1 卷积与奇异函数

1.1 定义

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

1.2 重要性质

$1.\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$2.$若$x_1(t) * x_2(t) = y(t)$, 则

$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$

$3.E\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$自卷积$= E^2\tau\text{tri}\left(\frac{t}{2\tau}\right)$

$4.\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$

$5.u(t-t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$

$6.\delta'(t)x(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$

$7.\delta'(t-t_0) * x(t) = -x'(t_0)$

2 傅里叶级数

$f(t) = f(t+T)$，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

2.1 定义

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

2.2 核心关系与性质

1. 系数关系（$f(t)$ 为实信号）:

$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = c_n^*$

2. 线性性：$af(t) + bg(t) \leftrightarrow ac_n + bd_n$

3. 时移性：$f(t-t_0) \leftrightarrow c_n e^{-jn\omega_0 t_0}$

4. 共轭对称性：$f(t)$ 实 $\Rightarrow c_{-n} = c_n^*$

5. 帕塞瓦尔定理:

$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

3 连续时间傅里叶变换

3.1 定义

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

3.2 重要性质

1. 线性：$af(t) + bg(t)$

$\to aF(j\omega) + bG(j\omega)$

2. 时移：$f(t-t_0) \to F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

3. 频移：$f(t)e^{j\omega_0 t} \to F(j(\omega-\omega_0))$

4. 频域扩展：$f(at) \to \frac{1}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

5. 对偶性：$F(t) \to 2\pi f(-j\omega)$

6. 时域微分：$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \to (j\omega)^n F(j\omega)$

7. 频域微分：$t^n f(t) \to j^n \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$

8. 时域积分:

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \to \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

9. 卷积：$f(t) * g(t) \to F(j\omega)G(j\omega)$

10. 乘积：$f(t)g(t) \to \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * G(j\omega)$

11. 帕塞瓦尔定理:

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

12. 共轭对称性:

$f(t) = \text{Re}\{f(t)\} \Rightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

$f(t)$实偶 $\Rightarrow F(j\omega)$实偶

$f(t)$实奇 $\Rightarrow F(j\omega)$纯虚奇

$f(t)$虚偶 $\Rightarrow F(j\omega)$虚偶

$f(t)$虚奇 $\Rightarrow F(j\omega)$实奇

3.3 奇偶分解

$f_e(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} \Leftrightarrow$

$F_e(j\omega) = \text{Re}\{F(j\omega)\}$

$f_o(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2} \Leftrightarrow$

$F_o(j\omega) = j\text{Im}\{F(j\omega)\}$

$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$

$F(j\omega) = F_e(j\omega) + F_o(j\omega)$

3.4 常见傅里叶变换对

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$

$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \quad (Re(a) > 0)$

$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2} \quad (Re(a) > 0)$

$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad (Re(a) > 0)$

$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$

$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$\text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \cdot \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0)$

3.5 周期信号的傅里叶变换

若$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

则$F(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(\omega-n\omega_0)$

若$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t-kT)$

则$F(\omega) = F_0(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-n\omega_0)$

其中$c_n = \frac{1}{T}F_0(n\omega_0)$

4 离散时间傅里叶变换（DTFT）

4.1 定义

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

4.2 主要性质

1. 线性：$ax[n] + by[n] \to aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$

2. 时移：$x[n-n_0] \to e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

3. 频移：$e^{j\omega_0 n}x[n] \to X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

4. 周期性：$X(e^{j(\omega+2\pi)}) \to X(e^{j\omega})$

5. 共轭对称：若$x[n]$ 实

，则$X(e^{-j\omega}) \to X^*(e^{j\omega})$

6. 频域微分：$nx[n] \to \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

7. 时域扩展:

$x_k[n] \to \begin{cases} x[n/k] & k|n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

则$X_k(e^{j\omega}) \to X(e^{jk\omega})$

8. 卷积：$x[n] * y[n] \to X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

9. 调制：$x[n]y[n] \to \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$

10. 差分：$x[n] - x[n-1] \to$

$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

11. 累加：$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \to$

$\frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(1)\delta(\omega)$

4.3 常见 DTFT 变换对

$\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$

$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad (|a| < 1)$

$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-2\pi k)$

$\text{rect}_{2N}[n] \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\omega/2)}$

$\frac{\sin(Wn)}{\pi n}, 0 < W < \pi$

$\leftrightarrow rect_{2W}[\omega]$, 且以 2π 为周期

$\cos[\omega_0 n] \leftrightarrow$

$\pi\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]$

$\sin[\omega_0 n] \leftrightarrow$

$\frac{\pi}{j}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0-2\pi k) - \delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]$

5 拉普拉斯变换（双边）

5.1 定义

$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega$

5.2 主要性质

1. 线性：$af(t) + bg(t) \to$

$aF(s) + bG(s)$，至少$R_1 \cap R_2$

2. 时移：$f(t-t_0) \to e^{-st_0}F(s)$，R

3. 频移：$e^{-at}f(t) \to F(s+a)$

，$\text{Re}(s+a) \in R$

4. 尺度变换：$f(at) \to \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$，$\frac{s}{a} \in R$

5. 时域微分：$f'(t) \to sF(s)$，至少R

6. s 域微分：$tf(t) \to -\frac{dF(s)}{ds}$，$R$

7. 积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \to \frac{F(s)}{s}$

，至少$R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$

8. 卷积:$f(t) * g(t) \to F(s)G(s)$至少$R_1 \cap R_2$

9. 初值：$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

10. 终值：$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

（因果且 $t = 0$ 时不包含奇异函数）

5.3 常见拉普拉斯变换对

$\delta(t) \leftrightarrow 1$, 全平面

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \text{Re}(s) > 0$

$-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \text{Re}(s) < 0$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \text{Re}(s) > -a$

$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \text{Re}(s) < -a$

$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}, \text{Re}(s) > -a$

$-te^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}, \text{Re}(s) < -a$

$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{s^2-a^2}, -a<\mathrm{Re}(s)<a$

$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$,$\mathrm{Re}(s)>0$

$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

,$\mathrm{Re}(s)>-a$

$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

,$\mathrm{Re}(s)>-a$

5.4 因果性与稳定性

1. 因果性：$H(s)$ 是真有理函数（分子次数 $\leq$ 分母次数），ROC 为 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$

2. 稳定性：ROC 包含虚轴

3. 因果稳定：ROC 为$\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$ 且$\sigma_0<0$, 所有极点$\mathrm{Re}(p)<0$

5.5 单边性质

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt} \to s\mathcal{X}(s)-x(0^-)$

5.6 本征函数

LTI 系统输入$x(t)=e^{s_0 t}$

输出$y(t)=H(s_0)e^{s_0 t}$

6 z 变换

6.1 定义

$X(z)=\mathcal{Z}[x[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$

6.2 主要性质

1. 线性：$ax[n]+by[n]=aX(z)+bY(z)$，至少$R_1\cap R_2$

2. 时移：$x[n-n_0]=z^{-n_0}X(z)$，R(可能除去$z=0$ 或$z=\infty$)

3. 尺度变换：$a^n x[n]=X\left(\frac{z}{a}\right)$，$|z/a|\in R$

4. z 域微分：$nx[n]=-z\frac{dX(z)}{dz}$，R

5. 时域卷积：$x[n]*y[n]=X(z)Y(z)$，至少$R_1\cap R_2$

6. 差分性质：$x[n]-x[n-1]=(1-z^{-1})X(z)$，至少$R\cap\{z\neq 0\}$

7. 累加性质：$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$，至少$R\cap\{|z|>1\}$

8. 初值：$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$(因果信号)

9. 终值：$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$（因果且 $x(\infty)$ 存在且有限）

6.3 常见 z 变换对

$\delta[n]\leftrightarrow 1$, 全平面

$u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$,$|z|>1$

$-u[-n-1]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$,$|z|<1$

$a^n u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$,$|z|>|a|$

$-a^n u[-n-1]\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$,$|z|<|a|$

$na^n u[n]\leftrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$,$|z|>|a|$

$-na^n u[-n-1]\leftrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$,$|z|<|a|$

$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$

$\leftrightarrow\frac{1-r\cos(\omega)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega)z^{-1}+r^2z^{-2}}$,$|z|>|r|$

$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$

$\leftrightarrow\frac{r\sin(\omega)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega)z^{-1}+r^2z^{-2}}$,$|z|>|r|$

6.4 因果性与稳定性

1. 因果性：ROC 为$|z|>r$(某圆外)

2. 稳定性：ROC 包含单位圆（$|z|=1$）

3. 因果稳定：ROC 为$|z|>r$ 且$r<1$

所有极点$|p|<1$

6.5 单边性质

时间延迟$x[n-1]\to z^{-1}X(z)+x[-1]$

时移$x[n+1]\to zX(z)-zx[0]$

6.6 本征函数

LTI 系统输入$x[n]=z_0{}^n$

输出$y[n]=H(z_0)z_0{}^n$

7 连续时间 LTI 系统分析

7.1 系统函数

$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\mathcal{L}[h(t)]$

7.2 频率响应

$H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}$

幅频特性：$|H(j\omega)|$

相频特性：$\angle H(j\omega)$

7.3 无失真传输条件

时域$y(t)=Kx(t-t_d)$

频域$H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$

7.4 群时延与相时延

群时延（包络时延）：$\tau_g(\omega)=-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

相时延（载波时延）：$\tau_p(\omega)=-\frac{\theta(\omega)}{\omega}$

线性相位时：$\tau_g=\tau_p=t_d$

7.5 部分分式展开

对于 $H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$，若极点

p_i 为单极点：$H(s)=\sum_i\frac{r_i}{s-p_i}$,

$r_i=[(s-p_i)H(s)]_{s=p_i}$

7.6 系统连接

1. 串联：$H(s)=H_1(s)H_2(s)$

2. 并联：$H(s)=H_1(s)+H_2(s)$

3. 反馈：$H(s)=\frac{H_1(s)}{1\pm H_1(s)H_2(s)}$

(+ 负反馈，-正反馈)

8 拉普拉斯与 z 变换类比

8.1 稳定性对应

	s 变换	z 变换
稳定	$\mathrm{Re}(s)<0$	$\lvert z\rvert<1$
临界稳定	虚轴	单位圆
不稳定	$\mathrm{Re}(s)>0$	$\lvert z\rvert>1$

8.2 映射关系

$z=e^{sT}$ 或 $s=\frac{1}{T}\ln z$

s左半平面 $\leftrightarrow$ z单位圆内

s虚轴 $\leftrightarrow$ z单位圆

s右半平面 $\leftrightarrow$ z单位圆外

主频带：$-\pi/T<\omega<\pi/T$

9 采样理论

9.1 冲激串采样

采样信号：$x_p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s)),\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

（频谱周期延拓，周期为ω_s）

9.2 奈奎斯特采样定理

$x(t)$ 带限于$\omega_M(X(j\omega)=0,|\omega|>\omega_M)$

采样频率要求$\omega_s\geq 2\omega_M$(奈奎斯特率)

9.3 信号恢复

1. 理想低通滤波器：

$H_r(j\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|\geq\omega_c\end{cases}$,

$\omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$

2. 零阶保持（ZOH）：

$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT-T/2}{T}\right)$

频域：$X_0(j\omega)=H_0(j\omega)X_p(j\omega)$

，其中$H_0(j\omega)=\frac{2\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}e^{-j\omega T/2}$

3. 线性内插：

$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{tri}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$

频域：$X_1(j\omega)=H_1(j\omega)X_p(j\omega)$

，其中$H_1(j\omega)=\frac{1}{T}\left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}\right)^2$

9.4 离散时间处理连续信号流程

1. C/D 转换：$x[n]=x_c(nT)$，频域关系

$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$

2. 离散处理：$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

，等效连续频率$\Omega=\omega T$

3. D/C 转换：

理想重建$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$

零阶保持$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT-T/2}{T}\right)$

4. 等效连续系统：$H_{eff}(j\Omega)=H(e^{j\Omega/T})(|\Omega|<\pi/T)$

10 离散时间采样

10.1 抽取（Decimation）

时域：$y[n]=x[Mn]$

频域：$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right)$

频谱周期延拓并压缩，采样率降低 M 倍

抗混叠：先用$\omega_c=\pi/M$ 低通滤波

10.2 零值插入（Zero-padding）

时域：$y[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{L}\right], & n=kL\\ 0, & 其他\end{cases}$

频域：$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega L})$

频谱压缩，产生$L-1$ 个镜像

需低通滤波去除镜像（$\omega_c=\pi/L$）

10.3 内插（Interpolation）

时域：$y[n]=x_L[n]*h[n]$

理想低通：$h[n]=\frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}$

频域：$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega L})\cdot H(e^{j\omega})$

采样率提高 L 倍，插入 $L-1$ 个样本

10.4 离散冲击串采样

采样信号：$x_p[n]=x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$

$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{N}}\right)$

频谱周期延拓，周期为$2\pi/N$

11 注意事项

1. 看清题目（单位冲激/阶跃响应等）

2. 注意隐含的因果性和稳定性条件

3. 拉普拉斯变换与 z 变换需明确收敛域