8-2 单源最短路与线性规划。

试将单源最短路问题表示为一个线性规划问题。

(1) 单源单终点最短路问题

给定一个有权有向图 $G=(V,E)$，每条边 (i,j) 权重为 $w_{ij}>0$

V中两个顶点 s, t，图 G中以s为起点，t为终点的有向路称为 s-t有向路，所经过的所有边权之和称为该 s-t有向路长度。单源单终点最短路问题要求最短的 s-t有向路。

用 x_{ij} 表示 (i,j) 边是否在 s-t 路上. $x_{ij}=\begin{cases}0 & \text{不在 s-t路上}\\ 1 & \text{在 s-t路上}\end{cases}$

可将单源单终点最短路问题表示为如下线性规划问题：

$$\min \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \begin{cases}1 & i=s\\ -1 & i=t\\ 0 & i\neq s,t\end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0$$

从变量 x_{ij} 定义可知，x_{ij} 为0-1变量，上述线性规划问题应表述为整数线性规划问题.

从约束条件可以看出，约数矩阵为全1模阵. 0-1变量可以松弛为区间[0,1]中实数，用单纯形算法求解可得0-1整数解. 如果将变量 x_{ij} 松弛为所有非负实数，则约束条件还不足以保证所有非0变量所对应的边构成一条 s-t 有向路，可能含有向圈；由于每条边的权是一个非负实数，目标函数是非负的，任何正圈不可能使目标函数最小，因此找到的结构是一条 s-t 有向路，最多含有0圈.

最短路的最优性条件定理： 对每个 $j\in V$，d_j 表示从 s 到 j 的有向路长度

d_j 是最短路的长度的充要条件是：对于 $\forall (i,j)\in E$，有 $d_j\leq d_i+w_{ij}$

由上述定理可将该问题表述为：

$$\min d_t$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} d_j\leq d_i+w_{ij}\\ d_s=0\end{cases}$$

(2) 单源最短路问题

$$\min \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ji} = \begin{cases}n-1 & i=s\\ -1 & i\neq s\end{cases}$$

由最短路最优性条件定理，还可表示为：

$$\min \sum_{t\neq s} d_t$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} d_j\leq d_i+w_{ij}\\ d_s=0\end{cases}$$

8-6 单纯形算法。

试用单纯形算法解下面的线性规划问题：

$\min z = x_1 + x_2 + x_3$

s.t. $2x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 \geqslant 10000$

$20x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geqslant 30000$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

① 引入松弛变量和人工变量 $\max z = -x_1 - x_2 - x_3$

$$z_1 + 2x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 - y_1 = 10000$$

$$z_2 + 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 - y_2 = 30000$$

令 $y = -z$, $\min z = \max(-y)$

$y = -x_1 + (-x_2) + (-x_3)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 - x_4 = 10000 \\ 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 - x_5 = 30000 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

$20x_1 + 75x_2 + 30x_3 - 10x_4 = 100000$

$0 + 70x_2 + 20x_3 - 10x_4 + x_5 = 70000$

$\Downarrow$

令 $u = y + 5000$ $\max(y) = \max u - 5000$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{15}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{x_4}{2} = 5000 \\ x_5 + 70x_2 + 20x_3 - 10x_4 = 70000 \end{cases}$$

$$u = \frac{11}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$\frac{11}{4} \times \frac{4}{7}$

$\frac{11}{4} \times 1000$ 250

		x_2	x_3	x_4
u	0	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_1	5000	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_5	70000	70	20	-10

入基：$x_2 = \frac{11}{4}$

$\min\left\{\frac{5000}{\frac{15}{4}}, \frac{70000}{70}\right\} = 1000$

离基：x_5

$\frac{11}{4} \times \frac{1}{70}$

$\frac{11}{4} \times \frac{1}{7}$

$$x_2 = \frac{70000 - x_5 - 20x_3 + 10x_4}{70}$$

$$= 1000 - \frac{1}{70}x_5 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$

$u = 2750 - \frac{11}{280}x_5 - \cancel{\frac{2}{7}}x_3 + \frac{3}{28}x_4$

$u = 2750 - \frac{11}{280}x_5 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{28}x_4$

$x_2 = 1000 - \frac{1}{70}x_5 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$

$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{70}x_5 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = 1000 \\ x_1 - \frac{3}{56}x_5 + \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{28}x_4 = 1250 \end{cases}$$

		x_5	x_3	x_4
u	2750	$-\frac{11}{280}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{28}$
x_1	1000	$\frac{1}{70}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_2	1250	$-\frac{3}{56}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

<0

$\therefore \max(u) = 2750$

$\therefore \max(y) = -2250$

$\therefore \min(z) = 2250$

最优解为 $x_1 = 1000, x_2 = 1250, x_3 = 0$