法设计与分析

任课教师：陈玉福

——

姓名____________________ 学号____________________ 成 绩________________

一. 回答下列问题：

1. 在对算法进行复杂性分析时，时间复杂性用什么来度量？其间做了什么假定？渐进复杂性指的是什么？精确到什么程度？

2. 在连通图无向图G的宽度优先搜索树和深度优先搜索树中，哪棵树的最长路径可能会更长些？试说明你的理由。

3. 何谓最优化原理？采用动态规划算法必须满足的条件是什么？动态规划算法是通过什么问题的什么特性提高效率的？试比较贪心算法与动态规划算法的异同。

4. 阐述回溯算法与分枝限界算法的区别和联系，各自强调改善那方面以提高效率？

5. 确定性图灵机模型与非确定性图灵机模型的主要区别在那里？确定性图灵机模型下算法的时间复杂度和空间复杂度指的是什么？

二. 设$p_1, p_2, \cdots, p_n$是准备存放到长为 L 的磁带上的 n 个程序，程序p_i需要的带长为a_i。设$\sum_{i=1}^{n} a_i > L$，要求选取一个能放在带上的程序的最大子集合（即其中含有最多个数的程序）Q。构造Q的一种贪心策略是按a_i的非降次序将程序计入集合。

1). 证明这一策略总能找到最大子集Q，使得$\sum_{p_i \in Q} a_i \le L$。

2). 设Q是使用上述贪心算法得到的子集合，磁带的利用率$\sum_{p_i \in Q} a_i / L$可以小到何种程度？

3). 试说明 1)中提到的设计策略不一定得到使 $\sum_{p_i \in Q} a_i / L$ 取最大值的子集合

三．　假定已知“无向图的 Hamilton 圈”问题是 NPC 问题，证明“旅行商判定问题”也是 NPC 问题。说明“旅行商最优问题”不是 NPC 问题。

四．　虑无向图上的搜索算法

1．将宽度优先搜索算法中的队列改成栈，其它不变，给出一个搜索算法。

2．下面是一个无向图及其邻接链表，用你给出的算法画出图 G 的搜索生成树，标出各节点被访问的次序号。

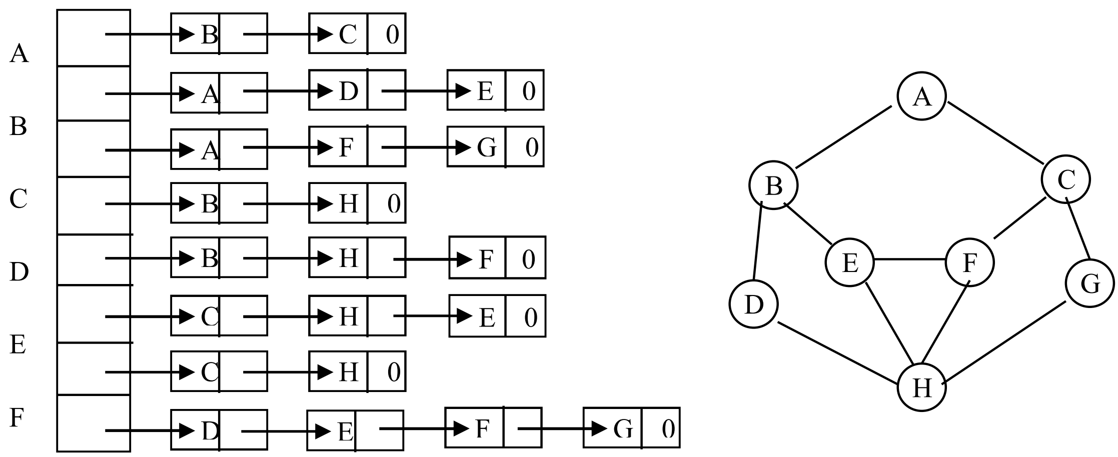


图 1　一个无向图 G 和它的邻接链表

五．　设 $n = 2^m, A$ 是一个 $2n$ 维数组，待求最大值的 n 个数开始存放在 $A[n], A[n+1], \cdots, A[2n-1]$，所求得的最大值存于 $A[1]$。下面是利用平衡树技术设计的求最大值算法，试给出该算法的计算工作量 $W(n)$、运行时间 $t(n)$、处理器数 $p(n)$、成本 $c(n)$、加速比 $s_p(n)$、效率 $E_p(n)$：

SIMD-TC 模型上求最大值算法

输入：$n = 2^m$ 个数，存放于数组 $A[n:2n-1]$ 中

输出：最大数置于 $A[1]$ 中

```
begin
  for k = m-1 to 0 do
    for j = 2^k to 2^(k+1) – 1 par-do
      A[j] ← max{ A[2j], A[2j+1] }
    end for
  end for
end
```

中国科学院研究生院

课程编号：

试 题 专 用 纸

课程名称：计算机算法设计与分析

任课教师：陈玉福

——

姓名____________ 学号____________ 成绩____________

六．（共 20 分，每小题 5 分）回答下列问题

6．已知求解问题Π的两个算法A_1, A_2的时间复杂性函数分别为$T_1(n)=n2^{n/2}$和$T_2(n)=n\log^2 n$。现在有两台计算机C_1, C_2，它们的速度比为 64。如果采用算法A_1，计算机C_1求解问题Π的一个实例I所用的时间为T，那么，采用算法A_2时，计算机C_2能够在时间T内求解问题Π的多大输入规模的实例？

7．何谓最优化原理？采用动态规划算法必须满足的条件是什么？动态规划算法是通过什么问题的什么特性提高效率的？

8．阐述回溯算法与分枝限界算法的区别和联系，各自强调改善那方面以提高效率？

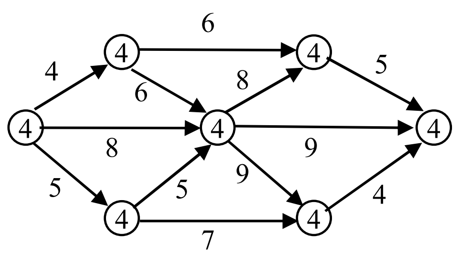
9．多项式时间确定性算法与多项式时间非确定性算法的主要区别是什么？

七. (12 分) 下面是插入排序算法，试分析它在最坏情况下的时间复杂度和平均时间复杂度。

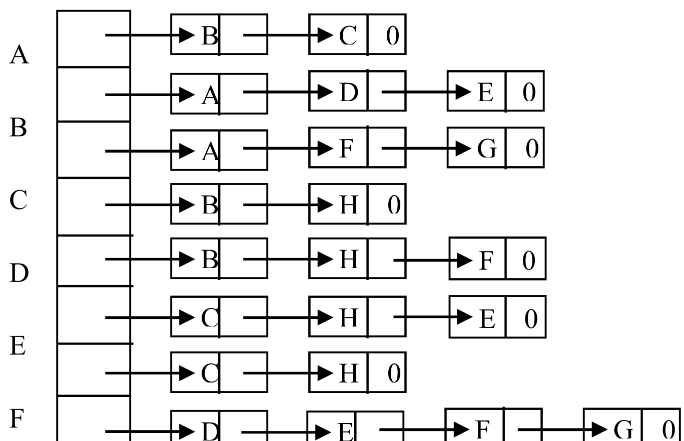
插入排序算法

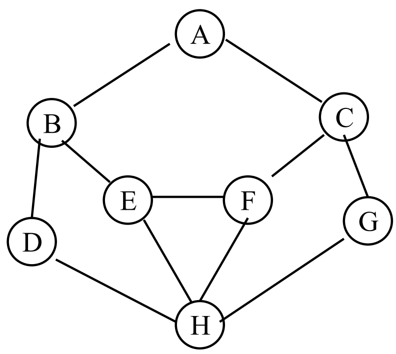
```
proc InSort(a, n)
  for i from 2 to n do
    t:=a[i];
    integer j;
    for j from i-1 to 1 do
      if t<a[j] then a[j+1]:=a[j]; end{if}
    end{for}
    a[j+1]:=t;
  end{for}
end{InSort}
```

八. (12 分) 用动态规划算法求下图中从顶点 0 到顶点 6 的所有最短路径和最长路径。



九. (11 分) 将宽度优先搜索算法中的队列改成栈，其它不变，则得到 D 一检索算法。下面是一个无向图及其邻接链表，试画出图 G 的 D一检索生成树，并标出各节点被访问的次序号。





无向图G和它的邻接链表

十．(15 分) 有 5 个物体，其重量分别为 3，5，7，8，9，价值分别为 4，6，7，9，10。有一背包，载重量为 22，物体不可分割地往背包里装。试画出用优先级队列式分枝限界算法 LCKNAP 解此 0/1 背包问题所生成的解空间树，并给出最优解。

十一．（共 10 分, 每小题 5 分）假定已知“无向图的 Hamilton 圈”问题是 NP-完全问题.

a）证明旅行商问题判定模式也是 NP-完全问题；

b）证明旅行商问题优化模式不是 NP-完全问题，但是 NP 难问题。

计算机算法设计与分析试题

(2008 年 12 月)

一．（共 16 分，每小题 4 分）简答题

1．在对算法进行复杂性分析时，时间复杂度用什么量反映的？其间做了什么假定？复杂性函数的渐进上界反映了复杂性函数的什么性质？

2．叙述最优化原理，并说明动态规划算法是依据问题的那两个性质设计的？

3．阐述回溯算法与分枝限界算法的区别和联系，各自强调改善那方面以提高

效率？

4．什么是 *NP* 问题？证明一个问题是 *NPC* 问题一般采用哪几个步骤？

二．（共 16 分）下面是归并排序算法（递归程序）

```
MergeSort(low, high) // A[low: high]是一个全程数组，含 high-low+1
  //个待排序的元素
  integer low, high;
  if low < high then
     mid=⌊(low+high)/2⌋  //求当前数组的分割点
     MergeSort(low, mid)   //将第一子组排序
     MergeSort(mid+1, high)   //将第二子组排序
      Merge (low, mid，high)   //合并两个已经排序的子数组
  endif
end MergeSort
```

用$T(n)$表示执行该程序所用的时间，并假定$T(1)=a$，且合并子程序 Merge 所用时间与n成正比，即cn，c是正实数。

1．　写出该程序所用时间$T(n)$的递推关系式；（5 分）

2．　当$n=2^k$时，解上述递推关系式得到$T(n)$的表达式；（6 分）

3．　证明：对于一般的n，有$T(n)=O(n\log n)$。（5 分）

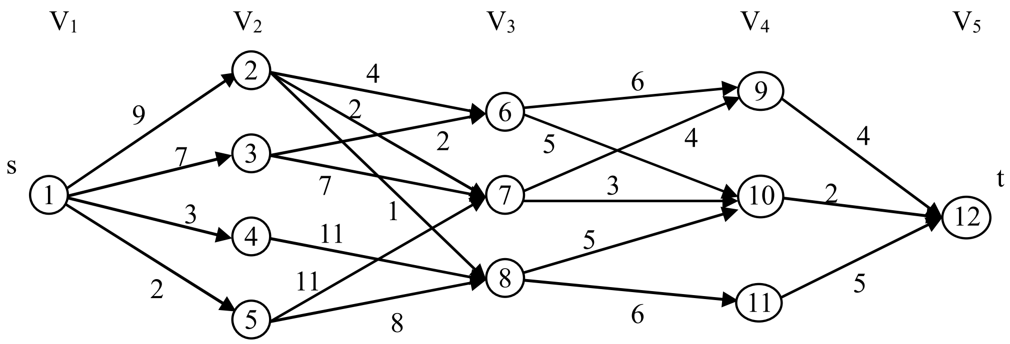
三．（共 16 分）用优先队列式分枝限界算法解如下 0/1 背包问题：

$$n=4,(p_1,p_2,p_3,p_4)=(10,15,6,4),(w_1,w_2,w_3,w_4)=(4,6,3,2),M=12$$

1．画出解空间搜索树，并标注说明；（12 分）

2．给出最优解。（4 分）

四．（供 16 分）用动态规划算法解如下图示的多段图问题，



1．说明多段图问题具有最优子结构性质；（5 分）

2．写出多段图问题最优值的递推公式；（5 分）

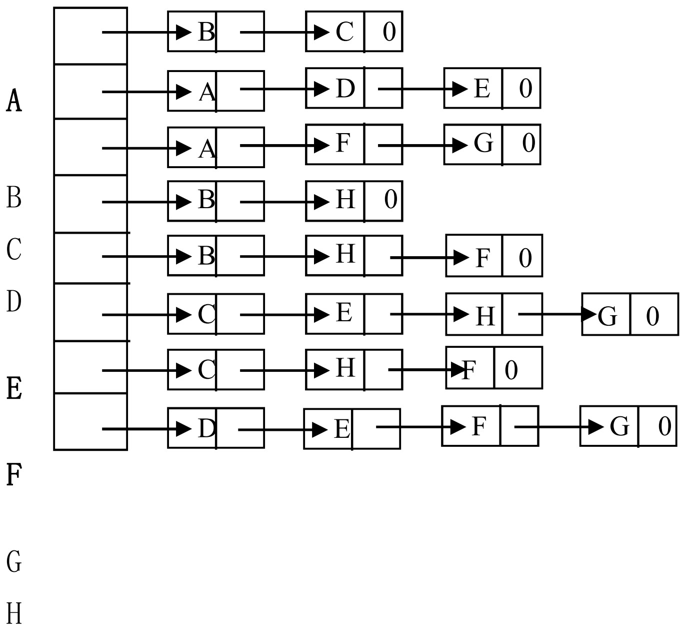
3．给出问题的一个最优解并在图上标注说明。（6 分）

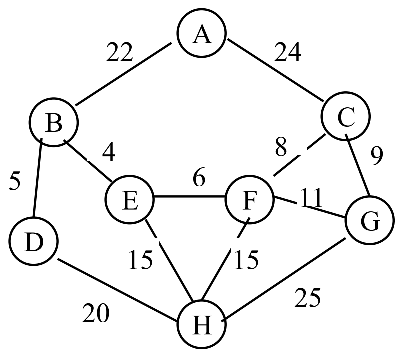
五．（16 分）已知划分问题是 *NPC* 问题，试证明 0/1 背包（判定）问题也是 *NPC* 问题

《计算机算法设计与分析》试题

（2009 年 11 月）

二．　下面是一个无向图及其邻接链表





无向图 G 及其邻接链表

1．(8 分) 给出 D-搜索生成树，并在各个顶点旁标出该顶点被搜索的序号；

2．(12 分) 采用 Prim 算法，给出图 G 的最小生成树，并简要描述生成过程

（即边集的增加过程）。

三．　装箱问题：将 n 物品装入（不能分割）容积相等的若干个箱子。假定第 i 件物品装入箱子所占的容积是 $v_i, 0 < v_i \le 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$，箱子的容积都是 1。确定装箱方法，使所用的箱子个数尽量少。

1．　（5 分）试给出一个贪心算法，并说明算法的时间复杂度；

2．　（10 分）已知 $v_i = 1/(i+1) (i = 1,2,3,4,5,6,7,8)$，按照你给出的算法描述装箱过程。

3．　（5 分）你给出的贪心算法能够获得装箱问题的最优解吗？简单说明理由。

四．（20 分） 知连续偶数数组 $D[1:n]$，单调递增函数 $f(x)$，试设计一个分治算法，搜索数组中数 x，使得 $\frac{|f(x) - 0.07|}{0.07} < 2.5\%$。如果这样的 $x \in D[1:n]$ 存在，则返回 x；如果这样的 x 不存在，则返回 false。要求：写出算法的伪代码或程序，并给出最坏情况下的时间复杂性函数(不需证明)。

五．　用优先队列式分子限界法解下面的旅行商问题，假定旅行商开始时处在第一个城市，各个城市（共 5 个城市）间的距离由下面的矩阵给出：

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 3 & 12 & 8 \\ & \infty & 6 & 14 & 9 \\ & & \infty & 5 & 18 \\ & & & \infty & 11 \\ & & & & \infty \end{pmatrix}$$

1．(5 分) 说明你所使用的优先级函数和限界函数；

2．(10 分) 画出解空间树（即状态空间树），通过活结点表的变化说明搜索过；

3．(5 分) 给出一条旅行商最短的环行路线。

中国科学院研究生院　　　　课程编号：

试 题 专 用 纸　　　　课程名称：计算机

算法设计与分析

任课教师：陈玉福

——

姓名____________ 学号____________ 成绩____________

3. 最大子段和问题：给定整数序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，求该序列形如 $\sum_{k=i}^{j} a_k$ 的子段和的最大值： $\max\left\{0, \max_{1\le i\le j\le n} \sum_{k=i}^{j} a_k\right\}$

1. 一个简单算法如下：

```
int Maxsum(int n,int a,int& besti,int& bestj)
{
   int sum = 0;
   for(int i=1;i<=n;i++){
     int suma = 0;
    for(int j=i;j<=n;j++){
       suma + = a[j];
       if(suma > sum){
         sum = suma;
         besti = i;
         bestj = j;
         }
      }
    }
    return sum;
}
```

试分析该算法的时间复杂性。

2. 试说明最大子段和问题具有最优子结构性质，并设计一个动态规划算法解最大子段和问题。分析算法的时间复杂度（提示：记 $b[j] = \max_{1\le i\le j}\left\{\sum_{k=i}^{j} a[k]\right\},\ 1\le j\le n$，所求的最大子段和为 $\max_{1\le i\le j\le n} \sum_{k=i}^{j} a[k] = \max_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le j} \sum_{k=i}^{j} a[k] = \max_{1\le j\le n} b[j]$）。

二．简答下列问题：

1． 贪心算法和动态规划算法有什么共同点和区别？

2． 试比较回溯法与分枝限界算法，分别谈谈这两个算法比较适合的问题？

3． 什么是多项式时间算法？

4． 什么是 NP 类问题？

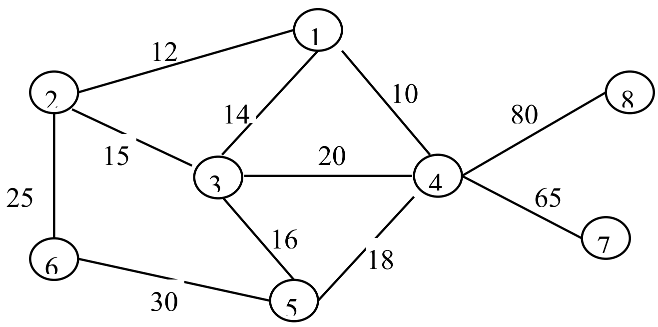
三．下面是二元可满足性问题，它是 P 类问题还是 NPC 问题？

例：给定逻辑语句 $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_l$，其子句定义在布尔变量 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上，而且每个子句均由两个文字构成 $C_i = y_i \vee z_i$， $y_i, z_i \in \{x_1, \overline{x}_1, \cdots, x_n, \overline{x}_n\}$，$i = 1,2,\cdots,l$。

问：是否存在布尔变量的一个真值分配，使得语句C取真值？

四．1.分析 Kruskal 算法的时间复杂度；

2. 试用下面的例子说明用 Kruskal 算法求解最优生成树问题，并总结出算法的基本步骤：



五．采用优先队列式分枝限界算法求解 0/1 背包问题：

$$n = 4, P = (15,15,18,27), W = (2,4,6,9), M = 15 \text{。}$$

1. 画出状态空间树，并在各个节点处标出目标值上界估值 Pvu 和下界估值 Pvl；

2. 指出状态空间树中各节点被选作当前扩展节点的顺序（标号）。