

1 卷积与奇异函数

1.1 定义

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

1.2 重要性质

$$1.\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

1.若 $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$, 则

$$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$$

$$2.Erect\left(\frac{t}{\tau}\right) \text{ 自卷积} = E^2\tau\text{tri}\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

$$3.\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$$

$$4.u(t-t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

$$5.\delta'(t)x(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

$$6.\delta'(t-t_0) * x(t) = -x'(t_0)$$

2 傅里叶级数

连续周期信号: $f(t) = f(t+T)$,

基波角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

2.1 定义

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中傅里叶系数:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

2.2 核心关系与性质

1. 系数关系 ($f(t)$ 为实信号):

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = c_n^*$$

2. 线性性: $af(t) + bg(t) \leftrightarrow ac_n + bd_n$

3. 时移性: $f(t-t_0) \leftrightarrow c_n e^{-jn\omega_0 t_0}$

4. 共轭对称性: $f(t)$ 实 $\Rightarrow c_{-n} = c_n^*$

5. 帕塞瓦尔定理:

$$\frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

3 傅里叶变换

3.1 定义

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

3.2 重要性质

1. 线性: $af(t) + bg(t)$

$$\rightarrow aF(j\omega) + bG(j\omega)$$

2. 时移: $f(t-t_0) \rightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

3. 频移: $f(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow F(j(\omega-\omega_0))$

4. 频域扩展: $f(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

5. 对偶性: $F(t) \rightarrow 2\pi f(-j\omega)$

6. 时域微分: $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \rightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

7. 频域微分: $t^n f(t) \rightarrow j^n \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$

8. 时域积分:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \rightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

9. 时域卷积:

$$f(t) * g(t) \rightarrow F(j\omega)G(j\omega)$$

10. 频域卷积:

$$f(t)g(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * G(j\omega)$$

11. 帕塞瓦尔定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

12. 共轭对称性:

$$f(t) = \text{Re}\{f(t)\} \Rightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$$

$f(t)$ 实偶 $\Rightarrow F(j\omega)$ 实偶

$f(t)$ 实奇 $\Rightarrow F(j\omega)$ 纯虚奇

$f(t)$ 虚偶 $\Rightarrow F(j\omega)$ 虚偶

$f(t)$ 虚奇 $\Rightarrow F(j\omega)$ 实奇

3.3 奇偶分解

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \Leftrightarrow$$

$$F_e(\omega) = \text{Re}\{F(\omega)\}$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \Leftrightarrow$$

$$F_o(\omega) = j\text{Im}\{F(\omega)\}$$

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$$

$$F(\omega) = F_e(\omega) + F_o(\omega)$$

3.4 常见傅里叶变换对

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \quad (\text{Re}(a) > 0)$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2} \quad (\text{Re}(a) > 0)$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (\text{Re}(a) > 0)$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \cdot \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

3.5 周期信号的傅里叶变换

$$\text{若 } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\text{则 } F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\text{若 } f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t-kT)$$

$$\text{则 } F(\omega) = F_0(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\text{其中 } c_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$

4 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

4.1 定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

4.2 主要性质

1. 线性: $ax[n] + by[n] \rightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$

2. 时移: $x[n-n_0] \rightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

3. 频移: $e^{j\omega_0 n} x[n] \rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

4. 周期性: $X(e^{j(\omega+2\pi)}) \rightarrow X(e^{j\omega})$

5. 共轭对称: 若 $x[n]$ 实

, 则 $X(e^{-j\omega}) \rightarrow X^*(e^{j\omega})$

6. 频域微分: $nx[n] \rightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

7. 时域扩展:

$$x_k[n] \rightarrow \begin{cases} x[n/k] & k|n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{则 } X_k(e^{j\omega}) \rightarrow X(e^{jk\omega})$$

8. 卷积: $x[n] * y[n] \rightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

9. 调制: $x[n]y[n] \rightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$

4.3 常见 DTFT 变换对

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad (|a| < 1)$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\text{rect}_N[n] \leftrightarrow \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

5 拉普拉斯变换 (双边)

5.1 定义

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

5.2 主要性质

1. 线性: $af(t) + bg(t) \rightarrow$

$aF(s) + bG(s)$, 至少 $R_1 \cap R_2$

2. 时移: $f(t-t_0) \rightarrow e^{-st_0} F(s)$, R

3. 频移: $e^{-at} f(t) \rightarrow F(s+a)$, $\text{Re}(s+a) \in R$

4. 尺度变换: $f(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$, $\frac{s}{a} \in R$

5. 时域微分: $f'(t) \rightarrow sF(s)$, 至少 R

6. s 域微分: $tf(t) \rightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$, R

7. 积分: $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \rightarrow \frac{F(s)}{s}$

, 至少 $R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$

8. 卷积: $f(t) * g(t) \rightarrow F(s)G(s)$ 至少 $R_1 \cap R_2$

9. 初值: $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ (因果信号)

10. 终值: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

(极点在左半平面或原点)

5.3 常见拉普拉斯变换对

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (\text{全 } s \text{ 平面})$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

$$-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\text{Re}(s) < 0)$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (\text{Re}(s) > -a)$$

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (\text{Re}(s) < -a)$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad (\text{Re}(s) > -a)$$

$$-te^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad (\text{Re}(s) < -a)$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{s^2 - a^2} \quad (-a < \text{Re}(s) < a)$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

6 z 变换

6.1 定义

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

6.2 主要性质

1. 线性: $ax[n] + by[n] =$

$aX(z) + bY(z)$, 至少 $R_1 \cap R_2$

2. 时移: $x[n - n_0] = z^{-n_0} X(z)$
, R (可能除去 $z = 0$ 或 $z = \infty$)

3. 尺度变换: $a^n x[n] = X\left(\frac{z}{a}\right)$, $|z/a| \in R$

4. z 域微分: $nx[n] = -z \frac{dX(z)}{dz}$, R

5. 时域卷积: $x[n] * y[n] = X(z)Y(z)$
, 至少 $R_1 \cap R_2$

6. 差分性质: $x[n] - x[n - 1] = (1 - z^{-1})X(z)$, 至少 $R \cap \{z \neq 0\}$

7. 累加性质: $\sum_{k=-\infty}^n x[k] = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$
, 至少 $R \cap \{|z| > 1\}$

8. 初值: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ (因果序列)

9. 终值: $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$
(极点在单位圆内或 $z = 1$)

10. 实信号的 s 变换的零极点共轭出现

6.3 常见 z 变换对

$\delta[n] \leftrightarrow 1$, 全平面

$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - 1}, |z| > 1$

$-u[-n - 1] \leftrightarrow \frac{z}{z - 1}, |z| < 1$

$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - a} (|z| > |a|)$

$-a^n u[-n - 1] \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, |z| < |a|$

$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az}{(z - a)^2}, |z| > |a|$

$-na^n u[-n - 1] \leftrightarrow \frac{az}{(z - a)^2}, |z| < |a|$

$\cos(\omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$

$\sin(\omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$

7 连续时间 LTI 系统分析

7.1 系统函数

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}[h(t)]$

7.2 稳定性判据

1. 稳定: 所有极点在左半平面

2. 临界稳定: 极点在虚轴上

3. 不稳定: 至少一个极点在右半平面

7.3 频率响应

$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$

幅频特性: $|H(j\omega)|$

相频特性: $\angle H(j\omega)$

7.4 无失真传输条件

时域 $y(t) = Kx(t - t_d)$

频域 $H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$

7.5 群时延与相时延

群时延 (包络时延): $\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$
($\theta(\omega) = \angle H(j\omega)$)

相时延 (载波时延): $\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$

线性相位时: $\tau_g = \tau_p = t_d$

7.6 部分分式展开

对于 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, 若极点 p_i 为单极点:

$H(s) = \sum_i \frac{r_i}{s - p_i}$,

$r_i = [(s - p_i)H(s)]_{s=p_i}$

8 离散时间 LTI 系统分析

8.1 系统函数

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}[h[n]]$

8.2 稳定性判据

1. 稳定: 所有极点在单位圆内

2. 临界稳定: 极点在单位圆上

3. 不稳定: 至少一个极点在单位圆外

8.3 频率响应

$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$

8.4 差分方程与系统函数关系

差分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

系统函数:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

9 因果性与稳定性

9.1 连续系统 (s 域)

1. 因果性: $H(s)$ 是真有理函数
(分子次数 \leq 分母次数), ROC 为 $\text{Re}(s) > \sigma_0$

2. 稳定性: ROC 包含虚轴

3. 因果稳定: ROC 为 $\text{Re}(s) > \sigma_0$
且 $\sigma_0 < 0$, 所有极点 $\text{Re}(p) < 0$

9.2 离散系统 (z 域)

1. 因果性: ROC 为 $|z| > r$ (某圆外)

2. 稳定性: ROC 包含单位圆 ($|z| = 1$)

3. 因果稳定: ROC 为 $|z| > r$ 且 $r < 1$
所有极点 $|p| < 1$

10 系统连接

1. 串联: $H(s) = H_1(s)H_2(s)$

2. 并联: $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

3. 反馈: $H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$
(+ 负反馈, -正反馈)

11 拉普拉斯与 z 变换类比

11.1 稳定性对应

s 变换 (连续) z 变换 (离散)

稳定: $\text{Re}(s) < 0$ $|z| < 1$

临界稳定: 虚轴 单位圆

不稳定: $\text{Re}(s) > 0$ $|z| > 1$

11.2 映射关系

$z = e^{sT}$ 或 $s = \frac{1}{T} \ln z$

s 左半平面 $\leftrightarrow z$ 单位圆内

s 虚轴 $\leftrightarrow z$ 单位圆

s 右半平面 $\leftrightarrow z$ 单位圆外

主频带: $-\pi/T < \omega < \pi/T$

12 采样理论

12.1 冲激串采样

采样信号: $x_p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$,

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

(频谱周期延拓, 周期为 ω_s)

12.2 奈奎斯特采样定理

$x(t)$ 带限于 ω_M ($X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$)

则采样频率要求: $\omega_s \geq 2\omega_M$ (奈奎斯特率)

12.3 信号恢复

1. 理想低通滤波器:

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}, \quad \omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

2. 零阶保持 (ZOH):

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{rect}\left(\frac{t - nT - T/2}{T}\right)$$

频域: $X_0(j\omega) = H_0(j\omega)X_p(j\omega)$, 其中 $H_0(j\omega) = T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega T/2}$

3. 线性内插:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{tri}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

频域: $X_1(j\omega) = H_1(j\omega)X_p(j\omega)$, 其中 $H_1(j\omega) = T \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

12.4 离散时间处理连续信号流程

1. C/D 转换: $x[n] = x_c(nT)$, 频域关系:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

2. 离散处理: $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$, 等效连续频率 $\Omega = \omega T$

3. D/C 转换:

理想重建: $y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$

零阶保持: $y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \text{rect}\left(\frac{t - nT - T/2}{T}\right)$

4. 等效连续系统: $H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\Omega/T})(|\Omega| < \pi/T)$

12.5 混叠现象

产生: $\omega_s < 2\omega_M$ 时, 频谱重叠, 高频成分”

解决: 预滤波 (抗混叠滤波器)

13 注意事项

1. 看清题目 (单位冲激/阶跃响应等)

2. 注意隐含的因果性和稳定性条件

3. 拉普拉斯变换与 z 变换需明确收敛域