现代科学工程计算基础课后习题

<Version 1.0 >

第一章 绪论

基本上不会考，略

第二章 函数的插值与逼近

1.（1） 证明：

由题意有$\omega_k(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1)\cdots(\mathrm{x} - x_{\mathrm{k}-1})$，则有以下式子：

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = 0, (x = x_0)$$

$$\omega_2(x) = 0, (x = x_0, x_1)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\omega_{k-1}(x) = 0, (x = x_0, x_1, \cdots, x_{k-2})$$

$$\omega_k(x) = 0, (x = x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1})$$

考察$\mathrm{a}_0\omega_0(\mathrm{x}) + \mathrm{a}_1\omega_1(\mathrm{x}) + \cdots + \mathrm{a}_{k-1}\omega_{k-1}(\mathrm{x}) + \mathrm{a}_k\omega_k(\mathrm{x}) = 0$ 的系数，依次代入$\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_{k-1}$得：

$$\mathrm{a}_0\omega_0(\mathrm{x}_0) = 0, \text{又 } \omega_0(x) = 1, \text{可得}\mathrm{a}_0 = 0$$

$$\mathrm{a}_0\omega_0(\mathrm{x}_1) + \mathrm{a}_1\omega_1(\mathrm{x}_1) = 0, \text{可得}\mathrm{a}_1 = 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathrm{a}_0\omega_0(\mathrm{x}_{\mathrm{k}-1}) + \mathrm{a}_1\omega_1(\mathrm{x}_{k-1}) + \cdots + \mathrm{a}_{k-1}\omega_{k-1}(\mathrm{x}_{k-1}) = 0, \text{可得}\mathrm{a}_{k-1} = 0$$

最后代入x_k得：

$$a_0\omega_0(x_k)+a_1\omega_1(x_k)+\cdots+a_k\omega_k(x_k)=0,$$ 可得$a_k=0$

由于$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=a_k=0$, 所以$\{\omega_k(x)\}(k=0,1,\cdots,n)$线性无关.

1. (2) 证明：

由题意有$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$，

以及$l_j(x_k)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, k=j\\0, k\neq j\end{cases}(j,k=0,1,\cdots,n)$.

考察$a_0l_0(x)+a_1l_1(x)+\cdots+a_{j-1}l_{j-1}(x)+a_jl_j(x)=0$ 的系数，

代入x_0得：$a_0l_0(x_0)=0$，又$l_0(x_0)=1$，可得$a_0=0$

……

代入x_j得：$a_jl_j(x_j)=0$，又$l_j(x_j)=1$，可得$a_j=0$

由于$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{j-1}=a_j=0$, 所以$\{l_j(x)\}(j=0,1,\cdots,n)$线性无关.

2. (1) 证明：

令$f(x)=x^k$,则$f(x)$的 n 次 Lagrange 插值多项式$L_n=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$，讨论其插值余项$R_n(x)=f(x)-L_n=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$，

因为$k=0,1,\cdots,n\leq n$, $f(x)$的 n 阶导数: $f^n(x)=\frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}(k\geq n)$，

所以有 $f^{n+1}(x)=0$，可得$f(x)-L_n=R_n(x)=0$，$f(x)=L_n$.

则有$L_n\equiv f(x)\rightarrow\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)\equiv x^k$，原命题得证.

2. (2) 证明：

原式 $= \sum_{j=0}^{n}\left(x_j - x\right)^k l_j(x)$

$= \sum_{j=0}^{n}[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_j^{k-i}(-x)^i\, l_j(x)]$ （二项式定理）

$= \sum_{i=0}^{k}[\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{i}x_j^{k-i}(-x)^i\, l_j(x)]$

$= \sum_{i=0}^{k}[\binom{k}{i}(-x)^i\sum_{j=0}^{n}x_j^{k-i}\, l_j(x)]$ （交换符号顺序）

$= \sum_{j=0}^{n}[\binom{k}{i}(-x)^i x^{k-i}]$ （2.1 中结论，其中$\mathrm{k-i=0,1,\cdots,n}$）

$= (\mathrm{x-x})^k$ （二项式定理）

$= 0$

则$\sum_{j=0}^{n}\left(x_j - x\right)^k l_j(x) \equiv 0, (k = 1,2,\cdots,\mathrm{n})$，原命题得证.

3. 解：

f(x)在 x=100, 121, 144 三点的二次插值多项式为

$$\mathrm{L_2(x)} = \sqrt{100}\times\frac{(\mathrm{x}-121)(\mathrm{x}-144)}{(100-121)(100-144)}+\sqrt{121}\times\frac{(\mathrm{x}-100)(\mathrm{x}-144)}{(121-100)(121-144)}+\sqrt{144}\times\frac{(\mathrm{x}-100)(\mathrm{x}-121)}{(144-100)(144-121)}$$

代入 x=115 得$\mathrm{f}(115)\approx L_2(115)$ = 10.735。$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \mathrm{f}'''(\mathrm{x}) = -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, 误差限$\mathrm{R_2(x)} = \frac{f^3(\xi)}{3!}\omega_3(x) \le \frac{f^3(144)}{3!}|(115-100)(115-121)(115-144)| = 0.001748167$。

使用内插法，f(x)在 x=100,121 两点的一次插值多项式为

$$\mathrm{L_1(x)} = \sqrt{100} \times \frac{(\mathrm{x}-121)}{(100-121)} + \sqrt{121} \times \frac{(\mathrm{x}-100)}{(121-100)}$$

代入 x=115 得$\mathrm{f}(115) \approx L_1(115)$ = 10.714。误差限$\mathrm{R_1(x)} = \frac{f^2(\xi)}{2!}\omega_2(x) \leq \frac{f^2(121)}{2!}|(115-100)(115-121)| = 0.01690$。结果不同显然是由于使用了不同的数学模型，精确度有所不同。

4. 证明：

对 f(x)在 x=a,b 两处进行插值，则插值多项式为

$$\mathrm{L_1(x)} = \mathrm{f(a)}\frac{x-b}{a-b} + \mathrm{f(b)}\frac{x-a}{b-a} \xRightarrow{f(a)=f(b)=0} \mathrm{L_1(x)} = 0$$

考察插值余项$\mathrm{R_1(x)} = \mathrm{f(x)} - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$,

又$\mathrm{L_1(x)} = 0$，可得$\mathrm{f(x)} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$，

$\because$ $(x-a)(x-b) = \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}(a \leq x \leq b)$,

$\therefore$ $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$，两边同时取绝对值得：

$|f(x)| = |\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)| \leq \left|\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\right|$对$\mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]$恒成立。

则$\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8}\max\limits_{a\leq x\leq b}|f''(\xi)|$，原命题得证。

5. 解：

考察函数$\mathrm{f(x)} = \mathrm{sinx}$, 由于 $\mathrm{x} \in [-\pi,\pi]$, 则$\mathrm{f'''(x)} = -cosx \in [-1,0]$。在三点节点$\mathrm{x} = \mathrm{x_0},\mathrm{x_0}+h,\mathrm{x_0}+2h$($h$ 为步长)上进行插值，设插值区间上某点$\mathrm{x} = \mathrm{x_0}+th(0 \leq t \leq 2)$，则插值余项为

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot th\cdot(t-1)h\cdot(t-2)h$$

$$\le\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot h^3\cdot t(t-1)(t-2)\right|$$

$$\le\frac{1}{3!}h^3\cdot|t(t-1)(t-2)|，\ t\in[0,2]$$

考察函数$g(t)=t(t-1)(t-2), g'(t)=3t^2-6t+2$. 令$g'(t)=0$，得 $t=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

g(t)在闭区间[0,2]内先增后减再增, 其中 g(0)=g(2)=0。g(t)的两个极值点及对应的值分别为：$g\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}, g\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 则$0\le|g(t)|\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$。

可得$R_2(x)\le\frac{1}{3!}h^3\cdot|t(t-1)(t-2)|\le\frac{\sqrt{3}}{27}h^3$，要求截断误差不超过$10^{-5}$, 则$\frac{\sqrt{3}}{27}h^3\le10^{-5}\to h\le4.481\times10^{-2}$,则步长 h 最大取0.0448。

6. (1)解：

$$f[x_0]=f(x_0)=\frac{1}{x_0}$$

$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=-\frac{1}{x_0x_1}$，$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=-\frac{1}{x_1x_2}$

$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{1}{x_0x_1x_2}$, ……

猜想$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=(-1)^n\frac{1}{x_0x_1\cdots x_n}$，很显然对 n=0 成立。

假设$n=k$时成立，则$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=(-1)^k\frac{1}{x_0x_1\cdots x_k}$

当$n=k+1$时,

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}$$

$$=\frac{(-1)^k\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{k+1}}-(-1)^k\frac{1}{x_0x_1\cdots x_k}}{x_{k+1}-x_0}=\frac{(-1)^k\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{k+1}}-(-1)^k\frac{1}{x_0x_1\cdots x_k}}{x_{k+1}-x_0}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}\frac{x_{k+1}-x_0}{x_0x_1\cdots x_kx_{k+1}}}{x_{k+1}-x_k}=(-1)^{k+1}\frac{1}{x_0x_1\cdots x_kx_{k+1}}$$

则对 n=k+1 也成立，即原假设成立。

6. (2) 解：

$$f[x_0]=f(x_0)=e^{x_0},$$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{e^{x_1}-e^{x_0}}{x_1-x_0},$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1},$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{x_0(e^{x_2}-e^{x_1})-x_1(e^{x_2}-e^{x_0})+x_2(e^{x_1}-e^{x_0})}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{x_1(e^{x_3}-e^{x_2})-x_2(e^{x_3}-e^{x_1})+x_3(e^{x_2}-e^{x_1})}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$=\frac{\begin{gathered}(e^{x_1}-e^{x_0})(x_3-x_2)x_2x_3-(e^{x_2}-e^{x_0})(x_3-x_1)x_1x_3+(e^{x_2}-e^{x_1})(x_3-x_0)x_0x_3\\+(e^{x_3}-e^{x_2})(x_1-x_0)x_0x_1-(e^{x_3}-e^{x_1})(x_2-x_0)x_0x_2+(e^{x_3}-e^{x_0})(x_2-x_1)x_1x_2\end{gathered}}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0)(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

猜想就是跟排列组合相关的某一形式。(有待进一步研究)

7. 证明：

由题意，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$有 n 个不同的实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则 f(x) 必包含因式$(x-x_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 又 f(x) 中 x^n 的系数为a_n, 故可将 f(x) 转化为以下形式

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

可得　$f'(x)=a_n(x-x_1)'[(x-x_2)\cdots(x-x_n)]+a_n(x-x_2)'[(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)]+\cdots+a_n(x-x_n)'[(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})]$

分别代入x_j,则$f'(x)$中含$(x-x_j)$的项均为 0，而含有$(x-x_j)'$的项不为 0，故可得:

$$f'(x_j)=a_n(x-x_j)'[(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)]$$
$$=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)$$
$$=a_n(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$$

观察要证明的式子,我们可以联想到使用定理 4.1(老版书 30 页)。构造函数$g(x)=x^k$，运用定理 4.1 性质 1，得:

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$
$$=a_n\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{f'(x_j)}$$

再运用定理 4.1 性质 4，得:

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

联立上述两式，得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{f'(x_j)}=\frac{g[x_1,x_2,\cdots,x_n,]}{a_n}=a_n^{-1}\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

类似的讨论在习题 2.(1)中讨论过，我们有结论:

若 $g(x)=x^k$, 则$g^k(x)=k!, g^{k+1}(x)=0$, 即 k 阶导为常数，k + 1 阶导为零。

函数$g(x)=x^k$, 则$g^{(n-1)}(x)==\begin{cases}0, 0\le k\le n-2\\(n-1)!, k=n-1\end{cases}$

故，$\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{f'(x_j)}=a_n^{-1}\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=\begin{cases}0, 0\le k\le n-2\\a_n^{-1}, k=n-1\end{cases}$，证毕。

10. (1) 证明：

数学归纳法，当 n=0 时，$f[x_0]=f(x_0)=\frac{1}{a-x_0}$，成立.

假设当 n=k 时成立，则$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_k)}$,

当 n=k+1 时，$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}$

$$=\frac{\frac{1}{(a-x_1)(a-x_2)\cdots(a-x_{k+1})}-\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_k)}}{x_{k+1}-x_0}=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_k)(a-x_{k+1})}$$

即 k+1 时也成立，原命题得证。

10. (2) 证明：

根据牛顿插值多项式及插值余项关系可得：

$$f(x)\equiv f[x]=N_n(x)+R_n(x)$$

即$\frac{1}{a-x}=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$

$=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$=\frac{1}{a-x_0}+\frac{(x-x_0)}{(a-x_0)(a-x_1)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_n)}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_n)(a-x)}$(下面比上面多一项)，证毕。

11. 解：

Lagrange 插值

$$L_3(x)=-1\cdot\frac{(x-0)(x-3)(x-6)}{(-3-0)(-3-3)(-3-6)}+2\cdot\frac{(x+3)(x-3)(x-6)}{(0+3)(0-3)(0-6)}+-2\cdot\frac{(x+3)(x-0)(x-6)}{(3+3)(3-3)(3-6)}+10\cdot\frac{(x+3)(x-0)(x-3)}{(6+3)(6-0)(6-3)}$$

Newton 插值，均差表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
−3	−1			
0	2	$\frac{2-(-1)}{0-(-3)}=1$		
3	−2	$\frac{-2-2}{3-0}=-\frac{4}{3}$	$\frac{-\frac{4}{3}-1}{3-(-3)}=-\frac{7}{18}$	
6	10	$\frac{10+2}{6-3}=4$	$\frac{4+\frac{4}{3}}{6-0}=\frac{8}{9}$	$\frac{\frac{8}{9}+\frac{7}{18}}{6-(-3)}=\frac{23}{243}$

对应的牛顿插值多项式为

$$N_3(x)=-1+1\cdot(\mathrm{x}+3)+\left(-\frac{7}{18}\right)\cdot(\mathrm{x}+3)\mathrm{x}+\frac{23}{243}\cdot(\mathrm{x}+3)\mathrm{x}(\mathrm{x}-3)$$

12. 解：

使用 Lagrange 插值的思想，构造基函数，建立多项式如下：

$\mathrm{p(x)=f(x_0)\cdot\alpha_0(x)+f(x_1)\cdot\alpha_1(x)+f(x_2)\cdot\alpha_2(x)+f'(x_0)\cdot\beta_0(x)+f'(x_1)\cdot\beta_1(x)}$ ，其中$\mathrm{x_0=0,x_1=1,x_2=2}$，$\mathrm{f(x_0)=f'(x_0)=0}$，$\mathrm{f(x_1)=f'(x_1)=1}$，$\mathrm{f(x_2)=1}$。

由于$\mathrm{p(x_0)=p'(x_0)=0}$，所以不必考虑$\alpha_0(\mathrm{x})$，$\beta_0(\mathrm{x})$。

满足如下条件：

1. $\alpha_i(\mathrm{x})(i=0,1,2),\beta_j(\mathrm{x})(\mathrm{j}=0,1)$均为 4 次多项式
2. $\alpha_i(\mathrm{x}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0,i\neq j\\1,i=j\end{cases},\alpha_i'(\mathrm{x_0})=\alpha_i'(\mathrm{x_1})=0\ (\mathrm{i}=0,1,2),\beta_i(\mathrm{x}_j)=0(j=0,1,2),\beta_i'(\mathrm{x}_j)=\delta_{ij}(j=0,1)$

(1) 对于$\alpha_1(\mathrm{x})$, 有$\alpha_1(\mathrm{x_0})=\alpha_1(\mathrm{x_2})=0$，$\alpha_1'(\mathrm{x_0})=0$，则可设:

$$\alpha_1(\mathrm{x})=(\mathrm{a'x+b'})\cdot(\mathrm{x-x_0})^2(\mathrm{x-x_2})$$

$$=(\mathrm{ax+b})\cdot\frac{(\mathrm{x-x_0})^2(\mathrm{x-x_2})}{(\mathrm{x_1-x_0})^2(\mathrm{x_1-x_2})}$$

这里用到了书本中 41 页的方法来简化计算。.

(设因式的方法:若$f(x)$在某点x_k函数值和导数值均为零，则 $f(x)$包含因式$(x-x_k)^2$，$\alpha_1(x)$为 4 次多项式，故前面的系数为一次式).

根据条件$\alpha_1(x_1)=1,\alpha_1'(x_1)=0$ 计算得 a=$-\frac{2(x_1-x_2)+(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$,
b=$1+x_1\cdot\frac{2(x_1-x_2)+(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$(未验证)。代入可得

(2) 对于$\alpha_2(x)$, 有$\alpha_2(x_0)=\alpha_2(x_1)=0$，$\alpha_2'(x_0)=\alpha_2'(x_1)=0$，则可设:

$$\alpha_2(x)=C'\cdot(x-x_0)^2(x-x_1)^2=C\cdot\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2}(便于计算)$$

根据条件$\alpha_2(x_2)=1$ 计算得 C=1,则 $\alpha_2(x)=\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2}$。

(3) 对于$\beta_1(x)$, 有$\beta_1(x_0)=\beta_1(x_1)=\beta_1(x_2)=0$，$\beta_1'(x_0)=0$，则可设:

$$\beta_1(x)=C\cdot(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$$

根据条件$\beta_1'(x_1)=1$ 计算得 C=$\frac{1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)}$,则$\beta_1(x)=\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)}$

综上所述，代入就可以得到最终的 4 次多项式。

使用 Newton 均差插值的思想

$$p(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+(ax+b)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

根据条件$p'(x_0)=0,p'(x_1)=1$可以求出 a 和 b 的值。

。

13. 解：由于多项式$H_3(x)$满足插值条件，可设:

$$H_3(x)=f(x_0)\cdot\alpha_0(x)+f(x_1)\cdot\alpha_1(x)+f'(x_0)\cdot\beta_0(x)+f'(x_1)\cdot\beta_1(x)$$

代入插值条件得:$H_3(x)=\alpha_0(x)+2\alpha_1(x)+\frac{1}{2}\beta_0(x)+\frac{1}{2}\beta_1(x)$。

根据 Hermite 插值公式得:

$$\alpha_0(x)=[1-2(x-x_0)\frac{1}{x_0-x_1}](\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$\alpha_1(x)=[1-2(x-x_1)\frac{1}{x_1-x_0}](\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

代入就可以得到$H_3(x)$的表达式。

15. (1) 证明:

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_i=\sum_{j=0}^{n-1}(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})$$

$$=(y_0-2y_1+y_2)+(y_1-2y_2+y_3)+(y_2-2y_3+y_4)+\cdots+(y_{n-3}-2y_{n-2}+y_{n-1})+(y_{n-2}-2y_{n-1}+y_n)+(y_{n-1}-2y_n+y_{n+1})$$

可以看出每个括号中，第 1 项跟前一个式子的中间项抵消，中间项跟前一个式子的第 3 项和后一个式子的第 1 项抵消，第 3 项跟后一个式子的中间项抵消。可得:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_i=(y_0-2y_1)+y_1+y_n+(-2y_n+y_{n+1})$$

$= y_{n+1} - y_n - (y_1 - y_0)$

$= \Delta y_n - \Delta y_0$

原命题得证。

15. (2) 证明：

$\Delta(f_k g_k) = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k$=$f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k =$

$g_{k+1}(f_{k+1} - f_k) + f_k(g_{k+1} - g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k$，证毕。

16. (1) 证明：

数学归纳法：当 n=0 时，$g[x_0] = Cf(x_0) = Cf[x_0]$，成立。

假设 n=k 时成立，则$g[x_0, x_1, \cdots, x_k] = C \cdot f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$

当 n=k+1 时，

$$\begin{aligned} g[x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}] &= \frac{g[x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}] - g[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \\ &= \frac{C \cdot f[x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}] - C \cdot f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \\ &= C \cdot \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \\ &= C \cdot f[x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}] \end{aligned}$$

即 n=k+1 也成立，原命题成立。

16. (2) 证明：

数学归纳法：

当 n=0 时，$g[x_0] = g(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = f_1[x_0] + f_2[x_0]$，成立。

假设 n=k 时成立，则$g[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f_1[x_0,x_1,\cdots,x_k]+f_2[x_0,x_1,\cdots,x_k]$

当 n=k+1 时，

$$
\begin{aligned}
g[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}] &= \frac{g[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-g[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0} \\
&= \frac{f_1[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]+f_2[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-(f_1[x_0,x_1,\cdots,x_k]+f_2[x_0,x_1,\cdots,x_k])}{x_{k+1}-x_0} \\
&= \frac{f_1[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-f_1[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}+\frac{f_2[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-f_2[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0} \\
&= f_1[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]+f_2[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]
\end{aligned}
$$

即 n=k+1 也成立，原命题成立。

18. 解：解法一：

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_1,x_2) &= (x_1+2x_2-4)^2+(2x_1+x_2-5)^2+(x_1+x_2-3)^2 \\
&\quad +(-x_1+2x_2-2)^2+(3x_1-x_2-4)^2 \\
&= (x_1+2x_2-4)^2+(2x_1+x_2-5)^2+(x_1+x_2-3)^2 \\
&\quad +(x_1-2x_2+2)^2+(3x_1-x_2-4)^2
\end{aligned}
$$

根据最小二乘法得：$\begin{cases} \frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0 \to 16x_1-27=0 \\ \frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0 \to 11x_2-16=0 \end{cases}$

解得：$x_1=1.6875$，$x_2=1.4545$

解法二：

构造矩阵$Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$。

则相应的正规方程组为$A^TAx=A^Tb$，即

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 \\ 16 \end{bmatrix}$$

得$x_1=1.6875, x_2=1.4545$。

19. 解：

一次拟合：各坐标大致满足(根据模型 y=ax+b)，则满足下列条件

$$\begin{cases} -0.5a + b = 0.8826 \\ -0.25a + b = 1.4392 \\ 0a + b = 2.0003 \\ 0.25a + b = 2.5645 \\ 0.5a + b = 3.1334 \end{cases}$$

构造矩阵$\mathrm{Ax} = \mathrm{B}$, 其中 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.25 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0.25 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.8826 \\ 1.4392 \\ 2.0003 \\ 2.5645 \\ 3.1334 \end{bmatrix}$。

则相应的正规方程组为$\mathrm{A}^T\mathrm{Ax} = \mathrm{A}^T\mathrm{B}$，即

$$\begin{bmatrix} 0.625 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.406725 \\ 10.02 \end{bmatrix}$$

得$\mathrm{a} = 2.25076, \mathrm{b} = 2.004$。

二次多项式拟合：各坐标大致满足(根据模型$\mathrm{y} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$)，

则满足下列条件：

$$\begin{cases} 0.25a - 0.5b + \mathrm{c} = 0.8826 \\ 0.0625a - 0.25b + c = 1.4392 \\ 0a + 0b + \mathrm{c} = 2.0003 \\ 0.0625a + 0.25b + c = 2.5645 \\ 0.25a + 0.5b + \mathrm{c} = 3.1334 \end{cases}$$

构造矩阵$\mathrm{Ax} = \mathrm{B}$, 则 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & 1 \\ 0.0625 & -0.25 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0625 & 0.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.8826 \\ 1.4392 \\ 2.0003 \\ 2.5645 \\ 3.1334 \end{bmatrix}$。

则相应的正规方程组为$\mathrm{A}^T\mathrm{Ax} = \mathrm{A}^T\mathrm{B}$，即

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{128} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25423125 \\ 1.406725 \\ 10.02 \end{bmatrix}$$

得$a = 0.0158286, b = 2.25076, c = 2.0020214$。

第三章 数值积分与数值微分

1. (1) 解：

取$f(x) = 1, x, x^2$(需要构造能解出所有未知数的方程组)，可得方程组

$$A_{-1} + A_0 + A_1 = \int_{-h}^{h} 1\,dx = 2h$$

$$A_{-1} \cdot (-h) + A_1 \cdot h = \int_{-h}^{h} x\,dx = 0$$

$$A_{-1} \cdot h^2 + A_1 \cdot h^2 = \int_{-h}^{h} x^2\,dx = \frac{2}{3}h^3$$

解上述方程组得: $A_{-1} = A_1 = \frac{h}{3}, A_0 = \frac{4h}{3}$.

当取$f(x) = x^3$时，左边=$\int_{-h}^{h} x^3\,dx = 0 =$ 右边 $= \frac{h}{3} \cdot -h^3 + \frac{h}{3} \cdot h^3 = 0$

当取$f(x) = x^4$时，左边=$\int_{-h}^{h} x^4\,dx = \frac{2}{5}h^5 \neq$ 右边 $= \frac{h}{3} \cdot h^4 + \frac{h}{3} \cdot h^4 = \frac{2}{3}h^5$，故该公式代数精度为 3 次。

1. (2) 解：

取$f(x) = 1, x, x^2$，可得方程组：

$$\frac{1}{3}[1 + 2 + 3] = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

$$\frac{1}{3}[-1+2x_1+3x_2]=\int_{-1}^{1}x\,dx=0$$

$$\frac{1}{3}[1+2{x_1}^2+3{x_2}^2]=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3}$$

解方程组得$x_1=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5}, x_2=\frac{1-2x_1}{3}=\frac{3\mp\sqrt{6}}{15}$.

当取$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}^3$时，左边=$\int_{-1}^{1}x^3\,dx=0\neq$ 右边(右边含有根式)，

故该公式代数精度为 2 次。

1. (3) 解：

取$\mathrm{f(x)}=1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2$，可得方程组：

$$\int_{-2h}^{2h}1\,dx=\mathrm{A}_{-1}+\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1=4h$$

$$\int_{-2h}^{2h}x\,dx=-h\mathrm{A}_{-1}+h\mathrm{A}_1=0$$

$$\int_{-2h}^{2h}x^2\,dx=h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{16}{3}h^3$$

解上述方程组得: $\mathrm{A}_{-1}=\mathrm{A}_1=\frac{8h}{3}, \mathrm{A}_0=-\frac{4h}{3}$.

当取$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}^3$时，左边=$\int_{-2h}^{2h}x^3\,dx=0=$ 右边 $=-\frac{8h}{3}h^3+\frac{8h}{3}h^3=0$

当取$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}^4$时，左边=$\int_{-2h}^{2h}x^4\,dx=\frac{64}{5}h^5\neq$ 右边 $=\frac{8h}{3}\cdot h^4+\frac{8h}{3}\cdot h^4=\frac{16}{3}h^5$，故该公式代数精度为 3 次。

1. (4) 解：

取$\mathrm{f(x)}=1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2$，可得方程组：

$$\int_0^h 1\,dx=\frac{h}{2}[1+1]+ah^2[0+0]=h$$

$$\int_0^h x\,dx = \frac{h}{2}[0+h] + ah^2[1-1] = \frac{h^2}{2}$$

$$\int_0^h x^2\,dx = \int_0^h x\,dx = \frac{h}{2}[0+h^2] + ah^2[0-2h] = \frac{h^3}{3}$$

解方程组得：$a = \frac{1}{12}$

当取$f(x) = x^3$时，左边=$\int_0^h x^3\,dx = \frac{h^4}{4}$ = 右边 $= \frac{h}{2}[0+h^3] + \frac{1}{12}h^2[0-3h^2] = \frac{h^4}{4}$。

当取$f(x) = x^4$时，左边=$\int_0^h x^4\,dx = \frac{h^5}{5} \neq$ 右边 $= \frac{h}{2}[0+h^4] + \frac{1}{12}h^2[0-4h^3] = \frac{h^4}{6}$，故该公式代数精度为 3 次。

2. 证明：

梯形公式的余项为：

$$R_T = I - T = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\,dx$$

由于(x-a)(x-b)在区间[a,b]非正，具有保号性，使用积分中值定理得，

$R_T = I - T = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \xi \in [a,b]$

因为$f''(\xi) > 0$,所以有

$$R_T = I - T = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 < 0 \to I < T$$

即用梯形求积公式计算的结果比准确值大。几何意义：二阶导数大于零说明曲线是凹函数，梯形的斜边大于对应的函数值。

3. (1) 证明：

使用泰勒公式在 x=a 处展开，得：

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)$$

则$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a)\,dx+\ \int_a^b f'(\xi)(x-a)\,dx=f(a)x\,|_a^b+\frac{f'(\xi)(x-a)^2}{2}|_a^b=f(a)(b-a)+\frac{f'(\xi)(b-a)^2}{2},\xi\in[a,b]$，证毕。

3. (2) 证明:

使用泰勒公式在 x=b 处展开，得:

$$f(x)=f(b)+f'(\xi)(x-b)$$

则$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(b)\,dx+\ \int_a^b f'(\xi)(x-b)\,dx=f(b)x\,|_a^b+\frac{f'(\xi)(x-b)^2}{2}|_a^b=f(b)(b-a)-\frac{f'(\xi)(b-a)^2}{2},\xi\in[a,b]$，证毕。

3. (2) 证明:

使用泰勒公式在 x=$\frac{a+b}{2}$处展开，得:

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

则$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx+\ \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)x\,|_a^b+\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}|_a^b+\frac{f''(\xi)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3|_a^b$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,\xi\in[a,b]$$

证毕。

4. 解：(修正：在原表格中$f\left(\frac{7}{8}\right)=2.26549$)

使用复化梯形公式，将区间分为8等分共9个节点，n=8,步长h=$\frac{1}{8}$，其中$x_k=0,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8},1$。

$$T_8=\sum_{k=0}^{7}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}\left[f(0)+2\sum\nolimits_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)\right]$$

代入数值计算得$T_8=3.1389875$。

使用复化 Simpson 公式，将区间分为 4 等分共 5 个边界节点以及 4 个内部节点。n=4,步长 h=$\frac{1}{4}$, 其中$x_k=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$, $x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$。

$$S_4=\sum_{k=0}^{3}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(0)+4\sum\nolimits_{k=0}^{3}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum\nolimits_{k=1}^{3}f(x_k)+f(1)\right]$$

代入数值计算得$S_4=3.1415917$。

使用 Romberg 求积法，通过不同的等分方法依次求出$T_1=3(h=1),T_2=3.1(h=\frac{1}{2}),T_4=3.131175(h=\frac{1}{4})$.再利用 Romberg 求积公式

$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n,C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n,R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$，求得：

二分次数 k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	3			
1	3.1	3.13333333		
2	3.131175	3.1415666667	3.1421155556	
3	3.1389875	3.1415916667	3.1415933334	3.1415850442

5. 证明：

由于对于任意次数小于 n 的多项式表达式都成立，则表达式对

$1, x, x^2, \cdots, x^n$都成立, 则有：

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \int_a^b 1\, dx$$

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \int_a^b x\, dx$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_0 {x_0}^n + a_1 {x_1}^n + \cdots + a_n {x_1}^n = \int_a^b x^n\, dx$$

可转换为矩阵形式，即：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {x_0}^n & {x_1}^n & \cdots & {x_n}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b-a) \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \cdots \\ \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \end{bmatrix}$$

最左边的矩阵为范德蒙德矩阵且$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则其行列式的值不为零，该矩阵不可逆。故矩阵$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$存在唯一解, 即只存在一组数。

6. 证明：

复化梯形公式的余项为

$$\mathrm{I} - T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \right] = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \eta \in [a, b]$$

则$n \to \infty, h = \frac{b-a}{n} \to 0, \mathrm{I} - T_n \to 0$，即$\lim_{n \to \infty} T_n = \mathrm{I} = \int_a^b f(x)\, dx$。

复化 Simpsom 公式的余项为

$$\mathrm{I}-S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_k)\right]=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\eta\in[a,b]$$

则$\mathrm{n}\to\infty,\mathrm{h}=\frac{b-a}{n}\to 0,\mathrm{I}-T_n\to 0$，即$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}S_n=\mathrm{I}=\int_a^b f(x)\,dx$。

7.(1)解：

可得条件：$f(x)=\sqrt{x}$，n=4, h=$\frac{9-1}{4}=2$

使用复化梯形公式，边界节点分别为 1, 3, 5, 7, 9.

$$\mathrm{T}_4=\frac{h}{2}[f(1)+2[f(3)+f(5)+f(7)]+f(9)]$$

使用复化 Simpson 公式，边界节点为 1, 3, 5, 7, 9，内节点为 2, 4, 6, 8.

$\mathrm{S}_4=\frac{h}{6}\{f(1)+4[f(2)+f(4)+f(6)+f(8)]+2[f(3)+f(5)+f(7)]+f(9)\}$，代入数值即可。

7.(2)解：

可得条件：$f(\theta)=\sqrt{4-\sin^2\theta}$，n=6, h=$\frac{\pi}{36}$

使用复化梯形公式，边界节点分别为$0,\frac{\pi}{36},\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{36},\frac{\pi}{6}$.

$\mathrm{T}_4=\frac{h}{2}\left[f(0)+2[f\left(\frac{\pi}{36}\right)+f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)+f\left(\frac{5\pi}{36}\right)]+f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$,

使用复化 Simpson 公式，边界节点为$0,\frac{\pi}{36},\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{36},\frac{\pi}{6}$，内节点为$\frac{\pi}{72},\frac{3\pi}{72},\frac{5\pi}{72},\frac{9\pi}{72},\frac{11\pi}{72}$

$\mathrm{S}_4=\frac{h}{6}\{f(0)+4\left[f\left(\frac{\pi}{72}\right)+f\left(\frac{3\pi}{72}\right)+f\left(\frac{5\pi}{72}\right)+f\left(\frac{9\pi}{72}\right)+f\left(\frac{11\pi}{72}\right)\right]+2[f\left(\frac{\pi}{36}\right)+f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)+f\left(\frac{5\pi}{36}\right)]+f\left(\frac{\pi}{6}\right)\}$，代入数值即可。

7.(3)解：方法类似于(1)、(2)，略

9.(1)解；

首先选取将区间[1,3]直接使用梯形公式，此时 n=1,h=2，则

$$T_1=\frac{h}{2}[f(1)+f(3)]=1.33333333$$

再对整个区间进行等分，此时 n=2,h′=1,运用递推公式，得

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{h}{2}f(2)=1.16666667$$

再对每个子区间进行等分，此时 n=4, $\mathrm{h}''=\frac{1}{2}$,运用递推公式，得

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{\mathrm{h}'}{2}[f(1.5)+f(2.5)]=1.11666667$$

再对每个子区间进行等分，此时 n=8, $\mathrm{h}'''=\frac{1}{4}$,运用递推公式，得

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{\mathrm{h}''}{2}[f(1.25)+f(1.75)+f(2.25)+f(2.75)]$$

$$=1.10321068$$

再对每个子区间进行等分，此时 n=16, $\mathrm{h}''''=\frac{1}{8}$,运用递推公式，得

$$T_{16}=\frac{1}{2}T_8+\frac{\mathrm{h}'''}{2}[f(1.125)+f(1.375)+f(1.625)+f(1.875)$$

$$+f(2.125)+f(2.375)+f(2.625)+f(2.875)]$$

$$=1.09976770$$

使用 Romberg 求积法，利用 Romberg 求积公式

$$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n,C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n,R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

求得：

二分次数 k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1.33333333			
1	1.16666667	1.11111112		
2	1.11666667	1.10000000	1.09925925	
3	1.10321068	1.09872535	1.09864037	1.09863055
4	1.09976770	1.09862004	1.09861302	1.09861259

使用 8 位有效数字，计算较多，结果更为精确。

二分次数 k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1.33333			
1	1.16667	1.11112		
2	1.11667	1.10000	1.09926	
3	1.10321	1.09872	1.09863	1.09862

使用 5 位有效数字，计算简便(不需要计算T_{16})，解题时推荐。

观察数据可知$R_1 = 1.09862$ 和$C_2 = 1.09863$ 误差不超过10^{-5}。可得，最终结果为1.09862。(标准结果为:$\ln 3 = 1.098612$)

10. (1) 解：

用两点 Gauss-Languerre 求积公式，两点分别$x_0 = 0.5757864376$，$x_1 = 3.4142136624$，对应的系数$A_0 = 0.8535533906$，$A_1 = 0.1464466094$。则$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{x}\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$。

10.(2)解：

用两点 Gauss-Hermite 求积公式，两点分别$x_0 = 0.7071067812$，$x_1 = -0.7071067812$，对应的系数$A_0 = A_1 = 0.8862269255$，则$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin^2 x \, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$。

10.(3)解；

用两点 Gauss-切比雪夫求积公式，具体的参数见附录。

令$\mathrm{t} = \frac{x}{4}$,则$\mathrm{I} = \int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{4\,dt}{1+16t^2}$。

12.解；

有两个未知节点，n=1。根据定理 4.1(120 页)，可知$\omega(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\omega_2(\mathrm{x}) = (x - x_0)(x - x_1)$，这里 p(x)为不超过 1 次的多项式，可以令$\mathrm{p(x)} = 1, \mathrm{x}$，则满足以下方程：

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x - x_0)(x - x_1) \, dx = 0 \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x - x_0)(x - x_1) \cdot x \, dx = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 = \frac{16}{7} \\ x_0 x_1 = \frac{33}{35} \end{cases}$$

再取$\mathrm{f(x)} = 1, \mathrm{x}$，得

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} 1 \, dx = A_0 + A_0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} x \, dx = A_0 x_0 + A_0 x_1$$

解出A_0, A_1即可。

另一种方法就是令$\mathrm{f(x)} = 1, \mathrm{x}, x^2, x^3$，代入解出四元方程组。

13. (1) 解；

准确值$\ln 2=0.693147180559945309417232121458 18$。

使用梯形及递推公式求得T_1, T_2, T_4, T_8. 再利用 Romberg 公式：

$$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n, C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n, R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

二分次数 k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.75			
1	0.70833	0.69444		
2	0.69701	0.69324	0.69316	
3	0.69411	0.69314	0.69313	0.69313

13. (2) 解；

令$\mathrm{x}=\frac{1}{2}\mathrm{t}+\frac{3}{2}$，则$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t+3}dt=\int_{-1}^1\frac{1}{t+3}dt.$

使用三点 Gauss-legendre 公式，n=2，取$t_0=-0.7745967, t_1=0, t_2=0.7745967$, 对应的$A_0=A_2=0.5555556, A_1=0.8888889$。

$$\mathrm{I}=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^1\frac{1}{t+3}dt=A_0f(t_0)+A_1f(t_1)+A_2f(t_2)$$

代入计算的 I=0.69312。

13. (3) 解；

将区间[1, 2]进行四等分，得到 5 个边界节点$1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},2$。

使用变换$\mathrm{x}=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}t$，$\mathrm{x}\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]$，$\mathrm{t}\in[-1,1]$。在每个区间类似地进行 13. (2) 中步骤即可。

第四章 解线性代数方程组的直接法

2.(1)解；

Guass 消去法：

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 4x_1+7x_2+7x_3=1 \\ -2x_1+4x_2+5x_3=-7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 3x_2+x_3=-5 \\ 6x_2+8x_3=-4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 3x_2+x_3=-5 \\ 6x_3=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \\ x_3=1 \end{cases}$$

LU 分解法：

将方程组写成矩阵乘法得形式：

$$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}，\text{其中 } \mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathrm{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

将矩阵 A 做 LU 分解, 令 A=LU，则原矩阵变为$\begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$

令$\mathrm{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$,利用 A=LU 做矩阵乘法，

行列交换运算得，$\mathrm{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{U}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

使用 Ly=b，即$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$, 解得$\mathrm{y}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

使用 Ux=y，即$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$, 解得$\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.(2)解；类似于 2.1

3. (1) 证明：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 步 Gauss 消元}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a'_{ij} & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}, (2 \le i,j \le n).$$

其中$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$，其对称元素$a'_{ji}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}$.

当 A 对称时，$a_{ij}=a_{ji}, a_{1j}=a_{j1}, a_{i1}=a_{1i}$，可得$a'_{ij}=a'_{ji}$.

$A \xrightarrow{1\text{ 步 Gauss 消元}} \begin{bmatrix} a_{11} & r_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$，即$A_2$也是对称矩阵。

3. (2) 证明：

应用性质：对称阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是：A 的各阶顺序主子式都为正。则对称正定矩阵 A 的 k 阶顺序主子式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, (1 \le k \le n)$$

特别的，A 的 1 阶顺序主子式$a_{11}>0$。

对 A 进行 1 步 Gauss 消元，相对于初等行变换(某行(列)乘以实数加到另一行(列）上)，不会改变行列式的值。则：

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a'_{ij} & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{kk} \end{vmatrix} = D > 0, (1 \le k \le n, 2 \le i,j \le k)$$

又有 $D'=a_{11}\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{k2} \\ \cdots & a'_{ij} & \cdots \\ a'_{2k} & \cdots & a'_{kk} \end{vmatrix} \xRightarrow{D'>0, a_{11}>0} \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{k2} \\ \cdots & a'_{ij} & \cdots \\ a'_{2k} & \cdots & a'_{kk} \end{vmatrix} > 0$，

即A_2的各阶顺序主子式都大于 0。又由 3. (1) 可知A_2对称，故A_2矩阵为对称正定矩阵。

4. 解；

将方程组写成矩阵乘法得形式：

$$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}，\text{其中 }\mathrm{A}=\begin{bmatrix}5 & -4 & 1\\ -4 & 6 & -4\\ 1 & -4 & 6\end{bmatrix},\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\mathrm{b}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

运用平方根分解，即$A=GG^T$, 原方程化为$G(G^Tx)=\mathrm{G}y=b$。

$$\text{设}G=\begin{bmatrix}g_{11} & 0 & 0\\ g_{21} & g_{22} & 0\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix},\text{则}G^T=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{21} & g_{31}\\ 0 & g_{22} & g_{32}\\ 0 & 0 & g_{33}\end{bmatrix}.$$

运用矩阵乘法得：

$$G=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ -\frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{14}}{5} & 0\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{8\sqrt{14}}{7} & \frac{\sqrt{437}}{35}\end{bmatrix},G^T=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}}{5} & -\frac{8\sqrt{14}}{7}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{437}}{35}\end{bmatrix}$$

$$\text{使用}Gx=b，\text{即}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ -\frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{14}}{5} & 0\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{8\sqrt{14}}{7} & \frac{\sqrt{437}}{35}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\text{解得y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}.$$

$$\text{使用}G^Tx=y,\text{即}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}}{5} & -\frac{8\sqrt{14}}{7}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{437}}{35}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},\text{解得x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

5. 解；

运用定理 3. 1，若 n 阶矩阵的顺序主子式$D_i\neq 0(i=1,2,\cdots,\mathrm{n}-1)$, 则 A 有唯一的 LU 分解。

对于A_1, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$，故不存在 LU 分解。

对于A_2, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$，故不存在 LU 分解。

对于A_3，$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 1$，$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 5 & 15\\ 6 & 15 & 46\end{vmatrix} = 1$，故存在唯一的 LU 分解。

6. 证明；

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{步 Gauss 消元}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & a'_{ij} & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{nn}\end{bmatrix}, (2 \le \mathrm{i}, \mathrm{j} \le \mathrm{n}).$$

其中$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$.

因为 A 为严格对角占优矩阵，即$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, (i = 1,2,\cdots,\mathrm{n})$

(To be continute)

7. 解；

. 令$L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \mathrm{l}_2 & 1 & 0\\ 0 & \mathrm{l}_3 & 1\end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix}\mathrm{u}_1 & \mathrm{d}_1 & 0\\ 0 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{d}_2\\ 0 & 0 & \mathrm{u}_3\end{bmatrix}$，利用 A=LU 做矩阵乘法，即

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_2 & 1 & 0\\ 0 & l_3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 & \mathrm{d}_1 & 0\\ 0 & u_2 & \mathrm{d}_2\\ 0 & 0 & u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

解得：$L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0\\ 0 & \frac{16}{15} & 1\end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & \frac{15}{4} & -1\\ 0 & 0 & \frac{76}{15}\end{bmatrix}$，再解方程即可。

8. 证明；

正定性：

$\|X\|_A = (AX, X)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{X^T AX} \ge 0$(正定矩阵的定义). 当 X=0 时，等号成立。

齐次性：

$$\text{对于}\forall\alpha\in R, \|\alpha X\|_A=(A\alpha X,\alpha X)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha^2}(AX,X)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\|X\|_A$$

三角不等式：

$$\text{对于}\forall Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,)\in R^n,$$

$$(\|X+Y\|_A)^2=\big(A(X+Y),(X+Y)\big)=(X^T+Y^T)A(X+Y)$$

$$=X^TAX+X^TAY+Y^TAX+Y^TAY$$

$$=\|X\|_A+\|Y\|_A+Y^TAX+Y^TAY$$

$$(\|X\|_A+\|Y\|_A)^2=[(AX,X)^{\frac{1}{2}}+(AY,Y)^{\frac{1}{2}}]^2=(\sqrt{X^TAX}+\sqrt{Y^TAY})^2$$

$$=X^TAX+X^TAY+2\sqrt{X^TAXY^TAY}$$

$$=\|X\|_A+\|Y\|_A+2\sqrt{X^TAXY^TAY}$$

因为 A 正定，则对任意数 t 有：

$$(X+tY)^TA(X+tY)\geq 0$$

即$X^TAX+(X^TAY+Y^TAX)t+(Y^TAY)t^2\geq 0$ 对任意 t 成立

$(Y^TAY)\geq 0$，二次曲线开口向上，与 x 轴有一个或没有交点。

则判别式$\Delta=b^2-4ac=(X^TAY+Y^TAX)^2-4X^TAXY^TAY\leq 0$

即$Y^TAX+Y^TAY\leq 2\sqrt{X^TAXY^TAY}$

代入上面的表达式可得：$\|X+Y\|_A\leq\|X\|_A+\|Y\|_A$.

9. 证明；

f(A)不是 A 的范数，不满足矩阵范数的相容性。

例如:$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2&0\\-2&0\end{bmatrix}$则, $AB=\begin{bmatrix}-4&0\\0&0\end{bmatrix}$.

$$f(AB)=4>f(A)f(B)=1\cdot 2=2$$

10. 解；

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|3|+|-2|+|1|=6$$

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(3^2+(-2)^2+1^2)}=\sqrt{14}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|=3$$

11. 解；

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \to & 2\\ 2 & -1 & 0 & \to & 3\\ 1 & 2 & 1 & \to & 4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 4 & 3 & 2 & & \end{bmatrix},\ \mathrm{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathrm{AA}^T=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

则$\|\mathrm{A}\|_1=4$(列范)，$\|\mathrm{A}\|_\infty=4$(行范), 计算AA^T的特征值得$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=6$, $\|\mathrm{A}\|_2=\sqrt{6}$.

$$\mathrm{cond(A)}_2=\|\mathrm{A}\|_2\|\mathrm{A}^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{u_1}{u_2}}=\sqrt{6}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix},\mathrm{cond(A)}_\infty=\|\mathrm{A}\|_\infty\|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty=4\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

12. 解；

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{bmatrix},A^{-1}=\begin{bmatrix}-98 & 99\\ 99 & -100\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cond(A)}_1=\|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{A}^{-1}\|_1=199\cdot199=39601$$

$$\mathrm{cond}(\mathrm{A})_\infty = \|\mathrm{A}\|_\infty \|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty = 199 \cdot 199 = 39601$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}, \mathrm{A}^T = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}, \mathrm{AA}^T = \begin{bmatrix} 19801 & 19602 \\ 19602 & 19405 \end{bmatrix}$$

求得AA^T的特征值为$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 39206$

$$\mathrm{cond}(\mathrm{A})_2 = \|\mathrm{A}\|_2 \|\mathrm{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = 198.0051.$$

13. (1) 解：

$$\mathrm{cond}(H_3)_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$\mathrm{cond}(H_6)_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{147}{60}$$

13. (2) 解：

$$\mathrm{H_3x = b}, \text{即} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \\ \mathrm{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{47}{60} \end{bmatrix}, \text{ 得 } \begin{bmatrix} \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \\ \mathrm{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H_3'x' = b}, \text{即} \begin{bmatrix} 1.00 & 0.500 & 0.333 \\ 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.333 & 0.250 & 0.200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x_1}' \\ \mathrm{x_2}' \\ \mathrm{x_3}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.83 \\ 1.08 \\ 0.783 \end{bmatrix}, \text{ 得 } \begin{bmatrix} \mathrm{x_1}' \\ \mathrm{x_2}' \\ \mathrm{x_3}' \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.0895 \\ 0.4880 \\ 1.4910 \end{bmatrix}$$

14. (1) 证明：

因为 $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$, 设 x 为向量$[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$,

$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i = \|\mathrm{x}\|_1$$

$$n\|\mathrm{x}\|_\infty = n\max_{1\le i\le n} x_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i = \|\mathrm{x}\|_1$$

综上所述，$\|\mathrm{x}\|_\infty \le \|\mathrm{x}\|_1 \le n\|\mathrm{x}\|_\infty$

14. (2) 证明：

设矩阵 $\mathrm{B} = \mathrm{A}A^T$，则$b_{ii} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\cdot a^T{}_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik})^2$, $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$

则$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = (\|A\|_F)^2$.

根据定理：矩阵的迹(主对角元素之和)等于特征值之和.

则$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$($k$为矩阵 A 特征值的个数)

而$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$, 则有

$$\left(\frac{\|A\|_F}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k}{n} \le \frac{n\lambda_{max}}{n} = (\|A\|_2)^2$$

$$(\|A\|_F)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \ge \lambda_{max} = (\|A\|_2)^2$$

有$\|\cdot\| \ge 0$(矩阵范数非负), 开方即可得：

$$\frac{\|A\|_F}{\sqrt{n}} \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$$

15. 证明：

$$\begin{aligned}\mathrm{cond(AB)} &= \|\mathrm{AB}\|\|(\mathrm{AB})^{-1}\| = \|\mathrm{AB}\|\cdot\|\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{B}^{-1}\| \\ &\le \|\mathrm{A}\|\cdot\|\mathrm{B}\|\cdot\|\mathrm{B}^{-1}\|\cdot\|\mathrm{A}^{-1}\| = \|\mathrm{A}\|\cdot\|\mathrm{A}^{-1}\|\cdot\|B\|\cdot\|\mathrm{B}^{-1}\| \\ &= cond(A)cond(B)\end{aligned}$$

第五章 解线性代数方程组的迭代法

1. (1)解:

Jacobi 迭代格式(k=0, 1, •••)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0 + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + 0 + \frac{12}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}x_1^{(k)} + 0 + \frac{2}{10}x_2^{(k)} + \frac{-23}{10} \\ x_3^{(k+1)} = 0 + \frac{2}{10}x_2^{(k)} + 0 + \frac{14}{10} \end{cases}$$

得相应的矩阵为:$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} \frac{12}{10} \\ \frac{-23}{10} \\ \frac{14}{10} \end{bmatrix}$

根据迭代公式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g(k = 1,2,\cdots), x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$得:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	1. 2	-2. 3	1. 4
2	0. 97	-1. 9	0. 94
3	1. 01	-2. 015	1. 02
4	0. 9985	-1. 9950	0. 9970
5	1. 0005	-2. 0008	1. 0010
6	0. 9999	-1. 9997	0. 9998
7	1. 0000	-2. 0000	1. 0000

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty = 3 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

Gauss-Seidel 迭代形式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0 + \dfrac{1}{10}x_2^{(k)} + 0 + \dfrac{12}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}x_1^{(k+1)} + 0 + \dfrac{2}{10}x_2^{(k)} + \dfrac{-23}{10} \\ x_3^{(k+1)} = 0 + \dfrac{2}{10}x_2^{(k+1)} + 0 + \dfrac{14}{10} \end{cases}$$

令 $B = L + U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，构造迭代公式:$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + g$, 即：$x^{(k+1)} = (I-L)^{-1}Ux^{(k)} + (I-L)^{-1}g$。

$$(I-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0.002 & 0.04 \end{bmatrix}，(I-L)^{-1}g = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -2.18 \\ 0.9640 \end{bmatrix}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	1.2	-2.18	0.9640
2	0.9820	-2.0090	0.9982
3	0.9991	-2.0004	0.9999
4	1.0000	-2.0000	1.0000

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty = 9 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

1.(2)解：

Jacobi 迭代格式(k=0,1, •••)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0 + \dfrac{-2}{5}x_2^{(k)} + \dfrac{-1}{5} + \dfrac{-12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k)} + 0 + \dfrac{-2}{4}x_2^{(k)} + \dfrac{9}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{-2}{10}x_1^{(k)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k)} + 0 + \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

得相应的矩阵为:$B=\begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-2}{4} \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}, g=\begin{bmatrix} \frac{-12}{5} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

根据迭代公式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g(k=1,2,\cdots),x^{(0)}=(0,0,0,0)^T$得:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	−2.4000	2.2500	0.1000
2	−3.3200	1.6000	1.2550
3	−3.2910	0.7925	1.2440
4	−2.9658	0.8053	0.9960
5	−2.9213	1.0106	0.9347
6	−2.9912	1.0523	0.9874
7	−3.0184	1.0085	1.0139
8	−3.0062	0.9884	1.0062
9	−2.9966	0.9953	0.9978
10	−2.9977	1.0020	0.9979
11	−3.0004	1.0016	1.0001
12	−3.0007	0.9998	1.0006
13	−3.0000	0.9996	1.0001

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_\infty=7\times10^{-4}<10^{-3}$$

Gauss-Seidel 迭代形式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0 + \dfrac{-2}{5}x_2^{(k)} + \dfrac{-1}{5} + \dfrac{-12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} + 0 + \dfrac{-2}{4}x_2^{(k)} + \dfrac{9}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{-2}{10}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} + 0 + \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

令 $\mathrm{B} = \mathrm{L} + \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，构造迭代公式:$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + g$, 即：$x^{(k+1)} = (I-L)^{-1}Ux^{(k)} + (I-L)^{-1}g$。

$$(I-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0 & -0.1 & -0.55 \\ 0 & 0.05 & -0.125 \end{bmatrix}, \quad (I-L)^{-1}g = \begin{bmatrix} -2.4 \\ 1.65 \\ 1.075 \end{bmatrix}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	-2.4000	1.6500	1.0750
2	-3.2750	0.8937	1.0231
3	-2.9621	0.9979	0.9918
4	-2.9975	1.0047	1.0009
5	-3.0021	0.9990	1.0001
6	-2.9996	1.0000	0.9999
7	-3.0000	1.0000	1.0000

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty = 4 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

3. 解：

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 2\alpha & 1 \end{bmatrix} \to \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ -2\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi 迭代收敛的充要条件：S(B)<1

求得矩阵 B 的特征值为$\lambda=\pm\sqrt{2}\alpha$, 则$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

GS 迭代收敛的充要条件：$S((I-L)^{-1}U)<1$.

$$B=L+U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -2\alpha & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$(I-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\ 0 & 2\alpha^2\end{bmatrix}$$

求得矩阵$(I-L)^{-1}U$的特征值为$\lambda=0$ 或 $2\alpha^2$, 则 $2\alpha^2<1$，即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

4. 解：

迭代公式:$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha\left(Ax^{(k)}-b\right)=(I+\alpha A)x^{(k)}-\alpha b$.

矩阵$(I+\alpha A)=\begin{bmatrix}1+3\alpha & 2\alpha\\ \alpha & 1+2\alpha\end{bmatrix}$,其特征值为$\lambda=1+\alpha$或 $1+4\alpha$。

迭代收敛等价于$S\big((I-\alpha A)\big)<1$，则$\begin{cases}|1+\alpha|<1\\ |1+4\alpha|<1\end{cases}\to -\frac{1}{2}<\alpha<0.$

即当$-\frac{1}{2}<\alpha<0$时，迭代收敛。

$S\big((I-\alpha A)\big)$最小时，迭代收敛速度最快。

$|1+\alpha|$在$\alpha=-1$ 时为零，$|1+4\alpha|$在$\alpha=-\frac{1}{4}$时为零，又必须满足收敛条件$-\frac{1}{2}<\alpha<0$。

$$f(\alpha)=|1+\alpha|=1+\alpha\left(-\frac{1}{2}<\alpha<0\right),$$

$$g(\alpha)=|1+\alpha|+|1+4\alpha|=\begin{cases}2+5\alpha,-\frac{1}{2}<\alpha<0,\text{先减后增}\\ -3\alpha,-\frac{1}{4}<\alpha\le-\frac{1}{2},\text{减}\end{cases}$$

则当$2+5\alpha=0$, 即$\alpha=-\frac{2}{5}$时，$S\big((I-\alpha A)\big)=0$, 此时收敛速度最快.

6(1). 解：

$$A=\begin{bmatrix}4&1&-2\\3&5&1\\-1&1&3\end{bmatrix}，\text{则 } B=\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{4}&\frac{2}{4}\\\frac{-3}{5}&0&\frac{-1}{5}\\\frac{1}{3}&\frac{-1}{3}&0\end{bmatrix}$$

$\|B\|_\infty=\frac{4}{5}<1$，故 J 方法和 GS 方法均收敛。

6(2). 解：

$A=\begin{bmatrix}4&1&-2\\3&5&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$, A 为严格对角占优矩阵，则 J 方法和 GS 方法均收敛。

6(3). 解：

A 的各阶顺序主子式都大于零，又 A 具有对称性且具有正对角元，故 A 为对称正定矩阵，则 GS 方法收敛。

$$2D-A=\begin{bmatrix}1&-0.4&-0.4\\-0.4&1&-0.8\\-0.4&-0.8&1\end{bmatrix},$$

$2D-A$的 3 阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}1&-0.4&-0.4\\-0.4&1&-0.8\\-0.4&-0.8&1\end{vmatrix}=-0.216$，故 2D-A 非正定，故 J 方法不收敛。

7. 证明：

迭代公式: $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha\left(b-Ax^{(k)}\right)=(I-\alpha A)x^{(k)}+\alpha b.$

因为 A 的特征值为$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则$(I-\alpha A)$的特征值为$1-\alpha\lambda_i$.

又$\alpha\in\left(0,\frac{2}{\lambda_1}\right)$, 则$1-\alpha\lambda_i\in(-1,1)$. 故$S\left((I-\alpha A)\right)=\max_{1\le i\le n}|1-\alpha\lambda_i|<1$，由此可知，迭代收敛。

四川大学硕士研究生考试试题(2010-2011 学年第一学期)

1．求满足插值条件$P_2(0)=1, P_2(2)=-1, P_2'(1)=-1$