1. ① $\forall s\in\{0,1\}^n$, $C_s=\{\omega\in\Omega \mid \omega_1=s_1,\cdots,\omega_n=s_n\}\neq\phi$ 显然.

② $\forall s_1\in\{0,1\}^n, \forall s_2\in\{0,1\}^n$, $s_1\neq s_2 \rightarrow C_{s_1}\cap C_{s_2}=\phi$

证明：设 $s_1=(s_{11},\cdots,s_{1n})$, $s_2=(s_{21},\cdots,s_{2n})$.

因为 $s_1\neq s_2$, 故 $\exists i\in\{1,\cdots,n\}$, s.t. $s_{1i}\neq s_{2i}$

$\forall s_1'\in C_{s_1}$, $s_1'=(s_{11}',\cdots,s_{1n}',s_{1,n+1}',\cdots)$, 其中 $s_{1i}'=s_{1i}$, $\forall i=1,2,\cdots,n$.

$\forall s_2'\in C_{s_2}$, $s_2'=(s_{21}',\cdots,s_{2n}',s_{2,n+1}',\cdots)$, 其中 $s_{2i}'=s_{2i}$, $\forall i=1,2,\cdots,n$.

故 $\exists i\in\{1,2,\cdots,n\}$ s.t. $s_{1i}'\neq s_{2i}'$. 故 $s_1'\neq s_2'$

故 $C_{s_1}\cap C_{s_2}=\phi$.

③ $\bigcup\limits_{s} C_s=\Omega \Leftrightarrow \forall\omega\in\Omega, \exists s\in\{0,1\}^n$. s.t. $\omega\in C_s$

证明：设 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1},\cdots)$, $s=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\{0,1\}^n$

则有 $\omega\in C_s$.

2. 由 σ-algebra 的定义和 C_s 的定义可知，$p\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow p=\{\omega\in\Omega \mid \omega_{p_1}=s_{p_1},\cdots,\omega_{p_t}=s_{p_t}\}$ $(t\in\{0,1,\cdots,n\})$

构造从 $\mathcal{F}_n$ 到 $2^{\{0,1\}^n}$ 的单射 f：

$$\forall p\in\mathcal{F}_n,\ f(p)=\{s'\in\{0,1\}^n \mid s'_{p_1}=s_{p_1},\cdots,s'_{p_t}=s_{p_t}\}\in 2^{\{0,1\}^n}$$

容易验证，当 $p_1\neq p_2$ 时，$f(p_1)\neq f(p_2)$.

构造从 $2^{\{0,1\}^n}$ 到 $\mathcal{F}_n$ 的单射 g：

$$\forall S\in 2^{\{0,1\}^n},\ g(S)=\{\omega\in\Omega \mid \exists s\in S \text{ s.t. } \omega\in C_s\}\in\mathcal{F}_n$$

容易验证，当 $S_1\neq S_2$ 时，$g(S_1)\neq g(S_2)$.

由 Schröder-Berstein 定理知，存在从 $\mathcal{F}_n$ 到 $2^{\{0,1\}^n}$ 的双射.

3. 只需证明，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\mathcal{F}_n \subsetneq \mathcal{F}_{n+1}$.

注意到对于 $p\in\mathcal{F}_n$，$\forall \omega\in p$，$\exists s\in\{0,1\}^n$ s.t. $\omega\in C_s$.

要证明 $p\in\mathcal{F}_{n+1}$，即需证明 $\forall\omega\in p$，$\exists s'\in\{0,1\}^{n+1}$ s.t. $\omega\in C_{s'}$

若 $\omega_{n+1}=0$，$s'=(s,0)$；

若 $\omega_{n+1}=1$，$s'=(s,1)$.

故 $\forall p\in\mathcal{F}_n$，$p\in\mathcal{F}_{n+1}$. 故 $\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}_{n+1}$

又有 $S=\{(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n+1个0})\}\subset\{0,1\}^{n+1}$，$C_S\in\mathcal{F}_{n+1}$，$C_S\notin\mathcal{F}_n$

故 $\mathcal{F}_n\subsetneq\mathcal{F}_{n+1}$ □.

4. $\forall x\in\mathcal{F}_\infty$，$\exists n_1\geq 1: x\in\mathcal{F}_{n_1}$；$\forall y\in\mathcal{F}_\infty$，$\exists n_2\geq1: y\in\mathcal{F}_{n_2}$

① 证明 $x^c\in\mathcal{F}_{n_1}$.

若 $x\in\mathcal{F}_{n_1}$，$x^c=\Omega\setminus x\in\mathcal{F}_{n_1}$（由于 $\mathcal{F}_{n_1}$ 是一个 σ-algebra）. $\Rightarrow x^c\in\mathcal{F}_\infty$

② 证明 $x\cup y\in\mathcal{F}_\infty$

不妨设 $n=\max\{n_1,n_2\}$. 由3.中的结论可知，$\mathcal{F}_{n_1}\subseteq\mathcal{F}_n$，$\mathcal{F}_{n_2}\subseteq\mathcal{F}_n$

故 $x\in\mathcal{F}_n$，$y\in\mathcal{F}_n$，又由 $\mathcal{F}_n$ 是一个 σ-algebra，$x\cup y\in\mathcal{F}_n$.

$\Rightarrow \mathcal{F}_\infty$ is an algebra

③ 证明 $\mathcal{F}_\infty\neq 2^\Omega$

注意到 $n\geq1$. 考虑首位不相同的向量构成的集合。

$s_1=(0,0,\cdots)\in\Omega$ $s_2=(1,1,\cdots)\in\Omega$ 知 ~~于5~~

$\{s_1,s_2\}\subseteq\Omega$，故 $\{s_1,s_2\}\in 2^\Omega$

下面只需说明，$\{s_1,s_2\}\notin\mathcal{F}_\infty$. i.e. $\forall n\geq1$，$\{s_1,s_2\}\notin\mathcal{F}_n$.

反证法. 若 $\exists n\geq1$ s.t. $\{s_1,s_2\}\in\mathcal{F}_n$. 则由于 $\mathcal{F}_n$ 的性质，必定存在某一位，在这一位 s_1 与 s_2 有相同的值. 但是由于 s_1 是全0序列，s_2 是全1序列. 故二者每位都不相同，因此矛盾！

故 $\exists x\in 2^\Omega$，$x\notin\mathcal{F}_\infty$. 故 $2^\Omega\neq\mathcal{F}_\infty$ □.

Date.

先证明6. (1) $A\in F_\infty \Rightarrow \exists n\geq 1, A\in F_n$

而由F_n的定义, $F_n=\sigma(\{C_s\}_{s\in\{0,1\}^n})$

又注意到 $\bigcup_{s\in\{0,1\}^n} C_s=\Omega$, 且 $C_{s_1}\cap C_{s_2}=\phi$. $\forall s_1,s_2\in\{0,1\}^n$

故除空集外, C_s是F_n中的最小元素单元.

又由$A\in F_n$和σ-algebra的定义可知, $\exists s_1,s_2,\cdots,s_k\in\{0,1\}^n$, $A=\bigcup_{i=1}^k C_{s_i}$. □.

(2) 由(1)可知, 存在一个最小的n_0, 使得 $s_1,\cdots,s_{k_0}\in\{0,1\}^{n_0}$, $A=\bigcup_{i=1}^{k_0} C_{s_i}$.

由归纳法, 证明 $\forall n\geq n_0$. $\exists s_1,\cdots,s_k\in\{0,1\}^n$, $A=\bigcup_{i=1}^{k} C_{s_i}$. $\frac{k}{2^n}=\frac{k_0}{2^{n_0}}$.

1° $n=n_0$. ✓.

2° 若 $n=t$时成立, ~~当n=k+1时~~ $\exists s_1,s_2,\cdots s_k\in\{0,1\}^t$. $A=\bigcup_{i=1}^{k} C_{s_i}$ $\frac{k}{2^t}=\frac{k_0}{2^{n_0}}$

当$n=t+1$时, $s_i'=(s_i,0)$或$(s_i,1)$

若$s_i=(m_1,m_2,\cdots m_n)$

故 $C_{s_i}=C_{(s_i,0)}\cup C_{(s_i,1)}$. (记$(s_i,0)$为$(m_1,\cdots,m_n,0)$, 记$(s_i,1)$为$(m_1,\cdots,m_n,1)$.)

其中 $(s_i,0),(s_i,1)\in\{0,1\}^{t+1}$.

故 $A=\bigcup_{i=1}^{k}\left(C_{(s_i,0)}\cup C_{(s_i,1)}\right)$

故 $k'=2k$, $\frac{k'}{2^{t+1}}=\frac{k}{2^t}=\frac{k_0}{2^{n_0}}$

由数学归纳法知 $\frac{k}{2^n}$与n的选择无关, 只依赖于A. □.

再回来证明5. 要证明两件事. (1) $\{\omega\}\in B(\Omega)$ (2) $\{\omega\}\notin F_\infty$

先证明(2). 我想说明, F_∞中的元素至少是双元素集 (实际上必为无限集) 除空集外.

反证, $\{\omega\}\in F_\infty \Rightarrow \{\omega\}\in F_n$. $\exists n\geq 1$.

$\overset{6.}{\Rightarrow} \{\omega\}=\bigcup_{i=1}^{k} C_{s_i}$, $s_i\in\{0,1\}^n$

而 $|\{\omega\}|=1<2\leq |C_{s_i}|\leq |\bigcup_{i=1}^{k} C_{s_i}|$. 矛盾!

故 $\{\omega\}\notin F_\infty$

再证明(1). $B(\Omega)\triangleq\sigma(F_\infty)=\sigma(\bigcup_{n\geq 1}F_n)$

反证, $\{\omega\}\notin B(\Omega)$, 不妨设 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$, 则有 $\omega\in C_{(\omega_1,\omega_2)}$

而 $C_{(\omega_1,\omega_2)}\subseteq F_2$, 故 $C_{(\omega_1,\omega_2)}\in\sigma(F_\infty)=B(\Omega)$.

故存在集合 C_{min} 满足 $\omega\in C_{min}$, $C_{min}\setminus\{\omega\}\neq\phi$, $C_{min}\in B(\Omega)$,

且对所有满足 $\omega\in C$, $C\setminus\{\omega\}\neq\phi$, $C\in B(\Omega)$的集合均有 $C_{min}\subseteq C_\omega$

对任意 $\omega' \in C_{min}$ 且 $\omega' \neq \omega$. 不妨设 ω 与 ω' 不同的第一位数出现在第 p 位.

类似于之前的举例. $C(\omega_1, \cdots, \omega_p)$ 为一种满足条件的 C.

故 $C_{min} \subseteq C(\omega_1, \cdots, \omega_p)$. 即 $\forall x \in C_{min}$, $x \in C(\omega_1, \cdots, \omega_p)$

但 $\omega' \in C_{min}$, $\omega' \notin C(\omega_1, \cdots, \omega_p)$ 矛盾!

故 $\{\omega\} \in B(\Omega)$

7. 存在性：① 易得 $P(\phi)=0$，而令 $A=C_{(0)}\cup C_{(1)}$，则有 $n=1, k=2$，$P(A)=P(\Omega)=\frac{2}{2^1}=1$.

② 设 $A\in\mathcal{F}_\infty$，则存在 $n\geq 1$，$A\in\mathcal{F}_n$.

由 6.(1) 的分析，存在 $s_1,\cdots,s_k\in\{0,1\}^n$，$A=\bigcup_{i=1}^{k}C_{s_i}$. $A^c=\Omega\setminus A=\bigcup_{s_j\neq s_i}^{j}C_{s_j}$

又 $k+j=2^n$ 故 $P(A^c)=\frac{j}{2^n}=\frac{2^n-k}{2^n}=1-\frac{k}{2^n}=1-P(A)$.

③ 对于一个 A 序列 $A_1, A_2, \cdots$（可数个数），其中 $A_i=\bigcup_{t=1}^{k_i}C_{s_{it}}$，$A_i\cap A_j=\phi$.

那么 $s_{it_1}\neq s_{jt_2}$，$\forall i\neq j$，$\forall t_1$，$\forall t_2$.

故 $P(\bigcup_i A_i)=P(\bigcup_i\bigcup_{t=1}^{k_i}C_{s_{it}})=\cancel{\sum_i\sum_{t=1}^{k_i}P(}\frac{\sum k_i}{2^n}=\sum_i P(A_i)$ □.

唯一性：由 Carathéodory's Extension Theorem，我们需要说明 P 这个函数是 σ-有限的.

首先由 1.，我们知道 Ω 可以被表示成一组由 C_s 构成的划分，于是 Ω 可以被划分成可数多个有限测度的子集的并集. 而 $P(\Omega)=\int_\Omega P(\omega)d\omega=\int_\Omega\frac{|\omega|}{|\Omega|}d\omega=1<\infty$.

故 P 是 σ-finite 的. 故 P 唯一.

8. $\omega_i=0$ 表示第 i 次试验失败. $\omega_i=1$ 表示第 i 次试验成功、

则 $X:\Omega\to\mathbb{N}$, $\omega\in\Omega$, $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots)$

$X(\omega)=\min\{p \mid \omega_p=1\}\in\mathbb{N}$ 即为参数为 $\frac{1}{2}$ 的几何分布, 鉴于 ω_i 中 0 与 1 出现概率相等.

1. By the definition of $\sigma(X)$, X is $\sigma(X)$-measurable.

So for $X:(\Omega,\sigma(X))\to(\mathbb{R},\mathcal{F}')$ $\forall B'\in\mathcal{F}'$, $X^{-1}(B')\in\sigma(X)$

Consider $f(X):(\Omega,\sigma(X))\to(\mathbb{R},\mathcal{F}')$.

f is a measurable function, so for every borel set $A\in\mathcal{R}$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{R}$.

i.e. $\forall A\in\mathcal{F}'$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}'$, So we have $X^{-1}(f^{-1}(A))\in\sigma(X)$.

Then $\forall A\in\mathcal{F}'$, $X^{-1}(f^{-1}(A))\in\sigma(X)$, which means $f(X)$ is $\sigma(X)$-measurable.

2、类似于上课所讲，$f_Y \triangleq E(X|Y)$，$f_{Y'} \triangleq E(X|Y')$，

$$\forall \omega \in \Omega,\ f_Y(\omega) = E(X|Y=Y(\omega)) = E(X|Y^{-1}(Y(\omega)))$$

$$f_{Y'}(\omega) = E(X|Y'=Y'(\omega)) = E(X|Y'^{-1}(Y'(\omega)))$$

希望证明：$Y^{-1}(Y(\omega)) = Y'^{-1}(Y'(\omega))$

反证法，若存在ω_0，使$Y^{-1}(Y(\omega_0)) \neq Y'^{-1}(Y'(\omega_0))$，

易知，$Y^{-1}(Y(\omega_0)) \in \sigma(Y)$，$\omega_0 \in Y^{-1}(Y(\omega_0))$

$Y'^{-1}(Y'(\omega_0)) \in \sigma(Y')$，$\omega_0 \in Y'^{-1}(Y'(\omega_0))$

而$\sigma(Y) = \sigma(Y')$，$\Omega \backslash \left(\left(\Omega \backslash Y^{-1}(Y(\omega_0))\right) \cup \left(\Omega \backslash Y'^{-1}(Y'(\omega_0))\right) \right) \in \sigma(Y)$

$$= Y^{-1}(Y(\omega_0)) \cap Y'^{-1}(Y'(\omega_0)) \subsetneq Y^{-1}(Y(\omega_0))$$

然而$\sigma(Y)$是最小的σ-代数使得Y measurable，此时我们可以找到一个更小的$\sigma(Y)$。

故产生矛盾，$Y^{-1}(Y(\omega)) = Y'^{-1}(Y'(\omega))$

故 $E(X|Y) = f_Y(\omega) = E(X|Y^{-1}(Y(\omega))) = E(X|Y'^{-1}(Y'(\omega))) = f_{Y'}(\omega) = E(X|Y')$

3、 $E[E[X|F_1]|F_2] = E[E[X|Y_1]|Y_2]$

$= \sum_x x \Pr(E(X|Y_1)=x|Y_2)$

$= \sum_x E(X|Y_1) \Pr(E(X|Y_1)=x|Y_2)$ （ $X|Y_1 \Rightarrow X|Y_2$ ）.

$= E(X|Y_1) \sum_x \Pr(E(X|Y_1)=x|Y_2)$

$= E(X|Y_1) = E(X|F_1)$

$E[E[X|F_2]|F_1] = E[E[X|Y_2]|Y_1]$

$= \sum_x x \cdot \Pr(E(X|Y_2)=x|Y_1)$

$= \sum_x E(X|Y_1) \Pr(E(X|Y_2)=x|Y_1)$ （由于 $F_1 \subseteq F_2$, $E(X|Y_2)$在Y_1下的取值等价于$E(X|Y_1)$）

$= E(X|Y_1) \sum_x \Pr(E(X|Y_2)=x|Y_1)$

$= E(X|Y_1) = E(X|F_1)$ □.

本次作业与室友张致远进行一定的讨论，并参考了一些网上的资料.

如.维基百科中关于 σ-有限和 Caratheodory's Extension Theorem 的介绍等。