一些有用的数学公式与结论

质数

1. 算术基本定理：$N = {P_1}^{k_1} \times {P_2}^{k_2} \times {P_3}^{k_3} \cdots \times {P_n}^{k_n}$ ， $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n$
2. 一个数N约数个数：$(k_1 + 1) \times (k_2 + 1) \times (k_3 + 1) \times \cdots \times (k_n + 1)$，k是算术基本定理中的k
3. 一个数N的所有正因数的和：$({P_1}^0 + {P_1}^1 + {P_1}^2 \cdots + {P_1}^{k_1}) \times ({P_2}^0 + {P_2}^1 + {P_2}^2 \cdots + {P_2}^{k_2}) \times \cdots \times ({P_n}^0 + {P_n}^1 + {P_n}^2 \cdots + {P_n}^{k_n})$
4. 费马小定理：$a^{p-1} \equiv 1(modp)$，p是素数

gcd

1. $gcd(a, b) = gcd(b, a\%b)$
2. $gcd(a, b) = gcd(a, b - a)$
3. 由算术基本定理：
    1. 假设$N = {P_1}^{a_1} \times {P_2}^{a_2} \times {P_3}^{a_3} \cdots \times {P_n}^{a_n}$
    2. 而$M = {P_1}^{b_1} \times {P_2}^{b_2} \times {P_3}^{b_3} \cdots \times {P_n}^{b_n}$
    3. 则$gcd(N, M) = P_1^{min(a_1,b_1)} \times P_2^{min(a_2,b_2)} \times P_3^{min(a_3,b_3)} \times \cdots \times P_n^{min(a_n,b_n)}$
    4. $lcm(N, M) = P_1^{max(a_1,b_1)} \times P_2^{max(a_2,b_2)} \times P_3^{max(a_3,b_3)} \times \cdots \times P_n^{max(a_n,b_n)}$
4. 斐波那契数列$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2 \ldots$，则$gcd(f(a), f(b)) = f(gcd(a, b))$
5. 由第2条性质可推广：$gcd(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = gcd(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2 \ldots a_n - a_{n-1})$
6. gcd具区间单调性：对于区间$l_3 \le l_2 \le l_1 \le r_1 \le r_2 \le r_3$ $gcd(l_3, r_3) \le gcd(l_2, r_2) \le gcd(l_1, r_1)$
7. gcd具有区间反向包含性质：对于$gcd(l_1, r_1)$，$gcd(l_2, r_2)$，$l_1 \le l_2 \le r_2 \le r_1$则$gcd(l_1, r_1)$一定是$gcd(l_2, r_2)$的因子

卡特兰

1. 公式一：$f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \times f(n - i - 1)$
2. 公式二：$f(n) = \frac{f(n-1) \times (4n-2)}{n+1}$
3. 公式三：$f(n) = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$
4. 公式四：$f(n) = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$
5. 变形：给你n个1和m个0组合$n \ge m$，求一个组合满足前k个中1的个数不少于0的个数的方案数：$C_{n+m}^n - C_{n+m}^{n-1}$

组合数

1. 通项公式：$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)}{m!}$
2. 递推公式：$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{n-m+1}{m} \times C_n^{m-1}$
3. 有重复元素的全排列：有k个元素，取其中第i个元素有n_i个，全排列的个数：$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$，其中$n = \sum n_i$
4. 可重复选择的组合：有n个不同元素，每个元素可以选多次，一共选k个元素，方案数：C_{k+n-1}^{n-1}
5. 性质1：$C_{n+m+1}^m = \sum_{i=0}^m C_{n+i}^i$
6. 性质2：$C_n^m \times C_m^i = C_n^i \times C_{n-i}^{m-i}$
7. 性质3：$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$
8. 性质4：$\sum_{i=0}^n C_n^i \times x^i = (x + 1)^n$
9. 性质5：$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots \pm C_n^n = 0$
10. 性质6：$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$
11. 性质7：$C_{n+m}^i = C_n^0 \times C_m^i + C_n^1 \times C_m^{i-1} \times \cdots \times C_n^i \times C_m^0$
12. 性质8：$m \times C_n^m = n \times C_{n-1}^{m-1}$
13. 性质9：$\sum_{i=1}^n C_n^i \times i = n \times 2^{n-1}$
14. 性质10：$\sum_{i=1}^n C_n^i \times i^2 = n \times (n + 1) \times 2^{n-2}$
15. 性质11：$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$

斯特林数

欧拉函数

概率

1. 假设有一个整数随机变量X，则有$p(X = k) = p(X \ge k) - p(X > k)$

期望

1. 期望的线性：$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
2. 同理，如果$X_1 + X_2 = X$，则$E(X) = E(X_1) + E(X_2)$
3. 假如X是一个随机正整数变量，则$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \ge i)$