# 1 卷积

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

重要性质：

1.若$x_1(t)*x_2(t)=y(t)$

则$x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

2.$E\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)*E\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)=E^2\tau\text{tri}\left(\frac{t}{2\tau}\right)$

# 2 傅里叶级数

连续周期信号：$f(t)=f(t+T)$，基波角频率 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

## 2.1 数学形式

三角形式：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0t)+b_n\sin(n\omega_0t)]$$

指数形式：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}$$

其中傅里叶系数：

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0t}dt$$

## 2.2 核心关系与性质

1. 系数关系（$f(t)$ 为实信号）：

$$c_0=a_0,\quad c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\quad c_{-n}=c_n^*$$

2. 线性性：$af(t)+bg(t)\leftrightarrow ac_n+bd_n$
3. 时移性：$f(t-t_0)\leftrightarrow c_ne^{-jn\omega_0t_0}$
4. 共轭对称性：$f(t)$ 实 $\Rightarrow c_{-n}=c_n^*$
5. 帕塞瓦尔定理：

$$\frac{1}{T}\int_T|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

# 3 傅里叶变换

## 3.1 定义

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

## 3.2 重要性质

1. 线性：$af(t)+bg(t)\to aF(j\omega)+bG(j\omega)$
2. 时移：$f(t-t_0)\to F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. 频移：$f(t)e^{j\omega_0t}\to F(j(\omega-\omega_0))$
4. 频域扩展：$f(at)\to\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5. 对偶性：$F(t)\to 2\pi f(-\omega)$
6. 时域微分：$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\to(j\omega)^nF(\omega)$
7. 频域微分：$t^nf(t)\to j^n\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$
8. 时域积分：$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
9. 时域卷积：

$f(t)*g(t)=F(\omega)G(\omega)$

10. 频域卷积：$f(t)g(t)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$
11. 帕塞瓦尔定理：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

12. 共轭对称性：

$f(t)=\text{Re}\{f(t)\}\Rightarrow F(-\omega)=F^*(\omega)$

$f(t)$实偶 $\Rightarrow F(\omega)$实偶

$f(t)$实奇 $\Rightarrow F(\omega)$纯虚奇

$f(t)$虚偶 $\Rightarrow F(\omega)$虚偶

$f(t)$虚奇 $\Rightarrow F(\omega)$实奇

## 3.3 奇偶分解

$$f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}\Leftrightarrow F_e(\omega)=\text{Re}\{F(\omega)\}$$

$$f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}\Leftrightarrow F_o(\omega)=j\text{Im}\{F(\omega)\}$$

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t),F(\omega)=F_e(\omega)+F_o(\omega)$$

## 3.4 常见傅里叶变换对

$$\begin{aligned}
\delta(t)&\leftrightarrow 1\\
1&\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)\\
e^{j\omega_0t}&\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\\
\cos(\omega_0t)&\leftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\\
\sin(\omega_0t)&\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\\
e^{-at}u(t)&\leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}\quad(a>0)\\
te^{-at}u(t)&\leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2}\quad(a>0)\\
e^{-a|t|}&\leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}\quad(a>0)\\
u(t)&\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\\
\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)&\leftrightarrow \tau\cdot\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\\
\text{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}&\leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\\
\text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)&\leftrightarrow \tau\cdot\frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

## 3.5 周期信号的傅里叶变换

若$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}$

则$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$

若$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_0(t-kT)$

则$F(\omega)=F_0(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

其中$c_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_0)$

# 4 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

## 4.1 定义

$$X(e^{j\omega})=\mathcal{F}_d[x[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\mathcal{F}_d^{-1}[X(e^{j\omega})]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

## 4.2 主要性质

1. 线性性：$\mathcal{F}_d[ax[n]+by[n]]=aX(e^{j\omega})+bY(e$

2. 时移性：$\mathcal{F}_d[x[n-n_0]] = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

3. 频移性：$\mathcal{F}_d[e^{j\omega_0 n}x[n]] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

4. 周期性：$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

5. 共轭对称性：若$x[n]$ 实，则$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$

6. 频域微分：$\mathcal{F}_d[nx[n]] = j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

7. 时域扩展：设$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & k|n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则$X_k(e^{j\omega}) = X(e^{jk\omega})$

8. 卷积性：$\mathcal{F}_d[x[n]*y[n]] = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

9. 调制性：$\mathcal{F}_d[x[n]y[n]] = \dfrac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$

### 4.3 奇偶虚实性

$$x[n] \text{ 实偶} \Rightarrow X(e^{j\omega}) \text{ 实偶}$$
$$x[n] \text{ 实奇} \Rightarrow X(e^{j\omega}) \text{ 纯虚奇}$$
$$x[n] \text{ 虚偶} \Rightarrow X(e^{j\omega}) \text{ 虚偶}$$
$$x[n] \text{ 虚奇} \Rightarrow X(e^{j\omega}) \text{ 实奇}$$

### 4.4 常见 DTFT 变换对

$\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$

$a^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad (|a|<1)$

$u[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

$\mathrm{rect}_N[n] \leftrightarrow \dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$

## 5 拉普拉斯变换（双边）

### 5.1 定义

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

### 5.2 主要性质

1. 线性性：$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = aF(s)+bG(s)$，ROC 至少为$R_1 \cap R_2$

2. 时移性：$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

3. 频移性：$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$，ROC：$\mathrm{Re}(s+a) \in R$

4. 尺度变换：$\mathcal{L}[f(at)] = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$，ROC：$\dfrac{s}{a} \in R$

5. 时域微分：$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s)$，ROC 至少为$R$

6. $s$ 域微分：$\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$，ROC：$R$

7. 积分性：$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \dfrac{F(s)}{s}$，ROC 至少为$R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$

8. 卷积性：$\mathcal{L}[f(t)*g(t)] = F(s)G(s)$，ROC 至少为$R_1 \cap R_2$

9. 初值定理：$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$(因果信号)

10. 终值定理：$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$(极点在左半平面或原点)

### 5.3 常见拉普拉斯变换对

$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad$ (全$s$ 平面)

$u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$

$-u(-t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}(s) < 0)$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+a} \quad (\mathrm{Re}(s) > -a)$

$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+a} \quad (\mathrm{Re}(s) < -a)$

$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{(s+a)^2} \quad (\mathrm{Re}(s) > -a)$

$-te^{-at}u(-t) \leftrightarrow \dfrac{1}{(s+a)^2} \quad (\mathrm{Re}(s) < -a)$

$e^{-a|t|} \leftrightarrow \dfrac{2a}{s^2-a^2} \quad (-a < \mathrm{Re}(s) < a)$

$t^n u(t) \leftrightarrow \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$

## 6 z 变换

### 6.1 定义

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

### 6.2 主要性质

1. 线性性：$\mathcal{Z}[ax[n]+by[n]] = aX(z)+bY(z)$，ROC 至少为$R_1 \cap R_2$

2. 时移性：$\mathcal{Z}[x[n-n_0]] = z^{-n_0}X(z)$，ROC：$R$(可能除去$z=0$ 或$z=\infty$)

3. 尺度变换：$\mathcal{Z}[a^n x[n]] = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$，ROC：$|z/a| \in R$

4. $z$ 域微分：$\mathcal{Z}[nx[n]] = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$，ROC：$R$

5. 时域卷积：$\mathcal{Z}[x[n]*y[n]] = X(z)Y(z)$，ROC 至少为$R_1 \cap R_2$

6. 差分性质：$\mathcal{Z}[x[n]-x[n-1]] = (1-z^{-1})X(z)$，ROC 至少为$R \cap \{z \neq 0\}$

7. 累加性质：$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right] = \dfrac{X(z)}{1-z^{-1}}$，ROC 至少为$R \cap \{|z| > 1\}$

8. 初值定理：$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$(因果序列)

9. 终值定理：$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$(极点在单位圆内或$z=1$)

### 6.3 常见 z 变换对

$\delta[n] \leftrightarrow 1 \quad$ (全$z$ 平面)

$u[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$

$-u[-n-1] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1} \quad (|z| < 1)$

$a^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$

$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a} \quad (|z| << |a|)$

$na^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|)$

$-na^n u[-n-1] \leftrightarrow \dfrac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| << |a|)$

$\cos(\omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

$\sin(\omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

## 7 连续时间 LTI 系统分析

### 7.1 系统函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}[h(t)]$$

### 7.2 稳定性判据

1. BIBO 稳定：所有极点在左半平面（$\mathrm{Re}(p_j) <$

2. 临界稳定：极点在虚轴上

3. 不稳定：至少一个极点在右半平面（$\mathrm{Re}(p_j) >$

### 7.3 频率响应

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

幅频特性：$|H(j\omega)|$

相频特性：$\angle H(j\omega)$

### 7.4 无失真传输条件

$$y(t) = Kx(t - t_d)$$

幅频条件：$|H(j\omega)| = K$(常数)

相频条件：$\angle H(j\omega) = -\omega t_d$

理想频率响应：$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$

### 7.5 群时延与相时延

群时延（包络时延）：$\tau_g(\omega) = -\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}(\theta(\omega) = \angle H(j\omega))$

相时延（载波时延）：$\tau_p(\omega) = -\dfrac{\theta(\omega)}{\omega}$

线性相位时：$\tau_g = \tau_p = t_d$

### 7.6 部分分式展开

对于 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$，若极点 $p_i$ 为单极点：

$$H(s) = \sum_i \frac{r_i}{s - p_i}, \quad r_i = [(s - p_i)H(s)]_{s=p_i}$$

## 8 离散时间 LTI 系统分析

### 8.1 系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}[h[n]]$$

### 8.2 稳定性判据

1. BIBO 稳定：所有极点在单位圆内（$|p_j| < 1$）
2. 临界稳定：极点在单位圆上
3. 不稳定：至少一个极点在单位圆外（$|p_j| > 1$）

### 8.3 频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

### 8.4 差分方程与系统函数关系

差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

## 9 因果性与稳定性

### 9.1 连续系统（s 域）

1. 因果性：$H(s)$ 是真有理函数（分子次数 $\leq$ 分母次数），ROC 为$\text{Re}(s) > \sigma_0$
2. 稳定性：ROC 包含虚轴，所有极点$\text{Re}(p) < 0$
3. 因果稳定：ROC 为$\text{Re}(s) > \sigma_0$ 且$\sigma_0 < 0$

### 9.2 离散系统（z 域）

1. 因果性：ROC 为$|z| > r$(某圆外)
2. 稳定性：ROC 包含单位圆（$|z| = 1$），所有极点$|p| < 1$
3. 因果稳定：ROC 为$|z| > r$ 且$r < 1$

## 10 系统连接

1. 串联：$H(s) = H_1(s)H_2(s)$ 或$H(z) = H_1(z)H_2(z)$
2. 并联：$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$ 或$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$
3. 反馈：$H(s) = \dfrac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$ 或$H(z) = \dfrac{H_1(z)}{1 \pm H_1(z)H_2(z)}$(+ 负反馈，-正反馈)

## 11 拉普拉斯与 z 变换类比

### 11.1 稳定性对应

| 拉普拉斯变换（连续） | z 变换（离散） |
|---|---|
| 稳定：$\text{Re}(s) < 0$ | 稳定：$\lvert z\rvert < 1$ |
| 临界稳定：虚轴 | 临界稳定：单位圆 |
| 不稳定：$\text{Re}(s) > 0$ | 不稳定：$\lvert z\rvert > 1$ |

### 11.2 映射关系

$$z = e^{sT} \quad \text{或} \quad s = \frac{1}{T}\ln z$$

$s$左半平面 $\leftrightarrow$ $z$单位圆内

$s$虚轴 $\leftrightarrow$ $z$单位圆

$s$右半平面 $\leftrightarrow$ $z$单位圆外

主频带：$-\pi/T < \omega < \pi/T$

## 12 采样理论

### 12.1 冲激串采样

采样信号：$x_p(t) = x(t)\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$

频域特性：

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

频谱周期延拓，周期为$\omega_s$)

### 12.2 奈奎斯特采样定理

条件：$x(t)$ 带限于$\omega_M(X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M)$

采样频率要求：$\omega_s \geq 2\omega_M$(奈奎斯特率)，可无失

### 12.3 信号恢复

1. 理想低通滤波器：

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}, \quad \omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

2. 零阶保持（ZOH）：

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\text{rect}\left(\frac{t - nT - T/2}{T}\right)$$

频域：$X_0(j\omega) = H_0(j\omega)X_p(j\omega)$，其中$H_0(j\omega) =$

3. 线性内插：

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\text{tri}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

频域：$X_1(j\omega) = H_1(j\omega)X_p(j\omega)$，其中$H_1(j\omega) =$

### 12.4 离散时间处理连续信号流程

1. C/D 转换：$x[n] = x_c(nT)$，频域关系：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

2. 离散处理：$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$，等效连

3. D/C 转换：

理想重建：$y_c(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\frac{\sin(\pi(t - nT)/T}{\pi(t - nT)/T}$

零阶保持：$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT-T/2}{T}\right)$

4. 等效连续系统：$H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\Omega/T})(|\Omega| < \pi/T)$

## 12.5 混叠现象

产生：$\omega_s < 2\omega_M$ 时，频谱重叠，高频成分”伪装”成低频

解决：预滤波（抗混叠滤波器）

## 12.6 注意事项

1. 审题明确求解目标（单位冲激响应/单位阶跃响应等）
2. 注意隐含的因果性和稳定性条件
3. 拉普拉斯变换与 z 变换需明确收敛域