1 卷积与奇异函数

1.1 定义

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

1.2 重要性质

1.若$x_1(t)*x_2(t)=y(t)$, 则

$x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

2.$E\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ 自卷积 $=E^2\tau\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2\tau}\right)$

3.$\delta(t-t_0)*x(t)=x(t-t_0)$

4.$u(t-t_0)*x(t)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)d\tau$

5.$\delta'(t)x(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$

6.$\delta'(t-t_0)*x(t)=-x'(t_0)$

2 傅里叶级数

连续周期信号：$f(t)=f(t+T)$，基波角频率 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

2.1 定义

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}$$

其中傅里叶系数：

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0t}dt$$

2.2 核心关系与性质

1. 系数关系（$f(t)$ 为实信号）：

$c_0=a_0,\quad c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\quad c_{-n}=c_n^*$

2. 线性性：$af(t)+bg(t)\leftrightarrow ac_n+bd_n$
3. 时移性：$f(t-t_0)\leftrightarrow c_ne^{-jn\omega_0t_0}$
4. 共轭对称性：$f(t)$ 实 $\Rightarrow c_{-n}=c_n^*$
5. 帕塞瓦尔定理：

$$\frac{1}{T}\int_T|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

3 傅里叶变换

3.1 定义

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

3.2 重要性质

1. 线性：$af(t)+bg(t)$

$\rightarrow aF(j\omega)+bG(j\omega)$

2. 时移：$f(t-t_0)\rightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. 频移：$f(t)e^{j\omega_0t}\rightarrow F(j(\omega-\omega_0))$
4. 频域扩展：$f(at)\rightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5. 对偶性：$F(t)\rightarrow 2\pi f(-\omega)$
6. 时域微分：$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\rightarrow(j\omega)^nF(\omega)$
7. 频域微分：$t^nf(t)\rightarrow j^n\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$
8. 时域积分：

$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\rightarrow\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

9. 时域卷积：

$f(t)*g(t)\rightarrow F(\omega)G(\omega)$

10. 频域卷积：

$f(t)g(t)\rightarrow\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$

11. 帕塞瓦尔定理：

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$

12. 共轭对称性：

$f(t)=\mathrm{Re}\{f(t)\}\Rightarrow F(-\omega)=F^*(\omega)$

$f(t)$实偶 $\Rightarrow F(\omega)$实偶

$f(t)$实奇 $\Rightarrow F(\omega)$纯虚奇

$f(t)$虚偶 $\Rightarrow F(\omega)$虚偶

$f(t)$虚奇 $\Rightarrow F(\omega)$实奇

3.3 奇偶分解

$$f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}\Leftrightarrow$$

$$F_e(\omega)=\mathrm{Re}\{F(\omega)\}$$

$$f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}\Leftrightarrow$$

$$F_o(\omega)=j\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$$

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t),$$

$$F(\omega)=F_e(\omega)+F_o(\omega)$$

3.4 常见傅里叶变换对

$\delta(t)\leftrightarrow 1$

$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_0t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\cos(\omega_0t)\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$\sin(\omega_0t)\leftrightarrow\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}\quad(Re(a)>0)$

$te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2}\quad(Re(a)>0)$

$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}\quad(Re(a)>0)$

$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow\tau\cdot\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$

$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\leftrightarrow\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow\tau\cdot\frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$

3.5 周期信号的傅里叶变换

若$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}$

则$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$

若$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_0(t-kT)$

则$F(\omega)=F_0(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

其中$c_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_0)$

4 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

4.1 定义

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

4.2 主要性质

1. 线性：$ax[n]+by[n]\rightarrow aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
2. 时移：$x[n-n_0]\rightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
3. 频移：$e^{j\omega_0n}x[n]\rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. 周期性：$X(e^{j(\omega+2\pi)})\rightarrow X(e^{j\omega})$
5. 共轭对称：若$x[n]$ 实

, 则$X(e^{-j\omega})\rightarrow X^*(e^{j\omega})$

6. 频域微分：$nx[n]\rightarrow\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
7. 时域扩展：

$x_k[n]\rightarrow\begin{cases}x[n/k] & k|n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

则$X_k(e^{j\omega})\rightarrow X(e^{jk\omega})$

8. 卷积：$x[n]*y[n]\rightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
9. 调制：$x[n]y[n]\rightarrow\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$

4.3 常见 DTFT 变换对

$\delta[n]\leftrightarrow 1$

$\delta[n-n_0]\leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$

$a^nu[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\quad(|a|<1)$

$u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

$\mathrm{rect}_N[n]\leftrightarrow\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$

5 拉普拉斯变换（双边）

5.1 定义

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,\quad s=\sigma+j\omega$$

5.2 主要性质

1. 线性：$af(t)+bg(t)\rightarrow$

$aF(s)+bG(s)$，至少$R_1\cap R_2$

2. 时移：$f(t-t_0)\rightarrow e^{-st_0}F(s)$，R
3. 频移：$e^{-at}f(t)\rightarrow F(s+a)$

，$\mathrm{Re}(s+a)\in R$

4. 尺度变换：$f(at)\rightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$

，$\frac{s}{a}\in R$

5. 时域微分：$f'(t)\rightarrow sF(s)$，至少R
6. s 域微分：$tf(t)\rightarrow-\frac{dF(s)}{ds}$，$R$
7. 积分：$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\rightarrow\frac{F(s)}{s}$，至少$R\cap\{$R
8. 卷积性：$f(t)*g(t)\rightarrow F(s)G(s)$，R 至少
9. 初值定理：$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$(因果信号)
10. 终值定理：$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

(极点在左半平面或原点)

5.3 常见拉普拉斯变换对

$\delta(t)\leftrightarrow 1$　(全 s 平面)

$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$

$-u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)<0)$

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\quad(\mathrm{Re}(s)>-a)$

$-e^{-at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\quad(\mathrm{Re}(s)<-a)$

$te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>-a)$

$-te^{-at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2}\quad(\mathrm{Re}(s)<-a)$

$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{s^2-a^2}\quad(-a<\mathrm{Re}(s)<a)$

$t^nu(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$

6 z 变换

6.1 定义

$$X(z)=\mathcal{Z}[x[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

6.2 主要性质

1. 线性：$ax[n]+by[n]=$

$aX(z)+bY(z)$，至少$R_1\cap R_2$

2. 时移：$x[n-n_0]=z^{-n_0}X(z)$

，R(可能除去$z=0$ 或$z=\infty$)

3. 尺度变换：$a^nx[n]=X\left(\frac{z}{a}\right)$，$|z/a|\in R$

4. z 域微分：$nx[n]=-z\frac{dX(z)}{dz}$，R

5. 时域卷积：$x[n]*y[n]=X(z)Y(z)$

，至少$R_1\cap R_2$

6. 差分性质：$x[n]-x[n-1]=$

$(1-z^{-1})X(z)$，至少$R\cap\{z\neq 0\}$

7. 累加性质：$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$

，至少$R\cap\{|z|>1\}$

8. 初值：$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$(因果序列)

9. 终值：$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

(极点在单位圆内或$z=1$)

6.3 常见 z 变换对

$\delta[n]\leftrightarrow 1$, 全平面

$u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-1}, |z|>1$

$-u[-n-1]\leftrightarrow\frac{z}{z-1}, |z|<1$

$a^n u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-a}(|z|>|a|)$

$-a^n u[-n-1]\leftrightarrow\frac{z}{z-a}, |z|<|a|$

$na^n u[n]\leftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}, |z|>|a|$

$-na^n u[-n-1]\leftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}, |z|<|a|$

$\cos(\omega_0 n)u[n]\leftrightarrow\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

$\sin(\omega_0 n)u[n]\leftrightarrow\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

7 连续时间 LTI 系统分析

7.1 系统函数

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\mathcal{L}[h(t)]$$

7.2 稳定性判据

1. 稳定：所有极点在左半平面
2. 临界稳定：极点在虚轴上
3. 不稳定：至少一个极点在右半平面

7.3 频率响应

$$H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

幅频特性：$|H(j\omega)|$

相频特性：$\angle H(j\omega)$

7.4 无失真传输条件

时域$y(t)=Kx(t-t_d)$

频域$H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$

7.5 群时延与相时延

群时延（包络时延）：$\tau_g(\omega)=-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

$(\theta(\omega)=\angle H(j\omega))$

相时延（载波时延）：$\tau_p(\omega)=-\frac{\theta(\omega)}{\omega}$

线性相位时：$\tau_g=\tau_p=t_d$

7.6 部分分式展开

对于 $H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$，若极点 p_i 为单极点：

$H(s)=\sum_i\frac{r_i}{s-p_i}$,

$r_i=[(s-p_i)H(s)]_{s=p_i}$

8 离散时间 LTI 系统分析

8.1 系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\mathcal{Z}[h[n]]$$

8.2 稳定性判据

1. 稳定：所有极点在单位圆内
2. 临界稳定：极点在单位圆上
3. 不稳定：至少一个极点在单位圆外

8.3 频率响应

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

8.4 差分方程与系统函数关系

差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

9 因果性与稳定性

9.1 连续系统（s 域）

1. 因果性：$H(s)$ 是真有理函数（分子次数 $\leq$ 分母次数），ROC 为 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$
2. 稳定性：ROC 包含虚轴
3. 因果稳定：ROC 为$\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$ 且$\sigma_0<0$, 所有极点$\mathrm{Re}(p)<0$

9.2 离散系统（z 域）

1. 因果性：ROC 为$|z|>r$(某圆外)
2. 稳定性：ROC 包含单位圆（$|z|=1$）
3. 因果稳定：ROC 为$|z|>r$ 且$r<1$ 所有极点$|p|<1$

10 系统连接

1. 串联：$H(s)=H_1(s)H_2(s)$
2. 并联：$H(s)=H_1(s)+H_2(s)$
3. 反馈：$H(s)=\frac{H_1(s)}{1\pm H_1(s)H_2(s)}$

（+ 负反馈，-正反馈）

11 拉普拉斯与 z 变换类比

11.1 稳定性对应

s 变换（连续）	z 变换（离散）
稳定：$\mathrm{Re}(s)<0$	$|z|<1$
临界稳定：虚轴	单位圆
不稳定：$\mathrm{Re}(s)>0$	$|z|>1$

11.2 映射关系

$z=e^{sT}$ 或 $s=\frac{1}{T}\ln z$

s左半平面 $\leftrightarrow$ z单位圆内

s虚轴 $\leftrightarrow$ z单位圆

s右半平面 $\leftrightarrow$ z单位圆外

主频带：$-\pi/T<\omega<\pi/T$

12 采样理论

12.1 冲激串采样

采样信号：$x_p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$, $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

（频谱周期延拓，周期为ω_s）

12.2 奈奎斯特采样定理

$x(t)$ 带限于$\omega_M(X(j\omega)=0,|\omega|>\omega_M)$

则采样频率要求：$\omega_s\geq 2\omega_M$(奈奎斯特率)

12.3 信号恢复

1. 理想低通滤波器：

$$H_r(j\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|\geq\omega_c\end{cases},\quad \omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$$

2. 零阶保持（ZOH）：

$$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT-T/2}{T}\right)$$

频域：$X_0(j\omega)=H_0(j\omega)X_p(j\omega)$，其中$H_0(j\omega)=T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\omega T/2}$

3. 线性内插：

$$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{tri}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

频域：$X_1(j\omega)=H_1(j\omega)X_p(j\omega)$，其中$H_1(j\omega)=T\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

12.4 离散时间处理连续信号流程

1. C/D 转换：$x[n]=x_c(nT)$，频域关系：

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

2. 离散处理：$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$，等效连续频率$\Omega=\omega T$
3. D/C 转换：

理想重建：$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$

零阶保持：$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT-T/2}{T}\right)$

4. 等效连续系统：$H_{eff}(j\Omega)=H(e^{j\Omega/T})(|\Omega|<\pi/T)$

12.5 混叠现象

产生：$\omega_s<2\omega_M$ 时，频谱重叠，高频成分"伪装"成低频

解决：预滤波（抗混叠滤波器）

13 注意事项

1. 审题明确求解目标（单位冲激响应/单位阶跃响应等）
2. 注意隐含的因果性和稳定性条件
3. 拉普拉斯变换与 z 变换需明确收敛域