Question 1.

2．相遇集问题

例：给定集合 S 的一个子集族 C 和一个正整数 K；

问：S 是否包含子集 S'，$|S'|\le K$，使得 S' 与 C 中的任何一个子集的交均非空？（S' 称为 C 的相遇子集）试判定相遇集问题是 P 类的还是 NP 完全的，并给出你的证明？

My Answer 1. 给定一个 C 和 S'，要判断 S' 是否和 C 相遇只需判断 S' 中的元素是否包含于 C 中的元素，这个过程的复杂度是 $n*m*k, n=|S'|, m=|C|, k=\max_i|C_i|$，因此该问题是一个 NP 问题。

若对所有的 $c\in C$，若 $|c|=1$，只需判断 c 中单元素是否属于 S'，该过程可在多项式时间完成；若 $|c|\ge 2$，可将 c 分解为 $C_k^2, k=|c|$ 个二元集，该过程同样可在多项式时间内完成（复杂度为 $m*k*C_k^2, m=|C|, k=|c|$），不妨令 $c=\{c_1,c_2\}$

则相遇集问题可在多项式时间内转化为顶点覆盖问题：令 S_0 为子集族 C 的并搜集。将 S_0 中每一个元素作为一个顶点，并依照 C 中的二元集关系生成边，该问题即可变为：

例：给定无向图 $G(S_0,E)$ 和正整数 k

问：G 是否有 k 覆盖

而顶点覆盖问题为一个 NPC 问题，因此相遇集问题也是 NPC 问题

Question 2.

3．0/1 整数规划问题

例：给定一个 $m\times n$ 矩阵 A 和一个 m 元整数向量 b；

问：是否存在一个 n 元 0/1 向量 x，使得 $Ax\le b$？

试证明 0/1 整数规划问题是 NP 完全问题。

My Answer 2. 首先，0/1 整数规划问题是一个 np 问题，因为给定一个 0/1 解 x，可以在多项式时间内验证 $A_{m\times n}x$ 是否小于等于 b（假设向量间的偏序关系由一个锥定义），只需做 $m*n$ 次乘法操作以及 m 次比较操作即可

令 A 的每一行 A_{i*} 为 0/1 背包问题中的重量系数，并令 0/1 背包问题的价值系数为 0，则该问题可在多项式时间内化为 m 个 0/1 背包问题的交，也即：

例：给定 m 个有限集合 U_i，对于每个 $a\in U_i$，对应一个 $A_i(a)\in Z^+$ 和另一个 $0(a)=0$，并另外给定一个约束值 $b_i\in Z^+$ 和目标 $K=0$

问：是否存在 m 个 U_i 的子集的交 U'，使得 $\sum_{a\in U'}A_{i*}(a)\le b$，且 $\sum_{a\in U'}0(a)\ge 0$

而 0/1 背包问题为 npc 问题，因此 0/1 整数规划问题也是 npc 问题。

Question 3.

5．独立集问题：

例：对于给定的无向图 $G=(V,E)$ 和正整数 $k\ (\le|V|)$

问：G 是否包含一个 k－独立集 V'，即是否存在一个子集 $V'\subseteq V$，$|V'|=k$，使得 V' 中的任何两个顶点在图 G 中都不相邻。

证明独立集问题是 NPC 问题（提示：考虑独立集和团的关系：如果 V' 是图 G 的团，则 V' 是 G 的补图 $\widetilde{G}$ 的独立集；反之亦然）。

My Answer 3. 首先，独立集问题是一个 np 问题，因为无向图 $\tilde{G}(V,\tilde{E})$ 的团问题是一个 NP 问题，因此 $G(V,E)$ 的独立集问题也是一个 NP 问题。

若要证明独立集到团问题的转换是双射的，只需要证明 $\tilde{G}$ 包含一个 k 独立集 $V' \Leftrightarrow G$ 包含一个 k 团

(1) 若 $\tilde{G}$ 包含一个 k 独立集 V'，则 $\forall u,v \in V'$ 在 $\tilde{G}$ 都不相邻，又因为 G 为 $\tilde{G}$ 的补图，故而 $\forall u,v \in V'$ 在 G 中都相邻，从而 G 包含一个 k 团

(2) 若 G 中包含一个 k 团，则 $\forall u,v \in V'$ 在 G 都有边连接，又因为 G 为 $\tilde{G}$ 的补图，故而 $\forall u,v \in V'$ 在 $\tilde{G}$ 中都不相邻，从而 $\tilde{G}$ 包含一个 k 独立集

由独立集问题向团问题的变换可由 G 向 $\tilde{G}$ 实现，也即复杂度为 $\frac{n(n-1)}{2}$，其中 $n = |G|$

又因为团问题是一个 npc 问题，因此独立集问题也是一个 npc 问题。