利用 Jensen 不等式构造恒大于零的项，将此项放到泛函中。由于此项的导数可以在稳定性判据中引入新的时滞变化信息以及加强状态信息和时滞信息之间的连接，所以能够得到保守性更低的结果。文献[58]在单积分项中引入时滞乘积项，构成新的泛函形式。如此一来，在泛函导数中不仅会产生时滞和时滞的导数相关交叉项，也会产生时滞和单积分交叉项，有助于降低保守性。文献[61]通过引入两个可调节参数 α 和 β ，将时变时滞 $\tau_1(t)$ 和 $\tau_2(t)$ 分别表示为动态时延区间 $[\alpha\tau_1(t), \tau_1 - \alpha\tau_1(t)]$ 和 $[\beta\tau_2(t), \tau_2 - \beta\tau_2(t)]$ 的形式，并根据新的时变时滞的可调节上下界，推导出保守性更低的时滞相关稳定性判据。Lee 提出了一种新型的引入了松弛矩阵的 L-K 泛函，该泛函将两个带有特殊构造的矩阵结合起来，并用数学推导证明这个泛函的正定性^[63]。文献[64]利用矩阵不等式进行基础变化，构造出新的矩阵形式的泛函。文献[65]将多时滞系统中的时滞按照不同方法排序，基于不同排序方式构造不同区间来设计泛函。Zhang 提出多项式项来构造泛函的组成部分，也就是将时变时滞本身，以及二次型、三次型等与松弛矩阵相乘，然后相加组成 L-K 泛函的一部分。另一方面，多项式法可以当作时延乘积法的一种扩展。多项式法的构造形式自然会存在 L-K 泛函中含有关于时滞的多次方的形式，值得注意的是，这部分的处理也要考虑计算复杂度以及保守性问题。

在 20 世纪 90 年代，由于 MATLAB 软件中线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)工具箱的出现，以及 LMI 工具箱的简便性，使得构造 L-K 泛函以

及求导更加方便、有效，并得到广泛应用。值得注意的是，过多的变量和约束条件会增加求解 LMI 的计算负担。

通过以上的介绍可以发现，现如今的 L-K 泛函经过多年的研究，已经展开了大量的工作，并取得了许多的成就。

1.2.2 L-K 泛函求导结果的主要处理方法

在设计泛函之后，需要对其进行求导，如何对求导结果进行处理起着至关重要的作用。接下来介绍几种主要的处理方法。

模型转换方法即将时滞系统进行模型转换，再进行时滞系统分析。文献[68]介绍了四种最基本的模型转换方式。

接下来以定常时滞系统为例，对其中一种转换方式进行简要介绍。利用牛顿-莱布尼茨公式 $x(t) = x(t-h) + \int_{t-h}^t \dot{x}(s)ds$ 可将定常时滞系统转换为 $\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-h}^t \dot{x}(s)ds$ 的形式，在对 L-K 泛函求导时利用向量积可产生 $-2x^T(t)PA_d \int_{t-h}^t \dot{x}(s)ds$ 的交叉项，并与 Lyapunov 泛函求导结果中的一重积分抵消掉。进行模型变换会产生形似 $a^T b$ 的交叉项，需要对此项进行界定。为了减小保守性，国内外学者对此做出了探讨。例如，Park 教授提出的 Park 不等式以及 Moon 提出的 Moon 不等式，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 。

Park 不等式^[69]:

$$-2a^T b \leq (a + Mb)^T X(a + Mb) + b^T X^{-1}b + 2b^T Mb \quad (1-9)$$

其中 $X > 0$ ， $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。如果令 $M = 0$ ，则可得到:

$$-2a^T b \leq a^T R a + b^T X^{-1}b \quad (1-10)$$

Moon 不等式^[70]:

$$-2a^T b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-I \\ Y^T-I & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

其中 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$ 。

然而有文献指出，某些模型转换方法会引入一些额外的变量，因此会出现和原系统不等价的情况^[71]。另一方面由于模型转换方法只是将模型进行转换来消除部分泛函求导之后产生积分项，并没有对其本身进行放缩，所以这种方法具有较大的保守性。

自由权矩阵方法即构造一些恒等式并加到 L-K 泛函求导后产生的结果中，再对整体进行处理，得到系统的稳定性判据。例如，文献[38]提出了一种新的时滞相关的稳定性判据，其中引入了如下基于牛顿-莱布尼茨公式的恒等式：

$$2[x^T(t)M_1 + x^T(t-\tau)M_2 + \dot{x}^T(t-\tau)M_3][x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds - x(t-\tau)] = 0$$

其中 M_1, M_2, M_3 是任意符合维数要求的矩阵， τ 是定时滞。将上述恒等式加到泛函求导得到的结果中，则得到 $\dot{V}(t) := \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \eta_1^T(t, s) \hat{\Gamma} \eta(t, s) ds$ 的结果，然后令 $\hat{\Gamma} < 0$ 即可得到稳定性判据。文献[41]利用自由权矩阵方法，引入一些积分项，通过放缩将泛函求导产生的一些不方便处理的积分项处理掉，使得泛函求导的结果中没有积分项，据此得到稳定性判据。

除了用牛顿-莱布尼茨公式引入自由权矩阵，也可以用时滞系统本身的结构形式来引入自由权矩阵，以定常时滞系统为例，引入任意适当维数的自由权矩阵 $M_i (i=1, 2, 3)$ ，可构造式(1-12)的恒等式。

$$2[x^T(t)M_1 + x^T(t-h)M_2 + \dot{x}^T(t-h)M_3][\dot{x}(t) - Ax(t) - A_d x(t-h)] = 0 \quad (1-12)$$

许多文献基于自由权矩阵法来分析时滞系统，例如，文献[30]利用改进型 Jensen 不等式来构造新的泛函，并将类似于式(1-5)的恒等式引入到泛函求导结果中，诱导产生更多的交叉项，得到新的关于时滞系统渐近稳定的判据。文献[72]通过引入新的基于自由权矩阵来估计泛函导数的最大上界，得到了保守性更低的结果。文献[73]利用改进型自由权矩阵方法，同时考虑了时滞、时滞上界和时滞下界之间的关系，得到了关于神经网络的时滞相关稳定性判据。

积分不等式方法即直接对积分进行放缩，将积分项转换为线性矩阵不等式形式的项。自从 2013 年，Seuret 提出 Wirtinger 不等式，国内外学者对积分不等式不断地提出改进和探索。近十年来，国内外学者提出了基于自由矩阵的不等式^[74]，基于辅助方程的不等式^[43]，改进型广义自由矩阵的不等式^[75]，Bessel-Legendre 不等式^[76]以及其他的不等式^[77-79]。

接下来对积分不等式进行举例，假设 $R \in \mathbb{S}^+$ ， $x(s)$ 在区间 $[a, b]$ 上为连续可导函数，那么以下不等式成立：

Jensen 不等式^[3]：

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq -\frac{1}{b-a} [x(b) - x(a)]^T R [x(b) - x(a)] \quad (1-13)$$

Wirtinger 不等式^[42]:

$$\begin{aligned}
 & -\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
 & \leq -\frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} x(b)-x(a) \\ x(b)+x(a)-2\int_a^b x(s)ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(b)-x(a) \\ x(b)+x(a)-2\int_a^b x(s)ds \end{bmatrix} \quad (1-14)
 \end{aligned}$$

基于自由矩阵的不等式^[74] (Free-matrix-based integral inequality):

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq \varpi^T \bar{\Omega} \varpi \quad (1-15)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega} &= (b-a)(Z_1 + \frac{1}{3}Z_3) + \text{sym}\{N_1 \bar{\Pi}_1 + N_2 \bar{\Pi}_2\} \\
 \bar{\Pi}_1 &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{\Pi}_2 = 2\bar{e}_3 - \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_1 = [I \ 0 \ 0], \bar{e}_2 = [0 \ I \ 0], \bar{e}_3 = [0 \ I \ 0] \\
 & \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & N_1 \\ * & Z_3 & N_2 \\ * & * & R \end{bmatrix} \geq 0, Z_1, Z_3 \in \mathbb{S}^n, Z_2 \text{ 是任意矩阵。}
 \end{aligned}$$

基于辅助方程的不等式^[43] (Auxiliary function-based integral inequality):

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq -\frac{1}{b-a} \Omega_1^T R \Omega_1 - \frac{3}{b-a} \Omega_2^T R \Omega_2 - \frac{5}{b-a} \Omega_3^T R \Omega_3 \quad (1-16)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= x(b) - x(a), \Omega_2 = x(b) + x(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b x(s) ds \\
 \Omega_3 &= x(b) - x(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b x(s) ds - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\beta^b x(s) ds d\beta
 \end{aligned}$$

积分不等式是处理泛函求导结果中的积分项的强效工具，积分不等式的不断发展使得估计误差不断降低。值得注意的是，运用不等式也有可能引入过多的自由变量或者增大计算复杂度，如何平衡保守性和计算复杂度之间的关系也是需要进一步考虑的。

互凸组合方法主要用来处理带有分数形式的矩阵。在研究时滞系统的稳定性时，经常会将时滞区间分成两部分，再进行不等式放缩，这时会出现的对应待处理的矩阵。这种情况下，需要对其进行放缩。上述情况以时变时滞系统(1-1)为例，设计泛函并求导，随之运用 Wirtinger 不等式，得到如下结果：

$$\begin{aligned}
 -h \int_{t-h}^t \dot{x}(s) R \dot{x}(s) ds &= -h \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s) R \dot{x}(s) ds - h \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s) R \dot{x}(s) ds \\
 &\leq -\frac{h}{h(t)} E_1^T \hat{R} E_1 - \frac{h}{h-h(t)} E_2^T \hat{R} E_2 \\
 &= -\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} \hat{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1-17}$$

其中

$$\alpha = \frac{h(t)}{h}, 1-\alpha = \frac{h-h(t)}{h}, \hat{R} = \text{diag}\{R, 3R\}$$

$$E_1 = \text{col}\{x(t) - x(t-h(t)), x(t) + x(t-h(t)) - 2 \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s) ds\}$$

$$E_2 = \text{col}\{x(t-h(t)) - x(t-h), x(t-h(t)) + x(t-h) - 2 \frac{1}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} x(s) ds\}$$

进而如何对 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} \hat{R} \end{bmatrix}$ 进行处理, 是在对 L-K 泛函求导结果进行处理过程中

至关重要的一个部分。自从 2011 年, Park 提出互凸引理^[80]如下式(1-18)所示, 国内外科研工作者也陆续提出了互凸引理^[81,82]。

互凸引理^[80]: 对于 $n \times n$ 的实矩阵 S , 对称正定矩阵 R_1 和 R_2 , 标量 $\alpha \in (0,1)$, 如果存在式(1-18)成立,

$$\begin{bmatrix} R_1 & S \\ S^T & R_2 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{1-18}$$

那么式(1-19)成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 & S \\ S^T & R_2 \end{bmatrix} \tag{1-19}$$

改进型互凸不等式^[81]: 对于 $n \times n$ 的实矩阵 S , 对称正定矩阵 R_1 和 R_2 , 标量 $\alpha \in (0,1)$, 如果存在实对称矩阵 X_1 , X_2 以及任意适当维数矩阵 Y_1 , Y_2 使得式(1-20)成立,

$$\begin{bmatrix} R_1 - X_1 & Y_1 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} R_1 & Y_2 \\ * & R_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{1-20}$$

那么式(1-21)成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha}R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 + (1-\alpha)X_1 & \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_1 \\ * & R_2 + \alpha X_2 \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

基于上述式(1-19)和式(1-21)的不同处理方法, 可对(1-17)的结果进行处理, 并化为线性矩阵不等式的形式。

多项式法是对含有多项式形式的结果进行正负定性判定的方法。在一些求导结果中会出现如下形式关于时变时滞的多项式函数:

$$f_k(h(t)) = h^k(t)\Phi_k + h^{k-1}(t)\Phi_{k-1} + \cdots + h(t)\Phi_1 + \Phi_0 \quad (1-22)$$

其中 k 是正整数, $\Phi_i (i=1, \dots, k)$ 是对称矩阵。为了解决在 $h(t) \in [0, h]$ 的条件下, 使得 $f_k(h(t)) < 0$ 成立的问题, 许多国内外学者针对这一问题提出了具体的解决方案^[66, 83-85]。文献[83]针对 $k=2$ 时 $f_2(h(t)) < 0$ 的情况, 根据二次函数的图像开口向上和向下两种不同类型, 给出了充分条件: $f_2(0) < 0$, $f_2(h) < 0$ 且 $-h^2\Phi_2 + f_2(0) < 0$ 。文献[84]通过做二次型函数图形的切线, 找到切线交点并计算数值, 给出了比文献[83]保守性更低的充分条件。2021年, Zhang 给出了关于式(1-22)小于零的充要条件^[66], 其中引入了一些待定矩阵, 使得所得结果的计算复杂度增加, 值得注意的是, 如何平衡保守性和计算复杂度之间的关系也是需要进一步考虑的。

除了上面介绍的 L-K 泛函求导结果常用的处理方法之外, 再介绍几个常用的引理。

引理 1-1 (Schur 补引理) 对于给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$, 下面三个条件等价:

$$(i) S < 0 \quad (1-23)$$

$$(ii) S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0 \quad (1-24)$$

$$(iii) S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0 \quad (1-25)$$

Schur 补引理常用于处理带有逆矩阵的泛函求导结果, 可以为消掉逆矩阵提供充要条件。

引理 1-2^[85] 对于适当维数矩阵 $Q = Q^T, M, E, F$ 且满足 $F^T F \leq I$, 那么

$$Q + MFE + E^T F^T M^T < 0 \quad (1-26)$$

成立的充分必要条件是存在标量 $\varepsilon > 0$ 使得

$$Q + \varepsilon^{-1}MM^T + \varepsilon E^T E^T < 0 \quad (1-27)$$

引理 1-2 为消掉不确定的矩阵 F 提供了充要条件。

1.2.3 现有工作存在的不足

经过上两节对时滞系统稳定性研究现状的讨论，可以发现基于 L-K 泛函方法，只能通过选择合适的 L-K 泛函或者降低估计 L-K 求导结果的放缩程度，来降低所得判据的保守性。目前，对于时滞系统的稳定性研究仍存在改进空间。

首先，目前针对多时滞系统的研究不够完善，存在一定的保守性。然而，现实系统中很有可能同时存在多个时滞，例如采用通讯手段的进行信息传输的智能电网系统，对不同用户不用数据进行采集产生的时滞现象；由于网络环境下宽带和信道容量的限制，很有可能诱导多智能体系统产生信息传输时滞现象。值得注意的是，关于带有多时滞的系统，如果不做针对化的分析，通常很难达到预期的目标。

其次，部分学者考虑的时滞区间类型较为局限，针对一般化时滞区间做出了平行四边形的区间构造。目前针对时变时滞的情况，大多数文献都是直接带入时滞和时滞导数的上下界进行稳定性分析。然而，时滞和时滞导数组成的区间不一定是长方形的，需要对其进一步逼近。

最后，考虑对于非线性时滞系统的研究，国内外学者经常使用 T-S 模糊时滞系统来进行模拟。然而，许多学者并未注意到 T-S 模糊模型中特有的隶属度函数这一信息。此外，考虑网络化环境下，对此类系统的采样控制和控制器扰动问题讨论较少，对时滞信息和采样状态信息的运用不够全面，使得结果具有一定的保守性。

1.3 本文的主要研究内容

1.3.1 研究框架

时滞现象是很多系统中不可避免的因素，时滞的存在往往会导致系统的性能减弱甚至破坏系统的稳定性，时滞现象的存在也给系统的控制分析带来挑战。本文主要针对几类时滞系统，进行稳定性分析，将获取的稳定性判据与控制算法进行数值仿真，结果验证了本文所提出方法的有效性。

本文针对几类时滞系统的稳定性与控制问题进行了分析，全文共分为六章，其中第一章为绪论，第二章至第五章为本文的主要研究内容，其中第二章和第三章是

针对带有三角函数形式时滞的系统进行分析，第四章至第六章是针对带有一般形式时滞的系统进行分析，最后是总结与展望。其具体的研究结构如图 1-1 所示。

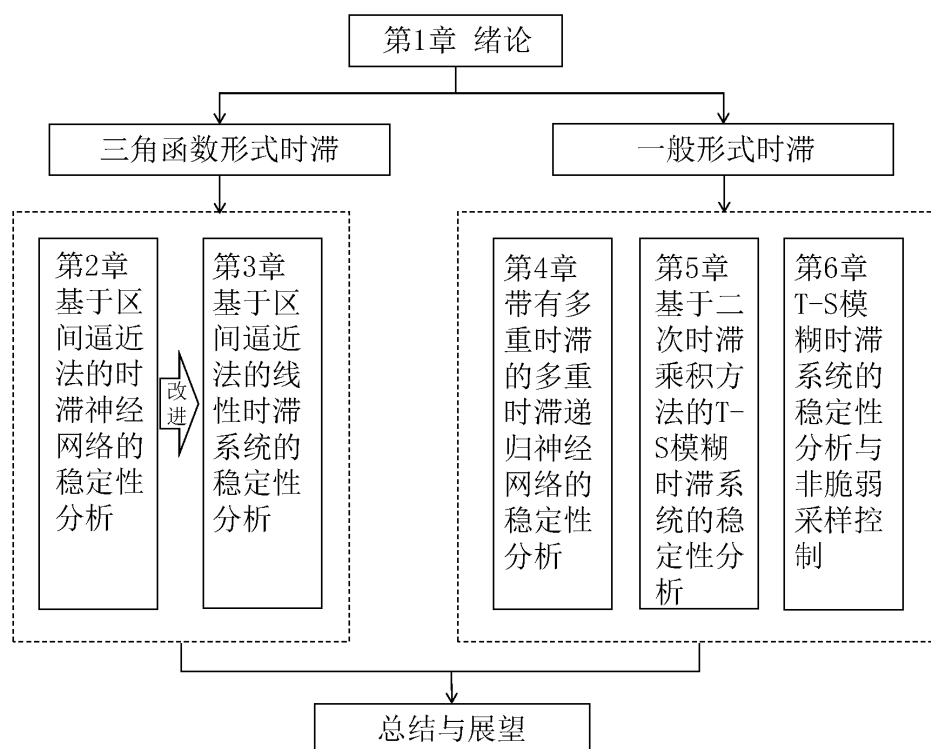


图 1-1 文献的研究框架

Fig. 1-1 The organization structure of this dissertation

1.3.2 研究内容

本课题的研究内容主要是基于 LMI 针对几类时滞系统进行稳定性研究。具体研究内容展开如下：

第 1 章介绍了时滞系统的研究背景以及研究目的和意义，以及目前关于时滞系统的研究现状和主要研究方法。

第 2 章研究了带有三角函数形式的时变时滞的神经网络的稳定性问题。通过三角函数时变时滞以及其导数之间的性质，将这两个变量联立成椭圆函数的形式。通过对椭圆图形进行分析，构造了一种新型的区间逼近法。基于这种新型的区间逼近法，得到新型的时滞区间，进而得到了关于神经网络的稳定性条件，并运用两个数值算例验证所提出方法的可行性。

第 3 章研究了带有三角函数形式的时变时滞的线性系统的稳定性问题。本章的主要方法是将上一章所提方法进行扩展，得到时滞下界不为零的时滞区间的逼近方

法。与此同时，通过一种新的周期时滞的泛函方法，构造了一种新型的区间逼近法，并引入新的时滞区间来分析系统的稳定性。基于这种新型的区间逼近法以及新型环函数，得到了线性时滞系统的稳定性判据，并运用两个数值算例验证所提出方法的可行性。

第 4 章研究了带有多重时滞的递归神经网络的稳定性问题。利用时滞状态和当前状态，提出了增强型时滞区间分割法。通过对不同时滞的大小进行不同情况下的分类讨论，构造出不同的区间。然后利用 Wirtinger 不等式和互凸不等式，提出了保守性较低的时滞相关稳定性判据，并通过数值仿真验证所提出的算法的有效性。

第 5 章研究了带有时变时滞的 T-S 模糊系统的稳定性问题。本章设计了一种新的 L-K 泛函，这种泛函包含二次时滞乘积单积分项和隶属度函数相关矩阵，其中考虑了时滞信息。在处理泛函导数中的积分项时，利用积分不等式估计方法，并引入多项式不等式的充要条件来估计 L-K 泛函中存在的二次型，以及 L-K 泛函导数所构成的二次型，使得估计误差大幅降低，获得了一个保守性较低的稳定性判据。通过数值仿真验证所提出的方法的有效性。

第 6 章研究了带有控制器扰动的 T-S 模糊系统的稳定性和采样控制问题。为了降低控制器不确定性对系统性能的影响，以及降低系统的计算负担，本章提出了一种新型的非脆弱采样控制方案来处理带有时滞的 T-S 模糊系统。通过调整型环函数构造了一种增强型 L-K 泛函，其中不仅包含当前状态，也包含时滞状态。利用 Wirtinger 不等式和增强型单积分不等式，得到了具有较低保守性的新型稳定性判据。通过计算线性矩阵不等式，得到非脆弱采样控制器参数。通过数值算例说明所呈现的方法的优越性。

本文的最后对全文进行总结，并提出未来要进一步研究的工作。

第2章 基于区间逼近法的时滞神经网络的稳定性分析

本章研究了带有时变时滞的神经网络的稳定性问题，其中假设时变时滞为三角函数形式。首先，利用时滞及其导数之间的特性，构造了一种新型的区间逼近法，提供了两种新型的时滞区间。然后，构造合适的泛函并利用 Wirtinger 不等式、互凸不等式，得到了保守性较低的稳定性判据。最后，利用数值算例验证所提出的算法的有效性。

2.1 引言

近年来，随着人们对神经网络的深入研究，构建了处理不同问题的各类神经网络模型。神经网络模型广泛地应用于不同领域并发挥出重要作用，例如处理优化问题、行为识别、数据挖掘等^[86,87]。同时，神经网络的广泛应用使其与不同学科交叉并相互融合，互相促进，为神经网络的研究带来新高度。

在神经网络的分析和应用中，由于神经元之间固有的通信时间和放大器有限的切换速度，不可避免地会产生时滞现象。时滞现象的出现可能导致系统振荡、发散甚至不稳定。对于一个系统来说，稳定性是首先需要保证的条件。因此，对具有时滞现象的神经网络进行稳定性研究是很有必要的。近些年来，国内外学者对于具有时滞的神经网络的稳定性分析已经做了大量的研究工作^[88,89]。作为一种高效的分析方法，L-K 泛函法广泛地运用在时滞系统的稳定性分析中。一方面，如何选择合适的泛函对获得保守性较小的稳定性判据起着重要的作用。另一方面，如何处理泛函导数也十分重要。文献[88]利用动态加权参数将时滞区间进一步划分成许多个子区间，将状态时滞和其他子区间相关时滞之间的关系进行关联，借助改进型互凸组合方法和双重积分项处理泛函的求导结果，得到了保守性较低的递归神经网络的稳定性判据。在文献[89]中，通过引入时滞相关矩阵来构建泛函，并利用互凸不等式来处理泛函导数，得到了四种不同的无源性判据，并比较了四种判据之间的优缺点。

耗散性和作为其特例的无源性现象广泛地存在于物理学、应用数学以及力学等领域。无源性分析构建了系统的动态能量关系，无源性反映了系统的能量储存函数与外部输入输出信号之间的关系。一个系统称为无源系统也就意味着系统的能量小

于系统能量的供给率，这个供给率是由系统的输入和输出的乘积来描述的。在时滞系统的广泛研究中，神经网络的无源性分析也得到了广泛的关注，国内外许多学者对神经网络的无源性分析进行了深入的研究。文献[90]运用自由矩阵的积分不等式和互凸不等式用来研究神经网络的无源性，其中不仅考虑了离散时滞，也考虑了分布式时滞。

实际应用中，在研究旋转切割机的动力学模型时，会得到具有周期性时变时滞的线性系统模型^[91]。三角函数形式的时变时滞作为一种周期性时变时滞，诸多国内外科研工作者对其进行了广泛的仿真验证。文献[23]提到，逼近时滞区间的一种方法是构建一个尽可能小的多边形来覆盖椭圆，以细化时滞区间的可用集合。然而，这篇文献并没有表明具体的时滞间隔的表示形式。

受到上述所提文献的启发，本章的目的是寻找一类三角函数形式的时滞逼近区间。在本章中，首先利用时变时滞及其导数的函数关系，进行图像分析：通过椭圆的数学特性，在椭圆上选一点做其切线得到交点，然后得到具体的区间。由于椭圆是对称图形，因而得到椭圆 1/4 的点即可得到椭圆其他 3/4 的点，进而得到可调节区间。随之，利用常用的不等式来得到保守性更低的稳定性判据。本章的贡献总结为以下几点。首先，提出了区间逼近法并得到了两种时滞允许区间。其次，引入自适应参数来构建稳定性判据，通过调节参数，可以获得保守性更低的稳定性判据。

2.2 带有三角函数形式时滞的神经网络模型及相关引理

考虑如下神经网络模型：

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_1g(x(t)) + W_2g(x(t-h(t))) \quad (2-1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 代表系统状态变量； $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{S}_+^n$ 表示正定的系统矩阵； W_i ($i=1,2$) 为适当维数的已知矩阵； $g(x(t)) = \text{col}\{g_1(x(t)), \dots, g_n(x(t))\}$ 是神经激活函数向量，并满足条件 $g_i(0) = 0$ 和式(2-2)。

$$k_i^- \leq \frac{g_i(\theta_1) - g_i(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} \leq k_i^+, \theta_1 \neq \theta_2 \quad (2-2)$$

将式(2-2)中的上下界元素组成对角矩阵，表示成已知矩阵 K_1 和 K_2 ，具体形式分别为 $K_1 = \text{diag}\{k_1^+, k_2^+, \dots, k_n^+\}$ ， $K_2 = \text{diag}\{k_1^-, k_2^-, \dots, k_n^-\}$ 。 $h(t)$ 是具有如下三角函数形式矩阵：

$$h(t) = a_0 \cos(a_1 t) + a_2 \quad \text{或者} \quad h(t) = a_0 \sin(a_1 t) + a_2 \quad (2-3)$$

并满足下式:

$$h(t) \in [0, h], |\dot{h}(t)| \leq \mu < 1 \quad (2-4)$$

其中 a_0, a_1, a_2, h, μ 均为常数。结合式(2-3)和式(2-4)可得如下结果:

$$a_0 = \frac{h}{2}, a_1 = \frac{2\mu}{h}, a_2 = \frac{h}{2} \quad (2-5)$$

那么可以得到时滞的具体形式如式(2-6)所示,

$$h(t) = \frac{h}{2} \cos \frac{2\mu}{h} t + \frac{h}{2} \quad \text{或者} \quad h(t) = \frac{h}{2} \sin \frac{2\mu}{h} t + \frac{h}{2} \quad (2-6)$$

其导数形式如式(2-7)。

$$\dot{h}(t) = -\mu \sin \frac{2\mu}{h} t \quad \text{或者} \quad \dot{h}(t) = \mu \cos \frac{2\mu}{h} t \quad (2-7)$$

结合时滞函数以及其导数函数的形式, 并结合三角函数的性质, 可以得到式(2-8)椭圆形式的函数。

$$\frac{(h(t) - \frac{h}{2})^2}{(\frac{h}{2})^2} + \frac{\dot{h}^2(t)}{\mu^2} = 1 \quad (2-8)$$

为了便于后续推导计算, 给出下列不等式引理。

引理 2-1^[42] 给定正定矩阵 R , 以及常数 $a < b$, 式(2-9)对于所有的连续可导函数 $\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 均成立。

$$\begin{cases} (b-a) \int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \geq \hat{\psi}_1^T R \hat{\psi}_1 \\ (b-a) \int_a^b \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \geq \psi_1^T R \psi_1 + 3\psi_2^T R \psi_2 \end{cases} \quad (2-9)$$

其中 $\hat{\psi}_1 = \int_a^b x(s) ds$, $\psi_1 = \omega(b) - \omega(a)$ 以及 $\psi_2 = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(u) du$ 。

引理 2-2^[80] (互凸不等式) 给定 $R_1, R_2 \in \mathbb{S}_+^n$, 标量 $\alpha \in (0, 1)$ 。如果存在任意矩阵 $X_1, X_2 \in \mathbb{S}^m$ 以及 $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得式(2-10)成立,

$$\begin{bmatrix} R_1 - X_1 & Y_1 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} R_1 & Y_2 \\ * & R_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2-10)$$

那么式(2-11)成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha}R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 + (1-\alpha)X_1 & \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 \\ * & R_2 + \alpha X_2 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

2.3 区间逼近法

在大多数文献当中，在研究时变时滞系统的时候，最常用的时滞区间为 $(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H} = [0, h] \times [-\mu, \mu]$ ，这一区间充分利用了时滞区间 $[0, h]$ 和时滞导数区间 $[-\mu, \mu]$ 。然而基于 $h(t)$ 为时变时滞的特征：当 $h(t)$ 取最大值 h 的时候，时滞的导数不可能为正定，即不可能再变大；当 $h(t)$ 取最小值 0 的时候，时滞的导数不可能为负定，即不可能再变小。

接下来，本章以图例的形式展示所提出来的新型的时滞区间逼近法的分析过程。式(2-8)可看作椭圆的标准方程，令 $h(t)$ 和 $\dot{h}(t)$ 分别作为坐标轴的 x 轴和 y 轴，用图形方式展示出来，如图 2-1 所示。其中蓝色部分是实际时滞区间的内部，蓝色区域的外围椭圆是时滞区间的具体的图形表现形式。在椭圆中选一点 Z ，它的 x 轴坐标为 $h - \frac{h}{2}\alpha$ ，其中 $\alpha \in (0, 1)$ ，这样使得 Z 处于椭圆形的右上 1/4 处。点 A^1 是直线 $x = \mu$ 与经过 Z 点的椭圆切线的交点；点 B^1 是直线 $y = h$ 与经过 Z 点的椭圆切线的交点。通过做 A^1, B^1 在关于 x 轴和直线 $y = \frac{h}{2}$ 作为对称轴，在椭圆上的对称点，可以得到点 $C^1, D^1, E^1, F^1, G^1, H^1$ 。这些点组成的多边形可以覆盖三角函数形式所形成的椭圆形的时滞区间。通过数值计算，可以得到上述点的具体数值坐标：

$$\begin{aligned} (A_x^1, A_y^1) &= \left(\frac{(1 - \sqrt{2\alpha - \alpha^2})h}{2(1 - \alpha)} + \frac{h}{2}, \mu \right), (B_x^1, B_y^1) = \left(h, \frac{\alpha\mu}{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}} \right) \\ (C_x^1, C_y^1) &= (h - A_x^1, \mu), (D_x^1, D_y^1) = (0, B_y^1), (E_x^1, E_y^1) = (0, -D_y^1) \\ (F_x^1, F_y^1) &= (C_x^1, -\mu), (G_x^1, G_y^1) = (A_x^1, -\mu), (H_x^1, H_y^1) = (h, -B_y^1) \end{aligned}$$

将这些点联合起来可以得到如式(2-12)所示新的区间 \mathcal{H}_1 。

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_1 = Co\{(A_x^1, A_y^1), (B_x^1, B_y^1), (C_x^1, C_y^1), (D_x^1, D_y^1), (E_x^1, E_y^1), (F_x^1, F_y^1), (G_x^1, G_y^1), (H_x^1, H_y^1)\}, \quad (2-12)$$

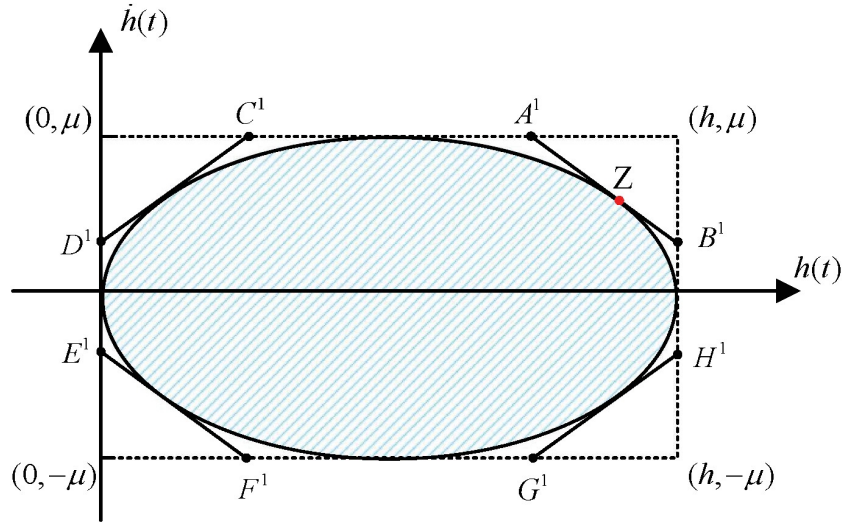

 图 2-1 允许时滞区间 \mathcal{H}_1

 Fig 2-1 The allowable delay sets \mathcal{H}_1

同样地，如图 2-2 所示，展示如何得到另一种时滞区间。在椭圆中取两点 Z_1 和 Z_2 ，它们的横坐标分别为 $h - \frac{h}{2}\beta$ 和 $h - \frac{h}{2}\alpha$ ，其中 $0 < \alpha < \beta < 1$ ，这样使得点 Z_1 和点 Z_2 处于椭圆形的右上 1/4 处，而且点 Z_1 的横坐标比点 Z_2 的横坐标要小。首先，做点 O_1 ，点 O_1 是经过点 Z_1 的椭圆切线和点 Z_2 的椭圆切线的交点。分别做经过点 Z_1 的椭圆切线和点 Z_2 的椭圆切线的延长线得到点 A^2, B^2, O_1 。然后做这三点的对称点，这些点组成的集合可以覆盖椭圆时滞区间，即可得到新的时滞区间。通过数值计算，可以得到上述点的数值坐标：

$$\begin{aligned}
 (A_x^2, A_y^2) &= \left(\frac{(1 - \sqrt{2\beta - \beta^2})h}{2(1 - \beta)} + \frac{h}{2}, \mu \right), (B_x^2, B_y^2) = \left(h, \frac{\alpha\mu}{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}} \right), \\
 (C_x^2, C_y^2) &= (h_1 + h_2 - A_x^2, \mu), (D_x^2, D_y^2) = (h_2, B_y^2), (E_x^1, E_y^1) = (h_2, -D_y^2), \\
 (F_x^2, F_y^2) &= (C_x^2, -\mu), (G_x^2, G_y^2) = (A_x^2, -\mu), (H_x^2, H_y^2) = (h_2, -B_y^2), \\
 (O_{1x}, O_{1y}) &= \left(\frac{(1 + K_3)K_6 - (1 + K_4)K_5}{K_1K_6 - K_2K_5}, \frac{1 - K_1O_{1x} + K_3}{K_5} \right) \\
 (O_{2x}, O_{2y}) &= (h_1 + h_2 - O_{1x}, O_{1y}), (O_{3x}, O_{3y}) = (O_{2x}, -O_{2y}), (O_{4x}, O_{4y}) = (O_{1x}, -O_{1y})
 \end{aligned}$$

其中

$$K_1 = \frac{2(1 - \alpha)}{h}, K_2 = \frac{2(1 - \beta)}{h}, K_3 = 1 - \alpha$$

$$K_4 = 1 - \beta, K_5 = \frac{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}}{\mu}, K_6 = \frac{\sqrt{2\beta - \beta^2}}{\mu}$$

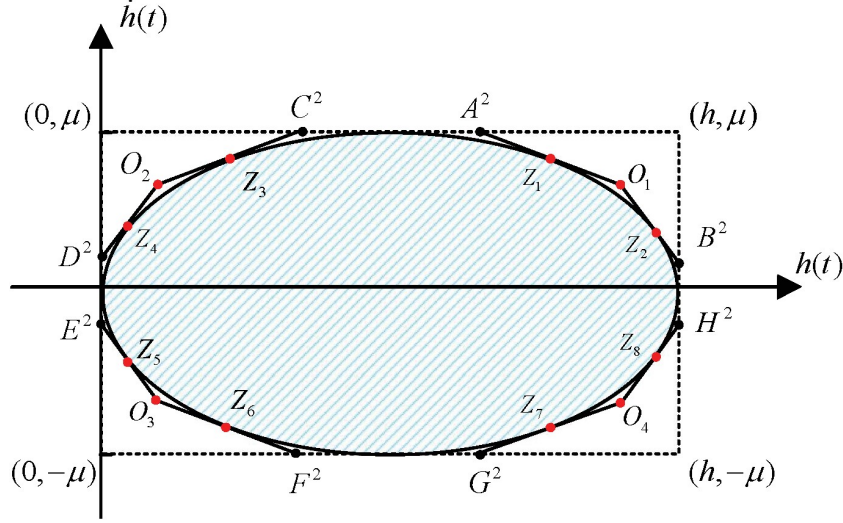

 图 2-2 允许时滞区间 \mathcal{H}_2

 Fig 2-2 The allowable delay sets \mathcal{H}_2

将这些点联合起来可以得到新的区间 \mathcal{H}_2 如式(2-13)所示。

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_2 = Co\{(A_x^2, A_y^2), (O_{1x}, O_{1y}), (B_x^2, B_y^2), (C_x^2, C_y^2), (O_{2x}, O_{2y}), (D_x^2, D_y^2), (E_x^2, E_y^2), (O_{3x}, O_{3y}), (F_x^2, F_y^2), (G_x^2, G_y^2), (O_{4x}, O_{4y}), (H_x^2, H_y^2)\} \quad (2-13)$$

注 2.1 虽然文献[23]中提到可以做一个多边形来覆盖椭圆来重新定义时滞区间，但是对于允许的时滞区间，文献[23]没有给出具体的区间形式。本章利用椭圆的图形特性，给出了两种新的闭合的时滞区间的区间逼近方法。通过在椭圆上做切线，得到一个包围椭圆形的多边形。其中利用椭圆的对称特性，可以得到各个点的坐标，坐标的集合即为新的时滞区间。

注 2.2 通过添加一条或者两条辅助线，不能保证区间 \mathcal{H}_2 比区间 \mathcal{H}_1 保守性更低。由于保守性与参数的选择相关，如果选择同样的参数 α ，理论上 \mathcal{H}_2 的保守性比 \mathcal{H}_1 更低。从图形的角度，所做的切线越多，越能缩小多边形与椭圆的差距，如果做无限条辅助线构成多边形，则可以近似看作椭圆。

2.4 主要结果

为了简化结果的表达, 给出如下符号:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (13-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 13$$

$$\hat{e}_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (12-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 12$$

$$e_s = -Ae_1 + W_1e_8 + W_2e_9 + Be_{13}, \hat{e}_s = -A\hat{e}_1 + W_1\hat{e}_8 + W_2\hat{e}_9$$

$$g(t) = g(W_0x(t)), g(t-h(t)) = g(W_0x(t-h(t))), g(t-h) = g(W_0x(t-h))$$

$$f_i^+(s) = g_i(s) - k_i^-s, f_i^-(s) = k_i^+s - g_i(s)$$

$$v_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), x(t-h)\}, v_2(t) = \text{col}\{\dot{x}(t-h(t)), \dot{x}(t-h)\}$$

$$v_3(t) = \int_{t-h(t)}^t \frac{x(s)}{h(t)} ds, v_4(t) = \int_{t-h}^{t-h(t)} \frac{x(s)}{h-h(t)} ds, v_5(t) = \int_{t-h(t)}^t g(s) ds, v_6(t) = \int_{t-h}^{t-h(t)} g(s) ds$$

$$\eta_1(t) = \text{col}\{v_1(t), h(t)v_3(t), (h-h(t))v_4(t), v_5(t), v_6(t)\}$$

$$\eta_2(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), v_3(t)\}$$

$$\eta_3(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), v_4(t)\}, \eta_4(s) = \text{col}\{x(s), \dot{x}(s), g(s)\}$$

$$\xi(t) = \text{col}\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), g(t), g(t-h(t)), g(t-h), v_5(t), v_6(t), u(t)\}$$

2.4.1 稳定性分析

定理 2-1 给定标量 h , μ 和 $0 < \alpha < \beta < 1$, 对于带有满足条件(2-4)的三角函数形式时滞(2-6)的神经网络(2-1)在时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 下是稳定的, 如果存在适当维数的正定对称矩阵 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, U_1, U_2$, 正定对称矩阵 $\Lambda_i (i=1, 2, \dots, 12)$, 对称矩阵 X_j , 任意实矩阵 $Y_j (j=1, 2, 3, 4)$ 满足式(2-14)-(2-16)。

$$\Phi_0(h(t), \dot{h}(t)) + \Phi_1(h(t), \dot{h}(t)) < 0 \quad (2-14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 - X_1 & Y_1 \\ * & \tilde{U}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & Y_2 \\ * & \tilde{U}_1 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2-15)$$

$$\begin{bmatrix} U_2 - X_3 & Y_3 \\ * & U_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} U_2 & Y_4 \\ * & U_2 - X_4 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2-16)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi_0(h(t), \dot{h}(t)) = & \text{sym}\{\hat{E}_1^T P_1 \hat{E}_2 + \hat{E}_3^T P_2 \hat{E}_4 + \hat{E}_5^T P_3 \hat{E}_6\} + \dot{h}(t)(\hat{E}_3^T P_2 \hat{E}_3 - \hat{E}_5^T P_3 \hat{E}_5) + \hat{E}_7^T Q_1 \hat{E}_7 \\ & + (1 - \dot{h}(t))\hat{E}_8^T (Q_2 - Q_1) \hat{E}_8 - \hat{E}_9^T Q_2 \hat{E}_9 + h^2 \hat{e}_s^T U_1 \hat{e}_s + h^2 \hat{e}_8^T U_2 \hat{e}_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{sym}\{[(K_1 W_0 \hat{e}_1 - \hat{e}_8)^T \Lambda_1 + (\hat{e}_8 - K_2 W_0 \hat{e}_1)^T \Lambda_2] W_0 \hat{e}_s \\
 & + (1 - \dot{h}(t))[(K_1 W_0 \hat{e}_2 - \hat{e}_9)^T \Lambda_3 + (\hat{e}_9 - K_2 W_0 \hat{e}_2)^T \Lambda_4] W_0 \hat{e}_4 \\
 & + [(K_1 W_0 \hat{e}_3 - \hat{e}_{10})^T \Lambda_5 + (\hat{e}_{10} - K_2 W_0 \hat{e}_3)^T \Lambda_6] W_0 \hat{e}_5 + [K_1 W_0 \hat{e}_1 - \hat{e}_8]^T \Lambda_7 [\hat{e}_8 - K_2 W_0 \hat{e}_1] \\
 & + [K_1 W_0 \hat{e}_2 - \hat{e}_9]^T \Lambda_8 [\hat{e}_9 - K_2 W_0 \hat{e}_2] + [K_1 W_0 \hat{e}_3 - \hat{e}_{10}]^T \Lambda_9 [\hat{e}_{10} - K_2 W_0 \hat{e}_3] \\
 & + [K_1 W_0 (\hat{e}_1 - \hat{e}_2) - \hat{e}_8 + \hat{e}_9]^T \Lambda_{10} [\hat{e}_8 - \hat{e}_9 - K_2 W_0 (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)] \\
 & + [K_1 W_0 (\hat{e}_1 - \hat{e}_3) - \hat{e}_8 + \hat{e}_{10}]^T \Lambda_{11} [\hat{e}_8 - \hat{e}_{10} - K_2 W_0 (\hat{e}_1 - \hat{e}_3)] \\
 & + [K_1 W_0 (\hat{e}_2 - \hat{e}_3) - \hat{e}_9 + \hat{e}_{10}]^T \Lambda_{12} [\hat{e}_9 - \hat{e}_{10} - K_2 W_0 (\hat{e}_2 - \hat{e}_3)] \} \\
 \Phi_1(h(t), \dot{h}(t)) = & \\
 & - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{U}_1 + \frac{h-h(t)}{h} X_1 & \frac{h(t)}{h} Y_1 + \frac{h-h(t)}{h} Y_2 \\ * & \hat{U}_1 + \frac{h(t)}{h} X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \hat{e}_{11} \\ \hat{e}_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_2 + \frac{h-h(t)}{h} X_3 & \frac{h(t)}{h} Y_3 + \frac{h-h(t)}{h} Y_4 \\ * & U_2 + \frac{h(t)}{h} X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{11} \\ \hat{e}_{12} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

证明 首先选取如式(2-17)所示的 L-K 泛函:

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 V_i(t) \quad (2-17)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 V_1(t) = & \eta_1^T(t) P_1 \eta_1(t) + h(t) \eta_2^T(t) P_2 \eta_2(t) + (h-h(t)) \eta_3^T(t) P_3 \eta_3(t) + \int_{t-h(t)}^t \eta_4^T(s) Q_1 \eta_4(s) ds \\
 & + \int_{t-h}^{t-h(t)} \eta_4^T(s) Q_2 \eta_4(s) ds + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) U_1 \dot{x}(s) ds d\theta + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t g^T(s) U_1 g(s) ds d\theta
 \end{aligned} \quad (2-18)$$

$$\begin{aligned}
 V_2(t) = & 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{W_{0i} x(t)} \lambda_{1i} f_i^+(s) + \lambda_{2i} f_i^-(s) ds + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{W_{0i} x(t-h(t))} \lambda_{3i} f_i^+(s) + \lambda_{4i} f_i^-(s) ds \\
 & + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{W_{0i} x(t-h)} \lambda_{5i} f_i^+(s) + \lambda_{6i} f_i^-(s) ds
 \end{aligned} \quad (2-19)$$

接下来分别计算泛函的导数, 可以得到如下结果:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) = & \xi^T(t) \{ \text{sym}\{E_1^T P_1 E_2 + E_3^T P_2 E_4 + E_5^T P_3 E_6\} + \dot{h}(t)(E_3^T P_2 E_3 - E_5^T P_3 E_5) + E_7^T Q_1 E_7 \\
 & + (1 - \dot{h}(t)) E_8^T (Q_2 - Q_1) E_8 - E_9^T Q_2 E_9 + h^2 e_s^T U_1 e_s + h^2 e_8^T U_2 e_8 \} \xi(t) + J_1 + J_2
 \end{aligned} \quad (2-20)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) = & 2[(K_1 W_0 x(t) - g(t))^T \Lambda_1 + (g(t) - K_2 W_0 x(t))^T \Lambda_2] W_0 \dot{x}(t) \\
 & + 2(1 - \dot{h}(t))[(K_1 W_0 x(t - h(t)) - g(t - h(t)))^T \Lambda_3 + (g(t) - K_2 W_0 x(t - h(t)))^T \Lambda_4] W_0 \dot{x}(t - h(t)) \\
 & + 2[(K_1 W_0 x(t - h) - g(t - h))^T \Lambda_5 + (g(t) - K_2 W_0 x(t - h))^T \Lambda_6] W_0 \dot{x}(t - h)
 \end{aligned} \tag{2-21}$$

其中 $J_1 = -h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) U_1 \dot{x}(s) ds$ 以及 $J_2 = -h \int_{t-h}^t g^T(s) U_2 g(s) ds$ 。

将 J_1 的单积分区间分成区间为 $[0, h(t)]$ 和 $[h(t), h]$ 的两个单积分的形式，并利用引理 2-1 中的第二个积分不等式来分别估计积分不等式的结果。将 J_2 的单积分区间分成区间为 $[0, h(t)]$ 和 $[h(t), h]$ 的两个单积分的形式，并利用引理 2-1 的第一个积分不等式来分别估计积分不等式的结果。并将结果表示成矩阵形式，可以得到式(2-22)和(2-23)的结果。

$$J_1 \leq -\xi^T(t) \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{h}{h(t)} \hat{U}_1 & 0 \\ 0 & \frac{h}{h-h(t)} \hat{U}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \xi(t) \tag{2-22}$$

$$J_2 \leq -\xi^T(t) \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{h}{h(t)} U_2 & 0 \\ 0 & \frac{h}{h-h(t)} U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} \xi(t) \tag{2-23}$$

式(2-22)和(2-23)中的 $h(t)$ 位于分母的位置，假如直接将其作为稳定性判据不等式的一部分，由于 $h(t)$ 在整体的不等式中是不单调的，致使我们无法对这个不等式进行判定。因此需要对式(2-22)和式(2-23)中的 $h(t)$ 相关矩阵进行放缩，使得 $h(t)$ 的位置在分子上，于是我们引入引理 2-2 来解决这个问题。假如存在适当维数的对称矩阵 $X_i (i=1,2,3,4)$ ，任意矩阵 $Y_i (i=1,2,3,4)$ 满足条件(2-15)和(2-16)，利用引理 2-2 可以将上面的(2-22)和(2-23)中的待处理矩阵缩放为式(2-24)和(2-25)的形式。

$$- \begin{bmatrix} \frac{h}{h(t)} \hat{U}_1 & 0 \\ 0 & \frac{h}{h-h(t)} \hat{U}_1 \end{bmatrix} \leq - \begin{bmatrix} \hat{U}_1 + \frac{h-h(t)}{h} X_1 & \frac{h(t)}{h} Y_1 + \frac{h-h(t)}{h} Y_2 \\ * & \hat{U}_1 + \frac{h(t)}{h} X_2 \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

$$-\begin{bmatrix} \frac{h}{h(t)}U_2 & 0 \\ 0 & \frac{h}{h-h(t)}U_2 \end{bmatrix} \leq -\begin{bmatrix} U_2 + \frac{h-h(t)}{h}X_3 & \frac{h(t)}{h}Y_3 + \frac{h-h(t)}{h}Y_4 \\ * & U_2 + \frac{h(t)}{h}X_4 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

下面考虑对激活函数信息的利用，基于条件(2-2)，下面不等式成立：

$$[k_i^+\theta - g(\theta)]^T \times [g(\theta) - k_i^-\theta] \geq 0 \quad (2-26)$$

$$[k_i^+(\theta_1 - \theta_2) - (g_i(\theta_1) - g_i(\theta_2))]^T \times [(g_i(\theta_1) - g_i(\theta_2)) - k_i^-(\theta_1 - \theta_2)] \geq 0 \quad (2-27)$$

根据式(2-26)和式(2-27)的正定性，将其转换成矩阵形式，并引入正定对角矩阵 $\Lambda_i = \text{diag}\{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}\} \geq 0 (i=7,8,9)$ ， $\Lambda_j = \text{diag}\{\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}\} \geq 0 (j=10,11,12)$ ，由此可得到以下形式的不等式：

$$[K_1\theta - g(\theta)]^T \Lambda_i [g(\theta) - K_2\theta] \geq 0 \quad (2-28)$$

$$[K_1(\theta_1 - \theta_2) - g(\theta_1) + g(\theta_2)]^T \Lambda_j [g(\theta_1) - g(\theta_2) - K_2(\theta_1 - \theta_2)] \geq 0 \quad (2-29)$$

结合式(2-17)-式(2-25)的推导过程，并将式(2-28)和(2-29)加到泛函求导结果的中，可以得到式(2-30)成立。

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t)(\Phi_0(h(t), \dot{h}(t)) + \Phi_1(h(t), \dot{h}(t)))\xi(t) \quad (2-30)$$

如果式(2-14)成立，则可以得到式(2-30)负定，即 $\dot{V}(t) < 0$ ，可知神经网络(2-1)是渐近稳定的。证明完毕。

注 2.3 本章所构建的 L-K 泛函的非积分项使用了时滞乘积相关项，非积分项的构造方式避免了产生 $h(t)$ 的二次型形式。由于本章考虑的是三角函数形式的新型时滞区间，适用于时滞相关稳定性判据中的 $h(t)$ 为一次型的情况。在未来的工作中，将会考虑对于包含二次型时滞形式的 L-K 泛函求导结果的时滞区间判断标准。

接下来，对带有三角函数形式的时变时滞的神经网络进行无源性分析，以下是本章的第二个主要结果。

2.4.2 无源性分析

考虑带有时变时滞的广义神经网络模型描述如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_1g(W_0x(t)) + W_2g(W_0x(t-h(t))) + Bu(t) \\ y(t) = C_0g(W_0x(t)) + C_1g(W_0x(t-h(t))) + C_2u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2-31)$$

其中 $u(t)$ 是外部输入； W_i ， $C_i (i=0,1,2)$ 和 B 为适当维数的已知矩阵；

$g(W_0 x(t)) = \text{col}\{g_1(W_{01}x(t)), \dots, g_n(W_{0n}x(t))\}$ 是神经激活函数向量，并满足条件 $g_i(0) = 0$ 和式(2-2)，其他矩阵及变量同神经网络(2-1)中的定义。

接下来给出神经网络模型(2-31)的无源性定义。

定义 2-1^[92] 零初始条件下，如果存在一个标量 $\gamma \geq 0$ ，使得在任意 $t_1 \geq 0$ 的情况下，式(2-32)成立，那么神经网络(2-31)是无源的。

$$2 \int_0^{t_1} u^T(t) y(t) dt \leq -\gamma \int_0^{t_1} u^T(t) u(t) dt \quad (2-32)$$

定理 2-2 给定标量 $h, \mu, \gamma \geq 0$ 和 $0 < \alpha < \beta < 1$ ，对于带有满足条件(2-4)的三角函数形式时滞(2-6)的广义神经网络(2-25)在时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 下是无源的，如果存在适合维数的正定对称矩阵 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, U_1, U_2$ ，正定对称矩阵 $\Lambda_i (i=1, 2, \dots, 12)$ ，对称矩阵 X_j ，任意实矩阵 $Y_j (j=1, 2, 3, 4)$ ，满足式(2-33)-式(2-35)。

$$\hat{\Phi}_0(h(t), \dot{h}(t)) + \hat{\Phi}_1(h(t), \dot{h}(t)) + \Phi_2 < 0 \quad (2-33)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 - X_1 & Y_1 \\ * & \tilde{U}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & Y_2 \\ * & \tilde{U}_1 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2-34)$$

$$\begin{bmatrix} U_2 - X_3 & Y_3 \\ * & U_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} U_2 & Y_4 \\ * & U_2 - X_4 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2-35)$$

其中，

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_0(h(t), \dot{h}(t)) = & \text{sym}\{E_1^T P_1 E_2 + E_3^T P_2 E_4 + E_5^T P_3 E_6\} + \dot{h}(t)(E_3^T P_2 E_3 - E_5^T P_3 E_5) + E_7^T Q_1 E_7 \\ & + (1 - \dot{h}(t))E_8^T (Q_2 - Q_1)E_8 - E_9^T Q_2 E_9 + h^2 e_s^T U_1 e_s + h^2 e_8^T U_2 e_8 \\ & + \text{sym}\{[(K_1 W_0 e_1 - e_8)^T \Lambda_1 + (e_8 - K_2 W_0 e_1)^T \Lambda_2] W_0 e_s \\ & + (1 - \dot{h}(t))[(K_1 W_0 e_2 - e_9)^T \Lambda_3 + (e_9 - K_2 W_0 e_2)^T \Lambda_4] W_0 e_4 \\ & + [(K_1 W_0 e_3 - e_{10})^T \Lambda_5 + (e_{10} - K_2 W_0 e_3)^T \Lambda_6] W_0 e_5 + [K_1 W_0 e_1 - e_8]^T \Lambda_7 [e_8 - K_2 W_0 e_1] \\ & + [K_1 W_0 e_3 - e_{10}]^T \Lambda_9 [e_{10} - K_2 W_0 e_3] \\ & + [K_1 W_0 (e_1 - e_2) - e_8 + e_9]^T \Lambda_{10} [e_8 - e_9 - K_2 W_0 (e_1 - e_2)] \\ & + [K_1 W_0 (e_1 - e_3) - e_8 + e_{10}]^T \Lambda_{11} [e_8 - e_{10} - K_2 W_0 (e_1 - e_3)] \\ & + [K_1 W_0 (e_2 - e_3) - e_9 + e_{10}]^T \Lambda_{12} [e_9 - e_{10} - K_2 W_0 (e_2 - e_3)] \} \end{aligned}$$

$$\hat{\Phi}_1(h(t), \dot{h}(t)) =$$

$$-\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{U}_1 + \frac{h-h(t)}{h} X_1 & \frac{h(t)}{h} Y_1 + \frac{h-h(t)}{h} Y_2 \\ * & \hat{U}_1 + \frac{h(t)}{h} X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_2 + \frac{h-h(t)}{h} X_3 & \frac{h(t)}{h} Y_3 + \frac{h-h(t)}{h} Y_4 \\ * & U_2 + \frac{h(t)}{h} X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = -\text{sym}\{(C_0 e_8 + C_1 e_9 + C_2 e_{13})^T e_{13}\} - \gamma e_{13}^T e_{13}$$

$$E_1 = \text{col}\{e_1, e_2, e_3, h(t)e_6, (h-h(t))e_7, e_{11}, e_{12}\}$$

$$E_2 = \text{col}\{e_5, (1-\dot{h}(t))e_4, e_5, e_1 - (1-\dot{h}(t))e_2, (1-\dot{h}(t))e_2 - e_3, \\ e_8 - (1-\dot{h}(t))e_9, (1-\dot{h}(t))e_9 - e_{10}\}$$

$$E_3 = \text{col}\{e_1, e_2, e_6\}$$

$$E_4 = \text{col}\{h(t)e_5, h(t)(1-\dot{h}(t))e_4, e_1 - (1-\dot{h}(t))e_2 - \dot{h}(t)e_6\}$$

$$E_5 = \text{col}\{e_1, e_2, e_7\}$$

$$E_6 = \text{col}\{(h-h(t))e_5, (h-h(t))(1-\dot{h}(t))e_4, (1-\dot{h}(t))e_2 - e_3 + \dot{h}(t)e_7\}$$

$$E_7 = \text{col}\{e_1, e_5, e_8\}, E_8 = \text{col}\{e_2, e_4, e_9\}, E_9 = \text{col}\{e_3, e_5, e_{10}\}$$

$$F_1 = [e_1 - e_2; e_1 + e_2 - 2e_6], F_2 = [e_2 - e_3; e_2 + e_3 - 2e_7]$$

$$\tilde{U}_1 = \text{diag}\{U_1, 3U_1\}$$

证明 首先选取与定理 2-1 相同的 L-K 泛函, 可以得到 L-K 泛函的求导结果如下:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t)(\hat{\Phi}_0(h(t), \dot{h}(t)) + \hat{\Phi}_1(h(t), \dot{h}(t)))\xi(t) \quad (2-36)$$

如果式(2-33)成立, 那么可以得到式(2-37)成立。

$$\dot{V}(t) - 2y^T(t)u(t) - \gamma u^T(t)u(t) < 0 \quad (2-37)$$

基于式(2-37)的结果, 对其进行区间 $[0, t_1]$ 上的单积分运算。由于 $t_1 \geq 0$ 以及式(2-37)为负定, 故对(2-37)进行单积分运算的结果保持负定。此外, 由于 $V(t)$ 大于零, 那么下式成立:

$$2 \int_0^{t_1} u^T(t)y(t)dt \leq -\gamma \int_0^{t_1} u^T(t)u(t)dt \quad (2-38)$$

根据定义 2-1, 可得在任意 $t_1 \geq 0$ 的情况下, 式(2-38)满足神经网络无源性条件的定义, 可得神经网络(2-31)是无源的。证明完毕。

2.5 数值算例

在本章中，为了验证上述结果的有效性和优势，本章将给出两个数值算例分别验证稳定性和无源性的结果。

例 2-1 选取带有三角函数形式的神经网络式(2-1)，其中参数如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0.0503 & 0.0454 \\ 0.0987 & 0.2075 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.2381 & 0.9320 \\ 0.0388 & 0.5062 \end{bmatrix}$$

以及激活函数 $g(\cdot)$ 为

$$g_1(x_1) = 0.3 \tanh(x_1), g_2(x_2) = 0.8 \tanh(x_2)$$

可以得到满足激活函数条件的对角矩阵 $K_1 = \text{diag}\{0.3, 0.8\}$ 以及 $K_2 = \text{diag}\{0, 0\}$ 。基于以上信息，计算满足神经网络(2-1)的稳定性结果，与其他文献的对比结果如表 2-1 所示，其中表格中所示时间量级为秒。

其中，令时滞导数分别为 0.4、0.45、0.5 和 0.55 得到对应的最大时滞上界，从表 2-1 可以发现对比与文献[64, 94, 95]，根据本章所提出的定理 2-1 计算得到的结果保守性更低。

表 2-1 μ 取不同值时的最大时滞上界

方法\时滞导数	0.4	0.45	0.5	0.55
文献[64]定理 2	18.756	13.900	11.949	10.796
文献[94]定理 1	23.391	15.274	12.637	-
文献[95]	24.803	17.342	14.446	12.670
定理 2-1 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.3)$	30.874	18.262	14.405	12.601
定理 2-1 用 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.3, \beta = 0.7)$	35.842	19.556	14.983	12.936

例 2-2 考虑带有三角函数形式的神经网络式(2-31)，选取其中参数如下：

$$A = \begin{bmatrix} 2.2 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B = C_1 = W_0 = I, C_2 = C_3 = 0$$

以及激活函数 $g(\cdot)$ 为

$$g_i(x_i) = 0.5(|x_i + 1| - |x_i - 1|), i = 1, 2 \quad (2-39)$$

根据式(2-39)的形式，可以得到满足激活函数条件的对角矩阵形为 $K_1 = \text{diag}\{1, 1\}$

以及 $K_2 = \text{diag}\{0, 0\}$ 。利用以上信息，计算满足神经网络(2-31)的无源行结果，与其他文献的对比，结果如表 2-2 所示。

其中，令时滞导数分别为 0.5 和 0.9 得到对应的最大可容许时滞上界。与其他文献中的结果相对比，本章提出的定理 2-2 所得的无源保守性较低。利用决策变量数量来表示定理中未定矩阵的变量数量，可通过未定矩阵的维数和性质来判据矩阵的决策变量数，在一定程度上，通过决策变量数量的对比可以展示出不同方法的计算复杂度。与表格中所列举的文献相比较，本章所提出的定理 2-2 所用的决策变量数相对较少。

表 2-2 μ 取不同值时的最大时滞上界

Table 2-2 The maximum upper delay bounds with different μ

方法\时滞导数	0.5	0.9	决策变量的数量
文献[96]	3.0430	2.8428	$23n^2 + 12n$
文献[97]	3.1127	2.9415	$30n^2 + 18n$
文献[89]定理 3	4.7178	3.4893	$200.5n^2 + 38.5n$
文献[89]定理 4	5.3447	3.6848	$284.5n^2 + 38.5n$
定理 2-2 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.4)$	6.3040	3.6922	$58.5n^2 + 25.5n$
定理 2-2 用 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.4, \beta = 0.6)$	6.3968	3.7128	$58.5n^2 + 25.5n$

注 2.3 对于两种时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 中所选参数的不同，利用稳定性判据所得到的最大时滞上界也不尽相同。由于保守性判据与参数 α 和 β 的选择不是线性关系，故只能通过遍历法来寻求保守性较低的结果。

2.6 本章小结

本章研究了具有三角函数结构的时变时滞的神经网络的稳定性问题。首先，根据三角函数的基本性质，得到了时滞及其导数组成的方程为椭圆形。其次，通过做辅助线，对时滞的区间进行逼近，得到了两种新的时变时滞区间。再次，利用 L-K 稳定性理论，构造 L-K 泛函，通过利用 Jensen 不等式、Wirtinger 不等式和互凸不等式，分别得到神经网络的稳定性条件和无源性条件。最后通过两个仿真验证本章提出的定理所得到的结果保守性更低。

第3章 基于区间逼近法的线性时滞系统的稳定性分析

在第2章中,所考虑的三角函数形式的时滞下界为零,适用范围小,且没有考虑三角函数作为周期函数的特性,如何对周期性加以利用是本章研究的重点。本章作为上一章的延续,致力于研究具有三角函数形式时滞的系统稳定性问题。首先,构造了一种新型的区间逼近法,基于这种方法提出了基于时滞本身性质的新型的时滞区间。然后,利用周期函数的特征,设计了基于环函数的L-K泛函。随后,利用Wirtinger不等式、互凸不等式,得到了保守性更低的稳定性判据。最后,利用数值算例验证所提出的算法的有效性。

3.1 引言

LMI技术的发展使得L-K泛函方法在研究时滞系统中广泛使用。鉴于此,许多工作聚焦于如何利用LMI方法来降低保守性,其中主要分为两方面:如何构造泛函和对如何对泛函求导结果进行处理。

另一方面,也有一些文献聚焦于对时滞区间的研究。文献[65]将多时滞按照不同情况的大小排序,并分为几种不同的情况。随之,根据不同的时滞区间分类,得到新的时滞区间间隔。然后,基于新的时滞区间,构造不同情况下的L-K泛函,并得到新的保守性判据。文献[53]提出了时滞分割方法,这种方法将时滞等分成 r 个子区间,并在此基础上设计了一种新的L-K泛函,并指出稳定性判据的保守性随子区间数量的增加而减少。值得注意的是,随着子区间数量的增加,稳定性判据的变量数量和计算复杂度也在增加。文献[61]引入两个可调节参数 α 和 β ,将时变时滞 $\tau_1(t)$ 和 $\tau_2(t)$ 分别表示为动态时延区间 $[\alpha\tau_1(t), \tau_1 - \alpha\tau_1(t)]$ 和 $[\beta\tau_2(t), \tau_2 - \beta\tau_2(t)]$ 的形式,并基于新的时变时滞的可调节上下界形式,推导出具有保守性更低的时滞相关稳定性判据。注意到对于时变时滞 $h(t) \in [h_1, h_2]$ 以及其导数 $\dot{h}(t) \in [-\mu, \mu]$ 的情况,大多数文献使用的区间均为 $\mathcal{H} = [h_1, h_2] \times [-\mu, \mu]$ 。然而,考虑到 $h(t)$ 为时变时滞的特征:当 $h(t)$ 取最大值 h_2 的时候,时滞的导数不可能为正定,即不可能再变大;当 $h(t)$ 取最大值 h_1 的时候,时滞的导数不可能为负定,即不可能再变小。因此很有必要来进一步研究如何逼近实际的时滞区间。

第 2 章的工作内容聚焦于对三角函数形式时滞的下界为零的情况进行分析，得到了带有时滞的神经网络的稳定性判据。基于第 2 章的研究方法，本章聚焦于时滞上下界均不固定的情况，提出了区间逼近法并得到两种新型时滞区间。本章的贡献总结为以下几点。首先，得到了适应范围更广的时滞区间范围。其次，三角函数时滞作为一种周期性时滞，因而本章引入了一种能够处理周期性时滞的环函数来分析这类时滞。基于此，提出了关于单调延迟区间的 L-K 泛函的新型区间形式。最后，得到了保守性更低的稳定性判据。

3.2 带有三角函数形式时滞的线性系统模型及相关引理

考虑如下线性时滞系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (3-1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 代表系统状态； $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 代表系统矩阵； $\phi(t)$ 是系统的初始条件函数，为常数函数； $h(t)$ 是三角函数形式的时滞，其形式如下：

$$h(t) = a_0 \cos(a_1 t) + a_2 \quad \text{或者} \quad h(t) = a_0 \sin(a_1 t) + a_2 \quad (3-2)$$

满足以下条件：

$$h(t) \in [h_1, h_2], \quad |\dot{h}(t)| \leq \mu < 1 \quad (3-3)$$

其中 $a_0, a_1, a_2, h_1, h_2, \mu$ 均为常数。通过结合式(3-2)-(3-3)，我们可以得到

$a_0 = \frac{h_2 - h_1}{2}$ ， $a_1 = \frac{2\mu}{h_2 - h_1}$ 以及 $a_2 = \frac{h_2 + h_1}{2}$ 。因此可以得到如下的时滞形式：

$$h(t) = \frac{h_2 - h_1}{2} \cos \frac{2\mu}{h_2 - h_1} t + \frac{h_2 + h_1}{2} \quad \text{或者} \quad h(t) = \frac{h_2 - h_1}{2} \sin \frac{2\mu}{h_2 - h_1} t + \frac{h_2 + h_1}{2} \quad (3-4)$$

基于式(3-4)形式的时滞函数的导数如下所示：

$$\dot{h}(t) = -\mu \sin \frac{2\mu}{h_2 - h_1} t \quad \text{或者} \quad \dot{h}(t) = \mu \cos \frac{2\mu}{h_2 - h_1} t \quad (3-5)$$

结合时滞函数以及其导数函数的形式，并结合三角函数的性质，可以得到以下椭圆形式的函数：

$$\frac{(h(t) - \frac{h_2 + h_1}{2})^2}{(\frac{h_2 - h_1}{2})^2} + \frac{\dot{h}^2(t)}{\mu^2} = 1 \quad (3-6)$$

接下来，介绍两个常用的引理，在后续的稳定分析中会用到。

引理 3-1^[42] (Wirtinger 不等式) 给定正定矩阵 R ，以及常数 $a < b$ ，下面的式(3-7)对于所有的连续可导函数 $\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 均成立，

$$(b-a) \int_a^b \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \geq \psi_1^T R \psi_1 + 3\psi_2^T R \psi_2 \quad (3-7)$$

其中 $\psi_1 = \omega(b) - \omega(a)$ ， $\psi_2 = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(u) du$ 。

引理 3-2^[80] (互凸不等式) 给定正定矩阵 $R_1, R_2 \in \mathbb{S}_+^n$ ，标量 $\alpha \in (0, 1)$ 。如果存在任意矩阵 $X_1, X_2 \in \mathbb{S}^m$ 以及 $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得式(3-8)成立，

$$\begin{bmatrix} R_1 - X_1 & Y_1 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} R_1 & Y_2 \\ * & R_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3-8)$$

则式(3-9)成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} R_1 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{1-\alpha} R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 + (1-\alpha)X_1 & \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 \\ * & R_2 + \alpha X_2 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

3.3 区间逼近法

在大多数文献当中，在研究时变时滞系统的时候，最常用的时滞区间为 $(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H} = [h_1, h_2] \times [-\mu, \mu]$ ，这一区间充分利用了时滞区间 $[h_1, h_2]$ 和时滞导数区间 $[-\mu, \mu]$ 。然而基于 $h(t)$ 为时变时滞的特征：当 $h(t)$ 取最大值 h_2 的时候，时滞的导数不可能为正定，即不可能再变大；当 $h(t)$ 取最小值 h_1 的时候，时滞的导数不可能为负定，即不可能再变小。基于上述分析，文献[76]提出了一种新型的时滞区间 \mathcal{H}_0 如式(3-10)所示。

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_0 = \text{Co}\{(h_1, 0), (h_1, \mu), (h_2, 0), (h_2, -\mu)\} \quad (3-10)$$

上述区间，是将点 (h_2, μ) 和 $(h_1, -\mu)$ 去掉之后，将 $(h_1, 0)$ ， (h_1, μ) ， $(h_2, 0)$ ， $(h_2, -\mu)$ 这四点连结起来组成新的集合。然而，文献[93]中提出，以三角函数形式的时变时滞为例作图，展示出上述提到的区间 \mathcal{H}_0 不能完全覆盖时滞区间。因此，上述区间 \mathcal{H}_0 自然不能用来描述时滞区间。

接下来，本章以图例的形式展示所提出来的新型的时滞区间逼近法的分析过

程。式(3-6)可看作椭圆的标准方程，令 $h(t)$ 和 $\dot{h}(t)$ 分别为坐标轴的 x 轴和 y 轴，用图形方式展示出来，如图 3-1 所示。其中蓝色部分是实际时滞区间内部，蓝色区域的外围椭圆是时滞区间的具体图形表现形式。在椭圆中选一点 Z ，它的 x 轴坐标为 $h_2 - \frac{h_2 - h_1}{2}\alpha$ ，其中 $\alpha \in (0,1)$ ，这样使得 Z 处于椭圆形的右上 1/4 处。点 A^1 是直线 $x = \mu$ 与经过 Z 点的椭圆切线的交点；点 B^1 是直线 $y = h_2$ 与经过 Z 点的椭圆切线的交点。

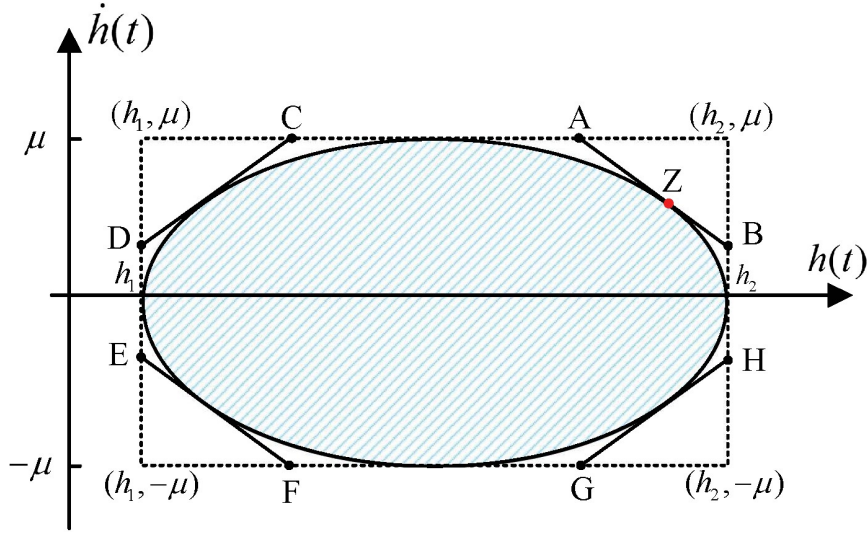


图 2-1 允许时滞区间 \mathcal{H}_l

Fig 2-1 The allowable delay sets \mathcal{H}_l

通过做 A^1 ， B^1 在关于 x 轴和直线 $y = \frac{h_1 + h_2}{2}$ 作为对称轴，在椭圆上的对称点，可以得到点 C^1 ， D^1 ， E^1 ， F^1 ， G^1 ， H^1 。这些点组成的多边形可以覆盖三角函数形式所形成的椭圆形的时滞区间。通过数值计算，可以得到上述点的具体数值坐标：

$$\begin{aligned} (A_x^1, A_y^1) &= \left(\frac{(1 - \sqrt{2\alpha - \alpha^2})h_{21}}{2(1 - \alpha)} + \frac{h_1 + h_2}{2}, \mu \right), (B_x^1, B_y^1) = \left(h_2, \frac{\alpha\mu}{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}} \right) \\ (C_x^1, C_y^1) &= (h_1 + h_2 - A_x^1, \mu), (D_x^1, D_y^1) = (h_1, B_y^1), (E_x^1, E_y^1) = (h_1, -D_y^1) \\ (F_x^1, F_y^1) &= (C_x^1, -\mu), (G_x^1, G_y^1) = (A_x^1, -\mu), (H_x^1, H_y^1) = (h_2, -B_y^1) \end{aligned}$$

将这些点联合起来可以得到如下所示新的时滞区间 \mathcal{H}_l 如式(3-11)所示。

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_1 = \text{Co}\{(A_x^1, A_y^1), (B_x^1, B_y^1), (C_x^1, C_y^1), (D_x^1, D_y^1), (E_x^1, E_y^1), (F_x^1, F_y^1), (G_x^1, G_y^1), (H_x^1, H_y^1)\} \quad (3-11)$$

同样地，如图 3-2 所示，展示如何得到另一种时滞区间。在椭圆中取两点 Z_1 和 Z_2 ，它们的横坐标分别为 $h_2 - \frac{h_2 - h_1}{2}\beta$ 和 $h_2 - \frac{h_2 - h_1}{2}\alpha$ ，其中 $0 < \alpha < \beta < 1$ ，这样使得点 Z_1 和点 Z_2 处于椭圆形的右上 1/4 处，此外点 Z_1 的横坐标比点 Z_2 的横坐标要小。如图 3-2 所示，首先做点 O_1 ，点 O_1 是经过点 Z_1 的椭圆切线和点 Z_2 的椭圆切线的交点。分别做经过点 Z_1 的椭圆切线和点 Z_2 的椭圆切线的延长线得到点 A^2, B^2, O_1 。然后做这三点的对称点，这些点组成的集合可以覆盖椭圆时滞区间，即可得到新的时滞区间。

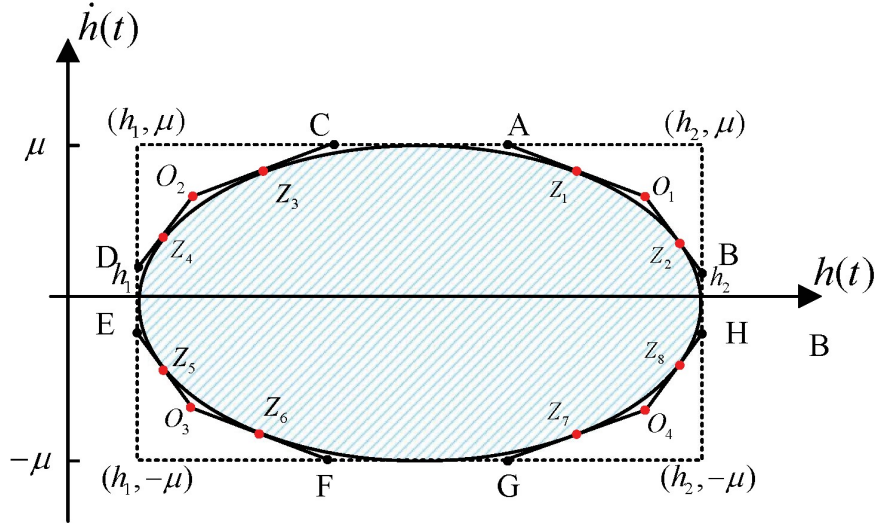

 图 3-2 允许时滞区间 \mathcal{H}_2

 Fig 3-2 The allowable delay sets \mathcal{H}_2

通过数值计算，可以得到以下数值坐标：

$$\begin{aligned} (A_x^2, A_y^2) &= \left(\frac{(1 - \sqrt{2\beta - \beta^2})h_{21}}{2(1 - \beta)} + \frac{h_1 + h_2}{2}, \mu \right), (B_x^2, B_y^2) = \left(h_2, \frac{\alpha\mu}{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}} \right) \\ (C_x^2, C_y^2) &= (h_1 + h_2 - A_x^2, \mu), (D_x^2, D_y^2) = (h_2, B_y^2), (E_x^1, E_y^1) = (h_2, -D_y^2) \\ (F_x^2, F_y^2) &= (C_x^2, -\mu), (G_x^2, G_y^2) = (A_x^2, -\mu), (H_x^2, H_y^2) = (h_2, -B_y^2) \\ (O_{1x}, O_{1y}) &= \left(\frac{(1 + K_3)K_6 - (1 + K_4)K_5}{K_1K_6 - K_2K_5}, \frac{1 - K_1O_{1x} + K_3}{K_5} \right) \\ (O_{2x}, O_{2y}) &= (h_1 + h_2 - O_{1x}, O_{1y}), (O_{3x}, O_{3y}) = (O_{2x}, -O_{2y}), (O_{4x}, O_{4y}) = (O_{1x}, -O_{1y}) \end{aligned}$$

其中

$$K_1 = \frac{2(1-\alpha)}{h_{21}}, K_2 = \frac{2(1-\beta)}{h_{21}}, K_3 = \frac{(1-\alpha)(h_1+h_2)}{h_{21}}$$

$$K_4 = \frac{(1-\beta)(h_1+h_2)}{h_{21}}, K_5 = \frac{\sqrt{2\alpha-\alpha^2}}{\mu}, K_6 = \frac{\sqrt{2\beta-\beta^2}}{\mu}$$

将这些点联合起来可以得到新的区间 \mathcal{H}_2 如式(3-12)所示。

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_2 = \text{Co}\{(A_x^2, A_y^2), (O_{1x}, O_{1y}), (B_x^2, B_y^2), (C_x^2, C_y^2), (O_{2x}, O_{2y}), (D_x^2, D_y^2),$$

$$(E_x^2, E_y^2), (O_{3x}, O_{3y}), (F_x^2, F_y^2), (G_x^2, G_y^2), (O_{4x}, O_{4y}), (H_x^2, H_y^2)\}$$
(3-12)

注 3.1 虽然文献[23]中提到可以做一个多边形来覆盖椭圆形来重新定义时滞区间，但是对于实际时滞区间，文献[23]没有给出具体的区间形式。本章利用椭圆的图形特性，给出了两种新的闭合的时滞区间的区间逼近方法。通过在椭圆上做切线，得到一个包围椭圆形的多边形。其中利用椭圆的对称特性，可以得到各个点的坐标，其组合可得到新的时滞区间。

注 3.2 通过添加一条或者两条辅助线，不能保证区间 \mathcal{H}_2 比区间 \mathcal{H}_1 保守性更低。由于保守性与参数的选择相关，如果选择同样的参数 α ，理论上 \mathcal{H}_2 的保守性比 \mathcal{H}_1 更低。从图形的角度，所做的切线越多，越能缩小多边形与椭圆的差距，如果做无限条辅助线构成多边形，则可以近似将此多边形看作椭圆形。

3.4 时滞相关稳定性判据

为了便于结果的表示，给出以下符号：

$$e_s = Ae_1 + A_d e_2, h_{21} = h_2 - h_1, h_1(t) = h(t) - h_1, h_2(t) = h_2 - h(t)$$

$$v_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h_1), x(t-h(t)), x(t-h_2)\}, v_2(t) = \text{col}\{\dot{x}(t-h_1), \dot{x}(t-h(t)), \dot{x}(t-h_2)\}$$

$$v_3(t) = \int_{t-h_1}^t \frac{x(s)}{h_1} ds, v_4(t) = \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \frac{x(s)}{h_1(t)} ds, v_5(t) = \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \frac{x(s)}{h_2(t)} ds$$

$$\eta_1(t) = \text{col}\{v_1(t), h_1 v_3(t), h_1(t) v_4(t), h_2(t) v_5(t)\}, \eta_2(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), v_4(t)\}$$

$$\eta_3(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), v_5(t)\}, \eta_4(s) = \text{col}\{x(s), \dot{x}(s)\}$$

$$\eta_5(t) = \text{col}\{h_1(t)(x(t-h_2) - x(t-h(t))), h_2(t)(x(t-h(t)) - x(t-h_1))\}$$

$$\eta_6(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h_1), x(t-h(t)), x(t-h_2), h_1 v_3(t)\}$$

$$\eta_7(t) = h_1(t) v_4(t), \eta_8(t) = h_2(t) v_5(t), \xi(t) = \text{col}\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), v_5(t)\}$$

接下来, 基于新的时滞区间, 针对系统(3-1), 借助直接构建型 L-K 泛函, 并结合不等式技术, 得到基于线性矩阵不等式的线性时滞系统的稳定性判据。

定理 3-1 对于给定的标量 $\mu \in (0,1)$, $h_2 > h_1 \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < 1$, 在带有满足条件(3-4)的三角函数形式时滞(3-5)的线性系统(3-1)在时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 下是渐近稳定的, 如果存在矩阵 $P_1 \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $P_2, P_3 \in \mathbb{S}_+^{3n}$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{S}_+^{2n}$, $U_1, U_2 \in \mathbb{S}_+^n$, $X_1, X_2 \in \mathbb{S}^{2n}$ 以及 $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, 使得式(3-13)和式(3-14)成立。

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_2 - X_1 & Y_1 \\ * & \tilde{U}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{U}_2 & Y_2 \\ * & \tilde{U}_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3-13)$$

$$\Omega(h(t), \dot{h}(t)) < 0 \quad (3-14)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Omega(h(t), \dot{h}(t)) = & \text{sym}\{E_1^T P_1 E_2 + E_3^T P_2 E_4 + E_5^T P_3 E_6\} + \dot{h}(t)(E_3^T P_2 E_3 - E_5^T P_3 E_5) + E_7^T Q_1 E_7 \\ & + E_8^T (Q_2 - Q_1) E_8 + (1 - \dot{h}(t)) E_9^T (Q_3 - Q_2) E_9 - E_{10}^T Q_3 E_{10} + h_1^2 e_s^T U_1 e_s + h_{21}^2 e_s^T U_2 e_s \\ & - F_1^T \tilde{U}_1 F_1 + \Omega_1(h(t), \dot{h}(t)) \end{aligned}$$

$$\Omega_1(h(t), \dot{h}(t)) = - \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{U}_2 + \frac{h_2(t)}{h_{21}} X_1 & \frac{h_1(t)}{h_{21}} Y_1 + \frac{h_2(t)}{h_{21}} Y_2 \\ * & \tilde{U}_2 + \frac{h_1(t)}{h_{21}} X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \text{col}\{e_1, e_2, e_3, e_4, h_1 e_8, h_1(t) e_9, h_2(t) e_{10}\}$$

$$E_2 = \text{col}\{e_s, e_5, (1 - \dot{h}(t)) e_6, e_7, e_1 - e_2, e_2 - (1 - \dot{h}(t)) e_3, (1 - \dot{h}(t)) e_3 - e_4\}$$

$$E_3 = \text{col}\{e_1, e_3, e_9\}, E_5 = \text{col}\{e_1, e_3, e_{10}\}$$

$$E_4 = \text{col}\{h_1(t) e_s, h_1(t) (1 - \dot{h}(t)) e_6, e_2 - (1 - \dot{h}(t)) e_3 - \dot{h}(t) e_9\}$$

$$E_6 = \text{col}\{h_2(t) e_s, h_2(t) (1 - \dot{h}(t)) e_6, (1 - \dot{h}(t)) e_3 - e_4 + \dot{h}(t) e_{10}\}$$

$$E_7 = \text{col}\{e_1, e_s\}, E_8 = \text{col}\{e_2, e_5\}, E_9 = \text{col}\{e_3, e_6\}, E_{10} = \text{col}\{e_4, e_7\}$$

$$F_1 = \text{col}\{e_1 - e_2, e_1 + e_2 - 2e_8\}, F_2 = \text{col}\{e_2 - e_3, e_2 + e_3 - 2e_9\}$$

$$F_3 = \text{col}\{e_3 - e_4, e_3 + e_4 - 2e_{10}\}, \tilde{U}_1 = \text{diag}\{U_1, 3U_1\}, \tilde{U}_2 = \text{diag}\{U_2, 3U_2\}$$

证明 构造如下 L-K 泛函

$$\begin{aligned} V(t) = & \eta_1^T(t) P_1 \eta_1(t) + h_1(t) \eta_2^T(t) P_2 \eta_2(t) + h_2(t) \eta_3^T(t) P_3 \eta_3(t) \\ & + \int_{t-h_1}^t \eta_4^T(s) Q_1 \eta_4(s) ds + \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \eta_4^T(s) Q_2 \eta_4(s) ds + \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \eta_4^T(s) Q_3 \eta_4(s) ds \\ & + h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) U_1 \dot{x}(s) ds d\theta + h_{21} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) U_2 \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (3-15)$$

对 $V(t)$ 求导得到如下结果：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= 2\dot{\eta}_1^T(t)P_1\eta_1(t) + \dot{h}(t)\eta_2^T(t)P_2\eta_2(t) + 2h_1(t)\dot{\eta}_2^T(t)P_2\eta_2(t) - \dot{h}(t)\eta_3^T(t)P_3\eta_3(t) \\
 &\quad + 2h_2(t)\dot{\eta}_3^T(t)P_3\eta_3(t) + \eta_4^T(t)Q_1\eta_4(t) + \eta_4^T(t-h_1)(Q_2-Q_1)\eta_4(t-h_1) \\
 &\quad + (1-\dot{h}(t))\eta_4^T(t-h(t))(Q_3-Q_2)\eta_4(t-h(t)) - \eta_4^T(t-h_2)Q_3\eta_4(t-h_2) \\
 &\quad + h_1^2\dot{x}^T(t)U_1\dot{x}(t) + J_1 + h_{21}^2\dot{x}^T(t)U_2\dot{x}(t) + J_2 \\
 &= \xi^T(t)\Omega(h(t),\dot{h}(t))\xi(t) + J_1 + J_2
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

其中包含待处理的单积分项 J_1 和 J_2 ，具体形式如下

$$J_1 = -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)U_1\dot{x}(s)ds, J_2 = -h_{21} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)U_2\dot{x}(s)ds$$

运用引理 3-1 和引理 3-2 分别对 J_1 和 J_2 进行估计，得到以下不等式：

$$J_1 \leq -\xi^T(t)F_1^T\tilde{U}_1F_1\xi(t) \tag{3-17}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &\leq -\xi^T(t)\left(\frac{h_{21}}{h_1(t)}F_2^T\tilde{U}_2F_2 + \frac{h_{21}}{h_2(t)}F_3^T\tilde{U}_3F_3\right)\xi(t) \\
 &\leq \xi^T(t)\Omega_1(h(t),\dot{h}(t))\xi(t)
 \end{aligned} \tag{3-18}$$

根据式(3-15)-式(3-18)，从而得到 $\dot{V}(t) \leq \xi^T(t)\Omega(h(t),\dot{h}(t))\xi(t)$ 。如果式(3-13)和式(3-14)成立，则可以保证 $\dot{V}(t)$ 负定，即系统(3-1)为渐近稳定。证明完毕。

将环函数相关的泛函加到定理 3-1 的 L-K 泛函中，并进行推导，可以得到如下关于系统(3-1)的稳定性判据。

定理 3-2 对于给定标量 $\mu \in (0,1)$, $h_2 > h_1 \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < 1$ ，在带有满足条件(3-4)的三角函数形式时滞(3-5)的线性系统(3-1)在时滞区间 \mathcal{H}_3 和 \mathcal{H}_4 下是渐近稳定的，如果存在矩阵 $P_1 \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $P_2, P_3 \in \mathbb{S}_+^{3n}$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{S}_+^{2n}$, $U_1, U_2 \in \mathbb{S}_+^n$, $X_{I1}, X_{D1} \in \mathbb{R}^{2n \times 5n}$, $X_{I2}, X_{D2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_{I1}, Z_{I2} \in \mathbb{S}_-^n$, $Z_{D1}, Z_{D2} \in \mathbb{S}_+^n$, $X_i \in \mathbb{S}^{2n}$ 以及 $Y_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} (i=1, \dots, 6)$ ，使得式(3-19)-式(3-23)成立。

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_2 - X_1 & Y_1 \\ * & \tilde{U}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \tilde{U}_2 & Y_2 \\ * & \tilde{U}_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3-19}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{I1} - X_3 & Y_3 \\ * & \tilde{Z}_{I2} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{I1} & Y_4 \\ * & \tilde{Z}_{I2} - X_4 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3-20}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{D1} - X_5 & Y_5 \\ * & \tilde{Z}_{D2} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{D1} & Y_6 \\ * & \tilde{Z}_{D2} - X_6 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3-21}$$

$$\Omega(h(t),\dot{h}(t)) + \Phi_1(h(t),\dot{h}(t)) < 0, \dot{h}(t) \in [0, \mu] \tag{3-22}$$

$$\Omega(h(t), \dot{h}(t)) + \Phi_2(h(t), \dot{h}(t)) < 0, \dot{h}(t) \in [-\mu, 0] \quad (3-23)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi_1(h(t), \dot{h}(t)) &= \text{sym}\{\gamma_2^T X_{I1} \gamma_3 + \gamma_1^T X_{I1} \gamma_4 + \gamma_6^T X_{I2} \gamma_7 + \gamma_5^T X_{I2} \gamma_8\} - h_2(t)[e_5^T Z_{I1} e_5 \\ &\quad - (1 - \dot{h}(t))e_6^T Z_{I1} e_6] + h_1(t)((1 - \dot{h}(t))e_6^T Z_{I2} e_6 - e_7^T Z_{I2} e_7) + J_7 \\ \Phi_2(h(t), \dot{h}(t)) &= \text{sym}\{\gamma_2^T X_{D1} \gamma_3 + \gamma_1^T X_{D1} \gamma_4 + \gamma_6^T X_{D2} \gamma_7 + \gamma_5^T X_{D2} \gamma_8\} - h_2(t)[e_5^T Z_{D1} e_5 \\ &\quad - (1 - \dot{h}(t))e_6^T Z_{D1} e_6] + h_1(t)((1 - \dot{h}(t))e_6^T Z_{D2} e_6 - e_7^T Z_{D2} e_7) + J_8 \end{aligned}$$

$$J_7 = -\frac{\dot{h}(t)}{h_{21}} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{I1} + \frac{h_2(t)}{h_{21}} X_3 & \frac{h_1(t)}{h_{21}} Y_3 + \frac{h_2(t)}{h_{21}} Y_4 \\ * & \tilde{Z}_{I2} + \frac{h_1(t)}{h_{21}} X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$J_8 = \frac{\dot{h}(t)}{h_{21}} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{D1} + \frac{h_2(t)}{h_{21}} X_5 & \frac{h_1(t)}{h_{21}} Y_5 + \frac{h_2(t)}{h_{21}} Y_6 \\ * & \tilde{Z}_{D2} + \frac{h_1(t)}{h_{21}} X_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \text{col}\{h_1(t)(e_4 - e_3), h_2(t)(e_3 - e_2)\}$$

$$\gamma_2 = \text{col}\{\dot{h}(t)(e_4 - e_3) + h_1(t)(e_7 - (1 - \dot{h}(t))e_6), -\dot{h}(t)(e_3 - e_2) + h_2(t)((1 - \dot{h}(t))e_6 - e_5)\}$$

$$\gamma_3 = \text{col}\{e_1, e_2, e_3, e_4, h_1 e_8\}, \gamma_4 = \text{col}\{e_5, e_5, (1 - \dot{h}(t))e_6, e_7, e_1 - e_2\}$$

$$\gamma_5 = h_1(t)e_9, \gamma_6 = e_2 - (1 - \dot{h}(t))e_3, \gamma_7 = h_2(t)e_{10}, \gamma_8 = (1 - \dot{h}(t))e_3 - e_4$$

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_3 = \text{Co}\{(A_x^1, A_y^1), (B_x^1, B_y^1), (C_x^1, C_y^1), (D_x^1, D_y^1), (h_1, 0), (h_2, 0)\}, \text{ 当 } \dot{h}(t) \in [0, \mu]$$

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_3 = \text{Co}\{(E_x^1, E_y^1), (F_x^1, F_y^1), (G_x^1, G_y^1), (H_x^1, H_y^1), (h_1, 0), (h_2, 0)\}, \text{ 当 } \dot{h}(t) \in [-\mu, 0]$$

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_4 = \text{Co}\{(A_x^2, A_y^2), (O_{1x}, O_{1y}), (B_x^2, B_y^2), (C_x^2, C_y^2), (O_{2x}, O_{2y}), (D_x^2, D_y^2), \\ (h_1, 0), (h_2, 0)\}, \text{ 当 } \dot{h}(t) \in [0, \mu]$$

$$(h(t), \dot{h}(t)) \in \mathcal{H}_4 = \text{Co}\{(E_x^1, E_y^1), (O_{3x}, O_{3y}), (F_x^1, F_y^1), (G_x^1, G_y^1), (O_{4x}, O_{4y}), (H_x^1, H_y^1), \\ (h_1, 0), (h_2, 0)\}, \text{ 当 } \dot{h}(t) \in [-\mu, 0]$$

$$\tilde{Z}_{I1} = \text{diag}\{-Z_{I1}, -3Z_{I1}\}, \tilde{Z}_{I2} = \text{diag}\{-Z_{I2}, -3Z_{I2}\}$$

$$\tilde{Z}_{D1} = \text{diag}\{Z_{D1}, 3Z_{D1}\}, \tilde{Z}_{D2} = \text{diag}\{Z_{D2}, 3Z_{D2}\}$$

证明 根据区间的不同, 选取如下不同区间的开环泛函:

$$\begin{aligned} V_I(t) &= 2\eta_5^T(t)X_{I1}\eta_6(t) + 2\eta_7^T(t)X_{I2}\eta_8(t) + (h(t) - h(t_{2k})) \int_{t-h(t)}^{t-h(t_{2k-1})} \dot{x}^T(s)Z_{I1}\dot{x}(s)ds \\ &\quad + (h(t) - h(t_{2k-1})) \int_{t-h(t_{2k-1})}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Z_{I2}\dot{x}(s)ds, \text{ 当 } \dot{h}(t) \in [0, \mu] \end{aligned} \quad (3-24)$$

$$\begin{aligned}
 V_D(t) = & 2\eta_5^T(t)X_{D1}\eta_6(t) + 2\eta_7^T(t)X_{D2}\eta_8(t) + (h(t) - h(t_{2k})) \int_{t-h(t)}^{t-h(t_{2k+1})} \dot{x}^T(s)Z_{D1}\dot{x}(s)ds \\
 & + (h(t) - h(t_{2k+1})) \int_{t-h(t_{2k})}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Z_{D2}\dot{x}(s)ds, \text{ 当 } \dot{h}(t) \in [-\mu, 0]
 \end{aligned} \quad (3-25)$$

然后构造如下 L-K 泛函：

$$W(t) = \begin{cases} V(t) + V_I(t), & \text{当 } h(t) \in [0, \mu] \\ V(t) + V_D(t), & \text{当 } h(t) \in [-\mu, 0] \end{cases} \quad (3-26)$$

考虑 $\dot{h}(t) \in [0, \mu]$ 的情况，对 $V_I(t)$ 求导，可以得到下面的结果：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_I(t) = & \text{sym}\{\dot{\eta}_5^T(t)X_{I1}\eta_6(t) + \eta_5^T(t)X_{I1}\dot{\eta}_6(t) + \dot{\eta}_7^T(t)X_{I2}\eta_8(t) + \eta_7^T(t)X_{I2}\dot{\eta}_8(t)\} \\
 & + (h(t) - h_2)(\dot{x}^T(t - h_1)Z_{I1}\dot{x}(t - h_1) - (1 - \dot{h}(t))\dot{x}^T(t - h(t))Z_{I1}\dot{x}(t - h(t))) + J_5 \\
 & + (h(t) - h_1)((1 - \dot{h}(t))\dot{x}^T(t - h(t))Z_{I2}\dot{x}(t - h(t)) - \dot{x}^T(t - h_2)Z_{I2}\dot{x}(t - h_2)) + J_6 \\
 = & \xi^T(t)\Phi_1(h(t), \dot{h}(t))\xi(t) + J_5 + J_6
 \end{aligned} \quad (3-27)$$

其中

$$J_5 = \dot{h}(t) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)Z_{I1}\dot{x}(s)ds, J_6 = \dot{h}(t) \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Z_{I2}\dot{x}(s)ds$$

运用引理 3-1 和引理 3-2 对积分不等式 J_5 和 J_6 进行估计，可以得到如果存在合适的矩阵 $X_i \in \mathbb{S}^{2n}$ 以及 $Y_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} (i=1,2)$ 使得式(3-20)成立，那么可以得到如下结果：

$$\begin{aligned}
 J_5 + J_6 \leq & -\frac{\dot{h}(t)}{h_1(t)} \xi^T(t)F_2^T \tilde{Z}_{I1} F_2 \xi(t) - \xi^T(t) \frac{\dot{h}(t)}{h_2(t)} F_3^T \tilde{Z}_{I2} F_3 \xi(t) \\
 = & \xi^T(t) \left\{ -\frac{\dot{h}(t)}{h_{21}} F_2^T \left(\frac{h_{21}}{h_1(t)} \right) \tilde{Z}_{I1} F_2 - \frac{\dot{h}(t)}{h_{21}} F_3^T \left(\frac{h_{21}}{h_2(t)} \right) \tilde{Z}_{I2} F_3 \right\} \xi(t) \\
 \leq & \xi^T(t) J_7 \xi(t)
 \end{aligned} \quad (3-28)$$

结合式(3-24)、式(3-26)-式(3-28)和定理 3-1，可得如果式(3-14)-(3-16)成立，那么当 $\dot{h}(t) \in [0, \mu]$ 时， $\dot{W}(t) < 0$ 成立，可得系统(3-1)是渐近稳定的。对区间 $\dot{h}(t) \in [-\mu, 0]$ 应用相同的推导步骤，很容易得到相似的结果，这里就不再赘述。证明完毕。

注 3.3 文献[93]考虑的时滞形式是周期函数，需要满足的时变时滞的条件为在单调区间内递增或者递减且在单调区间的顶点处取极值。本章考虑的时滞恰好满足文献[93]中对时滞的要求，由此可知本章可以运用文献[93]所提出的开环泛函，来构造单调时滞区间泛函。由于需要对单调区间分开进行讨论，因而对本章提出的新型区

间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 也需要进一步进行讨论。

注 3.4 运用文献[93]的开环泛函到本章的线性时滞系统的稳定性分析中时，考虑到不能直接套用上一节中的新型时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 ，需要对 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 的形式进行变换。以 $\dot{h}(t) \in [0, \mu]$ 时的区间举例说明 \mathcal{H}_1 的变换形式，取图 3-1 的椭圆形的上 1/2 即第一象限的半椭圆部分进行区间逼近，由图 3-1 可知由点 $(A_x^1, A_y^1), (B_x^1, B_y^1), (C_x^1, C_y^1), (D_x^1, D_y^1), (h_1, 0), (h_2, 0)$ 形成的多边形可以将 $\dot{h}(t) \in [0, \mu]$ 时的时滞区间进行区间逼近，自然得到变换之后的时滞区间。

3.5 数值算例

在这部分，用两个例子来验证所提出的区间逼近法的优越性以及本章提出的时滞系统稳定性判据的有效性。

例 3-1 考虑系统(3-1)的参数如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

对于 $h_1 = 0$ 的情况，表 3-1 展示了运用不同方法得到的可允许时滞最大上界。从表格可以看出来，同文献[8, 74]中的结果相比较，本章提出的方法得到的结果保守性更低。新的时滞区间逼近法得到的区间分别为 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 ，表 3-1 展示了将新的时滞区间运用到文献[8]中得到的结果，可以看出用新的时滞区间的结果比原本的结果保守性更低，可以体现出区间逼近法的优越性。

对于 $h_1 \neq 0$ 的情况，表 3-1 列出了运用新的时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 的定理 3-1，以及运用时滞区间 \mathcal{H}_3 和 \mathcal{H}_4 的定理 3-2 的最大时滞上界。通过表格我们可以看出，在使用同样的参数 α 的情况下，定理 3-2 的保守性比定理 3-1 的保守性更低。

例 3-2 考虑系统(3-1)的参数如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

在这个例子中考虑 $h_1 = 0$ ，在不同时滞导数的情况下，能够得到的最大时滞上界的数值。从表格 3-2 中我们可以看出，本章所提出的新型时滞区间方法在没有用到单调区间相关的环函数时，得到的稳定性判据仍然有起到了有效的作用，所得结果的保守性相较于文献[98]和文献[99]较低。

注 3.5 对于两种时滞区间 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 中所选参数的不同, 利用稳定性判据所得到的最大时滞上界也不尽相同。由于保守性判据与参数 α 和 β 的选择不是线性关系, 故只能通过遍历法来寻求保守性较低的结果。

表 3-1 例 3-1 的最大时滞上界

Table3-1 The maximum upper delay bounds for Example 3-1					
方法\ μ		0.1	0.2	0.5	0.8
$h_1 = 0$	文献[74]定理 1	4.788	4.060	3.055	2.615
	文献[8]定理 2	4.809	4.089	3.062	2.638
	文献[8]定理 2 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.2)$	5.529	4.856	3.559	3.018
	文献[8]定理 2 用 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.2, \beta = 0.4)$	5.534	4.932	3.697	3.118
$h_1 = 1$	文献[93]定理 1	5.24	4.76	3.97	3.45
	定理 3-1 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.3)$	5.49	4.95	3.71	3.14
	定理 3-1 用 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.3, \beta = 0.5)$	5.49	4.96	3.79	3.20
	定理 3-2 用 $\mathcal{H}_3(\alpha = 0.3)$	5.58	5.15	4.22	3.59
	定理 3-2 用 $\mathcal{H}_4(\alpha = 0.3, \beta = 0.5)$	5.58	5.16	4.27	3.66
$h_1 = 2$	文献[93]定理 1	5.35	4.90	3.84	3.09
	定理 3-1 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.3)$	5.51	4.83	3.64	3.17
	定理 3-1 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.3, \beta = 0.7)$	5.51	4.87	3.70	3.21
	定理 3-2 用 $\mathcal{H}_3(\alpha = 0.4)$	5.53	5.08	4.06	3.29
	定理 3-2 用 $\mathcal{H}_4(\alpha = 0.4, \beta = 0.8)$	5.53	5.09	4.11	3.32
$h_1 = 3$	文献[93]定理 1	5.46	4.96	3.70	3.62
	定理 3-1 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.3)$	5.46	4.67	3.76	3.59
	定理 3-1 用 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.3, \beta = 0.5)$	5.48	4.75	3.79	3.60
	定理 3-2 用 $\mathcal{H}_3(\alpha = 0.3)$	5.63	5.16	3.83	3.67
	定理 3-2 用 $\mathcal{H}_4(\alpha = 0.3, \beta = 0.6)$	5.64	5.20	3.86	3.68

注 3.6 本章中假设的时滞形式为三角函数形式, 很多文献应用和仿真这种形式的时滞验证其算法的有效性。然而, 这种时滞形式存在一定的限制条件。文献[87]考虑的时滞是周期函数, 需要满足的时变时滞的条件为在单调区间内递增或者递减且在单调区间的顶点处取极值, 这种假设条件也存在较强的假设性限制条件。如何降低这些假设条件, 建立适应性更强的时滞区间是未来需要进一步研究的课题。

表 3-2 μ 取不同值时的最大时滞上界Table 3-1 The maximum upper delay bounds with different μ

方法\时滞导数	0.1	0.2	0.5	0.8
文献[98]定理 3	7.651	4.936	2.764	2.114
文献[99]定理 2	7.685	4.985	2.806	2.148
定理 3-1 用 $\mathcal{H}_1(\alpha = 0.4)$	10.049	6.192	3.072	2.202
定理 3-1 用 $\mathcal{H}_2(\alpha = 0.4, \beta = 0.6)$	10.055	6.243	3.163	2.245

3.6 本章小结

对于带有三角函数形式时滞的线性系统，本章提出了新的区间逼近法来研究其稳定性问题。首先，根据不同的情况，可以通过不同的图形分析来得到不同的时滞区间。其次，三角函数时滞作为一种周期性时滞，所以本章结合了一种能够处理周期时滞的环函数来设计泛函。最后，对稳定性进行分析，并利用积分不等式以及互凸不等式，得到了保守性更低的稳定性判据。

第4章 基于时滞分割法的多重时滞递归神经网络的稳定性分析

本章研究了带有多重时滞的递归神经网络的稳定性问题。首先,利用时滞状态和当前状态,提出了增强型时滞区间分割法。根据这种新型时滞区间分割法将不同时滞按照不同情况下的大小排列,进而将单积分项转换成不同上下界单积分项之和,利用 Wirtinger 不等式和互凸不等式对泛函导数进行估计。基于这种方法,提出了两种保守性较低的时滞相关稳定性判据。最后,利用两个数值仿真验证所提算法的有效性。

4.1 引言

现如今,递归神经网络作为一种新型的信息处理系统,由于其广泛应用例如处理优化问题,模式识别,信号处理等,引起了国内外学者的关注。因此,递归神经网络是一门值得深入探索的课题。由于神经元之间固有的通信时间和放大器有限的切换速度,在神经网络中不可避免地会产生时滞现象。时滞现象的存在会对系统产生不好的影响,比如会引起系统不稳定或振荡现象。近二十年来,有许多学者提出了关于时滞递归网络的稳定性分析的方法^[100-102]。在文献[101]中,增广型 L-K 泛函和一种新型的互凸不等式相结合,有效降低了时滞递归神经网络稳定性判据的保守性。在文献[102]中,两个固定时滞上界和时滞下界转化成时变时滞的形式来研究递归神经网络的稳定性,并引入了一个新的引理处理时变积分项。除此之外,还有许多有效的分析时滞递归神经网络稳定性的方法,例如运用三重积分项构造 L-K 泛函项,自由权矩阵法,时滞分割法等。

然而,在现有的工作中,大多数文献针对递归神经网络的研究都是关于单时滞的研究,很少有学者将其关注点聚焦在多重时滞的情况下的递归神经网络的稳定性分析。文献[103]利用自由权矩阵方法和 S-procedure 方法来构造出递归神经网络的稳定性判据。文献[104]利用自由权矩阵方法以及时滞上界之间的关系,得到了带有多重时滞的递归神经网络的保守性较低的稳定性判据。然而上述的两篇文献都没有考虑多重时滞本身及其上界之间的内部关系,存在较大的保守性。也有一些文献直接将研

究单时滞系统的方法套用到研究多时滞系统的稳定性中^[105-107]，这些方法自然会引入一些保守性。

在最近的一些文献中，时滞分割法广泛地应用在解决时滞系统的稳定性问题中。文献[108]通过引入两个可调参数，将时滞区间分割成两个子区间。文献[109]引入了两个参数来构造新型的时变时滞的区间上下界，并利用这种新型的时滞区间设计 L-K 泛函中的积分上下界。文献[110]将时滞区间均匀地分成了两部分来进行稳定性分析。然而这些都没有考虑时滞之间的关系。文献[111]提出了一种新型的时滞区间分割法，其中考虑了当前的时滞状态和时滞状态之间的关系。然而，并没有充分考虑全部的时滞状态和当前状态之间的关系。

基于上述讨论，本章提出了一种增强型时滞分割法来处理带有多时滞的递归神经网络的稳定性问题。利用双重积分来构造 L-K 泛函时，对 L-K 泛函求导过程会产生单积分项，根据时变时滞及其上界之间的关系，时滞区间可以划分为不同的子区间。进而根据这些条件，将求导得到的单积分，划分为不同的子区间的单积分之和，分别进行估计。与此同时，利用 Wirtinger 不等式和增广型互凸方法来估计泛函求导结果，可以得到稳定性判据。本章的贡献总结为以下几点。首先，提出了一种新型的时滞分割方法，这种方法充分考虑了时滞状态和当前状态之间的关系。其次，为了得到保守性更低的结果，利用两种互凸不等式分别处理不同形式的 inequality。

4.2 带有多时滞的递归神经网络模型及相关引理

考虑如下带有多重时滞的递归神经网络模型：

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + B\hat{f}(u(t)) + \sum_{i=1}^N B_i \hat{f}(u(t - \tau_i(t))) + J \quad (4-1)$$

其中 n 表示神经网络神经元的个数； $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 代表神经元状态向量； $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是正定对角矩阵； B 和 B_i 是具有合适维度的连接权矩阵； $\hat{f}(u(\cdot)) = [\hat{f}_1(u_1(\cdot)), \hat{f}_2(u_2(\cdot)), \dots, \hat{f}_n(u_n(\cdot))]^T \in \mathbb{R}^n$ 代表神经元激活函数，其初始条件 $\hat{f}_i(0) = 0$ ； J 代表来着网络外部的输入。时变时滞 $\tau_i(t)$ 为可导函数，并且满足式(4-2)的条件：

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_i^M, \tau_{i-1}^M \leq \tau_i^M, \dot{\tau}_i(t) \leq \mu_i \quad (4-2)$$

注 4.1 在实际中，神经网络的动态模型中经常存在时滞现象。例如，电子神经

网络中放大器的有限切换速度的影响，或者在生物网络中有限的信号传播时间。时滞的存在可能会导致该模型不稳定或者发生震荡，文献[112]研究了带有时滞的双向联想记忆网络，其中展示了神经元相关信息和与网络的外源输入之间的平衡关系。模型(4-1)的原型可在文献[113]中溯源，其中一个神经网络由一个包含时滞的神经元环构成，不同相邻神经元之间的通信引入了不同的时间延迟。

简单起见，在接下来的部分中，用符号 τ_i 来代替 $\tau_i(t)$ 。除此之外，假设激活函数 $\hat{f}_i(u_i(\cdot))$ 有界，且满足以下不等式：

$$\sigma_i^- \leq \frac{\hat{f}_i(s_1) - \hat{f}_i(s_2)}{s_1 - s_2} \leq \sigma_i^+, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \neq s_2, i = 1, 2, \dots, n \quad (4-3)$$

其中 σ_i^- 和 σ_i^+ 是正常数。移动平衡点 u^* ，令 $x(\cdot) = u(\cdot) - u^*$ ，可以将系统(4-1)转换成以下形式的系统：

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Bf(x(t)) + \sum_{i=1}^N B_i f(x(t - \tau_i(t))) \quad (4-4)$$

其中 $f(x(t)) = \hat{f}(x(t) + u^*) - \hat{f}(u^*)$ 。显然，系统(4-4)的平衡点是零。因此可以得到以下条件：

$$\sigma_i^- \leq \frac{f_i(s_i)}{s_i} \leq \sigma_i^+, i = 1, 2, \dots, n \quad (4-5)$$

易知，式(4-5)和式(4-6)是等价的：

$$(\sigma_i^- s_i - f_i(s_i))(f_i(s_i) - \sigma_i^+ s_i) \geq 0, \forall s_i \neq 0, f_i(0) = 0 \quad (4-6)$$

为了下文便于使用，将式(4-5)中的上下界元素组成新的对角矩阵，表示成 F_1 和 F_2 ，具体形式分别为 $F_1 = \text{diag}\{\sigma_1^-, \sigma_2^-, \dots, \sigma_n^-\}$ ， $F_2 = \text{diag}\{\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots, \sigma_n^+\}$ 。

接下来，展示出一些引理，将在后面的部分用到。

引理 4-1^[42] (Wirtinger 不等式) 给定正定矩阵 R ，以及常数 $a < b$ ，式(4-7)对于所有的连续可导函数 $\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 均成立。

$$(b-a) \int_a^b \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \geq \psi_1^T R \psi_1 + 3\psi_2^T R \psi_2 \quad (4-7)$$

其中 $\psi_1 = \omega(b) - \omega(a)$ ， $\psi_2 = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(u) du$ 。

引理 4-2^[80] 给定正整数 k ，矩阵 $R_i \in \mathbb{S}_+^n (i = 1, \dots, k)$ ，常数 α_i 使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ 以及

$\Psi(\alpha) = \text{diag}(\frac{1}{\alpha_1} R_1, \frac{1}{\alpha_2} R_2, \dots, \frac{1}{\alpha_k} R_k)$ 。如果存在矩阵 $X_{i,j} (1 \leq i < j \leq k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得式(4-8)

成立,

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} R_i & X_{i,j} \\ * & R_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4-8)$$

那么式(4-9)成立。

$$\Psi_\alpha \geq \begin{bmatrix} R_1 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,k} \\ * & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & R_{k-1} & X_{k-1,k} \\ * & \cdots & * & R_k \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

引理 4-3^[114] 对于常数 $\alpha \in (0,1)$, 存在适合维数的对称正定矩阵 X 和任意矩阵 S , 使得式(4-10)成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a}X & 0 \\ a & \frac{1}{1-a}X \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} X + (1-a)T_1 & S \\ * & X + aT_2 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

其中 $T_1 = X - SX^{-1}S^T$, $T_2 = X - S^T X^{-1}S$ 。

4.3 时滞相关稳定性判据

在这部分, 首先讨论带有两个时变时滞的递归神经网络(4-1)的稳定性问题, 然后将所得到的结果推广到时滞数量大于两个的情况。考虑关于时滞的最大上界相关单积分项 $\int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds$ 和 $\int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds$, 可以将区间 $[0, \tau_1^M]$ 和区间 $[0, \tau_2^M]$ 分成三种不同形式的子区间。首先, 很明显 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_1^M \leq \tau_2^M$ 的关系是可以确定的。然后, 考虑 τ_2 的位置可以存在于 $[0, \tau_1]$, 或者 $(\tau_1, \tau_1^M]$, 或者 $(\tau_1^M, \tau_2^M]$ 中。最终, 我们可以将区间 $[0, \tau_2^M]$ 分成以下类型:

类型 1 (k=1), $0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_1^M \leq \tau_2^M$

类型 2 (k=2), $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_1^M \leq \tau_2^M$

类型 3 (k=3), $0 \leq \tau_1 \leq \tau_1^M < \tau_2 \leq \tau_2^M$

如此一来, 在存在两种时变时滞的情况下, $\int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds$ 可以分为下面三种情况:

$$\int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds = \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds$$

$$\int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds = \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds$$

$$\int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds = \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds$$

同理, $\int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds$ 也分为三种情况讨论。方便起见, 我们定义 $a_0, a_1,$

a_2, a_3, a_4 分别代表 $0, \tau_1, \tau_2, \tau_1^M$ 和 τ_2^M 之间的按照由小到大的排列。例如, 在第一种情况下 $a_0 = 0, a_1 = \tau_2, a_2 = \tau_1, a_3 = \tau_1^M$ 以及 $a_4 = \tau_2^M$ 。

注 4.2 在处理多时滞的情况下, 有部分文献直接将处理单时滞系统的方法运用到多时滞系统中, 这些文献自然会引入很多保守性。因此本章的主要工作是在处理多时滞的问题上, 提出新的解决方案, 进一步降低保守性, 使之与处理单时滞的方法区分开来。

接下来, 首先解决带有两个时滞的递归神经网络系统的稳定性问题, 然后将得到的结果推广到系统中存在多于两种时滞的情况。

定理 4-1 存在两个时滞的情况下, 给定标量 $\mu_1, \mu_2, \tau_1^M, \tau_2^M$ 以及对角矩阵 $F_1 = \text{diag}\{\sigma_1^-, \dots, \sigma_n^-\}$, $F_2 = \text{diag}\{\sigma_1^+, \dots, \sigma_n^+\}$, $H_0 \geq 0$, $H_1 \geq 0$, $H_2 \geq 0$, $0 \leq \tau_1 \leq \tau_1^M$, $0 \leq \tau_2 \leq \tau_2^M, \tau_1^M \leq \tau_2^M, \dot{\tau}_1 \leq \mu_1, \dot{\tau}_2 \leq \mu_2$, 如果存在矩阵 $P \in \mathbb{S}_{3n}^+$, $Q_{1,1} \in \mathbb{S}_n^+$, $Q_{1,2} \in \mathbb{S}_n^+$, $Q_{2,1} \in \mathbb{S}_n^+, Q_{2,2} \in \mathbb{S}_n^+, R_1 \in \mathbb{S}_n^+, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$, 正定对角矩阵 $L_i = \text{diag}\{\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni}\} (i=1,2)$, 任意矩阵 $X_{1j}^k \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} (k=1,2; j=1,2,3)$, $X_{2j}^k \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} (k=1,2,3; j=1,2,3,4,5,6)$, 使得式 (4-11)-式 (4-15) 成立, 那么递归神经网络 (4-1) 是渐近稳定的。

$$\Phi_1(0,0) < 0, \Phi_1(\tau_1^M, 0) < 0, \Phi_1(\tau_1^M, \tau_1^M) < 0 \quad (4-11)$$

$$\Phi_2(0,0) < 0, \Phi_2(0, \tau_1^M) < 0, \Phi_2(\tau_1^M, \tau_1^M) < 0 \quad (4-12)$$

$$\Phi_3(0, \tau_1^M) < 0, \Phi_3(0, \tau_2^M) < 0, \Phi_3(\tau_1^M, \tau_1^M) < 0, \Phi_3(\tau_1^M, \tau_2^M) < 0 \quad (4-13)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & X_{1j}^k \\ * & \tilde{R}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad k=1,2; j=1,2,3 \quad (4-14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & X_{2j}^k \\ * & \tilde{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad k=1,2,3; j=1,2,3,4,5,6 \quad (4-15)$$

其中,

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2) = 2G_1^T(\tau_1, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{11}^T R_{11} \Xi_{11} - \Xi_{12}^T R_{12} \Xi_{12}$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2) = 2G_1^T(\tau_1, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{21}^T R_{21} \Xi_{21} - \Xi_{22}^T R_{22} \Xi_{22}$$

$$\Phi_3(0, \tau_2) = \begin{bmatrix} 2G_1^T(0, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{32}^T R_{32} \Xi_{32} - \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\tilde{R}_1 & S \\ * & \tilde{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} & E_1^T S \\ * & -\tilde{R}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3(\tau_1^M, \tau_2) = \begin{bmatrix} 2G_1^T(\tau_1^M, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{32}^T R_{32} \Xi_{32} - \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & S \\ * & 2\tilde{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} & E_2^T S^T \\ * & -\tilde{R}_1 \end{bmatrix}$$

$$G_1(\tau_1, \tau_2) = \text{col}\{e_1, G_{11}(\tau_1, \tau_2), G_{12}(\tau_1, \tau_2)\}, \quad G_0 = \text{col}\{e_s, e_1 - e_7, e_1 - e_8\}$$

$$G_{11}(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} a_1 e_9 + (a_2 - a_1)e_{10} + (a_3 - a_2)e_{11}, & \text{如果 } \tau_2 \leq \tau_1^M \\ a_1 e_9 + (a_2 - a_1)e_{10}, & \text{其他情况} \end{cases}$$

$$G_{12}(\tau_1, \tau_2) = a_1 e_9 + (a_2 - a_1)e_{10} + (a_3 - a_2)e_{11} + (a_4 - a_3)e_{12}$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (12-i)n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -A & B & B_1 & B_2 & 0_{n \times 8n} \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{11} = \text{col}\{e_1 - e_6, e_1 + e_6 - 2e_9, e_6 - e_5, e_6 + e_5 - 2e_{10}, e_5 - e_7, e_5 + e_7 - 2e_{11}\}$$

$$\Xi_{12} = \text{col}\{\Xi_{11}, e_7 - e_8, e_7 + e_8 - 2e_{12}\}$$

$$\Xi_{21} = \text{col}\{e_1 - e_5, e_1 + e_5 - 2e_9, e_5 - e_6, e_5 + e_6 - 2e_{10}, e_6 - e_7, e_6 + e_7 - 2e_{11}\}$$

$$\Xi_{22} = \text{col}\{\Xi_{21}, e_7 - e_8, e_7 + e_8 - 2e_{12}\}$$

$$E_1 = \text{col}\{e_1 - e_5, e_1 + e_5 - 2e_9\}, E_2 = \text{col}\{e_5 - e_7, e_5 + e_7 - 2e_{10}\}$$

$$\Xi_{31} = \text{col}\{E_1, E_2\} = \text{col}\{e_1 - e_5, e_1 + e_5 - 2e_9, e_5 - e_7, e_5 + e_7 - 2e_{10}\}$$

$$\Xi_{22} = \text{col}\{\Xi_{31}, e_7 - e_6, e_7 + e_6 - 2e_{11}, e_6 - e_8, e_6 + e_8 - 2e_{12}\}$$

$$R_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & X_{11}^1 & X_{12}^1 \\ * & \tilde{R}_1 & X_{13}^1 \\ * & * & \tilde{R}_1 \end{bmatrix}, \quad R_{12} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & X_{21}^1 & X_{22}^1 & X_{23}^1 \\ * & \tilde{R}_2 & X_{24}^1 & X_{25}^1 \\ * & * & \tilde{R}_2 & X_{26}^1 \\ * & * & * & \tilde{R}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 3R_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 3R_2 \end{bmatrix}$$

$$R_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & X_{11}^2 & X_{12}^2 \\ * & \tilde{R}_1 & X_{13}^2 \\ * & * & \tilde{R}_1 \end{bmatrix}, R_{22} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & X_{21}^2 & X_{22}^2 & X_{23}^2 \\ * & \tilde{R}_2 & X_{24}^2 & X_{25}^2 \\ * & * & \tilde{R}_2 & X_{26}^2 \\ * & * & * & \tilde{R}_2 \end{bmatrix}, R_{32} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & X_{21}^3 & X_{22}^3 & X_{23}^3 \\ * & \tilde{R}_2 & X_{24}^3 & X_{25}^3 \\ * & * & \tilde{R}_2 & X_{26}^3 \\ * & * & * & \tilde{R}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Psi = & e_1^T(Q_{1,1} + Q_{1,2} + Q_{2,1} + Q_{2,2})e_1 - e_7^T Q_{1,1}e_7 - e_8^T Q_{1,2}e_8 - (1 - \mu_1)e_5^T Q_{2,1}e_5 \\ & - (1 - \mu_2)e_6^T Q_{2,2}e_6 + 2[e_2 - F_1e_1]^T L_1e_s + 2[F_2e_1 - e_2]^T L_2e_s + (\tau_1^M)^2 e_s^T R_1e_s + (\tau_2^M)^2 e_s^T R_2e_s \\ & + 2(e_1^T F_1^T - e_2^T)H_0(e_2 - F_2e_1) + 2(e_5^T F_1^T - e_3^T)H_1(e_3 - F_2e_3) + 2(e_6^T F_1^T - e_4^T)H_2(e_4 - F_2e_6) \end{aligned}$$

证明 构造如下 L-K 泛函:

$$\begin{aligned} V(t) = & \xi^T(t)P\xi(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{t-\tau_i^M}^t x^T(s)Q_{1,i}x(s)ds + \sum_{i=1}^2 \int_{t-\tau_i}^t x^T(s)Q_{2,i}x(s)ds \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \lambda_{1i} \int_0^{x_i(t)} (f_i(s) - \sigma_i^- s)ds + 2 \sum_{i=1}^2 \lambda_{2i} \int_0^{x_i(t)} (\sigma_i^+ s - f_i(s))ds \\ & + \sum_{i=1}^2 \tau_i^M \int_{-\tau_i^M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)dsd\theta \end{aligned} \quad (4-16)$$

其中 $\xi(t) = \text{col}\{x(t), \int_{t-\tau_1^M}^t x(s)ds, \int_{t-\tau_2^M}^t x(s)ds\}$, 对 $V(t)$ 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & 2\xi^T(t)P\dot{\xi}(t) + x^T(t)(Q_{1,1} + Q_{1,2} + Q_{2,1} + Q_{2,2})x(t) - x^T(t - \tau_1^M)Q_{1,1}x(t - \tau_1^M) \\ & - x^T(t - \tau_2^M)Q_{1,2}x(t - \tau_2^M) - (1 - \mu_1)x^T(t - \tau_1)Q_{2,1}x(t - \tau_1) - (1 - \mu_2)x^T(t - \tau_2)Q_{2,2}x(t - \tau_2) \\ & + 2[f(x(t)) - F_1x(t)]^T L_1\dot{x}(t) + 2[F_2x(t) - f(x(t))]^T L_2\dot{x}(t) \\ & + (\tau_1^M)^2 \dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) + (\tau_2^M)^2 \dot{x}^T(t)R_2\dot{x}(t) - \tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}(t)R_1\dot{x}(t)ds - \tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}(t)R_2\dot{x}(t)ds \\ \leq & \chi^T(t)\{2G_1^T(\tau_1, \tau_2)PG_0 + e_1^T(Q_{1,1} + Q_{1,2} + Q_{2,1} + Q_{2,2})e_1 - e_7^T Q_{1,1}e_7 - e_8^T Q_{1,2}e_8 \\ & - (1 - \mu_1)e_5^T Q_{2,1}e_5 - (1 - \mu_2)e_6^T Q_{2,2}e_6 + 2[e_2 - F_1e_1]^T L_1e_s + 2[F_2e_1 - e_2]^T L_2e_s + (\tau_1^M)^2 e_s^T R_1e_s \\ & + (\tau_2^M)^2 e_s^T R_2e_s\}\chi(t) - \tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds - \tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds \end{aligned} \quad (4-17)$$

其中,

$$\begin{aligned} \chi(t) = & \text{col}\{x(t), f(x(t)), f(x(t - \tau_1)), f(x(t - \tau_2)), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), x(t - \tau_1^M), \\ & x(t - \tau_2^M), \frac{\int_{t-a_1}^{t-a_0} x(s)ds}{a_1 - a_0}, \frac{\int_{t-a_2}^{t-a_1} x(s)ds}{a_2 - a_1}, \frac{\int_{t-a_3}^{t-a_2} x(s)ds}{a_3 - a_2}, \frac{\int_{t-a_4}^{t-a_3} x(s)ds}{a_4 - a_3}\} \end{aligned}$$

下面考虑对激活函数信息的利用, 由式(4-6)可知, 如果存在对角矩阵 $H_0 \geq 0$, $H_1 \geq 0$ 以及 $H_2 \geq 0$, 则式(4-18)-式(4-20)成立。

$$2[F_1x(t) - f(x(t))]^T H_0[f(x(t)) - F_2x(t)] \geq 0 \quad (4-18)$$

$$2[F_1x(t - \tau_1) - f(x(t - \tau_1))]^T H_1[f(x(t - \tau_1)) - F_2x(t - \tau_1)] \geq 0 \quad (4-19)$$

$$2[F_1x(t - \tau_2) - f(x(t - \tau_2))]^T H_2[f(x(t - \tau_2)) - F_2x(t - \tau_2)] \geq 0 \quad (4-20)$$

将式(4-18)-式(4-20)加到式(4-17)的右侧，我们可以得到式(4-21)成立。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \chi^T(t) 2G_1^T(\tau_1, \tau_2) P G_0 \chi(t) + \chi^T(t) \Psi \chi(t) \\ &\quad - \tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds - \tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (4-21)$$

在 $k=1$ 的情况下，将区间 $[0, \tau_1^M]$ 划分成单个子区间 $[0, \tau_2)$ ， $[\tau_2, \tau_1)$ 和 $[\tau_1, \tau_1^M]$ ，

然后运用引理 4-1 来估计单积分项 $-\tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds$ ，得到式(4-22)。

$$\begin{aligned} &-\tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\ &= -\tau_1^M \left(\int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \right) \\ &\leq -\frac{\tau_1^M}{\tau_2} G_1^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 3R_1 \end{bmatrix} G_1 - \frac{\tau_1^M}{\tau_1 - \tau_2} G_2^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 3R_1 \end{bmatrix} G_2 - \frac{\tau_1^M}{\tau_1^M - \tau_1} G_3^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 3R_1 \end{bmatrix} G_3 \\ &= -\chi^T(t) \Xi_{11}^T R'_{11} \Xi_{11} \chi(t) \end{aligned} \quad (4-22)$$

其中，

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{col}\{x(t) - x(t - \tau_2), x(t) + x(t - \tau_2) - \frac{2 \int_{t-\tau_2}^t x(s) ds}{\tau_2}\} \\ G_2 &= \text{col}\{x(t - \tau_2) - x(t - \tau_1), x(t - \tau_2) + x(t - \tau_1) - \frac{2 \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} x(s) ds}{\tau_1 - \tau_2}\} \\ G_3 &= \text{col}\{x(t - \tau_1) - x(t - \tau_1^M), x(t - \tau_1) + x(t - \tau_1^M) - \frac{2 \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} x(s) ds}{\tau_1^M - \tau_1}\} \\ R'_{11} &= \text{diag}\left\{\frac{\tau_1^M}{\tau_2} \tilde{R}_1, \frac{\tau_1^M}{\tau_1 - \tau_2} \tilde{R}_1, \frac{\tau_1^M}{\tau_1^M - \tau_1} \tilde{R}_1\right\} \end{aligned}$$

利用引理 4-2，可得如果存在矩阵 X_{ij}^1 ，使得式(4-23)成立，

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & X_{ij}^1 \\ * & \tilde{R}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1; j=1, 2, 3 \quad (4-23)$$

那么我们可以得到 $-\tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \leq -\chi^T(t) \Xi_{11}^T R'_{11} \Xi_{11} \chi(t)$ 。接下来利用相似的

方法，估计单积分项 $-\tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds$ ：

$$\begin{aligned}
 & -\tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
 & = -\tau_2^M \left(\int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_2^M}^{t-\tau_1^M} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \right) \\
 & \leq -\frac{\tau_2^M}{\tau_2} G_1^T \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 3R_2 \end{bmatrix} G_1 - \frac{\tau_2^M}{\tau_1 - \tau_2} G_2^T \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 3R_2 \end{bmatrix} G_2 \\
 & \quad - \frac{\tau_2^M}{\tau_2^M - \tau_1} G_3^T \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 3R_2 \end{bmatrix} G_3 - \frac{\tau_2^M}{\tau_2^M - \tau_1^M} G_4^T \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 3R_2 \end{bmatrix} G_4 \\
 & = -\chi^T(t) \Xi_{12}^T R_{12} \Xi_{12} \chi(t)
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 G_4 & = col\{x(t - \tau_1^M) - x(t - \tau_2^M), x(t - \tau_1^M) + x(t - \tau_2^M) - \frac{2 \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_2^M} x(s) ds}{\tau_2^M - \tau_1^M}\} \\
 R_{12} & = \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & X_{21}^1 & X_{22}^1 & X_{23}^1 \\ * & \tilde{R}_2 & X_{24}^1 & X_{25}^1 \\ * & * & \tilde{R}_2 & X_{26}^1 \\ * & * & * & \tilde{R}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

基于引理 4-2，可知式(4-24)成立的条件是存在矩阵 X_{ij}^1 使得如下不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & X_{ij}^1 \\ * & \tilde{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 2; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

总结上述推导过程以及对单积分的放缩，可以得到泛函求导结果的负定条件，即 $\dot{V}(t) \leq \chi^T(t) [2G_1^T(\tau_1, \tau_2) P G_0 + \Psi - \Xi_{11}^T R_{11} \Xi_{11} - \Xi_{12}^T R_{12} \Xi_{12}] \chi(t)$ 。

在 $k=2$ 的情况下，运用引理 4-1 和引理 4-2 的不等式放缩条件，可以判断出如果存在合适的矩阵 $X_{ij}^2 (i=1; j=1, 2, 3)$ 和 $X_{ij}^2 (i=2; j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 满足条件(4-14)和(4-15)，可以得到以下不等式：

$$-\tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \leq -\chi^T(t) \Xi_{21}^T R_{21} \Xi_{21} \chi(t) \tag{4-25}$$

$$-\tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \leq -\chi^T(t) \Xi_{22}^T R_{22} \Xi_{22} \chi(t) \tag{4-26}$$

总结上述推导过程，以及式(4-25)和式(4-26)对单积分的放缩，那么可以得到泛

函的求导结果，即 $\dot{V}(t) \leq \chi^T(t)[2G_1^T(\tau_1, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{21}^T R_{21} \Xi_{21} - \Xi_{22}^T R_{22} \Xi_{22}] \chi(t)$ 。

在 $k=3$ 的情况下，可以得到如下不等式放缩形式：

$$\begin{aligned}
 & -\tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\
 & = -\tau_1^M \left(\int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \right) \\
 & \leq -G_5^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_1^M}{\tau_1} \tilde{R}_1 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_1^M}{\tau_1^M - \tau_1} \tilde{R}_1 \end{bmatrix} G_5
 \end{aligned} \tag{4-27}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 G_5 = \text{col} \{ & x(t) - x(t - \tau_1), x(t) + x(t - \tau_1) - \frac{2 \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds}{\tau_1}, \\
 & x(t - \tau_1) - x(t - \tau_1^M), x(t - \tau_1) + x(t - \tau_1^M) - \frac{2 \int_{t-\tau_1^M}^{t-\tau_1} x(s) ds}{\tau_1^M - \tau_1} \}
 \end{aligned}$$

利用引理 4-3 可得 $-\tau_1^M \int_{t-\tau_1^M}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \leq -\chi^T(t) \Xi_{31}^T R_{31}(\tau_1) \Xi_{31} \chi(t)$ ，其中，

$$R_{31}(\tau_1) = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 + (1 - \frac{\tau_1}{\tau_1^M})(\tilde{R}_1 - S \tilde{R}_1^{-1} S^T) & S \\ * & \tilde{R}_1 + \frac{\tau_1}{\tau_1^M}(\tilde{R}_1 - S^T \tilde{R}_1^{-1} S) \end{bmatrix} \tag{4-28}$$

和前面的推导过程类似，假如存在符合条件 (4-15) 的矩阵 $X_{ij}^3 (i=2; j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ，我们可以得到以下不等式成立：

$$-\tau_2^M \int_{t-\tau_2^M}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \leq -\chi^T(t) \Xi_{32}^T R_{32} \Xi_{32} \chi(t) \tag{4-29}$$

总结上述推导过程，可得如果 $2G_1^T(\tau_1, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{31}^T R_{31}(\tau_1) \Xi_{31} - \Xi_{32}^T R_{32} \Xi_{32} < 0$ 成立，那么 $\dot{V}(t)$ 是负定的。基于时变时滞 τ_1 和 τ_2 在泛函求导结果中的单调性条件， $2G_1^T(\tau_1, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{31}^T R_{31}(\tau_1) \Xi_{31} - \Xi_{32}^T R_{32} \Xi_{32} < 0$ 成立的条件是式 (4-30) 和式 (4-31) 成立：

$$2G_1^T(0, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{31}^T R_{31}(0) \Xi_{31} - \Xi_{32}^T R_{32} \Xi_{32} < 0 \tag{4-30}$$

$$2G_1^T(\tau_1^M, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{31}^T R_{31}(\tau_1^M)\Xi_{31} - \Xi_{32}^T R_{32}\Xi_{32} < 0 \quad (4-31)$$

以上两个不等式成立条件可以根据 Schur 补引理 1-1 进行判定, 并得到如下同等判据:

$$\begin{bmatrix} 2G_1^T(0, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{32}^T R_{32}\Xi_{32} - \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\tilde{R}_1 & S \\ * & \tilde{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} & E_1^T S \\ * & -\tilde{R}_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (4-32)$$

$$\begin{bmatrix} 2G_1^T(\tau_1^M, \tau_2)PG_0 + \Psi - \Xi_{32}^T R_{32}\Xi_{32} - \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & S \\ * & 2\tilde{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} & E_2^T S^T \\ * & -\tilde{R}_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (4-33)$$

基于以上不同情况的讨论, 可得如果线性矩阵不等式(4-11)-(4-15)成立, 那么可以得到 $\dot{V}(t) < 0$, 即递归神经网络(4-1)是渐近稳定的。证明完毕。

注 4.3 上述讨论的时滞的三种情况, 以图例的形式表达出其区间划分, 如图 4-1 所示。从图 4-1 可以看出, 这三种情况是单调的。进而, 可以直接将时滞区间的对应的上下界带入稳定性判据来证明泛函求导结果的负定条件。因此, 可以得到不等式(4-11)-(4-15)成立可保证泛函导数小于零。

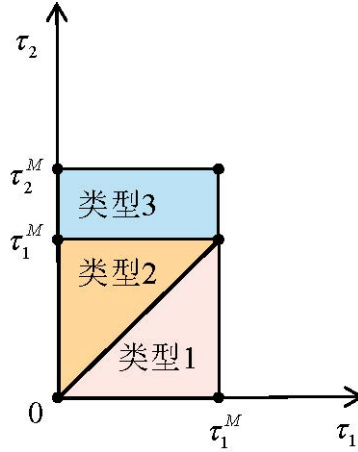


图 4-1 三种类型的时变时滞的区间划分

Fig 4-1 The domains of time-varying delays in three types.

接下来考虑带有多于两种时滞的分类情况, 将 $0, \tau_1, \dots, \tau_N, \tau_1^M, \dots, \tau_N^M$ 进行排序, 可以得到 $(N+1) \times (N+2) \times \dots \times (2N-1)$ 种情况。

注 4.4 基于 $0 \leq \tau_i \leq \tau_i^M$ 以及 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_1^M \leq \tau_2^M \leq \dots \leq \tau_N^M$ 的关系恒成立, 时变时滞 τ_2, \dots, τ_N 可以任意地存在于区间 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_1^M \leq \tau_2^M \leq \dots \leq \tau_N^M$ 之中。通过排列方法, 我们可以得到 $(N+1) \times (N+2) \times \dots \times (2N-1)$ 种将 $0, \tau_1, \dots, \tau_N, \tau_1^M, \dots, \tau_N^M$ 排序的情况。

在存在大于两种时变时滞的情况下，我们选取以下 L-K 泛函：

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \xi^T(t)P\xi(t) + \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i^M}^t x^T(s)Q_{1,i}x(s)ds + \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t x^T(s)Q_{2,i}x(s)ds \\
 & + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} \int_0^{x_i(t)} (f_i(s) - \sigma_i^- s)ds + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_{2i} \int_0^{x_i(t)} (\sigma_i^+ s - f_i(s))ds \\
 & + \sum_{i=1}^N \tau_i^M \int_{-\tau_N^M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta
 \end{aligned} \quad (4-34)$$

其中 $\xi(t) = \text{col}\{x(t), \int_{t-\tau_1^M}^t x(s)ds, \dots, \int_{t-\tau_N^M}^t x(s)ds\}$ ，我们可以得到定理 4-2。

定理 4-2 存在大于两个时变时滞的情况下，对于给定的标量 μ_i, τ_i^M ， $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_i^M, \tau_{i-1}^M \leq \tau_i^M, \dot{\tau}_i \leq \mu_i$ ($i=3,4,\dots,N$)，对角矩阵 $F_1 = \text{diag}\{\sigma_1^-, \dots, \sigma_n^-\}$ ， $F_2 = \text{diag}\{\sigma_1^+, \dots, \sigma_n^+\}$ 以及 $H_\alpha \geq 0$ ($\alpha=0,1,\dots,i$)，如果存在矩阵 $P \in \mathbb{S}_{(1+i)n}^+$ ， $Q_{1,i} \in \mathbb{S}_n^+$ ， $Q_{2,i} \in \mathbb{S}_n^+$ ， $R_i \in \mathbb{S}_n^+$ ，正定对角矩阵 $L_1 = \text{diag}\{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{n1}\}$ ， $L_2 = \text{diag}\{\lambda_{12}, \dots, \lambda_{n2}\}$ ，任意矩阵 $X_{ij}^k \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 满足式(4-35)，则递归神经网络(4-1)是渐近稳定的。

$$\Phi_k(\tau_1, \dots, \tau_N) < 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & X_{ij}^k \\ * & \tilde{R}_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4-35)$$

其中 $k=1,2,\dots,(N+1) \times \dots \times (2N-1)$ ，其他参数的具体形式和定理 4-1 的形式类似，此略。

证明 选取 L-K 泛函如式(4-34)所示，对其求导。推导过程和定理 4-1 的推导过程类似，故不再赘述。

注 4.5 定理 4-2 是定理 4-1 的扩展，定理 4-2 所提出的增强型时滞相关区间法充分地利用了 $x(t-\tau_i^M), \dots, x(t-\tau_1^M), x(t-\tau_i), \dots, x(t-\tau_1)$ 之间的关系。通过这个方法，可以有效地降低递归神经网络(4-1)的稳定性判据的保守性。值得注意的是，当时变时滞的数量增加时，分解的区间数量会增加，同时计算复杂度也会增加。因此在计算复杂度和保守性之间需要做出平衡。

注 4.6 本章所提出的方法是受文献[111]启发得到的。然而，当处理多时滞的情况时，文献[111]只用到 $x(t-\tau_i^M), x(t-\tau_i), x(t-\tau_{i-1}^M)$ 和 $x(t-\tau_{i-1})$ 的信息，这样的做法会引入一些保守性。本章充分利用了 $x(t-\tau_i^M), \dots, x(t-\tau_1^M), x(t-\tau_i), \dots, x(t-\tau_1)$ 之间的信息，所提到的方法充分考虑了时滞之间的内部关系，其他研究多时滞系统的文献鲜有关注到这一点。

4.4 数值算例

在本节中，为了验证本章中提出的结果的有效性，给出以下两个数值算例。

例 4-1 考虑递归神经网络(4-1)具有以下参数:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.10 \\ 0.10 & 0.03 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.01 \\ -0.10 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.10 & -0.03 \\ 0 & -0.35 \end{bmatrix}$$

在这个例子中，考虑存在两种时变时滞， $\sigma_1^- = \sigma_2^- = 0$ ， $\sigma_1^+ = \sigma_2^+ = 1.5$ 以及 $\mu_1 = \mu_2 = 1$ 。其中，设定仿真步长为 0.01 秒，初始条件 $u(t) = [0.2, -0.5]^T$ ， $J = [1, 1]^T$ ，以及激励函数 $\hat{f}(u(t)) = [1.5 \tanh(u_1(t)), 1.5 \tanh(u_2(t))]^T$ 。

对于不同的较小的时滞上界 τ_1^M ，根据定理 4-1 可以得到的最大时滞上界 τ_2^M 的数值罗列在表 4-1 中，其中“-”代表不可行。可以从表格 4-1 中看到，和其他文献中的结果相对比，本章得到的最大时滞上界更大，这说明了本章所提出的时滞分割方法的优越性。

图 4-2 展现了 $\tau_1^M = 0.5$ ， $\tau_2^M = 2.9985$ 时的状态响应曲线，其中递归神经网络的平衡点为 $u^* = [1.2751, 1.0349]^T$ 。很明显从图 4-2 中可以发现，系统(4-1)在平衡点是稳定的。

表 4-1 τ_1^M 取不同值时的例 4-1 的最大时滞上界

Table 4-1 The maximum upper delay bounds with different τ_1^M

方法\ τ_1^M	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
文献[103]	1.3755	0.8795	0.2630	-	-
文献[104]	2.4906	2.0677	1.9137	1.0977	0.5488
定理 4-1	2.9985	2.7566	2.5916	2.5054	2.2476

注 4-7 在表 4-1 中，当 $\mu_1 = \mu_2 = 1$ 时，通过设定 τ_1^M 的值，可以得到 τ_2^M 的值。但是假设 $\tau_1^M \leq \tau_2^M$ 的情况下，当 $\tau_1^M = 2.5$ 时，不能得到 τ_2^M 的值。在这种情况下，可以改变矩阵 B_1 和 B_2 的位置，并且改变时滞 τ_1^M 和 τ_2^M 的位置，令 τ_1^M 为较大的时滞上界，令 τ_2^M 为较小的时滞上界，这样就可以得到 τ_2^M 的值。虽然这不是完全符合本章中的假设条件，但是系统并没有改变，时滞是按大小序列排序的，其形式也是本章中讨论的递归神经网络模型。

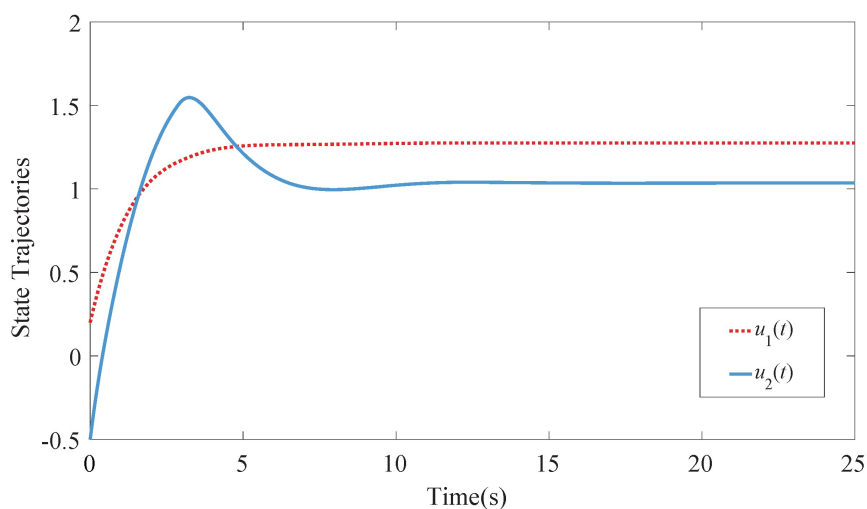


图 4-2 系统的状态轨迹

Fig 4-2 The state trajectories of the system

例 4-2 考虑递归神经网络(4-1)带有以下矩阵形式:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

在这个例子中, 我们考虑递归神经网络存在两种时变时滞, 其他参数选择为 $\sigma_1^- = \sigma_2^- = 0$, $\sigma_1^+ = \sigma_2^+ = 1.5$, $\tau_1 = \tau_2$ 以及时滞不可导。这种情况是本章所讨论的情况中较为简单的形式, 其中两种时变时滞也是相同的, 因而最大时滞上界也是相同的。在这种情况下的最大时滞上界的结果如表 4-2 所示, 从表格中可以看出, 定理 4-1 可以提供一个保守性较低的稳定性判据。

表 4-2 最大时滞上界

Table 4-2 The maximum upper delay bounds				
方法	文献[115]	文献[103]	文献[104]	定理 4-1
$\tau_1^M = \tau_2^M$	1.1112	1.8309	4.6927	5.3439

4.5 本章小结

本章研究了带有多重时滞的递归神经网络的稳定性问题。首先, 本章提出了一种增强型时滞区间分割法, 这种方法充分利用了时滞之间的关系, 根据时滞上界和时变时滞之间的关系, 将时滞划分为不同情况。根据不同的大小排列顺序, 得到不

同的子区间的划分类型。其次，当处理泛函的导数的时候，利用不同的子区间划分类型，将单积分划分成子区间相关的单积分和的形式，并利用不等式方法和两种不同的互凸组合方法来进行放缩。最后，仿真算例表明，本章提出的稳定性结果对比文献结果的保守性更小。

第 5 章 基于二次时滞乘积方法的 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析

本章研究了带有时变时滞的 T-S 模糊系统的稳定性问题。首先,设计了一种新型的 L-K 泛函,这种泛函包含了二次时滞乘积单积分项和隶属度函数相关矩阵。然后,利用不等式估计方法来对积分不等式进行放缩处理,并引入多项式负定的充要条件来估计 L-K 泛函的求导结果,使得估计误差大幅降低,得到了一个保守性较低的稳定性判据。最后,运用数值算例验证所得理论结果的有效性。

5.1 引言

大量的工业系统和物理过程建模成复杂的非线性系统的形式,这促使着国内外学者们发展出更加有效的模型方案。在 1985 年, Takagi 和 Sugeno 提出了 T-S 模糊模型,这种模型将线性系统理论和模糊逻辑理论充分结合。T-S 模糊模型是由一系列 IF-THEN 描述局部线性输入输出的非线性关系,用线性子系统的加权和的形式来逼近复杂的非线性系统。基于此,国内外科研人员开展了大量的 T-S 模糊模型的相关工作^[116-118]。与此同时,由于固有的网络通信等原因不可避免地会产生时滞现象。时滞现象会引起系统扰动,性能受损甚至是不稳定的状况^[119-121]。研究时变时滞系统的最基本目标是求取保证系统稳定的最大时滞上界,通常利用稳定性判据能够达到的最大时滞上界来衡量保守性。同样地,在非线性系统表示成 T-S 模糊模型的情况下,研究带有时滞的 T-S 模糊系统的稳定性问题同样具有重要的意义。因此,关于 T-S 模糊时滞系统的稳定性研究成为了一个关键性问题,并在最近二十年来成为了一个受到广泛关注的领域。

L-K 泛函方法是一种高效、简便的用来研究时滞系统的方法。此外,使得保守性降低的主要方法分为两方面,一方面是 L-K 泛函的构造,另一方面是对 L-K 泛函导数的估计。因此,如何选择 L-K 泛函以及如何逼近 L-K 泛函的导数,很大程度上决定了保守性。

一方面, L-K 泛函的构造对于 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析相当重要。多积分项、时滞分割法、增广泛函法等方法广泛地应用到 L-K 泛函的设计当中。在近三

年中,许多文献将时滞乘积项引入到 L-K 泛函中^[58,122,123],并在求导结果中产生时滞和时滞相关项的交叉项。文献[58]利用时滞乘积项矩阵构造单积分项,通过引入时滞乘积积分项,使得在 L-K 泛函求导过程中产生了更多的时滞交叉项和时滞导数交叉项。文献[122]利用时滞乘积矩阵和增广向量的乘积,构造了一种新型的 L-K 泛函来研究时滞系统的稳定性问题。基于时滞乘积项的泛函方法,如何进一步地降低保守性是本章的研究重点。

另一方面,对 L-K 泛函的求导结果的处理也十分重要。Jensen 不等式、Wirtinger 不等式、基于自由矩阵的不等式等方法广泛地运用在对积分项的估计中。除此之外,互凸组合方法在降低保守性的过程中扮演着重要的角色。文献[80]首次提出互凸不等式。在近十年,国内外学者提出了大量的关于互凸组合相关引理,对文献[80]的互凸不等式进行了改进^[81,82,100,124,125]。文献[81]通过引入三个变量矩阵,得到保守性更低的互凸不等式。文献[82]提出了一种新的互凸不等式,此不等式能够覆盖部分文献的结果。在一些情况下,泛函求导之后的结果可以表示成关于时变时滞二次型的形式,如式(5-1)所示,

$$f_k(h(t)) = h^k(t)\Phi_k + h^{k-1}(t)\Phi_{k-1} + \cdots + h(t)\Phi_1 + \Phi_0 \quad (5-1)$$

其中 $k \in \mathbb{N}^+$, $h(t) \in [0, h]$ 是时变时滞, $\Phi_i (i=1, \dots, k)$ 是对称矩阵。文献[83]针对 $k=2$, $f_2(h(t)) < 0$ 的情况,根据二次函数的图像开口向上和向下两种不同类型,给出了如式(5-2)所示的充分条件。

$$f_2(0) < 0, f_2(h) < 0, -h^2\Phi_2 + f_2(0) < 0 \quad (5-2)$$

文献[84]通过做二次型函数图形的切线,得到切线交点并计算数值,给出了比文献[83]保守性更低的充分条件。2021 年, Zhang 给出了二次型小于零的充要条件^[66],其中引入了一些待定矩阵,此外所得结果的计算复杂度也会增加。上面提到的不等式均为关于多项式小于零的充分或者充要条件,获取多项式大于零的条件可以对上述条件进行简单的变换。

受上述所提文献的启发,本章的主要内容是进一步探讨 T-S 模糊时滞系统的时滞相关稳定性问题。本章提出了二次时滞乘积项的单积分型泛函,并通过与隶属度函数相关矩阵方法结合,设计出一种新型的 L-K 泛函。这种泛函联合 Wirtinger 不等式,增强型互凸不等式和矩阵相关二次型负定条件,得到了保守性较低的稳定性判据。本章的贡献总结为以下几点。首先,本章提出了一种新型的 L-K 泛函,其中包含了二次时滞乘积形式的单积分项,使得 L-K 泛函的求导结果中不仅包含时滞相

关交叉项，也包含时滞导数相关项和单积分二次时滞相关项，因此可以更加高效地利用到时滞相关信息。其次，基于隶属度函数的固有性质，利用隶属度函数相关矩阵构建 L-K 泛函。最后，本章运用了一种新型的二次矩阵负定引理，这种方法能够提供充要条件。

5.2 T-S 模糊时滞系统模型及相关引理

考虑一类如下表示的 T-S 模糊时滞系统：

模糊规则 i ：如果 $z_1(t)$ 是 M_{i1} ，...， $z_p(t)$ 是 M_{ip} ，那么

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (5-3)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 代表状态变量； $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是系统矩阵； $z_j(t)$ ($j=1, \dots, p$) 是前件变量； M_{ij} ($i=1, \dots, r; j=1, \dots, p$) 是先行模糊集； r 是模糊规则的个数； p 是前件变量的数量； $h(t)$ 是时变时滞并具有以下条件：

$$0 \leq h(t) \leq h, |\dot{h}(t)| \leq \mu \quad (5-4)$$

利用模糊推理方法，系统(5-3)可以转换为如下形式：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) (A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t))) \quad (5-5)$$

其中 $\lambda_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}$ ， $\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ 。 $\lambda_i(z(t))$ 指的是归一化隶属度函数； $\omega_i(z(t))$ 是所有和第 i 条模糊规则相关的隶属度函数乘积，表示第 i 条模糊规则被激活的概率； $M_{ij}(z_j(t))$ 指的是前件变量 $z_j(t)$ 在对应模糊集 M_{ij} 中的隶属度。假设

对于 $t \geq 0$ ，存在 $\omega_i(z(t)) > 0$ ，那么存在以下关系：

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\lambda}_i(z(t)) = 0 \quad (5-6)$$

为了下文推导的需要，列出如下引理。

引理 5-1^[43] 对于可导向量 $x(s) \in \mathbb{R}^n$ ， $a < b$ 以及矩阵 $R \in \mathbb{S}_+^n$ ，我们可以得到以下不等式：

$$\begin{cases} c \int_a^b x^T(s) R x(s) ds \geq \hat{\psi}_1^T R \hat{\psi}_1 + 3\hat{\psi}_2^T R \hat{\psi}_2 \\ c \int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \geq \psi_1^T R \psi_1 + 3\psi_2^T R \psi_2 + 5\psi_3^T R \psi_3 \\ \frac{c^2}{2} \int_a^b \int_\theta^b x^T(s) R x(s) ds d\theta \geq \int_a^b \int_\theta^b x^T(s) ds d\theta R \int_a^b \int_\theta^b x(s) ds d\theta + 2\psi_4^T R \psi_4 \end{cases} \quad (5-7)$$

其中,

$$\begin{aligned} c &= b-a, \hat{\psi}_1 = \int_a^b x(s) ds, \hat{\psi}_2 = \int_a^b x(s) ds - \frac{2}{c} \int_a^b \int_\theta^b x(s) ds d\theta \\ \psi_1 &= x(b) - x(a), \psi_2 = x(b) + x(a) - \frac{2}{c} \int_a^b x(s) ds \\ \psi_3 &= x(b) - x(a) + \frac{6}{c} \int_a^b x(s) ds - \frac{12}{c^2} \int_a^b \int_\theta^b x(s) ds d\theta \\ \psi_4 &= -\int_a^b \int_\theta^b x(s) ds d\theta + \frac{3}{c} \int_a^b \int_\theta^b \int_s^b x(v) dv ds d\theta \end{aligned}$$

引理 5-2^[80] 令 $R_1, R_2 \in \mathbb{S}_+^n$, $\alpha \in (0,1)$, 矩阵 $X_1, X_2 \in \mathbb{S}^n$ 以及矩阵 $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果式(5-8)成立,

$$\begin{bmatrix} R_1 - X_1 & Y_1 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} R_1 & Y_2 \\ * & R_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5-8)$$

则式(5-9)成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 + (1-\alpha)X_1 & \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 \\ * & R_2 + \alpha X_2 \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

引理 5-3^[126] 对于矩阵 $Z_h = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) Z_i$ 和 $X_h = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) X_i$ 其中 $Z_i > 0$, $X_i > 0$ 。如果式(5-10)成立, 那么 $\dot{Z}_h \leq 0$ 以及 $\dot{X}_h \leq 0$ 。

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j(z(t)) < 0: & Z_j - Z_r > 0, X_j - X_r > 0 \\ \dot{\lambda}_j(z(t)) \geq 0: & Z_j - Z_r \leq 0, X_j - X_r \leq 0 \end{cases} \quad (5-10)$$

其中 $j=1,2,\dots,r-1$, 且存在 2^{r-1} 种分类方式。

引理 5-4^[60] 对于矩阵不等式 $A_0 + A_1 h(t) + A_2 h^2(t) < 0$, 其中 $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 在 $h(t) \in [0, h]$ 上成立的充要条件是存在斜对称矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及 $D \in \mathbb{S}_n^+$ 使得式(5-11)成立。

$$\begin{bmatrix} A_0 & \frac{1}{2}A_1 \\ \frac{1}{2}A_1 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & G \\ G^T & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ J \end{bmatrix} < 0 \quad (5-11)$$

其中 $C = [hI \ 0]$, $J = [hI \ -2I]$ 。

注 5.1 文献[60]提出了关于矩阵多项式负定的充要条件。在文献[98]中, Park 提出了不同于式(5-11)的关于矩阵多项式负定的充要条件, 其中的变量数量和文献[60]中的变量数是一样的。关于多项式矩阵正定的充要条件可以通过引理 5-4 来获得, 在接下来的工作中会用到。

5.3 时滞相关稳定性判据

本章利用隶属度函数相关信息以及二次型时滞积分项来研究 T-S 模糊时滞系统的稳定性问题。为了表达简洁, 给出如下定义:

$$e_0 = 0_{n \times 10n}, \quad e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (10-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 10$$

$$T_\varsigma = T_\varsigma(h(t), \dot{h}(t)), T_{\varsigma 0} = T_{\varsigma 0}(\dot{h}(t)), T_{\varsigma 1} = T_{\varsigma 1}(\dot{h}(t))$$

$$\hat{T}_\varsigma = \hat{T}_\varsigma(h(t), \dot{h}(t)), \hat{T}_{\varsigma 0} = \hat{T}_{\varsigma 0}(\dot{h}(t)), \hat{T}_{\varsigma 1} = \hat{T}_{\varsigma 1}(\dot{h}(t))$$

$$h_i = h - h(t), \varsigma = 1, 2, 3, 4,$$

$$\eta_1(t) = \text{col}\{x(t), h(t)v_6(t), h(t)v_7, h(t)v_8(t), h(t)v_9\}$$

$$\eta_2(t, s) = \text{col}\{x(s), \dot{x}(s), x(t), x(t-h(t)), x(t-h), \int_s^t x(u)du\}$$

$$\eta_3(t, s) = \text{col}\{x(s), \dot{x}(s), x(t), x(t-h(t)), x(t-h), \int_s^{t-h(t)} x(u)du\}, v_6(t) = \int_{t-h(t)}^t \frac{x(s)}{h(t)} ds$$

$$v_7(t) = \int_{t-h}^{t-h(t)} \frac{x(s)}{h_t} ds, v_8(t) = \int_{t-h(t)}^t \int_s^t \frac{x(u)}{h^2(t)} du ds, v_9(t) = \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} \frac{x(u)}{h_t^2} du ds$$

$$\xi(t) = \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), x(t-h), \dot{x}(t-h(t)), \dot{x}(t-h), v_6, v_7, v_8, v_9, \dot{x}(t)\}$$

定理 5-1 给定标量 h , μ , 如果存在适当维数的对称矩阵 $P_i > 0$, $Q_{li} > 0$, $Q_{2i} > 0$, $R_\varsigma > 0$, $H > 0$, Z_{11} , Z_1 , Z_2 , Z_{22} , Z_3 , Z_4 , M_{11} , M_1 , M_2 , M_{22} , M_3 , M_4 , X_1 , X_2 , $D_{1\varsigma}$, D_{2i} , 任意矩阵 Y_1 , Y_2 , K_i , 和斜对称矩阵 $G_{1\varsigma}$ 和 G_{2i} , 其中, $i = 1, \dots, r$, $\varsigma = 1, 2, 3, 4$, $\iota = 1, 2, 3$, $\nu = 0, 1$ 或不存在, 使得式(5-12)-式(5-16)成立, 那么 T-S 模糊时滞系统(5-5)是渐近稳定的。

$$\dot{P}_h \leq 0, \dot{Q}_{1h} \leq 0, \dot{Q}_{2h} \leq 0 \quad (5-12)$$

$$ZM_\varsigma + \begin{bmatrix} C_1 \\ J_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{1\varsigma} & G_{1\varsigma} \\ G_{1\varsigma}^T & -D_{1\varsigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ J_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (5-13)$$

$$T_\varsigma(h(t), \dot{h}(t)) > 0 \quad (5-14)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_1 - X_1 & Y_1 \\ * & \hat{T}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \hat{T}_1 & Y_2 \\ * & \hat{T}_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5-15)$$

$$\begin{bmatrix} A_i^0(\dot{h}(t)) & \frac{1}{2}A_i^1(\dot{h}(t)) \\ * & A_i^2(\dot{h}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \\ J_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{2i} & G_{2i} \\ G_{2i}^T & -D_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ J_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (5-16)$$

其中具体的参数如下所示：

$$A_i^0 = \Phi_{10} + \Phi_{20} + \Phi_{30} + \Phi_{40} + \Phi_{50} + \Phi_{60} + \Phi_{70} + \Phi_{80}$$

$$A_i^1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{31} + \Phi_{41} + \Phi_{61} + \Phi_{71}$$

$$A_i^2 = \Phi_{22} + \Phi_{32} + \Phi_{42} + \Phi_{72}$$

$$\Phi_{10} = \text{sym}\{f_{10}^T P_i f_2\}, \Phi_{11} = \text{sym}\{f_{11}^T P_i f_2\}$$

$$\Phi_{20}(\dot{h}(t)) = F_1^T Q_{1i} F_1 - (1 - \dot{h}(t)) F_{20}^T Q_{1i} F_{20} - F_{40}^T Q_{2i} F_{40} + (1 - \dot{h}(t)) F_3^T Q_{2i} F_3 \\ + \text{sym}\{F_{50}^T Q_{1i} F_6 + F_{70}^T Q_{2i} F_8\}$$

$$\Phi_{21}(\dot{h}(t)) = \text{sym}\{-(1 - \dot{h}(t)) F_{21}^T Q_{1i} F_{20} - F_{41}^T Q_{2i} F_{40} + F_{51}^T Q_{1i} F_6 + F_{71}^T Q_{2i} F_8\}$$

$$\Phi_{22}(\dot{h}(t)) = -(1 - \dot{h}(t)) F_{21}^T Q_{1i} F_{21} - F_{41}^T Q_{2i} F_{41} + \text{sym}\{F_{52}^T Q_{1i} F_6 + F_{72}^T Q_{2i} F_8\}$$

$$\Phi_{30}(\dot{h}(t)) = e_{10}^T (Z_2 + hR_2) e_{10} + (1 - \dot{h}(t)) e_4^T (-Z_2 + Z_4 + h^2 Z_{22} + hZ_3) e_4 - e_5^T (h^2 Z_{22} + hZ_3 + Z_4) e_5$$

$$\Phi_{31}(\dot{h}(t)) = e_{10}^T (Z_1 + R_1 - R_2) e_{10} + (1 - \dot{h}(t)) e_4^T (-Z_1 - 2hZ_{22} - Z_3) e_4 + e_5^T (2hZ_{22} + Z_3) e_5$$

$$\Phi_{32}(\dot{h}(t)) = e_{10}^T Z_{11} e_{10} + (1 - \dot{h}(t)) e_4^T (-Z_{11} + Z_{22}) e_4 - e_5^T Z_{22} e_5$$

$$\Phi_{40}(\dot{h}(t)) = e_1^T (M_2 + hR_4) e_1 + (1 - \dot{h}(t)) e_2^T (-M_2 + M_4 + h^2 M_{22} + hM_3) e_2 \\ - e_3^T (h^2 M_{22} + hM_3 + M_4) e_3$$

$$\Phi_{41}(\dot{h}(t)) = e_1^T (M_1 + R_3 - R_4) e_1 + (1 - \dot{h}(t)) e_2^T (-M_1 - 2hM_{22} - M_3) e_2 + e_3^T (2hM_{22} + M_3) e_3$$

$$\Phi_{42}(\dot{h}(t)) = e_1^T M_{11} e_1 + (1 - \dot{h}(t)) e_2^T (-M_{11} + M_{22}) e_2 - e_3^T M_{22} e_3$$

$$\Phi_{50} = \frac{h^2}{2} e_{10}^T H e_{10} - 2f_3^T H f_3 - f_4^T H f_4 - 2f_5^T H f_5 - f_6^T H f_6$$

$$\Phi_{60} = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{T}_{10} + X_1 & Y_2 \\ * & \hat{T}_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \Phi_{61} = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{T}_{11} - \frac{1}{h} X_1 & \frac{1}{h} Y_1 - \frac{1}{h} Y_2 \\ * & \hat{T}_{21} + \frac{1}{h} X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{70} = -hE_4^T \hat{T}_{40} E_4, \Phi_{71} = -E_3^T \hat{T}_{30} E_3 - hE_4^T \hat{T}_{41} E_4 + E_4^T \hat{T}_{40} E_4, \Phi_{72} = -E_3^T \hat{T}_{31} E_3 + E_4^T \hat{T}_{41} E_4$$

$$\Phi_{80} = \text{sym}\{\Gamma_0 \times (e_{10} - A_i e_1 - A_{di} e_2)\}, \Gamma_0 = e_1^T K_1 + e_2^T K_2 + e_{10}^T K_3$$

$$T_1 = (1 - \dot{h}(t)) R_1 + \dot{h}(t) R_2 - 2h(t) \dot{h}(t) Z_{11} - \dot{h}(t) Z_1 + h_t H, T_2 = R_2 + 2h_t \dot{h}(t) Z_{22} + \dot{h}(t) Z_3$$

$$T_3 = (1 - \dot{h}(t)) R_3 + \dot{h}(t) R_4 - 2h(t) \dot{h}(t) M_{11} - \dot{h}(t) M_1, T_4 = R_4 + 2h_t \dot{h}(t) M_{22} + \dot{h}(t) M_3$$

$$T_{10} = (1 - \dot{h}(t)) R_1 + \dot{h}(t) R_2 - \dot{h}(t) Z_1 + hH, T_{11} = -2\dot{h}(t) Z_{11} - H$$

$$\begin{aligned}
 T_{20} &= R_2 + 2h\dot{h}(t)Z_{22} + \dot{h}(t)Z_3, T_{21} = -2\dot{h}(t)Z_{22}, T_{30} = (1 - \dot{h}(t))R_3 + \dot{h}(t)R_4 - \dot{h}(t)M_1 \\
 T_{31} &= -2\dot{h}(t)M_{11}, T_{40} = R_4 + 2h\dot{h}(t)M_{22} + \dot{h}(t)M_3, T_{41} = -2\dot{h}(t)M_{22} \\
 \hat{T}_{1\nu} &= \begin{bmatrix} T_{1\nu} & 0 & 0 \\ * & 3T_{1\nu} & 0 \\ * & * & 5T_{1\nu} \end{bmatrix}, \hat{T}_{2\nu} = \begin{bmatrix} T_{2\nu} & 0 & 0 \\ * & 3T_{2\nu} & 0 \\ * & * & 5T_{2\nu} \end{bmatrix}, \hat{T}_{3\nu} = \begin{bmatrix} T_{3\nu} & 0 \\ * & 3T_{3\nu} \end{bmatrix}, \hat{T}_{4\nu} = \begin{bmatrix} T_{4\nu} & 0 \\ * & 3T_{4\nu} \end{bmatrix} \\
 C_1 &= [hI_{n \times n} \ 0_{n \times n}], C_2 = [hI_{10n \times 10n} \ 0_{10n \times 10n}], J_1 = [hI_{n \times n} - 2I_{n \times n}], J_2 = [hI_{10n \times 10n} - 2I_{10n \times 10n}] \\
 F_1 &= \text{col}\{e_1, e_{10}, e_1, e_2, e_3, e_0\}, F_{20} = \text{col}\{e_2, e_4, e_1, e_2, e_3, e_0\}, F_{21} = \text{col}\{e_0, e_0, e_0, e_0, e_0, e_6\} \\
 F_3 &= \text{col}\{e_2, e_4, e_1, e_2, e_3, e_0\}, F_{40} = \text{col}\{e_3, e_5, e_1, e_2, e_3, he_7\}, F_{41} = \text{col}\{e_0, e_0, e_0, e_0, e_0, -e_7\} \\
 F_{50} &= \text{col}\{e_0, e_1 - e_2, e_0, e_0, e_0, e_0\}, F_{51} = \text{col}\{e_6, e_0, e_1, e_2, e_3, e_0\}, F_{52} = \text{col}\{e_0, e_0, e_0, e_0, e_0, e_8\} \\
 F_6 &= \text{col}\{e_0, e_0, e_{10}, (1 - \dot{h}(t))e_4, e_5, e_1\}, F_{70} = \text{col}\{he_7, e_2 - e_3, he_1, he_2, he_3, h^2e_9\} \\
 F_{71} &= \text{col}\{-e_7, e_0, -e_1, -e_2, -e_3, -2he_9\}, F_{72} = \text{col}\{e_0, e_0, e_0, e_0, e_0, e_9\} \\
 F_8 &= \text{col}\{e_0, e_0, e_{10}, (1 - \dot{h}(t))e_4, e_5, (1 - \dot{h}(t))e_2\} \\
 f_{10} &= \text{col}\{e_1, e_0, he_7, e_0, he_9\}, f_{11} = \text{col}\{e_0, e_6, -e_7, e_8, -e_9\} \\
 f_2 &= \text{col}\{e_{10}, e_1 - (1 - \dot{h}(t))e_2, (1 - \dot{h}(t))e_2 - e_3, e_1 - (1 - \dot{h}(t))e_6 - \dot{h}(t)e_8, (1 - \dot{h}(t))e_2 - e_7 + \dot{h}(t)e_9\} \\
 f_3 &= e_1 - e_6, f_4 = e_1 + 2e_6 - 6e_8, f_5 = e_2 - e_7, f_6 = e_2 + 2e_7 - 6e_9 \\
 E_1 &= \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 + e_2 - 2e_6 \\ e_1 - e_2 + 6e_6 - 12e_8 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} e_2 - e_3 \\ e_2 + e_3 - 2e_7 \\ e_2 - e_3 + 6e_7 - 12e_9 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_6 - 2e_8 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_7 - 2e_9 \end{bmatrix} \\
 ZM_1 &= \begin{bmatrix} -Z_2 & -\frac{1}{2}Z_1 \\ * & -Z_{11} \end{bmatrix}, ZM_2 = \begin{bmatrix} -Z_4 & -\frac{1}{2}Z_3 \\ * & -Z_{22} \end{bmatrix} \\
 ZM_3 &= \begin{bmatrix} -M_2 & -\frac{1}{2}M_1 \\ * & -M_{11} \end{bmatrix}, ZM_4 = \begin{bmatrix} -M_4 & -\frac{1}{2}M_3 \\ * & -M_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

证明 选取如式(5-17)形式的 L-K 泛函,

$$V(t) = \sum_{i=1}^5 V_i(t) \quad (5-17)$$

其中,

$$V_1(t) = \eta_1^T(t) P_h \eta_1(t)$$

$$V_2(t) = \int_{t-h(t)}^t \eta_2^T(t, s) Q_{1h} \eta_2(t, s) ds + \int_{t-h}^{t-h(t)} \eta_3^T(t, s) Q_{2h} \eta_3(t, s) ds$$

$$\begin{aligned}
 V_3(t) &= \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) (h^2(t)Z_{11} + h(t)Z_1 + Z_2) \dot{x}(s) ds + \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) (h_t^2 Z_{22} + h_t Z_3 + Z_4) \dot{x}(s) ds \\
 &\quad + \int_{-h(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-h}^{-h(t)} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta
 \end{aligned}$$

$$V_4(t) = \int_{t-h(t)}^t x^T(s)(h^2(t)M_{11} + h(t)M_1 + M_2)x(s)ds + \int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)(h_t^2 M_{22} + h_t M_3 + M_4)x(s)ds \\ + \int_{-h(t)}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s)R_3 x(s)dsd\theta + \int_{-h}^{-h(t)} \int_{t+\theta}^t x^T(s)R_4 x(s)dsd\theta$$

$$V_5(t) = \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \int_u^t \dot{x}^T(s)H\dot{x}(s)dsdud\theta$$

$$\text{且 } P_h = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t))P_i, \quad Q_{1h} = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t))Q_{1i} \text{ 以及 } Q_{2h} = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t))Q_{2i}.$$

其中 $V_1(t)$, $V_2(t)$ 的正定性可以通过 $P_i > 0$, $Q_{1i} > 0$ 和 $Q_{2i} > 0$ 来保证。 $V_3(t)$, $V_4(t)$ 和 $V_5(t)$ 的正定性可以通过式(5-7), $R_{\varsigma} > 0$ ($\varsigma = 1, 2, 3, 4$) 和 $H > 0$ 保证。接下来, 计算泛函的导数:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^5 \dot{V}_i(t) \quad (5-18)$$

其中,

$$\dot{V}_1(t) = \text{sym}\{\eta_1^T(t)P_h\dot{\eta}_1(t)\} + \eta_1^T(t)\dot{P}_h\eta_1(t) \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t))\xi^T(t)(\Phi_{10} + h(t)\Phi_{11})\xi(t) \quad (5-19)$$

$$\dot{V}_2(t) = \eta_2^T(t,t)Q_{1h}\eta_2(t,t) - (1-\dot{h}(t))\eta_2^T(t,h_t)Q_{1h}\eta_2(t,h_t) + \text{sym}\left\{\int_{t-h(t)}^t \eta_2^T(t,s)Q_{1h}\frac{\partial\eta_2(t,s)}{\partial t}ds\right\} \\ + \int_{t-h(t)}^t \eta_2^T(t,s)\dot{Q}_{1h}\eta_2(t,s)ds + (1-\dot{h}(t))\eta_3^T(t,h_t)Q_{2h}\eta_3(t,h_t) - \eta_3^T(t,t-h)Q_{2h}\eta_3(t,t-h) \\ + \text{sym}\left\{\int_{t-h}^{t-h(t)} \eta_3^T(t,s)Q_{2h}\frac{\partial\eta_3(t,s)}{\partial t}ds\right\} + \int_{t-h}^{t-h(t)} \eta_3^T(t,s)\dot{Q}_{2h}\eta_3(t,s)ds \\ \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t))\xi^T(t)(\Phi_{20}(\dot{h}(t)) + h(t)\Phi_{21}(\dot{h}(t)) + h^2(t)\Phi_{22}(\dot{h}(t)))\xi(t) \quad (5-20)$$

$$\dot{V}_3(t) = \dot{x}^T(t)[h^2(t)Z_{11} + h(t)Z_1 + Z_2 + h(t)R_1 + h_t R_2]\dot{x}(t) + (1-\dot{h}(t))\dot{x}^T(t-h(t))[-h^2(t)Z_{11} \\ - h(t)Z_1 - Z_2 + h_t^2 Z_{22} + h_t Z_3 + Z_4]\dot{x}(t-h(t)) + \dot{x}^T(t-h)[-h_t^2 Z_{22} - h_t Z_3 - Z_4]\dot{x}(t-h) \\ - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)((1-\dot{h}(t))R_1 + \dot{h}(t)R_2 - 2h(t)\dot{h}(t)Z_{11} - \dot{h}(t)Z_1)\dot{x}(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)T_2\dot{x}(s)ds \\ = \xi^T(t)(\Phi_{30}(\dot{h}(t)) + h(t)\Phi_{31}(\dot{h}(t)) + h^2(t)\Phi_{32}(\dot{h}(t)))\xi(t) \\ - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)((1-\dot{h}(t))R_1 + \dot{h}(t)R_2 - 2h(t)\dot{h}(t)Z_{11} - \dot{h}(t)Z_1)\dot{x}(s)ds \\ - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)T_2\dot{x}(s)ds \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4(t) &= x^T(t)[h^2(t)M_{11} + h(t)M_1 + M_2 + h(t)R_3 + h_t R_4]x(t) \\
 &\quad + (1 - \dot{h}(t))x^T(t - h(t))[-h^2(t)M_{11} - h(t)M_1 - M_2 + h_t^2 M_{22} + h_t M_3 + M_4]x(t - h(t)) \\
 &\quad + x^T(t - h)[-h_t^2 M_{22} - h_t M_3 - M_4]x(t - h) - \int_{t-h(t)}^t x^T(s)T_3 x(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)T_4 x(s)ds \\
 &= \xi^T(t)(\Phi_{40}(\dot{h}(t)) + h(t)\Phi_{41}(\dot{h}(t)) + h^2(t)\Phi_{42}(\dot{h}(t)))\xi(t) \\
 &\quad - \int_{t-h(t)}^t x^T(s)T_3 x(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)T_4 x(s)ds
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_5(t) &= \frac{h^2}{2} \dot{x}^T(t)H\dot{x}(t) - \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)H\dot{x}(s)dsd\theta - \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)H\dot{x}(s)dsd\theta \\
 &\quad - h_t \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)H\dot{x}(s)ds
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

运用引理 5-1 来计算 $V_5(t)$ 求导过程中产生的双重积分，可以得到如下形式的不等式：

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)H\dot{x}(s)dsd\theta \\
 & \leq -\frac{2}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)dsd\theta H \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)dsd\theta \\
 & \quad - \frac{4}{h^2(t)} \left(- \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)dsd\theta + \frac{3}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \int_s^t \dot{x}(v)dvdsd\theta \right)^T \\
 & \quad \times H \left(- \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)dsd\theta + \frac{3}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \int_s^t \dot{x}(v)dvdsd\theta \right) \\
 & = -2(x(t) - \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds)^T H (x(t) - \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds) \\
 & \quad - (x(t) + \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds - \frac{6}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)dsd\theta)^T H \\
 & \quad \times H (x(t) + \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds - \frac{6}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)dsd\theta) \\
 & \quad - \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)H\dot{x}(s)dsd\theta \\
 & \leq -\frac{2}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)dsd\theta H \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)dsd\theta \\
 & \quad - \frac{4}{(h-h(t))^2} \left(- \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}(s)dsd\theta + \frac{3}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} \dot{x}(v)dvdsd\theta \right)^T \\
 & \quad \times H \left(- \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}(s)dsd\theta + \frac{3}{h-h(t)} \int_{t-h(t)}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} \dot{x}(v)dvdsd\theta \right)
 \end{aligned} \tag{5-24}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2(x(t-h(t)) - \frac{1}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} x(s)ds)^T H(x(t-h(t)) - \frac{1}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} x(s)ds) \\
 &\quad - (x(t-h(t)) + \frac{2}{h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} x(s)ds - \frac{6}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}(s)dsd\theta)^T H \\
 &\quad \times H(x(t-h(t)) + \frac{2}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} x(s)ds - \frac{6}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_{\theta}^{t-h(t)} \dot{x}(s)dsd\theta)
 \end{aligned} \quad (5-25)$$

由式(5-23)-式(5-25)可知

$$\dot{V}_5(t) \leq \xi^T(t) \Phi_{50} \xi(t) - h_t \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) H \dot{x}(s) ds \quad (5-26)$$

将上述求导过程中产生的积分上下界相同的项合并，可以得到如下四个单积分项：

$$-\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) T_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) T_2 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h(t)}^t x^T(s) T_3 x(s) ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s) T_4 x(s) ds$$

其中，

$$\begin{aligned}
 T_1 &= (1 - \dot{h}(t))R_1 + \dot{h}(t)R_2 - 2h(t)\dot{h}(t)Z_{11} - \dot{h}(t)Z_1 + h_t H \\
 T_2 &= R_2 + 2h_t \dot{h}(t)Z_{22} + \dot{h}(t)Z_3 \\
 T_3 &= (1 - \dot{h}(t))R_3 + \dot{h}(t)R_4 - 2h(t)\dot{h}(t)M_{11} - \dot{h}(t)M_1 \\
 T_4 &= R_4 + 2h_t \dot{h}(t)M_{22} + \dot{h}(t)M_3
 \end{aligned}$$

要对上述单积分进行不等式放缩，首先需要保证其内部矩阵的正定性。由于 T_1, T_2, T_3, T_4 中的时滞和时滞导数是单调的，则不等式(5-14)可以保证 T_1, T_2, T_3, T_4 的正定性。接下来，利用引理 5-1 来估计 T_1 和 T_2 相关单积分项：

$$-\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) T_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) T_2 \dot{x}(s) ds \leq -\xi^T(t) \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} \hat{T}_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_t} \hat{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \xi(t) \quad (5-27)$$

由引理 5-2 可知，如果存在适当维数的对称矩阵 X_1 ， X_2 ，以及任意矩阵 Y_1 ， Y_2 满足式(5-15)，则式(5-28)成立。

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} \hat{T}_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_t} \hat{T}_2 \end{bmatrix} \leq -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} \hat{T}_1 + (1 - \frac{h(t)}{h})X_1 & \frac{h(t)}{h}Y_1 + (1 - \frac{h(t)}{h})Y_2 \\ * & \hat{T}_2 + \frac{h(t)}{h}X_2 \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

利用引理 5-1 来估计 T_3 和 T_4 相关单积分项，可以得到以下结果：

$$-\int_{t-h(t)}^t x^T(s)T_3x(s)ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} x^T(s)T_4x(s)ds \leq -\xi^T(t) \begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h(t)\hat{T}_3 & 0 \\ 0 & h_t\hat{T}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} \xi(t) \quad (5-29)$$

对于任意适当维数的矩阵 K_1 , K_2 , K_3 , 根据 T-S 模糊时滞系统(5-5)的形式，可以很容易地得到以下恒等式：

$$2 \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) \Gamma(t) [-\dot{x}(t) + A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t))] = 0 \quad (5-30)$$

其中 $\Gamma(t) = \xi^T(t)(e_1^T K_1 + e_2^T K_2 + e_{10}^T K_3)$ 。

通过联立式(5-18)-式(5-31)，可以得到以下不等式成立：

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) \xi^T(t) A_i \xi(t) \quad (5-31)$$

其中 $A_i = A_i^1 + h(t)A_i^1 + h^2(t)A_i^2$ 。

基于引理 5-4，不等式 $A_i < 0$ 成立的充要条件是存在斜对称矩阵 G_{2i} ，对称矩阵 D_{2i} 以及固定矩阵 C_2 和 J_2 使得不等式(5-16)成立，由此可知 $\dot{V}(t) < 0$ 。故系统(5-5)是渐近稳定的。证明完毕。

注 5.2 文献[64,122,123]提到时变时滞和时滞导数相关项可以有效地反映时滞信息，这种项在推导结果中的存在会降低保守性。文献[58]利用时滞乘积项来构造 L-K 泛函，其中只包含了时变时滞 $h(t)$ 一次型相关矩阵的单积分项。本章首次提出了二次时滞乘积单积分项方法来构造 L-K 泛函，因此，在本章的求导结果中，不仅会产生时滞和时滞导数相关项，而且会产生单积分时滞相关项，例如

$$\dot{h}(t) \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(t) Z_1 \dot{x}(t) ds, 2\dot{h}(t)h(t) \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(t) Z_{11} \dot{x}(t) ds。$$

注 5.3 为了使得泛函(5-11)保持正定，本章将负定性引理 5-4 转换为判断二次型多项式正定的充要条件，则可以保证 $h^2(t)Z_{11} + h(t)Z_1 + Z_2$, $h_t^2 Z_{22} + h_t Z_3 + Z_4$, $h^2(t)M_{11} + h(t)M_1 + M_2$ 和 $h_t^2 M_{22} + h_t M_3 + M_4$ 的正定性。

注 5.4 运用隶属度函数信息来研究 T-S 模糊系统的工作较少^[123]。不同于以前的工作，本章中用到的泛函使用了隶属度函数相关矩阵，使得本文的结果和其他没用到隶属度函数信息的文献的结果相比保守性较小。尽管这一方法会引入一些关于矩阵的限制条件，但这一方法会有效地降低保守性。

注 5-5 本章利用文献[126]中提出的方法对隶属度函数信息加以利用，这种方法

基于隶属度函数的基础信息，即隶属度函数之和为 1，其导数和为 0，具体形式为本章第二节所示。基于这种方法，构建出了一种新的隶属度函数相关时变矩阵，这种矩阵本身是正定的，在求导之后是负定的。这种方法会产生 2^{r-1} 种情况，最终结果为 $h = \min_{1 \leq q \leq 2^{r-1}} \{h_q\}$ 。举例来说，在例子 5-1 中 $r=2$ ，可以得到两种不同的时滞上界。在两种情况下，当 $\dot{\lambda}_1(t) < 0$ 时，时滞上界是 h_1 ；当 $\dot{\lambda}_1(t) \geq 0$ 时，时滞上界是 h_2 ，最终的时滞上界的结果是 $h = \min\{h_1, h_2\}$ 。

5.4 数值算例

这一节采用两个例子来验证本章提出的定理的有效性，并用图表的形式展示出相关例子的本章结果和其他文献中最大时滞上界的对比情况。通过对比参考文献中时滞上界，说明了本章所提出的理论结果的优势。

例 5-1 考虑如下广泛研究过的 T-S 模糊时滞系统^[126,129]：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(z(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t))] \quad (5-32)$$

其中，

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ A_{d1} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix} \\ \lambda_1(t) &= \frac{1}{1+e^{-2x_1(t)}}, \lambda_2(t) = 1 - \lambda_1(t) \end{aligned}$$

令 μ 取不同值，求取能保证系统稳定的时滞上界。首先，令 $\mu=0$ ，这意味着所研究的 T-S 模糊时滞系统转变成定常时滞系统。当 $\{P_1 > P_2, Q_{11} > Q_{12}, Q_{21} > Q_{22}\}$ 时， $h_1 = 3.7439$ ；当 $\{P_1 \leq P_2, Q_{11} \leq Q_{12}, Q_{21} \leq Q_{22}\}$ 时， $h_2 = 3.6446$ 。对比两个结果，取较小值，所以最大时滞上界是 $h = \min\{h_1, h_2\} = 3.6446$ 。然后，令 $\mu = 0.1$ ，这意味着研究的 T-S 模糊时滞系统是时变时滞系统。当 $\{P_1 > P_2, Q_{11} > Q_{12}, Q_{21} > Q_{22}\}$ 时， $h_1 = 3.3210$ ；当 $\{P_1 \leq P_2, Q_{11} \leq Q_{12}, Q_{21} \leq Q_{22}\}$ 时， $h_2 = 3.2464$ 。所以最大时滞上界 $h = \min\{h_1, h_2\} = 3.2464$ 。表 5-1 列举了应用本章方法与文献[123,127-129]所得的对比结果。很明显，应用本章所提出方法得到的结果要优于文献[123,127-129]。

系统的响应曲线如图 5-1 所示，此图展示出时变时滞 $h(t) = \frac{3.2464}{2} \sin(\frac{0.2}{3.2464}t) + \frac{3.2464}{2}$ 以及 $x_0(t) = [-1; 1.5]$ 时的状态响应曲线。

表 5-1 μ 取不同值时的最大时滞上界

 Table 5-1 The maximum upper delay bounds with different μ

$\mu \backslash$ 方法	文献[127]	文献[123]	文献[128]	文献[129]	定理 5-1
$\mu = 0$	1.9011	2.3269	2.5932	3.6167	3.6446
$\mu = 0.1$	1.7411	2.1190	2.3268	-	3.2364

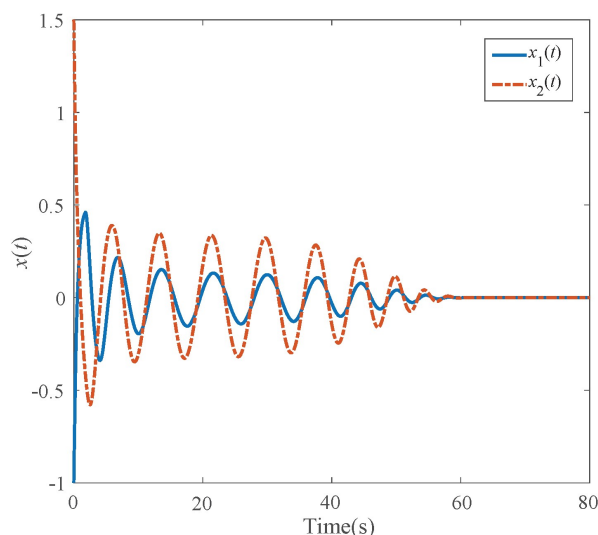


图 5-1 状态响应曲线

Fig. 5-1 The state responses of the system

例 5-2 考虑如下广泛研究过的 T-S 模糊时滞系统^[128,130-132]:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(z(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t-h(t))] \quad (5-33)$$

其中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.1 & 0.1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.9 & 0 \\ -0.2 & -1.1 \end{bmatrix}$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.1 \\ -0.8 & -0.9 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} -1.9 & 0 \\ -1.1 & -1.2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-2x_1(t)}}, \lambda_2(t) = 1 - \lambda_1(t)$$

表 5-2 展示了在 μ 取不同数值的情况下, 所能到的保证系统稳定的最大时滞上界, 同时与文献[128,130-132]进行比较的结果。从表 5-2 中可以看出, 同文献[128, 130-132]相比, 本章提出的方法可以得到更大的时滞上界。

表 5-2 μ 取不同值时的最大时滞上界

Table 5-2 The maximum upper delay bounds with different μ

$\mu \backslash$ 方法	文献[130]	文献[131]	文献[128]	文献[132]	定理 5-1
$\mu = 0$	3.82	4.37	5.5826	5.5973	5.6897
$\mu = 0.1$	3.09	3.41	4.2044	4.2928	4.4982
$\mu = 0.5$	1.95	1.95	2.0685	2.2571	2.9666

5.5 本章小结

本章考虑了带有时变时滞的 T-S 模糊系统的稳定性问题。通过构造具有二次时滞乘积单积分项且充分利用隶属度函数相关信息的 L-K 泛函，然后利用 Wirtinger 不等式，基于辅助方程的积分不等式以及矩阵相关的多项式不等式方法，得到了保守性更低的稳定性判据。最后，两个数值算例验证了本章提出方法的有效性。

第 6 章 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析与非脆弱采样控制

不同于第 5 章对 T-S 模糊时滞系统进行的稳定性分析,本章致力于采样控制下的 T-S 模糊时滞系统的稳定性与非脆弱控制问题。为了降低控制器中不确定性对系统性能的影响,以及降低系统的计算负担,本章提出了一种新型的非脆弱采样控制方案来处理 T-S 模糊时滞系统的稳定性与控制问题。首先,设计了非脆弱采样控制器,利用调整型双边环函数和隶属度相关矩阵构造了一种增强型 L-K 泛函。然后,利用 Wirtinger 不等式和增强型单积分不等式,得到具有较低保守性的稳定性判据。通过计算线性矩阵不等式,得到采样控制器增益。最后,通过数值仿真验证所提方案的优越性。

6.1 引言

T-S 模糊模型具有良好的系统转换功能,基于 T-S 模糊模型方法,可以将非线性系统转换为线性系统的加权求和的形式。和原先的非线性系统相比,新构造的线性子系统更易于分析。因此,基于 T-S 模糊模型,国内外科研工作者开展了大量的研究工作^[133-140]。例如,基于 T-S 模糊模型,文献[136]研究了具有部分不可测前件变量的 T-S 模糊系统的有限频率故障检测问题,其中前件变量由可测量前件变量和模糊模型的不可测量的前件变量的估计量构成。文献[138]研究了 T-S 模糊系统的数据丢失问题,提出了一种用辅助随机数列来描述数据在网络中的传输的方法。文献[139]提出了一种动态积分滑膜控制算法,其中并不包含传统的假设,即所有的线性子系统不需要共享一个共同输入矩阵。文献[140]研究了带有随机变量和时变时滞的 T-S 模糊系统的稳定性和镇定分析,并利用伯努利随机分布来构建时滞信息的位置。

另一方面,作为一种离散时间控制方案,采样控制具有许多优点,例如降低实施成本、可靠性高以及计算负担低^[141,142]。尤其是,当系统的输入信息是由零阶保持器传输的时候,连续系统的信号会转变为采样控制信号^[143-145]。因此,运用采样控制方法来分析 T-S 模糊系统是很有必要的。文献[144]首次提出了环函数法,继而

文献[145]提出了一种新型的采样双边环函数方法用来构造 L-K 泛函，这种新型环函数和其他传统的 L-K 泛函相比具有独特的优点。由于这种环函数形式的 L-K 泛函的松弛矩阵的正负定性没有要求，因此基于这种新型泛函，可以推导出保守性更低的结果。文献[146]研究了系统的 H_∞ 稳定性，其中数据丢失和传输时延转化成了零阶保持器的更新间隔。文献[147]构造了一种误差动态系统来处理 T-S 模糊神经网络。文献[148]利用恒等式方法和环函数方法研究了系统的 H_∞ 稳定性，并运用到实际中的电力系统中，验证了其有效性。上述的工作都聚焦于使得采样间隔变得更长，采样的间隔时间增大，意味着会降低系统的通讯压力以及降低控制器的计算负担。因此，降低保守性是一个重要的控制目标。考虑到时滞现象常常会使系统的性能变差，T-S 模糊时滞系统的稳定性分析与控制受到广泛关注^[149-151]。然而，以上文献没有将 T-S 模糊系统的隶属函数信息加以利用，目前仍然存在改进的空间。

除此之外，由于不确定性因素在现实中广泛存在，例如转换不精确以及有限分辨率测量。因此，许多学者采用非脆弱控制机制对系统进行分析。在文献[152]中，一些学者研究了不确定性因素对系统的影响，得到的结果是控制器中微小的扰动也有可能引起系统不稳定。文献[153]利用非脆弱控制器，研究了一类具有马尔可夫跳变参数的奇异摄动系统的控制问题。文献[154]利用非脆弱控制器，研究了具有输入不确定性的时滞混沌系统的控制问题。文献[155]利用非脆弱控制器，研究了具有线性时变子系统的周期分段系统的控制问题。基于这些研究发现，在针对控制器设计以及降低保守性的控制目标这些问题上，目前仍存在提升空间。

受上述提到的文献的启发，本章提出了非脆弱采样控制器来处理 T-S 模糊时滞系统的控制问题。通过将双边环函数和隶属度函数相关矩阵相联系起来，构造出来的 L-K 泛函可以推导到保守性更低的新颖稳定性判据。本章的贡献总结为以下几点。首先，基于隶属度函数方程和双边环函数，设计了一种新型的 L-K 泛函，其中包含了更多的信息，不仅包括了当前状态信息，也包括了时滞状态信息。其次，通过求解线性矩阵不等式，得到非脆弱控制器增益，使得控制器存在扰动的前提下，所得控制器依然可以使得 T-S 模糊时滞系统保持稳定。

6.2 T-S 模糊时滞系统模型及相关引理

考虑如下一类 T-S 模糊时滞系统模型：

模糊规则 i ：如果 $\theta_1(t)$ 是 M_{i1} ，...， $\theta_j(t)$ 是 M_{ip} ，那么

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_i u(t) \quad (6-1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 代表状态变量； $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是系统矩阵； τ 是定常时滞； $u(t)$ 是控制器； $\theta_j(t)$ ($j=1, \dots, p$) 是前件变量； M_{ij} ($i=1, \dots, r; j=1, \dots, p$) 是先行模糊集； r 是模糊规则的个数； p 是前件变量的数量。

基于模糊推理方法，系统(6-1)可以转换如下形式：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) (A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_i u(t)) \quad (6-2)$$

其中，

$$\gamma_i(\theta(t)) = \frac{\omega_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(t))}, \omega_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\theta_j(t)) \quad (6-3)$$

$\gamma_i(\theta(t))$ 指的是归一化隶属度函数； $\omega_i(z(t))$ 是所有和第 i 条模糊规则相关的隶属度函数乘积，表示第 i 条模糊规则被激活的概率； $M_{ij}(\theta_j(t))$ 指的是前件变量 $\theta_j(t)$ 在对应模糊集 M_{ij} 中的隶属度。假设对于 $t \geq 0$ ，存在 $\omega_i(\theta(t)) > 0$ ，那么存在以下关系：

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) = 1, \sum_{i=1}^r \dot{\gamma}_i(\theta(t)) = 0 \quad (6-4)$$

假设系统(6-2)由基于采样的网络进行传输，系统的状态反馈信号通过采样环节传输到控制器，控制器信号由零阶保持器产生，其中采样时刻为以下形式：

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty \quad (6-5)$$

定义 $0 < h_k = t_{k+1} - t_k \leq h$ ，其中 $k \in \mathbb{N}$ 。考虑控制器中存在额外的扰动，本章设计如下非脆弱采样控制器：

控制器规则 j ：如果 $\theta_1(t)$ 是 M_{i1} ，...， $\theta_j(t)$ 是 M_{ip} ，那么

$$u(t) = (K_j + \Delta K_j) x(t_k) \quad (6-6)$$

其中 $t_k \leq t < t_{k+1}$ ， K_j 是设计的控制器参数， ΔK_j 表示可能出现的控制器扰动，其假设如下：

$$\Delta K_j = M_j S_j(t) H_j \quad (6-7)$$

其中 M_j ， H_j 是已知矩阵； $S_j(t)$ 是未知矩阵并满足 $S_j^T(t) S_j(t) \leq I$ 。本文考虑采样控制，可得到控制器如下所示：

$$u(t) = \sum_{j=1}^r \gamma_j(\theta(t_k)) [(K_j + \Delta K_j) x(t_k)] \quad (6-8)$$

将(6-8)式代入系统(6-2)，可得到如下闭环系统：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i(\theta(t)) \gamma_j(\theta(t_k)) [A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i (K_j + \Delta K_j) x(t_k)] \quad (6-9)$$

注 6.1 本章研究了受不确定性影响的 T-S 模糊时滞系统的非脆弱采样控制问题, 这种控制方法不需要持续更新系统的状态信息, 不仅节省了通信带宽, 而且允许可能会发生的控制器增益扰动。文献[156]考虑了受时滞影响的采样控制器, 然而并未考虑控制器可能受到扰动的情况。当不考虑扰动时, 控制器的形式和文献[157-159]中相同。

接下来, 给出相关引理, 会在后面的推导过程中用到。

引理 6-1^[42] (Wirtinger 不等式) 令 $x(s)$ 为可导向量在 $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 以及给定矩阵 $R \in \mathbb{S}_n^+$, 那么存在式(6-10)成立。

$$(b-a) \int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \geq \phi_1^T R \phi_1 + 3\phi_2^T R \phi_2 \quad (6-10)$$

其中 $\phi_1 = x(b) - x(a)$, $\phi_2 = x(b) + x(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b x(s) ds$ 。

引理 6-2^[160] 令 $x(s)$ 为任意的可导向量在 $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 以及给定矩阵 $R \in \mathbb{S}_n^+$, 那么对于任意矩阵 $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 以及任意向量 $\xi(t) \in \mathbb{R}^k$, 存在式(6-11)成立。

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq 2\xi(t)^T (N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2) \xi(t) + (b-a) \xi(t)^T (N_1 R^{-1} N_1^T + N_2 R^{-1} N_2^T) \xi(t) \quad (6-11)$$

引理 6-3^[126] 对于隶属度函数相关矩阵 $\mathbb{P}_h = \sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) P_i$, $\mathbb{Q}_h = \sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) Q_i$,

$\mathbb{T}_h = \sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) T_i$ 以及 $\mathbb{R}_{1h} = \sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) R_{1i}$, 其中 $P_i > 0$, $Q_i > 0$, $T_i > 0$ 以及 $R_{1i} > 0$,

存在隶属度函数相关矩阵的导数 $\dot{\mathbb{P}}_h \leq 0$, $\dot{\mathbb{Q}}_h \leq 0$, $\dot{\mathbb{T}}_h \leq 0$ 以及 $\dot{\mathbb{R}}_{1h} \leq 0$, 如果满足切换规则(6-12),

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_j(\theta(t)) < 0 \text{ 时, } P_j - P_r > 0, Q_j - Q_r > 0, T_j - T_r > 0, R_{1j} - R_{1r} > 0 \\ \dot{\gamma}_j(\theta(t)) \geq 0 \text{ 时, } P_j - P_r \leq 0, Q_j - Q_r \leq 0, T_j - T_r \leq 0, R_{1j} - R_{1r} \leq 0 \end{cases} \quad (6-12)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, r-1$, 且存在 2^{r-1} 种分类方式。

引理 6-4^[144] 令 T_1 和 T_2 为两个正常数且 $T_1 \leq T_2$, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, t_k 和 t_{k+1} 为两

个连续的采样时间点，以及 $T_1 \leq t_{k+1} - t_k \leq T_2$ 。连续可微函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ，对于正定标量 $\mu_1 < \mu_2$ 和 p ，使得下式成立

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \mu_1 |x|^p \leq V(x) \leq \mu_2 |x|^p$$

那么下面的两种说法是等价的：

- (1) $\Delta V(k) = V(x(t_{k+1})) - V(x(t_k)) < 0$ 。
- (2) 存在连续可导函数 $\mathcal{V}_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\mathcal{V}_0(x(t_{k+1})) = \mathcal{V}_0(x(t_k))$$

且对于任意 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 存在

$$\dot{W}(x(t)) = \dot{V}(x(t)) + \dot{\mathcal{V}}_0(x(t)) < 0$$

以上说法可用于采样控制系统的稳定性分析中，且两种说法中的任一说法成立，则该系统是渐近稳定的。

注 6.2 文献[144]首次提出了环函数法，这种环函数充分利用了采样系统的系统状态，改善了现有文献中要求 L-K 泛函单调递减的要求，只限制 L-K 泛函在采样点是递减的。基于文献[144]的工作，文献[145]提出了一种新型的双边环函数满足文献[144]中的条件。这种新型双边环函数充分地利用了 t_k 到 t 和 t 到 t_{k+1} 的时间间隔的状态信息，并得到了保守性更低的稳定性条件。

6.3 主要结果

为方便起见，向量和矩阵的命名如下：

$$e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (11-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 11$$

$$\bar{e}_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (6-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 6$$

$$e_0 = 0_{n \times 11n}, \quad \bar{e}_0 = 0_{n \times 6n}$$

$$\eta_1(t) = \text{col}\{x(t), x(t-\tau), \int_{t-\tau}^t x(s)ds\}, \quad \eta_2(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t)\}$$

$$v_1(t) = \frac{1}{t-t_k} \int_{t_k}^t x(s)ds, \quad v_2(t) = \frac{1}{t_{k+1}-t} \int_t^{t_{k+1}} x(s)ds, \quad v_3(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t x(s)ds$$

$$v_5(t) = \text{col}\{x(t) - x(t_k), x(t-\tau) - x(t_k - \tau)\}$$

$$v_6(t) = \text{col}\{x(t_{k+1}) - x(t), x(t_{k+1} - \tau) - x(t - \tau)\}$$

$$\chi_1(t) = \text{col}\{(t_{k+1} - t)v_5(t), (t - t_k)v_6(t)\}$$

$$\chi_2(t) = \text{col}\{v_5(t), v_6(t)\}$$

$$\chi_3(t) = \text{col}\{x(t_k), x(t_{k+1}), x(t_k - \tau), x(t_{k+1} - \tau)\}$$

$$\chi_4(t) = \text{col}\{\chi_3(t), v_1(t), v_2(t)\}$$

$$\xi(t) = \text{col}\{x(t), x(t - \tau), x(t_k), x(t_{k+1}), x(t_k - \tau), x(t_{k+1} - \tau), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \tau), v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$$

本节通过采样控制方法和 Lyapunov 稳定性理论来分析 T-S 模糊时滞系统(6-9)稳定性问题。下面, 给出令 T-S 模糊时滞系统(6-9)保持稳定的条件。

6.3.1 稳定性分析

定理 6-1 对于给定的标量 h , τ 以及控制增益矩阵 K_{pj} ($p=1, \dots, 2^{r-1}$), 如果存在适当维数对称矩阵 $P_i > 0$, $Q_i > 0$, $T_i > 0$, $R_{1i} > 0$, $R_2 > 0$, $R_3 > 0$, $R_4 > 0$, Z , 任意矩阵 G_i , Y_1 , Y_2 , X , N_{ij}^t ($t=1, 2, 3, 4$) 以及 $\mu > 0$ 满足式(6-13)-式(6-16), 那么 T-S 模糊时滞系统(6-9)是渐近稳定的。

$$\dot{\mathbb{P}}_h \leq 0, \dot{\mathbb{Q}}_h \leq 0, \dot{\mathbb{T}}_h \leq 0, \dot{\mathbb{R}}_{1h} \leq 0 \quad (6-13)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij}^0 & \Gamma_0 B_i M_j \\ * & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-14)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij}^0 + h\Xi_{ij}^{21} & hN_{ij}^3 & hN_{ij}^4 & \Gamma_0 B_i M_j \\ * & -hR_2 & 0 & 0 \\ * & 0 & -3hR_2 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-15)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij}^0 + h\Xi_{ij}^{31} & hN_{ij}^1 & hN_{ij}^2 & \Gamma_0 B_i M_j \\ * & -hR_{1i} & 0 & 0 \\ * & 0 & -3hR_{1i} & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-16)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Xi_{ij}^0 = & \text{sym}\{\Phi_1^T P_i \Phi_2 + \Phi_8^T Y_1 \Phi_6 + \Phi_8^T Y_2 \Phi_7 + \Phi_{10}^T X \Phi_4^2 - \Phi_4^{1T} X \Phi_{10}\} + \Phi_3^T Q_i \Phi_3 - \Phi_4^T Q_i \Phi_4 \\ & + \tau^2 e_7^T T_i e_7 - \Phi_0^T T_i \Phi_0 - 3\Phi_0^{1T} T_i \Phi_0^1 + \text{sym}\{N_{ij}^1 F_1 + N_{ij}^2 F_2 + N_{ij}^3 F_3 + N_{ij}^4 F_4\} \\ & + h^2 e_7^T R_3 e_7 - F_1^T R_3 F_1 - 3F_2^T R_3 F_2 - 6F_2^T R_3 (2e_9 - 2e_1) - h^2 e_7^T R_4 e_7 \\ & + F_3^T R_4 F_3 + 3F_4^T R_4 F_4 - 6F_4^T R_4 (2e_1 - 2e_{10}) + \mu(H_j e_3)^T H_j e_3 + \Gamma_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Xi_{ij}^{21} &= \text{sym}\{\Phi_5^{1T} Y_1 \Phi_6 + \Phi_5^{1T} Y_2 \Phi_7 + \Phi_8^{1T} Y_1 \Phi_9 + \Phi_{12}^{1T} Z \Phi_{11}\} + \Phi_{11}^T Z \Phi_{11} \\
 &\quad + e_7^T R_1 e_7 + 2F_3^T R_4 e_7 - 6F_4^T R_4 e_7 \\
 \Xi_{ij}^{31} &= \text{sym}\{\Phi_5^{2T} Y_1 \Phi_6 + \Phi_5^{2T} Y_2 \Phi_7 + \Phi_8^{2T} Y_1 \Phi_9 + \Phi_{12}^{2T} Z \Phi_{11}\} - \Phi_{11}^T Z \Phi_{11} \\
 &\quad + e_7^T R_2 e_7 - 2F_1^T R_3 e_7 - 6F_2^T R_3 e_7 \\
 \Gamma_{ij} &= \text{sym}\{\Gamma_0(-e_7 + A_i e_1 + A_{di} e_2 + B_i K_{pj} e_3)\} \\
 \Gamma_0 &= e_1^T G_1 + e_2^T G_2 + e_3^T G_3 + e_7^T G_4 \\
 \Phi_0 &= e_1 - e_2, \Phi_0^1 = e_1 + e_2 - 2e_{11} \\
 \Phi_1 &= \text{col}\{e_1, e_2, \tau e_{11}\}, \Phi_2 = \text{col}\{e_7, e_8, e_1 - e_2\} \\
 \Phi_3 &= \text{col}\{e_1, e_7\}, \Phi_4 = \text{col}\{e_2, e_8\} \\
 \Phi_4^1 &= \text{col}\{e_1 - e_3, e_2 - e_5\}, \Phi_4^2 = \text{col}\{e_4 - e_1, e_6 - e_2\} \\
 \Phi_5^1 &= \text{col}\{e_7, e_8, e_0, e_0\}, \Phi_5^2 = \text{col}\{e_0, e_0, -e_7, -e_8\} \\
 \Phi_6 &= \text{col}\{\Phi_4^1, \Phi_4^2\}, \Phi_7 = \text{col}\{e_3, e_4, e_5, e_6\} \\
 \Phi_8 &= \text{col}\{-\Phi_4^1, \Phi_4^2\}, \Phi_8^1 = \text{col}\{\Phi_4^1, e_0, e_0\} \\
 \Phi_8^2 &= \text{col}\{e_0, e_0, \Phi_4^2\}, \Phi_9 = \Phi_5^1 + \Phi_5^2 \\
 \Phi_{10} &= \text{col}\{e_7, e_8\}, \Phi_{11} = \text{col}\{\Phi_7, e_9, e_{10}\} \\
 \Phi_{12}^1 &= \text{col}\{e_0, e_0, e_0, e_0, e_1 - e_9, e_0\} \\
 \Phi_{12}^2 &= \text{col}\{e_0, e_0, e_0, e_0, e_{10} - e_1\} \\
 F_1 &= e_1 - e_3, F_2 = e_1 + e_3 - 2e_9 \\
 F_3 &= e_4 - e_1, F_4 = e_4 + e_1 - 2e_{10}
 \end{aligned}$$

证明 针对 T-S 模糊时滞系统(6-9), 设计泛函如式(6-17)所示, 该泛函包含了基于 Wirtinger 不等式的泛函项 $V_4(t)$ 。

$$V(t) = \sum_{i=1}^4 V_i(t) \quad (6-17)$$

其中

$$V_1(t) = \eta_1^T(t) \mathbb{P}_h \eta_1(t) + \int_{t-\tau}^t \eta_2^T(s) \mathbb{Q}_h \eta_2(s) ds + \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{T}_h \dot{x}(s) ds d\theta \quad (6-18)$$

$$V_2(t) = 2\chi_1^T(t)(Y_1 \chi_2(t) + Y_2 \chi_3(t)) + 2v_5^T(t) X v_6(t) + (t_{k+1} - t)(t - t_k) \chi_4^T(t) Z \chi_4(t) \quad (6-19)$$

$$V_3(t) = (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{R}_{1h} \dot{x}(s) ds - (t - t_k) \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \quad (6-20)$$

$$\begin{aligned} V_4(t) = & h^2 \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds - (t - t_k) \psi_1^T(t) R_3 \psi_1(t) - 3(t - t_k) \psi_2^T(t) R_3 \psi_2(t) \\ & + h^2 \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_4 \dot{x}(s) ds - (t_{k+1} - t) \psi_3^T(t) R_4 \psi_3(t) - 3(t_{k+1} - t) \psi_4^T(t) R_4 \psi_4(t) \end{aligned} \quad (6-21)$$

其中,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= x(t) - x(t_k), \psi_2(t) = x(t) + x(t_k) - \frac{2}{t - t_k} \int_{t_k}^t x(s) ds \\ \psi_3(t) &= x(t_{k+1}) - x(t), \psi_4(t) = x(t_{k+1}) + x(t) - \frac{2}{t_{k+1} - t} \int_t^{t_{k+1}} x(s) ds \end{aligned}$$

矩阵 \mathbb{P}_h , \mathbb{Q}_h , \mathbb{T}_h 和 \mathbb{R}_{1h} 的具体形式在引理 6-3 中给出。

接下来, 对 L-K 泛函的正定性进行判定。 $V_1(t)$ 的正定性可以由 $\mathbb{P}_h > 0$, $\mathbb{Q}_h > 0$ 和 $\mathbb{T}_h > 0$ 保证。 $V_2(t)$ 和 $V_3(t)$ 是环函数, 满足 $V_2(t_k) + V_3(t_k) = V_2(t_{k+1}) + V_3(t_{k+1})$, 不要求其正定性。 $V_4(t)$ 的正定性可以由引理 6-1 保证。

基于切换规则(6-12), 控制器(6-8)可以转换成如下形式:

$$u_p(t) = \sum_{j=1}^r \gamma_j(\theta(t_k)) [(K_{pj} + \Delta K_j) x(t_k)] \quad (6-22)$$

其中 $p = 1, \dots, 2^{r-1}$, 接下来对泛函进行求导得

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) \quad (6-23)$$

其中,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq 2\eta_1^T(t) \mathbb{P}_h \dot{\eta}_1(t) + \eta_2^T(t) \mathbb{Q}_h \eta_2(t) - \eta_2^T(t - \tau) \mathbb{Q}_h \eta_2(t - \tau) + \tau^2 \dot{x}^T(t) \mathbb{T}_h \dot{x}(t) \\ &\quad - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{T}_h \dot{x}(s) ds \\ \dot{V}_2(t) &= 2\dot{\chi}_1^T(t) (Y_1 \chi_2(t) + Y_2 \chi_3(t)) + 2\chi_1^T(t) (Y_1 \dot{\chi}_2(t) + Y_2 \dot{\chi}_3(t)) + 2\dot{v}_5^T(t) X v_6(t) + 2v_5^T(t) X \dot{v}_6(t) \\ &\quad - (t - t_k) \chi_4^T(t) Z \chi_4(t) + (t_{k+1} - t) \chi_4^T(t) Z \chi_4(t) + 2(t_{k+1} - t)(t - t_k) \dot{\chi}_4^T(t) Z \chi_4(t) \\ \dot{V}_3(t) &\leq (t_{k+1} - t) \dot{x}^T(t) \mathbb{R}_{1h} \dot{x}(t) - \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{R}_{1h} \dot{x}(s) ds + (t - t_k) \dot{x}^T(t) R_2 \dot{x}(t) - \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\ \dot{V}_4(t) &= h^2 \dot{x}^T(t) R_3 \dot{x}(t) - \psi_1^T(t) R_3 \psi_1(t) - 2(t - t_k) \psi_1^T(t) R_3 \dot{x}(t) - 3\psi_2^T(t) R_3 \psi_2(t) \\ &\quad - 6(t - t_k) \psi_2^T(t) R_3 \dot{\psi}_2(t) - h^2 \dot{x}^T(t) R_4 \dot{x}(t) + \psi_3^T(t) R_4 \psi_3(t) + 2(t_{k+1} - t) \psi_3^T(t) R_3 \dot{x}(t) \\ &\quad + 3\psi_4^T(t) R_4 \psi_4(t) - 6(t_{k+1} - t) \psi_4^T(t) R_4 \dot{\psi}_4(t) \end{aligned}$$

将上述不等式求导结果进行合并，可以很容易得到式(6-24)的结果。

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) \leq & \xi^T(t) \left(\text{sym}\{\Phi_1^T \mathbb{P}_h \Phi_2 + \Phi_8^T Y_1 \Phi_6 + \Phi_8^T Y_2 \Phi_7 + \Phi_{10}^T X \Phi_4^2 - \Phi_4^{1T} X \Phi_{10}\} \right. \\
 & + \Phi_3^T \mathbb{Q}_h \Phi_3 - \Phi_4^T \mathbb{Q}_h \Phi_4 + \tau^2 e_7^T \mathbb{T}_h e_7 + h^2 e_7^T R_3 e_7 - F_1^T R_3 F_1 - 3F_2^T R_3 F_2 \\
 & - 6F_2^T R_3 (2e_9 - 2e_1) - h^2 e_7^T R_4 e_7 + F_3^T R_4 F_3 + 3F_4^T R_4 F_4 - 6F_4^T R_4 (2e_1 - 2e_{10}) \\
 & + (t_{k+1} - t) (\text{sym}\{\Phi_5^{1T} Y_1 \Phi_6 + \Phi_5^{1T} Y_2 \Phi_7 + \Phi_8^{1T} Y_1 \Phi_9 + \Phi_{12}^{1T} Z \Phi_{11}\} + \Phi_{11}^T Z \Phi_{11} \\
 & + e_7^T \mathbb{R}_{1h} e_7 + 2F_3^T R_4 e_7 - 6F_4^T R_4 e_7) \\
 & + (t - t_k) (\text{sym}\{\Phi_5^{2T} Y_1 \Phi_6 + \Phi_5^{2T} Y_2 \Phi_7 + \Phi_8^{2T} Y_1 \Phi_9 + \Phi_{12}^{2T} Z \Phi_{11}\} \\
 & - \Phi_{11}^T Z \Phi_{11} + e_7^T R_2 e_7 - 2F_1^T R_3 e_7 - 6F_2^T R_3 e_7) \Big) \xi(t) \\
 & - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{T}_h \dot{x}(s) ds - \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{R}_{1h} \dot{x}(s) ds - \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds
 \end{aligned} \tag{6-24}$$

利用引理 6-1 和引理 6-2，可以将单积分不等式进行如下估计：

$$\begin{aligned}
 & -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{T}_h \dot{x}(s) ds \\
 \leq & - \begin{bmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2 \int_{t-\tau}^t x(s) ds}{\tau} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{T}_h & 0 \\ 0 & 3\mathbb{T}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2 \int_{t-\tau}^t x(s) ds}{\tau} \end{bmatrix} \\
 = & \xi^T(t) (-\Phi_0^T \mathbb{T}_h \Phi_0 - 3\Phi_0^{1T} \mathbb{T}_h \Phi_0^1) \xi(t)
 \end{aligned} \tag{6-25}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) \mathbb{R}_{1h} \dot{x}(s) ds \\
 \leq & (t - t_k) \xi(t)^T (N_{ij}^1 \mathbb{R}_{1h}^{-1} N_{ij}^{1T} + \frac{1}{3} N_{ij}^2 \mathbb{R}_{1h}^{-1} N_{ij}^{2T}) \xi(t) + \xi(t)^T \text{sym}\{N_{ij}^1 F_1 + N_{ij}^2 F_2\} \xi(t) \\
 = & \xi^T(t) \Theta_1(t) \xi(t)
 \end{aligned} \tag{6-26}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
 \leq & (t_{k+1} - t) \xi(t)^T (N_{ij}^3 R_2^{-1} N_{ij}^{3T} + \frac{1}{3} N_{ij}^4 R_2^{-1} N_{ij}^{4T}) \xi(t) + \xi(t)^T \text{sym}\{N_{ij}^3 F_3 + N_{ij}^4 F_4\} \xi(t) \\
 = & \xi^T(t) \Theta_2(t) \xi(t)
 \end{aligned} \tag{6-27}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 \Theta_1(t) &= (t - t_k) (N_{ij}^1 \mathbb{R}_{1h}^{-1} N_{ij}^{1T} + \frac{1}{3} N_{ij}^2 \mathbb{R}_{1h}^{-1} N_{ij}^{2T}) + \text{sym}\{N_{ij}^1 F_1 + N_{ij}^2 F_2\} \\
 \Theta_2(t) &= (t_{k+1} - t) (N_{ij}^3 R_2^{-1} N_{ij}^{3T} + \frac{1}{3} N_{ij}^4 R_2^{-1} N_{ij}^{4T}) + \text{sym}\{N_{ij}^3 F_3 + N_{ij}^4 F_4\}
 \end{aligned}$$

对于任意适当维数的矩阵 G_1 , G_2 , G_3 和 G_4 , 根据闭环系统结构(6-9), 可以很容易得到恒等式(6-28)。

$$2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i(\theta(t)) \gamma_j(\theta(t_k)) \Gamma(t) [-\dot{x}(t) + A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i(K_{pj} + \Delta K_j)x(t_k)] = 0 \quad (6-28)$$

其中 $\Gamma(t) = x^T(t)G_1 + x^T(t-\tau)G_2 + x^T(t_k)G_3 + \dot{x}^T(t)G_4$ 。

利用引理 1-4，可以得到如果存在标量 $\mu > 0$ ，则以下式(6-29)成立。

$$\begin{aligned} & 2\Gamma(t)B_i\Delta K_j x(t_k) \\ &= 2\Gamma(t)B_i M_j S_j(t) H_j x(t_k) \\ &\leq \mu^{-1} \Gamma(t) B_i M_j M_j^T B_i^T \Gamma^T(t) + \mu (H_j x(t_k))^T H_j x(t_k) \end{aligned} \quad (6-29)$$

联立式(6-23)-(6-29)，可以得到如下泛函求导结果：

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i(\theta(t)) \gamma_j(\theta(t_k)) \xi^T(t) \tilde{\Xi}_{ij} \xi(t) \quad (6-30)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{ij} &= \Xi_{ij}^1 + (t_{k+1} - t) \Xi_{ij}^2 + (t - t_k) \Xi_{ij}^3 \\ \Xi_{ij}^1 &= \Xi_{ij}^0 + \mu^{-1} \Gamma(t) B_i M_j M_j^T B_i^T \Gamma^T(t) \\ \Xi_{ij}^2 &= \Xi_{ij}^{21} + N_{ij}^3 R_2^{-1} N_{ij}^{3T} + \frac{1}{3} N_{ij}^4 R_2^{-1} N_{ij}^{4T} \\ \Xi_{ij}^3 &= \Xi_{ij}^{31} + N_{ij}^1 R_{1i}^{-1} N_{ij}^{1T} + \frac{1}{3} N_{ij}^2 R_{1i}^{-1} N_{ij}^{2T} \end{aligned}$$

经过简单地变换，可以得到如下形式：

$$\tilde{\Xi}_{ij} = \frac{t_{k+1} - t}{h_k} (\Xi_{ij}^1 + h_k \Xi_{ij}^2) + \frac{t - t_k}{h_k} (\Xi_{ij}^1 + h_k \Xi_{ij}^3) \quad (6-31)$$

基于凸组合方法，可以得到 $\tilde{\Xi}_{ij} < 0$ 成立的条件为式(6-32)和式(6-33)成立。

$$\Xi_{ij}^1 + h_k \Xi_{ij}^2 < 0 \quad (6-32)$$

$$\Xi_{ij}^1 + h_k \Xi_{ij}^3 < 0 \quad (6-33)$$

由于 $0 < h_k = t_{k+1} - t_k \leq h$ ，可得式(6-32)和式(6-33)成立的条件式(6-34)-式(6-36)成立。

$$\Xi_{ij}^1 < 0 \quad (6-34)$$

$$\Xi_{ij}^1 + h \Xi_{ij}^2 < 0 \quad (6-35)$$

$$\Xi_{ij}^1 + h \Xi_{ij}^3 < 0 \quad (6-36)$$

以上不等式(6-34)-式(6-36)可以由式(6-14)-式(6-16)保证, 因此 $\dot{V}(t) < 0$ 成立, 由引理 6-4 可知 T-S 模糊时滞系统(6-9)是渐近稳定的。证明完毕。

注 6.3 由于通讯资源是有限的, 因而减少 T-S 模糊系统的数据传输量是非常有必要的。因此, 本章设计了非脆弱采样控制器来探讨 T-S 模糊系统的镇定问题, 该采样控制器能够有效地节约系统的通讯资源。值得注意的是, 在实际应用中, 硬件故障、执行器退化、复杂环境的不确定性等多种因素都会在一定程度上引起控制器的波动。

注 6.4 针对采样控制系统, 文献[145]提出了一种新型的双边环函数型泛函来进行稳定性分析, 其中松弛矩阵不要求是正定的。受文献[145]启发, 本章构造了增强型泛函, 这种增强型泛函不仅包含当前状态信息 $x(t_k)$, $x(t_{k+1})$, 也包含时滞信息 $x(t_k - \tau)$, $x(t_{k+1} - \tau)$, 可以有效地降低结果的保守性。目前运用隶属度函数信息研究 T-S 模糊系统的工作较少^[150,154,161], 不同于以往的工作, 本章中用到的泛函使用了隶属度函数相关矩阵方法, 并吸取了双边环函数的优点。尽管这一方法会引入一些对于矩阵的限制条件, 但是可以有效地降低保守性。

6.3.2 采样控制器设计

定理 6-1 通过采样控制研究了 T-S 模糊时滞系统的稳定性问题, 稳定性分析为控制器设计奠定了基础。值得注意的是, 定理 6-1 中采样控制器的参数是提前给定的。假如控制增益矩阵未知, 此时定理 6-1 给出的稳定性判据不再是可以求取的线性矩阵不等式。因此需要做出相应的变换, 对控制器的参数进行求解, 据此我们有以下定理 6-2。

定理 6-2 对于给定的标量 h , τ 和 $\rho_v (v=1,2,3)$, 如果存在标量 $\mu > 0$ 以及适当维数的对称矩阵 $\bar{P}_i > 0$, $\bar{Q}_i > 0$, $\bar{T}_i > 0$, $\bar{R}_{1i} > 0$, $\bar{R}_2 > 0$, $\bar{R}_3 > 0$, $\bar{R}_4 > 0$, \bar{Z} 以及任意适当维数矩阵 G , $\bar{K}_{pj} (p=1,\dots,2^{r-1})$, \bar{Y}_1 , \bar{Y}_2 , \bar{X} , $\bar{N}_{ij}' (i=1,2,3,4)$ 以及标量 $\mu > 0$ 使得线性矩阵不等式(6-37)-式(6-40)成立, 那么系统(6-9)是渐近稳定的。

$$\dot{\bar{P}}_h \leq 0, \dot{\bar{Q}}_h \leq 0, \dot{\bar{T}}_h \leq 0, \dot{\bar{R}}_{1h} \leq 0 \quad (6-37)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{ij}^0 & \bar{\Gamma}_0 B_i M_j \\ * & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-38)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{ij}^0 + h\bar{\Xi}_{ij}^{21} & h\bar{N}_{ij}^3 & h\bar{N}_{ij}^4 & \bar{\Gamma}_0 B_i M_j \\ * & -h\bar{R}_2 & 0 & 0 \\ * & 0 & -3h\bar{R}_2 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-39)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{ij}^0 + h\bar{\Xi}_{ij}^{31} & h\bar{N}_{ij}^1 & h\bar{N}_{ij}^2 & \bar{\Gamma}_0 B_i M_j \\ * & -h\bar{R}_{1i} & 0 & 0 \\ * & 0 & -3h\bar{R}_{1i} & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-40)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{ij}^0 &= \text{sym}\{\Phi_1^T \bar{P}_i \Phi_2 + \Phi_8^T \bar{Y}_1 \Phi_6 + \Phi_8^T \bar{Y}_2 \Phi_7 + \Phi_{10}^T \bar{X} \Phi_4^2 - \Phi_4^{1T} \bar{X} \Phi_{10}\} \\ &\quad + \Phi_3^T \bar{Q}_i \Phi_3 - \Phi_4^T \bar{Q}_i \Phi_4 + \tau^2 e_7^T \bar{T}_i e_7 \\ &\quad - \Phi_0^T \bar{T}_i \Phi_0 - 3\Phi_0^{1T} \bar{T}_i \Phi_0^1 + \text{sym}\{\bar{N}_{ij}^1 F_1 + \bar{N}_{ij}^2 F_2 + \bar{N}_{ij}^3 F_3 + \bar{N}_{ij}^4 F_4\} \\ &\quad + h^2 e_7^T \bar{R}_3 e_7 - F_1^T \bar{R}_3 F_1 - 3F_2^T \bar{R}_3 F_2 - 6F_2^T \bar{R}_3 (2e_9 - 2e_1) - h^2 e_7^T \bar{R}_4 e_7 \\ &\quad + F_3^T \bar{R}_4 F_3 + 3F_4^T \bar{R}_4 F_4 - 6F_4^T \bar{R}_4 (2e_1 - 2e_{10}) + \mu(H_j e_3)^T H_j e_3 + \bar{\Gamma}_{ij} \\ \bar{\Xi}_{ij}^{21} &= \text{sym}\{\Phi_5^{1T} \bar{Y}_1 \Phi_6 + \Phi_5^{1T} \bar{Y}_2 \Phi_7 + \Phi_8^{1T} \bar{Y}_1 \Phi_9 + \Phi_{12}^{1T} \bar{Z} \Phi_{11}\} \\ &\quad + \Phi_{11}^T \bar{Z} \Phi_{11} + e_7^T \bar{R}_{1i} e_7 + 2F_3^T \bar{R}_4 e_7 - 6F_4^T \bar{R}_4 e_7, \\ \bar{\Xi}_{ij}^{31} &= \text{sym}\{\Phi_5^{2T} \bar{Y}_1 \Phi_6 + \Phi_5^{2T} \bar{Y}_2 \Phi_7 + \Phi_8^{2T} \bar{Y}_1 \Phi_9 + \Phi_{12}^{2T} \bar{Z} \Phi_{11}\} \\ &\quad - \Phi_{11}^T \bar{Z} \Phi_{11} + e_7^T \bar{R}_2 e_7 - 2F_1^T \bar{R}_3 e_7 - 6F_2^T \bar{R}_3 e_7 \\ \bar{\Gamma}_{ij} &= \text{sym}\{\bar{\Gamma}_0 \times (-G^T e_7 + A_i G^T e_1 + A_{di} G^T e_2 + B_i \bar{K}_j e_3)\} \\ \bar{\Gamma}_0 &= e_1^T + \rho_1 e_2^T + \rho_2 e_3^T + \rho_3 e_7^T \end{aligned}$$

基于此, 可以得出控制器的参数 $K_{pj} = \bar{K}_{pj}(G^T)^{-1}$ 。如果 G 的秩是 n , 那么 $(G^T)^{-1}$ 指的是 G^T 的逆矩阵; 如果 G 的秩小于 n , 那么 $(G^T)^{-1}$ 指的是 G^T 的广义逆矩阵。

证明 定义 $G_1 = G^{-1}, G_2 = \rho_1 G^{-1}, G_3 = \rho_2 G^{-1}, G_4 = \rho_3 G^{-1}$

$$\begin{aligned} K_{pj} &= \bar{K}_{pj}(G^T)^{-1} \\ \bar{\mathbb{P}}_h &= \text{diag}\{G, G, G\} \mathbb{P}_h \text{diag}\{G, G, G\}^T \\ \bar{\mathbb{Q}}_h &= \text{diag}\{G, G\} \mathbb{Q}_h \text{diag}\{G, G\}^T, \bar{\mathbb{T}}_h = G \mathbb{Q}_h G^T \\ \bar{Y}_1 &= \text{diag}\{G, G, G, G\} Y_1 \text{diag}\{G, G, G, G\}^T \\ \bar{Y}_2 &= \text{diag}\{G, G, G, G\} Y_2 \text{diag}\{G, G, G, G\}^T \\ \bar{X} &= \text{diag}\{G, G\} X \text{diag}\{G^T, G^T\} \end{aligned}$$

$$\bar{Z} = \text{diag}\{G, G, G, G, G, G\} Z \text{diag}\{G, G, G, G, G, G\}^T$$

$$\bar{R}_3 = GR_3G^T, \bar{R}_4 = GR_4G^T, \bar{N}_{ij}^t = J_1^T N_{ij}^t G^T$$

$$J_1 = \text{diag}\{G, G, G, G, G, G, G, G, G, G, G\}$$

$$J_2 = \text{diag}\{J_1, I\}, J_3 = \text{diag}\{J_1, G, G, I\}$$

通过将式(6-14)的左右各乘上 J_2 和 J_2^T ，可以得到不等式(6-38)成立。将式(6-15)和式(6-16)的左右各乘上 J_3 和 J_3^T ，可以得到式(6-39)和式(6-40)成立。证明完毕。

注 6.5 基于隶属度函数信息的矩阵构造法，在 L-K 泛函设计中扮演了重要的角。在其帮助下，针对 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析和采样控制问题，本章设计了一种新的隶属度函数相关的时变矩阵，这种矩阵本身是正定的，在求导之后的矩阵是负定的。这种方法会产生 2^{r-1} 种情况，最终结果为 $h = \min_{1 \leq q \leq 2^{r-1}} \{h_q\}$ 。举例来说，例 6-2 中 $r=2$ ，可以得到在两种情况下的时滞上界。当 $\dot{\lambda}_1(t) < 0$ 的时候，时滞上界是 h_1 ；当 $\dot{\lambda}_1(t) \geq 0$ 的时候，时滞上界是 h_2 。最终的时滞上界的结果是 $h = \min\{h_1, h_2\}$ 。

当 $A_{di} = 0$ ， $\tau = 0$ 以及控制器中没有不确定性项的时候，系统(6-9)可以简化成式(6-41)的形式，

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i(\theta(t)) \gamma_j(\theta(t_k)) (A_i x(t) + B_i K_j x(t_k)), \quad (6-41)$$

基于定理 6-2，可以得到如下推论 6-1。

推论 6-1 对于给定的标量 h ， τ 以及 $\rho_v (v=1,2)$ ，T-S 模糊系统(6-41)是渐近稳定的，如果存在合适维数的对称矩阵 $\hat{P}_i > 0$ ， $\hat{R}_{1i} > 0$ ， $\hat{R}_2 > 0$ ， $\hat{R}_3 > 0$ ， $\hat{R}_4 > 0$ ， \hat{Z} 以及任意矩阵 \hat{G} ， $\hat{K}_{pj} (p=1, \dots, 2^{r-1})$ ， \hat{Y}_1 ， \hat{Y}_2 ， \hat{X} ， $\hat{N}_{ij}^t (i=1,2,3,4)$ 使得式(6-42)-式(6-45)成立。

$$\dot{\hat{P}}_h \leq 0, \dot{\hat{R}}_{1h} \leq 0 \quad (6-42)$$

$$\hat{\Xi}_{ij}^0 < 0 \quad (6-43)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{ij}^0 + h\hat{\Xi}_{ij}^{21} & h\hat{N}_{ij}^3 & h\hat{N}_{ij}^4 \\ * & -h\hat{R}_2 & 0 \\ * & 0 & -3h\hat{R}_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (6-44)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{ij}^0 + h\hat{\Xi}_{ij}^{31} & h\hat{N}_{ij}^1 & h\hat{N}_{ij}^2 \\ * & -h\hat{R}_{li} & 0 \\ * & 0 & -3h\hat{R}_{li} \end{bmatrix} < 0 \quad (6-45)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_{ij}^0 &= \text{sym}\{\bar{e}_1^T \hat{P} \bar{e}_4 + \hat{\Phi}_8^T \hat{Y}_1 \hat{\Phi}_6 + \hat{\Phi}_8^T \hat{Y}_2 \hat{\Phi}_7 + \bar{e}_4^T \hat{X} \hat{\Phi}_4^2 - \hat{\Phi}_4^{1T} \hat{X} \bar{e}_4\} + \hat{\Gamma}_{ij} \\ &\quad + \text{sym}\{\hat{N}_{ij}^1 \hat{F}_1 + \hat{N}_{ij}^2 \hat{F}_2 + \hat{N}_{ij}^3 \hat{F}_3 + \hat{N}_{ij}^4 \hat{F}_4\} \\ &\quad + h^2 \bar{e}_4^T \hat{R}_3 \bar{e}_4 - \hat{F}_1^T \hat{R}_3 \hat{F}_1 - 3\hat{F}_2^T \hat{R}_3 \hat{F}_2 - 6\hat{F}_2^T \hat{R}_3 (2\bar{e}_5 - 2\bar{e}_1) - h^2 \bar{e}_4^T \hat{R}_4 \bar{e}_4 \\ &\quad + \hat{F}_3^T \hat{R}_4 \hat{F}_3 + 3\hat{F}_4^T \hat{R}_4 \hat{F}_4 - 6\hat{F}_4^T \hat{R}_4 (2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_6) \\ \hat{\Xi}_{ij}^{21} &= \text{sym}\{\hat{\Phi}_5^{1T} \hat{Y}_1 \hat{\Phi}_6 + \hat{\Phi}_5^{1T} \hat{Y}_2 \hat{\Phi}_7 + \hat{\Phi}_8^{1T} \hat{Y}_1 \hat{\Phi}_9 + \hat{\Phi}_{12}^{1T} \hat{Z} \hat{\Phi}_{11}\} \\ &\quad + \hat{\Phi}_{11}^T \hat{Z} \hat{\Phi}_{11} + \bar{e}_4^T \hat{R}_{li} \bar{e}_4 + 2\hat{F}_3^T \hat{R}_4 \bar{e}_4 - 6\hat{F}_4^T \hat{R}_4 \bar{e}_4 \\ \hat{\Xi}_{ij}^{31} &= \text{sym}\{\hat{\Phi}_5^{2T} \hat{Y}_1 \hat{\Phi}_6 + \hat{\Phi}_5^{2T} \hat{Y}_2 \hat{\Phi}_7 + \hat{\Phi}_8^{2T} \hat{Y}_1 \hat{\Phi}_9 + \hat{\Phi}_{12}^{2T} \hat{Z} \hat{\Phi}_{11}\} \\ &\quad - \hat{\Phi}_{11}^T \hat{Z} \hat{\Phi}_{11} + \bar{e}_4^T \hat{R}_2 \bar{e}_4 - 2\hat{F}_1^T \hat{R}_3 \bar{e}_4 - 6\hat{F}_2^T \hat{R}_4 \bar{e}_4 \\ \hat{\Gamma}_{ij} &= \text{sym}\{\hat{\Gamma}_0 (-\hat{G}^T \bar{e}_4 + A_i \hat{G}^T \bar{e}_1 + B_i \hat{K}_{pj} \bar{e}_2)\} \\ \hat{\Gamma}_0 &= \bar{e}_1^T + \rho_1 \bar{e}_2^T + \rho_2 \bar{e}_4^T \\ \hat{\Phi}_{12}^2 &= \text{col}\{\bar{e}_0, \bar{e}_0, \bar{e}_0, \bar{e}_6 - \bar{e}_1\} \\ \hat{\Phi}_4^1 &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \Phi_4^2 = \bar{e}_3 - \bar{e}_1 \\ \hat{\Phi}_5^1 &= \text{col}\{\bar{e}_4, \bar{e}_0\}, \Phi_5^2 = \text{col}\{\bar{e}_0, -\bar{e}_4\} \\ \hat{\Phi}_6 &= \text{col}\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_3 - \bar{e}_1\}, \Phi_7 = \text{col}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\} \\ \hat{\Phi}_8 &= \text{col}\{\bar{e}_2 - \bar{e}_1, \bar{e}_3 - \bar{e}_1\}, \hat{\Phi}_8^1 = \text{col}\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_0\} \\ \hat{\Phi}_8^2 &= \text{col}\{\bar{e}_0, \bar{e}_3 - \bar{e}_1\}, \hat{\Phi}_{11} = \text{col}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_5, \bar{e}_6\} \\ \hat{\Phi}_9 &= \text{col}\{\bar{e}_4, -\bar{e}_4\}, \hat{\Phi}_{12}^1 = \text{col}\{\bar{e}_0, \bar{e}_0, \bar{e}_1 - \bar{e}_5, \bar{e}_0\} \\ \hat{F}_1 &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \hat{F}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_5 \\ \hat{F}_3 &= \bar{e}_3 - \bar{e}_1, \hat{F}_4 = \bar{e}_3 + \bar{e}_1 - 2\bar{e}_6 \end{aligned}$$

基于推论 6-1, 采样控制的控制器参数为 $K_{pj} = \hat{K}_{pj} (G^T)^{-1}$ 。如果 G 的秩是 n , 那么 $(G^T)^{-1}$ 指的是 G^T 的逆矩阵; 如果 G 的秩小于 n , 那么 $(G^T)^{-1}$ 指的是 G^T 的广义逆矩阵。

证明 令 $\bar{\mathbb{Q}}_h = 0$, $\bar{\mathbb{T}}_h = 0$ 以及向量 $\xi(t) = \text{col}\{x(t), x(t_k), x(t_{k+1}), \dot{x}(t), v_1(t), v_2(t)\}$, 推

论 6-1 可以顺利地由定理 6-2 获得。证明完毕。

6.4 数值算例

为了验证本章结果的有效性, 利用两个例子来进行数值仿真。第一个例子是在控制器存在扰动的前提下, 用来说明定理 6-2 中的采样控制器的有效性和镇定结果; 第二个例子是在控制器不存在扰动的前提下, 用来说明推论 6-1 中的采样控制器的有效性和镇定结果。除此之外, 将本章提出的结果进行一个简单的推广, 用来说明本章所提出的算法可以解决一些网络化问题。

例 6-1 考虑如下式(6-46)的非线性系统^[157]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha \frac{vt^*}{Lt_0} x_1(t) - (1-\alpha) \frac{vt^*}{Lt_0} x_1(t-\tau) + \frac{vt^*}{lt_0} u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha \frac{vt^*}{Lt_0} x_1(t) + (1-\alpha) \frac{vt^*}{Lt_0} x_1(t-\tau) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{vt^*}{Lt_0} \sin(x_2(t)) + \frac{\alpha vt^*}{2L} x_1(t) + (1-\alpha) \frac{vt^*}{2L} x_1(t-\tau) \end{cases} \quad (6-46)$$

其中 $l=2.8$, $L=5.5$, $\alpha=0.7$, $v=-1$, $t^*=2.0$ 以及 $t_0=0.5$ 。上述非线性系统可以转化为(6-2)形式的 T-S 模糊系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \gamma_i(\theta(t)) (A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i u(t))$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\alpha \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{v^2 t^{*2}}{2Lt_0} & \frac{vt^*}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} -(1-\alpha) \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-\alpha) \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-\alpha) \frac{v^2 t^{*2}}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\alpha \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{dv^2 t^{*2}}{2Lt_0} & \frac{dvt^*}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} -(1-\alpha) \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-\alpha) \frac{vt^*}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-\alpha) \frac{dv^2 t^{*2}}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_1 = B_2 = [vt^* / lt_0; 0; 0]$$

其中 $d = 10t_0 / \pi$ ，隶属度函数为

$$\gamma_1(t) = 1 / (1 + \exp(x_1(t)) + 0.5), \gamma_2(t) = 1 - \gamma_1(t) \quad (6-47)$$

设计采样控制器如下：

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 \gamma_j(\theta(t_k)) [(K_j + \Delta K_j)x(t_k)] \quad (6-48)$$

选取 $\tau = 0.17$ ， $\rho_1 = 0.57$ ， $\rho_2 = 4.52$ ， $\rho_3 = 0.78$ ， $M_1 = M_2 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]$ ， $S(t) = \text{diag}\{\sin(t), \sin(t), \sin(t)\}$ ， $H_1 = H_2 = 0.2I_3$ ，通过利用定理 6-2 的方法，我们可以得到 $\{\bar{P}_1 > \bar{P}_2, \bar{Q}_1 > \bar{Q}_2, \bar{T}_1 > \bar{T}_2, \bar{R}_{11} > \bar{R}_{12}\}$ 的情况下， $h_1 = 0.316$ ； $\{\bar{P}_1 \leq \bar{P}_2, \bar{Q}_1 \leq \bar{Q}_2, \bar{T}_1 \leq \bar{T}_2, \bar{R}_{11} \leq \bar{R}_{12}\}$ 的情况下， $h_2 = 0.318$ ，因此最大的采样区间为 $h = 0.316$ 。通过求解线性矩阵不等式，所得控制增益矩阵如下所示：

$$\begin{aligned} K_{11} = K_{12} &= [1.2027 \quad -0.4981 \quad 0.0188] \\ K_{21} = K_{22} &= [1.1839 \quad -0.9218 \quad 0.0370] \end{aligned} \quad (6-49)$$

当初始条件 $x(0) = [1.5, -2, 3]^T$ 时，状态响应曲线和控制系统的输入信息分别如图 6-1 和 6-2 所示。可以从图 6-1 看出被控系统在设计的控制器的控制下是渐近稳定的，可以看出定理 6-1 所提出的算法是有效性的。图 6-2 为例 6-1 的控制输入信号曲线，可以看出是控制信号的形式为采样控制，且受到不确定性的影响。因此，仿真结果验证了定理 6-2 的有效性。

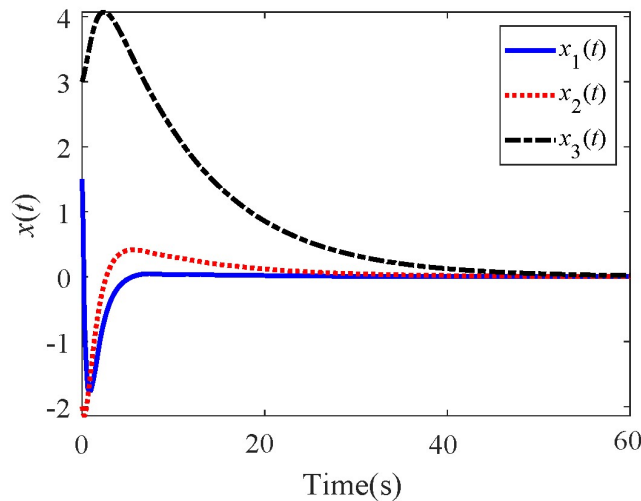


图 6-1 闭环系统的状态轨迹

Fig. 6-1 The state trajectories of the close-loop system

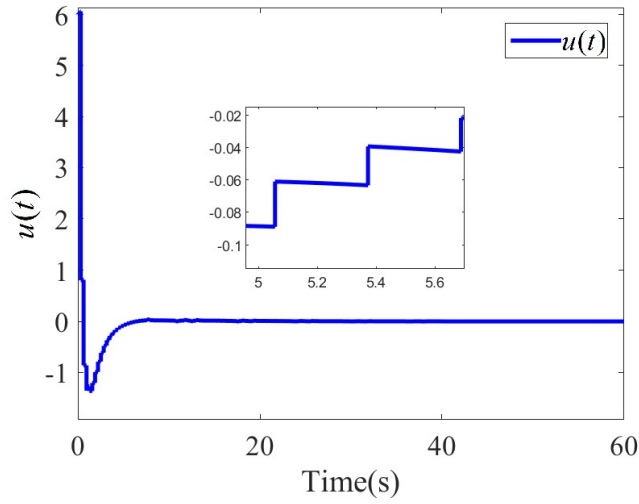


图 6-2 采样控制输入的轨迹图

Fig. 6-2 The trajectory of the sampling control input

例 6-2 考虑如下带有输入项的 Rossler 系统^[154,163]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = bx_1(t) - (c - x_1(t))x_3(t) + u(t) \end{cases} \quad (6-50)$$

上述非线性系统可以转换成(6-41)形式的 T-S 模糊系统,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i(\theta(t)) \gamma_j(\theta(t_k)) (A_i x(t) + B_i K_j x(t_k))$$

其中的矩阵形式为:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

其中 $a=0.3$, $b=0.5$, $c=5$, $d=10$ 以及隶属度函数信息为 $\gamma_1(t) = \frac{c+d-x_1(t)}{2d}$,

$\gamma_2(t) = 1 - \gamma_1(t)$ 。

设计采样控制器如下:

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 \gamma_j(\theta(t_k)) (K_j x(t_k)) \quad (6-51)$$

假设 $x_1(t) \in [c-d, c+d]$ 以及取 $\rho_1 = -7.318$, $\rho_2 = -0.625$ 。求解推论 6-1 中的线

性矩阵不等式，可以得到 $\{\bar{P}_1 > \bar{P}_2, \bar{Q}_1 > \bar{Q}_2, \bar{T}_1 > \bar{T}_2, \bar{R}_{11} > \bar{R}_{12}\}$ 的情况下， $h_1 = 0.1373$ ； $\{\bar{P}_1 \leq \bar{P}_2, \bar{Q}_1 \leq \bar{Q}_2, \bar{T}_1 \leq \bar{T}_2, \bar{R}_{11} \leq \bar{R}_{12}\}$ 的情况下， $h_2 = 0.1381$ ，因此最大的采样区间为 0.1373。可得控制器增益矩阵为：

$$\begin{aligned} K_{11} = K_{12} &= [9.4372 \quad 2.9278 \quad -10.4671] \\ K_{21} = K_{22} &= [9.2227 \quad 2.9578 \quad -10.5525] \end{aligned} \quad (6-52)$$

从表 6-1 可以看出，本章提出的算法可以取得保守性较低的结果。图 6-3 是例 6-2 的开环状态响应曲线，可以从图中看出没有控制器输入的时候，系统的状态是发散的。图 6-4 是在所设计的控制器的控制下的闭环系统的状态曲线，可以从图中看出系统是收敛的，说明本章提出的算法是有效的。图 6-5 是控制输入的曲线图。

表 6-1 最大采样间隔

Table 6-1 The maximum sampling interval				
文献[157]	文献[154]	文献[150]	文献[161]	推论 6-1
0.0959	0.1147	0.1165	0.1292	0.1373

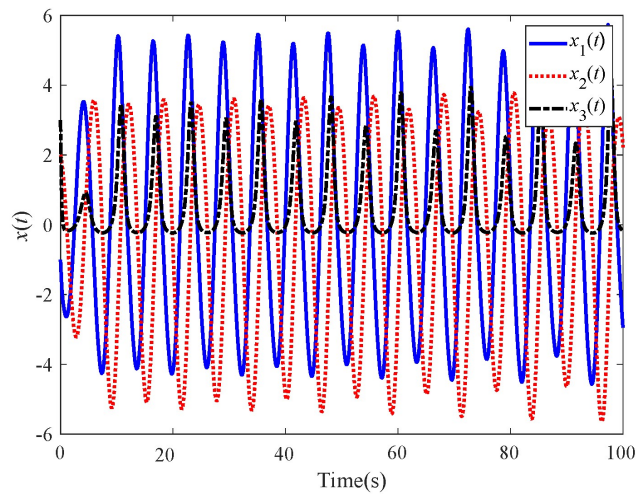


图 6-3 开环状态下的状态轨迹

Fig. 6-3 The response of the state variables of open-loop system

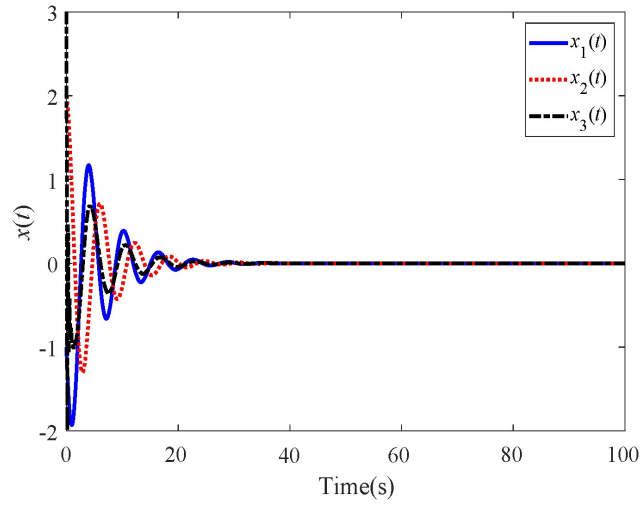


图 6-4 闭环状态下的状态轨迹

Fig. 6-4 The state trajectories of close-loop system

假设在 T-S 模糊时滞系统(6-1)不存在时滞的情况下，所设计的采样控制器中是存在扰动和时滞的。基于本章定理 6-2 的控制器设计方案，可得到推广算法来解决文献[154]中的控制问题。对于文献[154]中例 2 蔡氏电路模型的控制问题，基于本章的推广算法并采用同样的参数，可得到在 $\{\bar{P}_1 > \bar{P}_2, \bar{Q}_1 > \bar{Q}_2, \bar{T}_1 > \bar{T}_2, \bar{R}_{11} > \bar{R}_{12}\}$ 的情况下， $h_1 = 0.3648$ ；在 $\{\bar{P}_1 \leq \bar{P}_2, \bar{Q}_1 \leq \bar{Q}_2, \bar{T}_1 \leq \bar{T}_2, \bar{R}_{11} \leq \bar{R}_{12}\}$ 的情况下， $h_2 = 0.3896$ 。所以可得最大采样区间为 $h = 0.3648$ ，这一结果比文献[154]中的 0.3141 要大。由此可得，对本章的结果进行推广，可以解决复杂网络环境下的一些控制问题。

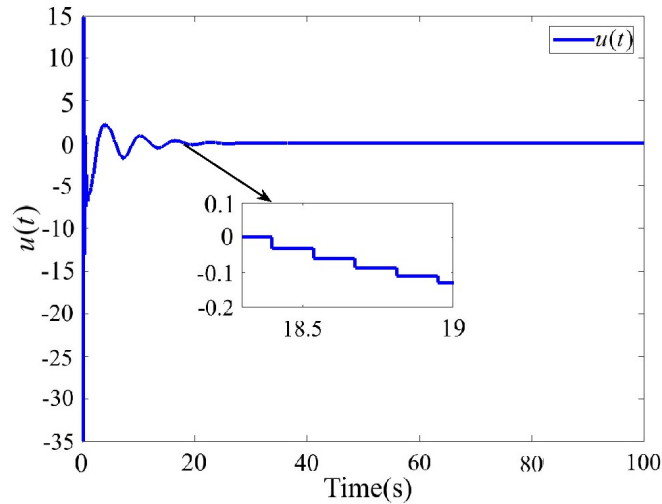


图 6-5 采样控制输入的轨迹图

Fig. 6-5 The trajectory of the sampling control input

6.5 本章小结

本章提出了关于 T-S 模糊时滞系统的非脆弱采样控制问题的解决方案。考虑到控制器中可能存在不确定性，设计了具有一定的波动抑制作用的控制器。本章利用新的环函数和带有隶属度函数信息的新型矩阵，设计了一种新型的 L-K 泛函，充分利用了系统的状态信息和隶属度函数信息，因此可以得到保守性更低的稳定性判据。最后，利用数值算例和 MABLAB 中的 LMI 工具箱验证了所提出的算法的有效性。

结 论

本文针对时滞神经网络、线性时滞系统、递归神经网络和 T-S 模糊时滞系统的稳定性问题做出了一些研究。主要借助 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和不等式分析技巧, 利用线性矩阵不等式, 得到了上述几类时滞系统的稳定性判据以及控制器设计, 并用仿真验证了所得结果的有效性。本文主要的创新点总结如下:

(1) 时滞为三角函数形式的时滞系统稳定性分析方面。本文提出了一种新型的区间逼近法, 这种方法可以提供基于时滞本身性质的新型的时滞区间。通过利用三角函数形式的时变时滞及其导数之间的特性, 通过图像和数值计算, 可以得到新的时滞区间。三角函数形式时滞作为一种周期性时变时滞, 可以利用单调延迟区间的环函数型泛函。基于此, 本文提出了关于单调延迟区间函数的 L-K 泛函的新型区间形式, 并得到了保守性较小的时滞相关稳定性判据。

(2) 带有多重时滞的递归神经网络系统的稳定性分析方面。本文提出了一种增强型时滞区间分割法, 这种方法充分结合了时滞之间的关系。根据时滞上界和时变时滞之间的关系, 将时滞划分为不同情况。通过不同的子区间划分类型, 将泛函求导结果中的单积分的上下界进行进一步划分。根据这种新型时滞区间分割法, 得到了保守性较小的时滞相关稳定性判据。

(3) T-S 模糊时滞系统的稳定性分析方面。本文提出了包含二次时滞乘积项的单积分形式的 L-K 泛函, 这种泛函将之前的文献中提出的时滞乘积积分形式的 L-K 泛函作为本文的特殊形式。利用这种新型泛函形式与隶属度函数相关矩阵结合共同构造出的泛函, 并结合二次型多项式为负定的充要条件, 使得所得判据的保守性较小。

(4) T-S 模糊时滞系统的采样控制方面。本文提出了一种隶属度函数相关矩阵和新的双边环函数相结合的泛函, 这种泛函不仅能放松 L-K 泛函的单调递减限制条件, 此外还能地利用系统的采样信息。设计了考虑控制器不确定性的采样控制器, 这种控制方法不需要时刻更新状态信息, 不仅节省了通信带宽, 而且允许可能会发生的增益扰动, 且具有更长采样区间。

到目前为止, 关于时滞系统的稳定性和控制方面的研究覆盖内容广泛, 但仍有许多待解决的问题和进一步上升的空间, 本文也存在一些局限性, 将未来的工作重

点与展望总结如下：

(1) 本文中假设的时滞形式为三角函数形式，这种形式在很多文献中进行了应用以及仿真验证其所提算法的有效性。然而这种时滞形式存在一定的限制条件，文献[87]考虑的时滞是周期函数，需要满足的时变时滞的条件为在单调区间内递增或者递减且在单调区间的顶点处取极值，这种假设条件也存在较强的假设性限制因素。如何降低这些假设条件，建立适应性更强的时滞区间是未来需要进一步研究的课题。

(2) T-S 模糊系统的隶属度函数是 T-S 模糊系统模型的重要组成部分，虽然文献[126]提出了利用隶属度函数的性质来构造隶属度函数相关矩阵来设计 L-K 泛函，得到保守性更低的结果。但是关于 T-S 模糊模型的隶属度函数信息在时滞系统的稳定性分析中应用不够，如何进一步利用 T-S 模糊系统中的已知信息来进行分析需要进行深入的探索。

(3) 随着网络化技术的快速发展，越来越多的系统的传感器、执行器、控制器等模块之间的信息传递是交由网络完成的。尽管网络通信具有通讯速度快、等优势，然而也可能受到网络化的影响比如带宽受限、部分信息不可测，进而影响时滞系统的整体性能。因此，研究受网络诱导因素影响的时滞系统的稳定性和控制问题是未来的研究方向。

参考文献

- [1] 陈连贵, 杨卫东, 杨斌虎. 基于鲁棒二自由度增益自适应 Smith 预估器的冷轧厚度计型 AGC[J]. 北京科技大学学报, 2007, (06): 632-635.
- [2] Farid Y, Ruggiero F. Finite-time extended state observer and fractional-order sliding mode controller for impulsive hybrid port-Hamiltonian systems with input delay and actuators saturation: Application to ball-juggler robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 167: 104577.
- [3] Gu K, Chen J, Kharitonov V L. Stability of time-delay systems[M]. Springer Science & Business Media, 2004.
- [4] Duan H, Liu Y, Wang G. A novel dynamic time-delay grey model of energy prices and its application in crude oil price forecasting[J]. Energy, 2022, 251: 123968..
- [5] Wang W, Yang C, Han J, et al. A soft sensor modeling method with dynamic time-delay estimation and its application in wastewater treatment plant[J]. Biochemical Engineering Journal, 2021, 172: 108048.
- [6] Zhang X M, Han Q L, Ge X. The construction of augmented Lyapunov-Krasovskii functionals and the estimation of their derivatives in stability analysis of time-delay systems: A survey[J]. International Journal of Systems Science, 2021: 1-16.
- [7] 陈军, 徐胜元, 张保勇. 线性时滞系统稳定性最新研究综述[J]. 信息与控制, 2020, 49(01): 36-46.
- [8] Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. Notes on stability of time-delay systems: bounding inequalities and augmented Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(10): 5331-5336.
- [9] Zhang X M, Han Q L, Han D. Effects of small time-delays on dynamic output feedback control of offshore steel jacket structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(16): 3884-3900.
- [10] Song Q, Yu W, Cao J, et al. Reaching synchronization in networked harmonic oscillators with outdated position data[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2015, 46(7): 1566-1578.
- [11] Zhang D, Han Q L, Jia X. Network-based output tracking control for a class of T-S fuzzy systems that can not be stabilized by nondelayed output feedback controllers[J]. IEEE Transactions on

- Cybernetics, 2014, 45(8): 1511-1525.
- [12] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 清华大学出版社, 2002.
- [13] Hua C, Guan X, Shi P. Robust backstepping control for a class of time delayed systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6): 895-899.
- [14] Park J H, Lee T H, Liu Y, et al. Dynamic systems with time delays: stability and control[M]. Singapore: Springer, 2019.
- [15] Ge C, Park J H, Hua C, et al. Robust passivity analysis for uncertain neural networks with discrete and distributed time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2019, 364: 330-337.
- [16] Hua C, Wang Q, Guan X. Adaptive fuzzy output-feedback controller design for nonlinear time-delay systems with unknown control direction[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2008, 39(2): 364-375.
- [17] 刘乾, 何勇, 宁重阳. 时滞半 Markov 切换随机系统输入-状态稳定性分析的时变驻留时间条件方法[J]. 控制理论与应用, 2022, 39: 1-9.
- [18] 于晋臣, 彭名书, 张彩艳. 一类具有时滞的商业周期模型的分支控制[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(13): 67-72.
- [19] 金薇, 廖新元, 余智凤. 一类具有时滞的两种新冠病毒并行传播的 SIR 模型研究[J]. 数学理论与应用, 2022, 42(02): 99-107.
- [20] 丁宇婷, 周林. 具有时滞的湖泊生态模型的动力学性质分析[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2022, 38(02): 225-229.
- [21] Kao C Y, Rantzer A. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays[J]. Automatica, 2007, 43(6): 959-970.
- [22] Megretski A, Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(6): 819-830.
- [23] 曾丽, 赵怡, 孙伟等. 基于频域法的非线性时滞映射的分岔及其应用[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2006(06): 16-20.
- [24] Jun M, Safonov M G. Rational multiplier IQCs for uncertain time-delays and LMI stability conditions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(11): 1871-1875.
- [25] Pfifer H, Seiler P. Integral quadratic constraints for delayed nonlinear and parameter-varying systems[J]. Automatica, 2015, 56: 36-44.
- [26] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay

- systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 1048-1060.
- [27] Trinh H, Aldeen M. On robustness and stabilization of linear systems with delayed nonlinear perturbations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(7): 1005-1007.
- [28] 庄迪, 王天成. 基于 Razumikhin 方法的三阶非线性时变时滞系统的输出反馈镇定[J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2022, 38(01): 27-34.
- [29] Lee S H, Park M J, Ji D H, et al. Stability and dissipativity criteria for neural networks with time-varying delays via an augmented zero equality approach[J]. Neural Networks, 2022, 146: 141-150.
- [30] 杨明明, 邵荃, 丁啸. 基于改进 Jensen 不等式的中立型时滞系统稳定性判据[J]. 河南科学, 2021, 39(07): 1033-1038.
- [31] 廖永龙, 宋嘉琪. 基于 Finsler 引理的一类连续时间多时滞系统稳定性分析[J]. 北京石油化工学院学报, 2022, 30(01): 65-70.
- [32] Repin I M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1965, 29(3): 669-672.
- [33] Seuret A, Gouaisbaut F. Complete quadratic Lyapunov functionals using Bessel-Legendre inequality[C]//2014 European Control Conference (ECC). IEEE, 2014: 448-454.
- [34] Peet M M, Papachristodoulou A, Lall S. Positive forms and stability of linear time-delay systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 47(6): 3237-3258.
- [35] Wu S, Peet M M, Hua C. Estimator-based output-feedback stabilization of linear multi-delay systems using SOS[C]//2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2019: 984-988.
- [36] Peet M M. A dual to Lyapunov's second method for linear systems with multiple delays and implementation using SOS[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 64(3): 945-959.
- [37] Peet M M. A convex reformulation of the controller synthesis problem for MIMO single-delay systems with implementation in SOS[C]//2017 American Control Conference (ACC). IEEE, 2017: 5127-5135.
- [38] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 2005, 15(18): 924-934.
- [39] 张镇佳, 姜偕富, 戎佳豪, 等. 基于改进 Lyapunov 泛函的时变时滞系统稳定性分析[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版), 2022, 42(04): 64-70.

- [40] 郭娜娜, 姜偕富, 尹宗明, 等. 隶属度函数相关的 T-S 模糊时滞系统稳定性准则[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版), 2020, 40(04): 63-69.
- [41] 孙健, 陈杰. 时滞系统稳定性分析与应用[M]. 科学出版社, 2012.
- [42] Seuret A, Gouaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [43] Park P G, Lee W I, Lee S Y. Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [44] Seuret A, Gouaisbaut F. Hierarchy of LMI conditions for the stability analysis of time-delay systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 81: 1-7.
- [45] Sun J, Liu G P, Chen J, et al. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2010, 46(2): 466-470.
- [46] Sun J, Liu G P, Chen J. Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 2009, 19(12): 1365-1375.
- [47] 尹宗明, 张宁, 雷蔓, 等. 一种改进的区间时变时滞系统稳定性准则[J]. 控制工程, 2020, 27(03): 462-468.
- [48] 韩彦武, 汤红吉, 余跃. 时滞神经网络的改进稳定判据[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2020, 45(03): 692-699.
- [49] 刘丽丽, 姜偕富, 尹宗明, 等. 具有随机时滞的区间时滞系统稳定性分析[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版), 2020, 40(06): 70-74+80..
- [50] 刘心歌, 徐巧玲, 唐美兰. 具有区间时滞的中立型 Luré 系统的稳定性分析[J]. 数学理论与应用, 2020, 40(01): 1-18.
- [51] Qian W, Cong S, Li T, et al. Improved stability conditions for systems with interval time-varying delay[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2012, 10(6): 1146-1152.
- [52] 吴玉彬, 张合新, 惠俊军, 等. 区间变时滞不确定系统鲁棒稳定性分析[J]. 电子学报, 2018, 46(04): 975-984.
- [53] Gouaisbaut F, Peaucelle D. Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2006, 39(10): 55-59.
- [54] Guo L D, Huang S J, Wu L B. Novel delay-partitioning approaches to stability analysis for

- uncertain Lur'e systems with time-varying delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(7): 3885-3900.
- [55] 朱金梁, 王婷, 李涛. 基于 Wirtinger 型积分不等式的线性时滞广义系统稳定性准则[J]. 上海交通大学学报, 2020, 54(09): 967-972.
- [56] Zhang R, Zeng D, Liu X, et al. New results on stability analysis for delayed Markovian generalized neural networks with partly unknown transition rates[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(11): 3385-3395.
- [57] Qiu Y, Hua C, Wang Y. Nonfragile Sampled-data Control of T-S Fuzzy Systems with Time Delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(8): 3202-3210.
- [58] Long F, Zhang C K, Jiang L, et al. Stability analysis of systems with time-varying delay via improved Lyapunov–Krasovskii functionals[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 51(4): 2457-2466.
- [59] Peng X, He Y. Consensus of multiagent systems with time-varying delays and switching topologies based on delay-product-type functionals[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022.
- [60] Zhang X M, Han Q L, Ge X. Novel stability criteria for linear time-delay systems using Lyapunov-Krasovskii functionals with a cubic polynomial on time-varying delay[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 8(1): 77-85.
- [61] Zhang H, Shan Q, Wang Z. Stability analysis of neural networks with two delay components based on dynamic delay interval method[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2015, 28(2): 259-267.
- [62] Wang G, Jia R, Song H, et al. Stabilization of unknown nonlinear systems with T-S fuzzy model and dynamic delay partition[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 35(2): 2079-2090.
- [63] Lee T H, Park J H. A novel Lyapunov functional for stability of time-varying delay systems via matrix-refined-function[J]. Automatica, 2017, 80: 239-242.
- [64] Lee T H, Trinh H M, Park J H. Stability analysis of neural networks with time-varying delay by constructing novel Lyapunov functionals[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2018, 29(9): 4238-4247.
- [65] Ko K S, Lee W I, Park P G, et al. Delays-dependent region partitioning approach for stability criterion of linear systems with multiple time-varying delays[J]. Automatica, 2018, 87: 389-395.
- [66] Zhang X M, Han Q L, Ge X. Novel stability criteria for linear time-delay systems using

- Lyapunov-Krasovskii functionals with a cubic polynomial on time-varying delay[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 8(1): 77-85.
- [67] Long F, Zhang C K, He Y, et al. Hierarchical passivity criterion for delayed neural networks via a general delay-product-type Lyapunov-Krasovskii functional[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021.
- [68] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays[J]. International journal of control, 2003, 76(1): 48-60.
- [69] Park P G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 1999, 44(4): 876-877.
- [70] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. International Journal of control, 2001, 74(14): 1447-1455.
- [71] Gu K, Niculescu S I. Additional dynamics in transformed time-delay systems[J]. IEEE Transactions on automatic control, 2000, 45(3): 572-575.
- [72] He Y, Wang Q G, Xie L, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on automatic control, 2007, 52(2): 294-299.
- [73] 刘芳, 吴敏, 何勇. 基于改进自由权矩阵方法的神经网络时滞相关稳定性分析[J]. 计算技术与自动化, 2008, (01): 1-5+87.
- [74] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2768-2772.
- [75] Chen J, Park J H, Xu S. Stability analysis for delayed neural networks with an improved general free-matrix-based integral inequality[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 31(2): 675-684.
- [76] Seuret A, Gouaisbaut F. Stability of linear systems with time-varying delays using Bessel-Legendre inequalities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 63(1): 225-232.
- [77] Wu B, Wang C. A generalized multiple-integral inequality and its application on stability analysis for time-varying delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(7): 4026-4042.
- [78] Cai L, Xiong L, Zhang H. A generalized multiple integral inequality with application to time-varying delay systems[J]. Procedia Computer Science, 2021, 199: 1268-1275.

-
- [79] Lee J H, Kim J H, Park P G. A generalized multiple-integral inequality based on free matrices: Application to stability analysis of time-varying delay systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 430: 127288.
- [80] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.
- [81] Zhang X M, Han Q L. State estimation for static neural networks with time-varying delays based on an improved reciprocally convex inequality[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2017, 29(4): 1376-1381.
- [82] Chen J, Park J H, Xu S. Improvement on reciprocally convex combination lemma and quadratic function negative-definiteness lemma[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(2): 1347-1360.
- [83] Kim J H. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems[J]. Automatica, 2016, 64: 121-125.
- [84] Zeng H B, Lin H C, He Y, et al. Hierarchical stability conditions for time-varying delay systems via an extended reciprocally convex quadratic inequality[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(14): 9930-9941.
- [85] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. International Journal of control, 1996, 63(4): 741-750.
- [86] 王世威, 甘辉兵, 胡国彤, 等. 基于粒子群优化混合神经网络的船舶辅锅炉故障诊断[J]. 中国航海, 2022, 45(02): 37-42+55.
- [87] 赵博宁. 基于神经网络的不锈钢圆孔翻边件成型缺陷预测[J]. 科技创新与应用, 2022, 12(13): 126-129.
- [88] Wang Z, Liu L, Shan Q H, et al. Stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delay based on secondary delay partitioning method[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(10): 2589-2595.
- [89] Zhang X M, Han Q L, Ge X, et al. Passivity analysis of delayed neural networks based on Lyapunov–Krasovskii functionals with delay-dependent matrices[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2018, 50(3): 946-956.
- [90] Ge C, Park J H, Hua C, et al. Robust passivity analysis for uncertain neural networks with discrete and distributed time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2019, 364: 330-337.

-
- [91] Michiels W, Van Assche V, Niculescu S I. Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(4): 493-504.
- [92] Lozano R, Brogliato B, Egeland O, et al. Dissipative systems analysis and control: theory and applications[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [93] Zeng H B, He Y, Teo K L. Monotone-delay-interval-based Lyapunov functionals for stability analysis of systems with a periodically varying delay[J]. Automatica, 2022, 138: 110030.
- [94] Long F, Zhang C K, He Y, et al. Stability analysis for delayed neural networks via a novel negative-definiteness determination method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020.
- [95] Lin H C, Zeng H B, Zhang X M, et al. Stability Analysis for Delayed Neural Networks via a Generalized Reciprocally Convex Inequality[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022.
- [96] Zeng H B, Park J H, Shen H. Robust passivity analysis of neural networks with discrete and distributed delays[J]. Neurocomputing, 2015, 149: 1092-1097.
- [97] Thuan M V, Trinh H, Hien L V. New inequality-based approach to passivity analysis of neural networks with interval time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2016, 194: 301-307.
- [98] Park J M, Park P G. Finite-interval quadratic polynomial inequalities and their application to time-delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(7): 4316-4327.
- [99] Zeng H B, Zhai Z L, Wang W. Hierarchical stability conditions of systems with time-varying delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 404: 126222.
- [100] Zhang X M, Han Q L, Ge X, et al. An overview of recent developments in Lyapunov–Krasovskii functionals and stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2018, 313: 392-401.
- [101] Xiong J J, Zhang G. Improved stability criterion for recurrent neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(11): 5756-5760.
- [102] Wang Z, Ding S, Shan Q, et al. Stability of recurrent neural networks with time-varying delay via flexible terminal method[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 28(10): 2456-2463.
- [103] He Y, Wang Q G, Wu M. LMI-based stability criteria for neural networks with multiple time-varying delays[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2005, 212(1-2): 126-136.

- [104]Chen Y, Fei S, Li Y. Improved delay-dependent stability conditions for recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(2): 803-812.
- [105]Park J H. A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, 136(1-2): 177-184..
- [106]Liao X, Li C. An LMI approach to asymptotical stability of multi-delayed neural networks[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2005, 200(1-2): 139-155.
- [107]Xu S, Lam J, Ho D W C. Novel global robust stability criteria for interval neural networks with multiple time-varying delays[J]. *Physics Letters A*, 2005, 342(4): 322-330..
- [108]Wang W, Dong Y, Zhong S, et al. Secondary delay-partition approach to finite-time stability analysis of delayed genetic regulatory networks with reaction–diffusion terms[J]. *Neurocomputing*, 2019, 359: 368-383.
- [109]Wang W, Wang Y, Nguang S K, et al. Delay partition method for the robust stability of uncertain genetic regulatory networks with time-varying delays[J]. *Neurocomputing*, 2016, 173: 899-911.
- [110]Ren F, Cao J. Asymptotic and robust stability of genetic regulatory networks with time-varying delays[J]. *Neurocomputing*, 2008, 71(4-6): 834-842.
- [111]Ko K S, Lee W I, Park P G, et al. Delays-dependent region partitioning approach for stability criterion of linear systems with multiple time-varying delays[J]. *Automatica*, 2018, 87: 389-394.
- [112]Gopalsamy K, He X Z. Delay-independent stability in bidirectional associative memory networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1994, 5(6): 998-1002..
- [113]Baldi P, Atiya A F. How delays affect neural dynamics and learning[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1994, 5(4): 612-621.
- [114]Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. Stability analysis of discrete-time neural networks with time-varying delay via an extended reciprocally convex matrix inequality[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(10): 3040-3049.
- [115]Wang B, Zhong S, Liu X. Asymptotical stability criterion on neural networks with multiple time-varying delays[J]. *Applied mathematics and computation*, 2008, 195(2): 809-818.
- [116]李韶华, 杨泽坤, 王雪玮. 基于 T-S 模糊变权重 MPC 的智能车轨迹跟踪控制[J]. *机械工程学报*, 2022, 58:1-14.
- [117]李媛, 张如霞, 于忠鑫. 时滞非线性 T-S 模糊马尔科夫跳变系统的滑模控制[J]. *沈阳工业大学学报*, 2022, 44(02): 203-208.

-
- [118]陈汉, 陈珺. 基于 T-S 模糊双线性模型的事件触发滑模控制[J]. 计算机测量与控制, 2021, 29(11): 71-75+115.
- [119]Li K, Hua C C, You X, et al. Output feedback-based consensus control for nonlinear time delay multiagent systems[J]. Automatica, 2020, 111: 108669.
- [120]Hua C, Wang Y, Wu S. Stability analysis of neural networks with time-varying delay using a new augmented Lyapunov–Krasovskii functional[J]. Neurocomputing, 2019, 332: 1-9.
- [121]付秀文, 林崇. T-S 模糊广义时滞系统的耗散性及容许性分析[J]. 青岛大学学报(工程技术版), 2022, 37(03): 1-9.
- [122]Lian H H, Xiao S P, Yan H, et al. Dissipativity analysis for neural networks with time-varying delays via a delay-product-type Lyapunov functional approach[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2020, 32(3): 975-984.
- [123]Lian Z, He Y, Zhang C K, et al. Robust H_∞ control for T-S fuzzy systems with state and input time-varying delays via delay-product-type functional method[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 27(10): 1917-1930.
- [124]Seuret A, Liu K, Gouaisbaut F. Generalized reciprocally convex combination lemmas and its application to time-delay systems[J]. Automatica, 2018, 95: 488-493.
- [125]Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. An extended reciprocally convex matrix inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2017, 85: 481-485.
- [126]Wang L, Lam H K. New stability criterion for continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on cybernetics, 2018, 49(4): 1551-1556.
- [127]Li M, Shu F, Liu D, et al. Robust H_∞ control of T-S fuzzy systems with input time-varying delays: a delay partitioning method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 321: 209-222.
- [128]Kwon O M, Park M J, Park J H, et al. Stability and stabilization of T-S fuzzy systems with time-varying delays via augmented Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. Information Sciences, 2016, 372: 1-15.
- [129]Sheng Z, Lin C, Chen B, et al. An asymmetric Lyapunov-Krasovskii functional method on stability and stabilization for T-S fuzzy systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(6): 2135-2140.
- [130]Zhang Z, Wang D, Gao X Z, et al. Improved delay-dependent stability analysis for uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay[C]//2015 12th International Conference on Fuzzy Systems

- and Knowledge Discovery (FSKD). IEEE, 2015: 73-77.
- [131]Zeng H B, Park J H, Xia J W, et al. Improved delay-dependent stability criteria for T-S fuzzy systems with time-varying delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 235: 492-501.
- [132]Lian Z, He Y, Wu M. Stability and stabilization for delayed fuzzy systems via reciprocally convex matrix inequality[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 402: 124-141.
- [133]成永超, 穆连运. 基于 T-S 模糊故障树的改进型前盖开闭装置故障研究[J]. 数字海洋与水下攻防, 2022, 5(02): 172-177.
- [134]王骏海, 李玮. 基于 T-S 模糊模型的电力短期不平衡负荷预测方法研究[J]. 自动化技术与应用, 2022, 41(03): 30-34.
- [135]崔桂梅, 李舒琪, 张运强, 马祥. 基于 T-S 模型的高炉喷煤协同优化控制策略研究[J]. 钢铁研究学报, 2022, 34(03): 222-230.
- [136]Yan J J, Yang G H, Li X J. Fault detection in finite frequency domain for T-S fuzzy systems with partly unmeasurable premise variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 421: 158-177.
- [137]Li T H S, Tsai S H. T-S fuzzy bilinear model and fuzzy controller design for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on fuzzy systems, 2007, 15(3): 494-506.
- [138]Chen Z, Zhang B, Stojanovic V, et al. Event-based fuzzy control for T-S fuzzy networked systems with various data missing[J]. Neurocomputing, 2020, 417: 322-332.
- [139]Gao Q, Liu L, Feng G, et al. Universal fuzzy integral sliding-mode controllers based on T-S fuzzy models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 22(2): 350-362.
- [140]Yin Z, Jiang X, Tang L, et al. On stability and stabilization of T-S fuzzy systems with multiple random variables dependent time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2020, 412: 91-100.
- [141]Lian H, Deng P, Xiao S P, et al. New results on stability analysis for sampled-data control systems with nonuniform sampling and communication delays[J]. IEEE Access, 2019, 8: 86696-86705.
- [142]Li Y, Yu K. Adaptive fuzzy decentralized sampled-data control for large-scale nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(6): 1809-1822.
- [143]曾红兵, 颜俊杰, 肖会芹. 基于双边闭环函数的网络化采样控制系统稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2022, 39: 1-6.
- [144]Seuret A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings[J]. Automatica, 2012, 48(1): 177-182..
- [145]Zeng H B, Teo K L, He Y. A new looped-functional for stability analysis of sampled-data

- hr/>
- systems[J]. Automatica, 2017, 82: 328-331.
- [146]Xiao H Q, He Y, Wu M, et al. New Results on H_∞ Tracking Control Based on the T-S Fuzzy Model for Sampled-Data Networked Control System[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(6): 2439-2448.
- [147]Shi K, Wang J, Tang Y, et al. Reliable asynchronous sampled-data filtering of T-S fuzzy uncertain delayed neural networks with stochastic switched topologies[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 381: 1-25.
- [148]Lee S H, Selvaraj P, Park M J, et al. Improved results on H_∞ stability analysis of sampled-data systems via looped-functionals and zero equalities[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 373: 125003.
- [149]Wang G, Jia L, Zhang H. Stability and stabilization of T-S fuzzy time-delay system via relaxed integral inequality and dynamic delay partition[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29(10): 2829-2843.
- [150]Hua C, Wu S, Guan X. Stabilization of T-S fuzzy system with time delay under sampled-data control using a new looped-functional[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 28(2): 400-407.
- [151]Divya H, Sakthivel R, Liu Y. Delay-dependent synchronization of T-S fuzzy Markovian jump complex dynamical networks[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 416: 108-124.
- [152]Keel L H, Bhattacharyya S P. Robust, fragile, or optimal?[J]. IEEE transactions on automatic control, 1997, 42(8): 1098-1105.
- [153]Shen H, Yang C, Xia J, et al. Nonfragile Fuzzy Control for Nonlinear Fast Sampling Singularly Perturbed Systems Subject to Markov Jumping Parameters[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29(7): 1953-1966.
- [154]Zhang R, Zeng D, Park J H, et al. A new approach to stabilization of chaotic systems with nonfragile fuzzy proportional retarded sampled-data control[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2018, 49(9): 3218-3229.
- [155]Xie X, Lam J, Kwok K W. A novel scheme of nonfragile controller design for periodic piecewise LTV systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(12): 10766-10775.
- [156]Liu Y, Park J H, Guo B Z, et al. Further results on stabilization of chaotic systems based on fuzzy memory sampled-data control[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 26(2): 1040-1045.

- [157]Wang X, Park J H, Yang H, et al. An improved fuzzy sampled-data control to stabilization of T-S fuzzy systems with state delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 50(7): 3125-3135.
- [158]Zhu X L, Chen B, Yue D, et al. An improved input delay approach to stabilization of fuzzy systems under variable sampling[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, 20(2): 330-341.
- [159]Wu Z G, Shi P, Su H, et al. Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T-S fuzzy model[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 22(1): 153-163.
- [160]Chen J, Xu S, Zhang B. Single/multiple integral inequalities with applications to stability analysis of time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(7): 3488-3493.
- [161]Zhao J, Xu S, Park J H. Improved criteria for the stabilization of T-S fuzzy systems with actuator failures via a sampled-data fuzzy controller[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 392: 154-169.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

（一）参与的科研项目

- [1] 面向定制式木工家具制造的机器人自动化生产示范线，国家重点研发计划，批准号：2018YFB1308300，项目主要参与人。
- [2] 多变量多态性能约束下网络化关联非线性系统分散协同控制及应用，国家自然科学基金面上项目，批准号：61673335，项目主要参与人。
- [3] 国家建设高水平大学公派研究生项目。中国留学基金委，编号：CSC202108130134，资助期限：2021.10-2022.10，项目负责人。

（二）发表的学术文献

- [1] Hua C, Qiu Y, Guan X. Enhanced model-free adaptive iterative learning control with load disturbance and data dropout[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(11): 2057-2067.
- [2] Hua C, Qiu Y, Guan X. Event-triggered iterative learning containment control of model-free multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 51(12): 7719-7726.
- [3] Hua C, Qiu Y, Wang Y, et al. An augmented delays-dependent region partitioning approach for recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2021, 423: 248-254.
- [4] Qiu Y, Hua C, Wang Y. Nonfragile sampled-data control of T-S fuzzy systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022. 30(8): 3202-3210.
- [5] Qiu Y, Park J H, Hua C, et al. Stability analysis of time-varying delay T-S Fuzzy systems via quadratic-delay-product method[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022. DOI: 10.1109/TFUZZ.2022.3182786.
- [6] Qiu Y, Park J H, Hua C, et al. Interval approximation method for stability analysis of time-delayed systems[J], Journal of the Franklin Institute. (一审中)
- [7] Wang Y, Hua C, Qiu Y. Stability and Stabilization for Amplidyne Electrical Systems via A Novel Negative-Definiteness Lemma. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems,

2022.

- [8] Wang Y, Hua C, Qiu Y. Yunfei Qiu Robust stability and control for networked control systems with transmission delay and its application to 2 DoF laboratory helicopter, Journal of the Franklin Institute. (二审中)

致 谢

时光似箭，岁月如梭。读博期间的五年时光转瞬即逝，五年前的刚进入燕山大学的场景仿佛还历历在目。还记得出入校园的时候，对校园里的一切都是陌生的，对于课题方向的选择和学习模式也是陌生的。这五年来，从对学术的懵懵懂懂到现在能够完成博士毕业文献，离不开身边同学老师亲人们的帮助。

首先要感谢华长春教授的指导，在求学期间深深感受到了华老师的孜孜不倦的教诲。华老师高尚的人格，对专业的精益求精和拼搏的精神，都让我获益良多。感谢课题组的李军朋老师给我的指导，感谢课题组的师兄师姐们，课题组的同门们，课题室 B303-2 的师弟师妹们，让我们的课题室一直充满了欢乐和轻松的氛围。

感谢同届的邱学超、王毅博，师兄李阔、李志杰、李亚峰，师姐宁静华、吴双双，师弟宁鹏举，师妹李启东、孟蕊、黄舒莹、冯潇颖等对我的帮助。

感谢韩国的岭南大学的 Park 教授，感谢 207 室的小伙伴们，在韩国的一年的时光里充满了幸福与欢乐的气息。感谢 Park 教授提供的良好的学习环境，充足的物品资源和悉心的指导，使得学习的氛围更加良好。感谢王建格、李晓磊、姜婷婷、周柏玲的陪伴，在异国他乡也能感受到美好的友谊。

感谢自己的亲朋好友和父母，在求学期间，是他们给了我无数的欢乐与支持，是他们鼓励我让我做自己喜欢的事情，让我能够更加勇敢地去追求自己的目标。

感谢国家的资助，让我能够有出国交流学习的机会，开阔自己的视野。是祖国的强盛，让我能够安心的出国交流，不用为各种费用而烦恼。

也要感谢自己，五年半的时间里，有无数次想要放弃的时候，幸亏自己都坚持了下来。这一路走下来，虽然有难过、焦虑和烦闷，但是没有后悔。今后的生活中也会遇到很多困难，希望自己也能勇敢地走下来。