1 卷积与奇异函数

1.1 定义

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

1.2 重要性质

1.$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

2.若$x_1(t)*x_2(t)=y(t)$, 则

$x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

3.$E\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ 自卷积 $=E^2\tau\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2\tau}\right)$

4.$\delta(t-t_0)*x(t)=x(t-t_0)$

5.$u(t-t_0)*x(t)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)d\tau$

6.$\delta'(t)x(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$

7.$\delta'(t-t_0)*x(t)=-x'(t_0)$

2 傅里叶级数

连续周期信号: $f(t)=f(t+T)$, 基波角频率 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

2.1 定义

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}$$

其中傅里叶系数:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0t}dt$$

2.2 核心关系与性质

1. 系数关系（$f(t)$ 为实信号）:

$c_0=a_0,\quad c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\quad c_{-n}=c_n^*$

2. 线性性: $af(t)+bg(t)\leftrightarrow ac_n+bd_n$

3. 时移性: $f(t-t_0)\leftrightarrow c_ne^{-jn\omega_0t_0}$

4. 共轭对称性: $f(t)$ 实 $\Rightarrow c_{-n}=c_n^*$

5. 帕塞瓦尔定理:

$$\frac{1}{T}\int_T|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

3 连续时间傅里叶变换

3.1 定义

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

3.2 重要性质

1. 线性: $af(t)+bg(t)$

$\rightarrow aF(j\omega)+bG(j\omega)$

2. 时移: $f(t-t_0)\rightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

3. 频移: $f(t)e^{j\omega_0t}\rightarrow F(j(\omega-\omega_0))$

4. 频域扩展: $f(at)\rightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

5. 对偶性: $F(t)\rightarrow 2\pi f(-j\omega)$

6. 时域微分: $\frac{d^nf(t)}{dt^n}\rightarrow(j\omega)^nF(j\omega)$

7. 频域微分: $t^nf(t)\rightarrow j^n\frac{d^nF(j\omega)}{d\omega^n}$

8. 时域积分:

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\rightarrow\frac{F(j\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

9. 时域卷积:

$f(t)*g(t)\rightarrow F(j\omega)G(j\omega)$

10. 频域卷积:

$f(t)g(t)\rightarrow\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*G(j\omega)$

11. 帕塞瓦尔定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2d\omega$$

12. 共轭对称性:

$f(t)=\mathrm{Re}\{f(t)\}\Rightarrow F(-j\omega)=F^*(j\omega)$

$f(t)$实偶 $\Rightarrow F(j\omega)$实偶

$f(t)$实奇 $\Rightarrow F(j\omega)$纯虚奇

$f(t)$虚偶 $\Rightarrow F(j\omega)$虚偶

$f(t)$虚奇 $\Rightarrow F(j\omega)$实奇

3.3 奇偶分解

$f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}\Leftrightarrow$

$F_e(j\omega)=\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}$

$f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}\Leftrightarrow$

$F_o(j\omega)=j\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$

$f(t)=f_e(t)+f_o(t),$

$F(j\omega)=F_e(j\omega)+F_o(j\omega)$

3.4 常见傅里叶变换对

$\delta(t)\leftrightarrow 1$

$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_0t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\cos(\omega_0t)\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$\sin(\omega_0t)\leftrightarrow\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}\quad(Re(a)>0)$

$te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2}\quad(Re(a)>0)$

$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}\quad(Re(a)>0)$

$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow\tau\cdot\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$

$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\leftrightarrow\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow\tau\cdot\frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

3.5 周期信号的傅里叶变换

若$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}$

则$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$

若$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_0(t-kT)$

则$F(\omega)=F_0(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

其中$c_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_0)$

3.6 本征函数

LTI 系统输入$x(t)=e^{j\omega_0t}$

输出$y(t)=H(j\omega_0)e^{j\omega_0t}$

4 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

4.1 定义

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

4.2 主要性质

1. 线性: $ax[n]+by[n]\rightarrow aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$

2. 时移: $x[n-n_0]\rightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

3. 频移: $e^{j\omega_0n}x[n]\rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

4. 周期性: $X(e^{j(\omega+2\pi)})\rightarrow X(e^{j\omega})$

5. 共轭对称: 若$x[n]$ 实

, 则$X(e^{-j\omega})\rightarrow X^*(e^{j\omega})$

6. 频域微分: $nx[n]\rightarrow\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

7. 时域扩展:

$$x_k[n]\rightarrow\begin{cases}x[n/k] & k|n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

则$X_k(e^{j\omega})\rightarrow X(e^{jk\omega})$

8. 卷积: $x[n]*y[n]\rightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

9. 调制: $x[n]y[n]\rightarrow\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$

4.3 常见 DTFT 变换对

$\delta[n]\leftrightarrow 1$

$\delta[n-n_0]\leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$

$a^nu[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\quad(|a|<1)$

$u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

$\mathrm{rect}_{2N}[n]\leftrightarrow\frac{\sin(\omega(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\omega/2)}$

5 拉普拉斯变换（双边）

5.1 定义

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,\quad s=\sigma+j\omega$$

5.2 主要性质

1. 线性: $af(t)+bg(t)\rightarrow$

$aF(s)+bG(s)$, 至少$R_1\cap R_2$

2. 时移: $f(t-t_0)\rightarrow e^{-st_0}F(s)$, R

3. 频移: $e^{-at}f(t)\rightarrow F(s+a)$

, $\mathrm{Re}(s+a)\in R$

4. 尺度变换: $f(at)\rightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$, $\frac{s}{a}\in R$

5. 时域微分: $f'(t)\rightarrow sF(s)$, 至少R

6. s 域微分: $tf(t)\rightarrow-\frac{dF(s)}{ds}$, R

7. 积分: $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\rightarrow\frac{F(s)}{s}$

, 至少$R\cap\{\mathrm{Re}(s)>0\}$

8. 卷积:$f(t)*g(t)\rightarrow F(s)G(s)$至少$R_1\cap R_2$

9. 初值: $f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

10. 终值: $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

(因果且 $t=0$ 时不包含奇异函数)

5.3 常见拉普拉斯变换对

$\delta(t)\leftrightarrow 1$ (全 s 平面)

$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$

$-u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)<0)$

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\quad(\mathrm{Re}(s)>-a)$

$-e^{-at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\quad(\mathrm{Re}(s)<-a)$

$te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>-a)$

$-te^{-at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2}\quad(\mathrm{Re}(s)<-a)$

$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{s^2-a^2}\quad(-a<\mathrm{Re}(s)<a)$

$t^nu(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$

5.4 因果性与稳定性

1. 因果性：$H(s)$ 是真有理函数（分子次数 $\leq$ 分母次数），ROC 为 $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

2. 稳定性：ROC 包含虚轴

3. 因果稳定：ROC 为$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ 且$\sigma_0 < 0$, 所有极点$\mathrm{Re}(p) < 0$

5.5 单边性质

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt} \to s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$

5.6 本征函数

LTI 系统输入$x(t) = e^{s_0 t}$

输出$y(t) = H(s_0)e^{s_0 t}$

6 z 变换

6.1 定义

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

6.2 主要性质

1. 线性：$ax[n] + by[n] = aX(z) + bY(z)$，至少$R_1 \cap R_2$

2. 时移：$x[n-n_0] = z^{-n_0}X(z)$，R(可能除去$z=0$ 或$z=\infty$)

3. 尺度变换：$a^n x[n] = X\left(\frac{z}{a}\right)$，$|z/a| \in R$

4. z 域微分：$nx[n] = -z\frac{dX(z)}{dz}$，$R$

5. 时域卷积：$x[n] * y[n] = X(z)Y(z)$，至少$R_1 \cap R_2$

6. 差分性质：$x[n] - x[n-1] = (1-z^{-1})X(z)$，至少$R \cap \{z \neq 0\}$

7. 累加性质：$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$，至少$R \cap \{|z| > 1\}$

8. 初值：$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$(因果信号）

9. 终值：$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$（因果且 $x(\infty)$ 存在且有限）

6.3 常见 z 变换对

$\delta[n] \leftrightarrow 1$, 全平面

$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$

$-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1$

$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$

$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z| > |a|$

$-na^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z| < |a|$

$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$

$\leftrightarrow \frac{1 - r\cos(\omega)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, |z| > |r|$

$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$

$\leftrightarrow \frac{r\sin(\omega)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, |z| > |r|$

6.4 因果性与稳定性

1. 因果性：ROC 为$|z| > r$(某圆外）

2. 稳定性：ROC 包含单位圆（$|z| = 1$）

3. 因果稳定：ROC 为$|z| > r$ 且$r < 1$ 所有极点$|p| < 1$

6.5 单边性质

时间延迟$x[n-1] \to z^{-1}X(z) + x[-1]$

时移$x[n+1] \to zX(z) - zx[0]$

6.6 本征函数

LTI 系统输入$x[n] = {z_0}^n$

输出$y[n] = H(z_0){z_0}^n$

7 连续时间 LTI 系统分析

7.1 系统函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}[h(t)]$$

7.2 频率响应

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

幅频特性：$|H(j\omega)|$

相频特性：$\angle H(j\omega)$

7.3 无失真传输条件

时域$y(t) = Kx(t - t_d)$

频域$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$

7.4 群时延与相时延

群时延（包络时延）：$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

$(\theta(\omega) = \angle H(j\omega))$

相时延（载波时延）：$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$

线性相位时：$\tau_g = \tau_p = t_d$

7.5 部分分式展开

对于 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$，若极点

p_i 为单极点：$H(s) = \sum_i \frac{r_i}{s - p_i}$,

$r_i = [(s-p_i)H(s)]_{s=p_i}$

8 系统连接

1. 串联：$H(s) = H_1(s)H_2(s)$

2. 并联：$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

3. 反馈：$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$

(+ 负反馈，-正反馈）

9 拉普拉斯与 z 变换类比

9.1 稳定性对应

s 变换（连续）	z 变换（离散）
稳定：$\mathrm{Re}(s) < 0$	$|z| < 1$
临界稳定：虚轴	单位圆
不稳定：$\mathrm{Re}(s) > 0$	$|z| > 1$

9.2 映射关系

$z = e^{sT}$ 或 $s = \frac{1}{T}\ln z$

s左半平面 $\leftrightarrow$ z单位圆内

s虚轴 $\leftrightarrow$ z单位圆

s右半平面 $\leftrightarrow$ z单位圆外

主频带：$-\pi/T < \omega < \pi/T$

10 采样理论

10.1 冲激串采样

采样信号：$x_p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$

$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$,

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

（频谱周期延拓，周期为ω_s）

10.2 奈奎斯特采样定理

$x(t)$ 带限于$\omega_M(X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M)$

则采样频率要求：$\omega_s \geq 2\omega_M$(奈奎斯特率）

10.3 信号恢复

1. 理想低通滤波器：

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}, \quad \omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

2. 零阶保持（ZOH）：

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{rect}\left(\frac{t - nT - T/2}{T}\right)$$

频域：$X_0(j\omega) = H_0(j\omega)X_p(j\omega)$，其中$H_0(j\omega) = T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\omega T/2}$

3. 线性内插：

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{tri}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

频域：$X_1(j\omega) = H_1(j\omega)X_p(j\omega)$，其中$H_1(j\omega) = T\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

10.4 离散时间处理连续信号流程

1. C/D 转换：$x[n] = x_c(nT)$，频域关系：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

2. 离散处理：$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$，等效连续频率$\Omega = \omega T$

3. D/C 转换：

理想重建：$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$

零阶保持：$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{rect}\left(\frac{t - nT - T/2}{T}\right)$

4. 等效连续系统：$H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\Omega/T})(|\Omega| < \pi/T)$

10.5 混叠现象

产生：$\omega_s < 2\omega_M$ 时，频谱重叠，高频成分"

解决：预滤波（抗混叠滤波器）

11 注意事项

1. 看清题目（单位冲激/阶跃响应等）

2. 注意隐含的因果性和稳定性条件

3. 拉普拉斯变换与 z 变换需明确收敛域