含有近似思想的几个基本物理模型

于仲源
（首都师范大学附属中学　北京 100048）

（收稿日期:2012－04－20）

不少物理竞赛题目中都含有近似思想，在求解这些题目的过程中往往将小角三角函数值近似成弧度值或是将其近似成两边的比例；运用二项式定理展开某些式子而后忽略高阶小量. 然而找到合适的近似的对象并非易事，一旦找得不合适，解题过程往往会变得复杂甚至根本解不出题目. 由此可见，找到合适的近似的对象在解这一类问题中至关重要.

凡事皆有章可循，要想找到合适的近似的对象，不妨概括出几个含有近似思想的基本物理模型. 只要可将其归入我们熟知的模型，即便是复杂的题目也会迎刃而解.

模型 1：光线近轴入射时视深与真实深度之间关系的模型（界面为直线）

如图 1 空气和水的界面为 AB，水下 H 处有一物体. 已知水的折射率为 n，若垂直向下看时，人眼感觉到的深度（视深）为多少.

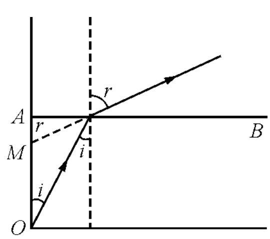

图 1

解析：此为经典的近轴折射模型，如图 1 逆向入射人眼的光线，再由三角关系可得

$$\frac{h}{H}=\frac{AM}{OA}=\frac{\tan i}{\tan r}$$

其中 H 为水深，h 为视深，i 为光线从水下折射入空气时的入射角，r 为折射角.

由于光线是近轴光线，故上式可近似变为

$$\frac{h}{H}=\frac{AM}{OA}=\frac{\tan i}{\tan r}\approx\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{1}{n}$$

则可得到视深与真实深度的关系

$$h=\frac{H}{n}$$

【例 1】一只厚底玻璃缸，底厚 6 cm，内盛 4 cm 深的水. 已知水和玻璃的折射率分别为 1.33 和 1.8. 则垂直向下看时缸底下表面离水面距离为多少.

解析：套用上一模型，则得缸底在水中的视深为

$$h_1=\frac{H_{玻璃}}{n_1}=\frac{1.33}{1.8}\times 6\ \text{cm}=4.43\ \text{cm}$$

其中 n_1 为玻璃对水的折射率. 再次套用该模型，得 A 点（处于玻璃中且离玻璃顶端距离为 h_1）在空气中视深为

$$h_2=\frac{H_{水}}{n_2}+h_1=\left(\frac{4}{1.33}+4.43\right)\ \text{cm}=7.43\ \text{cm}$$

此即为所求. 可见如此两次应用模型即可得到答案.

模型 2：光线近轴入射时视深与真实深度之间关系的模型（界面为球面）

今有一直径为 R 的实心玻璃球（只画一部分），球内 A 处有一小气泡，且小气泡离球面最小距离为 H，问当人眼顺着气泡和球心连线方向看时，气泡似距球面多少?

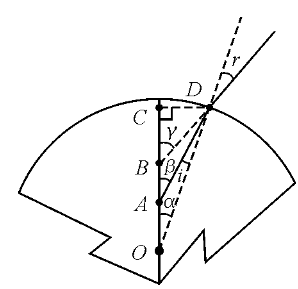

图 2

解析：如图 2 所示，其中 i 为光线从玻璃中折射入空气时的入射角，r 为折射角. 则有 $i=\beta-\alpha$，$r=\gamma-\alpha$.

由折射定律，且折射为近轴折射：

$$\frac{1}{n}=\frac{\sin i}{\sin r}\approx\frac{i}{r}=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$$

由图中几何关系得：

$$\sin\alpha=\frac{CD}{OD},\sin\beta=\frac{CD}{AD},\sin\gamma=\frac{CD}{BD}$$

α、β、γ 都很小，故可认为

$$\alpha\approx\sin\alpha,\beta\approx\sin\beta,\gamma\approx\sin\gamma$$

且有 $AD\approx AC$，$BD\approx BC$

故联立以上各式有 $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\dfrac{CD}{AC}-\dfrac{CD}{OD}}{\dfrac{CD}{BC}-\dfrac{CD}{OD}}$，其中 $AC=H$，

$BC = h$，$OD = R$，得

$$h = \frac{RH}{H + n(R - H)}$$

小结：此模型若用解决模型 1 的方法求解，则很难出结论，可见此两模型并不等同. 而在做此类题的过程中，同学们只需判断出题者想要考察的模型，正确应用模型中的结论.

模型 3：质量均匀的圆环形绳旋转模型

如图 3 所示，半径为 R，质量为 m 的圆形绳圈，绳上处处速率相等且为 v. 且绳绕中心轴 O 在光滑水平面上匀速转动. 问绳的张力多大？

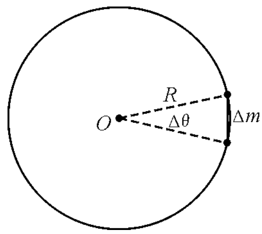

图 3

解析：取质量为 Δm 的绳上一小段 AB 分析如图，由于绳做匀速转动，故有该小段绳子两端所受的张力 T_1 与 T_2 相等，且都等于 T. 且有

$$2T\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta m\frac{v^2}{R}$$

$\Delta\theta$ 很小，即有 $\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$.

利用此近似关系有

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi R}\cdot R\Delta\theta.$$

$$T = \frac{mv^2}{2\pi R}$$

【**例** 2】一列长为 L 的过山车由许多节车厢组成，以某一速度 v_0 在水平轨道上行驶，然后进入半径为 R 的竖直平面内的轨道. 已知 R 比车厢尺寸大的多，且 $L > 2R$. 求过山车在水平轨道上的最小速度 v_0 使其安全通过圆轨道.

解析：设列车单位长度质量为 δ，从初始状态到整个圆轨道都分布有列车车厢过程中，由于忽略摩擦，认为机械能守恒，故有

$$\frac{1}{2}\delta L{v_0}^2 = \frac{1}{2}\delta Lv^2 + 2\pi R^2\delta g$$

为求此刻列车速度 v，取行驶到最顶端的车厢按照上述模型分析：

设此时刻处于顶端的车厢受其左面车厢的拉力为 T，所对圆心角为 $\Delta\theta$，则有

$$T = \delta(v^2 - Rg)$$

而此拉力 T 又可由功能关系式 求得：$T = 2\delta Rg$（在此不作详细解释，因为此非笔者论述的重点）

联立以上各式不难得出答案

$$v_0 = \sqrt{\left(3 + \frac{4\pi R}{L}\right)Rg}.$$

小结：例 1 和例 2 中都是通过直接套用模型来求解的. 然而有些竞赛题目不仅考察模型的直接应用，更有对于模型中所体现的思想的考察请看下一模型.

模型 4：单摆小角度摆动的模型

解析：质量为 m 的小球用长度为 l 的细绳悬挂于天花板 O 点处. 当其摆动一个小角度 θ 时可将 θ 近似为 $\tan\theta$ 且. 再由几何关系可得回复力

$$F = -\frac{mgx}{l}$$

由此可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

【**例** 3】设想有一单摆，小球质量为 m，且其摆长 l 与地球半径 R 相同. 试求其在地球表面小角度摆动的摆动周期.

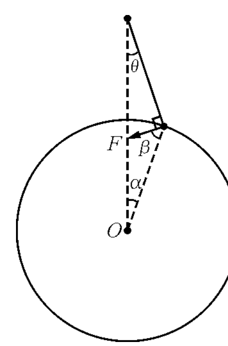

图 4

解析：此摆不同于理想单摆之处是摆球在摆动过程中受到的是方向时刻改变的万有引力. 但是，如果我们对上例中理想单摆模型的理解足够深入，能够灵活运用理想单摆模型中将三角函数值近似成角度的近似方法的话，依然可求得本题的解.

如图设此单摆摆角为 θ 时，m 偏离平衡位置的位移为 Δx，偏离地心的角度为 α 按照理想单摆模型的近似方法有 $\theta \approx \frac{\Delta x}{l}$，$\alpha \approx \frac{\Delta x}{R}$. 由几何关系又有 $\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$，则此时回复力可表示成

$$F = -mg\cos\beta = -mg\sin(\alpha + \theta) \approx$$

$$-mg(\alpha + \theta) \approx -mg\left(\frac{\Delta x}{l} + \frac{\Delta x}{R}\right)$$

再由简谐振动周期公式可得周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lR}{(l + R)g}}$$

由此可见，此类竞赛题目并非全是对于“含有近似思想”的基本物理模型的简单加和式的考察，更有对于近似思想的考察.