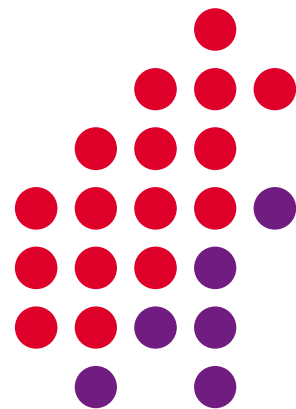


离散数学



2023年3月5日 星期日

第四篇 图论

图论是一门很有实用价值的学科，它在**自然科学、社会科学**等各领域均有很多**应用**。自上世纪中叶以来，它受计算机科学蓬勃发展的刺激，发展极其迅速，应用范围不断拓广，已渗透到诸如**语言学、逻辑学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学**以及**数学的其它分支**中。特别在计算机科学中，如**形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统**等方面均扮演着重要的角色。

引言

1

七桥问题 欧拉

2

游戏、博弈问题

3

克希荷夫定律

4

树 凯莱

5

四色猜想

6

高速数字计算机

教学目标

图是一类具有广泛**实际问题背景**的**数学模型**，有着极其丰富的内容，是数据结构等课程的先修内容。学习时应掌握好图论的**基本概念**、**基本方法**和**基本算法**，善于把**实际问题抽象**为**图论的问题**，然后用图论的方法去解决。

图论作为一个**数学分支**，有一套完整的体系和广泛的内容，本篇仅介绍图论的**初步知识**，其目的在于今后对计算机有关学科的学习和研究时，可以以图论的基本知识作为**工具**。

第9章 图

图论中所谓的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型。

点→具体事物

连线→一对具体事物之间的联系。

那么，一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的一些线的集合所构成，至于点的位置和连线的长短曲直是无关紧要的。

9.0 内容提要



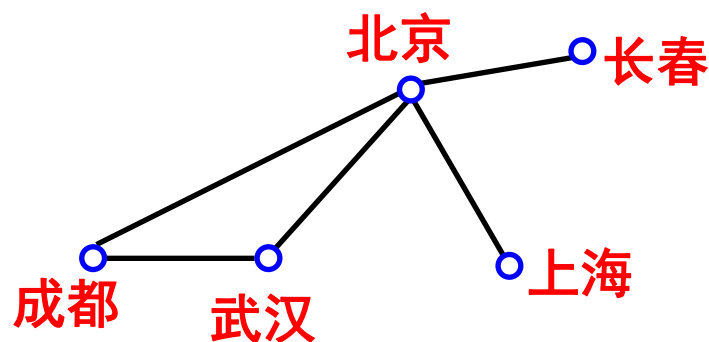
9.1 本章学习要求



9.2 图的基本概念

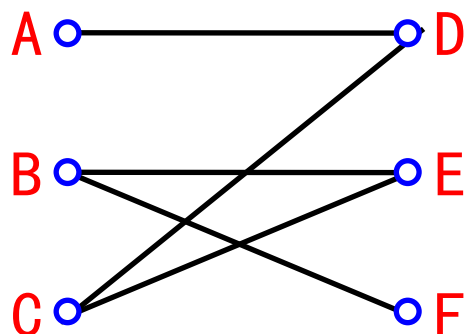
9.2.1 图的定义

例9.2.1 (1) 考虑一张航线地图，图中用点表示城市，当两个城市间有直达航班时，就用一条线将相应的点连接起来。这种航线地图的一部分如下图所示；



例9.2.1 (3)

假设有一群人和一组工作，这群人中的某些人能够做这组工作中的某些工作。例如，有3个人A、B和C，3件工作D、E和F，假设A只能做工作D，B能做工作E和F，C能做工作D和E。则这种情形可用下图表示，其中，在人和这个人能够做的工作之间画有线。



基本思想

用图形表示一组对象，其中有些对象对是有联系的。当然，这几个图形也可以表示其它的含义。例如在（3）的图中点A、B、C、D、E和F分别表示6家企业，如果某两家企业有业务往来，则其对应的点之间用线连接起来，这时的图形又反映了这6家企业间的业务关系。

对于这种图形，我们感兴趣的只是**有多少个点**和**哪些结点之间有线连接**，至于连线的长短曲直和结点的位置却无关紧要，只要求每一条线都起始于一个点，而终止于另一个点。

定义9.2.1

一个图 (Graph) 是一个序偶 $\langle V, E \rangle$, 记为 $G = \langle V, E \rangle$, 其中:

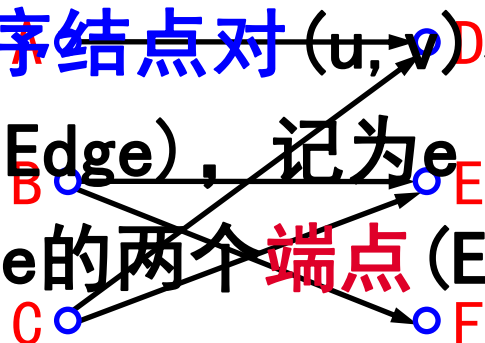
(1) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是有限非空集合, v_i 称为结点 (Nodal Point), 简称点 (Point), V 称为结点集 (Nodal Set)。

(2) E 是有限集合, 称为边集 (Frontier Set)。 E 中的每个元素都有 V 中的结点对与之对应, 称之为边 (Edge)。

与边相关的几个概念

定义9.2.1中的结点对即可以是**无序的**，也可以是**有序的**。

若边 e 与**无序结点对** (u, v) 相对应，则称 e 为**无向边** (Undirected Edge)，记为 $e = (u, v) = (v, u)$ ，这时称 u 、 v 是边 e 的两个**端点** (End point)。



若边 e 与**有序结点对** $\langle u, v \rangle$ 相对应，则称 e 为**有向边** (Directed Point) (或**弧**)，记为 $e = \langle u, v \rangle$ ，这时称 u 为 e 的**始点** (Initial Point) (或**弧尾**)， v 为 e 的**终点** (terminal Point) (或**弧头**)，统称为 e 的**端点**。

9.2.2 图的表示

对于一个图 G ，如果将其记为 $G = \langle V, E \rangle$ ，并写出 V 和 E 的集合表示，这称为**图的集合表示**。

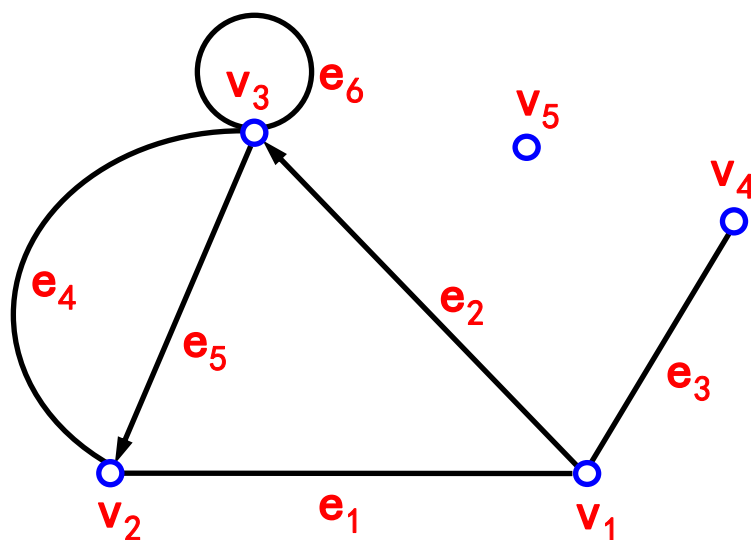
用**小圆圈**表示 V 中的结点，用由 u 指向 v 的**有向线段或曲线**表示有向边 $\langle u, v \rangle$ ，无向线段或曲线表示无向边 (u, v) ，这称为**图的图形表示**。

例9.2.2

设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，这里 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ， $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ，其中 $e_1 = (v_1, v_2)$ ， $e_2 = \langle v_1, v_3 \rangle$ ， $e_3 = (v_1, v_4)$ ， $e_4 = (v_2, v_3)$ ， $e_5 = \langle v_3, v_2 \rangle$ ， $e_6 = (v_3, v_3)$ 。试画出图 G 的图形，并指出哪些是有向边，哪些是无向边？

例9.2.2 解

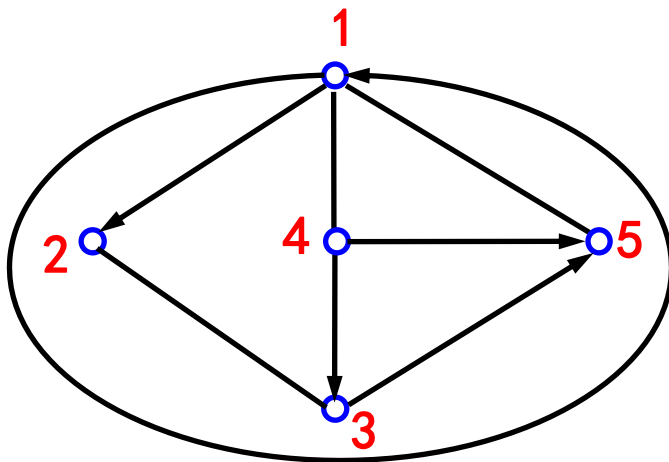
G的图形如下图所示。



G中的 e_1 、 e_3 、 e_4 、 e_6 是无向边， e_2 、 e_5 是有向边。

例9.2.3

设图 $G = \langle V, E \rangle$ 的图形如下图所示，试写出 G 的集合表示。



解 图 G 的集合表示为 $G = \langle V, E \rangle = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \} \rangle$ 。

两种描述方法的优缺点

- 用集合描述图的优点是精确，但抽象不易理解；
- 用图形表示图的优点是形象直观，但当图中的结点和边的数目较大时，使用这种方法是很不方便的，甚至是不可能的。

图的矩阵表示

我们在学习常常需要分析图并在图上执行各种过程和算法，也许必须用计算机来执行这些算法，因此必须把图的结点和边传输给计算机，由于集合与图形都不适合计算机处理，所以要找到一种新的表示图的方法，这就是图的矩阵表示。

由于矩阵的行和列有固定的次序，因此在用矩阵表示图时，先要将图的结点进行排序，若不具体说明排序，则默认为书写集合 V 时结点的顺序。

定义9.2.2

设图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序, 则 n 阶方阵 $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$ 称为 G 的邻接矩阵 (Adjacency Matrix), 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \text{ 或 } \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

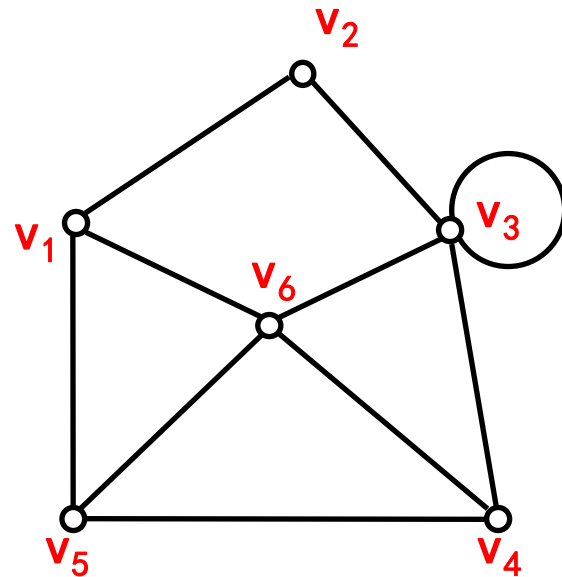
例9.2.4

试写出下图所示图G的邻接矩阵。

解 若结点排序为 $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$ ，则

其邻接矩阵

$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



说明

(1) 图 $G = \langle V, E \rangle$ 的邻接矩阵依赖于 V 中元素的次序。

(2) G 的任何一个邻接矩阵可以从 G 的另一邻接矩阵中通过交换某些行和相应的列而得到。

(3) 如果我们略去由结点排序不同而引起的邻接矩阵的不同，则图与邻接矩阵之间是一一对应的。

因此，我们略去这种由于 V 中元素的次序而引起的邻接矩阵的任意性，只选 V 中元素的任一种次序所得出的邻接矩阵，作为图 G 的邻接矩阵。

例

图中的结点重排次序为
 $v_5 v_2 v_1 v_3 v_6 v_4$ ，得另一个邻接
 矩阵

$$A_{1G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

在邻接矩阵 A_{1G} 中，如果先交换第1、3行，而后交换第1、3列；接着交换第3、4行，再交换第3、4列；接着交换第5、6行，再交换第5、6列；接着交换第4、5行，再交换第4、5列。那么就能由邻接矩阵 A_{1G} 得到邻接矩阵 A_G 。

9.2.3 图的操作

定义9.2.3 设图 $G = \langle V, E \rangle$ 。

1. 设 $e \in E$ ，用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e 得到的图，称为**删除边 e** 。又设 $E' \subseteq E$ ，用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中所有边得到的图，称为**删除 E'** 。
2. 设 $v \in V$ ，用 $G-v$ 表示从 G 中去掉结点 v 及 v 关联的所有边得到的图，称为**删除结点 v** 。又设 $V' \subset V$ ，用 $G-V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有结点及关联的所有边得到的图，称为**删除 V'** 。

定义9.2.3 (续)

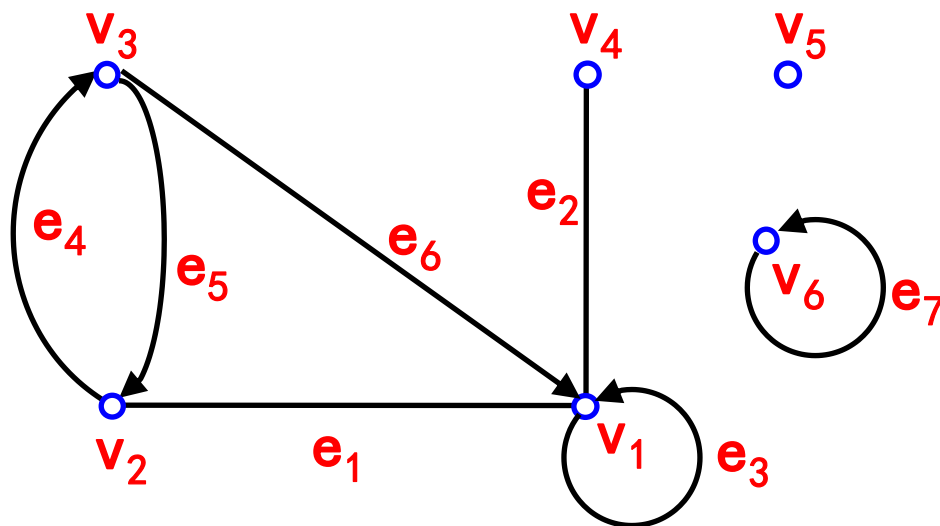
3. 设 $e = (u, v) \in E$, 用 $G \setminus e$ 表示从 G 中删除 e , 将 e 的两个端点 u, v 用一个新的结点 w 代替, 使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边, 称为**边 e 的收缩**。一个图 G 可以收缩为图 H , 是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。
4. 设 $u, v \in V$ (u, v 可能相邻, 也可能不相邻), 用 $G \cup (u, v)$ 表示在 u, v 之间加一条边 (u, v) , 称为**加新边**。

9.2.4 邻接点与邻接边

定义9.2.4 在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 若两个结点 v_i 和 v_j 是边 e 的端点, 则称 v_i 与 v_j 互为邻接点 (Adjacent Point), 否则 v_i 与 v_j 称为不邻接的; 具有公共结点的两条边称为邻接边 (Adjacent Edge); 两个端点相同的边称为环 (Ring) 或自回路 (Self-Loop); 图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点 (Isolated Point); 仅由孤立结点组成的图称为零图 (Null Graph); 仅含一个结点的零图称为平凡图 (Trivial Graph); 含有 n 个结点, m 条边的图, 称为 (n, m) 图。

例9.2.5

试写出下图所示图G的所有结点的邻接点、所有边的邻接边，并指出所有的孤立结点和环。



例9.2.5 分析

根据定义9.2.4，如果两个结点间有边相连，那么它们互为邻接点；如果两条边有公共结点，那么它们互为邻接边。需要注意的是，**只要当一个结点处有环时，它才是自己的邻接点**；由于一条边有两个端点，**在计算邻接边时要把这两个端点都算上**，例如 e_2 和 e_4 都是 e_1 的邻接边。所有边都是自己的邻接边。

例9. 2. 5 解

图G所有结点的邻接点和孤立结点，所有边的邻接边和环如下表所示。图G既不是平凡图，也不是零图，而是一个(6, 7)图。

结点	邻接点	是否孤立结点	边	邻接边	是否环
v_1	v_1, v_2, v_3, v_4	否	e_1	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
v_2	v_1, v_3	否	e_2	e_1, e_2, e_3, e_6	否
v_3	v_1, v_2	否	e_3	e_1, e_2, e_3, e_6	是
v_4	v_1	否	e_4	e_1, e_4, e_5, e_6	否
v_5	无	是	e_5	e_1, e_4, e_5, e_6	否
v_6	v_6	否	e_6	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
			e_7	e_7	是

9.2.5 图的分类

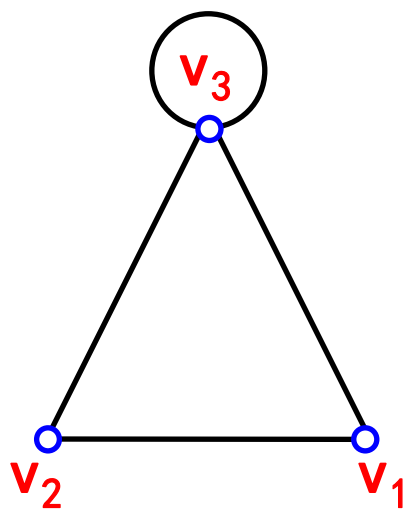
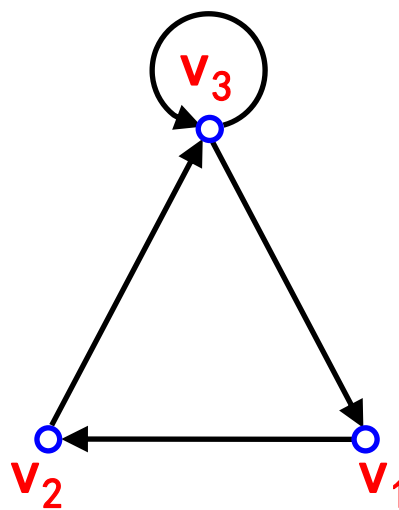
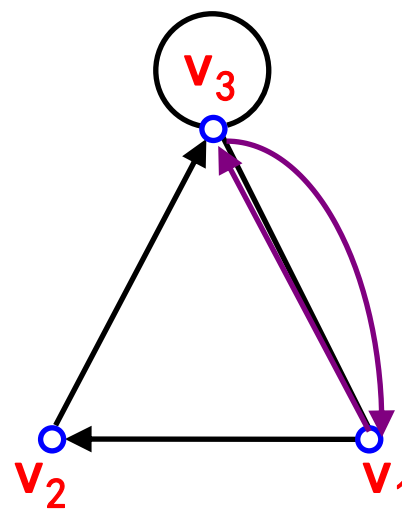
1. 按边有无方向分类

定义9.2.5 每条边都是**无向边**的图称为**无向图** (Undirected Graph); 每条边都是**有向边**的图称为**有向图** (Directed Graph); 有些边是**无向边**, 而另一些边是**有向边**的图称为**混合图** (Mixed Graph)。

第6章的关系图都是有向图, 这时邻接矩阵就是关系矩阵。

例9.2.6

试判断下图所示的三个图是无向图、有向图，还是混合图？

 G_1  G_2  G_3

分析 判断无向图、有向图和混合图，仅仅看边有无方向就行了。
解 G_1 为无向图， G_2 为有向图， G_3 为混合图。

2. 按有无平行边分类

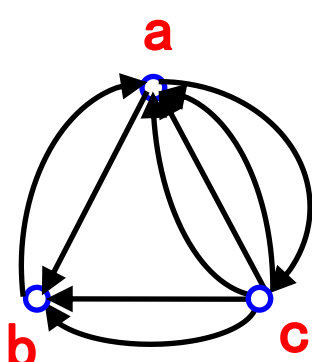
定义9.2.6 在有向图中，两结点间(包括结点自身间)若有**同始点和同终点**的几条边，则这几条边称为**平行边**(Parallel Edge)；

在无向图中，两结点间(包括结点自身间)若有几条边，则这几条边称为**平行边**。

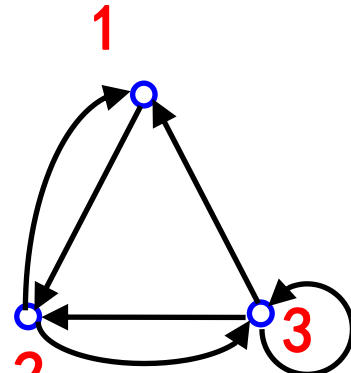
两结点 a 、 b 间相互**平行的边的条数**称为边 (a, b) 或 $\langle a, b \rangle$ 的**重数**(Repeated Number)。

含有平行边的图称为**多重图**(Multigraph)；非多重图称为**线图**(Line Graph)；

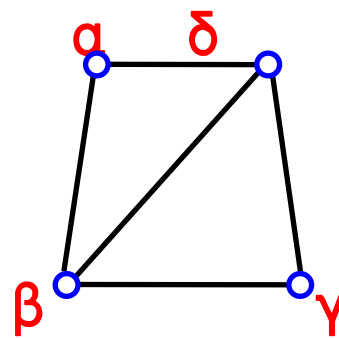
无环的线图称为**简单图**(Simple Graph)。



G₂



G₃



G₄

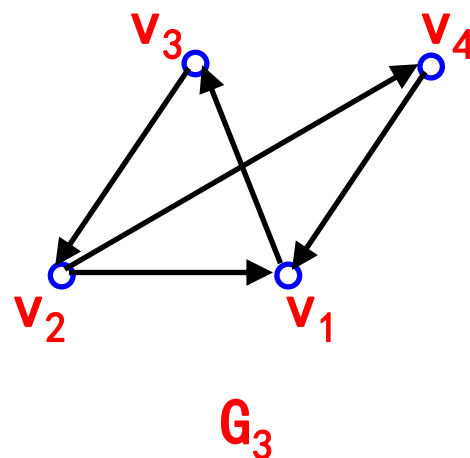
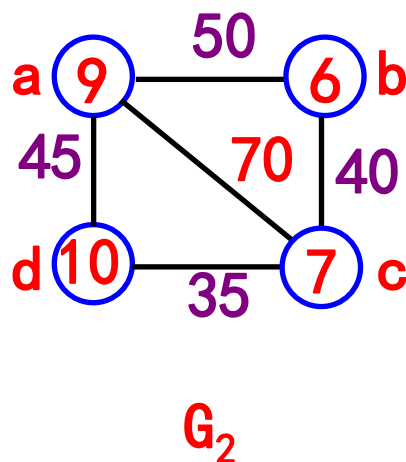
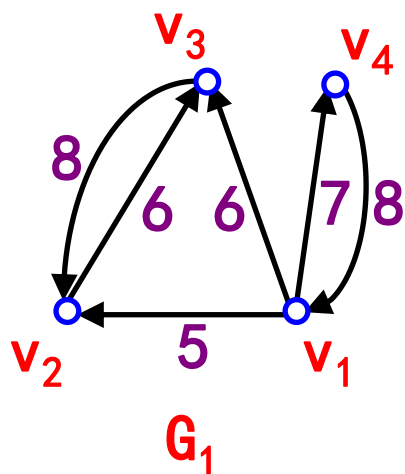
2023/3/5

3. 按边或结点是否含权分类

定义9.2.7 赋权图 (Weight Graph) G 是一个**三重组** $\langle V, E, g \rangle$ 或**四重组** $\langle V, E, f, g \rangle$, 其中 V 是结点集合, E 是边的集合, f 是从 V 到非负实数集合的**函数**, g 是从 E 到非负实数集合的**函数**。

例9.2.8

下图所示的图哪个是赋权图，哪个是无权图？是赋权图的请写出相应的函数。



例9.2.8 解

在图中，对每条边都赋予非负实数值，不是都对每条边和每个图结点都赋予非负实数值的图就是赋权图。图 G_1 的每条边都赋予了非负实数值，因此图 G_1 是赋权图。图 G_2 的每条边和每个结点都赋予了非负实数值，因此图 G_2 是赋权图。而图 G_3 的边没有赋予非负实数值，因此图 G_3 不是赋权图。

$$g_1(\langle v_3, v_2 \rangle) = 8, \quad g_1(\langle v_4, v_1 \rangle) = 8.$$

$$f_2(a) = 9, \quad f_2(b) = 6, \quad f_2(c) = 7, \quad f_2(d) = 10;$$

$$g_2((a, b)) = 50, \quad g_2((a, c)) = 70,$$

$$g_2((a, d)) = 45, \quad g_2((b, d)) = 40,$$

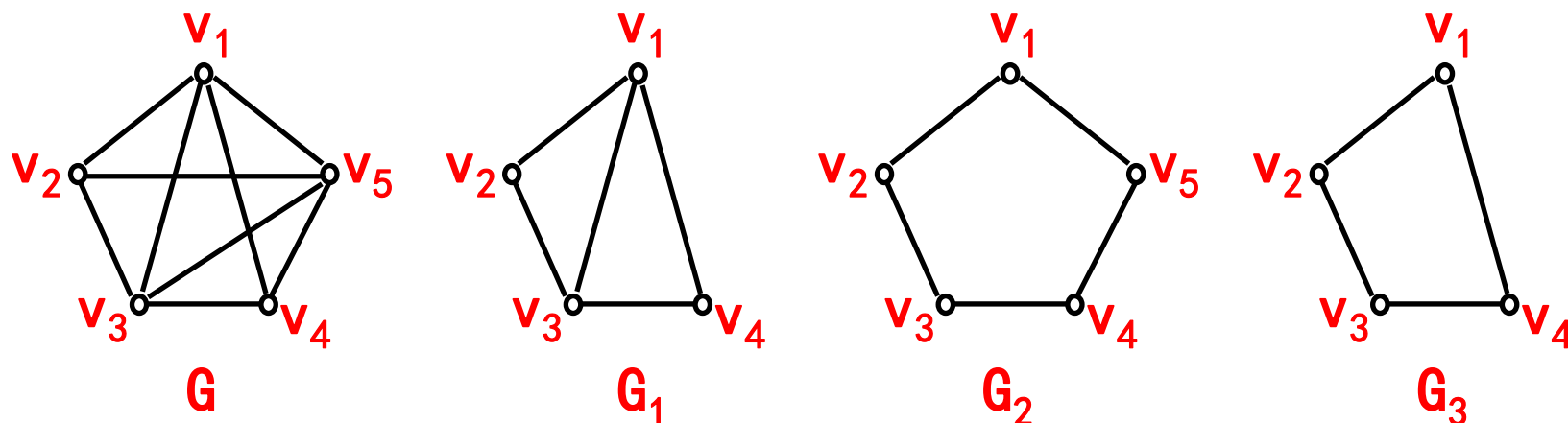
$$g_2((c, d)) = 35,$$

9.2.6 子图与补图

定义9.2.8 设有图 $G = \langle V, E \rangle$ 和图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 。

1. 若 $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$, 则称 G_1 是 G 的**子图** (Subgraph), 记为 $G_1 \subseteq G$ 。
2. 若 $G_1 \subseteq G$, 且 $G_1 \neq G$ (即 $V_1 \subset V$ 或 $E_1 \subset E$), 则称 G_1 是 G 的**真子图** (Proper Subgraph), 记为 $G_1 \subset G$ 。
3. 若 $V_1 = V$, $E_1 \subseteq E$, 则称 G_1 是 G 的**生成子图** (Spanning Subgraph)。
4. 设 $V_2 \subseteq V$ 且 $V_2 \neq \emptyset$, 以 V_2 为结点集, 以两个端点均在 V_2 中的边的全体为边集的 G 的子图, 称为 V_2 导出的 G 的子图, 简称 V_2 的**导出子图** (Induced Subgraph)。

例9.2.9



判断下图中，图 G_1 、 G_2 和 G_3 是否是图 G 的子图、真子图、生成子图、导出子图？
解 G_1 、 G_2 和 G_3 都是图 G 的子图、真子图； G_3 是图 G 的生成子图； G_1 是图 G 的 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 的导出子图。

注 每个图都是它自身的子图、生成子图和导出子图。

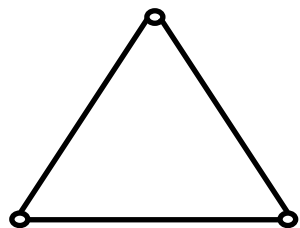
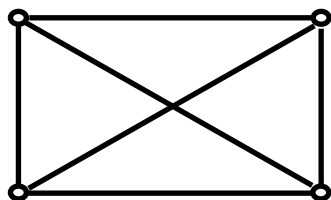
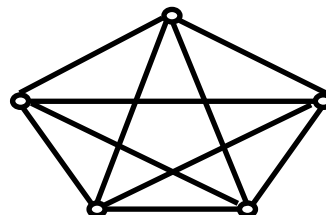
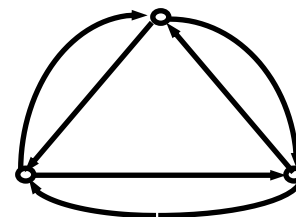
定义9.2.9

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个具有 n 个结点的无向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有边相连，则称 G 为无向完全图 (Undirected Complete Graph)，简称 G 为完全图 (Complete Graph)，记为 K_n 。

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个具有 n 个结点的有向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称 G 为有向完全图 (directed Complete Graph)，在不发生误解的情况下，也记为 K_n 。

对于完全图来说，其邻接矩阵除主对角元为 0 外，其它元素均为 1。

例

 K_3  K_4  K_5  K_3

无向完全图 K_n 的边数为 $C(n, 2) = \frac{1}{2}n(n-1)$

有向完全图 K_n 的边数为 $P(n, 2) = n(n-1)$

定义9.2.10

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为简单图, $G' = \langle V, E_1 \rangle$ 为完全图, 则称 $G_1 = \langle V, E_1 - E \rangle$ 为 G 的补图 (Complement of Graph), 记为 \bar{G} .

注 在定义9.2.10中, 当 G 为有向图时, 则 G' 为有向完全图; 当 G 为无向图时, 则 G' 为无向完全图。

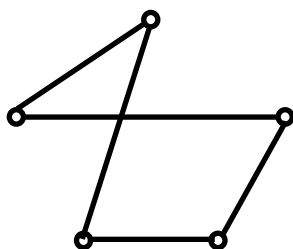
G 的补图也可理解为从结点集 V 的完全图中删除 G 中的边剩下的图, 即 G 与其补图的结点集是相同的, 边集是相对于完全图的边集为全集的补集。

显然, 若 $G_1 = \bar{G}$, 则 $G = \overline{G_1}$, 即它们互为补图。

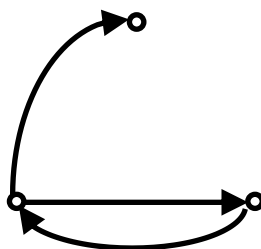
K_n 的补图为 n 个结点的零图。

例9.2.10

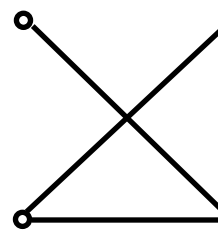
求下图中图(a)、(b)、(c)的补图。



(a)



(b)



(c)

注意，孤立结点一定不要漏了，否则结点集就不同。

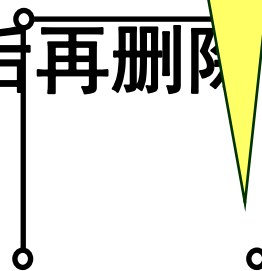
解析 上图中图(a)、(b)、(c)的补图分别为图(a)、(b)、(c)。对于完全图的边集为全集的补集。具体做的时候，可先补充一些边使其变为完全图，然后再删除原来图中的边得到。



(a)



(b)



(c)

利用邻接矩阵描述补图

若设简单图 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则它的补图 \bar{G} 的邻接矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 有：

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

例9.2.11

证明：在任意6个人的集会上，总会有3个人相互认识或者有3个人互相不认识（假设认识是相互的）。

分析 把6个人作为结点，相互认识的人之间连边，这个问题就转化图的问题。可以利用图及其补图来解这个问题。

证明

把参加集会的人作为结点，相互认识的人之间连边，得到图 G ，设为 G 的补图，这样问题就转化为证明 G 或中至少有一个完全子图 K_3 。

考虑完全图 K_6 ，结点 v_1 与其余5个结点各有一条边相连，这5条边一定有3条在 G 或中，不妨设有3条边在 G 中，设这3条边为 (v_1, v_2) 、 (v_1, v_3) 、 (v_1, v_4) 。

考虑结点 v_2, v_3, v_4 。若 v_2, v_3, v_4 在 G 中无边相连，则 v_2, v_3, v_4 相互不认识；若 v_2, v_3, v_4 在 G 中至少有一条边相连，例如 (v_2, v_3) ，则 v_1, v_2, v_3 就相互认识。因此，总会有3个人相互认识或者有3个人互相不认识。

9.2.7 结点的度数与握手定理

定义9.2.11 (1) 图 $G = \langle V, E \rangle$ 中以结点 $v \in V$ 为端点的边数(有环时计算两次)称为结点 v 的**度数**(Degree), 简称**度**, 记为 $\deg(v)$ 。

(2) 有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中以结点 v 为**始点的边数**称为 v 的**出度**(Out-Degree), 记为 $\deg^+(v)$; 以结点 v 为**终点的边数**称为 v 的**入度**(In-Degree), 记为 $\deg^-(v)$ 。显然, $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ 。

(3) 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, **度数为1**的结点称为**悬挂结点**(Hanging Point), 以悬挂结点为端点的边称为**悬挂边**(Hanging Edge)。

利用邻接矩阵描述

设图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

若 G 是无向图，则 A 中第 i 行元素是由结点 v_i 所关联的边所决定，其中为1的元素数目等于 v_i 的度数，即，

$$\deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} + a_{ii}$$

$$\deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} + a_{ii}$$

利用邻接矩阵描述

若G是有向图，则A中第i行元素是由结点 v_i 为始点的边所决定，其中为1的元素数目等于 v_i 的出度，即

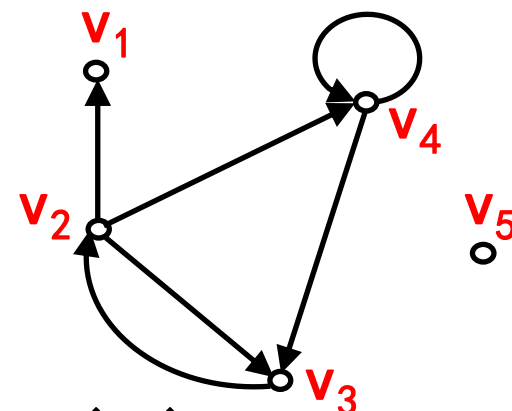
$$\deg^+(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik}$$

A中第i列元素是由结点 v_i 为终点的边所决定，其中为1的元素数目等于 v_i 的入度，即。

$$\deg^-(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki}$$

例9.2.12

求右图中所有结点的度数、出度和入度，指出悬挂结点和为悬挂边，并用邻接矩阵验证之。



该图的邻接矩阵为 $\deg^+(v_1) = 0$, $\deg^-(v_1) = 1$

$\deg(v_2) = 4$, $\deg^+(v_2) = 3$, $\deg^-(v_2) = 1$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg^+(v_3) = 1$, $\deg^-(v_3) = 2$,
 $\deg(v_4) = 4$, $\deg^+(v_4) = 2$, $\deg^-(v_4) = 2$, $\deg(v_5) = 0$, $\deg^+(v_5) = 0$, $\deg^-(v_5) = 0$.
 容易验证，上面的计算是正确的。例如A中第二行元素之和为3，即 v_2 的出度为3。
 v_1 为悬挂结点， $\langle v_2, v_1 \rangle$ 为悬挂边。

定理9.2.1 (握手定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

证明 这个结果是图论中的第一个基本定理，它是由欧拉在1736年最先给出的。这个定理的证明非常简单。设想许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

推论9.2.1

图中度数为奇数的结点个数为偶数。

证明 设图 $G = \langle V, E \rangle$, $V_1 = \{v \mid v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为奇数} \}$, $V_2 = \{v \mid v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为偶数} \}$ 。

显然, $V_1 \cap V_2 = \phi$, 且 $V_1 \cup V_2 = V$, 于是

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|$$

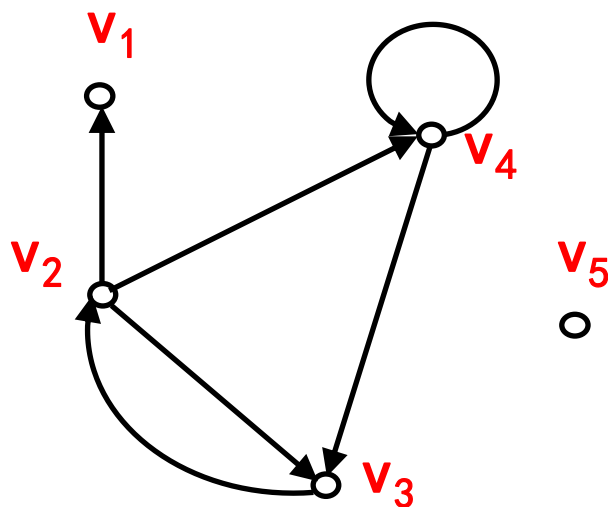
定理9.2.2

有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$$

定义9.2.12

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为图 G 的结点集，称 $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ 为 G 的**度数序列** (Degree Sequence)。



上图的度数序列为 $(1, 4, 3, 4, 0)$ 。

例9.2.14

(1) (3, 5, 1, 4), (1, 2, 3, 4, 5)能成为图的度数序列吗? 为什么?

(2) 已知图G中有15条边, 2个度数为4的结点, 4个度数为3的结点, 其余结点的度数均小于等于2, 问G中至少有多少个结点? 为什么?

解 (1) 由于这两个序列中, 奇数的个数均为奇数, 由推论9.2.1知, 它们都不能成为图的度数序列。

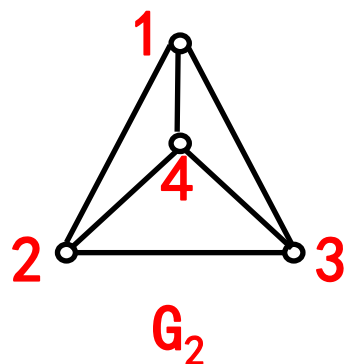
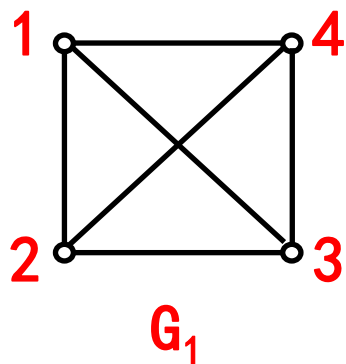
(2) 假设顶点数为 n , 则根据握手定理

$$2 \times 4 + 4 \times 3 + (n - 2 - 4) \times 2 \geq 15 \times 2$$

$$n \geq 11$$

9.2.8 图的同构

图是表达事物之间关系的工具，因此，图的最本质的内容是结点和边的关联关系。而在实际画图时，由于结点的位置不同，边的长短曲直不同，同一事物间的关系可能画出不同形状的图来。例如下图中的两个图 G_1 和 G_2 实际上是同一个图 K_4 。



定义9.2.13

设两个图 $G = \langle V, E \rangle$ 和 $G' = \langle V', E' \rangle$ ，如果存在**双射**函数 $g: V \rightarrow V'$ ，使得对于任意的 $e = (v_i, v_j)$ （或者 $\langle v_i, v_j \rangle \in E$ ）当且仅当 $e' = (g(v_i), g(v_j))$ （或者 $\langle g(v_i), g(v_j) \rangle \in E'$ ），并且 e 与 e' 的**重数相同**，则称 G 与 G' **同构** (Isomorphism)，记为 $G \cong G'$ 。

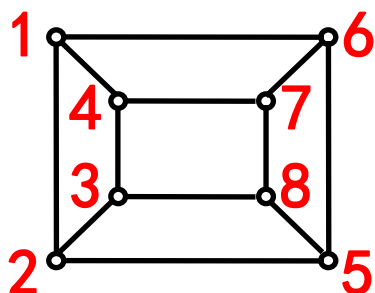
对于同构，形象地说，若图的结点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，一个图可以变形为另一个图，那么这两个图是同构的。

两个图同构的必要条件

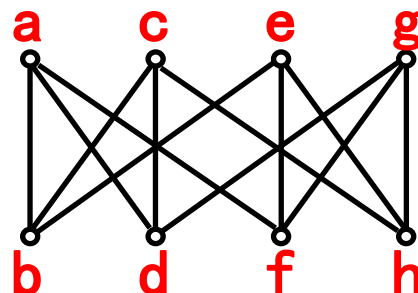
- (1) 结点数目相同；
- (2) 边数相同；
- (3) 度数相同的结点数相同。

例9.2.14

试证明下图中, $G \cong G'$ 。



G



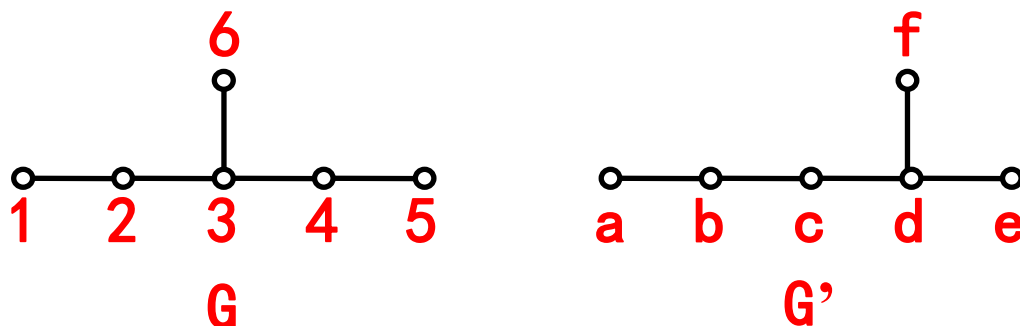
G'

证明 构造结点图间的双射函数找到满足要求的结点集之间的双射函数 f (现在还没有好的办法) 只有凭经验去试 $f(1)=b, f(2)=d, f(3)=e, f(4)=c, f(5)=f, f(6)=g, f(7)=h, f(8)=a$

容易验证, f 满足定义9.2.13, 所以 $G \cong G'$ 。

例9.2.15

证明下图中， G 与 G' 不同构



注意 图同构的必要条件通常是充分条件。在上图的 G 和 G' 两个图，虽然满足以上两个条件，但不同构。 (v) 的度数一定相同，因此有 $f(3)=d$ 。 G 中3与寻找度数简单有效的接法来判断图的同构度是图论中的一个重要问题。

9.2.9 图的难点

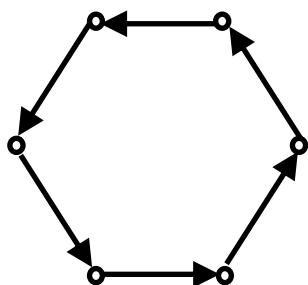
- 图是由两个集合构成的，可以利用集合的有关知识来研究它，如子图、完全图、补图等；
- 图的计算机表示就是它的邻接矩阵，实际中的图都是很大的，可能有成千上万的结点和边，用手工处理是很难想象的；
- 判断图的同构，是图论中一个重要而未解决的问题。现在还没有好的办法，只有凭经验按定义去试；
- 握手定理是图论的基本定理，很多理论都是以它为基础的，必须熟练掌握，并能灵活运用。

9.2.10 图的应用

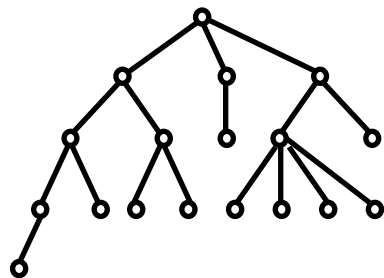
自从克希荷夫运用图论从事电路网络的拓扑分析以来，尤其是近几十年来，网络理论的研究和应用十分引人注目，电路网络、运输网络、信息网络等与工程和应用紧密相关的课题受到了高度的重视，其中多数问题都与优化有关，涉及到问题的费用、容量、可靠性和其它性能指标，有重要的应用价值。网络应用的一个重要方面就是通讯网络。如电话网络、计算机网络、管理信息系统、医疗数据网络、银行数据网络、开关网络等等。这些网络的基本要求是网络中各个用户能够快速安全地传递信息，不产生差错和故障，同时使建造和维护网络所需费用低。因此通讯网络涉及的因素很多，我们就不详细介绍，仅说明一些基本知识。

通讯网络

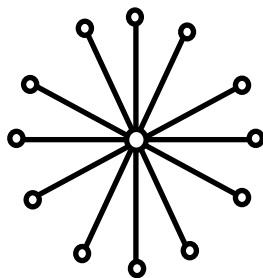
通讯网络中最重要的整体问题之一是网络的结构形式。通讯网络是一个强连通的有向图，根据用途和各种性能指标有着不同的结构形式，下图给出了一些典型的结构。



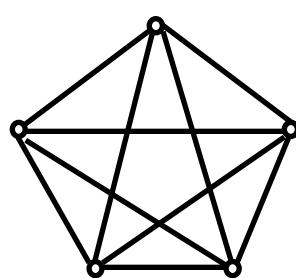
(a)



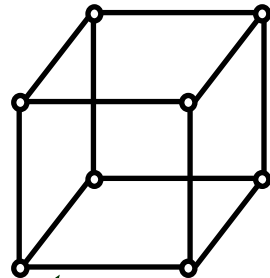
(b)



(c)



(d)



(e)

环 (Ring)
型网络

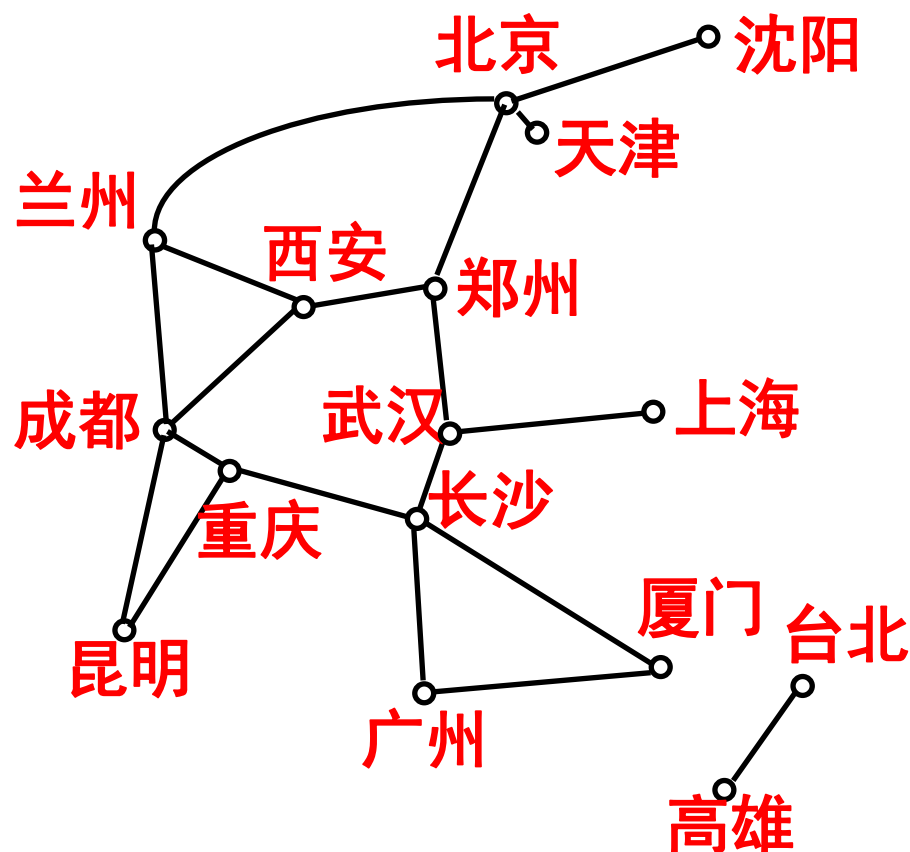
树 (Tree)
型网络

星
分布式 (Dist)
型网络

立方体 (Cube)
型网络

9.3 通路、回路与连通性

右图是中国铁路交通图的一部分，如果一个旅客要从成都乘火车到北京，那么他一定会经过其它车站；而旅客不可能从成都乘火车到达台北。这就引出了图的通路与连通的概念。



9.3.1 通路与回路

通路与回路是图论中两个重要的基本概念。本小节所述定义一般来说既适合有向图，也适合无向图，否则，将加以说明或分开定义。

定义9.3.1 (续)

给定图 $G=\langle V, E \rangle$ 中 **结点和边** 相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k.$$

1. 若 Γ 中边 e_i 的两端点是 v_{i-1} 和 v_i (G 是有向图时要求 v_{i-1} 与 v_i 分别是 e_i 的始点和终点), $i=1, 2, \cdots, k$, 则称 Γ 为 **结点 v_0 到结点 v_k 的通路** (Entry).
2. v_0 和 v_k 分别称为此通路的 **始点和终点**, 统称为通路的 **端点**。通路中 **边的数目 k** 称为此通路的 **长度** (Length)。当 $v_0=v_n$ 时, 此通路称为 **回路** (Circuit)。

定义9.3.1

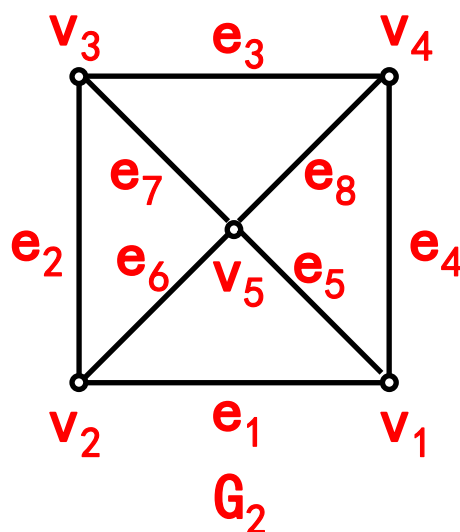
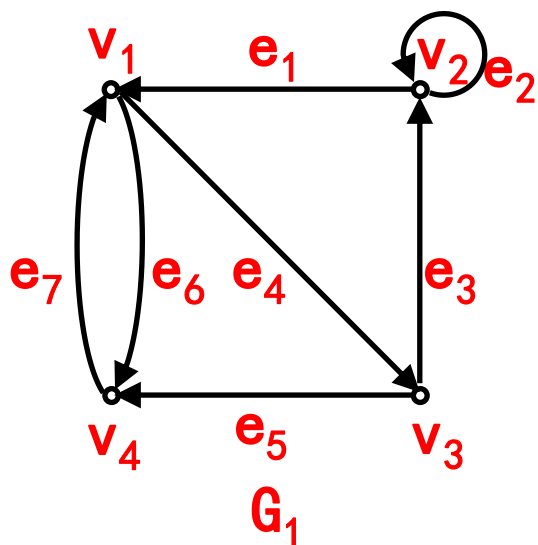
2. 若通路中的所有边互不相同，则称此通路为简单通路 (Simple Entry) 或一条迹；若该通路是回路，则称此回路为简单回路 (Simple Circuit) 或一条闭迹。
3. 若通路中的所有结点互不相同（从而所有边互不相同），则称此通路为基本通路 (Basic Entry) 或者初级通路、路径；若回路中除 $v_0=v_k$ 外的所有结点互不相同（从而所有边互不相同），则称此回路为基本回路 (Basic Circuit) 或者初级回路、圈。

说明

1. 回路是通路的特殊情况。
2. 基本通路（回路）一定是简单通路（回路），但反之不真。
3. 在不会引起误解的情况下，一条通路 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$ 也可以用边的序列 $e_1e_2\cdots e_n$ 来表示，这种表示方法对于有向图来说较为方便。在线图中，一条通路 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$ 也可以用结点的序列 $v_0v_1v_2\cdots v_n$ 来表示。

例9.3.1

判断下图 G_1 中的回路 $v_3e_5v_4e_7v_1e_4v_3e_3v_2e_1v_1e_4v_3$ 、 $v_3e_3v_2e_2v_2e_1v_1e_4v_3$ 、 $v_3e_3v_2e_1v_1e_4v_3$ 是否是简单回路、基本回路？图 G_2 中的通路 $v_1e_1v_2e_6v_5e_7v_3e_2v_2e_6v_5e_8v_4$ 、 $v_1e_5v_5e_7v_3e_2v_2e_6v_5e_8v_4$ 、 $v_1e_1v_2e_6v_5e_7v_3e_3v_4$ 是否是简单通路、基本通路？并求其长度。



说明

在图 G_1 中，简单回路 $v_3e_3v_2e_2v_2e_1v_1e_4v_3$ 既可以用边的序列 $e_3e_2e_1e_4$ 来表示，也可以用结点的序列 $v_3v_2v_2v_1v_3$ 来表示；

在图 G_2 中，简单通路 $v_1e_5v_5e_7v_3e_2v_2e_6v_5e_8v_4$ 既可以用边的序列 $e_5e_7e_2e_6e_8$ 来表示，也可以用结点的序列 $v_1v_5v_3v_2v_5v_4$ 来表示。

定理9.3.1

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A_m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$ 。则

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$ 为结点 v_i 到自身的长度为 k 的回路数目;
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$ 为 G 中长度为 m 的通路 (含回路) 总数。

定理9.3.1 证明

对 m 用数学归纳法。

(1) 当 $m = 1$ 时, 显然成立。

(2) 设 $m = k$ 时, 定理成立。

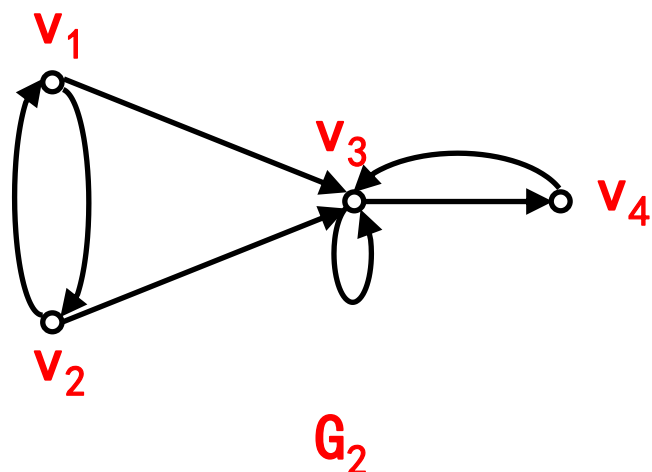
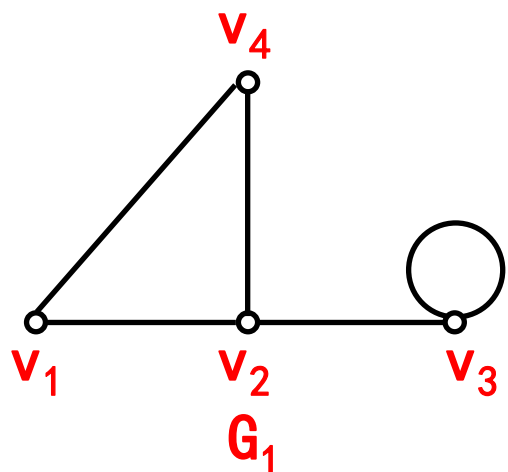
(3) 证明 $m = k+1$ 时定理成立。

因为 $(a_{ij}^{(k+1)})_{n \times n} = A^{k+1} = A \cdot A^k = \left(\sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)} \right)_{n \times n}$, 故 $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$

而 a_{ip} 是结点 v_i 到 v_p 长度为1的通路数目, $a_{pj}^{(k)}$ 是结点 v_p 到 v_j 长度为 k 的通路数目, 故 $a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 经过 v_p 到结点 v_j 的长度为 $k+1$ 的通路数目, 那么 $\sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 到结点 v_j 的长度为 $k+1$ 的通路数目。

例9.3.2

求下图中图 G_1 和 G_2 的从结点 v_1 到结点 v_3 长度为2和3的通路数目及所有长度为2和3的通路数目。



分析 利用定理9.3.3，求图中长度为 m 的通路数目，只需要先写出图的邻接矩阵，然后计算邻接矩阵的 m 次方即可。

例9.3.2 解

在图中， G_1 是无向线图， G_2 是有向线图，它们的邻接矩阵分别为：

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义9.3.2

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, $v_i, v_j \in V$ 。

(1) 如果从 v_i 到 v_j 存在通路, 则称 v_i 到 v_j 是可达的, 否则称 v_i 到 v_j 不可达。规定: 任何结点到自己都是可达的。

(2) 如果 v_i 到 v_j 可达, 则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线 (Geodesic), 从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离 (Distance), 记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达, 则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

说明

$d(v_i, v_j)$ 满足下列性质:

(1) $d(v_i, v_j) \geq 0$;

(2) $d(v_i, v_i) = 0$;

(3) $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$ 。

1、对于无向图，一定有若 v_i 到 v_j 可达，则 v_j 到 v_i 可达；也有 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ 。

2、对于有向图， v_i 到 v_j 可达，不一定有 v_j 到 v_i 可达；也不一定有 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ 。

定理9.3.2

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n-1$ 的通路。

定理9.3.3 在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的回路。

几个结论

推论9.3.1 在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n-1$ 的基本通路。

推论9.3.2 在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的基本回路。

定理9.3.4（利用邻接矩阵判断可达）

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵,

$$A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}, m=1, 2, \dots, n;$$

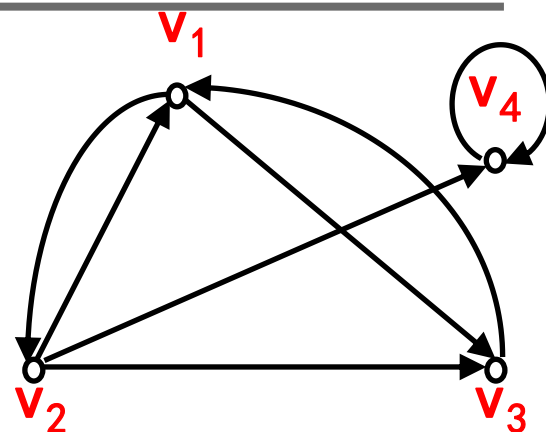
$$B^n = (b_{ij}^{(n)})_{n \times n} = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n.$$

则有: 如果 $b_{ij}^{(n)} > 0$, 那么从 v_i 到 v_j 可达, 否则不可达; 并且

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty, & \text{如果所有 } a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{ij}^{(n)} \text{ 均为 } 0 \\ k, & \text{否则, } k = \min \{m \mid a_{ij}^{(m)} \neq 0, m=1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

例9.3.3

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$+ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

定义9.3.3(可达矩阵)

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个线图，称 n 阶方阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的可达性矩阵 (Accessibility Matrix)，其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少存在一条非零长度的通路} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

说明

无向图的可达性矩阵是对称的，而有向图的可达性矩阵则不一定对称。

如果我们知道矩阵 B_n ，则只需将其中的非零元素写成1，就可得到可达性矩阵，即

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ij}^{(n)} \neq 0 \\ 0, & b_{ij}^{(n)} = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

例9.3.3中图的可达性矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

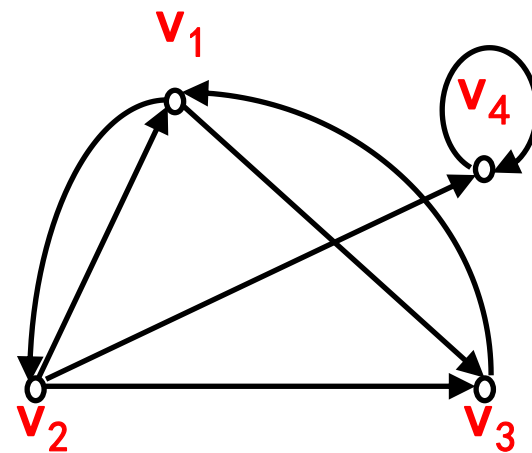
定理9.3.5

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图， A 、 P 分别是 G 的邻接矩阵和可达性矩阵，则有

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)} = \bigvee_{i=1}^n A^{(i)}$$

这里， $A^{(i)}$ 表示做矩阵布尔乘法的 i 次幂。

例9.3.4

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


$$\vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.3.2 无向图的连通性

定义9.3.4 若无向图 G 中的任何两个结点都是可达的，则称 G 是**连通图** (Connected Graph)，否则称 G 是**非连通图** (Unconnected Graph) 或 **分离图** (Separated Graph)。

无向完全图 K_n ($n \geq 1$) 都是连通图，而多于一个结点的零图都是非连通图。

定理9.3.6

无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 中结点之间的可达关系 R 定义如下：

$$R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V, u \text{ 到 } v \text{ 可达} \},$$

则 R 是 V 上的等价关系。

定义9.3.5

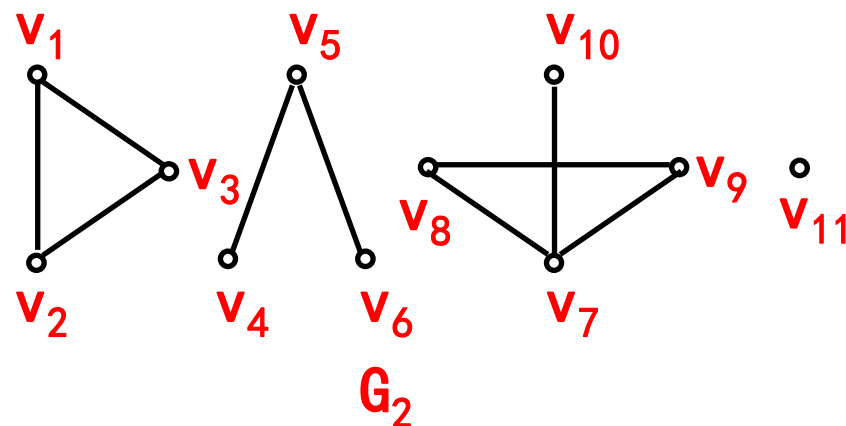
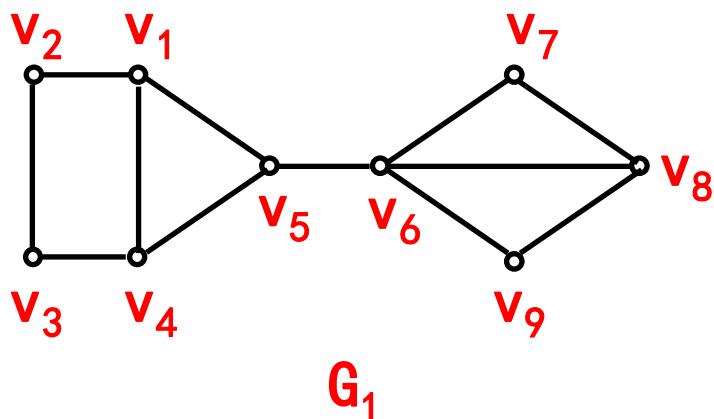
无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 中结点之间的可达关系 R 的每个等价类导出的子图都称为 G 的一个连通分支 (Connected Component)。

用 $p(G)$ 表示 G 中的连通分支个数。

- (1) 无向图 G 是连通图 $\Leftrightarrow p(G) = 1$;
- (2) 每个结点和每条边都在且仅在一个连通分支中。

例9.3.5

判断下图中图 G_1 和 G_2 的连通性，并求其连通分支个数。



9.3.3 有向图的连通性

定义9.3.5 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有向图,

(1) 若 G 的基图是连通图, 则称有向图 G 是**连通图**或称为**弱连通图**。否则称 G 是**非连通图**;



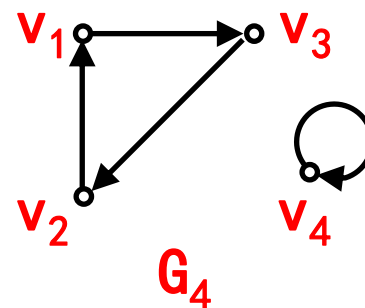
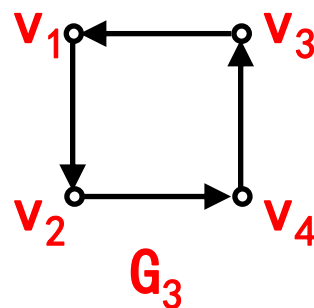
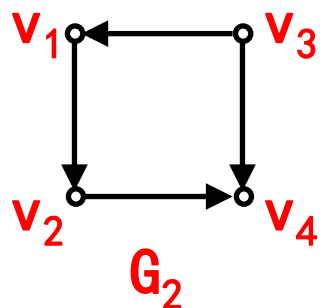
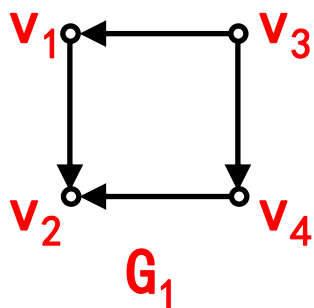
(2) 若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的, 则称 G 是**单向连通图**



(3) 若 G 中任何一对结点之间都是相互可达的, 则称 G 是**强连通图** (Strongly Connected Graph)。

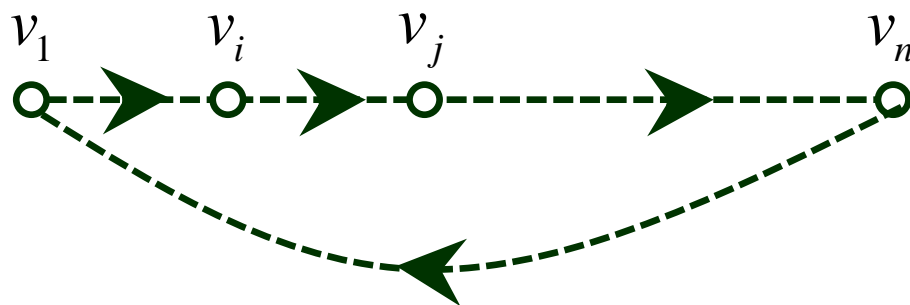
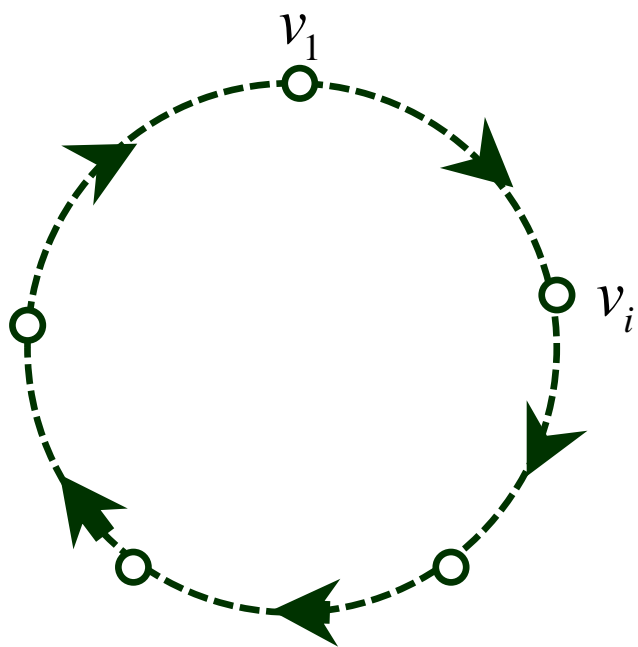
例9.3.6

判断下图中4个图的连通性。



定理9.3.7

有向图 G 是强连通图 $\Leftrightarrow G$ 中存在一条经过所有结点的回路。



利用A和P判断有向图的连通性

1. 有向线图G是强连通图 \Leftrightarrow 它的可达性矩阵P的所有元素均为1；
2. 有向线图G是单向连通图 $\Leftrightarrow P \vee P^T$ 中除主对角元外其余元素均为1；
3. 有向线图G是弱连通图 $\Leftrightarrow A' = A \vee A^T$ 作为邻接矩阵而求得的可达矩阵除主对角元外所有元素均为1。

定义9.3.6

在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 设 G' 是 G 的子图, 如果

(1) G' 是强连通的; (单向连通的、弱连通的)

(2) 对任意 $G'' \subseteq G$, 若 $G' \subset G''$, 则 G “不是强连通的; (单向连通的、弱连通的)

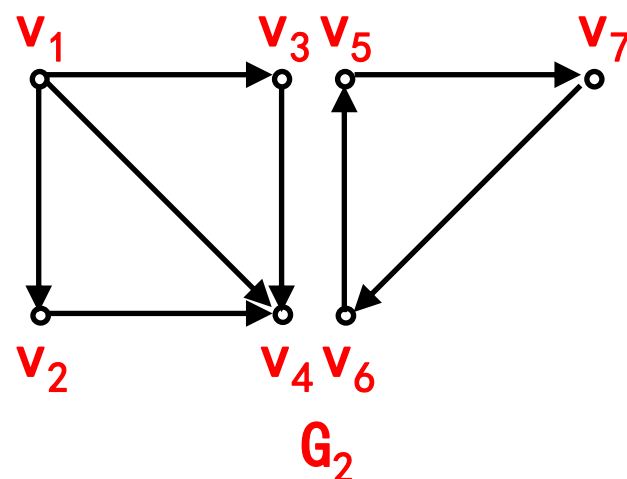
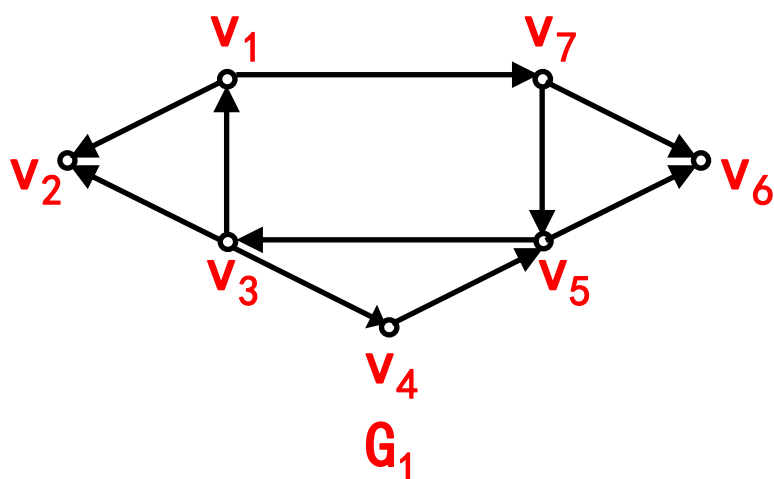
那么称 G' 为 G 的强连通分支 (单向连通分支、弱连通分支)。

注

1. 如果不考虑边的方向，弱连通分支对应相应的无向图的连通分支。
2. 注意把握（强、单向、弱）连通分支的**极大性特点**，即任意增加一个结点或一条边就不是（强、单向、弱）连通的了。

例9.3.7

求下面2个图的强、单向和弱连通分支。



一个关系

若在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的结点集 V 上定义二元关系 R 为： $\langle v_i, v_j \rangle \in R$ 当且仅当 v_i 和 v_j 在同一强（弱）连通分支中， $\forall v_i, v_j \in V$ 。显然， R 是一个等价关系。

三个定理

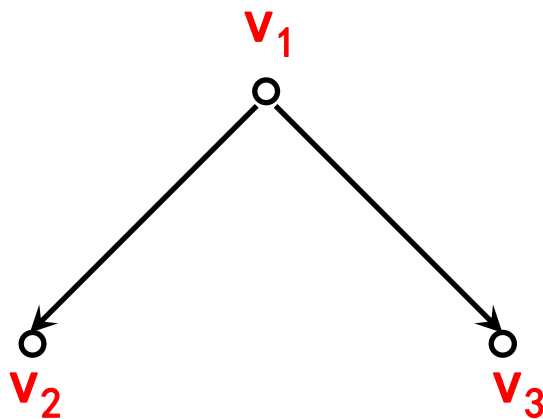
定理9.3.8 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中。

定理9.3.9 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一个结点至少位于一个单向连通分支中。

定理9.3.10 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

例

对于“两结点在同一单向连通分支中”这一关系，虽然它是自反的，对称的，但它不是传递的。



上图中， v_2 和 v_1 在同一单向连通分支中， v_1 和 v_3 在同一单向连通分支中，但 v_2 和 v_3 不在同一单向连通分支中。

9.3.4 通路、回路与连通性的难点

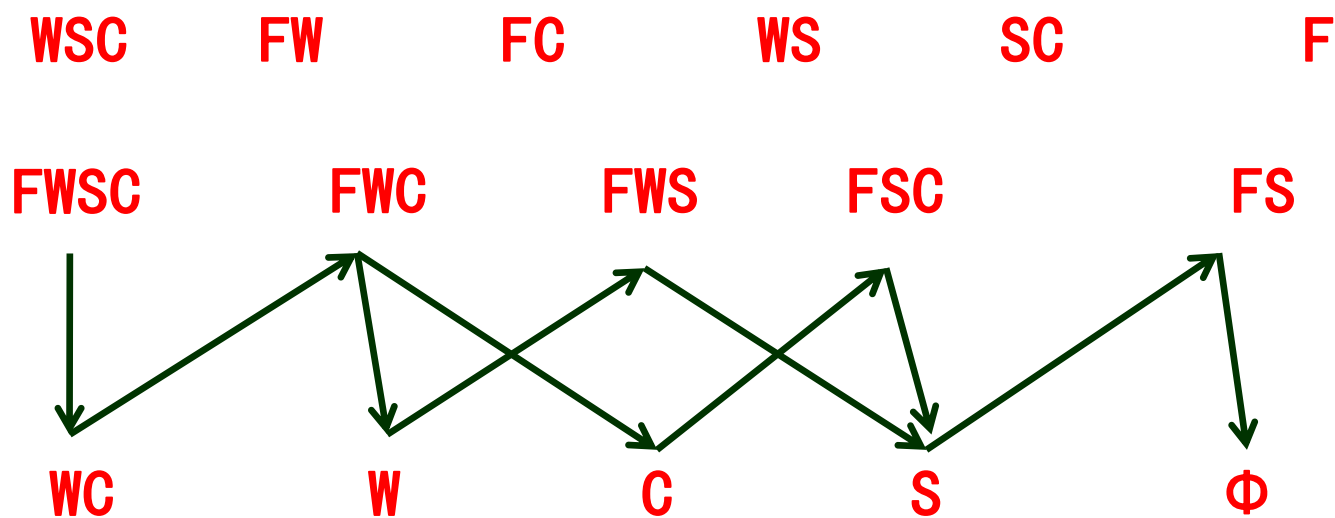
1. 要注意区分简单通路与基本通路，简单回路与基本回路；
2. 图的计算机表示就是它的邻接矩阵，我们可以利用邻接矩阵来计算任意两结点间固定长度的通路数目和距离；利用可达性矩阵来判断图的连通性；
3. 计算图的连通分支，特别是有向图的单向分图，是比较难的问题，只有凭经验按定义去试。

9.3.5 通路、回路与连通性的应用

1、渡河问题

例9.3.7 一个摆渡人要把一只狼、一只羊和一捆菜运过河去。由于船很小，每次摆渡人至多只能带一样东西。另外，如果人不在旁时，狼就要吃羊，羊就要吃菜。问这人怎样才能将它们运过河去？

例9.3.7 解(续)



3、无向赋权图的最短通路

在赋权图中，边的权也称为边的**长度**，

一条通路的长度指的就是这条通路上各边的**长度之和**。

从结点 v_i 到 v_j 的**长度最小**的**通路**，称为 v_i 到 v_j 的**最短通路（短程线）**。

算法9.3.1 Dijkstra算法

- I. **初始化**：将 v_1 置为P标号， $d(v_1) = 0$ ， $P = \{v_1\}$ ， $v_i \in V$ ， $i \neq 1$ ，置 v_i 为T标号，即 $T = V - P$ 且

$$d(v_i) = \begin{cases} w(v_1, v_i), & \text{若 } (v_1, v_i) \in E \\ \infty & \text{若 } (v_1, v_i) \notin E \end{cases}$$

- II. **找最小**：寻找具有最小值的T标号的结点。若为 v_k ，则将 v_k 的T标号改为P标号，且 $P = P \cup \{v_k\}$ ， $T = T - \{v_k\}$ 。

算法9.3.1 Dijkstra算法(续)

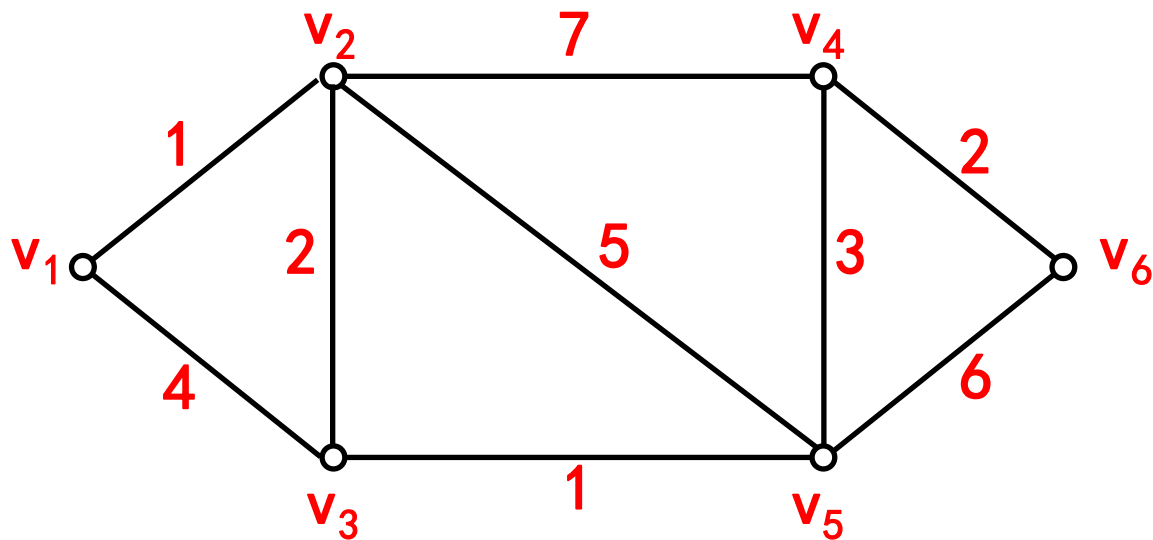
III. 修改：修改与 v_k 相邻的结点的T标号值。 $v_i \in V$,

$$d(v_i) = \begin{cases} d(v_k) + w(v_k, v_i), & \text{若 } d(v_k) + w(v_k, v_i) < d(v_i) \\ d(v_i) & \text{否则} \end{cases}$$

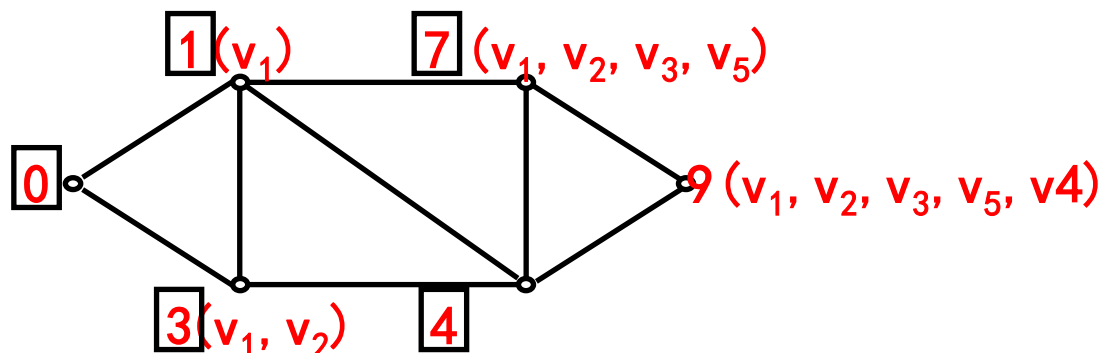
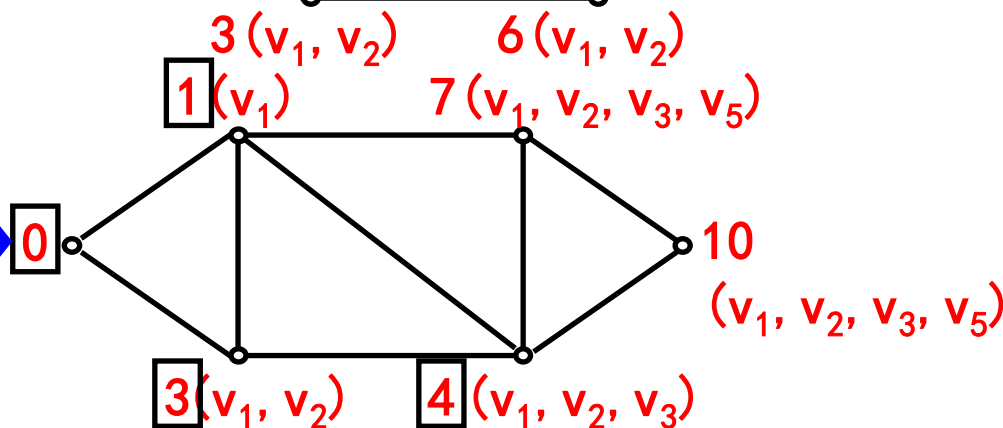
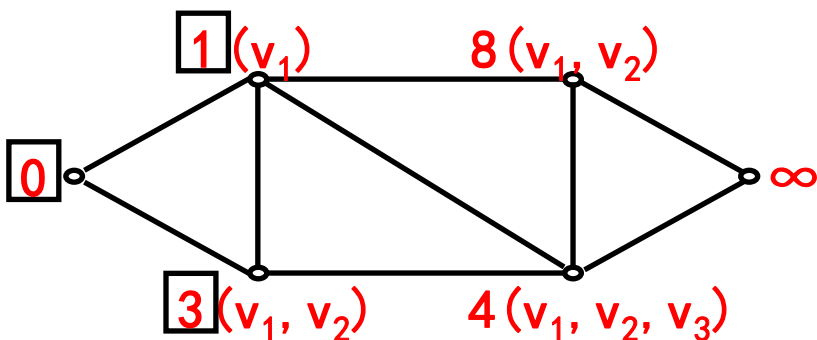
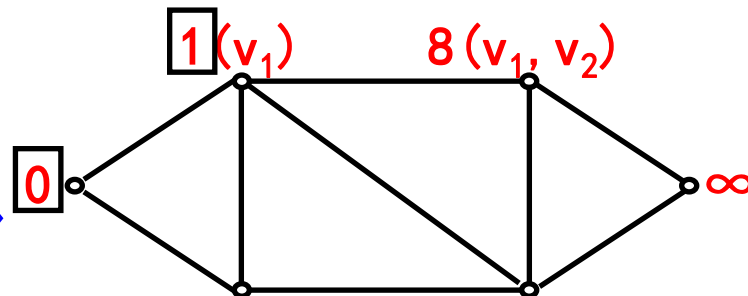
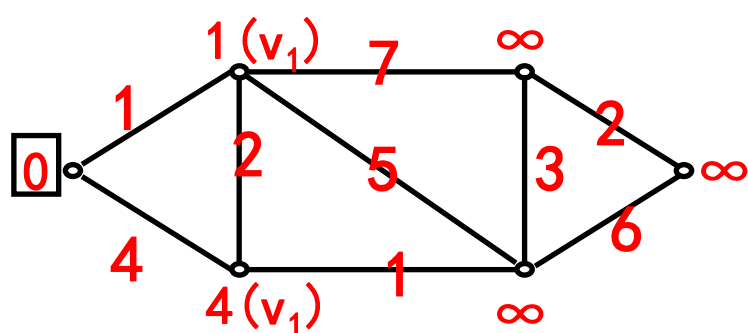
IV. 重复(II)和(III)，直到 v_n 改为P标号为止。

例9.3.9

试求简单无向赋权图中 v_1 到 v_6 的最短通路。



例9.3.9 解



(2) 求任意两结点间的最短通路——Floyd算法

算法9.3.2 Floyd算法:

从矩阵 $D^{(0)} = (w_{ij})_{n \times n}$ (这里 $w_{ij} = w(v_i, v_j)$, 称为图的长度矩阵) 开始,

若已知 $D^{(k-1)} = (d_{ij}^{(k-1)})$, 则 $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$ 的元素规定为

$$d_{ij}^{(k)} = \min \{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$$

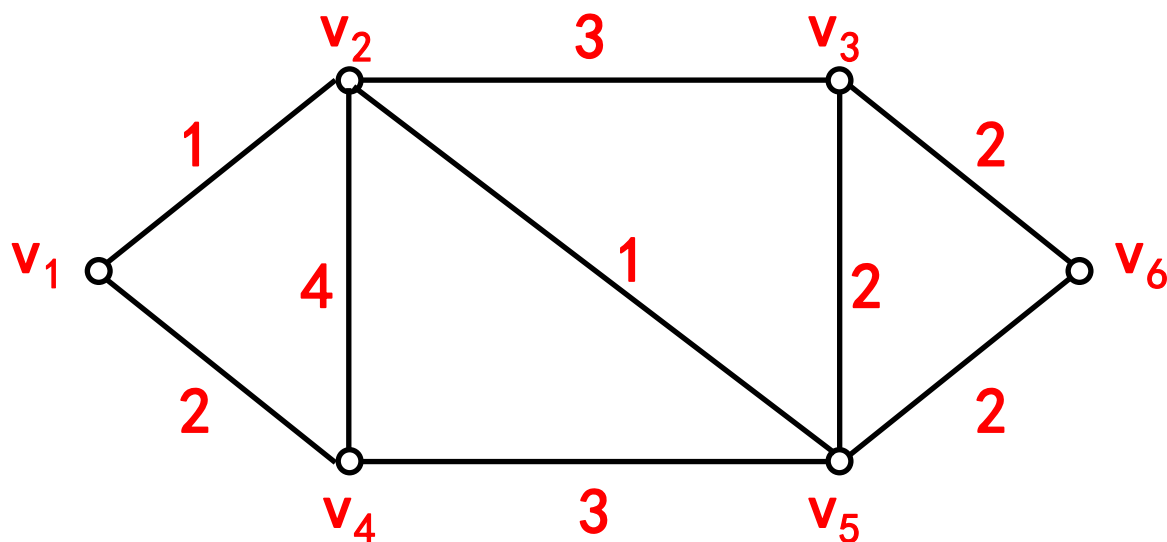
Floyd算法

运算过程从 $k = 1$ 开始，让 i 和 j 分别取遍从1到 n 的所有值，然后 k 增加1，如此反复进行，直到 $k = n$ 为止。这时 $D^{(n)} = (d_{ij}^{(k)})$ 的元素就是从 v_i 到 v_j 的最短通路长度。

算法的正确性是显然的。Floyd算法算法求出了任意两个结点间的最短通路的长度，从而很容易得出相应的最短通路。

例9.3.10

试求简单无向赋权图9.3.13中的所有最短通路。



例9.3.10 解

根据Floyd算法，有：

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例9.3.10 解(续)

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & \infty & \infty \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例9.3.10 解(续)

$$D^{(4)} = D^{(5)} = D^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

故 v_2 到 v_6 的最短通路长度为5，其最短通路为 $v_2v_3v_6$ ，其余类似。

9.4 本章总结

1

主要知识点汇集

2

习题类型

3

解题分析和方法

1、主要知识点汇集

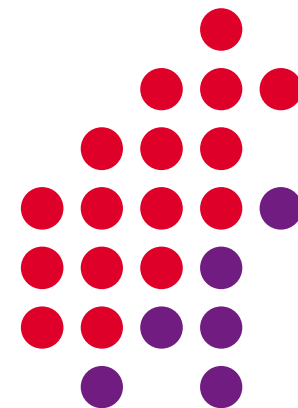
- ① 图的概念：图的定义、表示、操作、分类等。
- ② 图的基本性质：结点的度数、图的基本定理（握手定理）、图的同构、完全图、补图、子图、真子图、生成子图、导出子图等。
- ③ 通路与回路：通路与回路、简单（基本）通路与简单（基本）回路、通路与回路长度、结点间的短程线和距离、可达与可达性矩阵。
- ④ 图的连通性：无向连通图与连通分支、强（单向、弱）连通图与强（单向、弱）分图、利用邻接矩阵和可达性矩阵判断图的连通性。
- ⑤ 图的应用：最短通路算法。

2、习题类型

- ① 基本概念题：主要观测点在于图的基本概念、分类与判断；
- ② 判断题：主要观测点在于判定图的连通性；
- ③ 计算题：主要观测点在于结点的度数、连通分支、通路数目等；
- ④ 证明题：主要观测点在于图的同构、结点的度数等的证明

3、解题分析和方法

- ① 图的集合、图形、矩阵3种表示方式在同构的意义下是惟一的；
- ② 图的邻接矩阵既描述了图中结点间的邻接关系，还可以利用它来计算结点间的通路数目、判断图的连通性；
- ③ 判断两个图同构，只能依据同构的定义，构造两个结点集之间的双射函数，没有简单的方法；
- ④ 在计算和证明与结点的度数有关的问题时，经常使用握手定理；
- ⑤ 反证法非常有用，特别是在证明惟一性和不存在的时候。



Thank You !

<http://202.115.21.136:8080/Issx>