2018-2019 答案

一、简答题

1. **动态规划理论依据：**动态规划是处理分段过程最优化的基本方法。基于最优性原则：无论初始决策和初始状态是什么，其余的决策都必须相对于初始决策所产生的状态构成一个最优决策序列。最优子结构性质和子问题重叠性质是计算模型采用动态规划算法求解的两个基本要素。

   注意问题：要按照动态规划的求解步骤去做

   1) 要分析最优解的结构；
   2) 建立递归关系；
   3) 计算最优值：要依据递归关系式自底向上的方式继续计算，在计算点过程中保存已解决的子问题的答案。每个子问题只计算一次，而在后面需要的时候只是简单的查一下，从而避免大量的重复计算。
   4) 构造最优解；

2. **回溯法和分支限界法的异同：**

   相同点：都是在解空间中搜索问题的可行解或最优解，

   不同点：

   1） 回溯法一般用于求问题的一个可行解，而分枝限界可以用于求出问题的所有可行解。
   2） 搜索的方式不同

   回溯法：采用深度优先的方式，直到达到问题的一个可行解，或经判断沿此路径不会达到问题的可行解或最优解时，停止向前搜索，并沿原路返回到该路径上最后一个还可扩展的节点。然后，从该节点出发朝新的方向纵深搜索。

   分枝限界法：采用的是宽度优先的方式，它将活节点存放在一个特殊的表中，其策略是，在扩展节点处，首先生成其所有的儿子节点，将那些导致不可行解或导致非最优解的儿子节点舍弃，其余儿子节点加入活节点表中，然后，从活节点中取出一个节点作为当前扩展节点，重复上述节点中扩展过程。

3. **最近点对的时间复杂度：（分治法）**

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \quad ==> \quad T(n) = O(nlogn)$$

4. **“旅行商的判定问题”是 NP 完全问题吗？**

   旅行商问题是 NPC。

   1） 旅行商是 NP 的，因为对于任意一个猜想，你都可以检验他是不是旅行商问题，可以在多项式时间内验证。
   2） 考虑图的 Hamilton 问题，已知无向图 G=(V,E),|V|=n,构造对应的旅行商问题如下：

$$dij = \begin{cases} 1, & if(vi,vj) \in E \\ 2, & otherwise \end{cases}$$

   显然，这一变换可以在多项式时间内完成，而且，图 G 有 Hamilton 回路的充分必要条件是上述构建的旅行商问题有解，且对应的路程长度为 n。因为，若 G 不含 Hamilton 回路，则这时的旅行商问题的解对应的路程长度至少为 n+1（n-1+2）。因为已知图的 Hamilton 回路问题是 NPC 的，且上述问题为多项式变换，故我们证明了旅行商问题是 NPH 的。

   证明旅行商问题是 NPH，如下过程：

证明：

1） 旅行商不是 NP 的，因为，对其解的任一猜想，要检验他是否是最优的，需要同所有其他的环游比较，这样的环游会有指数多个，因而不可以在多项式时间内验证。

2） 考虑图的 Hamilton 问题，已知无向图 G=(V,E),|V|=n,构造对应的旅行商问题如下：

$$dij = \begin{cases} 1, & if\,(vi,vj) \in E \\ 2, & otherwise \end{cases}$$

显然，这一变换可以在多项式时间内完成，而且，图 G 有 Hamilton 回路的充分必要条件是上述构建的旅行商问题有解，且对应的路程长度为 n。因为，若 G 不含 Hamilton 回路，则这时的旅行商问题的解对应的路程长度至少为 n+1（n-1+2）。因为已知图的 Hamilton 回路问题是 NPC 的，且上述问题为多项式变换，故我们证明了旅行商问题是 NPH 的。

二、矩阵连乘

A1：30X35　A2：35X15　A3：15X5　A4:5X10　A5:10X20　A6:20X25

P=[30 35 15 5 10 20 25]

1) m[1][1]=0;　m[2][2]=0;　m[3][3]=0;　m[4][4]=0;　m[5][5]=0;　m[6][6]=0

2) m[1][2]=p0p1p2=15750
m[2][3]=p1p2p3=2625
m[3][4]=p2p3p4=750
m[4][5]= p3p4p5=1000
m[5][6]=p4p5p6=5000

3) $m[1][3] = 7875 =$

$$min\begin{cases} m[1][1] + m[2][3] + p0p1p3 = 0 + \mathrm{p1p2p3} + p0p1p3 = 0 + 2625 + 30 * 15 * 5 = 7875 \\ m[1][2] + m[3][3] + p0p2p3 = \mathrm{p0p1p2} + 0 + p0p2p3 = 15750 + 0 + 30 * 15 * 5 = 18000 \end{cases}$$

同样的道理可以求出

m[2][[4]=4375
m[3][5]=2500
m[4][6]=3500

4) $m[1][4] = 9375 =$

$$min\begin{cases} m[1][1] + m[2][[4] + p0p1p4 = 0 + 4375 + 30 * 35 * 10 = 14875 \\ m[1][2] + m[3][4] + p0p2p4 = 15750 + 750 + 30 * 15 * 5 = 18750 \\ m[1][3] + m[4][4] + p0p3p4 = 7875 + 0 + 30 * 5 * 10 = 9375 \end{cases}$$

同样的道理可以求出

m[2][5]=7125

m[3][6]=5375

5) $m[1][5] = 11875 =$

$$min\begin{cases} m[1][1] + m[2][5] + p0p1p5 = 0 + 7125 + 30 * 35 * 20 = 28125 \\ m[1][2] + m[3][5] + p0p2p5 = 15750 + 2500 + 30 * 15 * 20 = 27250 \\ m[1][3] + m[4][5] + p0p3p5 = 7875 + 1000 + 30 * 5 * 20 = 11875 \\ m[1][4] + m[5][5] + p0p4p5 = 935 + 0 + 30 * 10 * 20 = 15375 \end{cases}$$

同样的道理可以求出

m[2][6]=10500

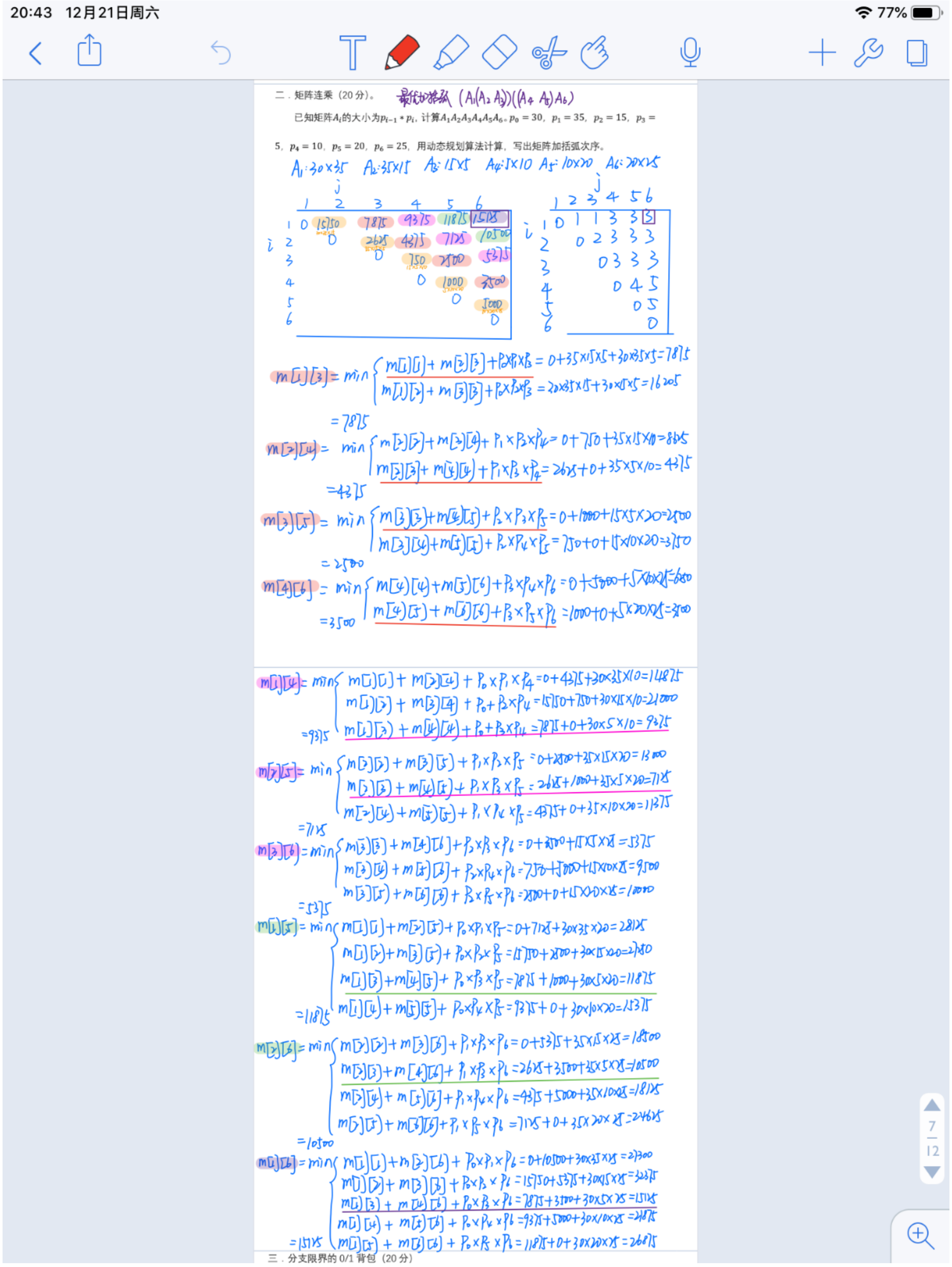
6) $$m[1][6] = 5125 = min\begin{cases} m[1][1] + m[2][6] + p0p1p6 = 23700 \\ m[1][2] + m[3][6] + p0p2p6 = 32375 \\ m[1][3] + m[4][6] + p0p3p6 = 15125 \\ m[1][4] + m[5][6] + p0p4p6 = 21875 \\ m[1][5] + m[6][6] + p0p5p6 = 26875 \end{cases}$$

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6
J=1	0	15750	7875	9375	11875	5125
J=2		0	2625	4375	7125	10500
J=3			0	750	2500	5375
J=4				0	1000	3500
J=5					0	5000
J=6						0

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6
J=1	0	1	1	3	3	3
J=2		0	2	3	3	3
J=3			0	3	3	3
J=4				0	4	5
J=5					0	5
J=6						0

答案：具有对称性

（A1（A2A3））（（A4A5）A6）



二．矩阵连乘（20 分）。 最优加括弧 $(A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6)$

已知矩阵A_i的大小为$p_{i-1} * p_i$，计算$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$。$p_0 = 30$，$p_1 = 35$，$p_2 = 15$，$p_3 = 5$，$p_4 = 10$，$p_5 = 20$，$p_6 = 25$，用动态规划算法计算，写出矩阵加括弧次序。

$A_1: 30\times35$ $A_2: 35\times15$ $A_3: 15\times5$ $A_4: 5\times10$ $A_5: 10\times20$ $A_6: 20\times25$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	15750	7875	9375	11875	$\boxed{15125}$
2		0	2625	4375	7125	10500
3			0	750	2500	5375
4				0	1000	3500
5					0	5000
6						0

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	3	3	$\boxed{3}$
2		0	2	3	3	3
3			0	3	3	3
4				0	4	5
5					0	5
6						0

$$m[1][3]=\min\begin{cases} m[1][1]+m[2][3]+P_0\times P_1\times P_3=0+35\times15\times5+30\times35\times5=7875 \\ m[1][2]+m[3][3]+P_0\times P_2\times P_3=30\times35\times15+30\times15\times5=16205 \end{cases}=7875$$

$$m[2][4]=\min\begin{cases} m[2][2]+m[3][4]+P_1\times P_2\times P_4=0+750+35\times15\times10=8625 \\ m[2][3]+m[4][4]+P_1\times P_3\times P_4=2625+0+35\times5\times10=4375 \end{cases}=4375$$

$$m[3][5]=\min\begin{cases} m[3][3]+m[4][5]+P_2\times P_3\times P_5=0+1000+15\times5\times20=2500 \\ m[3][4]+m[5][5]+P_2\times P_4\times P_5=750+0+15\times10\times20=3750 \end{cases}=2500$$

$$m[4][6]=\min\begin{cases} m[4][4]+m[5][6]+P_3\times P_4\times P_6=0+5000+5\times10\times25=6250 \\ m[4][5]+m[6][6]+P_3\times P_5\times P_6=1000+0+5\times20\times25=3500 \end{cases}=3500$$

$$m[1][4]=\min\begin{cases} m[1][1]+m[2][4]+P_0\times P_1\times P_4=0+4375+30\times35\times10=14875 \\ m[1][2]+m[3][4]+P_0+P_2\times P_4=15750+750+30\times15\times10=21000 \\ m[1][3]+m[4][4]+P_0+P_3\times P_4=7875+0+30\times5\times10=9375 \end{cases}=9375$$

$$m[2][5]=\min\begin{cases} m[2][2]+m[3][5]+P_1\times P_2\times P_5=0+2500+35\times15\times20=13000 \\ m[2][3]+m[4][5]+P_1\times P_3\times P_5=2625+1000+35\times5\times20=7125 \\ m[2][4]+m[5][5]+P_1\times P_4\times P_5=4375+0+35\times10\times20=11375 \end{cases}=7125$$

$$m[3][6]=\min\begin{cases} m[3][3]+m[4][6]+P_2\times P_3\times P_6=0+3500+15\times5\times25=5375 \\ m[3][4]+m[5][6]+P_2\times P_4\times P_6=750+5000+15\times10\times25=9500 \\ m[3][5]+m[6][6]+P_2\times P_5\times P_6=2500+0+15\times20\times25=10000 \end{cases}=5375$$

$$m[1][5]=\min\begin{cases} m[1][1]+m[2][5]+P_0\times P_1\times P_5=0+7125+30\times35\times20=28125 \\ m[1][2]+m[3][5]+P_0\times P_2\times P_5=15750+2500+30\times15\times20=27250 \\ m[1][3]+m[4][5]+P_0\times P_3\times P_5=7875+1000+30\times5\times20=11875 \\ m[1][4]+m[5][5]+P_0\times P_4\times P_5=9375+0+30\times10\times20=15375 \end{cases}=11875$$

$$m[2][6]=\min\begin{cases} m[2][2]+m[3][6]+P_1\times P_2\times P_6=0+5375+35\times15\times25=18500 \\ m[2][3]+m[4][6]+P_1\times P_3\times P_6=2625+3500+35\times5\times25=10500 \\ m[2][4]+m[5][6]+P_1\times P_4\times P_6=4375+5000+35\times10\times25=18125 \\ m[2][5]+m[6][6]+P_1\times P_5\times P_6=7125+0+35\times20\times25=24625 \end{cases}=10500$$

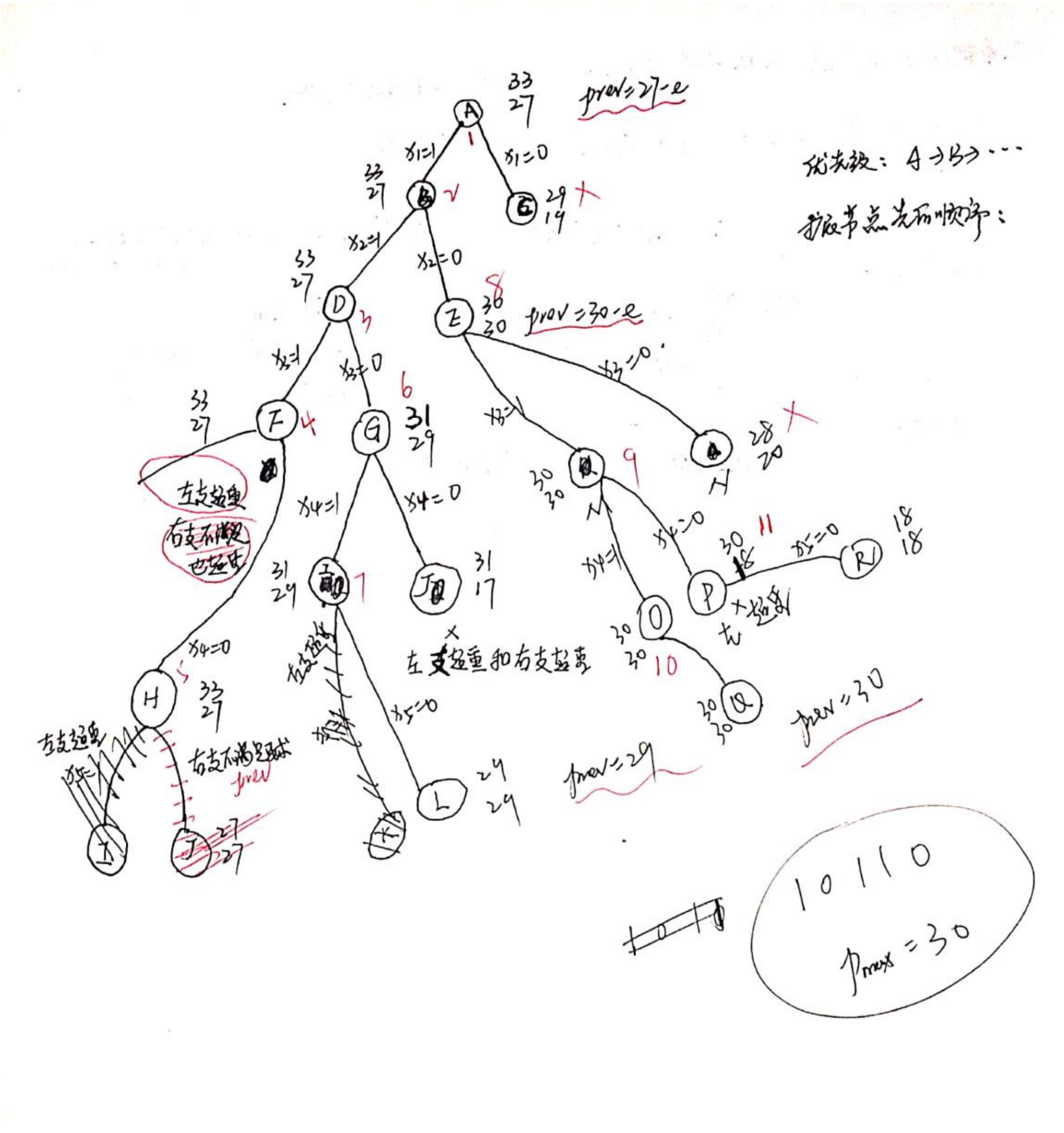
$$m[1][6]=\min\begin{cases} m[1][1]+m[2][6]+P_0\times P_1\times P_6=0+10500+30\times35\times25=36750 \\ m[1][2]+m[3][6]+P_0\times P_2\times P_6=15750+5375+30\times15\times25=32375 \\ m[1][3]+m[4][6]+P_0\times P_3\times P_6=7875+3500+30\times5\times25=15125 \\ m[1][4]+m[5][6]+P_0\times P_4\times P_6=9375+5000+30\times10\times25=21875 \\ m[1][5]+m[6][6]+P_0\times P_5\times P_6=11875+0+30\times20\times25=26875 \end{cases}=15125$$

三．分支限界的 0/1 背包（20 分）

三、分支限界的 0/1 背包

四、独立集证明

1)



四、独立集证明

1)