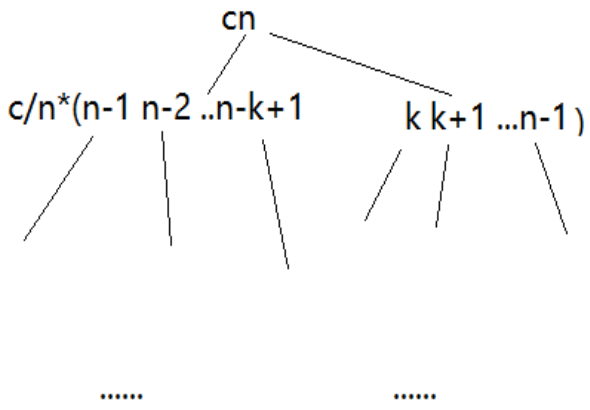
第三章练习参考答案

一、讲义习题三

4 证:

（1）证明见第九章概率算法之 ppt No.17 舍伍得算法选择算法。

（2）可使用递归树方法:



cn

c/n((k-1)(n-1-(n-k+1))/2+(n-k)(n-1_k)/2)=c/n((k-1)k-2)/2+(n-k-1)(n-k))<=c/n((k-1)n/2+(n-k)n/2)<=cn/2-c/2=O(cn/2)

...

$cn/2^k$

所以，$C_a^k(n)<=cn+cn/2+...+cn/2^k=cn(1-(1/2)^k)/(1-1/2)<2cn$

$C_a^k(n)=O(n)$

二

1. 解：算法伪码：

```
ModInsertSort(A[1..n])
 for i:=2 to n do
     x:=A[i]
     k:=BinarySearch(A[1..i-1],x)
```

//在 A[1..i-1]查找 x 应该插入的位置 k

A[k]:=x //

复杂度分析：外 for 循环 n-1 次，在 i-1 规模的数组中二分比较次数为<=log(i-1)+1，因此总比较次数为：（但移动次数没节省）

$$\sum_{i=2}^{n}\log(i-1)+1)=n-1+\sum_{i=1}^{n-1}\log i\le n-1+\sum_{i=1}^{n-1}\log n=n-1+(n-1)\log n=O(n\log n)$$

2. 解：类似快速排序的划分过程。从后向前把每个数与 0 比较，找到第一个负数 A[p];从前向后把每个数与 0 比较，找到第一个正数 A[q]，如果 P>q，则将 A[p]与 A[q]交换。交换后如果 p-q=1，算法停止，否则继续这个过程。

3. 解：Hanoi(A,C,n)

```
If n=1 then move(A,C)
Else Hanoi(A,B,n-1)
        Move(A,C)
        Hanoi(B,C,n-1)
```

算法复杂度：$T(n)=2T(n-1)+1=4T(n-2)+2+1=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1=2^n-1$

4. 解：因为 L 中存在峰顶元素，因此|L|>=3。使用二分查找算法。如元素数等于 3，则 L[2]是峰顶元素，当元素数 n>3 时，令 k=⌊n/2⌋，比较 L[k]与它左边和右边相邻的项，如果 L[k]>L[k-1]且 L[k]>L[k+1]则 L[k]为峰顶元素；否则，如果 L[k-1]>L[k]>L[k+1]，则继续搜索 L[1..k-1]，如果 L[k-1]<L[k]<L[k+1]则继续搜索 L[k+1..n]的范围。每比较两次，搜索范围减半，直到元素数小于 3 停止递归调用。时间复杂度 T(n)=T(n/2)+2，根据主定理，T(n)=O(logn)。

5. 解：在 A 中使用二分查找算法找 L，如果 L=A[i]，找到 L 的位置 i，然后把 i 加 1;如果 L 不在 A 中，那么找到大于 L 的最小数的位置 i。类似地，找到 U 的位置 A[j]，j=j+1，或小于 U 的最大数 A[j]。输出 A 中 i 到 j 的全体数。

(例：关于 L 的返回条件：

```
if (left==right) return left+1
Else if left+1=right{
    If L=a(left) return right
    Else L=a(right) return right+1
    Else return right
    }
End if
```

）

6. 解：采用分治策略。如果 n<3，那么将拿走的硬币与剩下的硬币比较，不等的是坏币；将 n 枚硬币分为大致相等的 3 份，如果 n(mod 3)≠0，那么令两份少的硬币相等。取两份相等的硬币放到天平上，如果不等，那么这两份硬币中含有坏币，否则坏币在第 3 份中。递归处理，直到 n<3 为止。

```
算法：Coin(A,n)
  1:  K:=⌊n/3⌋
将A中硬币划分为X、Y、Z三个集合,使得|X|=|Y|=k,z=n-2k
    If W(X)≠W(Y)    //W(X)、W(Y)是X、Y的重量
      Then A:=X∪Y
```

Else A：=Z

n:=|A|

if n>2 then goto 1

else 将 A 中硬币与拿走的比较，不等者为坏币

算法复杂度：T(n)=T(2n/3)+O(1),T(1)=0,T(2)=1

根据主定理，T(n)=O(logn)

7. 解：在 A 与 B 中选择一个数组排序，然后循序对另一个数组的每个元素使用二分查找法，看它是否在这个数组中出现。如果出现，则将它放入 C。算法的主要消耗是排序，所以选择较小的数组 B 进行排序。

算法：C:={}

L:=Sort(B)

For i:=1 to n do {

X:=A[i]

J:=binarySearch(L,x)

//在 L 中二分查找 x，若 x 在 L 中，j 为序标，否则 j 为 0。

If j>0 then C:=C∪{x}

}

算法复杂度：排序 O(mlogm)，for 循环运行 n 次，内部二分查找 O(logm)，for 循环关键操作 O(nlogm)，于是

T(n)=O(mlogm)+O(nlogm)=O((m+n)logm)=O(nlogm)

8. 解：算法设计思想：规定 S 的中位数 x 是从小到大排序的第 n/2

个数，用 x 划分 S，比 x 小的整数属于 S_1，x 本身也放到 S_1，其余的放到 S_2，由于 n 是偶数，$|S_1|=|S_2|$，易见这样的集合满足要求。

算法复杂度：找中位数和划分都是 O(n)，所以 T(n)=O(n)。

9. 解：(1)r=3 ，**不妨设 n 是 3 的倍数**。每组至少 2 个元素不大于 u，A 中至少 $2*\lceil\lfloor n/3\rfloor/2\rceil>=\lfloor n/3\rfloor=n/3$ 个不大于 v， 即 A 中至多 $n-\lfloor n/3\rfloor<=n-n/3=2n/3$ 个元素大于 v。同理，至多有 2n/3 个元素小于 v。即子问题的规模小于 2n/3。所以， T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+O(n)，得 T(n)=O(nlogn)。与直接排序方法的复杂度一样。

(2)问题变为 $4*\lceil\lfloor n/7\rfloor/2\rceil>=2\lfloor n/7\rfloor$，子问题规模小于 n-2n/7=5n/7（不妨设 n 是 7 的倍数） T(n)=T(n/7)+T(5n/7)+O(n)

$=n(1+6/7+(6/7)^2+...+(6/7)^k)+O(n)=O(n)$

10. 解：算法的主要思想：在二分归并排序算法中附加计数逆序的工作。在递归调用算法分别对数组 L1 和 L2 排序时，分别计数每个子数组内部的逆序；在归并排好序的子数组 L1 与 L2 的过程中，附带计算 L1 的元素和 L2 的元素之间产生的逆序。假设 L1 是前半个数组，L2 是后半个数组，如果 L1 的最小元素 x 大于 L2 的最小元素 y，那么算法将从 L2 中取走 y，这时 L1 中的每个元素都和 y 构成逆序，所增加的逆序数正好等于此刻 L1 中的元素数；相反，如果 L1 中最小元素 x 小于 L2 最小元素 y，从 L1 中取走 x，这时 L2 中的任何元素都与 x 不构成逆序，逆序数不增加。算法描述：初始 N:=0

1)将 L 从中间划分为 L1，L2

2)递归处理 L1;

3)递归处理 L2；

4)在归并 L1、L2 时计数 L1 与 L2 产生的逆序数 m，N:=N+m

算法复杂度：T(n)=2T(n/2)+n-1=O(nlogn)

11. 解：(1)只好顺序从下到上测试，一次一个高度，最坏 T(n)=O(n)

(2)二分查找法。取 n/2 高度进行第一次测试，如果瓶子没有摔碎，则强度在[n/2+1,n]之间，否则在[1,n/2]之间。每次测试后可能一个瓶子的代价，测试范围减半，最坏时间复杂度 T(n)=O(logn)。

(3) 为简单起见，不妨设$\sqrt{n}$为整数，将高度 1,2,..,n 分为$\sqrt{n}$个组，每组$\sqrt{n}$高度，取第一个瓶子从下到上测试每组的最大高度，即高度$\sqrt{n}$,2$\sqrt{n}$…n，如果 k-1 组没碎，k 组碎了，那么玻璃瓶子的强度在第 k 组内，于是，再经至多$\sqrt{n}$次测试，就可以得到瓶子的强度。

T(n)=O($\sqrt{n}$)+O($\sqrt{n}$)=O($\sqrt{n}$)

12. 解：

(1)a=9,b=3,f(n)=n，$\log_3 9=2$,f(n)的阶低于 $n^{\log_b a}$,符合情况 1，

$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^2)$。

(2)a=5,b=2,f(n)=$n^2\log^2 n=O(n^{\log_2 5-\varepsilon})$，$T(n)=\Theta(n^{\log_2 5})$

(3)a=2,b=2,f(n)=n^2logn,取 c=3/4 则

$af(n/b)=2(n/2)^2\log(n/2)=(n^2/2)(\log n-1)\leqslant(n^2/2)\log n\leqslant cn^2\log n=cf(n)$

于是，符合情况 3，$T(n)=\Theta(n^2\log n)$

13. 解：使用递归树可得：

$T(n)=cn+3cn/4+(3/4)^2cn+(3/4)^3cn+\ldots..=[1+3/4+(3/4)^2+(3/4)^3+\ldots]cn=\Theta(n)$

14. 解：

(1)$T(n)=n\log 3+(n-1)\log 3+T(n-2)=\log 3(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1)=\Theta(n^2)$

(2)$T(n)=T(n-1)+1/n=T(n-2)+1/(n-1)+1/n=\ldots$

$=1/n+1/(n-1)+\ldots+1/2+1=\Theta(\log n)$